常微分方程与复变函数论

郭镇净

第一章 绪论

什么是线性微分方程：形如 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的微分方程，即 y 及 y 的各阶导数都是一次有理整式，即不含 y 及 y 的各阶导数的乘积的微分方程叫：线性微分方程。

第二章 一阶微分方程的初等解法

§ 2.1 变量分离方程

1、形式：$\dfrac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$

做题步骤：① $\varphi(y)\neq 0$ 可将方程改写为：$\dfrac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$，这样对两边积分：$\int\dfrac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c$，得出方程的通解，但 c 要保证积分式有意义 ② $\varphi(y)=0$ 时，求出 $y=y_0$ 也是方程的解

2、$\dfrac{dy}{dx}=P(x)y$ 得 $y=ce^{\int P(x)dx}$ (2.4)

而 $y=0$ 也是方程的解，而若(2.4)允许 c=0，则 y=0 也在(2.4)中，故(2.4)是原方程的通解，其中 c=0。

3、齐次方程：$\dfrac{dy}{dx}=g(\dfrac{y}{x})$ (2.5)

做变量变换 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=ux$，则 $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$，整理后为：$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{g(u)-u}{x}$，即为变量分离方程。同时要注意：将一个方程转化为齐次方程求解时，两个方程是否同解（c 的范围是否相同）

4、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ (2.13)

做题步骤：① $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=k$（常数），通解：$y=kx+c$ (c 为任意常数)

② $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k\neq\dfrac{c_1}{c_2}$，令 $u=a_2x+b_2y$，有 $\dfrac{du}{dx}=a_2+b_2\dfrac{dy}{dx}=a_2+b_2+\dfrac{ku+c_1}{u+c_2}$，为变量分离方程

③ $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，如果没有常数 c_1、c_2，则很容易变成齐次方程做，(体会：) 让分子分母都为零，则为两条曲线 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ (2.14)，两条曲线相交的交点为 (α,β)，而没有那两个常数时方程为都过原点的形式，因此过原点的这两直线可视为原坐标系平移后原直线在新坐标系下的坐标，令 $\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases}$，(2.14) 变为 $\begin{cases}a_1X+b_1Y=0\\a_2X+b_2Y=0\end{cases}$，从而 (2.13) 变为 $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g(\dfrac{Y}{X})$，

§ 2.2 线性微分方程与常数变易法

1、$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ (2.28)

做题步骤：① 考虑 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$，求出它的通解为：$y=ce^{\int P(x)dx}$；② 常数变易变为：$y=c(x)e^{\int P(x)dx}$(2.29)

③ 求微分得：$\frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+c(x)P(x)e^{\int P(x)dx}$ (2.30)，④ 将(2.29)和(2.30)代入(2.28)，得到：

$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx}$，⑤ 积分后得到 $c(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c'$，于是得到方程(2.28)的通解为：

$y=e^{\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c')$

2、伯努利微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$

做题步骤：① 两边同除以 y^n，得到 $y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x)$，② 设 $z=y^{1-n}$，得 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

③ 于是原方程变为：$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$，即为线性微分方程

§ 2.3 恰当微分方程与积分因子

1、恰当方程形式：$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$（M、N 在已知区域上连续且具有一阶连续偏导数）

推理过程：① 若已知此微分方程是恰当方程能推出什么？先设原函数为 $u(x,y)$ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

由条件得：$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 即 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ② 那么反过来若由它俩相等能否推出方程是恰当方程？ 从 $M=\frac{\partial u}{\partial x}$

出发，两边同时求积分：$u=\int Mdx=\int\frac{\partial u}{\partial x}$+c，但 c 若是常数那么？则应为：$u=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int Mdx+\varphi(y)$

③ 对 u 关于 y 求偏导：$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx+\varphi'(y)=N(x,y)$，如何证明等式左边等于右边（方程有意义），即右边也与 x 无关即只与 y 有关？ 对右边关于 x 求偏导 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial M}{\partial y}dx=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$（因为证充分，则 $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$ 为已知）④ 两端积分：$\varphi(y)=\int(N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx)dy$，于是 $u=\int Mdx+\int(N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dy)$

做题步骤：① 先设 u(x,y)，② 证明 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，③ 从 M 出发对方程两端同时求积分得

$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$，④ 对 u 求偏导：$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx+\varphi'(y)=N(x,y)$，⑤ 两边积分得

$\varphi(y)=\int(N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx)dy$，⑥ 得 $u=\int Mdx+\int(N-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx)dy$

常微分方程与差分方程知识点

考试纲要
常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程 微分方程的简单应用
差分与差分方程的概念 差分方程的通解与特解 一阶常系数线性差分方程
考试要求
1、了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念 2、掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法 3、会解二阶常系数齐次线性微分方程 4、了解线性微分方程解的性质及解的结构定理，会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程 5、了解差分与差分方程及其通解与特解等概念 6、了解一阶常系数线性差分方程的求解方法 7、会用微分方程求解简单的经济应用问题
重要知识点
1、微分方程通解中任意常数的个数与微分方程的阶数相同
2、变量可分离微分方程解法
$g(y)dy = f(x)dx \to \int g(y)dy = \int f(x)dx \to G(y) = F(x) + C$
3、齐次微分方程解法
$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x}) \to$ 设 $u = \frac{y}{x} \to \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \to$ 再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u
附：可化为齐次的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\begin{cases} c=c_1=0,\text{可化为齐次微分方程} \\ c\text{或}c_1\neq 0\begin{cases} \begin{matrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{matrix}\neq 0,\text{设}\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases},\text{带入原方程解出}h,k,\text{可化为齐次微分方程} \\ \begin{matrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{matrix}=0,\begin{cases}\text{设}\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1},\text{令}ax+by=v,\\ \text{则可化为}\dfrac{dv}{dx}\text{的变量可分离微分方程}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

4、一阶线性微分方程解法

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\begin{cases}\text{齐次方程通解}:\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0\to y=Ce^{-\int P(x)dx}\\ \text{特解（常数变异法）}:y=u(x)e^{-\int P(x)dx},\text{代入原方程解出}u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\end{cases}$$

$$\to y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

个人总结：对于$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，首先计算$u=e^{-\int P(x)dx}$，通解为$y=u\left(\int\dfrac{Q(x)}{u}dx+C\right)$

5、线性微分方程解的性质及解的结构定理

定理 1：如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的两个解，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$也是该方程的解，其中C_1,C_2是任意常数（**不一定是通解**）

定理 2：如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的两个**线性无关的特解**，那么$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$（C_1,C_2是任意常数）是该方程的通解

定理 3：设$y^*(x)$是二阶非齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的一个特解，$Y(x)$是该方程对应的**齐次方程**的通解，那么$y(x)=Y(x)+y^*(x)$是该二阶非齐次线性方程的通解

定理 4（**叠加原理**）：设齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$的$f(x)$可以分解为两个函数的和，即$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而$y^*{}_1(x)$与$y^*{}_2(x)$分别是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$与$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解，那么$y^*{}_1(x)+y^*{}_2(x)$就是原方程的特解

6、二阶常系数齐次线性微分方程的解法

二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$的求解步骤：

第一步：写出特征方程 $r^2+px+q=0$；第二步：求特征方程的两根 r_1,r_2；

第三步：根据根的情况，按下表写出通解

根的情况	通解
两个不相等实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7、二阶常系数非齐次线性微分方程的解法

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$

待定系数法求特解

（1） $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

特解形式： $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

λ 不是特征方程的根， $k=0$
λ 是特征方程的单根， $k=1$
λ 是特征方程的重根， $k=2$

（2） $f(x)=e^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right)$

特解形式： $y^*=x^ke^{\lambda x}\left(Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x\right)$， $m=\max\{l,n\}$

$\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根， $k=0$
$\lambda+i\omega$ 是特征方程的单根， $k=1$

个人总结：

自由项为多项式 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$， $\lambda=0$

自由项为指数函数 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$， $P_m(x)=1$

自由项为正弦函数 $f(x)=e^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right)$， $\lambda=0,P_l(x)=0,P_n(x)=1$

特解设为 $y^*=x^k\left(a\cos\omega x+b\sin\omega x\right)$

自由项为余弦函数 $f(x)=e^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right)$， $\lambda=0,P_l(x)=1,P_n(x)=0$

特解设为 $y^*=x^k\left(a\cos\omega x+b\sin\omega x\right)$

8、一阶常系数差分方程的概念及一般形式

含有自变量、自变量的未知函数及其差分的方程，称为差分方程。一阶常系数线性差分方程的一般形式为：

$y_{t+1}+ay_t=f(t)$，其中常数 $a\neq 0$。对应的齐次方程为 $y_{t+1}+ay_t=0$

9、一阶常系数差分方程的通解与特解

齐次方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解为 $y_t=C\left(-a\right)^t$，其中 C 是一个任意常数。

若给定初始条件 $y_0=C_0$，则 $y_0=C_0\left(-a\right)^t$ 即为满足该初始条件的特解。

对于非齐次方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$，其通解也是非齐次方程的一个特解 y_t^* 与对应齐次方程通解之和。即：

$y_t=y_t^*+C\left(-a\right)^t$。

10、几种常见情形下非齐次方程特解所具有的形式

$f(t)$ 的形式	方程中系数 a 的取值	特解 y_t^* 的形式
$P_m(t)$ 其中 $P_m(t)$ 是 m 次多项式	$a+1\neq 0$	$Q_m(t)$
	$a+1=0$	$tQ_m(t)$
Mb^t 其中常数 $M\neq 0,b\neq 1$	$a+b\neq 0$	Ab^t
	$a+b=0$	Atb^t
$M\cos\omega t+N\sin\omega t$ 其中，M,N,ω 是常数，且 $0<\omega<\pi,\pi<\omega<2\pi$		$A\cos\omega t+B\sin\omega t$

上表特解中 $Q_m(t)$ 是待定系数的 m 次多项式，A,B 是两个待定系数。

【注】$\omega=\pi$ 或 $\omega=2\pi$ 时，$M\cos\omega t+N\sin\omega t$ 可归结为前两种情况来设定特解形式。

第四章　高阶微分方程

研究对象

高阶微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t) \qquad (4.1)$$

1　基本概念

1）n 阶线性微分方程

在微分方程(4.1)中，若 $f(t)$ 不恒为零时，则称(4.1)为 n 阶线性非齐次微分方程，当 $f(t)\equiv 0$ 时，方程(4.1)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

为（4.1）所对应的 n 阶线性齐次微分方程，其中 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 及 $f(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数。

2）函数的线性相关性和线性无关性

定义在区间 $a\le t\le b$ 上的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$，如果存在不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 使得对所有 $t\in[a,b]$ 恒等式 $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_kx_k(t)\equiv 0$ 成立，则称函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是线性相关的，否则称 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是线性无关的。

3）函数的朗斯基（Wronsky）行列式

定义在区间 $a\le t\le b$ 上的 k 个可微 $k-1$ 次的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 所构成的行列式

$$W(t)=W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]\equiv\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t)\\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t)\end{vmatrix}$$

称为这 k 个函数的朗斯基行列式,有时简记为 $W(t),t\in[a,b]$。

4）线性齐次方程的基本解组

线性齐次方程(4.2)的 n 个线性无关的解称为它的一个基本解组。

5）线性方程的复值解

如果定义在区间$[a,b]$上的实变量的复值函数$x=z(t)$ 满足

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dz(t)}{dt}+a_n(t)z(t)=f(t)$$

则称$x=z(t)$为方程（4.1）的一个复值解。

6）欧拉(Euler) 方程

形如 $x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=0$ 的方程称为欧拉方程，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数。

7）阶常系数齐次线性方程的特征方程与特征根

对于阶常系数线性齐次方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0$ ，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实常数，称下列代数方程

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

为此微分方程的特征方程，特征方程的根称为此微分方程的特征根。

2　基本定理与性质

定理 4.1　（n 阶线性微分方程的解的存在唯一性定理）如果$a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$及$f(t)$都是区间$a\le t\le b$上的连续函数，则对于任意的$t_0\in[a,b]$及任意的$x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n-1)}$，线性方程（4.1）存在唯一解$x=\varphi(t)$，定义于区间$a\le t\le b$上，且满足初始条件：

$$\varphi(t_0)=x_0,\frac{d\varphi(t_0)}{dt}=x_0',\cdots,\frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=x_0^{(n-1)}\qquad。$$

定理4.2　（叠加原理）如果$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$是线性齐次方程（4.2）的$k$个解，则它们的线性组合 $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_kx_k(t)$也是（4.2）的解，这里$C_1,C_2,\cdots,C_k$是任意常数。

定理4.3　若函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性相关，则在$[a,b]$上它们

的朗斯基行列式$W(t)\equiv 0$。

注意： 该定理的逆定理不一定成立， 即若函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在$[a,b]$上的朗斯基行列式为零，它们可能是线性相关的，也有可能是线性无关的。

定理4.4 如果方程(4.2)的解$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性无关，则$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$在这个区间的任何点上都不等于零，即$W(t)\ne 0,\forall t\in[a,b]$。

推论1 方程(4.2)的任意 n 个解$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$的朗斯基行列式满足

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds},$$

这个关系式称为刘维尔（Liouville）公式。

推论2 方程(4.2)的解$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性无关的充分必要条件是$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$恒不为零。

定理4.5 n阶线性齐次方程(4.2)一定存在n个线性无关的解，且任意$n+1$个解都线性相关，即n阶线性齐次方程所有的解构成一个n维线性空间。

定理4.6（线性齐次方程的通解结构） 如果$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$是方程（4.2）的$n$个线性无关的解，则方程（4.2）的通解可表示为$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)$，其中$C_1,C_2,\cdots,C_n$是任意常数，且通解包括方程（4.2）的所有解。

性质4.1 如果$\bar{x}(t)$是方程（4.1）的解，而$x(t)$是方程（4.2）的解，则$\bar{x}(t)+x(t)$ 也是方程（4.1）的解。

性质4.2 方程（4.1）的任意两个解之差必为方程（4.2）的解。

定理7（线性非齐次方程的通解结构） 设$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$为方程（4.2）的基本解组，$\bar{x}(t)$是方程（4.1）的某一解，则方程（4.1）的通解为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)+x(t)$$

其中$C_1,C_2,\cdots,C_n$是任意常数，且通解包括方程（4.1）的所有解。

定理4.8 如果方程（4.2）中所有系数$a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$都是实值函数，而$x(t)=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$是方程的复值解，则$z(t)$的实部$\varphi(t)$，虚部$\psi(t)$和共轭函数$\bar{z}(t)$

都是方程（4.2）的解，其中$\varphi(t)$，$\psi(t)$均为实值函数。

定理4.9 若方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$

有复值解 $x(t)=U(t)+iV(t)$，这里 $a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$，$u(t),v(t)$ 及 $U(t),V(t)$ 都是实函数，那么这个解的实部$U(t)$和虚部$V(t)$分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解。

3 基本解题方法

1）常数变易法

若$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$为方程（4.2）的基本解组，则方程（4.2）的通解为

$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)$。

设$x(t)=C_1(t)x_1(t)+C_2(t)x_2(t)+\cdots+C_n(t)x_n(t)$为（4.1）的解， 式中

$C_i(t)(i=1,\cdots,n)$是待定函数，$C_i'(t)(i=1,\cdots,n)$满足以下代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(t)x_1(t)+C_2'(t)x_2(t)+\cdots+C_n'(t)x_n(t)=0\\ C_1'(t)x_1'(t)+C_2'(t)x_2'(t)+\cdots+C_n'(t)x_n'(t)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t)+C_2'(t)x_2^{(n-2)}(t)+\cdots+C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t)=0\\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t)\end{cases}$$

这个方程组的系数行列式是基本解组$x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$的朗斯基行列式，所以$C_i'(t)(i=1,\cdots,n)$由以上方程组唯一确定，通过求积分可得出$C_i(t)(i=1,\cdots,n)$。这种求解线性非齐次方程解的方法称为常数变易法。

2）常系数线性齐次方程解法

对于阶常系数线性齐次方程

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0 \qquad (4.3)$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实常数。为了求方程(4.3)的通解，只需求出它的基本解组。

方程(4.3)特征方程为

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (4.4)$$

结论 $x(t)=e^{\lambda t}$是方程(4.3)的解的充分必要条件是λ满足$F(\lambda)=0$，即λ是特征根。

a）特征根为单根的情况

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为特征方程（4.4)的$n$个互不相等的实根，则相应的方程（4.3）有如下$n$个解$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$，这$n$个解在区间$-\infty<t<+\infty$上线性无关，从而组成方程的基本解组。方程（4.3）的通解可表示为$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+C_ne^{\lambda_n t}$。

如果特征方程(4.4)有复根，则因方程的系数是实常数，复根将成对共轭出现。

设$\lambda=\alpha\pm i\beta$是方程(4.4)的一对复特征根，则方程（4.3）有下面的两个复值解

$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$，$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$，

它们对应两个线性无关的实值解为$e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t$。

b）特征根有重根的情况

设特征方程（4.4）的根为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，它们的重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_m$，

$$k_1+k_2+\cdots+k_m=n, \qquad k_i\ge 1$$

对应λ_i方程(4.3)恰有k_i个线性无关的解

$$e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},t^2e^{\lambda_i t},\cdots,t^{k_i-1}e^{\lambda_i t},$$

且$e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},t^2e^{\lambda_i t},\cdots,t^{k_i-1}e^{\lambda_i t}\ (i=1,2,\cdots,m)$构成了方程（4.3）的一个基本解组。

3）可化为常系数线性齐次方程的方程---欧拉方程的解法

对于欧拉方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数。

引入自变量代换 $x=e^t$，欧拉方程可化为常系数线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数，它的特征方程为

$$k(k-1)\cdots(k-n-1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0\text{，}$$

此方程也称为欧拉方程的特征方程。

欧拉方程的解法

步骤1　写出欧拉方程的特征方程，并求出特征根；

步骤2　求出基本解组：先求出变换以后方程的基本解组，再由变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln|x|$ 求出原方程的基本解组；

步骤3　写出原方程的通解。

4）常系数线性非齐次方程的解法

$$L[x]\equiv\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t)\qquad(4.5)$$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数，$f(t)$ 为连续函数。

线性非齐次方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身一个特解之和，因此，求解常系数线性非齐次方程的通解的关键是求出它的一个特解。求特解的方法除了以上介绍过的常数变易法外，还有比较系数法和拉普拉斯变换法。

方法1 比较系数法

根据右端函数 $f(t)$ 的结构可分为

类型Ⅰ $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$，其中 $\lambda,b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为确定的实常数。

结论1　当方程(4.5)中右端函数 $f(t)$ 为以上类型时，方程（4.5）有一特解为以下形式

$$\tilde{x}(t)=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}$$

其中 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定系数，k 由 λ 是否为特征根来决定，λ 是特征方程 $F(\lambda)=0$ 的特征根时，k 为 λ 的重数，λ 不是特征方程 $F(\lambda)=0$ 的特征根时，$k=0$。

类型Ⅱ $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中$\alpha,\beta$为实数，$A(t),B(t)$是$t$的实系数多项式，$\max(\partial A(t),\partial B(t))=m$。

结论2 当方程(4.5)中右端函数$f(t)$为以上类型时，方程（4.5）有一特解为以下形式 $\tilde{x}(t)=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

其中$P(t),Q(t)$为次数不高于m的待定多项式，k由$\alpha+i\beta$是否为特征根来决定，当$\alpha+i\beta$是特征方程$F(\lambda)=0$的根时，k为特征根的重数；当$\alpha+i\beta$不是特征方程$F(\lambda)=0$的根时，$k=0$ 。

方法2 拉普拉斯变换法

定义 对于在$[0,+\infty)$上有定义的函数$f(t)$，若积分

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

对于已给的一些s（一般为复数）存在，则称$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$为函数$f(t)$的拉普拉斯变换，记为$L[f(t)]=F(s)$，$f(t)$称为拉普拉斯变换的原函数，$F(s)$为象函数。

a）拉普拉斯变换的基本性质

性质1 （线性性质）如果$f(t),g(t)$是原函数，α,β是任意两个常数(可以是复数)，则有 $L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$。

性质2 （原函数的微分性质）

如果$f(t),f'(t),\cdots,f^{(n)}(t)$都是原函数，则有$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)$或

$L[f^{(n)}(t)]=s^nL[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$ 。

性质3（象函数的微分性质）

$$F(s)=L[f(t)],\quad F'(s)=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt,\quad F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^\infty t^ne^{-st}f(t)dt$$

b）拉普拉斯反变换(逆变换)

已知象函数求原函数，这就是拉普拉斯反变换，记为$L^{-1}[F(s)]=f(t)$。

拉普拉斯反变换也具有线性性质，即

$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$。

由线性性质可得：如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定 $F_i(s)$ 的拉普拉斯变换容易求得，即 $F_i(s)=L[f_i(s)]$，则

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]=f_1(t)+\cdots+f_n(t)\text{。}$$

c）利用拉普拉斯变换法求常系数线性非齐次方程的特解

求方程 $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ （4.5）

满足初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0{}^{(n-1)}$ 的特解，其中 a_i（$i=1,\cdots,n$) 为常数。

解法步骤：

令 $L(x(t))=X(s)$。

首先给方程 $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ 两端施行拉普拉斯变换；

然后利用拉普拉斯变换原函数的微分性质及初始条件，将方程整理为以下形式

$$X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}\text{；}$$

其中 $L(f(t))=F(s)$， $A(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$，

$B(s)=(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})x_0+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})x_0'+\cdots+x_0^{(n-1)}$。

最后对 $X(s)=\dfrac{F(s)+B(s)}{A(s)}$ 施行拉普拉斯逆变换 ，则得到方程满足给定初始条件的特解为 $x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}[\dfrac{F(s)+B(s)}{A(s)}]$。

5）高阶方程的降阶法

可降阶的方程的类型

类型1 $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0 \quad 1\le k\le n$

特点：方程不显含未知数 x 及 $x',x'',\cdots,x^{(k-1)}$。

令 $x^{(k)}=y$，则方程可降为 $n-k$ 阶的方程

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0$$ 。

若可求得上方程的通解为 $y=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$，则由

$$x^{(k)}=y=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$$

逐次积分 k 次，可得原方程的通解。

类型2 $F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

特点：方程不显含自变量 t。

令 $x'=y$，则方程经过变换后，可得

$$G(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})=0$$

比原方程降低了一阶，若可解得它的通解为

$$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_{n-1}),$$

则由 $y=\dfrac{dx}{dt}=x'=\varphi(x,C_1,\cdots,C_{n-1})$ 分离变量，可得原方程的解。

类型3 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

特点：变系数线性齐次方程。

若已知（4.2）的 k 个线性无关的特解，则(4.2) 可降低 k 阶，即可得到 $n-k$ 阶的齐次线性方程。特别地，如果已知(4.2)的 $n-1$ 个线性无关的解，则(4.2)的基本解组可以求得。

方程（4.2）的求解问题归结为寻求它的 n 个线性无关的特解，这一过程虽然没有普遍可循的方法（这与常系数线性方程有着极大的差异），但是如果知道方程的一个非零特解，则利用线性变换，可将方程降低一阶；或更一般地，若知道方程的 k 个线性无关的特解，则可通过一系列同类型的变换，使方程降低 k 阶，并且新得到的 $n-k$ 阶方程也是线性齐次的。

特别地，对于二阶线性齐次方程，若已知它的一个非零解，则可求得方程的通解。

6）二阶线性方程的幂级数解法（求特解方法）

若二阶线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (4.6)$$

满足初始条件 $y(x_0)=y(0),y'(x_0)=y'(0)$，则有

定理4. 10　若方程（4. 6）中的系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能在 $x=0$ 处展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程（4. 6）有形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的特解，也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间。

定理4. 11　若方程（4. 6）中的系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 具有这样的性质，即 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均能在 $x=0$ 处展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程（4. 6）有形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\alpha+n}$ 的特解，这里 $a_0\neq 0$，α 是一个待定的常数，该特解也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间。

用幂级数法求二阶线性方程满足初始条件的特解时，一般先令方程有幂级数形式的解，再代入方程比较两端的同次幂系数确定出该级数的系数，最后证明此级数的收敛性（如果事先能知道有幂级数形式的解更好，这步可略去）。

第五章 线性微分方程组

研究对象

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

1　基本概念

1）一阶微分方程组的标准型

含有 n 个未知函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及其一阶导数的微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \qquad (5.1)$$

称为一阶微分方程组的标准型，其中 $f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是定义在 $n+1$ 维空间 $(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的某区域 D 内已知的连续函数，t 是自变量。

2）初值问题

求满足方程组（5.1）及初值条件 $x_1(t_0) = \eta_1, x_2(t_0) = \eta_2, \cdots, x_n(t_0) = \eta_n$ 的解的问题称为一阶微分方程组的初值问题（或柯西问题）。表示如下

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

及 $x_1(t_0) = \eta_1, x_2(t_0) = \eta_2, \cdots, x_n(t_0) = \eta_n$。

3）通解

方程组（5.1）含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$$

称为它的通解。

4）高阶线性方程与一阶方程组等价

n阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1, x'(t_0) = \eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases}$$

其中$a_i(t)(i=1,2,\cdots,n), f(t)$是区间$[a,b]$上确定的函数，$t_0 \in [a,b], \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是确定的常数，它的解为$x=\varphi(t)$。只要令$x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x'', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$，它可以化为下列一阶线性微分方程组的初值问题

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta},$$

其中$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$，并且它的解为$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$。

同时，给定其中一个初值问题的解，就可构造另一个初值问题的解，在这个意义下，称上面两个初值问题是等价的。

5）一阶线性微分方程组

若（5.1）中函数$f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)(i=1,2,\cdots,n)$关于$x_1, x_2, \cdots, x_n$是线性的，即

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (5.2)$$

则称（5.2）为一阶线性微分方程组，简称为线性方程组，其中$a_{ij}(t), f_i(t), i, j = 1,2,\cdots,n$在区间$[a,b]$上连续。

6）线性方程组的向量表示

方程组（5.2）的向量形式为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad (5.3)$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},\quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}。$$

在方程组（5.3）中，若 $\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{0},(t\in[a,b])$，则有

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (5.4)$$

称（5.4）为线性齐次方程组，否则称（5.3）为线性非齐次方程组，

7）向量函数组的线性相关和线性无关

定义在区间 $[a,b]$ 上的 n 维向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$，如果存在 m 个不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_m$，使得 $C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_m\boldsymbol{x}_m(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 在区间 $[a,b]$ 上成立，则称这个向量函数组在区间 $[a,b]$ 上线性相关，否则称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 线性无关。

8）向量函数组的朗斯基行列式

设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是 n 个向量函数，以 $\boldsymbol{x}_i(t)$ 作为第 i 列 $(i=1,2,\cdots,n)$ 所构成的矩阵记为 $\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$，将其行列式 $\det\boldsymbol{X}(t)$ 称为向量函数组 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式，记为

$$W(t)=\det\boldsymbol{X}(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}。$$

9）基本解组和基本解矩阵

若 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的 n 个线性无关解，那么称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是它的一个基本解组，并称矩阵 $(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$ 为方程组

（5.4）的基本解矩阵，简称基本解矩阵。

2 基本定理及性质

定理 5.1 如果矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 及向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则对 $[a,b]$ 上任一点 t_0 以及任意给定的 $\boldsymbol{x}_0$，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}, \qquad t_0\in[a,b]$$

在区间 $[a,b]$ 内存在唯一的解。

定理 5.2（线性齐次方程组的叠加原理）

设 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的 m 个解，则

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_m\boldsymbol{x}_m(t)$$

也是（5.4）的解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是任意常数，即线性齐次方程组的任意有限个解的任意线性组合仍为该方程组的解。

定理 5.3 如果向量函数组 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关，则它们的朗斯基行列式 $W(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒等于零。

推论 5.1 如果向量函数组 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 的朗斯基行列式 $W(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的某一点 t_0 不等于零，即 $W(t_0)\neq 0$，则该向量函数组在区间 $[a,b]$ 上线性无关。

定理 5.4 如果方程组（5.4）的 n 个解在其定义区间 $[a,b]$ 上线性无关，则它们的朗斯基行列式 $W(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处不为零。

推论 5.2 方程组（5.4）的 n 个解在其定义区间 $[a,b]$ 上线性无关的充要条件是它们的朗斯基行列式 $W(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处不为零。

定理 5.5 线性齐次方程组（5.4）存在并且至多存在 n 个线性无关的解。

定理 5.6（刘维尔公式） 若 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的 n 个解，则这 n 个解的伏朗斯基行列式与方程组（5.4）的系数有如下关系式

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt}\text{。}$$

定理 5.7（线性齐次方程组通解结构）如果向量函数组 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的 n 个线性无关解，则方程组（5.4）的任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t),$$

这里 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个相应的常数。

结论 1（线性齐次方程组通解结构的矩阵表示）线性齐次方程组（5.4）的通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为（5.4）的基本解矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为任意常向量。

性质 5.1 如果 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是线性非齐次方程组（5.3）的解，而 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是其对应线性齐次方程组（5.4）的解，那么 $\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{x}^*(t)$ 是线性非齐次方程组（5.3）的解。

性质 5.2 线性非齐次方程组（5.3）的任意两个解的差是其对应线性齐次方程组（5.4）的解。

定理 5.8（非齐次方程组通解结构）线性非齐次方程组（5.3）的通解等于其对应的齐次线性方程组(5.4)的通解与其自身的一个特解之和,即若 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是线性非齐次方程组(5.3)的一个特解，$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的 n 个线性无关的解，则 $\boldsymbol{x}(t)=C_1\boldsymbol{x}_1(t)+C_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n(t)+\boldsymbol{x}^*(t)$ 就是（5.3）的通解。

结论 2（线性非齐次方程组通解结构的矩阵表示）线性非齐次方程组（5.3）的通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{x}^*(t)$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为（5.4）的基本解矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为任意常向量，$\boldsymbol{x}^*(t)$ 是非齐次线性方程组（5.3）的一个特解。

结论 3 （常数变易公式）如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是线性齐次方程组（5.4）的基本解矩阵，则线性非齐次方程组（5.3）满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的特解 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 由下面公式给出

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的逆矩阵。

注意：利用常数变易法可求线性非齐次方程组（5.3）的一个特解。

定理 5.9 给定常系数线性方程组 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，那么

a）如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是负的，则方程组的任一解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零。

b）如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部都是非正的，且实部为零的特征值都是简单特征值，则方程组的任一解当 $t \to +\infty$ 时都保持有界。

c）如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值至少有一个具有正实部，则方程组至少有一解当 $t \to +\infty$ 时趋于无穷。

3 基本求解方法

1）常数变易法

第一步：确定线性非齐次微分方程组（5.3）对应的线性齐次方程组（5.4）的通解。

若方程组（5.4）的基本解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t)$，则（5.4）的通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$ 。

第二步：设（5.3）有形如 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)$ 的解，$\boldsymbol{C}(t)$ 为待定的向量函数。

第三步：确定向量函数 $\boldsymbol{C}(t)$ 。

将 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)$ 代入方程（5.3），有

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}(t)+\boldsymbol{f}(t),$$

因 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程组（5.4）基本解矩阵，则有 $\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$，所以上式为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{f}(t),$$

即

$$\boldsymbol{C}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t),$$

积分得

$$\boldsymbol{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

其中取 $\boldsymbol{C}(0)=\boldsymbol{0}$，

所以得到方程组（5.3）满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{0}$ 的解为

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \text{ 。}$$

第四步：求线性非齐次方程组（5.3）的通解。

由结论 2，方程组（5.3）的通解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \text{ 。}$$

第五步：求线性非齐次方程组（5.3）满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解。

将初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 代入通解表达式中得，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$，故方程组（5.3）满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\ 。$$

2）常系数线性齐次方程组的解法

若（5.4）中系数矩阵为常矩阵，则称其为常系数线性齐次方程组，记为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (5.5)$$

由齐次方程组通解结构定理 5.7 和结论 1，求解常系数线性齐次方程组的关键在于求它的基本解矩阵。

定理 5.10 矩阵函数 $\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}$ 是常系数线性方程组（5.5）的基本解矩阵，且 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$ 。

基本解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\exp(\boldsymbol{A}t)$ 的特点：

a）基本解矩阵 $\boldsymbol{X}(t)=\exp(\boldsymbol{A}t)$ 是标准基本解矩阵，即满足 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{E}$ 。

b）若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，则 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 是实基本解矩阵，且任一基本解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 与 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ 有关系 $\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$ 成立。

定理 5.10 给出了常系数线性齐次方程组（5.5）的基本解矩阵的构造形式，具体解题时要计算矩阵级数 $\boldsymbol{X}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\boldsymbol{A}^k$ 相当困难。下面给出计算基本解矩阵的常用方法。

基本解矩阵的计算方法

方法 1 空间分解法

定理 5.11 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{v}_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，对应特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$（不必各不相同），则矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=(e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n),-\infty<t<+\infty$ 是方程组（5.5）的一个基本解矩阵。

特别地，有下面重要结论

结论 4 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{v}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_i 的特征向量，则 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 必线性无关，且矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=(e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n)$ 是方程组（5.5）的

基本解矩阵。

更一般地，基于代数学中的空间分解定理，给出基本解矩阵的计算方法。

设 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，对于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性代数方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

具有 n_j 个线性无关的解 $\boldsymbol{u}_j^{(1)},\boldsymbol{u}_j^{(2)},\cdots,\boldsymbol{u}_j^{(n_j)}$，（称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_j 的广义特征向量），因而方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 的解的全体构成一个 n_j 维子空间 $\boldsymbol{U}_j(j=1,2,\cdots,k)$，并且 n 维线性空间 $\boldsymbol{U}$ 可以表示为这些子空间 $\boldsymbol{U}_j(j=1,2,\cdots,k)$ 的直和，即对任一向量 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}$，存在唯一的 $\boldsymbol{u}_j\in\boldsymbol{U}_j(j=1,2,\cdots,k)$，使得 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\cdots+\boldsymbol{u}_k$。

定理 5.12 方程组（5.5）满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i]\boldsymbol{v}_j$$

其中 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k$，$\boldsymbol{v}_j\in\boldsymbol{U}_j,(j=1,2,\cdots,k)$，而 $\boldsymbol{U}_j$ 是 n 维线性空间 $\boldsymbol{U}$ 的直和分解，即 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_1\oplus\boldsymbol{U}_2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{U}_k$。

利用定理 5.12 求基本解矩阵的步骤：

步骤 1 求特征根

解代数方程组 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$。

假如求得 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值为 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$。

步骤 2 对 n 维线性空间 $\boldsymbol{U}$ 进行直和分解

分别求解方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0},\quad j=1,2,\cdots,k$$

得到 λ_j 对应的 n_j 个线性无关的向量

$$\boldsymbol{u}_j^{(1)}, \boldsymbol{u}_j^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_j^{(n_j)},\ j = 1,2,\cdots,k\ ,$$

由 $\boldsymbol{u}_j^{(1)}, \boldsymbol{u}_j^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_j^{(n_j)}$ 所张成的线性子空间，记为 $\boldsymbol{U}_j$，则有 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{U}_k$。

步骤 3 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\eta}$ 在 n 维线性空间 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{U}_k$ 中的表示

由于 $\boldsymbol{u}_j^{(1)}, \boldsymbol{u}_j^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{u}_j^{(n_j)},\ j = 1,2,\cdots,k$ 线性无关，方程组

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^1 \boldsymbol{u}_j^{(1)} + \alpha_j^2 \boldsymbol{u}_j^{(2)} + \cdots + \alpha_j^{n_j} \boldsymbol{u}_j^{(n_j)} = \boldsymbol{\eta}$$

有唯一的解 $\tilde{\alpha}_j^1, \tilde{\alpha}_j^2, \cdots, \tilde{\alpha}_j^{n_j}$， $j = 1,2,\cdots,k$ 。

这样就得到了 $\tilde{\alpha}_j^1 \boldsymbol{u}_j^{(1)} + \tilde{\alpha}_j^2 \boldsymbol{u}_j^{(2)} + \cdots + \tilde{\alpha}_j^{n_j} \boldsymbol{u}_j^{(n_j)} = \boldsymbol{v}_j \in \boldsymbol{U}_j$， $j = 1,2,\cdots,k$， $\boldsymbol{\eta} = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{v}_j$ 。

步骤 4 计算标准基本解矩阵 $\exp(\boldsymbol{A}t)$

令 $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_i$， $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ 第i行$(i = 1,2,\cdots,n)$，利用公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} [\sum_{i=0}^{n_j - 1} \frac{t^i}{i!} (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}_j \boldsymbol{E})^i] \boldsymbol{v}_j$$

分别求得 $\boldsymbol{\varphi}_i(t)\ (i = 1,2,\cdots,n)$，则方程组（5.5）的基本解矩阵为

$$\exp(\boldsymbol{A}t) == (\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t), \cdots, \boldsymbol{\varphi}_n(t),)$$

特别当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值 λ 时

$$\exp(\boldsymbol{A}t) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\ 。$$

方法 2 待定系数法

定理 5.13 如果 $\boldsymbol{A}$ 有相异特征值为 $\lambda_j\,(j = 1,2,\cdots,k)$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，

$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则方程组（5.5）存在 n_j 个形如

$$\boldsymbol{x}_i(t)=\begin{pmatrix}p_{1i}(t)\\p_{2i}(t)\\\vdots\\p_{ni}(t)\end{pmatrix}e^{\lambda_j t}\text{，（}i=1,2,\cdots,n_j\text{）}$$

的线性无关解，其中 $p_{ri}(t)$ （$r=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots,n_j$）为 t 的次数不高于 n_j-1 的多项式，取遍所有的 $\lambda_j\,(j=1,2,\cdots,k)$ 就得到方程组（5.5）的一个基本解组。

具体确定这个基本解组的方法是

步骤 1 求特征根

解代数方程组 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 。

假如求得 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值为 $\lambda_j\,(j=1,2,\cdots,k)$，它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ 。

步骤 2 根据定理 5.13，设出方程组（5.5）的形式解

对于每个 $\boldsymbol{\lambda}_j$，方程组（5.5）有下列形式的解，

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(p_{11}+p_{12}t+\cdots+p_{1n_j}t^{n_j-1})e^{\lambda_j t}\\\vdots\\(p_{n1}+p_{n2}t+\cdots+p_{nn_j}t^{n_j-1})e^{\lambda_j t}\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}(t)e^{\lambda_j t}\qquad(j=1,2,\cdots,k)$$

步骤 3 确定待定系数

将 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}(t)e^{\lambda_j t}$ 代入方程组（5.5），有

$$\boldsymbol{P}'(t)e^{\lambda_j t}+\lambda_j\boldsymbol{P}(t)e^{\lambda_j t}\equiv\boldsymbol{AP}(t)e^{\lambda_j t}$$

即

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}(t)\equiv\boldsymbol{P}'(t)$$

比较 t 的同次幂系数，可得到关于待定系数 $p_{ri}(t)$ （$r=1,2,\cdots,n,i=1,2,\cdots,n_j$）的 $n\times n_j$ 个等式。但注意到上式右端次数比左端要低一次，且 λ_j 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n_j 重特征根，我们并不能得到 $n\times n_j$ 个无关的等式。由代数知识可证所有 $n\times n_j$ 个系数可以通过其中 n_j 个来表示。

设为$C_1,C_2,\cdots,C_{n_j}$，依次令

$$
\begin{aligned}
&C_1=1,C_2=0,\cdots,C_{n_j}=0,\\
&C_1=0,C_2=1,\cdots,C_{n_j}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1=0,C_2=0,\cdots,C_{n_j}=1,
\end{aligned}
$$

就可得到方程组（5.5）的n_j个线性无关的解。

取遍所有的$\lambda_j\,(j=1,2,\cdots,k)$就得到方程组（5.5）的$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$个线性无关的解，构成方程组（5.5）一个基本解组。

方法 3 约当(Jordan)标准型法

结论 5 方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的基本解矩阵为

$$
\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} e^{t\boldsymbol{J}_1} & & & \\ & e^{t\boldsymbol{J}_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\boldsymbol{J}_m}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}
$$

其中，$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_i & 1 & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_i\end{pmatrix}$是$n_i$阶的若当块，$i=1,2,\cdots,m$，$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，而$m$为矩阵$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$的初等因子的个数，$\lambda_i$，$i=1,2,\cdots,m$为矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根，$\boldsymbol{T}$为$n$阶非奇异矩阵，使得$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_m\end{pmatrix}$。

注：矩阵中空白的地方为零，$\boldsymbol{T}$称为过渡矩阵。

方法 4 递推法

结论 6 方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的基本解矩阵为

$$
\exp(\boldsymbol{A}t)=\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\boldsymbol{P}_j
$$

其中$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}_j=\prod_{k=1}^{j}(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E}),j=1,2,\cdots,n$，$r_1(t),r_2(t),\cdots,r_n(t)$是下列初值问题

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 r_1 \\ r_j' = r_{j-1} + \lambda_j r_j \\ r_1(0) = 1, r_j(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad (j = 2,3,\cdots,n)$$

的解，$\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值（不必相异）。

方法 5 拉普拉斯变换法

记向量函数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ 的拉普拉斯变换为

$$L[\boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{X}(s) = \begin{pmatrix} L(x_1(t)) \\ L(x_2(t)) \\ \vdots \\ L(x_n(t)) \end{pmatrix},$$

对方程（5.5）两端进行拉普拉斯变换，得 $\boldsymbol{X}(s)$ 的代数方程组

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s),$$

求解得 $\boldsymbol{X}(s)$，再求逆变换 $L^{-1}[\boldsymbol{X}(s)] = \boldsymbol{x}(t)$，此即为方程组（5.5）满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解。

我们依次取初始条件 $\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{x}_0^{(i)}, (i = 1,2,\cdots,n)$ 为

$$\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{x}_0^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{行}(i = 1,2,\cdots,n)$$

就得到方程组（5.5）n 个线性无关的解，从而构成它的一个基本解组，也是标准基本解矩阵。

方法 6 消元法

借助于方程组和高阶方程的关系，将原方程组的求解问题转化为关于某一个变量的高阶方程的求解问题来计算出基本解矩阵。

注意：以上求基本解矩阵的 6 种方法各具特色，一般情况下，如果特征根是互不相同的单根时，可应用结论 4 来计算；如果有重特征根，且系数矩阵的阶数较低时可选择空间分解法（定理 5.12）、待定系数法（定理 5.13）、约当标准型法（结论 5）、递推法（结论 6）之

一即可，但当系数矩阵的阶数较高时，建议采用空间分解法或递推法比较方便；至于拉普拉斯变换法和消元法一般针对的是比较特殊的方程，特别是对线性非齐次方程也适用。

3）常系数线性非齐次微分方程组的解法

常系数线性非齐次微分方程组可表示为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{5.6}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为常矩阵， $\boldsymbol{f}(t)$ 为连续的向量函数。

第一步：常系数线性齐次微分方程组的通解

设常系数线性齐次微分方程组的标准基本解矩阵为 $\exp(\boldsymbol{A}t)$ ，则其通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{C} \text{。}$$

第二步：常系数线性非齐次微分方程组的特解

常数变易法（方法同前）只需取方程组（5.5）的基本解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \exp(\boldsymbol{A}t)$ 即可，

得到满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{0}$ 的特解为

$$\boldsymbol{x}^*(t) = \int_0^t \exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)ds \text{。}$$

注：也可用拉普拉斯变换法求方程组（5.6）的特解。

第三步：常系数线性非齐次微分方程组的通解。

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{C} + \int_0^t \exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)ds \text{。}$$

第四步：常系数线性非齐次微分方程组的满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$ 的解。

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta} + \int_0^t \exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)ds \text{。}$$