吴民　整理

离散数学习题

（第一版）

二零二零年十二月

前　　言

耿素云《离散数学》。

课程重点：

命题逻辑：等值式、范式、命题推导。

一阶逻辑：等值式。

集合论：集合等式的证明、集合计数。

二元关系：笛卡尔积、关系的运算、等价关系、等价类、商集。

函数：函数的运算及性质、构造双射函数。

代数系统：概念。同态、同构。群及其实例、Klein四元群。子群、循环群、置换群。环、域。

图：概念。图的矩阵表示、最短路径、着色问题。二部图、欧拉图、哈密顿图、平面图的概念、定理以及简单应用。

树：简单定理的证明。概念定理的简单应用。最小生成树。Huffman算法、最佳前缀码。前缀（波兰）、后缀（逆波兰）符号法。

组合数学：排列组合的计算、递推方程的求解。

目录

前言 i

第一章　部分书后习题提示或参考答案 1

第一节　图论 1

第二节　组合分析初步 1

第二章　补充习题 9

第一节　命题逻辑和一阶逻辑 9

第二节　集合论、关系和函数 9

第三节　代数系统 10

第四节　图论部分 10

第五节　组合分析初步 11

 目录

第一章　部分书后习题提示或参考答案

第一节　图论

题目 1.1.1: 工人甲、乙、丙去完成三项任务 a,b,c。已知甲能胜任 a,b,c 三项任务，乙能胜任 a,b 两项任务，丙能胜任 b,c 两项任务。安排方案，让每个工人各去完成一项他们胜任的任务。

解: 二部图。

题目 1.1.2: 今有 a,b,c,d,e,f,g 共 7 个人。已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语、意大利语；f 会讲法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。试安排他们坐在圆桌边，使得每个人都能和身边的人交谈。

解: 每个人做为顶点，讲相同语言的作为边，作图。找哈密尔顿回路。

第二节　组合分析初步

题目 1.2.1: 从整数 $1,2,\ldots,100$ 中选 3 个数，使得它们的和正好能被 4 整除，有多少种方法？

解: 记 $S=\{1,2,\ldots,100\}$，将 S 中的元素按除 4 的余数分为 4 个子集：

$$S_i=\{s|s\in S, s\equiv i \pmod 4\}, i=0,1,2,3,$$

当 $i\neq j$ 时，$S_i\cap S_j=\emptyset$。从 S 中任取 3 个数即从 S_0,S_1,S_2,S_3 中任取 3 个数，不计次

序。题意为求集合

$$M = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3 \equiv 0 \pmod 4, x_i \in S_0 \cup \cdots \cup S_3\}$$

中元素的个数。每个 S_i 中元素个数都是 25 个。记

$$M_1 = \{x_1,x_2,x_3)|x_1 \in S_0, x_2 \in S_0, x_3 \in S_0\},$$

$$M_2 = \{x_1,x_2,x_3)|x_1, \in S_0, x_2 \in S_1, x_3 \in S_3\},$$

$$M_3 = \{x_1,x_2,x_3)|x_1, \in S_0, x_2 \in S_2, x_3 \in S_2\},$$

$$M_4 = \{x_1,x_2,x_3)|x_1, \in S_1, x_2 \in S_1, x_3 \in S_2\},$$

则 M_1,M_2,M_3,M_4 两两互斥，且 $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 = M$，因此，

$$|M| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|,$$

而

$$|M_1| = \binom{25}{3},$$

$$|M_2| = \binom{25}{1} \cdot \binom{25}{1} \cdot \binom{25}{1},$$

$$|M_3| = \binom{25}{1} \cdot \binom{25}{2},$$

$$|M_4| = \binom{25}{2}\binom{25}{1}.$$

以下略。

题目 1.2.2: 求满足不等式 $x_1+x_2+x_3 \leqslant 6$ 的正整数解的个数。

解: x_1,x_2,x_3 分别作为若干个 1 的和。因此 $x_1+x_2+x_3 = m$ 的每个解对应着

$$\{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$$

的一个 m 组合。因此原不等式解的个数为

$$\sum_{i=0}^{6} \binom{i+2-1}{2},$$

计算略。

题目 1.2.3: 设一排有 n 个座位，顺序标记为 $1,2,\ldots,n$。若从中选出 k 个座位且没有两个座位是相邻的，问有多少种选法?

解: 设 S 为满足条件选法构成的集合。

$$S = \{(x_1,\ldots,x_k)|1 \leqslant x_1, x_1+1 < x_2, \ldots, x_{k-1}+1 < x_k, x_k \leqslant n\},$$

对 S 的每个 $(x_1,\dots,x_k)$，有

$$1 \leqslant x_1 < x_2-1 < x_3-2 < \cdots < x_k-(k-1) \leqslant n-k+1,$$

所以 $(x_1,x_2-1,x_3-2,\dots,x_k-(k-1))$ 是 $1,\dots,n-k+1$ 的一个组合。容易看到这个对应关系是双射。因此

$$|S| = \binom{n-k+1}{k}.$$

完毕。

题目 1.2.4: 有 3 类明信片，分别有 3,4,5 张。把它们全部送给 5 个朋友（允许有的人得到 0 张），问有多少种不同的方式？

解: 设第一类明信片分给朋友的方式数为 n_1，第二类分给朋友的方式数为 n_2，第三类分给朋友的方式数为 n_3，则总的分配方式个数 n 满足

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3,$$

由于第一类明信片有 3 张，分法相当于

$$\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c, \infty\cdot d, \infty\cdot e\}$$

的 3 组合。分法为

$$\binom{5+3-1}{3},$$

其余计算略。

题目 1.2.5: 把 $2n+1$ 个苹果分给 3 个孩子 a,b,c，使得任何两个孩子的苹果数加在一起比剩下的孩子的苹果多。问有多少种分法？

解: （由同学提示）。实际上是给定 n，求集合

$$S_0 = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3 = 2n+1, x_1+x_2 > x_3, x_1+x_3 > x_2, x_2+x_3 > x_1\}$$

的元素的个数。其中 $x_i \geqslant 0$，以下也是。注意到

$$S_0 = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3 = 2n+1, x_1 < n+1, x2 < n+1, x_3 < n+1\},$$

对 $i = 1,2,3$，令

$$S_i = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3 = 2n+1, x_i \geqslant n+1\},$$

则 $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 = S$，其中 S 为

$$S = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3 = 2n+1\},$$

S 中元素的个数书上已有方法。定义映射

$$f_1 : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1-(n+1) & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

f_1 作用到 S_1 集合中的每个元素得到的像是

$$T_1=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_2+x_3=n\}$$

中的元素。容易证明 f_1 既是单射，又是满射。因此 f_1 是双射。所以

$$|S_1|=|T_1|=\binom{n+2}{2},$$

容易证明 $|S_2|=|S_3|=|S_1|$。因此

$$|S_0|=\binom{2n+1+2}{2}-3\binom{n+2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

解: 实际就是要求每个孩子的苹果数不超过 n。问题就是 $2n+1$ 个苹果分给 2 个人，每个人不超过 n 个。因此每种分法对应着

$$\{n\cdot a,n\cdot b,n\cdot c\}$$

的 $2n+1$ 组合。由于 $n_1+n_2\geqslant n+1$ 可以取 $n+1,\ldots,2n$ 共 n 种取值。设总的分法个数为 m， $n_1+n_2=n+k$ 的分法个数为 m_k，则

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n,$$

$n_1+n_2=n+k$ 时，$n_3=n+1-k$，由于

$$n_1+n_3=n_1+n+1-k\geqslant n+1,$$

所以 $n_1\geqslant k$，再加上 $n_1\leqslant n$。自 k 到 n 的整数共 $n-k+1$ 个。因此

$$m=(n-1+1)+\cdots+(n-n+1)=n+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

完毕。

题目 1.2.6: 有 3 只蓝球，2 只红球，2 只黄球。排成一排。若要求黄球不相邻，问有多少种排法？

解: 3 只蓝球，2 只红球，2 只黄球，排成一排，是多重集

$$\{3\cdot a,2\cdot b,2\cdot c\}$$

的排列问题。设得到的排列集合为 S。S 中元素的个数

$$|S|=\frac{(3+2+2)!}{3!\cdot 2!\cdot 2!},$$

设 S 中满足黄球相邻的元素构成的子集为 S_1，黄球不相邻的元素构成的子集为 S_2，则 $S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\emptyset$。因此，

$$|S_2|=|S|-|S_1|.$$

S_1 中黄球相邻，则相当于 1 个黄球参与排列，因此

$$|S_1| = \frac{(3+2+1)!}{3!\cdot 2!\cdot 1!},$$

以下计算略。

题目 1.2.7: 求以凸 n 边形的顶点作为顶点，以 n 边形内部的对角线为边的三角形的个数。

解: 这种三角形的个数是 n 的函数，记为 $f(n)$。显然，

$$f(6) = \begin{cases} 0, & n < 6 \\ 2, & n = 6 \end{cases}$$

当 $n \geqslant 6$ 时，考虑 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系。凸 $n+1$ 边形相当于将原 n 边形增加第 $n+1$ 个顶点，原凸 n 边形的内部对角线为边的三角形仍是凸 $n+1$边形的内部三角形，新增的内部三角形或以第 $n+1$ 个顶点为顶点，或以 $1,n$ 为顶点，所以

$$f(n+1) = f(n) + |T_1| + |S_1|,$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \{a,b|2 \leqslant a < b \leqslant n-1, |a-b| \neq 1\}, \\ S_1 &= \{x|3 \leqslant x \leqslant n-2\}, \end{aligned}$$

显然 $|S_1| = n-4$。设 $T_2 = \{a,b|2 \leqslant a < b \leqslant n-1, |a-b| = 1\}$，$T_1 \cup T_2 = T$，$T_1 \cap T_2 = \emptyset$。其中 T 为从 $2,\ldots,n-1$ 中不计次序取 2 个数的所有可能构成的集合。所以

$$|S_1| + |T_1| = |S_1| + |T| - |T_2| = (n-4) + \binom{n-2}{2} - (n-3) = \binom{n-2}{2} - 1,$$

因此

$$f(n) = \left[\binom{3}{2} - 1\right] + \left[\binom{4}{2} - 1\right] + \cdots + \left[\binom{n-3}{2} - 1\right],$$

以下计算略。

解: 沿着边将 n 边形的顶点标记为 $1,2,\ldots,n$。题目实际是计算这些顶点中取出 3 个两两不相邻的顶点的取法个数。设

$$S = \{(x_1,x_2,x_3)|x_1+1 < x_2, x_2+1 < x_3, 1 \leqslant x_i \leqslant n\},$$

S 与集合

$$T = \{(y_1,y_2,y_3)|y_1 < y_2 < y_3, 1 \leqslant y_i \leqslant n-2\},$$

有一一对应关系：$y_1 = x_1$，$y_2 = x_2 - 1$，$y_3 = x_3 - 2$。T 是从 $1,\ldots,n-2$ 中无序取 3 个数，因此 $|T|$ 是个组合数。注意到 T 中的取 $1,n$ 顶点的那些有序组实际是不符题意的。因此

$$|S| = \binom{n-2}{3} - \binom{n-4}{1}.$$

完毕。（根据同学提示）

题目 1.2.8: 设 $N = \{1,2,\ldots,n\}$，$f : N \to N$。如果 f 单调递增，问不同的 f 有多少个？如果 f 是严格单调函数，问不同的 f 有多少个？

解: f 单调递增即：$f(1) \leqslant f(2) \leqslant \cdots \leqslant f(n)$。令 $g(1) = f(1)$，$g(2) = f(2)+1$，或

$$g(i) = f(i) + i - 1, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

如此得到的 g 是严格单调函数，且上面构造的映射是双射。g 的全体构成的集合就是从 $1,2,\ldots,2n-1$ 中不计顺序取 n 个数得到有序组的集合。因此，

$$|\{f\}| = |\{g\}| = \binom{2n-1}{n}.$$

第二问，如果 f 严格单调，则要么 f 严格单调递增，要么严格单调递减。f 严格单调，则 f 是单射；又 N 是有限集合，因此 f 是满射。f 单增时其像为 $1,2,\ldots,n$ 按增序排列；f 单减时其像为 $1,2,\ldots,n$ 按减序排列；都只有一个排列。因此第二问的答案是 2。

题目 1.2.9: 在 1 到 1000 之间（包括 1 和 1000 在内）有多少整数，其各位数字之和小于 7？

解: 先不考虑 1000。其余数字都可表示为

$$n = a*100 + b*10 + c,$$

其中 a,b,c 为 $0,1,\ldots,9$ 中的某个数字。题目要求 $a+b+c<7$，故 $a+b+c$ 可以取 $1,2,\ldots,6$，取 0 不符合题意。以下计算略。最后需要加 1，因为还要算上 1000。

题目 1.2.10: Fibonacci 数列：

$$1,1,2,3,5,8,\ldots$$

其中 F_n 满足

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geqslant 3,$$

$F_1 = F_2 = 1$。补充令 $F_0 = 0$。上式对 $n \geqslant 2$ 都成立。用数学归纳法证明：

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

解: $n=1$ 时，

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1.$$

命题成立。假设 $n-1$ 时命题成立，对 n，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1+1} &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n+F_{n-1} & F_{n-1}+F_{n-2} \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由数学归纳法知命题成立。计算该式可以采用矩阵对角化的方法。

第二章　补充习题

第一节　命题逻辑和一阶逻辑

题目 2.1.1: 用等值演算证明：$((p\to q)\wedge(p\to r))\Leftrightarrow(p\to(q\wedge r))$。

题目 2.1.2: 求公式 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 的主析取范式。

题目 2.1.3: 证明推理：前提：$p\to\neg q$，$r\to q$，r；结论：$\neg p$。

题目 2.1.4: 求前束范式：$\exists yF(x,y)\wedge\forall xG(x,y,z)$。

第二节　集合论、关系和函数

题目 2.2.1: 证明：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$。

题目 2.2.2: 证明：$A\subseteq B\Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

题目 2.2.3: $A=\{0,\{0\}\}$。求 $P(A)$。

题目 2.2.4: 证明：$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$。

题目 2.2.5: $S=\{(a,b)|a,b\in\mathbf{N}\}$。$S$ 上的关系 R 定义为：

$$R=\{\langle(a,b),(x,y)\rangle|a+y=b+x\},$$

证明 R 是一个等价关系。

题目 2.2.6: $A=\{1,2,3\}$。可构造出多少个 A 中不同的等价关系？

题目 2.2.7: 设 A 和 B 为两个集合，$A\cap B=\emptyset$。映射 f_1 和 f_2 分别为 $\mathbf{N}$ 到 A 和 B 的一

一映射。试建立由 N 到 $A \cup B$ 的一一映射。

题目 2.2.8: 书上的例 4.6 和例 4.21。

第三节　代数系统

题目 2.3.1: $\mathbf{Z}$ 为整数集。在 $\mathbf{Z}$ 上定义二元运算 $\oplus$： $\forall x, y \in \mathbf{Z}$，

$$x \oplus y = x + y - 2,$$

$\mathbf{Z}$ 关于运算 $\oplus$ 构成群么？证明一下。

题目 2.3.2: 设 $G = \langle a \rangle$ 是 24 阶循环群。求 G 的全部生成元。

题目 2.3.3: 若某个群 G 中的每个元素 x 都满足 $x^2 = e$，证明运算满足交换律。

题目 2.3.4: 证明偶数阶群必含有某个元素 x 满足 $x^2 = e$。

题目 2.3.5: $\mathbf{Z}_n$ 是模 n 整数加群。 $f: \mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_3$ 定义为：

$$f(x) = x \pmod 3,$$

验证 f 是同态映射。

题目 2.3.6: 构造一个 3 个元素的域。

第四节　图论部分

题目 2.4.1: G 是 n 阶 $n+1$ 条边的无向图，证明 G 中存在顶点 v，使得 $d(v) \geqslant 3$。

题目 2.4.2: 设有向图 $D = \langle V, E \rangle$，其邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求各顶点的入度和出度。

题目 2.4.3: 画出无向完全图 K_4 的所有非同构子图。

题目 2.4.4: 若无向图 G 为欧拉图，证明 G 中无桥。

题目 2.4.5: 给一个无向图，求欧拉回路。

题目 2.4.6: 给一个带权图，求两个顶点间的最短路径。

题目 2.4.7: G 是无向树，含有 n 个顶点。证明 G 的边数为 $n-1$。

题目 2.4.8: 求无向带权树的最小生成树。或 Huffman 算法。

题目 2.4.9: 波兰符号法和逆波兰符号法。算式的二叉树表示。

第五节　组合分析初步

题目 2.5.1: 从 $S=\{1,2,\ldots,20\}$ 中选出 2 个数使得其和是 3 的倍数，有多少种选法？

题目 2.5.2: 整数 a 是平方数，证明 a 有奇数个正因子。

题目 2.5.3: 平面上有 n 条直线，它们两两相交且没有三线交于一点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域？

解: 当加入第 n 条直线时，它与前 $n-1$ 条直线交于 $n-1$ 个点。这些点将第 n 条直线分割成 n 段。每段都增加一个区域，共增加 n 个区域。设 n 条直线分成的区域个数为 a_n，因此有

$$a_n=\begin{cases}2, & n=1\\ a_{n-1}+n, & n>1\end{cases}$$

所以 $a_n=n+(n-1)+\cdot+2+2$。

题目 2.5.4: 利用 $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$，证明：

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$