

现代控制总结

经典控制论（基于传递函数和频域技术，主要处理 SISO LTI 系统）

现代控制论（基于状态空间法、最大值原理、动态规划法）

线性定常连续系统（LTI）、离散系统、线性时变连续系统、非线性系统

以下条件中针对 LTI 的能控，在离散中就是能达。

系统的状态空间表达式不唯一，描述同一系统的不同状态空间表达式之间存在着线性变换关系， P 为非奇异变换矩阵。

状态变量的选取不唯一，系统中状态变量的个数应等于系统中独立储能元件的个数，等于微分方程的阶数。

当状态方程和输出方程都是 x 和 u 的线性函数时，才是**线性系统**。

常见的非线性：死区、迟滞、饱和

在状态变化不剧烈（不远离平衡点）的情况下，可以进行**线性化**。在工作点附近的线性化，泰勒展开。

平衡点：速度为 0 的点 ($\dot{x} = 0$)

LTI 状态方程的解：初始状态引起的自由运动+控制激励引起的强制运动

状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的性质：①可分离性 $\Phi(t, t_0) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)$

②传递性 $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$ ③唯一性 ④可逆性 $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

连续时间线性系统的离散化：

近似离散化用差分代替求导（若系统受到测量噪声的影响，会把噪声放大）

能控：在 $u(t)$ 作用下将状态 x_0 在有限时间内转移到原点，则状态 x_0 能控。所有的状态都能控，则系统是完全能控的，即 (A, B) 能控

能达：从原点 x_0 转移到其他状态点 x_f ，则 x_f 是能达的。每一个状态都是能达的，则系统是完全能达的。

能观：输入 u 为 0，对系统任意给定的初始状态 x_0 都可以通过一段时间后的输出 y 来唯一确定初始状态 x_0 ，则系统是完全能观测的，即 (C, A) 能观测。

能控性和能观性正是分析 $u(t)$ 对 x 的控制能力和 $y(t)$ 对 x 的反映能力。

能控和能达等价的充要条件：

- ① 连续系统： A 非奇异
- ② LTI 系统：一定等价
- ③ 离散系统： $A(k)$ 均非奇异，若该离散系统是相应连续时间系统的时间离

散化模型，其能控和能达一定等价。

对偶性：

- | | |
|---|---------------------------------|
| ① LTI 系统: S 完全能控 $\Rightarrow S^T$ 完全能观 | S 完全能观 $\Rightarrow S^T$ 完全能控 |
| ② 离散系统: S 完全能达 $\Rightarrow S^T$ 完全能观 | S 完全能观 $\Rightarrow S^T$ 完全能达 |

线性定常离散系统的能控能观性：

多输入控制序列的选择通常具有无穷多种方式。

多输入线性定常离散系统由任意初状态转移至原点一般可少于 n 个采样周期 B 满秩时，存在控制序列在一步之内转移到原点。

当 A 是奇异矩阵时，能控的充要条件变成了充分条件。

连续系统完全能控或能观时，若采样周期选择不当，对应离散化系统可能不能控或不能观；连续系统不能控或不能观，不管采样周期 T 如何选择，离散化的系统一定不能控或观。

非奇异线性变换的不变特性：系统特征值不变；传递矩阵不变；能控性不变；能观性不变。

零极相消：

LTI 系统的传递函数阵等于它的能控能观子系统的传递函数阵。

系统不完全能控、完全能观的，其传递函数阵中必有零点和极点相消的现象，消去的极点是全部固定模。

- ① SISO LTI：存在零极相消 \Leftrightarrow 不是完全能控完全能观的
- ② MIMO LTI：系统不完全能控能观 \Rightarrow 存在零极相消。（后不能推前）可能传递函数阵分母的极点没有因与分子的零点相消而消失，只是因相消降低了阶数。

输入输出稳定：看化简之后的传函，极点全部位于 s 左半平面。

状态稳定：看化简之前的传函， A 的全部特征值均具有负实部

传递函数的实现：

$W(s)$ 必须是物理可实现的：系数为实数、是真有理分式。

能控标准型实现是串联型的。

约旦标准型的实现是并联型的（重根部分积分器串联，其余积分器并联）

最小实现：

同一个 $W(s)$ 可以有不同维度的实现，其中维度最小的实现是最小实现。

是最小实现 \Leftrightarrow 完全能控能观 (LTI)

最小实现不唯一，但是维数唯一。同一传递函数的最小实现是等价的。

能控能观分解因只涉及对 A 、 B 、 C 矩阵的变换，对离散系统均成立。

离散系统传递函数阵的实现是最小实现 \Leftrightarrow 完全能达能观

动态系统的稳定性:

对于 LTI 系统, 平衡状态为 0 且唯一, 若平衡状态是渐进稳定的, 则必然是大范围渐近稳定的。

LTI 系统渐进稳定 \Leftrightarrow 对任一给定的对称正定矩阵 Q , $A^T P + PA = -Q$ 有唯一解, 且 P 也是正定的。 (离散的是 $A^T P A - P = -Q$)

反馈控制设计:

状态反馈不改变系统的能控性, 但不能保证能观性。

输出反馈不改变系统的能控性和能观性。

任意配置极点意味着通过反馈任意改变系统的重要性质 (稳定性、快速性、鲁棒性等)

单输入系统的极点配置问题的解唯一; 多输入系统解不唯一

LTI 系统状态反馈可镇定 \Leftrightarrow 不能控部分渐近稳定。

LTI 通过状态反馈可任意配置极点 \Leftrightarrow 完全能控 (不能改变不能控部分的极点)

LTI 通过状态反馈使闭环系统解耦 \Leftrightarrow 矩阵 E 为非奇异矩阵

LTI 状态观测器极点可以任意配置 $\Leftrightarrow (C, A)$ 完全能观

LTI 状态观测器极点可以配置 (观测器存在) $\Leftrightarrow (C, A)$ 能检测 (存在 G 使 $A+GC$ 的极点均有负实部)

离散定常系统的极点配置:

状态反馈可镇定 $\Leftrightarrow \sigma(A_2)$ 的模都小于 1

状态反馈任意配置极点 \Leftrightarrow 完全能达

带观测器的状态反馈控制器:

分离定理: 闭环系统的极点等于直接状态反馈 ($A+BK$) 的极点和状态观测器 ($A+GC$) 的极点总和, 二者相互独立。 (分离定理仅适用于线性系统)

传递函数不变性: 带有观测器的反馈控制器与直接用状态反馈的控制器的闭环传递函数阵完全相同。

LTI 系统状态反馈和观测器可分开设计 \Leftrightarrow 完全能控能观

动态反馈与动态补偿器的设计:

静态反馈特点 (状态反馈、输出反馈): 不增加新的状态变量, 系统开环与闭环维数相同。为线性反馈, 反馈增益矩阵都是常矩阵。

动态反馈: 在带观测器的状态反馈系统中, 引入一个动态子系统 (状态观测器) 来改善系统性能, 这种动态子系统成为动态补偿器。系统的维数=受控系统维数+动态补偿器维数。

带观测器状态反馈与带补偿器输出反馈系统的等价性:

就传递特性而言, 带观测器的状态反馈系统完全等效于带有串联补偿器和反馈补偿器的输出反馈系统。

带观测器的状态反馈实质上是一个输出动态反馈控制器
LTI 系统能用动态补偿器任意配置极点 \Leftrightarrow 完全能控能观

最优控制：

- 1、实现最优控制的必备条件：系统数学模型；边界条件和目标集；容许控制；性能指标。
- 2、最优控制的主要方法：古典变分法；最大值原理；动态规划法
- 3、典型的最优控制问题：
 - 最小时间问题
 - 最小能量问题
 - 最省燃料问题
 - 状态调节器问题
 - 跟踪问题
- 4、泛函是时间函数的函数，当 t_0 与 t_f 确定， J 是一个常量。 J 为标量泛函。
每给定一个函数 $y(x)$ ， J 就有一个确定的数与之对应。 $J = J(y(x))$
- 5、经典变分法的局限：变分法要求控制变量 u 无约束；变分法要求 f 和 L 关于所有自变量二次连续可微，要求哈密顿函数 H 关于控制变量 u 的偏导数存在。
- 6、最大值原理不要求 H 对 u 的偏导存在
- 7、只有系统正常时，才能用最大值原理求解最小时间问题。
- 8、LTI 系统正常 \Leftrightarrow 每个 (A, b_j) 都是能控对 (b_j 是矩阵 B 的列向量)，即系统对每个控制分量 u_j 都完全能控。(P102)
系统完全能控是系统正常的前提条件。
对于单输入系统，正常与能控等价。
- 9、Bang-Bang 控制：对于 LTI 系统，若系统正常，可应用最大值原理求解时间最优控制问题，其最优控制在容许控制域内，从一个边界值来回切换到另一个边界值，形成 Bang-Bang 控制。

线性二次型问题：

- 1、非时变状态调节器要求系统是完全能控的。
原因：对于有限时间调节器问题， J 总是有限值，其最优解必存在，但在无限时间情况下，当①状态不可控且不可控部分不稳定②不稳定部分会反映在性能指标中（例如 $x_1(t)$ 不可控， $x_1(t) = e^t$ 且在 J 中包含 $x_1(t)$ ），此时会使 J 值变为无穷大。
因此在有限时间的最优控制问题中，并不要求系统是能控的，在优先控制时间区间内，不能控的状态对性能指标所呈现的数值总归是有限的。而当 $t_f \rightarrow \infty$ 时，则必须是能控的，否则性能指标将趋于无穷大而失去最优控制的意义。
- 2、跟踪的实现由两部分组成：状态的线性反馈+系统的外部控制输入（前馈）
 $P(t)$ 的解只与 A 、 B 、 C 、 Q 、 R 、 F 及末端时刻 t_f 有关，与预期输出 y_d 无关
计算 $\xi(t)$ 需要知道 $y^d(t)$ 全部未来值，要实现最优跟踪，不仅要知道全部状态信息 $x(t)$ ，也要掌握全部外部输入信息 $y^d(t)$
- 3、实现最优控制要事先知道全部的信息

带有观测器的最优调节器

极点: 带有观测器的最优调节器的极点集合由调节器的极点与观测器的极点组成
传递函数不变性: 带有观测器的最优调节器与不带观测器的最优调节器有相同的传递函数阵，对研究输入输出关系来讲两者是相同的。

连续时间系统的动态规划:

性能泛函为极小应满足的条件是哈密顿-雅可比方程
与最大值原理类似，但需要求解偏微分方程，要求 $J(x,t)$ 具有连续的偏导数，在工程实际中往往不能满足，限制了动态规划的适用范围。

变分法、最大值原理、动态规划三者间的关系:

- 1、古典变分法不能处理闭集性约束
- 2、最大值原理扩展了古典变分法，可处理闭集约束问题，两者都得到了一组常微分方程表示的必要条件
- 3、动态规划从另一方面发展了变分法，对于连续系统的最优化问题，动态规划给出了一个偏微分方程条件。虽然偏微分方程比常微分方程求解更难，但结果是充分条件。
- 4、三者互有联系，在哈密顿函数上统一了起来。

第 1 章：控制系统导论

1.1 现代控制理论引论

1.2 控制系统状态空间描述

- 基本概念：状态向量、状态空间、状态方程
- 求得状态空间的几种途径：从高阶常微分方程获取、从物理学定律（基尔霍夫电压定律与电流定律）、从传递函数求取等
- 控制系统的状态流图
- 线性系统与非线性系统的线性化（泰勒展开），平衡点的定义等

1.3 线性控制系统的动态响应

- 线性系统的动态响应
- 线性定常系统矩阵指数 e^{At} 求解方法：多项式展开、拉氏变换、凯莱—哈密顿引理
- 状态转移矩阵的性质
- 线性时变系统动态响应



1.4 定常线性系统的传递函数阵

- 通过状态空间方程求解传递函数矩阵

1.5 离散时间系统控制系统的动态响应

- 状态转移矩阵的性质
- 连续时间线性系统的离散化：精确离散化方法、近似离散化方法（差分替代求导）

第2章：控制系统的结构性质

2.1 线性系统的能控性与能观测性

- 能控性、能观性的原始数学定义
- 线性定常系统能控性、能观性的判据（4条，最常见的利用 A, B, C 矩阵方法）
- 能控性和能观性的对偶性质；
- 线性定常离散系统的能控性、能观性判据

2.2 线性系统的线性变换与规范分解

- 状态空间方程的线性变换：化 A 为对角型、约当型、能控标准型等
- 非奇异线性变换的不变性质：特征值、传递矩阵、能控性及能观性
- 线性定常系统的结构分解：子空间、能控子空间、能观子空间、PBH 判据、按照能控/能观进行分解、标准分解

2.3 最小实现问题

- 实现问题：由传递函数矩阵求解相应状态空间（串联实现、并联实现）
- 最小实现：维数最低的实现

2.4 动态系统的稳定性

- Lyapunov 稳定性：稳定、渐近稳定、全局渐近稳定
- 稳定性判据：第一方法（间接法）、第二方法（直接法）
- 线性定常系统的 Lyapunov 方程

第3章：反馈控制系统的 设计

3.1 反馈结构及其系统特性的影响

- 状态反馈、输出反馈
- 对能控性、能观测的影响
- 对系统稳定性的影响

3.2 应用 Lyapunov 第二方法设计反馈控制系统

- 利用 Lyapunov 方程

3.3 极点配置问题

- 系统(A, B)能任意配置极点的条件
- SISO 系统极点配置算法：PPT 上利用状态变换的方法、直接求解的方法
- MIMO 系统极点配置算法
- 其他极点配置算法

3.4 应用状态反馈的解耦控制

- 系统能反馈结构的充分必要条件

第4章：状态观测器和动态反馈

4.1 观测器的结构

- 开环观测器、闭环观测器

4.2 观测器存在的基本定理

- 充要条件：系统能检测，而不是能观

4.3 观测器的设计方法

- PPT 上利用状态变换的方法
- 直接求解的方法
- 全维观测器、降维观测器



4.4 带观测器的状态反馈控制器

- 极点分离定理
- 动态反馈与动态补偿器的设计

第6章：最优控制问题

6.1 最优控制问题的提法及典型的最优问题例子

- 最优问题的要素：系统模型、边界条件与目标集、容许控制范围、性能指标
- 最小时间问题、最小能量问题、最省燃料问题、状态调节器问题等

6.2 解无约束最优控制问题的变分法

- 泛函与变分的定义
- 欧拉—拉格朗日方程
- 自由端点问题与可动边界问题
- 无约束最优控制问题的解
- 有约束最优控制问题的解：最大值原理



第7章：线性二次型最优控制问题

7.1 线性二次型问题的重要性

- 在现实中有广泛用途

7.2 线性二次型问题的解

- 有限时间调节器（时变状态调节器）
- 无限时间调节器（非时变调节器）
- 闭环系统稳定性
- 代数 Riccati 方程求解方法：直接求解非线性代数方程组、求 Riccati 微分方程的最终稳态解、哈密顿矩阵法
- 带有观测器的最优调节器
- 线性二次型跟踪控制器



第8章：离散时间系统的最优控制

8.1 离散的最大值原理

- 满足的离散方程与边界条件

8.3 离散的线性二次型问题

- 离散 Riccati 方程

第9章：动态规划

9.1 动态规划的基本思想

- 最优性原理

9.2 动态规划的基本方程

- 基本方程的由来
- 更一般的形式

9.3 应用动态规划解一般线性二次型问题

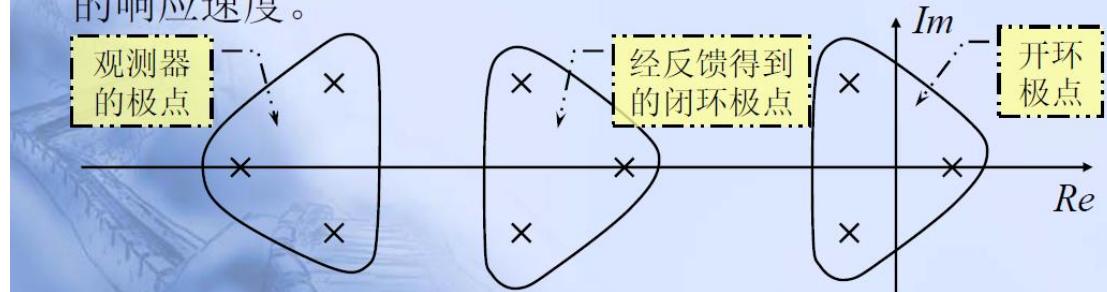
- 熟悉如何反复应用动态规划的基本方程

9.4 连续时间系统的动态规划法

- 与变分法、最大值原理的关系：这两种是必要条件，动态规划是充分条件
- 在哈密顿函数上达到了统一

3. 观测器极点位置的确定

- 当系统完全能观测时可以设计观测器，并且可以将观测器的极点设置在复平面的左半开平面的任意位置。
- 一般原则：观测器的极点应设置在闭环极点更靠左面一些的位置上。这样使得状态估计误差的衰减速度快于系统响应速度，即不会因为加入了观测器而影响闭环系统的响应速度。



- 一方面，要求估计尽量快地逼近系统的实际状态；
- 另一方面，要兼顾状态估计误差的衰减速度与观测器的抗干扰能力。