第一章 线性规划和单纯形法

1．一般线性规划问题的数学模型
2．图解法
3．单纯形法原理
4．单纯形法的计算步骤
5．单纯形法的进一步讨论
6．改进单纯形法

§1 一般线性规划问题的数学模型

1. 问题的提出
2. 线性规划问题的数学模型
3. 线性规划问题的标准形式
4. 线性规划问题的解

1-1. 问题的提出

—— 如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，以取得最好的效益？

【例1】 某企业计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。这两种产品都要分别在A、B、C、D四种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品Ⅰ需占用各设备分别为2、1、4、0h，生产每件产品Ⅱ，需占用各设备分别为2、2、0、4h。已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力分别为12、8、16、12h，又知每生产一件产品Ⅰ企业能获得2元利润，每生产一件产品Ⅱ企业能获得3元利润，问该**企业应安排生产两种产品各多少件，使总的利润收入为最大？**

	I	II	生产能力
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
利润	2	3	

1-1. 问题的提出

用x1、x2分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品的产量：

目标函数 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

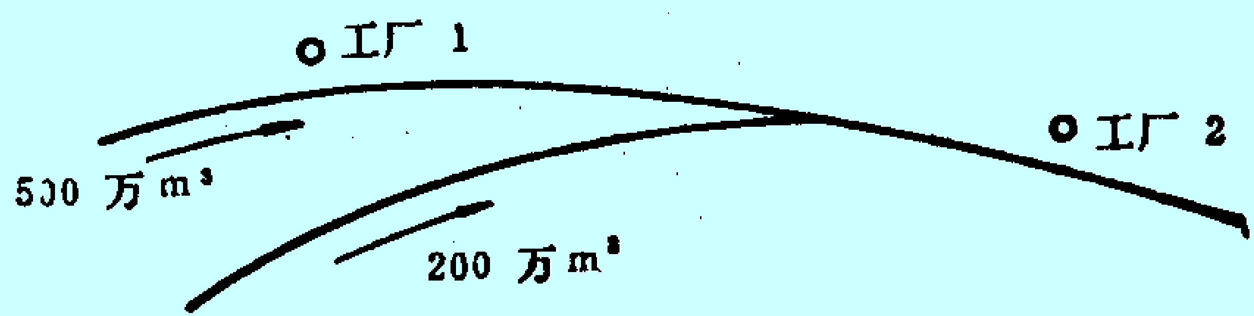
约束条件

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 \le 12 \\
x_1 + 2x_2 \le 8 \\
4x_1 \le 16 \\
4x_2 \le 12 \\
x_1、x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

	I	II	生产能力
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
D	0	4	12
利润	2	3	

1-1. 问题的提出

【例2】 靠近某河流有两个化工厂，流经第一化工厂的河流流量为每天500万m^3，在两个工厂之间有一条流量为每天200万m^3支流。第一化工厂每天排放含有某种有害物质的工业污水2万m^3，第二化工厂每天排放这种工业污水1.4万m^3.从第一化工厂排出的工业污水流到第二化工厂以前，有 20%可自然净化，根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于0.2%。这两个工厂都需各自 处理一部分工业污水。第一化工厂处理工业污水的成本是1000元/万m^3，第二化工厂处理工业污水的成本是800元/万m^3.现在要问**在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使这两个工厂总的处理工业污水费用最小?**



1-1. 问题的提出

用x1、x2分别表示两厂每天处理的污水量（单位：万m^3）：

目标函数： $\min\ z = 1000x_1 + 800x_2$

约束条件：

$(2 - x_1)/500 \le 2/1000 \quad \rightarrow \quad x_1 \ge 1$

$[0.8(2 - x_1) + (1.4 - x_2)]/700 \le 2/1000$

$\rightarrow \quad 0.8x_1 + x_2 \ge 1.6$

即约束条件：

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ 0.8x_1 + x_2 \ge 1.6 \\ x_1 \le 2 \\ x_2 \le 1.4 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1-1． 问题的提出

归纳起来，问题为：

给定一定数量的人力、物力等资源，研究如何充分利用，以发挥其最大效果；

给定计划任务，研究如何统筹安排，用最少的人力和物力去完成。

——运筹学中的规划问题

1-2 线性规划问题的数学模型

规划问题的数学模型包含三个要素：

（1）决策变量 （x_1、x_2、…、x_n）

（2）目标函数

（3）约束条件

如果决策变量是可控的连续变量，目标函数和约束条件都是线性的，则这种模型称为线性规划模型。

线性规划：Linear Programming，缩写LP

1-2 线性规划问题的数学模型

线性规划（LP）数学模型的一般表示形式：

$$\max\ （或\min）\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le （或=，\ge）b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le （或=，\ge）b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le （或=，\ge）b_m \\ x_1，x_2，\ldots，x_n \ge 0 \end{cases}$$

简写为：

$$\max(或\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (或 =，\ge）b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

1-2 线性规划问题的数学模型

向量形式：

$$\max(\text{或}\min)z = CX$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \le (\text{或} =, \ge)\ b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

式中

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1-2 线性规划问题的数学模型

矩阵形式：

$$\max(\text{或}\ \min)\, z = CX$$

$$\begin{cases} AX \le (\text{或} =, \ge)\ b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

约束变量的系数矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1-3 线性规划问题的标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{m}) \\ x_j \geq 0 & (\mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}) \end{cases}$$

- 目标函数为求极大值(有些书上规定是求极小值)
- 约束条件全为等式
- 约束条件右端常数项b_i全为非负值
- 变量x_j的取值为非负。

1-3 线性规划问题的标准形式

★非标准形式向标准形式的转化：

（1）目标函数为求极小值 $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

（2）约束条件为不等式

（3）变量取值无约束

（4）变量≤0

P8 【例3】

1-3 线性规划问题的标准形式

P8 【例3】

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

令 $z' = -z, x_1' = -x_1, x_3 = x_3' - x_3''$

$(x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0)$

1-4 线性规划问题的解

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (a)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}) \qquad (b)\\ x_j\geq 0 & (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}) \qquad (\mathrm{c})\end{cases}$$

相关定义：

可行解 满足约束条件(b)、(c)的解X=（x1，…，xn)^T，，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为**可行域**。

最优解 使目标函数（a）达到最大值的可行解称为最优解。

1-4 线性规划问题的解

相关定义：

基 设A为约束方程组(b)的m*n阶系数矩阵，(设n>m)，其秩为m。B是矩阵A中的一个m*m阶的满秩子矩阵，称B是线性规划问题的**一个基**。不失一般性，设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$$

B中的每一个列向量P_j（j=1，…，m）称为**基向量**，与基向量P_j对应的变量x_j称为**基变量**。线性规划中除基变量以外的其它变量称为**非基变量**。

1-4 线性规划问题的解

相关定义：

基 解 假设系数矩阵A的秩为m，不妨设A中前m个列向量线性独立，方程可以写为

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n$$

令所有非基变量$x_{m+1}=\ldots=x_n=0$， 由|B|≠0，根据克莱姆规则，可得m个基变量的唯一解

$$\bar{X}_B = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m)$$

加上所有取值为0 的非基变量： $\bar{X} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m, 0, \cdots, 0)$

称 $\bar{X}$为线性规划问题的**基解。**

1-4 线性规划问题的解

P10 【例4】

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 & & & & = 12 \\ x_1 + 2x_2 & + x_4 & & & = 8 \\ 4x_1 + 0x_2 & & + x_5 & & = 16 \\ 0x_1 + 4x_2 & & & + x_6 & = 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

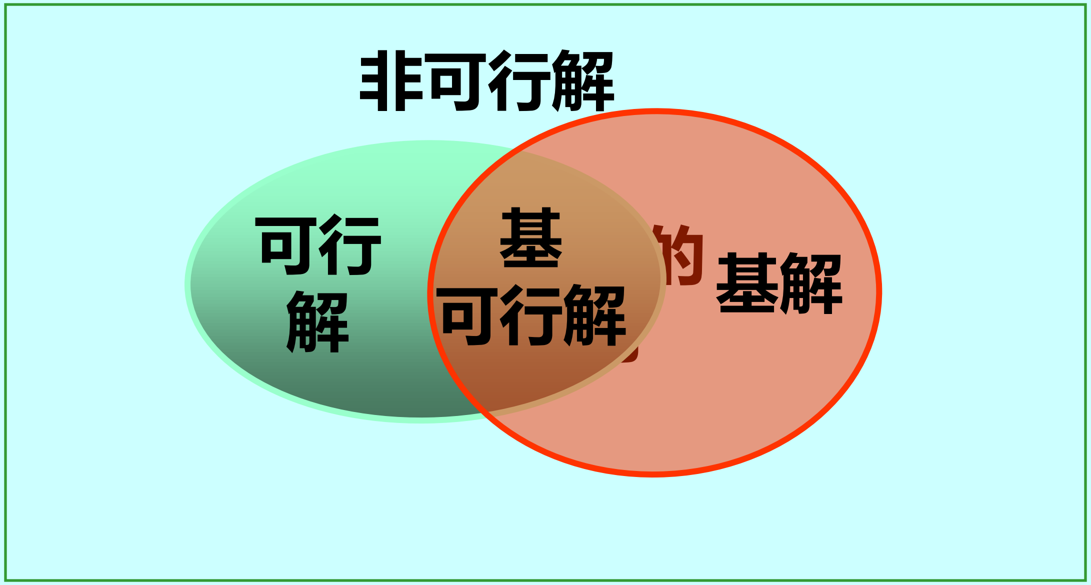
$X=(0,0,12,8,16,12)^T$

1-4 线性规划问题的解

相关定义：

基可行解 满足变量非负约束条件(c)的基 解称为基可行解。

可行基 对应于基可行解的基称为可行基。



§2 图解法

—— 简单直观，但只适用于含两个变量的线性规划问题。

步骤： 建立坐标系，将约束条件在图上表示出来；

确立满足约束条件的解的范围；

绘制出目标函数的图形；

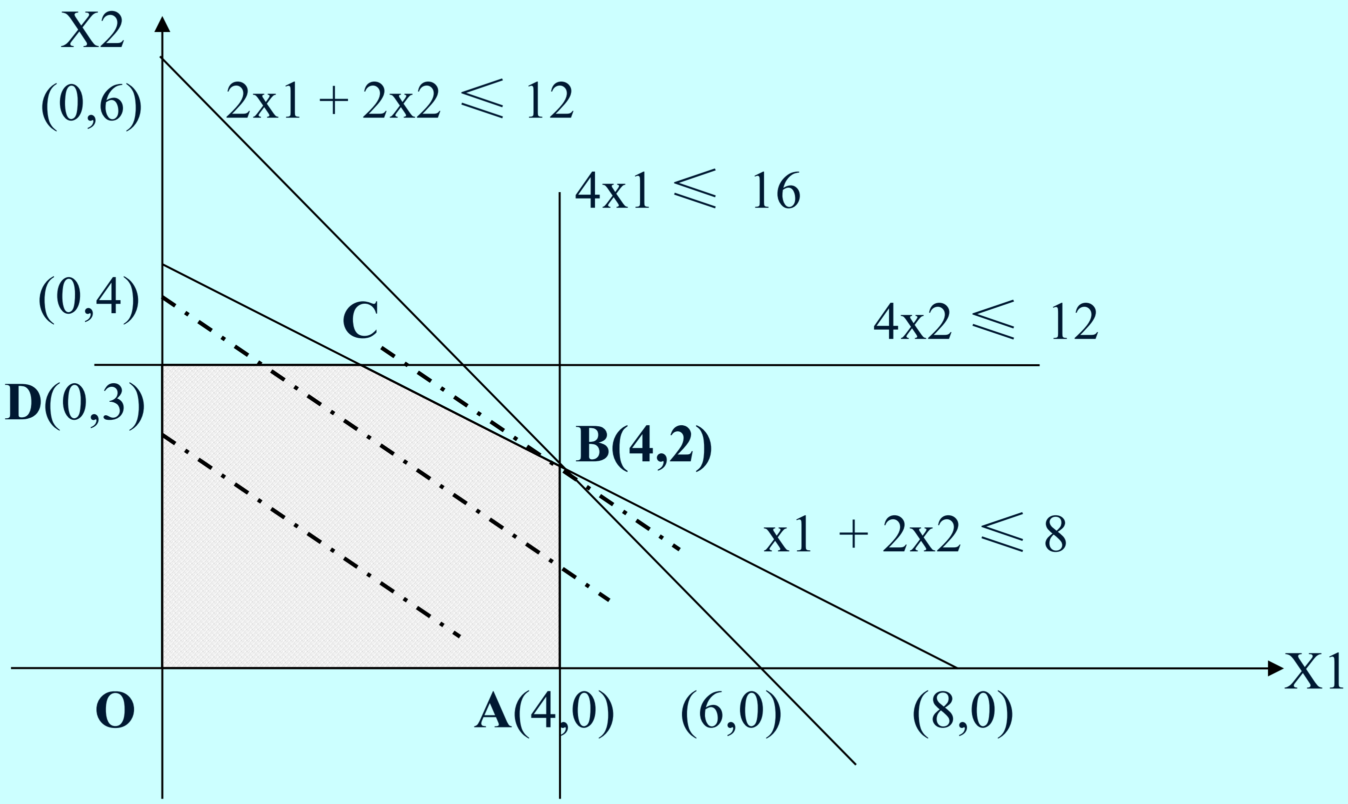
确定最优解。

例： 目标函数 $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & ① \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & ② \\ 4x_1 \le 16 & ③ \\ 4x_2 \le 12 & ④ \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

§2 图解法



最优解：x1 = 4 ， x2 = 2 ， z = 2 x1 + 3 x2 = 14

§2 图解法

★ 线性规划（LP）问题中，解的几种情况：

唯一最优解

无穷多最优解

无界解（或无最优解）

无可行解

§2 图解法

★ 图解法对求解一般线性规划问题的启示：

（1）求解线性规划问题时，解的情况有：唯一最优解、无穷多最优解、无界解、无可行解；

（2）若线性规划问题的可行域存在，则可行域是一个凸集；

（3）若线性规划问题的最优解存在，则最优解或最优解之一(如果有无穷多的话)一定能够在可行域(凸集)的某个**顶点**找到；

（4）解题一般思路：先找出凸集的任一顶点，计算在顶点处的目标函数值。比较周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值更优，如果为否，则该顶点就是最优解的点或最优解的点之一，否则转到比这个点的目标函数值更优的另一顶点，重复上述过程，一直到找出使目标函数值达到最优的顶点为止。

§3 单纯形法原理

单纯形法（simplex method）是求解一般线性规划问题的基本方法，系1947年由丹捷格(G.B.Dantzig)提出。

1．预备知识：凸集和顶点

2．几个定理的证明

3．确定初始基可行解

4．从初始基可行解转换为另一基可行解

5．最优性检验和解的判别

3-1预备知识：凸集和顶点

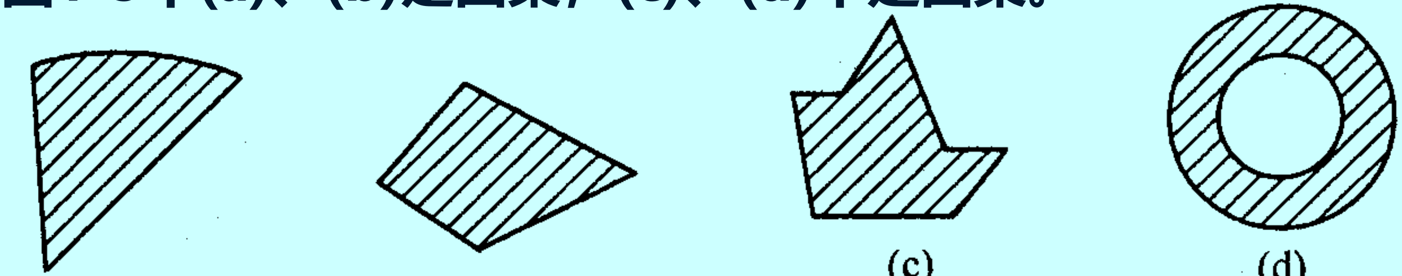
凸集 如果集合C中任意两个点X1、X2的连线上的所有点也都属于集
合C，称集合C为凸集。

X1、X2的连线可表示为 $\alpha X1 + (1-\alpha) X2 \quad (0<\alpha<1)$

则凸集的数学描述为：对任意X1∈C，X2∈C，如果有

$[\alpha X1 + (1-\alpha) X2] \in C$，则称C为凸集。

图1-9中(a)、(b)是凸集，(c)、(d)不是凸集。



(a) (b) (c) (d)

3-1预备知识：凸集和顶点
3-2 基本定理

顶点 设C是凸集，X∈C，若X不能用不同的两点X1∈C和X2∈C的线性组合表示为 $X=\alpha X1+(1-\alpha)X2 \quad (0<\alpha<1)$ 则称X为凸集C的顶点。

定理1：若线性规划问题存在可行解，则其可行域C是凸集。

引理：线性规划问题的可行解 $X=(x_1\ x_2 \ldots x_n)^T$ 是基本可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

定理2：线性规划问题的基本可行解X对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点。

3-2 基本定理

定理3：若线性规划问题有最优解，一定存在一个基可行解是最优解。

结论：

1．若线性规划问题有最优解，则必可在有限的基可行解中去找。

2．若线性规划问题有最优解，则基可行解中 z 值最大的就是最优解。

3． $\max z = CX$

$AX = b$， $X \geq 0$

若可行域$D \neq \varphi$，而$A > 0$，则线性规划问题一定有最优解。

3-3 确定初始基可行解

基本思路：先找到一个初始基可行解，如果不是最优解，设法转换到另一个基可行解，并使目标函数值不断增大，一直到找到最优解为止。

问题关键：如何找到初始基可行解?

（1）约束条件为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ **，(i=1,2,…,m)**

加松弛变量

（2）约束条件为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ **或** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$**，(i=1,2,…,m)**

—— 添加人工变量

3-4 从初始基可行解转换为另一基可行解

$X^{(0)} = (x_1^0 \ldots x_n^0)^T$

$X^{(1)} = [(x_1^0 - \theta a_{1,j}), \ldots, (x_m^0 - \theta a_{m,j}), 0 \ldots \theta \ldots 0)]^T$

取

$$\theta = \min\left\{\frac{x_i^0}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0\right\} = \frac{x_l^0}{a_{lj}}$$

3-5 最优性检验和解的判别

$X^{(0)} = (x_1^0 \ldots x_m^0, \ 0 \ldots 0)^T$

$X^{(1)} = [\ (x_1^0 - \theta a_{1,j}),\ \ldots,\ (x_m^0 - \theta a_{m,j}),\ 0 \ldots \theta \ldots 0)\ ]^T$

$$Z^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0$$

$$Z^{(1)} = \sum_{i=1}^{m} c_i [x_i^0 - \theta\, a_{ij}] + \theta\, c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0 + \theta\, [c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}] = Z^{(0)} + \theta\, [c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}]$$

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

通常简写为 $c_j - z_j$ 或 σ_j

—— 线性规划问题解最优性的检验标志

3-5 最优性检验和解的判别

$$
\begin{array}{ccccccc}
p_1 & p_2 & \cdots & p_m & p_{m+1} & \cdots & p_n \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
0 & 1 & & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{m,n} & b_m
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = b_1 - a_{1,\ m+1}\, x_{m+1} - \ldots a_{1,\ n}\, x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_m = b_m - a_{m,\ m+1}\, x_{m+1} - \ldots a_{m,\ n}\, x_n
\end{cases}
$$

3-5 最优性检验和解的判别

令$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$，可得 $x_i = b_i$，（$i = 1, 2, \ldots, m$）

因$b_i \geq 0$，故得到初始基可行解：

$$X^{(0)} = (x_1 \ldots x_m \ 0 \ldots 0)^T = (b_1 \ldots b_m \ 0 \ldots 0)^T$$

$$Z^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

3-5 最优性检验和解的判别

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1,\ m+1} x_{m+1} - \dots a_{1,\ n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = b_m - a_{m,\ m+1} x_{m+1} - \dots a_{m,\ n} x_n \end{cases}$$

代入目标函数，整理得：

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) x_j$$

令 $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$ $\sigma_j = c_j - z_j$

则

$$z = z^{(0)} + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j$$

3-5 最优性检验和解的判别

1．最优解的判断判断定理：

若$X^{(0)}=(b_1 \dots b_m\ 0 \dots 0)^T$为对应于基B的一个基可行解，且对于一切$(j=m+1, \dots, n)$有$\sigma_j \le 0$，则$X^{(0)}$为最优解，称$\sigma_j$为检验数。

2．若$(\sigma_{m+1} \dots \sigma_n)^T=\sigma_N<0$，则最优解是唯一的。

基可行解$X^{(0)}=(b_1 \dots b_m\ 0 \dots 0)^T=(X_B{}^T\ X_N{}^T)^T$

若$X_B>0$，$X_N=0$，则称此基可行解是非退化的；

若X_B中包含0元素，则称为退化解。

对于非退化基可行解$X^{(0)}$，其附近必有可行解。

3-5 最优性检验和解的判别

3．对于非退化解，若$\sigma_N \leq 0$，又存在某个非基变量的检验数$\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。（P26 例7）

4．若$X^{(0)}=(b_1 \ldots b_m \ \ 0 \ldots \ 0)^T$为一个基可行解，有一个$\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1，2，\ldots，m$有$a_{i,\ m+k} \leq 0$，则该线性规划问题具有无界解。（P27 例8）

5．若σ_N中存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}>0$，则对应基可行解不是最优解。

例如：假设$\sigma_{m+1}=5>0$，

则 $Z^{(1)}=Z^{(0)}+5\varepsilon_{m+1}>Z^{(0)}$

§4 单纯形法的计算步骤

第一步：求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

	$c_j \rightarrow$		c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
C_B	基	b	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	1		0	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	$\ddots$	0	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\cdots$
c_m	x_m	b_m	0		1	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}
	$c_j - z_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$	$\cdots$	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$

§4 单纯形法的计算步骤

第二步：进行最优性检验

第三步：从一个基可行解转换到另一个目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表。

（1）确定换入基的变量（简称换入变量）

$$\sigma_k = \max_j \left\{ \sigma_j \middle| \sigma_j > 0 \right\}$$

x_k为换入变量。

（2）确定换出基的变量（简称换出变量）

$$\theta = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

x_l为换出变量。　a_{lk} —— 主元素

§4 单纯形法的计算步骤

（3）用换入变量x_k替换基变量中的换出变量x_l，得到新的基和新的基可行解，画出新的单纯形表。

	$c_j \rightarrow$		c_1	$\cdots$	c_l	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
C_B	基	b	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1'	1	$\cdots$	$-a_{1k}/a_{lk}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1j}'	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1n}'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_k	x_k	b_l/a_{lk}	0	$\cdots$	$1/a_{lk}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{lj}'	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{ln}'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	b_m'	0	$\cdots$	$-a_{mk}/a_{lk}$	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{mj}'	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{mn}'
	$c_j - z_j$		0	$\cdots$	$(c_l - z_l)'$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(c_j - z_j)'$	$\cdots$	0	$\cdots$	$(c_n - z_n)'$

§4 单纯形法的计算步骤

$$b_l' = \frac{b_l}{a_{lk}} \qquad a_{lj}' = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$b_i' = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} \cdot a_{ik} \qquad a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \cdot a_{ik} \quad (i \neq 1)$$

$$(c_l - z_l)' = -\frac{1}{a_{lk}}(c_k - z_k)$$

$$(c_j - z_j)' = (c_j - z_j) - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}(c_k - z_k)$$

§4 单纯形法的计算步骤

p20 【例5】

目标函数 $\max\ z = 2x_1+3x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

§5 单纯形法的进一步讨论

5-1 人工变量法

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$ **松弛变量** ➔ $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$ **人工变量 x_{n+1}，…，x_{n+m}**

5-1 人工变量法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geqslant 0$$

基： $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$

初始基可行解：$X^{(0)} = (0\dots0\ b_1 \dots\ b_m)^T$

5-1 人工变量法

1．大M法

对最大化问题，令目标函数中人工变量的系数为（－M）（M为任意大的正数）。

对最小化问题，令目标函数中人工变量的系数为（M）（M为任意大的正数）。

经过基变换，若基变量中不再含有非零的人工变量，则原问题有解；若最优表中还有某个非零的人工变量仍在基变量中，则原问题无可行解。

P22 【例6】

5-1 人工变量法

2．两阶段法

第一阶段：求解目标函数中只包含人工变量的线性规划问题。

$$\min \omega = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad x_{n+m} = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

5-1 人工变量法

如果得到ω = 0，则该最优解是原问题的可行解。

第二阶段：从第一阶段得到的最终单纯形表中去掉人工变量，按原问题的目标函数继续求解。

P24-25 用两阶段法求解【例6】

5-2 关于解的判别

【例7】 $\sigma_N \le 0$，又存在某个非基变量的检验数$\sigma_j = 0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

【例8】 有一个$\sigma_{m+k} > 0$，并且对i=1，2，…，m有$a_{i,\ m+k} \le 0$，则该线性规划问题具有无界解。

【例9】当所有$\sigma_j \le 0$ 时，人工变量仍留在基变量中且不为零，原问题无可行解。

5-3 单纯形法小结

1．对给定的线性规划问题，首先化为标准形式，选取或构造一个单位矩阵作为基，求出初始基可行解并列出初始单纯形表。

2．按步骤进行计算。

§6 改进单纯形法

线性规划矩阵形式：

$$\max z = CX \qquad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = CX \qquad \begin{cases} AX + IXs = b \\ X,\ Xs \ge 0 \end{cases}$$

初始解	非基变量		基变量
b	B	N	I
$c_j - z_j$	$\underbrace{\qquad\qquad}_{\sigma_N}$		0， …， 0

基可行解	基变量	非基变量	
b’	I	N’	B^{-1}
$c_j - z_j$	0， …， 0	σ'_N	$-y_1$， …， $-y_m$

§6 改进单纯形法

$$b' = B^{-1}b$$

$$N' = B^{-1}N \qquad P_j' = B^{-1}P_j$$

$$-Y = (-y_1, \cdots, -y_m) = 0 - C_B B^{-1} = -C_B B^{-1}$$

$$\sigma_N' = C_N - C_B N' = C_N - C_B B^{-1} N$$

$$\sigma_j' = c_j - C_B P_j' = c_j - C_B B^{-1} P_j$$

§6 改进单纯形法

改进单纯形法的计算步骤：

（1）确定下一步迭代的基变量，求出其在初始单纯形表中对应基矩阵B的逆矩阵B -1 ，及新的基可行解 $X_B = B^{-1}b$

（2）计算非基变量的检验数 $-Y = -C_B B^{-1}$ 和 $\sigma'_N = C_N - C_B B^{-1} N$，如果有$\sigma_N$'≤0、 - Y≤0，可进一步判别该线性规划问题是属于无可行解、无穷多最优解还是唯一最优解，计算结束。否则找出最大的正检验数σ_k，其对应的变量x_k即为换入变量。

§6 改进单纯形法

改进单纯形法的计算步骤：

（3）产生P_k' 列的数字，有 $P_k' = B^{-1}P_k$，如P_k'≤ 0，线性规划问题有无界解，计算结束。否则按最小比值原则来确定第l行基变量x_l为换出变量，即

$$\theta = \min_i \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \middle| (B^{-1}P_k)_i > 0 \right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_k)_l}$$

§6 改进单纯形法

改进单纯形法的计算步骤：

（4）用非基变量x_k替换基变量x_l得出下一步单纯形表中的基变量。

（5）重复（1）～（4）步，一直到计算结束为止。

★ 逆矩阵B^{-1}的迭代计算

★ 改进单纯形法优点：存储量少；计算量少；累积误差小。