第五章 目标规划

1．问题的提出与目标规划的数学模型
2．目标规划的图解分析法
3．用单纯形法求解目标规划

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

多目标决策问题——多目标线性规划——目标规划

目标规划（goal programming）：强调系统性，寻找一个“**尽可能**”满足所有目标的解，而**不是绝对满足**这些目标。

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

【例1】 某企业计划生产I、II两种产品。这两种产品都要分别在A、B、C三种不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品I需占用各设备分别为2、4、0h，生产每件产品II，需占用各设备分别为2、0、5h。已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力分别为12、16、15h，又知每生产一件产品I企业能获得2元利润，每生产一件产品II企业能获得3元利润，问该企业应安排生产两种产品各多少件，使总的利润收入为最大。

目标函数 $\max\ z = 2x_1+3x_2$

约束条件

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 \le 12 \\
4x_1 \le 16 \\
5x_2 \le 15 \\
x_1、x_2 \ge 0
\end{cases}
$$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

其他目标：

（1）力求使利润指标不低于15元；

（2）考虑到市场需求，I、II两种产品的生产量需保持约1:2的比例；

（3）A为贵重设备，严格禁止超时使用；

（4）设备C必要时可以加班，但加班时间要控制；设备B既要求充分利用，又尽可能不加班。B的重要性是C的三倍；

线性规划模型的局限性:

第一，要求问题的解必须满足全部约束条件；刚性约束；

第二，只能处理单目标的优化问题；

第三，各个约束条件都处于同等重要地位；

第四，寻求最优解，但很多实际问题中只需找出满意解就可以。

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

目标规划通过以下几个方面来解决上述线性规划建模中的局限性。

1．设置偏差变量，用来表明实际值同目标值之间的差异。

d^+ —— 超出目标的差值，正偏差变量

d^- —— 未达到目标的差值，负偏差变量

实际值超出目标值 ： $d^- = 0, \quad d^+ > 0$

实际值未达到目标值： $d^- > 0, \quad d^+ = 0$

实际值等于目标值 ： $d^- = 0, \quad d^+ = 0$

因此： $d^- \cdot d^+ = 0$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

2．统一处理目标和约束，将约束分为系统约束和目标约束。

对资源使用上有严格限制的建立系统约束，数学形式上为严格的等式或不等式（同线性规划中的约束条件）。对不严格限定的约束，连同原线性规划模型的目标，通过目标约束表达。

系统约束：$2x_1 + 2x_2 \le 12$

目标约束：

（1）I、II两种产品的生产量需保持1:2的比例

$x_1 / x_2 = 1/2$　　　　$2x_1 - x_2 = 0$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

当产品I产量小于产品II产量，有负偏差d^-：

$2x_1 + d^- = x_2$，即 $2x_1 - x_2 + d^- = 0$

当产品I产量大于产品II产量，有正偏差d^+：

$2x_1 - d^+ = x_2$，即 $2x_1 - x_2 - d^+ = 0$

因正负偏差不可能同时出现，故 $2x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0$

若希望产品I产量**不低于**产品II产量的2倍，即不希望 $d^- > 0$，目标约束为：

$$\begin{cases} \min\left\{d^-\right\} \\ 2x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

若希望产品I产量低于产品II产量的2倍，即不希望 $d^+ > 0$，目标约束为：

$$\begin{cases} \min\{d^+\} \\ 2x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

若希望产品I产量等于产品II产量的2倍，即不希望 $d^- > 0$，也不希望 $d^+ > 0$，目标约束为：

$$\begin{cases} \min\{d^- + d^+\} \\ 2x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

（2）力求使利润指标不低于15元

$$\begin{cases} \min\{d^-\} \\ 2x_1 + 3x_2 + d^- - d^+ = 15 \end{cases}$$

（3）设备C必要时可以加班，但加班时间要控制

$$\begin{cases} \min\{d^+\} \\ 5x_2 + d^- - d^+ = 15 \end{cases}$$

（4）设备B既要求充分利用，又尽可能不加班

$$\begin{cases} \min\{d^- + d^+\} \\ 4x_1 + d^- - d^+ = 16 \end{cases}$$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

3．目标的优先级与权系数。

优先因子 $P_1 >> P_2 >> P_3 \dots$

对属于同一层次优先级的不同目标，按其重要程度可分别乘上不同的权系数——一个具体数字，权系数越大，表示目标越重要。

P1：力求使利润指标不低于15元；

P2：Ⅰ、Ⅱ两种产品的生产量需保持1:2的比例；

P3：设备C必要时可以加班，但加班时间要控制；设备B既要求充分利用，又尽可能不加班；且设备B的重要性是设备C重要性的3倍。

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + 3P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_3 d_4^+ \tag{5.1a}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 & (5.1\text{b}) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 & (5.1\text{c}) \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (5.1\text{d}) \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 & (5.1\text{e}) \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 & (5.1\text{f}) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geqslant 0 \ (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

目标规划适用于多个目标并且还可以带有从属目标的规划问题。

目标规划的一般数学模型可表示为：

§1．问题的提出与目标规划的数学模型

$$\min z = \sum_{k=1}^{K} P_k \sum_{l=1}^{L} (w_{kl}^- d_l^- + w_{kl}^+ d_l^+) \qquad (5.2a)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=,\ge) b_i & (i=1,\cdots,m) \quad (5.2b) \text{ 系统约束} \\ \sum_{j=1}^{n} c_j^{(l)} x_j + d_l^- - d_l^+ = g_l & (l=1,\cdots,L) \quad (5.2c) \text{ 目标约束} \\ x_j \ge 0 & (j=1,\cdots,n) \quad (5.2d) \\ d_l^-, d_l^+ \ge 0 & (l=1,\cdots,L) \quad (5.2e) \end{cases}$$

P_k :第k级优先因子，$k=1,\cdots,K$

w_{kl}^-, w_{kl}^+ :赋予第l个目标约束的正负偏差 变量权系数

g_l :第l个目标的预期目标值，$l=1,\cdots,L$

§1. 问题的提出与目标规划的数学模型

表 5－1

	线性规划模型	目标规划模型
变量	只含决策变量	分决策变量与偏差变量
约束条件	系统（刚性）约束	分系统约束和目标约束
目标函数	为决策变量的函数	为偏差变量的函数，并按优先级、权系数区分重要程度
求解结果	寻找最优解（有可能无可行解）	寻找满意解

§2. 目标规划的图解分析法

适用于模型中**只含有两个变量**（偏差变量不计入）的目标规划问题。

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + 3P_3(d_3^- + d_3^+) + P_3 d_4^+ .$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & (0) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (2) \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 & (3) \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 & \\ \quad (i = 1, \cdots, 4) & \end{cases}$$

§2．目标规划的图解分析法

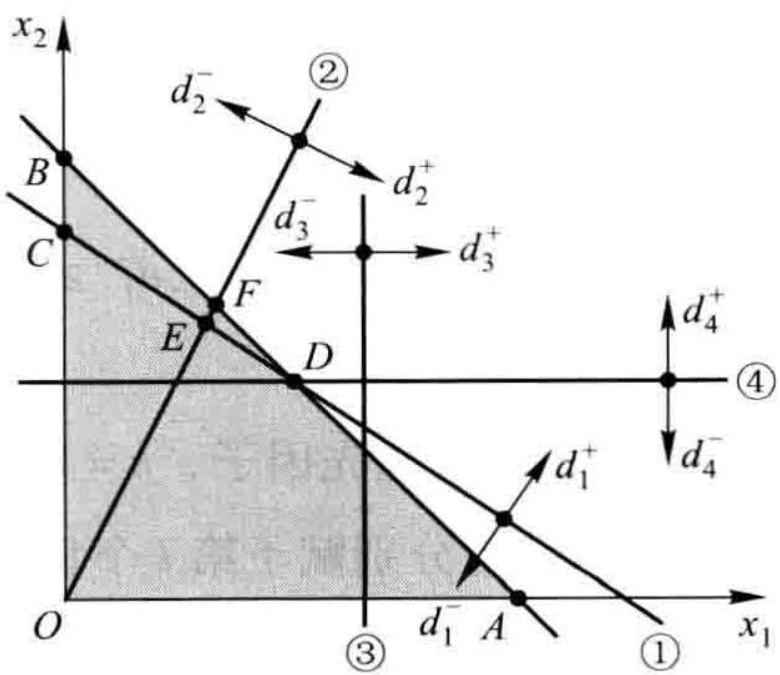

图 5－1

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + 3P_3(d_3^- + d_3^+) + P_3 d_4^+ .$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & (0) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (2) \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 & (3) \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 & (4) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \\ (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

满意解：x1 ＝ 2 ， x2 =4，利润 16

§3. 用单纯形法求解目标规划

【例3】用单纯形法求解下述目标规划问题：

$$\min z = P_1(d_1^- + d_2^+) + P_2 d_3^-$$

$$\begin{cases} x_1 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 100 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

第1步:列出初始单纯形表。由于目标规划中的目标函数一定是求极小，**为方便起见不转换成求极大**。又由于各目标约束中的负偏差变量其系数均为单位向量，**全部负偏差变量的系数列向量构成一个基**。

§3．用单纯形法求解目标规划

$c_j \rightarrow$			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
P_1	d_1^-	10	[1]	0	1	−1				
0	d_2^-	40	2	1			1	−1		
P_2	d_3^-	100	3	2					1	−1
$c_j - z_j$		P_1	−1			1		1		
		P_2	−3	−2						1

第2步:确定换入变量。

表 5-2

$c_j \rightarrow$			0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	10	1	0	1	−1				
0	d_2^-	20		1	−2	[2]	1	−1		
P_2	d_3^-	70		2	−3	3			1	−1
$c_j - z_j$		P_1			1			1		
		P_2		−2	3	−3				1

§3．用单纯形法求解目标规划

第3步:确定换出变量。

第4步:用换入变量替换基变量中的换出变量，进行迭代运算

表 5-3

	$c_j \to$		0	0	P_1	0	0	P_1	P_2	0
C_B	基	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	20	1	1/2			1/2	−1/2		
0	d_1^+	10		[1/2]	−1	1	1/2	−1/2		
P_2	d_3^-	40		1/2			−3/2	3/2	1	−1
$c_j - z_j$		P_1			1			1		
		P_2		−1/2				−3/2		1
0	x_1	10	1		1	−1				
0	x_2	20		1	−2	2	1	−1		
P_2	d_3^-	30			1	−1	−2	2	1	−1
$c_j - z_j$		P_1			1			1		
		P_2			−1	1	2	−2		1

§3．用单纯形法求解目标规划

1．对目标函数的优化是**按优先级顺序**逐级进行的。

2．从考察P2行以下的检验数时，注意应包括更高级别的优先因子在内。

判断迭代计算应否停止的准则为:

(1)检验数P_1，P_2，…，P_k行的**所有值均为非负**;

(2)若P_1，…，p_i行所有检验数为非负，第P_{i+1}行存在负检验数，但在**负检验数所在列的上面行中有正检验数**。

§3. 用单纯形法求解目标规划

根据目标规划求解思路是从高优先级到低优先级逐层优化的原则，为保证较低层级优化在较高层级优化范围内进行，可将上一层次目标的优化值作为约束，加到下一层次的模型中．下面通过例子讲述求解目标规划的层次算法步骤．

$$\mathrm{LP}_1: \ \min z_1 = d_1^-$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ x_1, \ x_2, \ d_i^-, \ d_i^+ \geqslant 0 \ (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

§3．用单纯形法求解目标规划

$$\mathrm{LP}_2: \quad \min z_2 = d_2^- + d_2^+$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ \qquad 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ d_1^- = 0 \\ x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0 \ (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

§3. 用单纯形法求解目标规划

$$\mathrm{LP}_3: \quad \min z_3 = 3(d_3^- + d_3^+) + d_4^+$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 15 \\ 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 4x_1 \qquad + d_3^- - d_3^+ = 16 \\ \qquad 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 15 \\ d_1^- = 0 \\ d_2^- + d_2^+ = 0 \\ x_1,\ x_2,\ d_i^-,\ d_i^+ \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

§3. 用单纯形法求解目标规划

表 5－5 LP_1—LP_3 的求解结果

	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	z^*
LP_1	1.875	3.75	0	0	0	0	8.5	0	0	3.75	0
LP_2	1.875	3.75	0	0	0	0	8.5	0	0	3.75	0
LP_3	2.0	4.0	0	1.0	0	0	8.0	0	0	5.0	29.0