

一 N皇后问题

解法共 $n!$ 种, 找出所有解的复杂度较低方法为状态空间法

问题分析 可以使用状态空间法进行求解 (N皇后)

定义解的形式为 n 元组 $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, 向量中的元素 x_n 代表放置在第 n 行的皇后的列位置

解对于整数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) 应满足约束:

$$\textcircled{1} x_i \neq x_j$$

$$\textcircled{2} |i - j| \neq |x_i - x_j|$$

求解过程

- 1 创建一个解集合 S 用于存放所有解 V , 起初为空集
- 2 初始化空棋盘
- 3 假设正在处理第 k 列 ($1 \leq k \leq n$), 依次尝试将皇后放在 (k, col) 位置. 检查其是否已经和前 $k-1$ 行放置的皇后冲突. 如果冲突, 放弃该尝试 $col+1$; 若安全, 暂时认为其有效. 递归的对第 $k+1$ 行进行分析
- 4 如果 k 行的全部 N 列都找不到安全位置, 回退到 $k-1$ 行, 撤销这一行的皇后位置并尝试下一列
- 5 当处理完全部 n 行, 且没有产生冲突, 将找到的解 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 保存到 S 中, 回溯寻找其他可行解
- 6 当回溯退回第一行且这一行所有列都尝试完毕, 返回 S , 算法结束

A*算法

概念: 一种典型启发式算法, 用于在静态路网中求解最短路径

思想: 采用估值函数 $f(n) = g(n) + h(n)$, 使用了启发式算法思想,

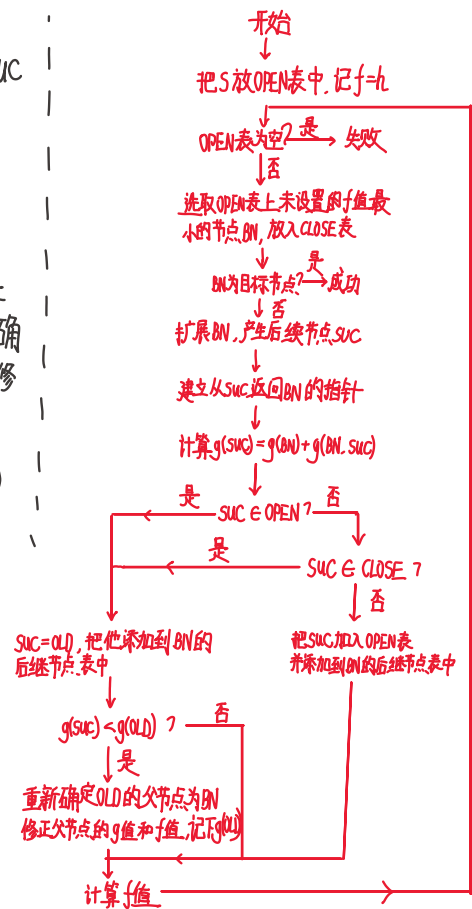
能够比 UCS 算法更高效地找到一个较好的解或者最优解

关系 当 $g(n) = 0$ 或 $h(n) \gg g(n)$, 退化为贪婪最佳优先搜索. 当 $h(n) = 0$, 退化为 UCS (一致代价搜索)

A* 算法保证最优的要求: $h(n)$ 满足可采纳性、一致性

求解流程

- (1) 把S放入Open表中, 记 $f=h$, 令 Close 为空集
- (2) 若 OPEN 为空表, 宣告失败
- (3) 选取 Open 表中未设置过的具有最小 f 值的节点, 为最佳节点 BN
- (4) 若 BN 为目标节点, 成功求解
- (5) 若 BN 不是目标节点, 扩展之, 产生后继节点 SUC
- (6) 对所有后继节点 SUC, 重复下列过程
 - (a) 建立从 SUC 返回 BN 的指针
 - (b) 计算 $g(SUC) = g(BN) + g(BN, SUC)$
 - (c) 如果 $SUC \in \text{Open 表}$ 或 $SUC \in \text{Close 表}$, 称为点为 OLD, 将其添加到 OLD 的后继节点表
 - (d) 比较新旧路径代价: 若 $g(SUC) < g(OLD)$, 重新确定 OLD 的父节点为 BN, 记下较小代价 $g(OLD)$, 修正父节点 g 和 f 的值, 否则停止扩展节点
 - (e) 若 SUC 既不在 OPEN 表中, 也不在 CLOSE 表中, 将其加入 OPEN 表, 并加入 BN 后继节点表, 然后转向 (7)
- (7) 计算 f 值, 回到 (2)



图搜索要维护一个 OPEN 表和 CLOSE 表, 前者保存已被发现但是未尚扩展的点, 后者保存已经扩展完的点

图搜索算法

状态空间图大小 $M+|E|$

b 为分支因子

d 为目标节点所在最浅深度

m 状态空间中任意路径最大长度

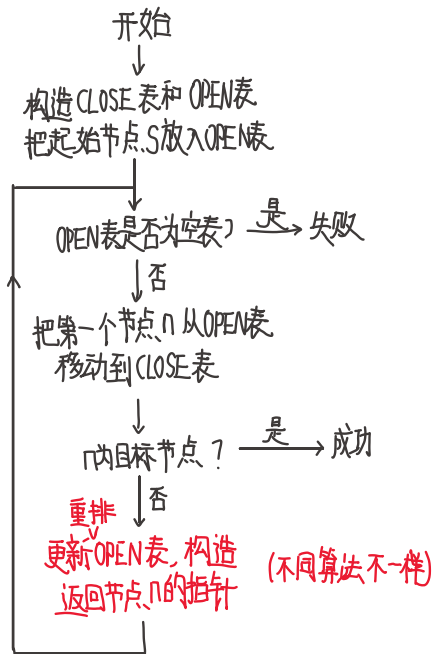
BFS: 时间复杂度 $O(b^d)$ 、空间复杂度 $O(b^d)$ 完备性 ✓ 最优性 ✓

DFS 时间复杂度 $O(b^m)$ 、空间复杂度 $O(b^m)$ 完备性: ~~图完备~~ 树搜索不完备 不是最优

有界DFS: 引入深度探索界限 l 时间复杂度 $O(b^l)$ 、空间复杂度 $O(b^l)$

$l < d$ 不完备 $l > d$ 非最优

图搜索通用流程图



UCS算法: 时间、空间复杂度 $O(b^{l^* \lceil C^*/\epsilon \rceil})$
 \hookrightarrow 从起点到终点最短路径
↓
最优解代价 每一步代价

最优性 ✓
完备性: 没有负权代价时完备

Dijkstra 求一个点到其它所有点最短路径

启发式算法

$f(n)$: 评价函数/估价函数, 从起始点经过节点 n 到目标点的代价估计

$g(n)$ 从起始点到节点 n 的实际代价 $h(n)$: 从节点 n 到目标点的代价估计值
↓ 越接近目标

$f(n) = g(n) \rightarrow \text{UCS}$

$f(n) = h(n) \rightarrow$ 贪婪最佳优先搜索 对于 n 和其后续节点 n' , 满足
 $h(n) \leq c(n, n') + h(n')$

$f(n) = g(n) + h(n) \rightarrow \text{A算法}$

$f(n) = g(n) + h(n) \rightarrow \text{A}^* \text{算法}$

↓
对启发函数
无限制

↓
启发函数必须满足“可采纳性”、“一致性”
↓
 $h(n)$ 不大于实际代价 $h^*(n)$

贪婪算法: 最差时退化为 DFS 不完备、不总是最优 时间/空间复杂度 $O(b^m)$

A算法: 不完备、不最优

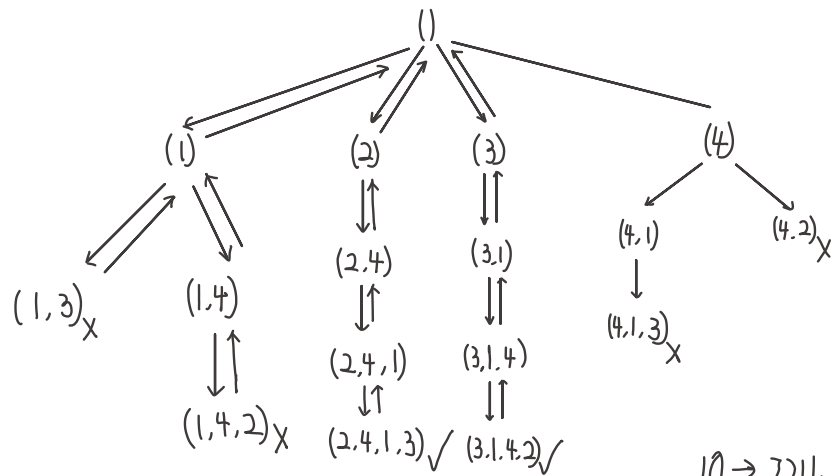
A*算法: 要求 $h(n)$ 满足可采纳性, 最优、完备

时间复杂度 $O(b^{\text{ed}})$

空间复杂度 指数级

↓
本质上是基于优先级的 BFS

→ 启发式相对错误



4皇后 $\Rightarrow 2$

5 $\Rightarrow 10$

6 $\Rightarrow 4$

7 $\Rightarrow 40$

8 $\Rightarrow 92$

10 $\Rightarrow 724$

9 $\Rightarrow 352$

