第三章

反馈控制系统的设计

第三章 反馈控制系统的设计

- §3.1 反馈结构及其对系统特性的影响
- §3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈系统
- §3.3 极点配置
- §3.4 应用状态反馈的解耦控制

§ 3.1 反馈结构及其对系统特性的影响

3.1.1 两种常用的反馈结构

对于定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{y}$ 分别为n维、m维和r维向量；A, B, C 分别为$n\times n$, $n\times m$, $r\times n$ 实数矩阵。

1) 状态反馈

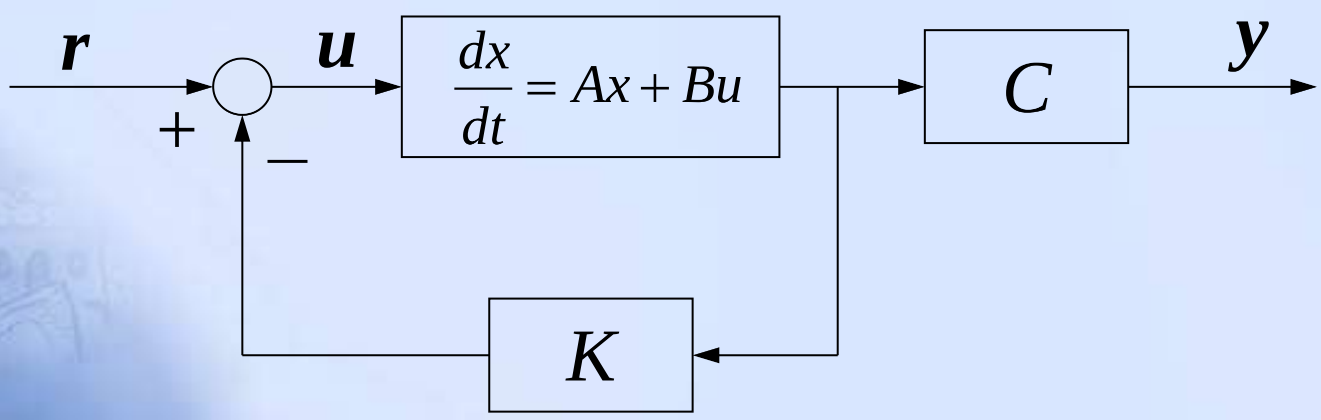
$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{r}(t) - K\boldsymbol{x}(t)$$

- K 称为反馈增益矩阵。

- 系统的状态反馈动态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

- 状态反馈系统结构框图为：



- 闭环传递函数阵为：

$$G_K(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

2) 输出反馈

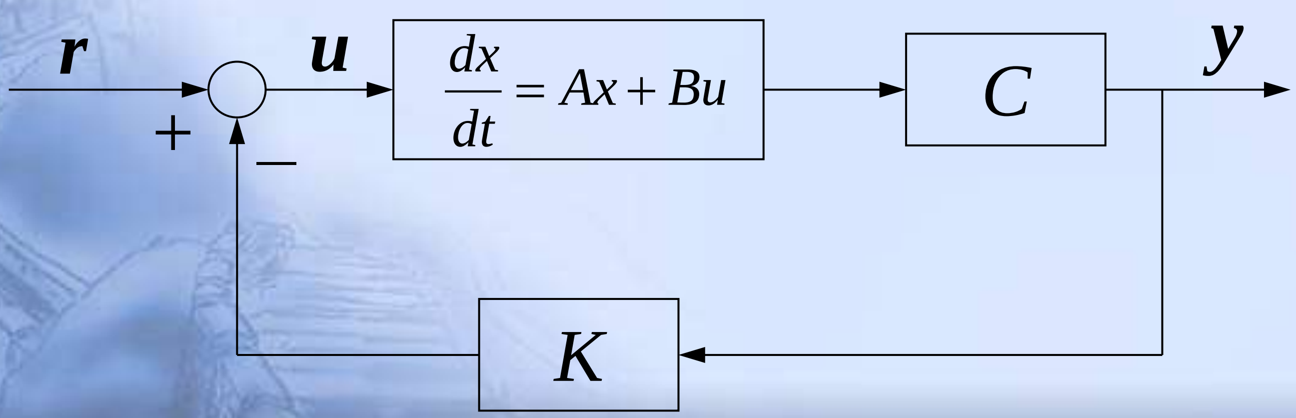
$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{r}(t)-K\boldsymbol{y}(t)$$

- 应用输出反馈得到的闭环系统的状态方程为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=(A-BKC)\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}\end{cases}$$

- 闭环传递函数阵为:

$$G_K(s)=C(sI-A+BKC)^{-1}B$$



3.1.2 反馈结构对系统性能的影响

1) 对系统的能控性和能观测性的影响

定理3.1 **状态反馈不改变系统的能控性**，即(A, B)能控等价于$(A-BK, B)$能控。

证：应用关系式

$$[\lambda I-(A-BK)\vdots B]=[\lambda I-A\vdots B]\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$$

对任意矩阵K, 矩阵$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_m \end{bmatrix}$总是满秩。

因此$rank[\lambda I-(A-BK)\vdots B]=rank[\lambda I-A\vdots B]$

对所有λ成立，因此(A, B)能控等价于$(A-BK, B)$能控。(根据能控性判据4)

定理3.2 输出反馈不改变系统的能控性和能观测性。

证明：

由 $$\begin{bmatrix}\lambda I - A + BKC & \vdots & B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda I - A & \vdots & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ KC & I_m\end{bmatrix}$$

得 $$rank[\lambda I-(A-BKC)\vdots B]=rank[\lambda I - A\vdots B]$$

由 $$\begin{bmatrix}\lambda I - A + BKC \\ C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & BK \\ 0 & I_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I - A \\ C\end{bmatrix}$$

得 $$rank\begin{bmatrix}\lambda I - A + BKC \\ C\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix}\lambda I - A \\ C\end{bmatrix}$$

因此输出反馈不改变系统的能控性和能观测性。

- 状态反馈会改变系统的能观测性

例3.1：考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$$

该系统是能控标准型，该系统也是能观测的。

对该系统应用状态反馈：$u = r-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x$

检验状态反馈对系统的能控、观测性的影响。

解：因为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-[k_1\ \ k_2]\boldsymbol{x}$

得到闭环系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3-k_1 & -4-k_2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r,$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}x.$$

闭环系统的能控性矩阵U和能观测性矩阵V分别为：

$$U=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4-k_2 \end{bmatrix}, V=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3+k_1 & 5+k_2 \end{bmatrix}.$$

- 显然对任意k_1、k_2，闭环系统都是完全能控的。
- 当$k_1+k_2\neq-8$时，V的秩为2，闭环系统完全能观测。

这表明状态反馈将影响系统的能观测性。

2) 对系统的稳定性的影响

- 状态反馈和输出反馈都能影响系统的稳定性。
- **镇定**：加入反馈，使得通过反馈构成的闭环系统成为稳定系统，称之为**镇定**。

  为方便讨论，以下仅考虑状态反馈镇定问题。
- 对于线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$

  如果可以找到 $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}+r$

  其中r为参考输入，使得通过反馈构成的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BK)\boldsymbol{x} + Br$$

  是渐近稳定的，即$(A - BK)$的特征值均具有负实部，则称系统实现了状态反馈镇定。

◆ **定理3.3** 当且仅当线性定常系统的不能控部分渐近稳定时，系统是状态反馈可镇定的。

证：当(A, B)不完全能控时，可对系统进行结构分解，存在非奇异阵T，使

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\quad B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

并且对任意$K = [K_1 \quad K_2]$，则

$$\det(sI - A' + B'K) = \det\begin{bmatrix} sI - A_1 + B_1K_1 & -A_{12} + B_1K_2 \\ 0 & sI - A_2 \end{bmatrix}$$

$$= \det(sI - A_1 + B_1K_1)\det(sI - A_2)$$

- 状态反馈不影响不能控极点。
- 由于(A_1, B_1)为能控系统，故必存在K_1使$(A_1-B_1K_1)$的特征值均具有负实部。**后面以构造方法证明**
- 只要不能控部分A_2的特征值均具有负实部，则可使$(A-BK)$的特征值也都具有负实部。

⬇

- 系统由状态反馈可镇定的充分必要条件是不能控部分渐近稳定。

3.2 应用李雅普诺夫第二方法设计反馈系统

- 考虑定常线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

要求设计一个**反馈控制**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - K\boldsymbol{x}$$

使闭环系统**稳定**。

- 在考虑稳定性时可设参考输入 $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$，并略去负号。考虑**反馈控制**

$$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$$

- 闭环系统

$$\frac{dx}{dt}=(A+BK)x$$

渐近稳定的**充分必要条件**是：对任一Q，李雅普诺夫方程有**唯一正定解**。设 $Q=P=I$，则李雅普诺夫方程化为

$$(A+BK)^T+(A+BK)=-I$$

由此解出K，即为所求的反馈增益矩阵。

例3.2：考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}u$$

求反馈 $\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x}$ 使闭环系统稳定。

解：取$P=Q=I$，李雅普诺夫方程化为

$$\begin{bmatrix}k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22}\\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22}\end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix}k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22}\\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22}\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

由此得到 $\begin{cases} 2k_{11}+2k_{21}=-1 \\ 3-2k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22}=0 \\ 4-4k_{12}+2k_{22}=-1 \end{cases}$

令k_{11}=1得到解：$k_{21}=-\frac{3}{2}, k_{12}=1, k_{22}=-\frac{1}{2}$，

所求的反馈增益矩阵为

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- 可验证，当用它作为反馈增益矩阵时，得到的闭环系统的极点($A+BK$的特征值)实部为−0.5，闭环系统**渐近稳定**。
- 如果选取不同的P、Q可解得不同的反馈增益矩阵，而得到的闭环系统的极点也不同。

- 如果为了保证闭环系统的**响应速度**，要求设计一个反馈$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$，使闭环极点的实部小于$-\sigma$ (σ 为正数)，可应用相应**定理2.20**。
- **例3.3**：对**例3.2**给出的系统设计反馈$\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$，使闭环极点的实部小于$-3$。

取$P=I, Q=I, \sigma=3$对闭环系统由定理3.7可化为：

$$(A+BK)^T+(A+BK)+6I=-I$$

则有

$$\begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22} \\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix}^T+\begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22} \\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可得关于$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$的代数方程组：

$$\begin{cases} 2k_{11} + 2k_{21} = -7 \\ -2k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} = -3 \\ -4k_{12} + 2k_{22} = -11 \end{cases}$$

令k_{11}=1，解得$k_{12} = 3, k_{21} = -\dfrac{9}{2}, k_{22} = \dfrac{1}{2}$，于是

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可验证**闭环系统极点**的**实部**为−3.5。

3.2.2 应用李雅普诺夫第二方法设计最优控制系统

- **控制系统**的性能可以用综合型指标来表示，经过校正达到最小性能指标的系统就称为**最优控制系统**。
- 控制系统的**综合性能指标**可以表示为：

$$J=\int_{0}^{t_f} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})dt$$

- 若假定预期状态向量为 $\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{0}$，而系统的平衡状态为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_d=\boldsymbol{0}$，则任何偏离平衡点的状态变量就是**系统的偏差**。
- 我们的**目的**就是使系统的偏差最小。

- 采用**二次型性能指标**：

$$\boldsymbol{J} = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \ dt$$

研究用**状态反馈方法**来设计**最优控制系统**。

- 利用**李雅普诺夫第二方法**解该问题

若使 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = -\dfrac{d}{dt}(\mathbf{x}^T P \mathbf{x}) \quad (V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \dot{V} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x})$

P是一个**正定**的**实对称矩阵**，则需

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P A \mathbf{x}$$

$$= -\mathbf{x}^T (A^T P + PA) \mathbf{x}$$

如果A是渐近稳定矩阵，则对给定的Q，必存在一个P使得

$$A^T P + PA = -Q$$

因此可由**该方程**确定P的各元素。

性能指标 J 如下式计算

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \mathrm{d}t = -\mathbf{x}^T P \mathbf{x} \Big|_0^\infty = -\mathbf{x}^T(\infty) P \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0)$$

又因为A特征值均有负实部，可得$\mathbf{x}(\infty) \to 0$，所以

$$J = \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0)$$

即 J 可由$\mathbf{x}(0)$和P求得，而P由上面Lyapunov方程已求出。

- 例3.4:

系统微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

求$\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$的$K$，使性能指标

$$J = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} dt$$

最小。

解：设 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)=[\,k_1 \quad k_2\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

经状态反馈后系统状态方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+BK\boldsymbol{x}=(A+BK)\boldsymbol{x}=H\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2}$$

用状态负反馈，取$k_1=-1$，则问题变为确定k_2的适当取值，使系统的**性能指标**达到极小值。

有

$$H^T P+PH=-I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

整理得

$$-p_{12}-p_{12}=-1$$
$$p_{11}+k_2 p_{12}-p_{22}=0$$
$$p_{12}+k_2 p_{22}+p_{12}+k_2 p_{22}=-1$$

解得

$$p_{12}=\frac{1}{2},\quad p_{22}=-\frac{1}{k_2},\quad p_{11}=\frac{k_2^2+2}{-2k_2}$$

再假定$\boldsymbol{x}^T(0)$=[1　1]，于是系统的性能指标为：

$$J=\boldsymbol{x}^T(0)P\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$
$$=(p_{11}+p_{12})+(p_{12}+p_{22})=p_{11}+2p_{12}+p_{22}$$
$$=\frac{k_2^2+2}{-2k_2}+1-\frac{1}{k_2}=\frac{k_2^2-2k_2+4}{-2k_2}$$

为使 J 达到极小值，对k_2求导，可得

$$\frac{\partial J}{\partial k_2}=\frac{-2k_2(2k_2-2)+2(k_2^2-2k_2+4)}{(2k_2)^2}=0$$

解得 $k_2=\pm 2$。

$k_2=-2$代入可求得 J 的最小值为：

$$J_{\min}=3$$

- 为保证P为正定矩阵，舍去$k_2=2$ ($J_{\min}=-1$)。

则 $K=[-1\quad -2]$。

§3.3 极点配置

- 3.3.1 状态反馈的极点配置条件
- 3.3.2 SISO系统的极点配置算法
- 3.3.3 多输入能控系统极点配置
- 3.3.4 极点配置算法的改进
- 3.3.5 极点位置的确定
- 3.3.6 其它极点配置方法简介

3.3.1 状态反馈的极点配置条件

- **极点配置问题**：设计一个反馈控制，使闭环系统有事先给定的极点。
- 由于极点的位置决定着系统的重要性质，能任意配置极点意味着通过反馈任意改变系统的某些重要性质(稳定性、动态响应速度)。

设定常线性系统已经过变换化为能控结构形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_C \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix}$$

(A_1, B_1)能控，显然该系统的极点集合为$\sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$。

经反馈

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r} + \begin{bmatrix} K_C & K_{NC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix}$$

(这里记$-K=[K_C \ \ K_{NC}]$)

得到闭环系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_C \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_C & A_{12} + B_1 K_{NC} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_C \\ \boldsymbol{x}_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{r}$$

它的极点为：$\sigma\left(A_1 + B_1 K_C\right) \cup \sigma(A_2)$。

由此可见，$\sigma\,(A_2)$ 经状态反馈不能改变。

定理3.4 系统(A, B)通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件是(A, B)完全能控。

- 系统不是完全能控的 ⇨ 不能通过反馈任意配置极点
- 系统完全能控 ⇨ 能通过反馈任意配置极点

(构造方法)

3.3.2 SISO系统的极点配置算法

- 给定$(A, \boldsymbol{b})$能控，求反馈增益向量$\boldsymbol{k}$，使闭环系统状态矩阵$(A+\boldsymbol{bk})$的极点为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$。

对能控标准型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$A+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\-a_0+k_1 & -a_1+k_2 & -a_2+k_3 & \cdots & -a_{n-1}+k_n\end{bmatrix}$$

特征多项式 $s^n+(a_{n-1}-k_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_2)s+(a_0-k_1)$

- 计算由$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$所决定的期望的特征多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

- 对于能控系统 (A, b)

$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'$ $\quad$ $\dot{\boldsymbol{x}}' = T^{-1}AT\boldsymbol{x}' + T^{-1}b\boldsymbol{u}$

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_o(A,b) \arrow[r, "T"] & \hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{b}) \arrow[d, "k"] \\
\Sigma_{k'}(A+bk',b) & \hat{\Sigma}_k(\hat{A}+\hat{b}k,\hat{b}) \arrow[l, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{x}' + v$

$k' = kT^{-1}$ $\quad$ $x' = T^{-1}x$

3.3.2 SISO系统的极点配置算法

- 给定$(A, \boldsymbol{b})$能控，对一组期望的闭环特征值$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，要确定 $(1\times n)$ 维的反馈增益向量 $\boldsymbol{k}$，使闭环系统状态矩阵 $(A+\boldsymbol{b}\boldsymbol{k})$ 的特征值为$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$。
  - 第一步　计算A的特征多项式，即

$$\det[sI-A]=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

  - 第二步　计算由$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$所决定的希望特征多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

并计算 $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$

- 第三步 计算 U 及 $\boldsymbol{q}$, 并得

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}A \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'$$

其中 $\boldsymbol{q}=[0 \ \cdots \ 0 \ 1]\, U^{-1}$

$$U=[\boldsymbol{b} \quad A\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

- 第四步 返回原坐标系，得 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}T^{-1}$, $\boldsymbol{k}'$ 即为反馈增益向量。

例3.5 已给系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈使闭环极点为$-1, -2+3j, -2-3j$ 。

解: 第一步 计算系统的特征多项式

$$|sI - A| = s^3 - 3s^2 - 2s + 6$$

第二步 计算要求的特征多项式

$$(s+1)(s+2-3j)(s+2+3j) = s^3 + 5s^2 + 17s + 13$$

得到

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0 & a_1 - \alpha_1 & a_2 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -19 & -8 \end{bmatrix}$$

为返回原坐标系，计算

$$U=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}U^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\\boldsymbol{q}A\\\boldsymbol{q}A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&3\\1&2&9\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}T^{-1}=[-8\ \ -35\ \ -136]$，即

$$u=\boldsymbol{k}T^{-1}\boldsymbol{x}+r=\begin{bmatrix}-8&-35&-136\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+r$$

- Matlab函数place用来计算单输入系统的状态反馈
- 调用形式k=place(A,b,p)，p写成行向量p=[-1 -2+3j -2-3j]

单输入系统极点配置的阿克曼公式 (Ackermann公式)

1、计算由$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$所决定的希望特征多项式

$$\det[sI-(A+BK)] = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$
$$= \phi(s)$$

2、用A替换s，得到:

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

3、利用Ackermann公式计算增益矩阵$\boldsymbol{k}$的表达式为:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}\phi(A)$$

其中，$\boldsymbol{q} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]\, U^{-1}$。

- 无需计算A的特征多项式，但需计算A的n次方。
- 适用于阶数较高的系统，并方便用于计算机运算，不适用于多输入系统。

3.3.3 多输入能控系统极点配置

Pole-placement Design of Multi Input System

- 考虑多输入能控系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + (b_1, b_2, \cdots, b_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

- 求一个状态反馈S使系统化为对单输入变量是能控的
- 再应用单输入系统配置极点的方法

- 对一般形式 $\sum_o(A, B)$, 寻找完成上述目标的S是困难的，为此考虑$\sum_o$的能控规范型$\hat{\Sigma}_o(\hat{A}, \hat{B})$，设变换矩阵为$Q$。
- 返回原坐标系 $\hat{K}=SQ^{-1}$，$\dot{\boldsymbol{x}}=(A+B\hat{K})\boldsymbol{x}+Bv$ 对单输入变量v_1是完全能控的。

能控规范型

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma_o(A,B) \arrow[r, "Q"] & \hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B}) \arrow[d, "S"] \\
K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\ 0\end{bmatrix} & \Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},B) \arrow[l, "\text{即为所求}"'] & \hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B}) \arrow[l, "Q^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

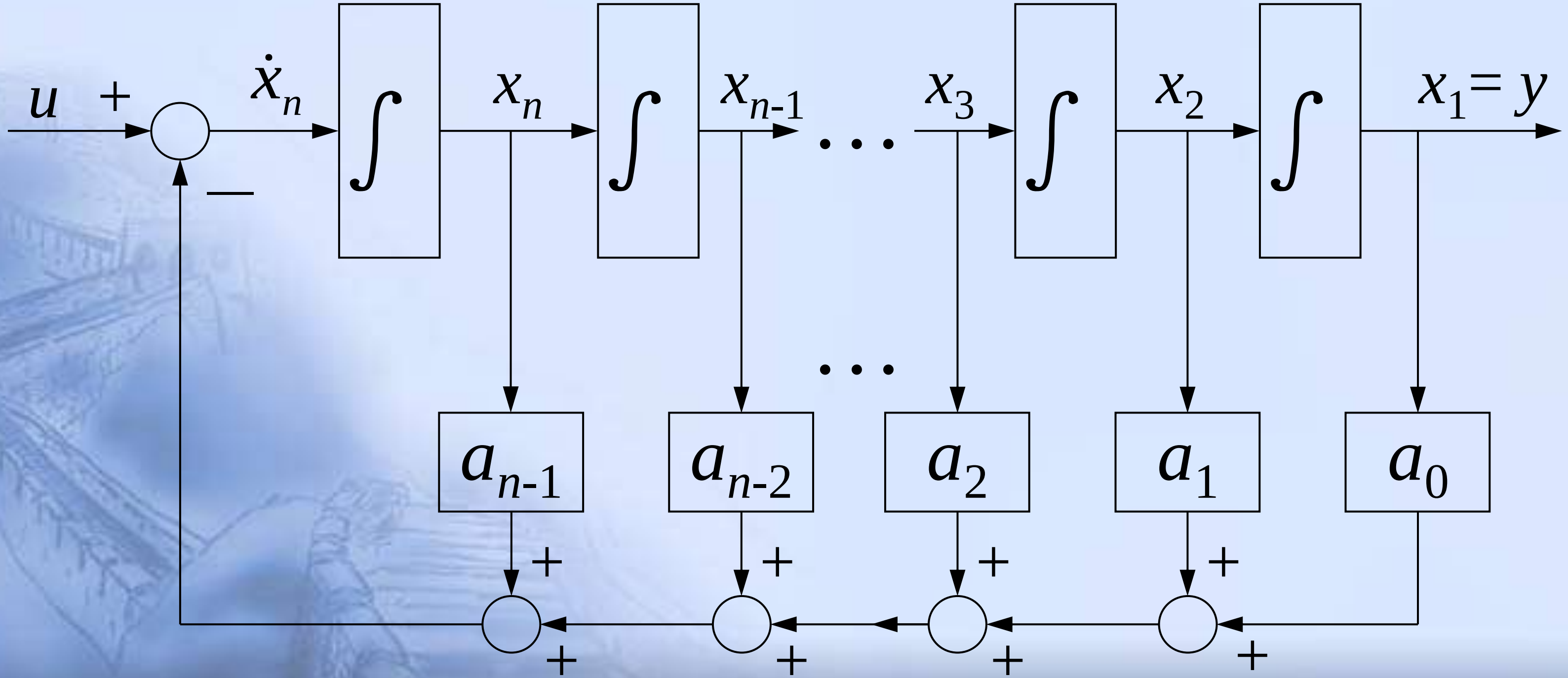
单输入极点配置

返回原系统

单输入能控

单输入能控标准型：

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



- 化系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 为第一能控规范型

设 $B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]$, 由于$(A\ ,\ B)$能控，因此

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$ 秩为n。

将U的列向量按如下方式重新排列:

$$\{\underbrace{b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{n-1}b_1}_{b_1\text{相关的}};\underbrace{b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{n-1}b_2}_{b_2\text{相关的}};\cdots;\underbrace{b_m \quad Ab_m \cdots A^{n-1}b_m}_{b_m\text{相关的}}\}$$

从这$n \times m$列中自左至右选取线性无关组，得到矩阵:

$$Q=[\underbrace{b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1}_{\mu_1\text{列}};\underbrace{b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{\mu_2-1}b_2}_{\mu_2\text{列}};\cdots;\underbrace{b_h \quad Ab_h \cdots A^{\mu_h-1}b_h}_{\mu_h\text{列}}],\ (3.3.1)$$

则在变换 $x=Qx'$ 下, 可将原系统化为第一能控规范型

$$A_{c1}=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1h} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{hh} \end{bmatrix};\qquad B_{c1}=\begin{bmatrix} B_1 & & & \vdots \\ & \ddots & & * \\ & & B_h & \vdots \end{bmatrix}$$

其中

$$\underset{\mu_i\times\mu_i}{A_{ii}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & * \\ \hdashline & & & * \\ & I_{\mu_i-1} & & * \\ & & & * \end{array}\right];\qquad \underset{\mu_i\times\mu_j}{A_{ij}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right];\qquad B_i=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

最后一列　　　　最后一列非0

- 对第一能控规范型，求状态反馈S

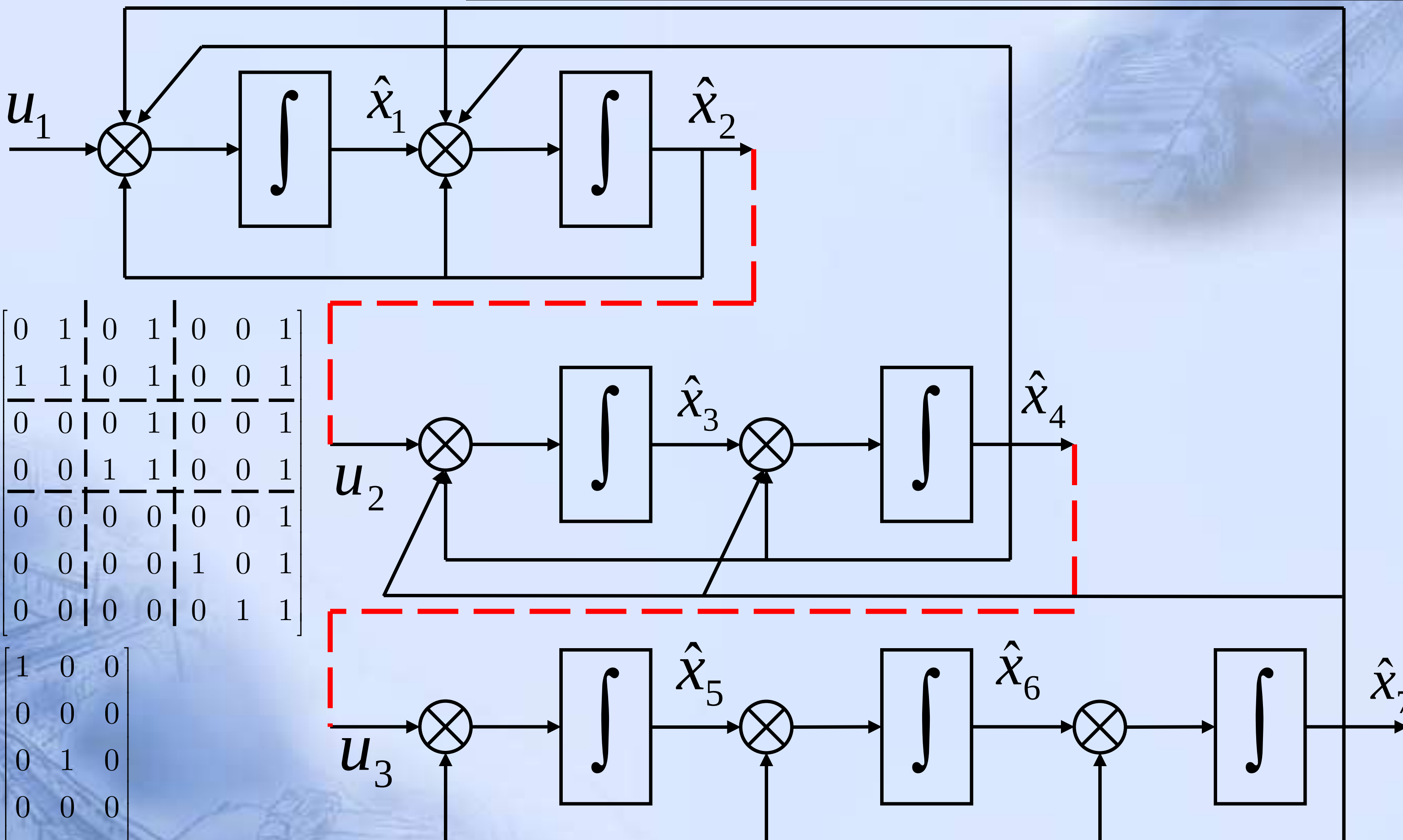
例：

$$\hat{A}=A_{c1}=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right];\hat{B}=B_{c1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\mu_1=\mu_2=2,\mu_3=3$

- 说明：由第一个输入变量 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ 能控，其余五个由u_1均不能控

- 框图



$$\hat{A}=A_{c1}=\left[\begin{array}{cc|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\hat{B}=B_{c1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 思路：$\hat{x}_2$引向 u_2，$\hat{x}_4$引向 u_3，则七个积分器成为串联链式结构，u_1位于链的首部，于是u_1可以控制全部七个状态。

- 闭环系统为$\hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B})$，从图中可以看出，只需将$\hat{A}$中两个小方框中的元素“0”改为“1”，就得出$\hat{B}S$为

$$
\hat{B}S=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\qquad
\hat{A}+\hat{B}S=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
$$

考虑到第一能控标准型中 $\hat{B}$ 的形式, 可知状态反馈矩阵

$$S=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc}0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:cc:ccc}0&\underset{\mu_1\text{列}}{\underset{\downarrow}{\color{red}{e_2}}}&0&\underset{\mu_1+\mu_2\text{列}}{\underset{\downarrow}{\color{blue}{e_3}}}&0&0&0\end{array}\right]\quad (r=3)$$

- 注：S中“1”出现的位置，其行号对应状态反馈加到输入端的输入分量的序号(即输入u_2，u_3)，其列号对应状态反馈引出点(即状态x_2, x_4)。

- 引理 3.1 设$\boldsymbol{b}_1\neq0$，在反馈 $u=\hat{K}x+v=SQ^{-1}x+v$ 作用下，闭环系统

$$\frac{dx}{dt}=(A+B\hat{K})x+b_1v_1$$

能控，其中v_1是v的第一个分量。

证明： 由 $\hat{K}$ 的定义有 $\hat{K}Q=S$，即

$$\hat{K}\left[b_1,Ab_1,\cdots A^{\mu_1-1}b_1;\ b_2,Ab_2,\cdots A^{\mu_2-1}b_2;\ \cdots;\ b_m,Ab_m,\cdots A^{\mu_m-1}b_m\right]$$

$$=\left[0\cdots0\ \ e_2;\ 0\cdots0\ \ e_3;\ 0\cdots0\ \ e_m;\ 0\cdots0\right]$$

由此得到下面一系列的等式:

$$\hat{K}b_1=0,\hat{K}Ab_1=0,\cdots,\hat{K}A^{\mu_1-2}b_1=0,\hat{K}A^{\mu_1-1}b_1=e_2;$$

$$\hat{K}b_2=0,\hat{K}Ab_2=0,\cdots,\hat{K}A^{\mu_2-2}b_2=0,\hat{K}A^{\mu_2-1}b_2=e_3;$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$\hat{K}b_{m-1}=0,\hat{K}Ab_{m-1}=0,\cdots,\hat{K}A^{\mu_{m-1}-2}b_{m-1}=0,\hat{K}A^{\mu_{m-1}-1}b_{m-1}=e_m;$$

$$\hat{K}b_m=0,\hat{K}Ab_m=0,\cdots,\hat{K}A^{\mu_m-2}b_m=0,\hat{K}A^{\mu_m-1}b_m=0.$$

记 $\overline{A}=A+B\hat{K}$，逐次计算 $\left(\overline{A},b_1\right)$ 的能控性矩阵的列:

$$\bar{A}b_1 = \left(A + B\hat{K}\right)b_1 = Ab_1 + B\hat{K}b_1 = Ab_1\,, \qquad \hat{K}b_1 = 0$$

$$\bar{A}^2 b_1 = \bar{A}(Ab_1) = \left(A + \boxed{B\hat{K}\big)Ab_1}\right. = A^2 b_1, \qquad \hat{K}Ab_1 = 0$$

$$\vdots \qquad \hat{K}A^{\mu_1 - 2}b_1 = 0$$

$$\bar{A}^{\mu_1 - 1}b_1 = \bar{A}\left(A^{\mu_1 - 2}b_1\right) = \left(A + B\hat{K}\right)A^{\mu_1 - 2}b_1 = A^{\mu_1 - 1}b_1,$$

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1 = \bar{A}\left(A^{\mu_1 - 1}b_1\right) = \left(A + B\hat{K}\right)A^{\mu_1 - 1}b_1 = A^{\mu_1}b_1 + B\underbrace{\hat{K}A^{\mu_1 - 1}b_1}_{e_2}.$$

由 Q 的构造方法 $A^{\mu_1}b_1$ 是Q中$\boldsymbol{b}_2$左边的列的线性组合，

用 $\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ 表示 $(Q=[b_1 \;\; Ab_1 \cdots A^{\mu_1 - 1}b_1; b_2 \;\; Ab_2 \cdots A^{\mu_2 - 1}b_2; \cdots; b_h \;\; Ab_h \cdots A^{\mu_h - 1}b_h])$

$$\hat{K}\boldsymbol{b}_2 = 0$$

$$\bar{A}^{\mu_1}b_1 = \tilde{b}_2 + Be_2 = \tilde{b}_2 + b_2,$$

$$\bar{A}^{\mu_1 + 1}b_1 = \left(A + B\hat{K}\right)\left(\tilde{b}_2 + b_2\right) = Ab_2 + B\hat{K}\tilde{b}_2 + A\tilde{b}_2 + B\hat{K}b_2.$$

$B\hat{K}\tilde{\boldsymbol{b}}_2$和$A\tilde{\boldsymbol{b}}_2$是Q中$A\boldsymbol{b}_2$左边的列的线性组合，用$\widetilde{A\boldsymbol{b}}_2$表示，

于是 $\bar{A}^{\mu_1+1}\boldsymbol{b}_1 = A\boldsymbol{b}_2 + \widetilde{A\boldsymbol{b}}_2$

类似可以得到 $\bar{A}^{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_3 + \tilde{\boldsymbol{b}}_3$

$$\vdots$$

$$\bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1 = A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m + \widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \quad \bar{A}\boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1] \\
&= \operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \quad \bar{A}\boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \bar{A}^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1, \bar{A}^{\mu_1}\boldsymbol{b}_1, \bar{A}^{\mu_1+1}\boldsymbol{b}_1, \cdots \quad \bar{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1] \\
&= \operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_1 \quad \cdots \quad A^{\mu_1-1}\boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{b}_2 + \tilde{\boldsymbol{b}}_2, A\boldsymbol{b}_2 + \widetilde{A\boldsymbol{b}}_2 \cdots A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2 + \widetilde{A^{\mu_2-1}\boldsymbol{b}_2}; \\
&\qquad \cdots; \quad \boldsymbol{b}_m + \tilde{\boldsymbol{b}}_m \quad \cdots \quad A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m + \widetilde{A^{\mu_m-1}\boldsymbol{b}_m}] \\
&= \operatorname{rank} Q = n
\end{aligned}$$

所以$(\bar{A}, b_1)$能控。□

$\left(Q = \left[b_1 \;\; Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1; b_2 \;\; Ab_2 \cdots A^{\mu_2-1}b_2; \cdots; b_h \;\; Ab_h \cdots A^{\mu_h-1}b_h\right]\right)$

由**引理3.1**，可以先求$\hat{K}$将系统化为单输入能控的，再按单输入能控系统配置极点的方法配置极点。

设$\tilde{\boldsymbol{k}}$是所求反馈增益矩阵，它使单输入系统$\left(\bar{A},b_1\right)$有要求的极点$(\bar{A}=A+B\hat{K})$，即$\bar{A}+\boldsymbol{b}_1\tilde{\boldsymbol{k}}$有事先给定的极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么可以证明

$$\hat{K}+\bar{K}=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{k}\\0\end{bmatrix}$$

行向量

将系统(A, B)的极点也配置到$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。事实上

$$A+B\left(\hat{K}+\bar{K}\right)=A+B\hat{K}+b_1\tilde{k}=\bar{A}+b_1\tilde{k}$$

一定有极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。因此$\hat{K}+\bar{K}$即所求反馈增益矩阵。

- 总结：
  - 将系统状态方程化为第一能控规范型$\hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B})$，变换矩阵为$Q$。
  - 对第一能控规范型，求状态反馈S，使系统对单输入变量v_1完全能控 $\Longrightarrow \hat{\Sigma}_S(\hat{A}+\hat{B}S,\hat{B})$
  - 返回原系统，使系统对单输入变量v_1完全能控，则 $\hat{K}=SQ^{-1}$, $\Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},b_1)$ **(把原系统转化为单输入能控)**
  - 对单输入变量v_1能控系统$\Sigma_{\hat{K}}(A+B\hat{K},b_1)$求状态反馈$\tilde{\boldsymbol{k}}$，使闭环系统有要求的极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。
  - 所求的状态反馈增益矩阵为$K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\0\end{bmatrix}$。

$\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{x}'$

$\dot{\boldsymbol{x}}' = Q^{-1}AQ\boldsymbol{x}' + Q^{-1}B\boldsymbol{u}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \Sigma_o(A,B) \arrow[r, "Q"] & \hat{\Sigma}_o(\hat{A},\hat{B}) \arrow[d, "S"'] \arrow[d, phantom, "\boldsymbol{u} = Sx' + \boldsymbol{v}" right, xshift=4em] \\
K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}} \\ 0 \end{bmatrix} & \Sigma_{\hat{K}}(A + B\hat{K}, b_1) \arrow[l, "\text{即为所求}"'] & \hat{\Sigma}_S(\hat{A} + \hat{B}S, \hat{B}) \arrow[l, "Q^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$\hat{K} = SQ^{-1}$

$\boldsymbol{x}' = Q^{-1}\boldsymbol{x}$

$\dot{\boldsymbol{x}} = (A + B\hat{K})\boldsymbol{x} + b_1 v_1$

$v_1 = \tilde{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x} + r$

- **多输入能控系统极点配置的计算步骤：**

第一步 构造矩阵Q和S，并计算$\hat{K}=SQ^{-1}$。

第二步 计算$\bar{A}=A+B\hat{K}$和它的特征多项式

$$\left|sI-\bar{A}\right|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0.$$

第三步 对给定的n个极点$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，计算多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

并计算 $k=\begin{bmatrix}a_0-\alpha_0 & a_1-\alpha_1 & \cdots & a_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$

第四步 计算$\tilde{k}=kT^{-1}$，其中

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{q}\bar{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}$ 是$(\bar{A},b_1)$的能控性矩阵U的逆矩阵的最后一行。

第五步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

K即所求的反馈增益矩阵。

例3.6 已知系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u,$$

求反馈增益矩阵K，使闭环系统的极点为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2$$

解：第一步 构造矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\1&2&0&0\\0&1&0&2\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\underline{b_1\ Ab_1}\ b_2\ Ab_2 \qquad \mu_1=2\quad(r=2)$$

计算反馈矩阵

$$\hat{K}=SQ^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&-2\\0&0&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

第二步 计算

$$\bar{A}=A+B\hat{K}=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

和特征多项式

$$\left|sI-\bar{A}\right|=s^4-3s^3+2s^2$$

第三步 要求的多项式为

$$(s+1)(s+1)(s+2)(s+2)=s^4+6s^3+13s^2+12s+4$$

则

$$k=\begin{bmatrix}-4&-12&-11&-9\end{bmatrix}$$

第四步 计算

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & \bar{A}b_1 & \cdots & \bar{A}^{n-1}b_1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}q \\ q\bar{A} \\ q\bar{A}^2 \\ q\bar{A}^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\tilde{k}=kT^{-1}=\begin{bmatrix}-16 & 7 & -2 & -18\end{bmatrix}$$

第五步 计算

$$K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{k}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-16&7&-2&-18\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16&7&-2&-18\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

极点配置算法的改进

引理3.2　系统 $(\bar{A}, \boldsymbol{b}_1)$ 的能控性矩阵U的逆矩阵的最后一行等于矩阵Q的逆矩阵的最后一行。

即 $[0 \ \cdots \ 0 \ 1]U^{-1} = [0 \ \ldots \ 0 \ 1]Q^{-1}$

引理的证明方法是证明U和Q的行列式相等并且相应的第 i 行第 n 列的代数余子式也相等 。

极点配置的简化算法

第1步 构造矩阵Q和S，计算 $\hat{K}=SQ^{-1}$

并记Q^{-1}的最后一行为q。

第2步 设要求配置的n个极点为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h,$

$a_1\pm b_1 i, a_2\pm b_2 i,\cdots,a_l\pm b_l i$，并且 $h+2l=n$，计算

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=-q(\bar{A}-\lambda_1 I)\cdots(\bar{A}-\lambda_h I)[\bar{A}^2-2a_1\bar{A}+(a_1^2+b_1^2)I]\cdots[\bar{A}^2-2a_l\bar{A}+(a_l^2+b_l^2)I]$$

$$=-q\cdot\hat{f}_c(\bar{A})$$

其中 $\hat{f}_c(\cdot)$ 为要求的特征多项式。

第3步 计算 $K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\0\end{bmatrix}$

K 即所求的反馈增益矩阵。

该简化算法显然比前面的算法减少了很多**运算量**：

- 求能控性矩阵的逆
- 求 $\bar{A}$ 的特征多项式

第一步 构造矩阵Q和S，并计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$。

第二步 计算 $\bar{A} = A + B\hat{K}$ 和它的特征多项式

$$|sI - \bar{A}| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 .$$

第三步 对给定的n个极点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，计算多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

并计算 $\bar{k} = [a_0-\alpha_0 \quad a_1-\alpha_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}-\alpha_{n-1}]$

第三步 设要求配置的n个极点为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h, a_1 \pm b_1 i, a_2 \pm b_2 i, \cdots, a_l \pm b_l i$，

并且 $h+2l=n$，计算

$$\boldsymbol{k} = -q(\bar{A}-\lambda_1 I)\cdots(\bar{A}-\lambda_h I)[\bar{A}^2 - 2a_1\bar{A} + (a_1^2+b_1^2)I]\cdots[\bar{A}^2 - 2a_l\bar{A} + (a_l^2+b_l^2)I]$$

第四步 计算 $\tilde{k} = \bar{k}T^{-1}$，其中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}\bar{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}$ 是 $(\bar{A}, b_1)$ 的能控性矩阵

第五步 计算

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

K即所求的反馈增益矩阵。

改进算法与原算法的比较

简化前: 五 步

简化后: 三 步

例3.7 仍考虑例3.6中的极点配置问题，其计算步骤可简化为：

第1步： 同例3.6的第1步，得到：

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad 并得到 \quad \boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

第2步： 计算

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=-[0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad -\tfrac{1}{2}](\bar{A}+I)(\bar{A}+I)(\bar{A}+2I)(\bar{A}+2I)$$

$$=[-16 \quad 7 \quad -2 \quad -18]$$

第3步： 计算

$$K=\hat{K}+\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{k}}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & 7 & -2 & -18\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 单输入系统的极点配置问题的解是唯一的
- 多输入系统的极点配置问题的解是不唯一的
  - 刚才介绍的方法给出了问题的一个解
  - 它还可以有其它解 (如，直接求)

离散时间系统的极点配置问题

- **定理3.5** 离散时间定常线性系统 (A, B) 通过状态反馈能任意配置极点的充分必要条件是 (A, B) 完全能达。
- 离散时间定常线性系统 (A, B) 能镇定 $\Longleftrightarrow$ $\sigma(A_2)$ 的模都小于1。
- 配置极点方法与连续时间相同。

3.3.4 极点位置的确定

Determine the poles' locations

- **SISO极点位置的确定问题**
- **方法:**
  - 高阶系统的性能主要由主极点对决定，远极点对系统仅有极微小的影响。
  - 先根据期望的闭环系统的性能指标决定一对主极点的位置。
  - 将其它极点配置在距这对主极点甚左的位置上。

- 对SISO具有主极点λ_1,λ_2的二阶传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

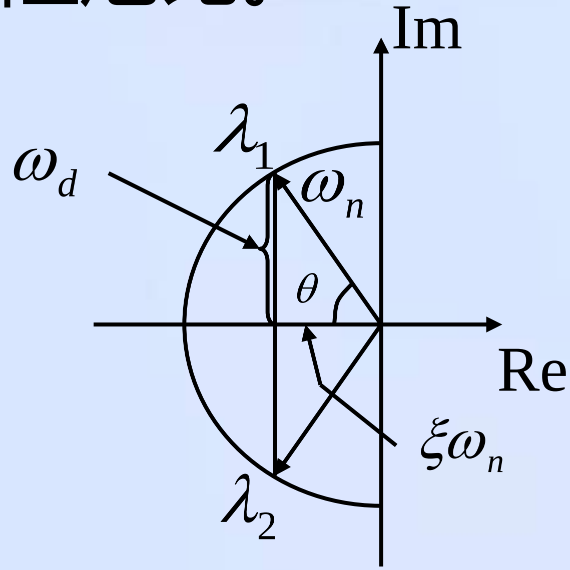
其中ω_n是无阻尼自振频率，ξ为阻尼比。

λ_1,λ_2与ξ,ω_n有如下关系：

$$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\omega_n$$

$$\theta=\cos^{-1}\xi$$



极点λ_1,λ_2在复平面上的位置

二阶系统的极点$\lambda_{1,2}$与ω_n,ξ相互唯一确定。

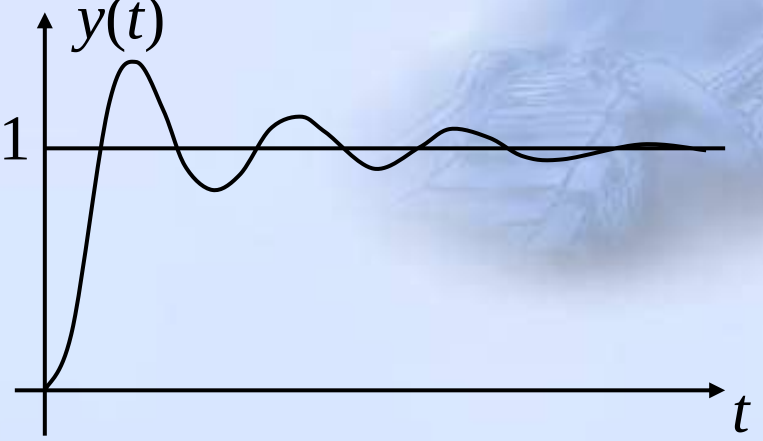
系统的超调量为

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

系统的调整时间(输出与稳态值之差的绝对值小于等于稳态值的Δ%所需的时间)

$$t_s = 4/\xi\omega_n (\Delta = 2)$$

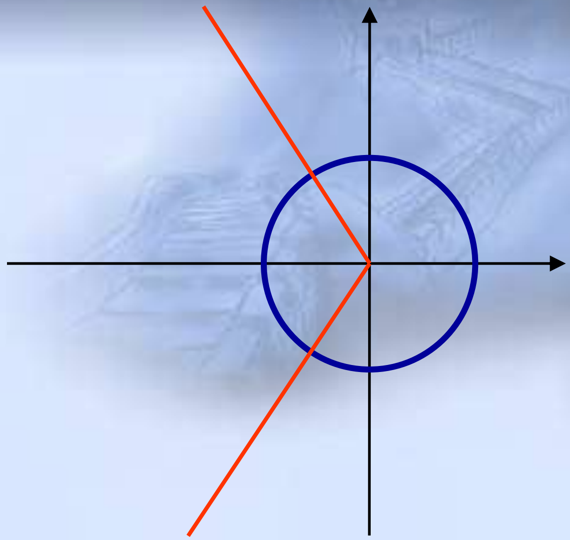
$$t_s = 3/\xi\omega_n (\Delta = 5)$$



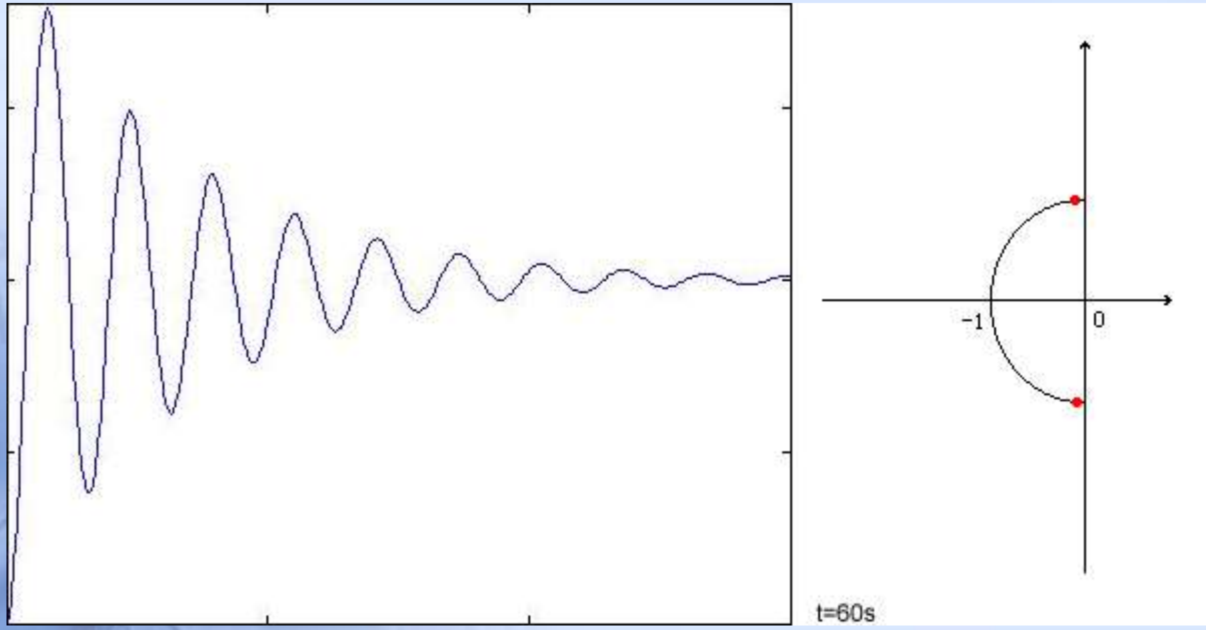
二阶系统的单位阶跃响应

$0<\xi<0.9$时，可根据上面两式由σ, t_s，决定λ_1, λ_2。

- 当主极点沿**红色直线**向远离原点方向运动时, σ 不变而 t_s 减小 (ξ 不变, ω_n增大)。
- 当主极点沿**蓝色曲线**向 x 轴运动时, σ 与 t_s 减小 (ξ 增大, ω_n不变)。



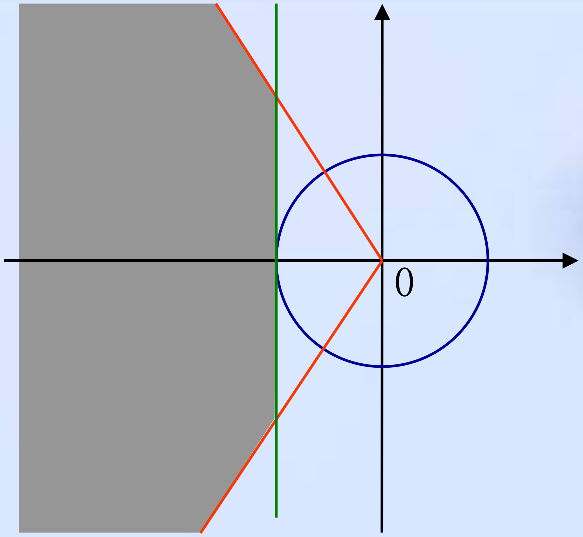
演示:



主极点沿**蓝色曲线**运动

- 极点位置

Pole locations



例3.8 已知系统:

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

其传递函数阵：

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s^2+s+1}$$

得到 $\xi=\frac{1}{2}$， $\omega_n=1$

首先，我们主要关心动态性能的两个指标：

- 调节时间 $t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}$
- 超调量 $\sigma=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$

开环极点 $-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{t_s=8,\quad \sigma=0.16}$

Open-loop poles

$$-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

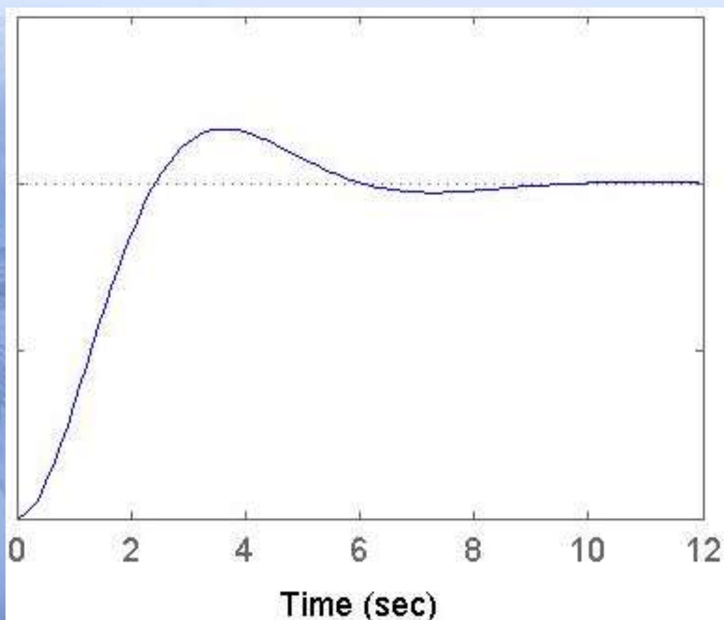
- Place the closed-loop eigenvalues at

$$-2 \pm j2$$

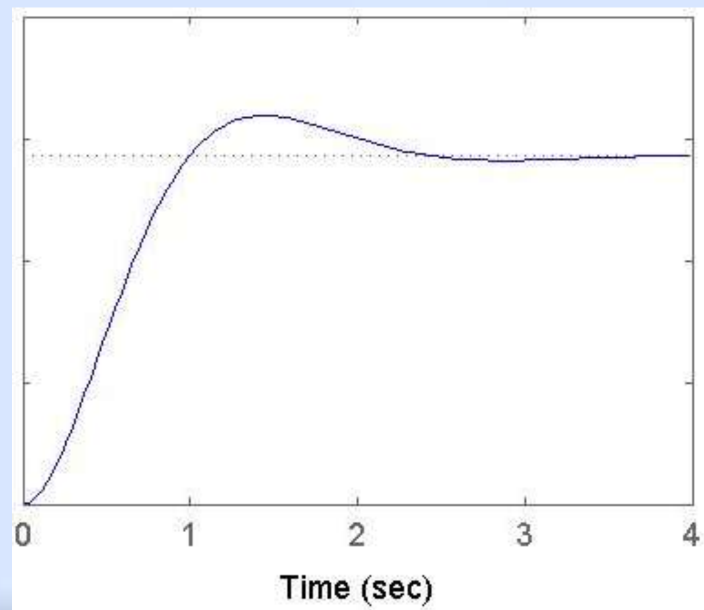
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$\boxed{t_s = 8, \quad \sigma = 0.16}$ $\Rightarrow$ $t_s \le 2, \quad \sigma \le 0.05$

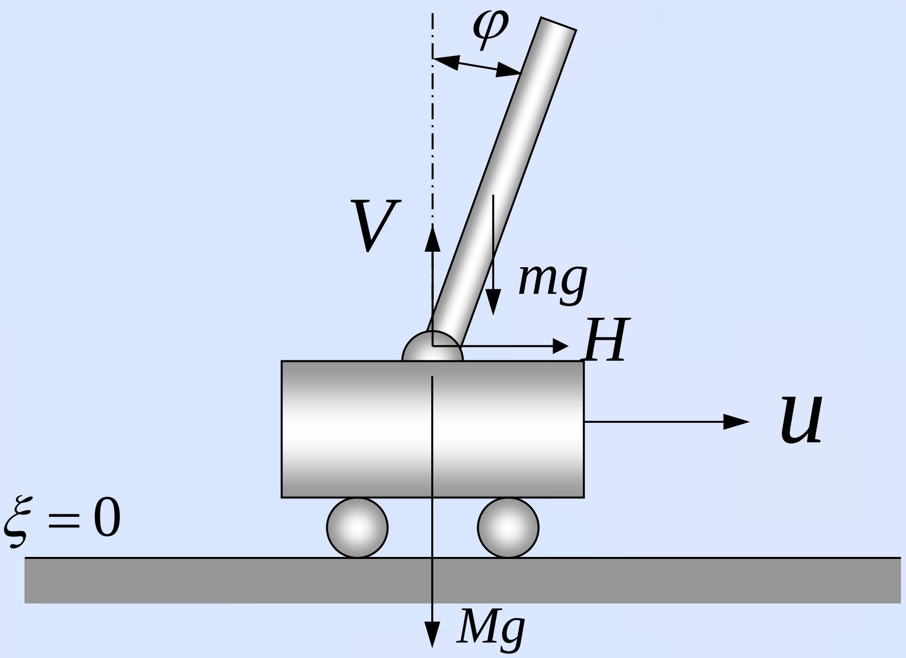


$\Rightarrow$



倒立摆的极点配置

Pole assignment for an inverted pendulum



令 $\chi_1=\varphi,\chi_2=\dfrac{d\varphi}{dt},\chi_3=\xi,\chi_4=\dfrac{d\xi}{dt}$，得到倒摆的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{d\chi_1}{dt}\\ \dfrac{d\chi_2}{dt}\\ \dfrac{d\chi_3}{dt}\\ \dfrac{d\chi_4}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ mgL(M+m)/\Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & & & 1\\ -m^2gL^2/\Delta & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\\ \chi_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -mL/\Delta\\ 0\\ (I+mL^2)/\Delta\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\chi$$

其中 $I=\dfrac{mL^2}{3},\Delta=I(M+m)+MmL^2$

m=0.07kg

假定摆杆/小车系统的参数:

- 摆杆的质量 m=0.07 kg
- 长度 2L=0.4 m
- 小车的质量 M=1.32 kg
- 重力加速度 g=10 m/s^2

$$\begin{bmatrix} \frac{d\chi_1}{dt} \\ \frac{d\chi_2}{dt} \\ \frac{d\chi_3}{dt} \\ \frac{d\chi_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -38.1825 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3847 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.8037 \\ 0 \\ 0.7477 \end{bmatrix} u,$$

- 验证稳定性 (Verify Stability)

  该系统的特征根 0，0，6.18，−6.18

- 验证能控性 (Verify Controllability)

  rank(U)=4 完全能控

符号	指定特征值	
①×	$\lambda_{1,2}=-1\pm 2j$ $\lambda_{3,4}=-2\pm j$	$k_1 =$ $k_3 =$
②●	$\lambda_{1,2}=-4\pm 3j$ $\lambda_{3,4}=-5\pm j$	$k_1=66.6537, k_2=10.8650$ $k_3=23.6565, k_4=16.6687$
③⊖	$\lambda_{1,2}=-7.4527\pm 9.666j$ $\lambda_{3,4}=-3.1538\pm 1.8334j$	$k_1=124.1694, k_2=18.3899$ $k_3=70.7099, k_4=40.5897$

闭环极点与开环极点离得越远，反馈增益矩阵的元素越大，从而使控制的成本增加

- 系统极点配置的Matlab程序：(以倒立摆为例)

先输入系统的参数，并判断系统的能控性

```
clear;
clc;
clear;
clc;
A=[0 1 0 0 ; 38.1825 0 0 0 ;0 0 0 1 ;-0.3847 0
0 0 ];
B=[0; -2.8037; 0; 0.7477];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0;0];
[m,n]=size(A);
U1=ctrb(A,B)
r=rank(U1);
fprintf('\n');
```

```
if(r==m)
    disp('(A,B)能控');
else
    disp('(A,B)不完全能控');
end
fprintf('\n');
```

第一步 构造矩阵Q和S，并计算 $\hat{K} = SQ^{-1}$

```
u(m)=0;
u=u+1;
x=1;
temp=eye(m);
Q=zeros(m);
for step1=1:m
    Q(:,step1)=temp*B(:,x);
    if rank(Q)~=step1
        u(x)=u(x)-1;
        x=x+1;
        Q(:,step1)=B(:,x);
        temp=A;
    else
        u(x)=u(x)+1;
        temp=temp*A;
    end
end
```

```
y=0;z=2;
S=zeros(size(B'));
t=eye(size(B'));
for step2=1:m
    y=y+u(step2);
    if(y<m)
        S(:,y)=t(:,z);
        z=z+1;
    end
end
K1=S*inv(Q)
```

第二步　第三步　计算 $\boldsymbol{k}=\left[a_0-\alpha_0 \quad a_1-\alpha_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}-\alpha_{n-1}\right]$

```
j=[-1; -1;-2;-2];
J=diag(j); A1=A+B*K1;
Poly_A1=poly(A1);
Poly_J=poly(J);
for step1=1:m
    k(:,step1)=Poly_A1(m+2-step1)-Poly_J(m+2-step1);
end
```

第四步　计算 $\tilde{\boldsymbol{k}}=kT^{-1}$

```
%计算q
temp=eye(m);
temp1(m)=1;
for step1=1:m
    temp2(:,step1)=temp*B(:,1);
    temp=temp*A1;
end
temp1
inv(temp2)
q=temp1*inv(temp2)
```

```
%计算t1
temp=eye(m);
for step1=1:m
    t1(:,step1)=(q*temp)';
    temp=temp*A1;
end
t1=t1'
%得到t1
```

第五步 计算反馈增益矩阵

$$K = \hat{K} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
%计算k1,K
k1=k*t1;
temp3=zeros(size(B));
temp3(:,1)=(k1)';
K=K1+temp3'
%得到K
```

几点注解

- 对MIMO，采用一对主极点的方法估算系统的动态特性一般是不适宜的。
- 宜采用估算和试探的办法给出系统的极点位置，然后在进行模拟和修正，直到有满意动态响应为止。

*3.3.6 其它配置极点方法简介

- 1. 解李雅普诺夫方程配置极点
- 2. 应用能控性的PBH判据配置极点
- 3. 装置有噪声时的极点配置问题

1. 解李雅普诺夫方程配置极点

- 注：配置的极点位置不能包含A的特征值；
- 计算步骤：

第 1 步　选择矩阵$F_{n\times n}$ 使有要求的极点；

第 2 步　选取任意$m\times n$矩阵$\overline{K}$使$(\overline{K},F)$能观测；

第 3 步　求李雅普诺夫方程 $AP-PF=B\overline{K}$ 的唯一解P；

第 4 步　如果P是奇异矩阵，返回第 2 步选取不同$\overline{K}$，进行第 3 步

如果P是非奇异矩阵，计算反馈增益矩阵$K=\overline{K}P^{-1}$　。

- 说明：当 F 和 A 没有共同的特征值时：

- 对单输入系统，(A, B) 能控，$(\bar{K}, F)$ 能观测

$$\Updownarrow$$

李雅普诺夫方程 $AP - PF = B\bar{K}$ 有唯一非奇异解

- 对多输入系统，(A, B) 能控，$(\bar{K}, F)$ 能观测

$$\Uparrow$$

李雅普诺夫方程 $AP - PF = B\bar{K}$ 有唯一非奇异解

- 因此第 4 步需要检验P的奇异性。

- F的选择有无限多种，可考虑选择能观测伴随矩阵

$$F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

要求的特征多项式的系数

对这样的F可选择 $\bar{k}=[0,\dots,0,1]$

2. 应用能控性的PBH判据配置极点

- 设(A, B)能控，求反馈增益矩阵K使得闭环极点为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

  设φ_i是闭环系统矩阵的相应于特征值λ_i的特征向量，即

$$[\lambda_i I - (A - BK)]\varphi_i = 0$$

即

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I - A & \vdots & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_i \\ K\varphi_i\end{bmatrix} = 0$$

令 $\xi_i = \begin{bmatrix}\varphi_i \\ K\varphi_i\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I - A & \vdots & B\end{bmatrix}\xi_i = 0$$

- 由于(A, B)能控，按PBH判据，矩阵$[\lambda_i I - A \quad \vdots \quad B]_{n\times(n+m)}$满秩。
- 因此上方程组一定存在m个线性无关解，由这m个无关解构成$(m+n)\times m$ 矩阵 $U(\lambda_i)$

闭环特征向量

$$U(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(\lambda_i) \\ F(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$\boxed{K\varphi_m}$

$$K_{m\times n}\left[\varphi(\lambda_1) \quad \varphi(\lambda_2) \quad \cdots \quad \varphi(\lambda_n)\right]_{n\times(n\times m)}$$

$$=\left[F(\lambda_1) \quad F(\lambda_2) \quad \cdots \quad F(\lambda_n)\right]_{m\times(n\times m)}$$

- 在每个$\varphi(\lambda_i)$块中选一个列构成n个线性无关列，记为G；上式子右端相应的列构成矩阵$\overline{G}$
- 所求反馈增益矩阵为$K=\overline{G}G^{-1}$

3. 装置有噪声时的极点配置问题

- 前面讲极点配置时只适用于没有干扰或噪声的系统。
- 现在讨论装置有噪声时的极点配置问题，设系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}(t)$$

其中 $\boldsymbol{w}(t)$ 是系统的干扰或噪声，考虑设计反馈

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{K}_w\boldsymbol{w}(t)$$

得到闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)w(t)$

- 式中的矩阵 $\boldsymbol{K}$ 用极点配置的方法求得，然后再确定 $\boldsymbol{K}_w$ 使干扰 $w(t)$ 对闭环系统的影响最小。

$\boldsymbol{K}_w$ 的确定

- 思路：为消除干扰或噪声 $\boldsymbol{w}(t)$ 对闭环系统的影响，最好的情况是求出$\boldsymbol{K}_w$，使$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$
- 问题描述：设w是 q 维向量，矩阵方程

$$(F+BK_w)=0, \qquad F_{n\times q}, K_{w(m\times q)}$$

有nq个方程，而$\boldsymbol{K}_w$ 有mq个未知数。

- 问题的解：当$m=n$, 并且矩阵B可逆时存在唯一的$\boldsymbol{K}_w$ 使$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$，这时$\boldsymbol{K}_w=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{F}$
- 注：除此情况外，其它情况就不一定能求得$\boldsymbol{K}_w$ 使$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w)=0$，如: $\boxed{m<n}$

例3-8 考虑如下的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}(t)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1.7 & 50 & 260 \\ 0.22 & -1.4 & -32 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -272 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.1 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该例m=1, q=2，因此$\boldsymbol{K}_w = [k_{w1}, k_{w2}]$，于是

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w = \begin{bmatrix} 0.02 - 272k_{w1} & 0.1 - 272k_{w2} \\ -0.0035 & 0.004 \\ 14k_{w1} & 14k_{w2} \end{bmatrix}$$

显然不能选择k_{w1}, k_{w2}使得$(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_w) = 0$。

这时可以考虑选择 k_{w1}, k_{w2} 使得 $(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{BK}_w)$ 的一些大的元素为0。

可以选择 k_{w1}, k_{w2} 使得:

$$\begin{cases} 0.02-272k_{w1}=0 \\ 0.1-272k_{w2}=0 \end{cases}$$

解得

$$k_{w1}=\frac{0.02}{272}, k_{w2}=\frac{0.1}{272}$$

这时

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{BK}_w=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0035 & 0.004 \\ 0.00103 & 0.00515 \end{bmatrix}$$

这样选择的 $\boldsymbol{K}_w$ 使得噪声对闭环系统的影响比较小。

§3.4 应用状态反馈的解耦控制

3.4.1 应用状态反馈的解耦控制

3.4.2 能用状态反馈实现解耦的充要条件

3.4.1应用状态反馈的解耦控制

- 应用状态反馈使闭环系统实现解耦的问题：即通过状态反馈使闭环系统的每个输入仅影响一个输出。
- 通过状态反馈实现解耦，也就是将一个多输入多输出系统化为多个单输入单输出系统，从而使控制系统大大简化。

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

通过状态反馈实现解耦的问题是：应用状态反馈

$$\boldsymbol{u} = K_1\boldsymbol{x} + K_2\boldsymbol{v} \tag{3.4.1}$$

使得闭环系统的传递函数阵

$$\overline{G}(s) = C(sI - A - BK_1)^{-1}BK_2 \tag{3.4.2}$$

为非奇异对角阵。即

$$\overline{G}(s) = diag\,\{g_{11}(s), g_{22}(s), \cdots, g_{mm}(s)\}$$

问题：(1) 存在K_1, K_2使得 $\overline{G}(s)$ 为非奇异对角阵的充分必要条件；

(2) 求矩阵K_1, K_2的方法。

3.4.2 能用状态反馈实现解耦的充分必要条件

- 为给出存在 K_1, K_2，使得 $\overline{G}(s)$ 为非奇异对角阵，即系统能通过状态反馈解耦的充分必要条件，先引入记号 σ_i

$$\sigma_i = \begin{cases} \min\{j \mid \boldsymbol{c}_i A^{j-1} B \neq 0\} \\ n-1 \quad \boldsymbol{c}_i A^{j-1} B = 0, \text{对任何 } j \end{cases} \qquad (3.4.3)$$

式中 $\boldsymbol{c}_i$ 是 C 的第 i 行。

定理3-6 m 输入 m 输出定常线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

存在反馈控制 $\boldsymbol{u} = K_1\boldsymbol{x} + K_2\boldsymbol{v}$

使闭环系统解耦的充分必要条件是矩阵

$$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 A^{\sigma_1 - 1} B \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m A^{\sigma_m - 1} B \end{bmatrix} \tag{3.4.4}$$

为非奇异矩阵。

并且实现状态反馈解耦的增益矩阵可由下式计算

$$K_1 = -E^{-1}L \qquad K_2 = E^{-1} \tag{3.4.5}$$

式中

$$L = \begin{bmatrix} c_1 A^{\sigma_1} \\ c_2 A^{\sigma_2} \\ \vdots \\ c_m A^{\sigma_m} \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

得到的闭环系统的传递函数阵为

$$\overline{G}(s) = \mathrm{diag}\left\{ \frac{1}{s^{\sigma_1}}, \frac{1}{s^{\sigma_2}}, \cdots, \frac{1}{s^{\sigma_m}} \right\}$$

【例3-9】对于定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

传递函数阵 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+3s+1}{s(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$

$$\sigma_i = \begin{cases} \min\{\, j \mid \boldsymbol{c}_i A^{j-1} B \neq 0 \} \\ n-1 \quad \boldsymbol{c}_i A^{j-1} B = 0, \text{对任何 } j \end{cases}$$

$\boldsymbol{c}_1 B = [1 \quad 0]$　　$\sigma_1 = 1$

$\boldsymbol{c}_2 B = [0 \quad 1]$　　$\sigma_2 = 1$

故 $E = \begin{bmatrix} c_1 B \\ c_2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

因E非奇异，该系统能用状态变量反馈(3.4.4)解耦

$$L=\begin{bmatrix} c_1A \\ c_2A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

于是

$$K_1=-E^{-1}L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_2=E^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所求的反馈是

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$$

在它的作用下得到闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}$$

即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

其传递函数为

$$\overline{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

因此，原系统已经状态反馈解耦。

【例3-10】对于定常线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

先按式(3.4.6)确定σ_i

$$c_1A^0B=[1\quad 0]\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=[1\quad 4]\neq 0 \qquad \sigma_1=1$$

$$c_2A^0B=[-1\quad 1]\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=[0\quad 0]=0$$

$$c_2A\ B=[-1\quad 1]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=[2\quad 8]\neq 0 \qquad \sigma_2=2$$

所以$\sigma_1=1,\sigma_2=2$，于是$E=\begin{bmatrix}c_1B\\ c_2AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}$为奇异矩阵，该系统不能用状态变量反馈(3.4.4)解耦。