

第三章 运输问题

运输问题可用单纯形法求解，但有更直观、更简单的方法。

1. 运输问题的典例和数学模型
2. 表上作业法
3. 产销不平衡的运输问题及其应用

§1. 运输问题的典例和数学模型

【例1】某食品公司经销的主要产品之一是糖果。它下面设有三个加工厂，每天的糖果生产量分别为： A_1 —7t， A_2 —4t， A_3 —9t。该公司把这些糖果分别运往四个地区的门市部销售，各地区每天的销售量为： B_1 —3t， B_2 —6t， B_3 —5t， B_4 —6t。已知从每个加工厂到各销售门市部每吨糖果的运价如表所示，问该食品公司应如何调运，在满足各门市部销售需要的情况下，使总的运费支出最少。

门市部 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

§1. 运输问题的典例和数学模型

某种物资需要调运，已知有 m 个地点可以供应该种物资(通称产地，用 $i=1, \dots, m$ 表示)，有 n 个地点需要该种物资(通称销地，用 $j=1, \dots, n$ 表示)，又知这 m 个产地的可供量(通称产量)为 a_1, a_2, \dots, a_m (记为 a_i)， n 个销地的需要量(通称销量)分别为 b_1, b_2, \dots, b_n (记为 b_j)。

产销平衡表

销地 \ 产地	1	2	...	n	产量
1					a_1
2					a_2
:					:
m					a_m
销量	b_1	b_2	...	b_n	

§1. 运输问题的典例和数学模型

从第 i 个产地到第 j 个销地的单位物资运价为 c_{ij} 。

单位运价表

销地 产地	1	2	...	n
1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}
:				
m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}

有时把两个表写在一起。

§1. 运输问题的典例和数学模型

总产量 $\sum_{i=1}^m a_i =$ 总销量 $\sum_{i=1}^n b_i$: 产销平衡

总产量 $\sum_{i=1}^m a_i <$ 总销量 $\sum_{i=1}^n b_i$: 产销不平衡

总产量 $\sum_{i=1}^m a_i >$ 总销量 $\sum_{i=1}^n b_i$: 产销不平衡

现只考虑产销平衡的情况。

§1. 运输问题的典例和数学模型

如果用 x_{ij} 代表从第 i 个产地调运给第 j 个销地的物资的单位数量，那么在产销平衡的条件下，使总的运费支出最小，可以表为以下数学形式：

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

§1. 运输问题的典例和数学模型

$$\min z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

变量： $(m \times n)$ 个

约束条件： $(m + n)$ 个

§1. 运输问题的典例和数学模型

线性规划中的 X , A , b , C :

$$X = (x_{11} \cdots x_{1n} \quad x_{21} \cdots x_{2n} \quad \cdots \quad x_{m1} \cdots x_{mn})^T$$

$$C = (c_{11} \cdots c_{1n} \quad c_{21} \cdots c_{2n} \quad \cdots \quad c_{m1} \cdots c_{mn})$$

$$b = (a_1 \cdots a_m \quad b_1 \cdots b_n)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & 1 & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & 1 & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{(m+n) \times (m \cdot n)}$$

a_1
 a_2
 \vdots
 a_m

b_1
 b_2
 \vdots
 b_n

§1. 运输问题的典例和数学模型

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_i + e_{m+j}$$

Rank (A) 是否等于 $m+n$?

§1. 运输问题的典例和数学模型

设 $A = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \\ q_{m+1} \\ \vdots \\ q_{m+n} \end{bmatrix}$, 则在产销平衡的运输问题中, 有

$$q_1 + \cdots + q_m = q_{m+1} + \cdots + q_{m+n} = (1 \cdots \cdots 1)_{(m \bullet n)}$$

行向量线性相关, $\text{Rank}(A) < (m+n)$

即 $\text{Rank}(A) \leq (m+n-1)$

事实上 $\text{Rank}(A) = (m+n-1)$

§2. 表上作业法

与单纯形法类似，先求出一个初始方案，给出一个判别准则，对初始方案进行调整、改进，一直到求得最优方案为止。

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2					4
A3					9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
A2	1	9	2	8
A3	7	4	10	5

§2. 表上作业法

2-1 初始方案的确定

1. 最小元素法

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			4	3	7
A2	3		1		4
A3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

同时划去一行和一列，补0

2. 伏格尔 (Vogel) 法

找出每行和每列最小的两个元素之差，再从差值最大的行或列中找出最小运价

§2. 表上作业法

销 地 产 地						两最小元素之差			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	①	②	③	④
A ₁		3	11	[3]	10	0	0	0	7
A ₂		[1]	9	2	8	1	1	1	6
A ₃		7	[4]	10	[5]	1	2		
两 最 小 元 素 之 差	①	2	5	1	3				
	②	2		1	3				
	③	2		1	2				
	④			1	2				

销地						产量
产地		B1	B2	B3	B4	
A1				5	2	7
A2		3			1	4
A3			6		3	9
销量		3	6	5	6	

§2. 表上作业法

最小元素法和Vogel法给出的是运输问题的基可行解

在得到的调运方案中：

有数字的格（数格） —— 基变量取值

没有数字的格（空格） —— 非基变量

运输问题中，基变量有 $(m + n - 1)$ 个，故数格应有 $(m + n - 1)$ 个

§2. 表上作业法

2-2 闭回路的性质

1. 对任一空格，必有一组数格，形成一个以它们为顶点的闭回路，且该闭回路是唯一的。

闭回路的找法：以某一空格为起点，用水平或垂直线向前划，碰到**某一数格**后转 90° 后，继续前进，直到回到起始空格为止。

§2. 表上作业法

2-3 最优性检验与方案调整

求检验数有两种方法：闭回路法，位势法。

1. 闭回路法

§2. 表上作业法

销地 \ 产地	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	产量
A ₁	3 (+1)		4 (-1)	3	7
A ₂	1 3 (-1)		2 1 (+1)		4
A ₃		6		3	9
销量	3	6	5	6	

销地 \ 产地	B1	B2	B3	B4
A1	1	2		
A2		1		-1
A3	10		12	

销地 \ 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			5	2	7
A2	3			1	4
A3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

注意 —— 可能出现退化的基可行解

§2. 表上作业法

2. 位势法

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

例：

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			4	3	7
A2	3		1		4
A3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	u_i
A1			3	10	u_1
A2	1		2		u_2
A3		4		5	u_3
v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	

§2. 表上作业法

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	u_i
A1			3	10	u_1
A2	1		2		u_2
A3		4		5	u_3
V_i	V_1	V_2	V_3	V_4	

u_i 和 v_j 分别称为第*i*行和第*j* 列的位势。

$$u_2 + v_1 = 1$$

$$u_2 + v_3 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 10$$

$$u_3 + v_4 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 4$$

令 $v_1 = 1$, 可解得其他位势的数值。

§2. 表上作业法

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	u_i
A1	(2)	(9)	3	10	1
A2	1	(8)	2	(9)	0
A3	(-3)	4	(-2)	5	-4
v_i	1	8	2	9	

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4
A1	1	2		
A2		1		-1
A3	10		12	

§2. 表上作业法

2-4 表上作业法与单纯形法 (P110)

表上作业法计算步骤、过程与单纯形法相同，但具体计算时不必画出单纯形表，而是在产销平衡表上进行。

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

产地 \ 销地	1	2	...	n	产量
1					a_1
2					a_2
:					:
m					a_m
销量	b_1	b_2	...	b_n	

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

$$1. \text{ 总产量 } \sum_{i=1}^m a_i \neq \text{ 总销量 } \sum_{i=1}^n b_i$$

产大于销

假设增加一个销售点 B_{n+1} 表示库存, 令

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (i > 0)$$

$$c_{i,n+1} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

则变成产销平衡问题。

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

2. 总产量 $\sum_{i=1}^m a_i < \text{总销量} \sum_{i=1}^n b_i$
 产小于销

假设增加一个产地 A_{m+1} 令

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (> 0)$$

$$c_{m+1,j} = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

则变成产销平衡问题。

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

销地 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1					7
A2					5
A3					7
销量	2	3	4	6	

销地 产地	B1	B2	B3	B4
A1	2	11	3	4
A2	10	3	5	9
A3	7	8	1	2

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5	产量
A1						7
A2						5
A3						7
销量	2	3	4	6	4	

销地 产地	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	11	3	4	0
A2	10	3	5	9	0
A3	7	8	1	2	0

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

P79 【例3】设有三个化肥厂供应四个地区的农用化肥。假定等量的化肥在这些地区使用效果相同，已知各化肥厂年产量，各地区年需要量及从各化肥厂到各地区单位化肥的运价如表所示，试决定使总的运费最节省的化肥调拨方案。

需求地区 化肥厂	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	--	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

需求地区 化肥厂	I'	I''	II	III	IV'	IV''	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
销量	30	20	70	30	10	50	

§3. 产销不平衡的运输问题及其应用

表 3 - 31 单位运价表

产地	销地					
	I '	I "	II	III	IV '	IV "
A	16	16	13	22	17	17
B	14	14	13	19	15	15
C	19	19	20	23	<i>M</i>	<i>M</i>
D	<i>M</i>	0	<i>M</i>	0	<i>M</i>	0

表 3 - 32

产地	销地						产量
	I '	I "	II	III	IV '	IV "	
A			50				50
B			20		10	30	60
C	30	20	0				50
D				30		20	50
销量	30	20	70	30	10	50	