

2015——2016 学年微分方程与复变函数期末考试 A 卷

一、判断下列复变函数的解析性和可微性（本题共 5 分）

$$f(z) = z \operatorname{Re} z$$

二、求下列复变函数的值（本题共 5 分）

$$(1+i)^i$$

三、计算下列复变函数的积分（本题共 5 分）

$$\int_C \frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)} dz, \text{ 其中 } C: |z|=2$$

四、将下列函数在指定区域展开成洛朗级数（本题共 5 分）

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}, \quad 0 < |z-1| < 1$$

五、求下列函数的奇点与类型（本题共 5 分）

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$$

六、求下列方程在指定区域内根的个数（本题共 5 分）

$$\text{方程 } z^7 - z^3 + 12 = 0 \text{ 在圆 } |z| < 1 \text{ 与圆 } 1 < |z| < 2 \text{ 内.}$$

七、求多值函数 $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)z^2}$ 的支点与割线，并求函数在 $z=2$ 取负值的那一支在 $z=i$ 之值。（本题共 10 分）

八、计算下列实积分（本题共 10 分）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

九、讨论下列方程零解的稳定性（本题共 5 分）

$$\begin{cases} x' = -x + y - z + (x^2 - 1) \sin x \\ y' = x + 2y - (1 - e^y) + (x^2 y + z^2) e^x \\ z' = x + y - tgz - z^2 \cos x \end{cases}$$

十、求下列微分方程的通解（本题共 10 分，每小题 5 分）

(1) $xy'^3 = 1 + y'$, n 为常数。

(2) $ydx - (x + y^3)dy = 0$

十一、求下列高阶微分方程的通解（本题共 5 分）

$$x^{(5)} + 3x^{(4)} + 3x^{(3)} + x^{(2)} = 0$$

十二、试将下列线性方程化成线性方程组。然后对方程组求二次型 $V(x) = x^T Bx$ ，使其通过方程组的全导数 $\frac{dV}{dt} = -x^T x$ ，并判断方程零解的稳定性。（本题共 5 分）

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

十三、 $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$ （本题共 5 分）

十四、讨论方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ 的奇点类型和零解的稳定性，（本题共 5 分）

、十五、求方程组 $x' = Ax$ 的满足 $\varphi(0) = \eta$ 的解 $\varphi(t)$, 并进而求基解矩阵 $\exp At$ 。 (本题共 15 分)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$