

# 第三章 运输问题

运输问题可用单纯形法求解，但有更直观、更简单的方法。

1. 运输问题的典例和数学模型
2. 表上作业法
3. 产销不平衡的运输问题及其应用

## §1. 运输问题的典例和数学模型

【例1】某食品公司经销的主要产品之一是糖果。它下面设有三个加工厂，每天的糖果生产量分别为:A1—7t, A2—4t, A3—9t。该公司把这些糖果分别运往四个地区的门市部销售，各地区每天的销售量为：B1—3t, B2—6t, B3—5t, B4—6t。已知从每个加工厂到各销售门市部每吨糖果的运价如表所示，问该食品公司应如何调运，在满足各门市部销售需要的情况下，使总的运费支出最少。

|     |     | B1 | B2 | B3 | B4 |
|-----|-----|----|----|----|----|
| 加工厂 | 门市部 |    |    |    |    |
|     | A1  | 3  | 11 | 3  | 10 |
| A2  | 1   | 9  | 2  | 8  |    |
| A3  | 7   | 4  | 10 | 5  |    |

## §1. 运输问题的典例和数学模型

某种物资需要调运，已知有m个地点可以供应该种物资(通称产地，用 $i=1, \dots, m$ 表示)，有n个地点需要该种物资(通称销地，用 $j=1, \dots, n$ 表示)，又知这m个产地的可供量(通称产量)为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ (记为 $a_i$ )，n个销地的需要量(通称销量)分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ (记为 $b_j$ )。

产销平衡表

| 产地 \ 销地 | 1     | 2     | ... | n     | 产量    |
|---------|-------|-------|-----|-------|-------|
| 1       |       |       |     |       | $a_1$ |
| 2       |       |       |     |       | $a_2$ |
| :       |       |       |     |       | :     |
| m       |       |       |     |       | $a_m$ |
| 销量      | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ |       |

## §1. 运输问题的典例和数学模型

从第*i*个产地到第*j*个销地的单位物资运价为  $c_{ij}$ 。

单位运价表

|    |   | 销地              | 1               | 2 | ...             | n |
|----|---|-----------------|-----------------|---|-----------------|---|
| 产地 | 1 | c <sub>11</sub> | c <sub>12</sub> |   | c <sub>1n</sub> |   |
|    | 2 | c <sub>21</sub> | c <sub>22</sub> |   | c <sub>2n</sub> |   |
| :  |   |                 |                 |   |                 |   |
| m  |   | c <sub>m1</sub> | c <sub>m2</sub> |   | c <sub>mn</sub> |   |

有时把两个表写在一起。

## §1. 运输问题的典例和数学模型

总产量  $\sum_{i=1}^m a_i =$  总销量  $\sum_{i=1}^n b_i$  : 产销平衡

总产量  $\sum_{i=1}^m a_i <$  总销量  $\sum_{i=1}^n b_i$  : 产销不平衡

总产量  $\sum_{i=1}^m a_i >$  总销量  $\sum_{i=1}^n b_i$  : 产销不平衡

现只考虑产销平衡的情况。

## §1. 运输问题的典例和数学模型

如果用 $x_{ij}$ 代表从第*i*个产地调运给第*j*个销地的物资的单位数量，那么在产销平衡的条件下，使总的运费支出最小，可以表为以下数学形式：

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

## §1. 运输问题的典例和数学模型

$$\min z = c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ \cdots \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ \cdots \cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \end{array} \right.$$

变量 :  $(m \times n)$  个

约束条件 :  $(m + n)$  个

# §1. 运输问题的典例和数学模型

线性规划中的 $X$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $C$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \cdots x_{1n} & x_{21} \cdots x_{2n} & \cdots \cdots & x_{m1} \cdots x_{mn} \end{pmatrix}^T$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} & c_{21} \cdots c_{2n} & \cdots \cdots & c_{m1} \cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_m & b_1 \cdots b_n \end{pmatrix}^T$$

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1 \\ & & & & a_2 \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_m \\ \hline 1 & & & & b_1 \\ & 1 & & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & b_n \end{array} \right]_{(m+n)(m \cdot n)}$$

## §1. 运输问题的典例和数学模型

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_i + e_{m+j}$$

Rank (A) 是否等于  $m+n$  ?

## §1. 运输问题的典例和数学模型

设  $A = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \\ q_{m+1} \\ \vdots \\ q_{m+n} \end{bmatrix}$ , 则在产销平衡的运输问题中，有

$$q_1 + \cdots + q_m = q_{m+1} + \cdots + q_{m+n} = (1 \cdots \cdots 1)_{(m+n)}$$

行向量线性相关， $\text{Rank } (A) < (m+n)$

即  $\text{Rank } (A) \leq (m+n-1)$

事实上  $\text{Rank } (A) = (m+n-1)$

## §2. 表上作业法

与单纯形法类似，先求出一个初始方案，给出一个判别准则，对初始方案进行调整、改进，一直到求得最优方案为止。

| 产地 \ 销地 |    | B1 | B2 | B3 | B4 | 产量 | 产地 \ 销地 |    | B1 | B2 | B3 | B4 |
|---------|----|----|----|----|----|----|---------|----|----|----|----|----|
| 产地      | A1 |    |    |    |    | 7  | 产地      | A1 | 3  | 11 | 3  | 10 |
|         | A2 |    |    |    |    | 4  |         | A2 | 1  | 9  | 2  | 8  |
|         | A3 |    |    |    |    | 9  |         | A3 | 7  | 4  | 10 | 5  |
| 销量      | 3  | 6  | 5  | 6  |    |    |         |    |    |    |    |    |

## §2. 表上作业法

### 2-1 初始方案的确定

#### 1. 最小元素法

| 产地<br>销地 |    |    |    |    | 产<br>量 |
|----------|----|----|----|----|--------|
|          | B1 | B2 | B3 | B4 |        |
| A1       |    | 4  | 3  |    | 7      |
| A2       | 3  |    | 1  |    | 4      |
| A3       |    | 6  | 3  |    | 9      |
| 销量       | 3  | 6  | 5  | 6  |        |

同时划去一行和一列，补0

#### 2. 伏格尔 (Vogel) 法

找出每行和每列最小的两个元素之差，再从差值最大的行或列中找出最小运价

# §2. 表上作业法

|             |                |                |                |                |                | 两最小元素之差 |   |   |   |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|---|---|---|
|             |                |                |                |                |                | ①       | ② | ③ | ④ |
| 产地          | 销地             | B <sub>1</sub> | B <sub>2</sub> | B <sub>3</sub> | B <sub>4</sub> |         |   |   |   |
|             | A <sub>1</sub> | 3              | 11             | [3]            | 10             | 0       | 0 | 0 | 7 |
|             | A <sub>2</sub> | [1]            | 9              | 2              | 8              | 1       | 1 | 1 | 6 |
|             | A <sub>3</sub> | 7              | [4]            | 10             | [5]            | 1       | 2 |   |   |
| 两最小<br>元素之差 | ①              | 2              | 5              | 1              | 3              |         |   |   |   |
|             | ②              | 2              |                | 1              | 3              |         |   |   |   |
|             | ③              | 2              |                | 1              | 2              |         |   |   |   |
|             | ④              |                |                | 1              | 2              |         |   |   |   |

|    |    | 销地 |    |    |    | 产量 |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    | B1 | B2 | B3 | B4 |    |
| 产地 | 产量 |    |    |    |    |    |
|    |    |    |    | 5  | 2  | 7  |
|    |    | A2 | 3  |    | 1  | 4  |
| 销量 |    | A3 | 6  | 3  |    | 9  |
|    |    | 3  | 6  | 5  | 6  |    |

## §2. 表上作业法

最小元素法和Vogel法给出的是运输问题的基可行解

在得到的调运方案中：

有数字的格（数格） —— 基变量取值

没有数字的格（空格） —— 非基变量

运输问题中，基变量有  $(m + n - 1)$  个，故数格应有  $(m + n - 1)$  个

## §2. 表上作业法

### 2-2 闭回路的性质

1. 对任一空格，必有一组数格，形成一个以它们为顶点的闭回路，且该闭回路是唯一的。

闭回路的找法：以某一空格为起点，用水平或垂直线向前划，碰到**某一数格**后转90°后，继续前进，直到回到起始空格为止。

## §2. 表上作业法

### 2-3 最优性检验与方案调整

求检验数有两种方法：闭回路法，位势法。

#### 1. 闭回路法

# §2. 表上作业法

| 产地             | 销地             |                |                |                | 产量 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
|                | B <sub>1</sub> | B <sub>2</sub> | B <sub>3</sub> | B <sub>4</sub> |    |
| A <sub>1</sub> | 3<br>(+1)      |                | 3<br>4 (-1)    |                | 7  |
| A <sub>2</sub> | 1<br>3 (-1)    |                | 2<br>1 (+1)    |                | 4  |
| A <sub>3</sub> |                | 6              |                | 3              | 9  |
| 销量             | 3              | 6              | 5              | 6              |    |

| 产地 | 销地 |    |    |    | 产量 |
|----|----|----|----|----|----|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 |    |
| A1 | 1  | 2  |    |    | 7  |
| A2 |    | 1  | -1 |    | 4  |
| A3 | 10 |    | 12 |    | 9  |
| 销量 | 3  | 6  | 5  | 6  |    |

注意 —— 可能出现退化的基可行解

# §2. 表上作业法

2. 位势法  $\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

例：

| 产地<br>销地 |    |    |    |    | 产量 |
|----------|----|----|----|----|----|
|          | B1 | B2 | B3 | B4 |    |
| A1       |    |    | 4  | 3  | 7  |
| A2       | 3  |    | 1  |    | 4  |
| A3       |    | 6  |    | 3  | 9  |
| 销量       | 3  | 6  | 5  | 6  |    |

  

| 产地<br>销地 |       |       |       |       | $u_i$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | B1    | B2    | B3    | B4    |       |
| A1       |       |       | 3     | 10    | $u_1$ |
| A2       | 1     |       | 2     |       | $u_2$ |
| A3       |       | 4     |       | 5     | $u_3$ |
| $v_i$    | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |       |

# §2. 表上作业法

| 产地<br>销地 |       |       |       |       | $u_i$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | B1    | B2    | B3    | B4    |       |
| A1       |       |       | 3     | 10    | $u_1$ |
| A2       | 1     |       | 2     |       | $u_2$ |
| A3       |       | 4     |       | 5     | $u_3$ |
| $v_i$    | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |       |

$u_i$  和  $v_j$  分别称为第*i*行和第*j*列的位势。

$$u_2 + v_1 = 1$$

$$u_2 + v_3 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 10$$

$$u_3 + v_4 = 5$$

$$u_3 + v_2 = 4$$

令  $v_1 = 1$ ，可解得其他位势的数值。

# §2. 表上作业法

| 产地    | 销地   |     |       |     | $u_i$ |
|-------|------|-----|-------|-----|-------|
|       | B1   | B2  | B3    | B4  |       |
| A1    | (2)  | (9) | 3     | 10  | 1     |
| A2    | 1    | (8) | 2     | (9) | 0     |
| A3    | (-3) | 4   | (-2 ) | 5   | -4    |
| $v_i$ | 1    | 8   | 2     | 9   |       |

| 产地 | 销地 |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | 1  | 2  |    |    |
| A2 |    | 1  |    | -1 |
| A3 | 10 |    | 12 |    |

## §2. 表上作业法

2-4 表上作业法与单纯形法 (P110)

表上作业法计算步骤、过程与单纯形法相同，但具体计算时不必画出单纯形表，而是在产销平衡表上进行。

## §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

|    |   | 销地 | 1  | 2   | ... | n | 产量 |
|----|---|----|----|-----|-----|---|----|
| 产地 | 1 |    |    |     |     |   | a1 |
|    | 2 |    |    |     |     |   | a2 |
| :  |   |    |    |     |     |   | :  |
| m  |   |    |    |     |     |   | am |
| 销量 |   | b1 | b2 | ... | bn  |   |    |

## §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

1. 总产量  $\sum_{i=1}^m a_i$  总销量  $\sum_{i=1}^n b_i$   
产大于销

假设增加一个销售点  $B_{n+1}$  表示库存，令

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (> 0)$$

$$c_{i,n+1} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

则变成产销平衡问题。

## §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

2. 总产量  $\sum_{i=1}^m a_i$  总销量  $\sum_{i=1}^n b_i$   
产小于销

假设增加一个产地  $A_{m+1}$  令

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \quad (> 0)$$

$$c_{m+1, j} = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

则变成产销平衡问题。

# §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

| 产地 | 销地 |    |    |    | 产量 |
|----|----|----|----|----|----|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 |    |
| A1 |    |    |    |    | 7  |
| A2 |    |    |    |    | 5  |
| A3 |    |    |    |    | 7  |
| 销量 | 2  | 3  | 4  | 6  |    |

| 产地 | 销地 |    |    |    |  |
|----|----|----|----|----|--|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 |  |
| A1 | 2  | 11 | 3  | 4  |  |
| A2 | 10 | 3  | 5  | 9  |  |
| A3 | 7  | 8  | 1  | 2  |  |

| 产地 | 销地 |    |    |    |    | 产量 |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |    |
| A1 |    |    |    |    |    | 7  |
| A2 |    |    |    |    |    | 5  |
| A3 |    |    |    |    |    | 7  |
| 销量 | 2  | 3  | 4  | 6  | 4  |    |

| 产地 | 销地 |    |    |    |    |  |
|----|----|----|----|----|----|--|
|    | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |  |
| A1 | 2  | 11 | 3  | 4  | 0  |  |
| A2 | 10 | 3  | 5  | 9  | 0  |  |
| A3 | 7  | 8  | 1  | 2  | 0  |  |

## §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

P79 【例3】设有三个化肥厂供应四个地区的农用化肥。假定等量的化肥在这些地区使用效果相同，已知各化肥厂年产量，各地区年需要量及从各化肥厂到各地区单位化肥的运价如表所示，试决定使总的运费最节省的化肥调拨方案。

| 化肥厂<br>需求地区 |    |    |     |    | 产量 |
|-------------|----|----|-----|----|----|
|             | I  | II | III | IV |    |
| A           | 16 | 13 | 22  | 17 | 50 |
| B           | 14 | 13 | 19  | 15 | 60 |
| C           | 19 | 20 | 23  | -- | 50 |
| 最低需求        | 30 | 70 | 0   | 10 |    |
| 最高需求        | 50 | 70 | 30  | 不限 |    |

# §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

| 需求地区<br>化肥厂 | 产量 |     |    |     |     |      | 产量 |
|-------------|----|-----|----|-----|-----|------|----|
|             | I' | I'' | II | III | IV' | IV'' |    |
| A           | 16 | 16  | 13 | 22  | 17  | 17   | 50 |
| B           | 14 | 14  | 13 | 19  | 15  | 15   | 60 |
| C           | 19 | 19  | 20 | 23  | M   | M    | 50 |
| D           | M  | 0   | M  | 0   | M   | 0    | 50 |
| 销量          | 30 | 20  | 70 | 30  | 10  | 50   |    |

# §3. 产销不平衡的运输问题及其应用

表 3-31 单位运价表

| 产地 | 销地 |     |    |     |     |      |
|----|----|-----|----|-----|-----|------|
|    | I' | I'' | II | III | IV' | IV'' |
| A  | 16 | 16  | 13 | 22  | 17  | 17   |
| B  | 14 | 14  | 13 | 19  | 15  | 15   |
| C  | 19 | 19  | 20 | 23  | M   | M    |
| D  | M  | 0   | M  | 0   | M   | 0    |

表 3-32

| 产地 | 销地 |     |    |     |     |      | 产量 |
|----|----|-----|----|-----|-----|------|----|
|    | I' | I'' | II | III | IV' | IV'' |    |
| A  |    |     | 50 |     |     |      | 50 |
| B  |    |     | 20 |     | 10  | 30   | 60 |
| C  | 30 | 20  | 0  |     |     |      | 50 |
| D  |    |     |    | 30  | 20  |      | 50 |
| 销量 | 30 | 20  | 70 | 30  | 10  | 50   |    |