计算机与控制工程学院本科生 2022—2023 学年第一学期
《现代控制论》课程期末考试试卷 (A 卷)
（参考答案）

一、判断题：判断正误，并说明理由 (本题共 12 分，每小题 3 分)

1、错误(1 分)。在泛函$J(y(x))$中，应该将$y(x)$理解为一个函数的整体，而非对应于x的函数值$y(x)$(2 分)。

2、正确(1 分)。根据零极点相消的定义，只要极点没有因为与零点抵消而消失，就认为是没有零极相消现象。因而，对于任意 LTI 系统，只要系统是完全能控能观，就不存在零极相消现象，两者等价(2 分)。

3、错误(1 分)。多输入系统极点配置的解(即增益矩阵)并非唯一(2 分)。

4、错误(1 分)。根据δt_f与$\delta x(t_f)$是否独立，所对应的条件也不一样(2 分)。

二、选择题 (本题共 10 分，每小题 2 分)

1、BD　　2、ABD　　3、B　　4、B　　5、B

三、简答题 (本题 16 分，第 1 小题 4 分，第 2、3 小题各 6 分)

1、带有观测器的状态反馈控制器的极点，是原闭环系统的极点加上观测器的极点(2 分)。带有观测器的状态反馈控制器，与直接使用状态反馈控制器的闭环传递函数矩阵完全一致(2 分)。

2、线性定常系统的状态转移矩阵满足 4 点性质：可分离性(1 分)、惟一性(1 分)、传递性(1 分)、可逆性(1 分)。线性时变系统同样也满足这些性质(2 分)。

3、非时变(无限时间)状态调节器对应的性能泛函中，积分上限为$t_f=\infty$，若系统不可控，当$t_f\to\infty$时，系统状态可能会发散而导致性能指标趋于无穷大，因此一般需要系统为能控(2 分)。对于有限时间调节器而言，由于对应的积分上限为有限的，故没有此要求(2 分)。实际上，对于无限时间状态调节器而言，在应用时系统能稳就可以(2 分)。

四、(本题共 12 分，每小题 6 分)

解：

1、对该微分方程进行拉普拉斯变换，可得其传递函数如下**(2 分)**:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6s^2+9s+1}{s^3+5s^2+8s+2}\Rightarrow Y(s)=(6s^2+9s+1)\frac{U(s)}{s^3+5s^2+8s+2}$$

定义 $Y_1(s)=\dfrac{U(s)}{s^3+5s^2+8s+2}$，可将上式改写为**(2 分)**:

$$Y(s)=(6s^2+9s+1)Y_1(s)$$

对上式及 $Y_1(s)=\dfrac{U(s)}{s^3+5s^2+8s+2}$ 进行拉普拉斯反变换可以得到:

$$y=6\ddot{y}_1+9\dot{y}_1+y_1, u=y_1^{(3)}+5\ddot{y}_1+8\dot{y}_1+2y_1$$

在此，令 $x_1=y_1, x_2=\dot{y}_1, x_3=\ddot{y}_1$，并定义 $x:=(x_1,x_2,x_3)^\top$，可将上两式整理为如下状态空间表达形式**(2 分)**:

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-8&-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1&9&6\end{pmatrix}x$$

2、依题意，可将 $G(s)$ 的表达式改写为如下形式**(1 分)**:

$$G(s)=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+2}+\frac{c_4}{s+5}$$

那么，c_1,c_2,c_3,c_4 的值可以求解如下**(4 分)**:

$$c_1=\lim_{s\to 0}s\frac{5(s+3)(s+6)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=9$$

$$c_2=\lim_{s\to -1}(s+1)\frac{5(s+3)(s+6)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=-\frac{25}{2}$$

$$c_3=\lim_{s\to -2}(s+2)\frac{5(s+3)(s+6)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{10}{3}$$

$$c_4=\lim_{s\to -5}(s+5)\frac{5(s+3)(s+6)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}=\frac{1}{6}$$

因此，该系统的对角型实现为如下所示**(1 分)**:

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}9&-\frac{25}{2}&\frac{10}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

五、(本题 12 分，每小题 6 分)

解：1、判断系统的能控性：

$$B=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix},AB=\begin{pmatrix}0\\10\\-25\end{pmatrix},A^2B=\begin{pmatrix}0\\-70\\125\end{pmatrix}$$

能控性矩阵U 如下**(2 分)**：

$$U=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&10&-70\\5&-25&125\end{pmatrix}$$

经判断，可知

$$\mathrm{rank}(U)=3$$

因此，系统能控**(1 分)**。

判断系统的能观测性：

$$C=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}$$
$$CA=\begin{pmatrix}-5&2&-5\end{pmatrix}$$
$$CA^2=\begin{pmatrix}25&-9&29\end{pmatrix}$$

能观测性矩阵V 如下**(2 分)**：

$$V=\begin{pmatrix}2&0&1\\-5&2&-5\\25&-9&29\end{pmatrix}$$

经判断，可知

$$\mathrm{rank}(V)=3$$

因此，系统能观测**(1 分)**。

2、极点配置。

设状态反馈控制器的表达式为$u = Kx + v$，令$K = (k_1, k_2, k_3)$，可得**(2 分)**:

$$sI - (A + BK) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -2 \\ 5-5k_1 & -5k_2 & s+5-5k_3 \end{pmatrix}$$

因此，经极点配置后的特征多项式为**(1 分)**

$$f_k(s) = \det(sI - (A+BK)) = s^3 + (7-5k_3)s^2 + (10-10k_2-10k_3)s - 10k_1 + 10$$

另一方面，期望的特征多项式为**(1 分)**

$$f^*(s) = (s+2-j2)(s+2+j2)(s+10) = s^3 + 14s^2 + 48s + 80$$

对比上面两式的系数，可求得**(1 分)**

$$k_1 = -7, k_2 = -\frac{12}{5}, k_3 = -\frac{7}{5}$$

因此，最终的反馈控制器的表达式为**(1 分)**:

$$u = -7x_1 - \frac{12}{5}x_2 - \frac{7}{5}x_3$$

六、(本题 12 分)

解：1、首先判断系统是否能观测，其能观测性矩阵为**(2 分)**

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

因此可知，$rank(N) = 2$，能观测性矩阵满秩，系统完全能观测。**(1 分)**

2、接着，设计全维状态观测器形式如下：**(2 分)**

$$\dot{\hat{x}} = (A + GC)\hat{x} + Bu - Gy$$

则可以设计观测器增益矩阵为$G = [\ g_1 \quad g_2\ ]^{\mathrm{T}}$，则观测器系统的特征方程为**(2 分)**

$$det[\lambda I - (A + GC)] = \lambda^2 + (4 - 2g_2)\lambda + 3 - 6g_2 - 2g_1$$

另一方面，根据观测器极点要求，可知期望的特征多项式如下：**(2 分)**

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

对比系数可知，$g_1 = -1, g_2 = 0.5$ **(2 分)**

带入状态观测器表达式可得 **(1 分)**

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}y$$

七、(本题 14 分)

解：1、依题意，可知：

$$A=3,\ B=2,\ F=0,\ Q=1,\ R=\beta$$

在此基础之上，可以求得如下的 Riccati 方程**(2 分)**:

$$-PA-A^\top P+PBR^{-1}B^\top P-Q=0$$

随后，代入上述条件，可进一步求出：

$$4P^2-6\beta P-\beta=0$$

求解该方程，可得**(1 分)**:

$$P=\frac{3\beta\pm\sqrt{9\beta^2+4\beta}}{4}$$

由于P为正定，故$P=\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2+4\beta}}{4}$。因此，可求得最优控制输入为**(2 分)**:

$$u=-R^{-1}B^\top Px=-\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2+4\beta}}{2\beta}x$$

再进一步，可计算得到**(2 分)**:

$$J^\star=\frac{1}{2}x^\top(t_0)Px(t_0)=\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2+4\beta}}{8}x_0^2$$

2、将u^*代入系统的状态方程并加以整理，可以求得**(2 分)**:

$$\dot{x}+\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}x=0\Longrightarrow x(t)=x_0\mathrm{e}^{-\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}t}$$

从$x(t)$的表达式可以看出，当β越大时候，$x(t)$的响应越慢。反之，$x(t)$的响应越快**(2 分)**。

3、令$x(t)\le x_0/\mathrm{e}$，并取$t=0.25$，可求得 **2 分)**:

$$x_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}}\le\frac{1}{\mathrm{e}}x_0\Longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}}\le\frac{1}{\mathrm{e}}\Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}\le -1\Longrightarrow\sqrt{9+\frac{4}{\beta}}\ge 4\Longrightarrow 9+\frac{4}{\beta}\ge 16$$

因此，$0<\beta\le\frac{4}{7}$**(1 分)**。

八、(本题 12 分)

证明：依题意，可求得关于x, z的增广闭环系统如下**(3 分)**:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A+GC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

根据线性系统的性质，经过非奇异变换之后，系统极点保持不变。因此，经过如下非奇异矩阵的作用后：

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}$$

可将上述系统等效变换如下**(2 分)**:

$$\dot{w} = A'w + B'v,\ y = C'w$$

式中，$w = [x, x-z]^{\top}$，A', B', C'的定义如下**(3 分)**:

$$A' = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+GC \end{bmatrix},\ B' = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},\ C' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

因此，可求得其传递函数矩阵表达式如下**(4 分)**:

$$C'(sI-A')^{-1}B' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-(A+BK), & BK \\ 0, & sI-(A+GC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = C[sI-(A+BK)]^{-1}B$$

因此，使用带有观测器的反馈控制器和直接使用状态反馈控制器所对应的闭环系统具有相同的传递函数矩阵。证毕。