

第八章 动态规划

§1.多阶段的决策问题

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

§3.离散确定性动态规划模型的求解

§4.离散随机性动态规划模型的求解

§5.动态规划应用举例

§1.多阶段的决策问题

动态规划是运筹学的一个分支，它是解决**多阶段**决策过程最优化的一种数学方法。

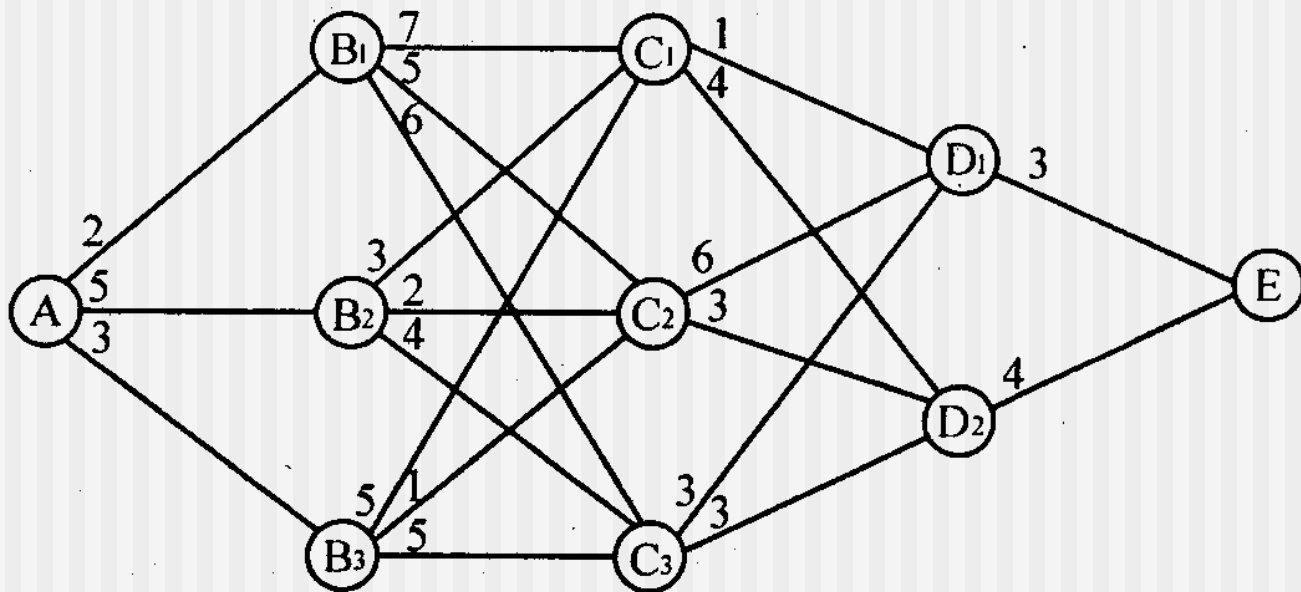
多阶段决策过程：可以分为若干个**互相联系的**阶段，在每一阶段分别对应着一组可以选取的决策，在每一阶段都需要作出决策。

各个阶段决策确定后，构成了一个**决策序列**，称为一个**策略**。

下面是几个多阶段决策过程的例子。

§1. 多阶段的决策问题

【例1】最短路线问题。设有一个旅行者从图中的A点出发，途中要经过B、C、D等处，最后到达终点E。从A到E有很多条路线可以选择，各点之间的距离如图所示，问该旅行者应选择哪一条路线，使从A到达E的总的路程为最短。



§1. 多阶段的决策问题

【例2】 设有某种机器设备，用于完成两类工作A和B。若 k 年初完好机器的数量为 x_k ，若以数量 u_k 用于A，余下的 $(x_k - u_k)$ 用于工作B，则该年的预期收入为 $g(u_k) + h(x_k - u_k)$ 。这里 $g(u_k)$ 和 $h(x_k - u_k)$ 是已知函数，且 $g(0) = h(0) = 0$ 。又机器设备在使用中会有损坏，设机器用于工作A时，一年后能继续使用的完好机器数占年初投入量的 a ；若用于B项工作时，一年后能继续使用的完好机器数占年初投入量的 b ，即下一年初能继续用于完成这两项工作的设备数为 $x_{k+1} = a u_k + b(x_k - u_k)$ 。设第一年初完好的机器总数为 x_0 ，问在**连续三年内每年应如何分配用于A、B两项工作的机器数，使三年的总收益为最大。**

§1.多阶段的决策问题

【例3】将一个数 c ($c>0$) 分成 n 个部分 c_1 , c_2, \dots, c_n 之和, 且 $c_i>0$ ($i=1, \dots, n$), 问如何分割使其乘积 $\prod_{i=1}^n c_i$ 为最大。

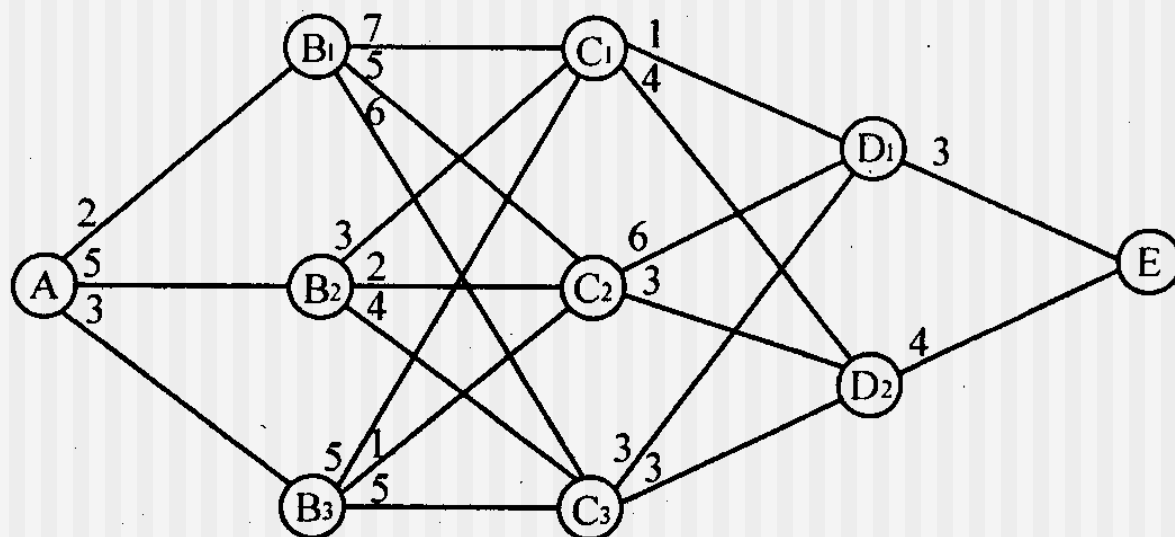
§2.最优化原理与动态规划的数学模型

2-1动态规划问题的解题思路

将一个**n阶段的决策问题**转化为依次求解n个具有**递推关系的单阶段的决策问题**。

如例1，逆序算法具体步骤如下：

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

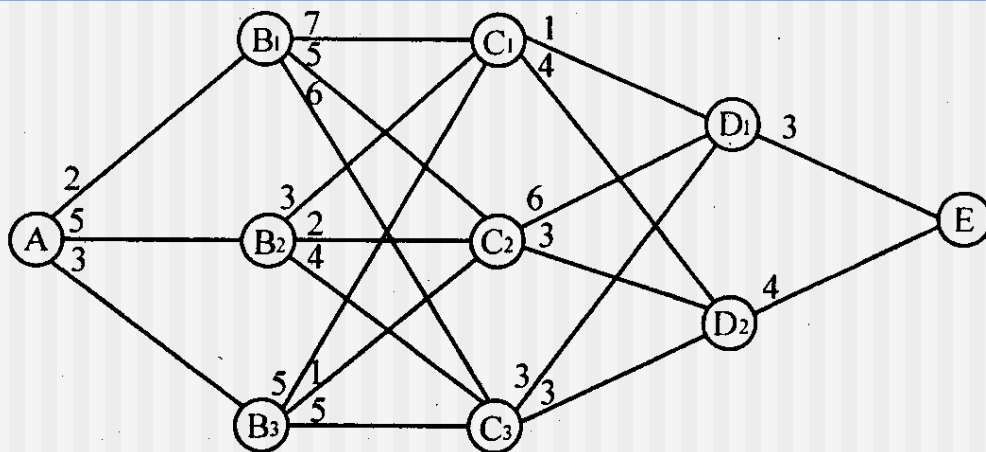


(1) 考虑一个阶段的最优选择。

$f(D1) = 3$ 表示某阶段初从D1出发到终点的最短距离

$f(D2) = 4$ 表示某阶段初从D2出发到终点的最短距离

§2.最优化原理与动态规划的数学模型



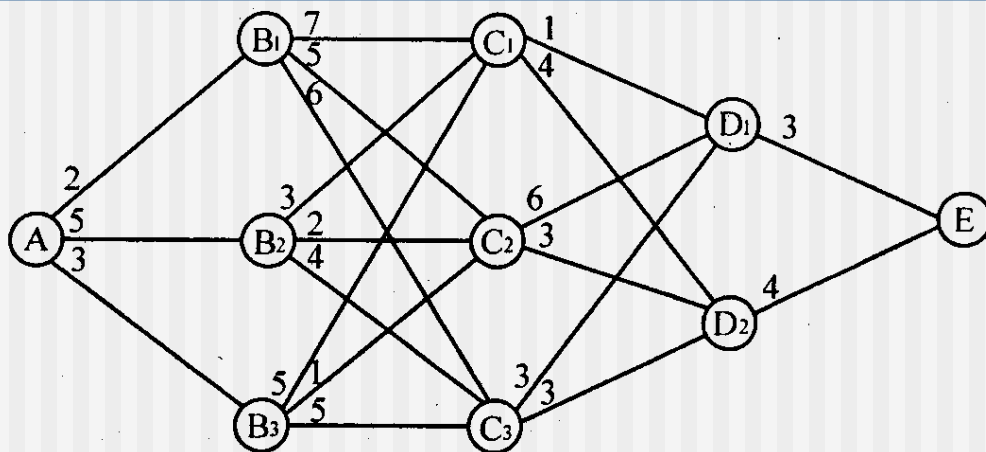
(2) 联合考虑两个阶段的最优选择。

从C1出发到E的最短路程为：

$$\min \begin{cases} d(C_1, D_1) + f(D_1) \\ d(C_1, D_2) + f(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 1 + 3 \\ 4 + 4 \end{cases} = 4$$

即从C1到E的最短路线为C1→D1→E，并记f(C1)=4。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

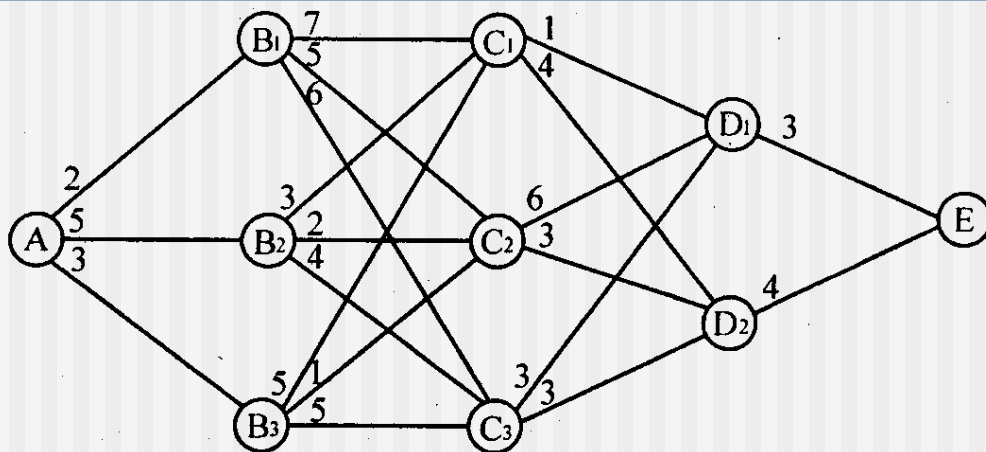


如果旅行者从C2出发，他的最优选择为：

$$\min \begin{cases} d(C_2, D_1) + f(D_1) \\ d(C_2, D_2) + f(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 6 + 3 \\ 3 + 4 \end{cases} = 7$$

即从C2到E的最短路线为C2→D2→E，并记f(C2)=7。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型



如果旅行者从C3出发，他的最优选择为：

$$\min \begin{cases} d(C_3, D_1) + f(D_1) \\ d(C_3, D_2) + f(D_2) \end{cases} = \min \begin{cases} 3 + 3 \\ 3 + 4 \end{cases} = 6$$

即从C3到E的最短路线为C3→D1→E，并记f (C3) =6。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

(3) 再考虑三个阶段联合起来的最优选择。

从B1出发，最优选择为：

$$\min \begin{Bmatrix} d(B_1, C_1) + f(C_1) \\ d(B_1, C_2) + f(C_2) \\ d(B_1, C_3) + f(C_3) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 7 + 4 \\ 5 + 7 \\ 6 + 6 \end{Bmatrix} = 11$$

即从B1到E的最短路线为 $B1 \rightarrow C1 \rightarrow D1 \rightarrow E$ ，并记 $f(B1) = 11$ 。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

如果旅行者从B2点出发，到E点的最优选择为：

$$\min \begin{cases} d(B_2, C_1) + f(C_1) \\ d(B_2, C_2) + f(C_2) \\ d(B_2, C_3) + f(C_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 3 + 4 \\ 2 + 7 \\ 4 + 6 \end{cases} = 7$$

即从B2到E的最短路线为 $B2 \rightarrow C1 \rightarrow D1 \rightarrow E$ ，并记 $f(B2) = 7$ 。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

如果旅行者从B3点出发，到E点的最优选择为：

$$\min \begin{cases} d(B_3, C_1) + f(C_1) \\ d(B_3, C_2) + f(C_2) \\ d(B_3, C_3) + f(C_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 5 + 4 \\ 1 + 7 \\ 5 + 6 \end{cases} = 8$$

即从B3到E的最短路线为 $B3 \rightarrow C2 \rightarrow D2 \rightarrow E$ ，并记 $f(B3) = 8$ 。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

(4) 四个阶段联合考虑时，从A点到E点的最优选择是

$$\min \begin{cases} d(A, B_1) + f(B_1) \\ d(A, B_2) + f(B_2) \\ d(A, B_3) + f(B_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 2 + 11 \\ 5 + 7 \\ 3 + 8 \end{cases} = 11$$

即从A到E的最短路线为A→B3→C2→D2→E，距离长度为11。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

将一个多阶段的决策问题转化为依次求解多个单阶段的决策问题时，一个重要特征是**将前面的解传递并纳入下一个阶段一并考虑**，即做到求解的各阶段间具有**递推性**。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

2-2动态规划的基本概念

1. **阶段** (stage) 是指一个问题需要作出决策的步数。

通常用 k 来表示问题包含的阶段数，称为阶段变量。

k 的编号方法有两种：

(1) **顺序编号法**，即初始阶段编号为1，以后随进程逐渐增大；

(2) **逆序编号法**。令最后一个阶段编号为1，往前推时编号逐渐增大。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

2. **状态** (state) 各阶段的状态通常用状态变量 x 来描述, 它既反映**前面各阶段决策的结局**, 又是**本阶段作出决策的出发点和依据**。

第 k 阶段的状态变量 —— x_k (**书上用 s_k**)

状态: 单变量, 多变量 (或向量, 向量中所含变量的个数称为**动态规划问题的维数**)。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

3. **决策** (decision) 某阶段初从给定的状态出发, 决策者在面临的若干种不同方案中**做出的选择**。

决策变量 $u_k(x_k)$: 第 k 阶段状态为 x_k 时对方案的选择。

$D_k(x_k)$: k 阶段状态为 x_k 时决策允许的取值范围, 称允许决策集合:

$$u_k(x_k) \in D_k(x_k)$$

例1中从B1点出发的允许决策集合 $D(B1) = \{C1, C2, C3\}$, 如果选取下一个到达点为C2, 则决策变量 $u_2(B1)$ 的取值为C2, 或直接写为 $u_2(B1) = C2$ 。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

4. **策略** (Policy) 和**子策略** (subpolicy) 动态规划问题**各阶段决策组成的序列总体称作一个策略**。含 n 个阶段的动态规划问题的策略可写为:

$$p_{1, n} = \{ u_1 (x_1) , u_2 (x_2) , \dots , u_n (x_n) \}$$

把从某一阶段开始到过程最终的决策序列称为问题的**子过程策略**或**子策略**。从 k 阶段起的子策略可写为

$$p_{k, n} = \{ u_k (x_k) , u_{k+1} (x_{k+1}) , \dots , u_n (x_n) \}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

5. **状态转移律** 从 x_k 的某一状态值出发, 当决策变量 $u_k(x_k)$ 的取值决定后, 下一阶段状态变量 x_{k+1} 的取值也就随之确定。这种**从上阶段的某一状态值到下一阶段某一状态值的转移的规律称为状态转移律。**

下一阶段状态 x_{k+1} 的取值是上阶段状态变量 x_k 和上阶段决策变量 $u_k(x_k)$ 的函数, 记为:

$$x_{k+1} = T(x_k, u_k(x_k))$$

$$\text{或: } x_{k+1} = T(x_k, u_k)$$

状态转移律也称**状态转移方程**。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

顺序解法时: $x_k = T^{-1}(x_{k+1}, u_k(x_k))$

或: $x_k = T^{-1}(x_{k+1}, u_k)$

6. **指标函数** 衡量实现过程优劣的一种数量指标, 分为**阶段指标函数**和**过程的指标函数**。

阶段的指标函数是对应某一阶段状态和从该状态出发的一个阶段的决策的某种效益度量, 用 $v_k(x_k, u_k)$ 表示。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

过程的指标函数是指从状态 x_k ($k=1, \dots, n$) 出发至过程最终, 当采取某种子策略时, 所得到的效益值。这个值**既与 x_k 的状态值有关, 又与 x_k 以后所选取的策略有关**, 它是两者的函数值, 记作

$$V_{k, n}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \dots, x_n)$$

对于要构成动态规划模型的指标函数, 应**具有可分离性, 并满足递推关系**, 即 $V_{k, n}$ 应可表示为 x_k 、 u_k 、 $V_{k+1, n}$ 的函数:

$$\begin{aligned} & V_{k, n}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_k, u_k, V_{k+1, n}(x_{k+1}, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

常见的指标函数的形式是：

(1) 过程和它的任一子过程的指标是它所包含的**各阶段的指标的和**：

$$V_{k,n} = \sum_{i=k}^n v_i(x_i, u_i)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = V_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}(x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

(2) 过程和它的任一子过程的指标是它所包含的**各阶段的指标的乘积**：

$$V_{k,n} = \prod_{i=k}^n v_i(x_i, u_i)$$

则
$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = v_k(x_k, u_k) \cdot V_{k+1,n}(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

当 x_k 的值确定后，指标函数的值就只同 k 阶段起的子策略有关。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

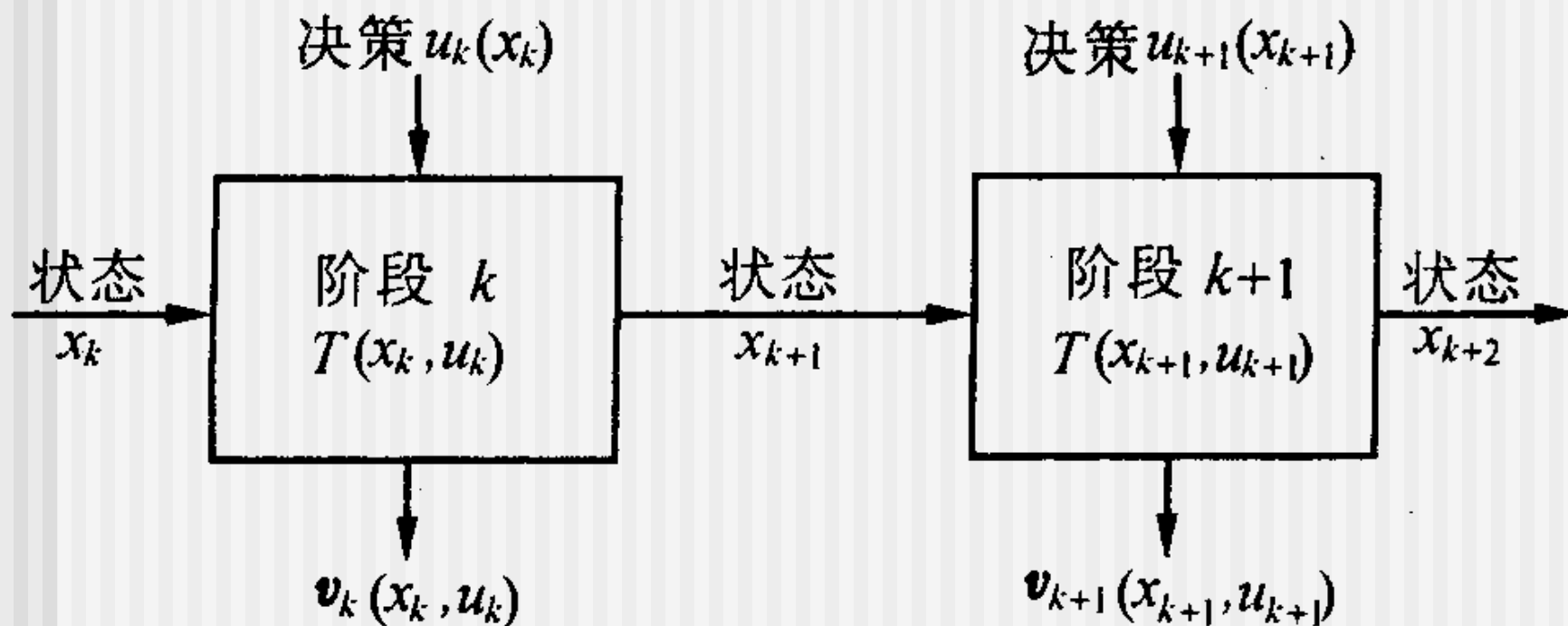
过程指标函数的**最优值**，称为最优指标函数。它是指从第 k 阶段的状态 x_k 开始到第 n 阶段终止状态，**采取最优策略所得到的指标函数值**。对应于从状态 x_k 出发的最优子策略，过程指标函数值记作 $f_k(x_k)$ ，于是有

$$f_k(x_k) = \text{opt } V_{k, n}$$

式中 opt 代表最优化，根据效益值的具体含义可以是求最大（ \max ）或求最小（ \min ）。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

上述基本概念在多阶段决策过程中的关系可通过下图来表示。



§2.最优化原理与动态规划的数学模型

2-3最优化原理与动态规划的数学模型

从下述所有可能的组合中选取最优：**将本阶段决策的指标效益值加上从下阶段开始采取最优策略时的指标效益值。**

50年代，美国的利·别尔曼（R.Bellman）等人根据研究一类多阶段决策问题，提出了最优性原理，作为动态规划的理论基础，该原理内容如下：**作为整个过程的最优策略具有这样的性质，无论过去的状态和决策如何，对先前决策所形成的状态而言，余下的诸决策必构成最优策略。**

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

根据最优性原理可写出计算动态规划问题的递推关系式，称为**动态规划的基本方程**：

$$V_{k,n} = \sum_{i=k}^n v_i(x_i, u_i) \text{ 时, 有 } f_k(x_k) = \underset{u_k \in D_k(x_k)}{\text{opt}} \{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \quad (1)$$

$$V_{k,n} = \prod_{i=k}^n v_i(x_i, u_i) \text{ 时, 有 } f_k(x_k) = \underset{u_k \in D_k(x_k)}{\text{opt}} \{v_k(x_k, u_k) * f_{k+1}(x_{k+1})\} \quad (2)$$

边界条件 $f_{n+1}(x_{n+1})$ 的值

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

动态规划的最优性定理： 设阶段数为 n 的多阶段决策过程，其阶段编号为 $k=1, \dots, n$ ，允许策略

$p_{1,n}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ 是最优策略的充要条件是对任一个 k
($1 < k < n$) 和 $x_1 \in S_1$ 有

$$V_{1,n}(x_1, p_{1,n}^*) = \text{opt} \{V_{1,k-1}(x_1, p_{1,k-1}) + \text{opt} V_{k,n}(\tilde{x}_k, p_{k,n})\}$$

式中 $p_{1,n} = (p_{1,k-1}, p_{k,n})$, $\tilde{x}_k = T_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1})$,

它是由给定的初始状态 x_1 和子策略 $p_{1,k-1}$ 所确定的 k 阶段状态。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

为构造和求解动态规划的数学模型，需要明确模型中有关阶段的划分、状态变量、决策变量、允许决策集合和状态转移方程等。

- (1) 状态变量
离散/连续
- (2) 决策变量
单变量/向量
离散/连续。

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

(3) 状态转移律 $x_{k+1} = T(x_k, u_k)$

确定性的多阶段决策过程

随机性的多阶段决策过程

(4) 指标函数 **指标函数必须具有递推性**，即能写成如下的关系式：

$$V_{k,n} = v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n} \quad \text{或} \quad V_{k,n} = v_k(x_k, u_k) * V_{k+1,n}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

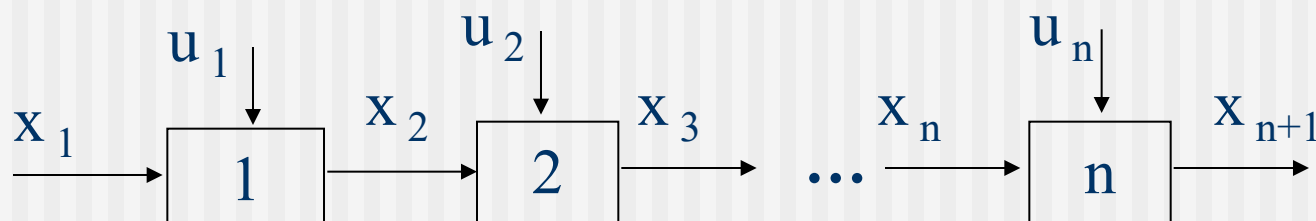
2-4逆序解法与顺序解法

动态规划问题的求解有两种基本方法：逆序解法与顺序解法。

顺序解法的思路 and 模型：

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

顺序解法的思路 and 模型：



例如在资源分配问题中，设阶段的编号 $k=1, \dots, n$ 同逆序解法

决策变量 u_k ：表示分配到第 k 阶段的资源数量

状态变量 x_k ：表示**从第1到第 $(k-1)$ 阶段的使用的资源数量**

则第 $(k-1)$ 阶段的状态 x_{k-1} 是第 k 阶段的状态 x_k 和第 $(k-1)$ 阶段决策变量 u_{k-1} 的函数：

$$x_{k-1} = x_k - u_{k-1}$$

故顺序解法中状态转移律可表为：
$$x_{k-1} = T(x_k, u_{k-1})$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

第 $(k - 1)$ 阶段的指标函数可表为：

$$V_{k-1}(x_k, u_{k-1})$$

用 $f_{k-1}(x_k)$ 表示第 k 阶段初状态为 x_k ，从第 1 到第 $(k - 1)$ 阶段采取最优子策略时，**前 $(k - 1)$ 个阶段的最优指标函数值**，则由动态规划的最优化原理，采用顺序解法时，动态规划的数学模型可表示如下：

(1) 当各阶段指标函数为求和关系时，有

$$\begin{cases} f_k(x_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k(x_{k+1})}{opt} \{v_k(x_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(x_k)\} \\ f_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

(2) 当各阶段指标函数为求积关系时，有

$$\begin{cases} f_k(x_{k+1}) = \underset{u_k \in D_k(x_{k+1})}{opt} \{v_k(x_{k+1}, u_k) * f_{k-1}(x_k)\} \\ f_0(x_1) = 1 \end{cases}$$

§2.最优化原理与动态规划的数学模型

2-5动态规划模型的分类

按过程演变的特征，动态规划模型划分为**确定性的**动态规划模型和**随机性的**动态规划模型两大类。根据状态变量的取值是**离散**还是**连续**，它们又可区分为连续和离散两类。

离散确定性的动态规划模型

连续确定性的动态规划模型

离散随机性的动态规划模型

连续随机性的动态规划模型

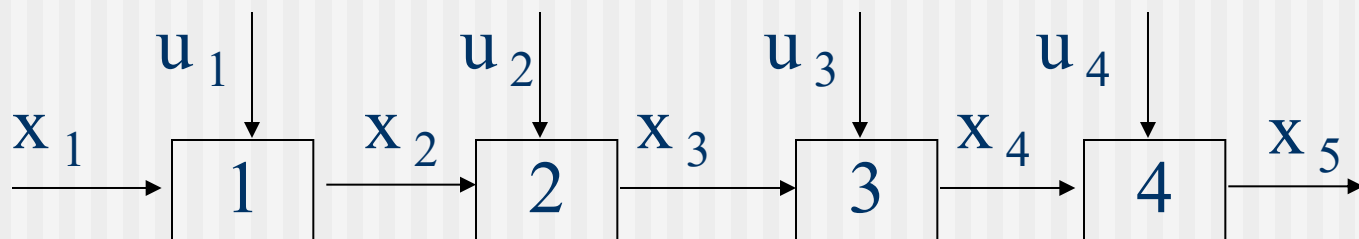
§3. 离散确定性动态规划模型的求解

【例4】 某一警卫部门共有12支巡逻队，负责4个要害部位A、B、C、D的警卫巡逻。对每个部位可分别派出2~4支巡逻队，并且由于派出巡逻队数的不同，各部位预期在一段时期内可能造成的损失有差别。问该警卫部门应往各部位分别派多少支巡逻队，使总的预期损失为最小。

部位 巡逻队数	A	B	C	D
2	18	38	24	34
3	14	35	22	31
4	10	31	21	25

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

【解】把12支巡逻队往4个部位派遣看成依次分四个阶段（用 k 表示， $k=1, 2, 3, 4$ ）。



(1) 逆序解法

状态变量 x_k 表示第 k 阶段初拥有的**可派遣的巡逻队数**，
决策变量 u_k 表示第 k 阶段**派出的巡逻队数**，第 k 阶段允许的决策集合为：

$$D_k(x_k) = \{u_k \mid 2 \leq u_k \leq 4\} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

§3.离散确定性动态规划模型的求解

状态转移律为： $x_{k+1} = x_k - u_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$)

假设用 $\mathbf{p}_k(\mathbf{u}_k)$ 表示k阶段派出的巡逻队数为 u_k 时，该阶段的部位的预期损失值，则指标函数可写为：

$$V_{k,4} = \sum_{i=k}^4 p_i(u_i) = p_k(u_k) + \sum_{i=k+1}^4 p_i(u_i) = p_k(u_k) + V_{k+1,4}$$

假设用 $f_k(x_k)$ 表示从k阶段（状态为 x_k ）开始，到过程结束，当采用最优子策略时的预期损失值，则

$$f_k(x_k) = \min_{u_k \in D_k(x_k)} \{p_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

① 先考虑给D部位派巡逻队，即 $k = 4$ ，则：

$$f_4(x_4) = \min_{u_4 \in D_4(x_4)} \{p_4(u_4) + f_5(x_5)\}$$

因问题中只有4个要害部位，故第5阶段初拥有的未派出的巡逻队数对前4个部位的预期损失不再起影响，故边界条件 $f_5(x_5) = 0$ ，因此有

$$f_4(x_4) = \min_{u_4 \in D_4(x_4)} \{p_4(u_4)\}$$

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

$D_4(x_4) = \{2, 3, 4\}$, x_4 的可能值为 $2 \leq x_4 \leq 6$:

表 8-2

$x_4 \backslash u_4$	$p_4(u_4)$			$f_4(x_4)$	u_4^*
	2	3	4		
2	34	—	—	34	2
3	34	31	—	31	3
4	34	31	25	25	4
5	34	31	25	25	4
6	34	31	25	25	4

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

② 再联合考虑对C、D两个部位派巡逻队，即 $k = 3$ ，

$$f_3(x_3) = \min_{u_3 \in D_3(x_3)} \{p_3(u_3) + f_4(x_4)\}$$

$D_3(x_3) = \{2, 3, 4\}$ ， x_3 的可能值为 $4 \leq x_3 \leq 8$ ：

表 8-3

x_3	u_3	$p_3(u_1) + f_4(x_3 - u_3)$			$f_3(x_3)$	u_3^*
		2	3	4		
4		24 + 34			58	2
5		24 + 31	22 + 34		55	2
6		24 + 25	22 + 31	21 + 34	49	2
7		24 + 25	22 + 25	21 + 31	47	3
8		24 + 25	22 + 25	21 + 25	46	4

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

③ 下面考虑对B、C、D三个部位派巡逻队，即 $k = 2$ ，

$$f_2(x_2) = \min_{u_2 \in D_2(x_2)} \{p_2(u_2) + f_3(x_3)\}$$

$D_2(x_2) = \{2, 3, 4\}$ ， x_2 的可能值为 $8 \leq x_2 \leq 10$ ：

表 8-4

$x_2 \backslash u_2$	$p_2(u_2) + f_3(x_2 - u_2)$			$f_2(x_2)$	u_2^*
	2	3	4		
8	38 + 49	35 + 55	31 + 58	87	2
9	38 + 47	35 + 49	31 + 55	84	3
10	38 + 46	35 + 47	31 + 49	80	4

§3.离散确定性动态规划模型的求解

④ 最后考虑对A、B、C、D四个部位派巡逻队,即 $k = 1$,

$$f_1(x_1) = \min_{u_1 \in D_1(x_1)} \{p_1(u_1) + f_2(x_2)\}$$

$$D_1(x_1) = \{2, 3, 4\}, \quad x_1 = 12:$$

表 8-5

$x_1 \backslash u_1$	$p_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)$			$f_1(x_1)$	u_1^*
	2	3	4		
12	18 + 80	14 + 84	10 + 87	97	4

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

表 8-5

x_1 \ u_1	$p_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)$			$f_1(x_1)$	u_1^*
	2	3	4		
12	18 + 80	14 + 84	10 + 87	97	4

$$u_1^* = 4, \quad x_2 = 12 - 4 = 8,$$

$$u_2^* = 2, \quad x_3 = 8 - 2 = 6,$$

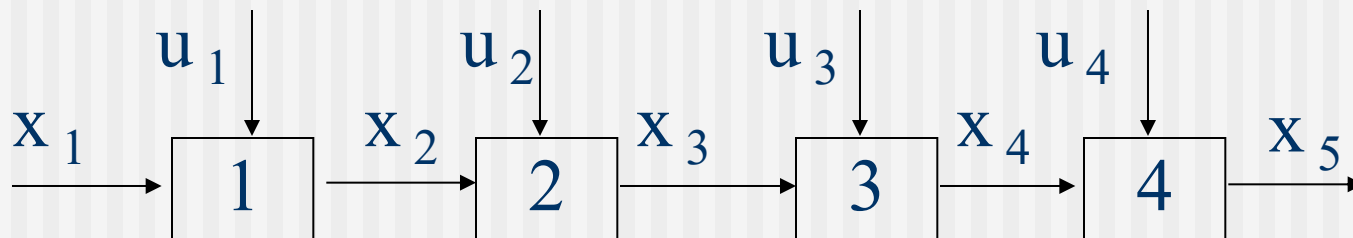
$$u_3^* = 2, \quad x_4 = 6 - 2 = 4,$$

$$u_4^* = 4。$$

该警卫部门的派巡逻队数的最优策略为：**A部位4支，B部位2支，C部位2支，D部位4支，总预期损失为97单位。**

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

(2) 顺序解法



阶段编号同逆序解法，状态变量 x_k 表示**可用于前 $(k-1)$ 个部位的巡逻队数**，故有 **$x_5=12$** ； k 阶段决策变量 u_k ，允许决策集 $D_k(x_{k+1}) = \{u_k \mid 2 \leq u_k \leq 4\}$ 。

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

可用于前 $(k - 1)$ 个部位的巡逻队数 x_k 等于可用于前 k 个部位的数字 x_{k+1} 减于第 k 阶段派出的巡逻队数，故状态转移律为：

$$x_k = x_{k+1} - u_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

$$8 \leq x_4 \leq 10, \quad 4 \leq x_3 \leq 8, \quad 2 \leq x_2 \leq 6$$

§3.离散确定性动态规划模型的求解

假设用 $p_k(u_k)$ 表示 k 阶段派出的巡逻队数为 u_k 时, 该阶段的部位的预期损失值, 则指标函数可写为:

$$V_{1,k} = \sum_{i=1}^k p_i(u_i) = p_k(u_k) + \sum_{i=1}^{k-1} p_i(u_i) = p_k(u_k) + V_{1,k-1}$$

假设用 $f_k(x_{k+1})$ 表示从第1阶段开始, 到第 k 阶段结束 (状态为 x_{k+1}), 当采用**最优子策略时的预期损失值**, 则

$$f_k(x_{k+1}) = \min_{u_k \in D_k(x_{k+1})} \{p_k(u_k) + f_{k-1}(x_k)\}$$

$$f_0(x_1) = 0$$

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad f_1(x_2) &= \min_{u_1 \in D_1(x_2)} \{p_1(u_1) + f_0(x_1)\} \\ &= \min_{u_1 \in D_1(x_2)} \{p_1(u_1) + 0\} = \min_{u_1 \in D_1(x_2)} \{p_1(u_1)\} \end{aligned}$$

$$D_1(x_2) = \{2, 3, 4\}, \quad 2 \leq x_2 \leq 6:$$

表 8-6

$x_2 \backslash u_1$	$p_1(u_1) + f_0(x_1)$			$f_1(x_2)$	u_1^*
	2	3	4		
2	18 + 0	—	—	18	2
3	18 + 0	14 + 0	—	14	3
4	18 + 0	14 + 0	10 + 0	10	4
5	18 + 0	14 + 0	10 + 0	10	4
6	18 + 0	14 + 0	10 + 0	10	4

§3. 离散确定性动态规划模型的求解

$$\textcircled{2} \quad f_2(x_3) = \min_{u_2 \in D_2(x_3)} \{p_2(u_2) + f_1(x_2)\}$$

$$D_2(x_3) = \{2, 3, 4\}, \quad 4 \leq x_3 \leq 8:$$

表 8-7

x_3	u_2	$p_2(u_2) + f_1(x_2)$			$f_2(x_3)$	u_2^*
		2	3	4		
4		$38 + 18$	—	—	56	2
5		$38 + 14$	$35 + 18$	—	52	2
6		$38 + 10$	$35 + 14$	$31 + 18$	48	2
7		$38 + 10$	$35 + 10$	$31 + 14$	45	3, 4
8		$38 + 10$	$35 + 10$	$31 + 10$	41	4

§3.离散确定性动态规划模型的求解

$$\textcircled{3} \quad f_3(x_4) = \min_{u_3 \in D_3(x_4)} \{p_3(u_3) + f_2(x_3)\}$$

$$D_3(x_4) = \{2, 3, 4\}, \quad 8 \leq x_4 \leq 10:$$

表 8-8

$x_4 \backslash u_3$	$p_3(u_3) + f_2(x_3)$			$f_3(x_4)$	u_3^*
	2	3	4		
8	24 + 48	22 + 52	21 + 56	72	2
9	24 + 45	22 + 48	21 + 52	69	2
10	24 + 41	22 + 45	21 + 48	65	2

§3.离散确定性动态规划模型的求解

$$\textcircled{4} \quad f_4(x_5) = \min_{u_4 \in D_4(x_5)} \{p_4(u_4) + f_3(x_4)\}$$

$$D_4(x_5) = \{2, 3, 4\}, \quad x_5 = 12 :$$

表 8-9

$x_5 \backslash u_4$	$p_4(u_4) + f_3(x_4)$			$f_4(x_5)$	u_4^*
	2	3	4		
12	34 + 65	31 + 69	25 + 72	99	4

$$x_5 = 12, \quad u_4^* = 4,$$

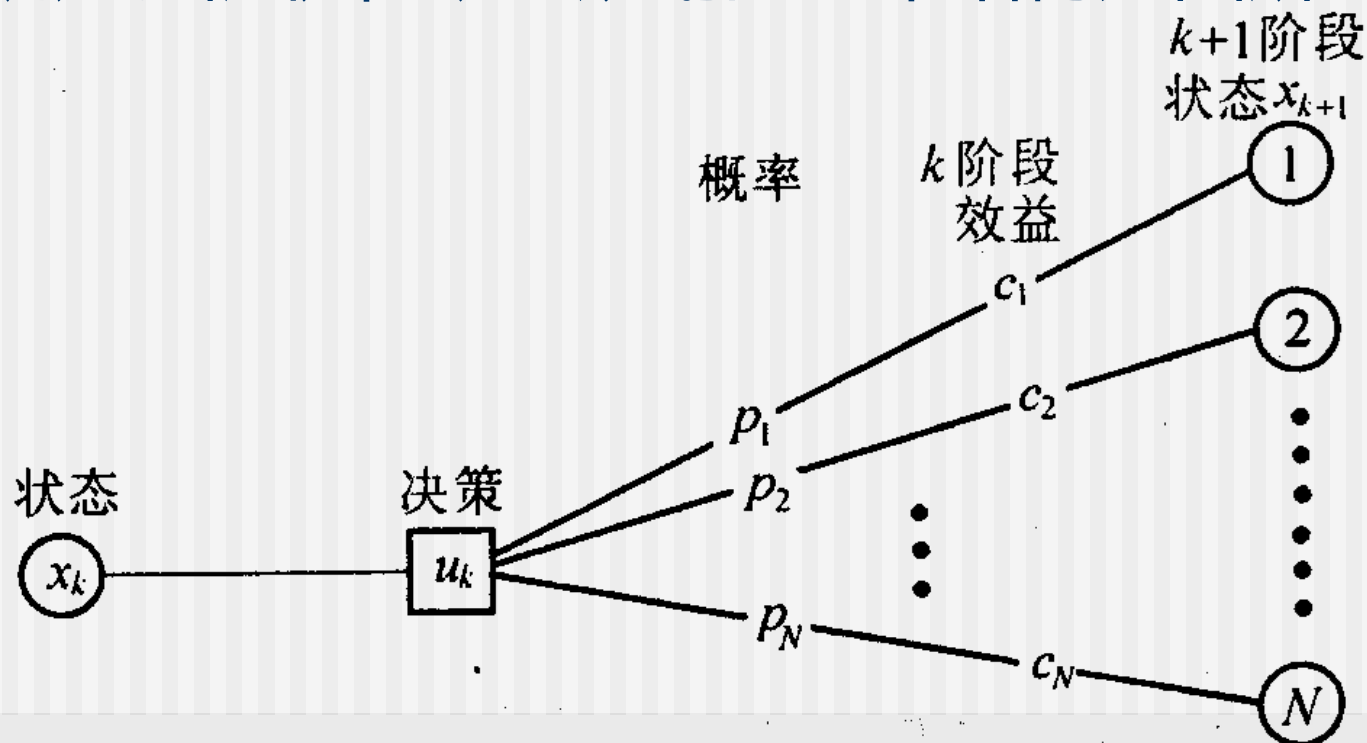
$$x_4 = 8, \quad u_3^* = 2,$$

$$x_3 = 6, \quad u_2^* = 2,$$

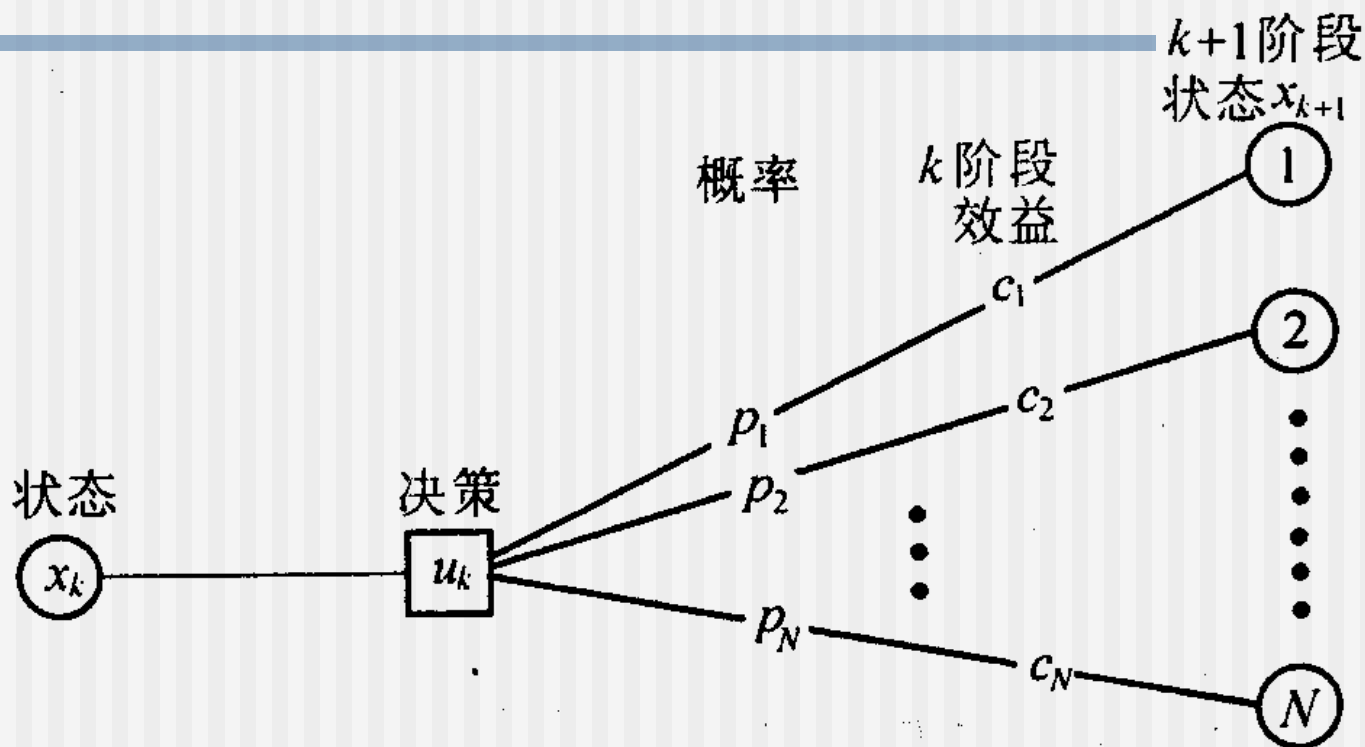
$$x_2 = 4, \quad u_1^* = 4, \quad \text{预期总损失97单位。}$$

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

随机性动态规划是指**状态的转移律是不确定的**，即对给定的状态和决策，下一阶段的到达状态是**具有确定概率分布的随机变量**，这个概率分布由本阶段的状态和决策完全确定。随机性动态规划的基本结构如图所示：



§4. 离散随机性动态规划模型的求解



图中 N 表示第 $(k+1)$ 阶段可能的状态数, p_1 、 p_2 、...、 p_N 为给定状态 x_k 和决策 u_k 的情况下, 下一个可能到达的状态的概率, c_i 为从 k 阶段状态 x_k 转移到 $(k+1)$ 阶段状态为 i 时的指标函数值。

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

随机性的动态规划问题中，当**指标函数值为各阶段效益和的情况下**，基本方程应写为：

$$f_k(x_k) = \underset{u_k \in D_k(x_k)}{\text{opt}} E\{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

【例6】某公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。据有经验的技术人员估计，试制时每投产一台合格的概率为1/3，投产一批的准备结束费用为250元，每台试制费用为100元。若投产一批后全部不合格，可再投一批试制，但每投一批的周期需一个月。要求确定每批投产多少台，使总的试制费用（包括可能发生的赔偿损失）的期望值为最小。

§4.离散随机性动态规划模型的求解

【解】 (1) 合同期为三个月，投产一批的周期为一个月，作为一个阶段。故可将整个合同期划**分为三个阶段**。

(2) 状态变量 x_k 。假定尚**没有一台合格品时**
 $x_k = 1$ ，已得到**一台以上合格品时** $x_k = 0$ 。则签订合同时有 **$x_1 = 1$** 。

(3) 决策变量 u_k 为每个阶段的投产试制台数。允许决策集合

$$D_k(x_k) = \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{当 } x_k = 1)$$

$$D_k(x_k) = \{0\} \quad (\text{当 } x_k = 0)$$

§4.离散随机性动态规划模型的求解

(4) 状态转移律为：

$$\begin{cases} p(x_{k+1} = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{u_k} \\ p(x_{k+1} = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{u_k} \end{cases}$$

(5) 第k阶段的费用支出为 $c(u_k)$ ，有

$$c(u_k) = \begin{cases} 250 + 100u_k & (u_k \neq 0) \\ 0 & (u_k = 0) \end{cases}$$

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

(6) 设 $f_k(x_k)$ 为从状态 x_k 、决策 u_k 出发的 k 阶段以后的最小期望费用。因有 $f_k(0) = 0$ ，故有

$$f_k(1) = \min_{u_k \in D_k(x_k)} \left\{ c(u_k) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_k} f_{k+1}(1) + \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{u_k}\right] f_{k+1}(0) \right\} =$$

$$\min_{u_k \in D_k(x_k)} \left\{ c(u_k) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_k} f_{k+1}(1) \right\}$$

当 $k = 3$ 时, $f_3(0) = 0$,

$$f_3(1) = \min_{u_3 \in D_3(x_3)} \left\{ c(u_3) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_3} f_4(1) \right\}$$

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

$f_4(1)$ 的意义为第四个月初仍未得到一件合格产品，因按合同要求需赔偿1500元，故有 $f_4(1) = 1500$ 。

表 8-10

$x_3 \backslash u_3$	$c(u_3) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_3} \times 1500$						$f_3(x_3)$	u_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	1500	1350	1117	994	946	948	946	4

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

当 $k = 2$ 时, $f_2(0) = 0$,

$$f_2(1) = \min_{u_2 \in D_2(x_2)} \left\{ c(u_2) + \left(\frac{2}{3} \right)^{u_2} f_3(1) \right\}$$

表 8-11

$x_2 \backslash u_2$	$c(u_2) + \left(\frac{2}{3} \right)^{u_2} \times 946$					$f_2(x_2)$	u_2^*
	0	1	2	3	4		
0	0				0	0	0
1	946	981	870	830	837	830	3

§4. 离散随机性动态规划模型的求解

当 $k = 1$ 时,
$$f_1(1) = \min_{u_1 \in D_1(x_1)} \left\{ c(u_1) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_1} f_2(1) \right\}$$

表 8-12

$x_1 \backslash u_1$	$c(u_1) + \left(\frac{2}{3}\right)^{u_1} \times 830$					$f_1(x_1)$	u_1^*
	0	1	2	3	4		
1	830	903	819	796	814	796	3

即该公司的最优决策为**第一批投产3台**；如果无合格品，**第二批再投产3台**；如果仍全部不合格，**第3批投产4台**。这样使总的期望研制费用（包括三批均不合格时的赔偿费）为最小，共计**796元**。

§5. 动态规划应用举例

$$\max z = 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12x_2 - x_2^3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

把确定 x_1, x_2 的值看作分两个阶段的决策, 用 k 表示阶段序号 ($k = 1, 2$). 状态变量为 k 阶段初约束条件右端项的剩余值, 分别用 R_1, R_2 表示, 有 $R_1 = 3, R_2 = 3 - x_1, R_3 = R_2 - x_2$.

动态规划的递推方程可写为

$$f_1(R_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq R_1} \{ 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + f_2(R_2) \} \quad (8.17)$$

$$f_2(R_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq R_2} \{ 12x_2 - x_2^3 + f_3(R_3) \} \quad (8.18)$$

边界条件

$$f_3(R_3) = 0 \quad (8.19)$$

由式(8.18)和(8.19)有

$$f_2(R_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq R_2} \{ 12x_2 - x_2^3 \}$$

§5.动态规划应用举例

令 $\frac{d\{\cdot\}}{dx_2} = 12 - 3x_2^2 = 0$, 解得

$$x_2 = \begin{cases} 2, & \text{当 } R_2 \geq 2, \text{ 即 } x_1 \leq 1 \\ R_2, & \text{当 } R_2 \leq 2, \text{ 即 } 1 \leq x_1 \leq 3 \end{cases} \quad (8.20)$$

因 $\frac{d^2\{\cdot\}}{dx_2^2} = -6x_2 < 0$, 故 x_2 取上述值时, $f_2(R_2)$ 达到最大.

将(8.20)式的结果代入(8.17)式有

$$\text{当 } x_2 = 2 \text{ 时, } f_1(R_1)' = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 16\} \quad (8.21a)$$

$$\text{当 } x_2 = R_2 \text{ 时, } f_1(R_1)'' = \max_{1 \leq x_1 \leq 3} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12R_2 - R_2^3\} \quad (8.21b)$$

§5.动态规划应用举例

所以

$$f_1(R_1) = \max \begin{cases} 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 16 & (0 \leq x_1 \leq 1) \\ -x_1^3 - 6x_1^2 + 27x_1 + 9 & (1 \leq x_1 \leq 3) \end{cases} \quad (8.22)$$

由(8.21a)得 $x_1 = 1$, $f_1(R_1)' = 29$. 由(8.21b)式, 令

$$\frac{d\{-x_1^3 - 6x_1^2 + 27x_1 + 9\}}{dx_1} = -3(x_1^2 + 4x_1 - 9) = 0$$

解得

$$x_1 = -2 + \sqrt{13}$$

§5.动态规划应用举例

因为

$$\frac{d^2 \{ -x_1^3 - 6x_1^2 + 27x_1 + 9 \}}{dx_1^2} = -3(2x_1 + 4) < 0 \text{ (当 } x_1 = -2 + \sqrt{13} \text{)}$$

故 $x_1 = -2 + \sqrt{13}$ 时,

$$f_1(R_1)'' = 32.745$$

由(8.22)式得

$$f_1(R_1) = \max(29, 32.745) = 32.745$$

由 $x_1^* = -2 + \sqrt{13} = 1.606$, 得 $x_2^* = 1.394$.

§5.动态规划应用举例

§5.动态规划应用举例

1. 最短路径

2. 资源分配问题

所谓资源分配问题，就是将数量一定的一种或若干种资源（例如原材料、资金、设备、劳力等）恰当地分配给若干个使用者，使目标函数为最优。

§5.动态规划应用举例

例如：

设有某种原料，总数量为 a ，用于生产 n 种产品。若分配数量 x_i 用于生产第 i 种产品，其收益为 $g_i(x_i)$ 。问应如何分配，才能使生产 n 种产品的总收入最大？

此问题可写成静态规划问题：

$$\text{Max } z = g_1(x_1) + \cdots + g_n(x_n)$$

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = a \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

状态变量 s_k 表示分配用于生产第 k 种产品至第 n 种产品的原料数量。

决策变量 x_k 表示分配生产第 k 种产品的原料数

状态转移方程： $s_{k+1} = s_k - x_k$

允许决策集合： $D_k(s_k) = \{x_k | 0 \leq x_k \leq s_k\}$

最优值函数 $f_k(s_k)$ ：表示以数量为 s_k 的原料分配给第 k 种产品至第 n 种产品所得的最大总收入，则动态规划的逆推关系式为：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq x_k \leq s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)\} & k = n, \dots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

这种只将资源合理分配不考虑回收的问题，又称为**资源平行分配问题**。

在资源分配问题中，还有一种要考虑资源回收利用的问题，这里决策变量为连续值，称为**资源连续分配问题**。例如：

§5.动态规划应用举例

设有数量为 s_1 的某种资源，可投入A和B两种生产。第一年若以数量 u_1 投入生产A，剩下的量 $s_1 - u_1$ 就投入生产B，则可得收入为 $g(u_1) + h(s_1 - u_1)$ ，其中 $g(u_1)$ 和 $h(s_1 - u_1)$ 为已知函数，且 $g(0) = h(0) = 0$ ，这种资源在投入A、B生产后，年终还可回收再投入生产。设年回收率分别为 $0 < a < 1$ 和 $0 < b < 1$ ，则在第一年生产后，回收的资源量合计为 $s_2 = au_1 + b(s_1 - u_1)$ 。第二年再将资源数量 s_2 中的 u_2 和 $s_2 - u_2$ 分别再投入A、B两种生产，则第二年又可得到收入为 $g(u_2) + h(s_2 - u_2)$ 。如此继续进行 n 年，应当如何决定每年投入A生产的资源量 u_1, u_2, \dots, u_n ，才能使总的收入最大？

§5.动态规划应用举例

此问题写成静态规划问题为：

$$\text{Max } z = \{g(u_1) + h(s_1 - u_1) + g(u_2) + h(s_2 - u_2) + \cdots + g(u_n) + h(s_n - u_n)\}$$

$$\begin{cases} s_2 = au_1 + b(s_1 - u_1) \\ s_3 = au_2 + b(s_2 - u_2) \\ \vdots \\ s_{n+1} = au_n + b(s_n - u_n) \\ 0 \leq u_i \leq s_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

【例】 机器负荷分配问题

某种机器可在高低两种不同的负荷下进行生产，设机器在高负荷下生产的产量函数为 $g = 8 u_1$ ，其中 u_1 为投入生产的机器数量，年完好率为 $a = 0.7$ ；在低负荷下生产的产量函数为 $h = 5 y$ ，其中 y 为投入生产的机器数量，年完好率为 $b = 0.9$ 。假定开始生产时完好的机器数量 $s_1 = 1000$ 台，每年应如何安排机器在高、低负荷下的生产，使在五年内生产的产品总产量最高？

§5.动态规划应用举例

3. 背包问题

有一个人带一个背包上山，其可携带物品重量的限度为 a 公斤。设有 N 种物品可供他选择装入背包中，这 N 重物品编号为 $1, 2, \dots, N$ 。已知第 i 种物品每件重量为 w_i 公斤，在上山过程中的作用（价值）是携带数量 x_i 的函数 $c_i(x_i)$ 。问此人应如何选择携带物品（各几件），使所起作用（总价值）最大？——这就是著名的背包问题，类似的问题有工厂里的下料问题，运输中的货物装载问题，人造卫星内的物品装载问题等等。

§5.动态规划应用举例

P168 【例8】有一艘货船准备装载 N 种货物，已知第 k 种货物的单位重量为 w_k ，其价值为 v_k 。假如该货船的最大载重量为 W ，要求确定每种货物的装载件数，在不超过最大载重允许的条件下，使货船装运物资的总价值为最大。

【解】若用 u_k 表示第 k 种货物的装载件数，则问题归结为求解下述**整数**规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{k=1}^N v_k u_k \\ \begin{cases} \sum_{k=1}^N w_k u_k \leq W \\ u_k \geq 0, \text{ 且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

§5.动态规划应用举例

为用动态规划方法求解，先将此问题转化成动态规划模型。将装载N种货物看作N个阶段，用 k ($k=1, \dots, N$) 来代表阶段。第 k 阶段的**状态为**可用于第 k 、 $k+1$ 、 \dots 、 N 阶段的装载重量，用 W_k 表示。用 **u_k 表示**第 k 阶段装载第 k 种物资的件数，则

$u_k \leq [W_k / w_k]$ ， $[W_k / w_k]$ 为 W_k / w_k 的**最大整数部分**。

状态转移可表为 $W_{k+1} = W_k - w_k u_k$ 。由此动态规划的递推方程可表为：

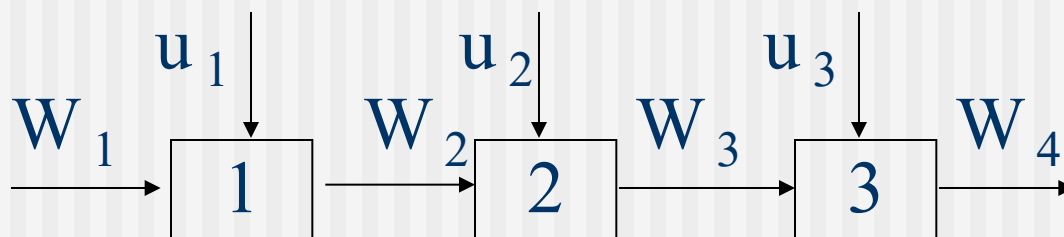
$$f_k(W_k) = \max_{0 \leq u_k \leq [W_k / w_k]} \{v_k u_k + f_{k+1}(W_{k+1})\}$$

§5.动态规划应用举例

例如: $N=3$, $W=5$,

$$w_1 = 2 \text{ , } w_2 = 3 \text{ , } w_3 = 1$$

$$v_1 = 65 \text{ , } v_2 = 80 \text{ , } v_3 = 30$$



状态变量 W_k :

$$W_2 = W_1 - w_1 u_1, \quad W_3 = W_2 - w_2 u_2, \quad W_4 = W_3 - w_3 u_3$$

$$W_2 = 5 - 2 u_1, \quad W_3 = W_2 - 3 u_2, \quad W_4 = W_3 - u_3$$

§5.动态规划应用举例

当 $k=3$ 时, $u_3 \leq [W_3 / w_3] = [5 / 1] = 5$

$$f_3(W_3) = \max_{0 \leq u_3 \leq 5} \{30u_3 + f_4(W_4)\} = \max_{0 \leq u_3 \leq 5} \{30u_3\}$$

$W_3 \backslash u_3$	$30u_3$						$f_3(W_3)$	u_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	0	30					30	1
2	0	30	60				60	2
3	0	30	60	90			90	3
4	0	30	60	90	120		120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

§5.动态规划应用举例

当 $k=2$ 时, $u_2 \leq [W_2 / w_2] = [5 / 3] = 1$

$$f_2(W_2) = \max_{0 \leq u_2 \leq 1} \{80u_2 + f_3(W_3)\} = \max_{0 \leq u_2 \leq 1} \{80u_2 + f_3(W_2 - 3u_2)\}$$

$W_2 \backslash u_2$	$80u_2 + f_3(W_2 - 3u_2)$		$f_2(W_2)$	u_2^*
	0	1		
0	$0 + 0 = 0$		0	0
1	$0 + 30 = 30$		30	0
2	$0 + 60 = 60$		60	0
3	$0 + 90 = 90$	$80 + 0 = 80$	90	0
4	$0 + 120 = 120$	$80 + 30 = 110$	120	0
5	$0 + 150 = 150$	$80 + 60 = 140$	150	0

§5.动态规划应用举例

当 $k=1$ 时, $u_1 \leq [W_1 / w_1] = [5 / 2] = 2$

$$\begin{aligned} f_1(W_1) &= \max_{0 \leq u_1 \leq 2} \{65u_1 + f_2(W_2)\} = \max_{0 \leq u_1 \leq 2} \{65u_1 + f_2(W_1 - 2u_1)\} \\ &= \max_{0 \leq u_1 \leq 2} \{65u_1 + f_2(5 - 2u_1)\} \end{aligned}$$

$W_1 \backslash u_1$	$65u_1 + f_2(W_1 - 2u_1)$			$f_1(W_1)$	u_1^*
	0	1	2		
5	$0 + 150 = 150$	$65 + 90 = 155$	$130 + 30 = 160$	160	2

$$u_1^* = 2, \quad W_2 = 5 - 2u_1 = 1$$

$$u_2^* = 0, \quad W_3 = W_2 - 3u_2 = 1 - 3u_2 = 1$$

$$u_3^* = 1 \quad \text{总价值} = 2 \times 65 + 1 \times 30 = 160$$

§5.动态规划应用举例

4. 一般数学规划问题

一般数学规划模型包括线性规划、非线性规划、整数规划等，使用动态规划的方法来求解时，方法和步骤上大体相同。它把依次决定各个变量的取值看成是一个多阶段的决策过程，因而模型中含多少个变量，求解就分多少个阶段。约束条件的右端项表明可分配的资源数，用状态变量表示，而约束条件的个数则是状态变量的维数。

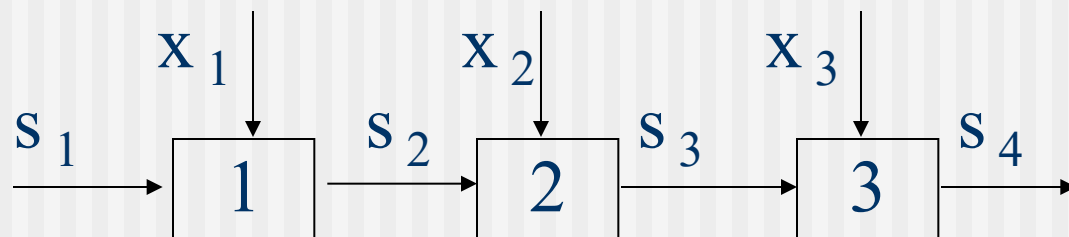
§5.动态规划应用举例

P164 【例5】分别用动态规划的逆序和顺序解法求解下述非线性规划问题

$$\max z = \prod_{i=1}^3 ix_i$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

【解】将变量 x_1 、 x_2 、 x_3 的取值人为地划分为3个阶段， $k = 1, 2, 3$ 。



§5.动态规划应用举例

(1) 逆序解法

状态变量 s_k : $s_1 = 12$, $s_2 = s_1 - x_1$,

$s_3 = s_2 - 3x_2$, $s_4 = s_3 - 2x_3$ 。

决策变量 x_k : $0 \leq x_1 \leq s_1$, $0 \leq x_2 \leq s_2/3$, $0 \leq x_3 \leq s_3/2$ 。

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(x_k)} \{ kx_k \cdot f_{k+1}(s_{k+1}) \} \\ f_4(s_4) = 1 \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

当 $k = 3$ 时：

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3/2} \{3x_3 \cdot f_4(s_4)\} = \frac{3}{2}s_3, \quad x_3^* = \frac{s_3}{2}$$

当 $k = 2$ 时：

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2/3} \{2x_2 \cdot f_3(s_2 - 3x_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2/3} \left\{2x_2 \cdot \frac{3}{2}(s_2 - 3x_2)\right\} = \frac{s_2^2}{4},$$

$$x_2^* = \frac{s_2}{6}$$

当 $k = 1$ 时：

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq 12} \{x_1 \cdot f_2(s_1 - x_1)\} = \max_{0 \leq x_1 \leq 12} \left\{x_1 \cdot \frac{1}{4}(s_1 - x_1)^2\right\} = 64,$$

$$x_1^* = 4$$

§5.动态规划应用举例

即

$$x_1^* = 4, \quad s_2 = s_1 - x_1^* = 12 - 4 = 8$$

$$x_2^* = s_2 / 6 = 8/6 = 4/3, \quad s_3 = s_2 - 3x_2^* = 8 - 4 = 4$$

$$x_3^* = s_3 / 2 = 4/2 = 2$$

§5.动态规划应用举例

(2) 顺序解法

状态变量 s_k : $s_4 = 12$, $s_3 = s_4 - 2x_3$,

$$s_2 = s_3 - 3x_2, \quad s_1 = s_2 - x_1。$$

决策变量 x_k : $0 \leq x_1 \leq s_2$, $0 \leq x_2 \leq s_3/3$,

$$0 \leq x_3 \leq s_4/2。$$

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \max_{x_k \in D_k(x_k)} \{ kx_k \cdot f_{k-1}(s_k) \} \\ f_0(s_1) = 1 \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

当 $k = 1$ 时： $f_1(s_2) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_2} \{x_1 \cdot f_0(s_1)\} = s_2, \quad x_1^* = s_2$

当 $k = 2$ 时：

$$f_2(s_3) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_3/3} \{2x_2 \cdot f_1(s_3 - 3x_2)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq s_3/3} \{2x_2(s_3 - 3x_2)\} = \frac{s_3^2}{6},$$

$$x_2^* = \frac{s_3}{6}$$

当 $k = 3$ 时：

$$f_3(s_4) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_4/2} \{3x_3 \cdot f_2(s_4 - 2x_3)\} = \max_{0 \leq x_3 \leq 6} \left\{3x_3 \cdot \frac{1}{6}(12 - 2x_3)^2\right\} = 64$$

$$x_3^* = 2$$

$$x_3^* = 2, \quad x_2^* = 4/3, \quad x_1^* = 4$$

§5.动态规划应用举例

P167 【例7】用动态规划方法求解线性规划问题：

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】为用动态规划方法求解，先要将这个问题转化为动态规划的模型。

将 x_1 、 x_2 的取值看作两个阶段的决策问题。

§5.动态规划应用举例

状态变量 R_{1k} 、 R_{2k} 、 R_{3k} 表示 k 阶段初各约束条件右端项的剩余值，即从第 k 阶段到第2阶段的可用资源

决策变量 x_1 、 x_2

状态转移为：

$$\begin{cases} R_{12} = R_{11} - x_1 = 4 - x_1 \\ R_{22} = R_{21} = 12 \\ R_{32} = R_{31} - 3x_1 = 18 - 3x_1 \end{cases}$$

指标函数为： $V_{k,2} = c_k x_k + V_{k+1,2}$

递推方程：

$$f_k(R_{1k}, R_{2k}, R_{3k}) = \max_{x_k \in D_k(R_{ik})} \{ c_k x_k + f_{k+1}(R_{1,k+1}, R_{2,k+1}, R_{3,k+1}) \}$$

§5.动态规划应用举例

当 $k=2$ 时:

$$f_2(R_{12}, R_{22}, R_{32}) = \max_{0 \leq x_2 \leq \min(\frac{R_{22}}{2}, \frac{R_{32}}{2})} \{5x_2 + f_3(R_{13}, R_{23}, R_{33})\}$$

因为 $f_3(R_{13}, R_{23}, R_{33}) = 0$, 所以

$$f_2(R_{12}, R_{22}, R_{32}) = \max_{0 \leq x_2 \leq \min(\frac{R_{22}}{2}, \frac{R_{32}}{2})} \{5x_2\} = \min \frac{5}{2} (R_{22}, R_{32})$$

$$x_2^* = \min\left(\frac{R_{22}}{2}, \frac{R_{32}}{2}\right)$$

§5.动态规划应用举例

当 $k=1$ 时:

$$\begin{aligned} f_1(R_{11}, R_{21}, R_{31}) &= \max_{0 \leq x_1 \leq \min(R_{11}, \frac{R_{31}}{3})} \{3x_1 + f_2(R_{11} - x_1, R_{21}, R_{31} - 3x_1)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 3x_1 + \min \left[\frac{5}{2} (R_{21}, R_{31} - 3x_1) \right] \right\} \end{aligned}$$

因为

$$\min \left[\frac{5}{2} (R_{21}, R_{31} - 3x_1) \right] = \min \left[\frac{5}{2} (12, 18 - 3x_1) \right] =$$

$$\min \left[30, \frac{90 - 15x_1}{2} \right] = \begin{cases} 30 & (x_1 \leq 2) \\ \frac{90 - 15x_1}{2} & (x_1 \geq 2) \end{cases}$$

§5.动态规划应用举例

所以

$$f_1(R_{11}, R_{21}, R_{31}) = \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \begin{cases} 3x_1 + 30 & (x_1 \leq 2) \\ 3x_1 + \frac{90 - 15x_1}{2} & (x_1 \geq 2) \end{cases} =$$

$$\max_{0 \leq x_1 \leq 4} \begin{cases} 3x_1 + 30 & (x_1 \leq 2) \\ 45 - \frac{9}{2}x_1 & (x_1 \geq 2) \end{cases} = 36 \quad (x_1^* = 2)$$

$$x_2^* = \min\left(\frac{R_{22}}{2}, \frac{R_{32}}{2}\right) = \min\left(\frac{R_{21}}{2}, \frac{R_{31} - 3x_1}{2}\right) = \min\left(6, \frac{18 - 6}{2}\right) = 6$$

最优解 $x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$, $z^* = 3 \times 2 + 5 \times 6 = 36$

§5.动态规划应用举例

5. 生产存储

在生产和经营管理中，经常遇到要合理地安排生产（或购买）与库存的问题，达到既要满足需要，又要尽量降低成本费用，因此，正确制定生产（或采购）策略，确定不同时期的生产量（或采购量）和库存量，以使总的生产成本费用和库存费用之和最小，这就是生产与存贮问题的最优化目标。

§5.动态规划应用举例

例如：设某公司对某种产品要制订一项 n 个阶段的生产（或购买）计划。已知它的初始库存量为零，每阶段对该产品的需求量是已知的，公司要保证供应；在 n 阶段末的库存量为零。该公司如何制订每个阶段的生产（或采购）计划，从而使总成本最小？

§5.动态规划应用举例

6. 不确定采购

【例】采购问题

某厂生产上需要在近五周内必须采购一批原料，而估计在未来五周内价格有波动，其浮动价格和概率已测得如表所示。试求在哪一周以什么价格购入，使其采购价格的数学期望值最小，并求出期望值。

单价	概率
500	0.3
600	0.3
700	0.4

§5.动态规划应用举例

7. 排序问题

设有 n 个工件需要在机床A、B上加工，每个工件都必须经过先A而后B的两道加工工序。 a_i 、 b_i 分别表示工件 i ($1 \leq i \leq n$) 在A、B上的加工时间。应如何在两机床上安排各工件加工的顺序，使在机床A上加工第一个工件开始到在机床B上将最后一个工件加工完为止，所用的加工总时间最少？

§5.动态规划应用举例

【例】 设有5个工件需在机床A、B上加工，加工的顺序是先A后B，每个工件所需加工时间（单位：小时）如表所示。问如何安排加工顺序，使机床连续加工完所有工件的加工总时间最少？并求出总加工时间。

工件号码 \ 加工时间	机床	
	A	B
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4