

2014——2015 学年微分方程与复变函数期末考试 A 卷

一、求下列微分方程的通解（本题共 10 分，每小题 5 分）

(1) $xy^3 = 1 + y$, n 为常数。

(2) $ydx - (x + y^3)dy = 0$

二、讨论下列方程零解的稳定性（本题共 5 分）

$$\begin{cases} x' = -x + y - z + (x^2 - 1)\sin x \\ y' = x + 2y - (1 - e^y) + (x^2 y + z^2)e^x \\ z' = x + y - \ln(1 + z) - z^2 \cos x \end{cases}$$

三、求下列高阶微分方程的通解 (本题共 5 分)

$$x^{(5)} + 3x^{(4)} + 3x^{(3)} + x^{(2)} = 0$$

四、求下列微分方程的解 $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$

五、试将下列线性方程化成线性方程组。然后对方程组求二次型 V 函数 $V(X) = X^T BX$ ，
使其通过方程组的全导数 $\frac{dV}{dt} = -X^T \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X$ ，并判断方程零解的稳定性。(本题共 5 分)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

六、讨论方程组 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$ 的奇点类型和零解的稳定性，(本题共 5 分)

答案：稳定焦点。

七、求方程组 $x' = Ax$ 的满足 $\varphi(0) = \eta$ 的解 $\varphi(t)$, 并进而求基解矩阵 $\exp At$ 。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

八、判断下列复变函数的解析性和可微性 (本题共 5 分)

$$f(z) = 2x^3 + 3iy^3$$

九、求下列复变函数的值 (本题共 5 分)

$$(1+i)^i$$

十、计算下列复变函数的积分 (本题共 5 分)

$$\int_C \frac{e^{\sin z}}{z^2(z^2+1)} dz, \text{ 其中 } C: |z|=2$$

十一、将下列函数在 $z=1$ 展开，并指出收敛范围（本题共 5 分）

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 5}$$

十二、求下列函数的奇点与类型（本题共 5 分）

$$f(z) = \sin \frac{1}{2iz} \cos \frac{1}{z+i}$$

十三、求下列方程在指定区域内根的个数（本题共 5 分）

方程 $z^4 - 8z + 10 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 与圆 $1 < |z| < 3$ 内。

十四、求多值函数 $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)z^2}$ 的支点与割线，并求函数在 $z=2$ 取负值的那一分支在 $z=i$ 之值。

十五、计算下列实积分（本题共 10 分）

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$