第二章 线性时不变系统

在第一章中讨论了若干个系统的性质，其中有两个性质尤为重要，一个是线性性，一个是时不变性，这是信号与系统分析中最基本的两个性质。一是许多实际系统都可以用线性时不变(LTI)系统来描述(或近似)，二是这样的系统能够进行详细的分析。

线性时不变(LTI)系统的重要性质就是具有线性叠加性，利用这个性质就可以将系统的输入分解为若干个基本函数的叠加，然后利用叠加性分析出系统的输出。

§1 用冲激函数表示信号

连续时间单位冲激信号和离散时间单位脉冲序列是一个基本信号，用它可以构成范围极为广泛的其他信号。

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

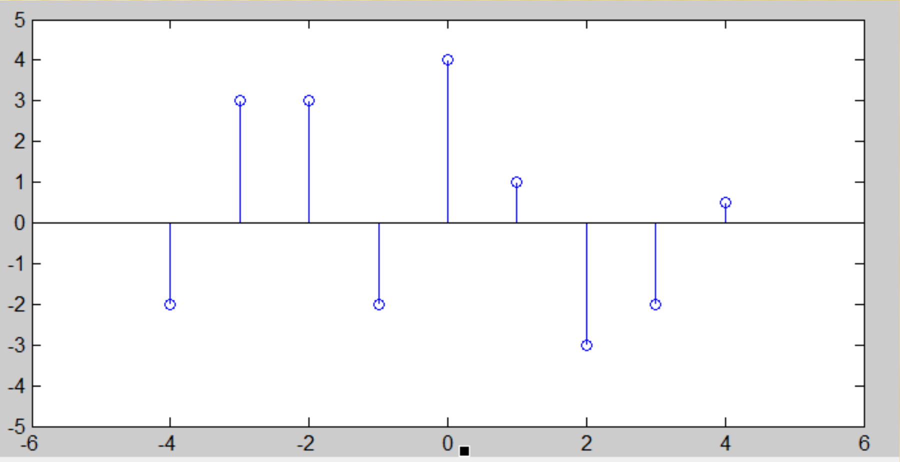
连续时间单位冲激函数

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

离散时间单位冲激序列

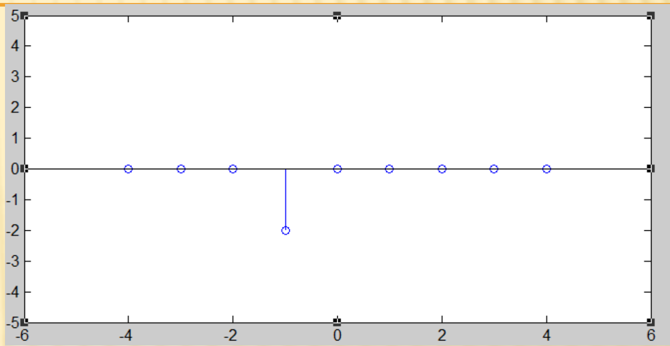
利用离散时间单位冲激序列，构造一个给定的序列。

$x(n)$



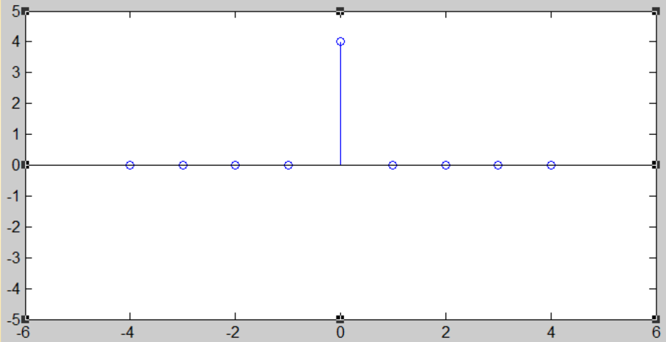
对于$n=-1$，$x(-1)=-2$，则有：

$$x(-1)\delta(n+1)=\begin{cases} x(-1)=-2 & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

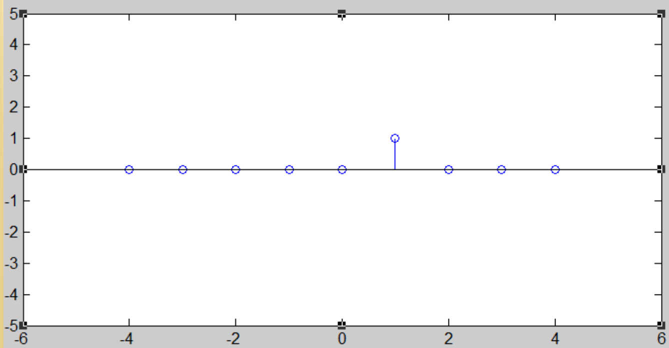


同理：

$$x(0)\delta(n)=\begin{cases} x(0) & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$



$$x(1)\delta(n-1)=\begin{cases} x(1) & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$



$$\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots$$

$$x(n)=\sum_{k=-4}^{+4}x(k)\delta(n-k)$$

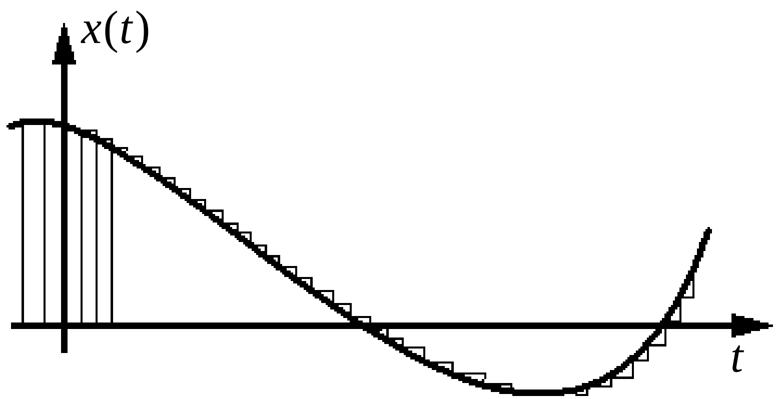
一般表示：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

对于连续时间信号：

定义宽度为Δ的连续时间方波信号：

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases} 1/\Delta & 0<t<\Delta \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$



信号的近似：

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\cdot\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

极限运算：

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)$$

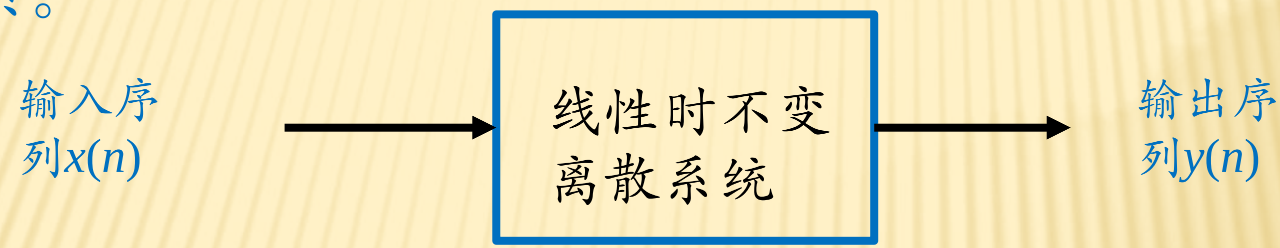
$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\cdot\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau$$

§2 离散时间LTI系统：卷积和

利用线性时不变系统的叠加性推导线性离散系统的输入输出关系。



单位冲激响应序列$h(n)$:

当系统的输入序列$x(n)$为单位冲激序列时，系统的输出被称为单位冲激响应序列$h(n)$。

系统输入: $$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

第l项输入: $$x(l)=x(n)\delta(n-l)=x(l)\delta(n-l)$$

系统对这个分量的响应输出为：

$$y(l)=x(l)h(n-l)$$

利用线性叠加原理，系统的总输入：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\delta(n-k)$$

相应的系统的总输出：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)$$

即，一个离散时间LTI系统的输入、输出与单位冲激响应序列之间成线性卷积关系。

线性卷积的定义：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$

线性卷积的性质：

1、交换律: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

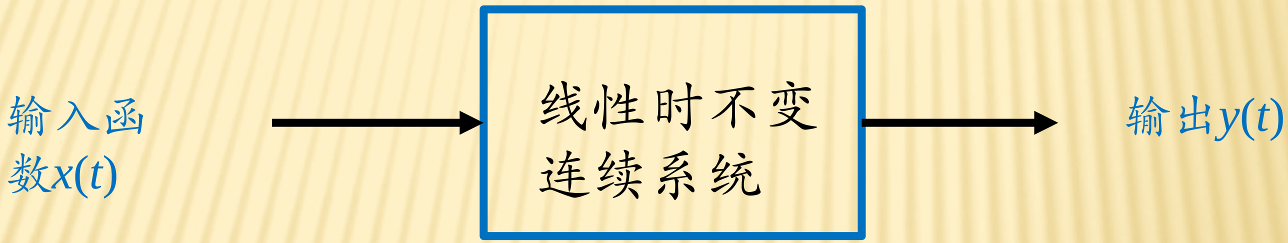
2、结合律: 子系统串联 $x(n) * (h_1(n) * h_2(n)) = (x(n) * h_1(n)) * h_2(n)$

3、分配律: 子系统并联 $x(n) * (h_1(n) + h_2(n)) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

注意：以上所讨论的性质只适用于LTI系统，不适合非线性系统，时变系统。

§2 连续时间LTI系统：卷积积分

根据上一节的结论，可以推出连续时间LTI系统输入、输出与单位冲激响应函数之间的关系：



有宽度的$\delta_{\Delta}(t)$

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}1/\Delta & 0<t<\Delta\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\cdot\Delta)\cdot\delta_{\Delta}(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

相应$\delta_\Delta(t)$作为输入，系统的响应信号:

$$h_\Delta(t)$$

对某一项输入信号:

$$\hat{x}(l) = x(l\Delta)\cdot\delta_\Delta(t-l\Delta)\cdot\Delta$$

系统的响应信号:

$$\hat{y}(l) = x(l\Delta)\cdot h_\Delta(t-l\Delta)\cdot\Delta$$

针对所有输入的响应信号:

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\cdot\Delta)\cdot h_\Delta(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

实际的响应信号:

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\cdot\Delta)\cdot h_\Delta(t-k\cdot\Delta)\cdot\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

即，一个连续时间LTI系统的输入、输出与单位冲激响应序列之间成卷积积分的关系。

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau)$$

卷积的性质：

1、交换律: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

2、结合律: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$

3、分配律: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

§4 线性时不变（LTI）系统的性质

上两节内容的重要结论:

离散时间（LTI）系统:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\cdot h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\cdot x(n-k)$$

连续时间（LTI）系统:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)d\tau$$

即LTI系统的特性完全可以由其单位冲激响应$\{h(n), h(t)\}$表示。

LTI系统的基本性质:

一、记忆与非记忆LTI系统：

前面给出的定义：如果对自变量的每一个值，系统的输出只决定于该时刻的输入，则该系统就成为无记忆系统。

对于离散的LTI系统，只有当$n\neq 0$时，$h(n)=0$才能满足这一性质，此时系统的单位冲激响应为：

$$h(n)=K\cdot\delta(n)$$

$$y(n)=K\cdot x(n)$$

比例环节

反之，如果系统不满足此条件，即当$n\neq 0$时，$h(n)$有不为0的项（$h(1)\neq 0$，$h(n)=K_1\cdot\delta(n)+K_2\delta(n-1)$），则系统就会有记忆。

对于连续的LTI系统，只有当$t\neq 0$时，$h(t)=0$，系统才是无记忆系统，系统的单位冲激响应为：

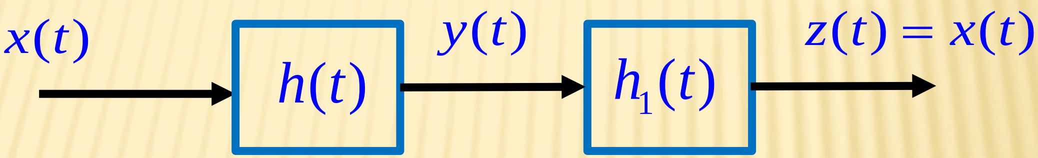
$$h(t)=K\cdot\delta(t)$$

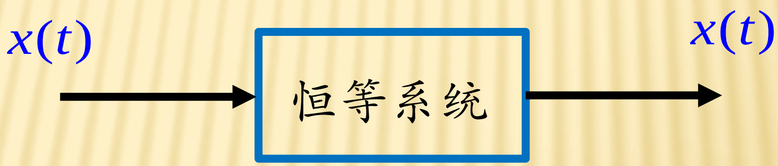
$$y(t)=K\cdot x(t)$$

比例环节

二、LTI系统的可逆性：

设一连续时间LTI系统，其单位冲激响应为$h(t)$，其逆系统的单位冲激响应为$h_1(t)$。



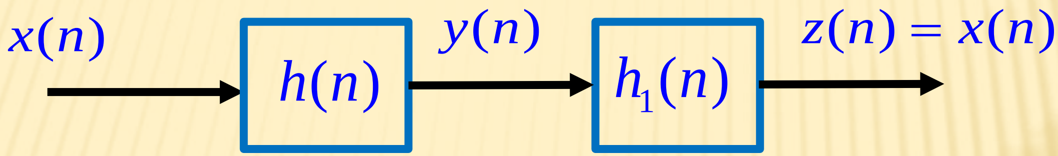


$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$z(t) = y(t) * h_1(t) = x(t) * h(t) * h_1(t) = x(t)$$

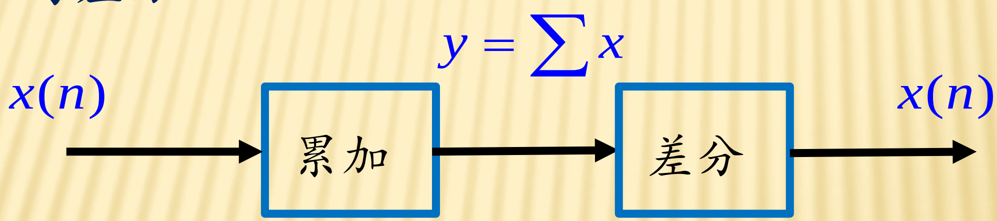
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

对于离散时间LTI系统:



$$h(n) * h_1(n) = \delta(n)$$

实例：累加与差分



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)u(n-k) \qquad x(n) = y(n) - y(n-1) = \sum_{k=0}^{1} x(k)\delta(n-k)$$

$$h(n) = u(n) \qquad h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$\begin{aligned} h(n) * h_1(n) &= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)] \\ &= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-1) \\ &= u(n) - u(n-1) = \delta(n) \end{aligned}$$

三、LTI系统的因果性：

因果性系统定义： 系统在任何时刻的输出只决定于现在时刻的输入和过去的输入，而不决定于将来的输入，则该系统为因果系统，又称为不可预测的系统。

结合LTI系统的卷积和（卷积积分）计算，对于离散时间LTI系统的输出$y(n)$与$k>n$时的$x(n)$无关，即当：

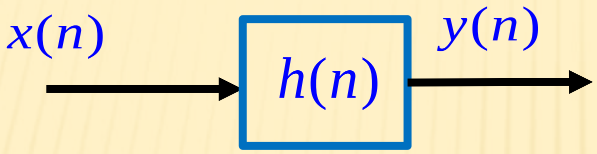
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{+\infty}h(k)x(n-k)$$

$$n<0,\qquad h(n)=0$$

四、LTI系统的稳定性：

一个稳定的系统在任何时刻，系统的输入是有界的，则系统的输出也是有界的。

对于一个稳定的LTI系统，其单位冲激响应函数应该满足什么条件?



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

要求系统的输出$y(n)$有界，则单位冲击响应$h(n)$应满足以下条件:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$ **绝对可加，意味着：** $$\lim_{|n|\to\infty} |h(n)| = 0$$

同理：对于连续时间LTI系统:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$ **绝对可积，意味着：** $$\lim_{|n|\to\infty} |h(t)| = 0$$

五、LTI系统的单位阶跃响应：

阶跃函数： $u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

系统的输入为阶跃函数：

$$x(n)=u(n)$$

$$y(n)=s(n)=u(n)*h(n)$$

即系统的输出是单位阶跃函数与单位冲激响应的卷积和，则可以推导出系统的输出即为单位冲激响应的累加和。

$$s(n)=u(n)*h(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}u(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)u(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)$$

反向运算：

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(n)$$

$$h(n)=s(n)-s(n-1)$$ 单位冲激响应的另一种求解。

连续时间LTI系统：

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t)$$

推广：如果系统的单位冲激响应是一个阶跃函数，则该系统就是一个累加器或积分器。

$$y(n)=x(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)u(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

§5 用微分和差分方程描述系统

一类重要的连续时间系统是其输入、输出关系用线性常系数微分方程描述的系统，线性常系数微分方程可以描述范围广泛的系统和现象。

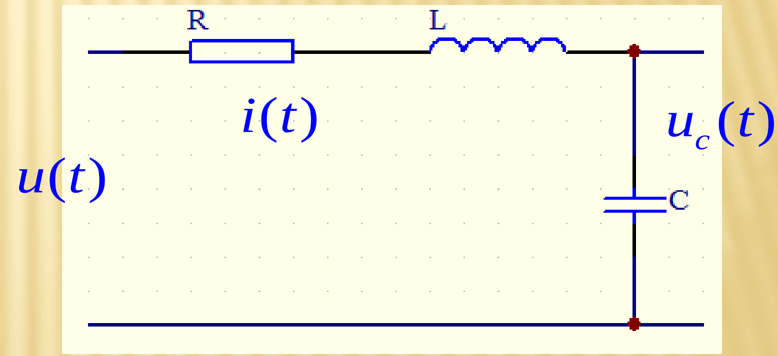
实例：RLC电路可以用一个二阶的微分方程描述：

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$u_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



$$u(t) = LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

离散时间系统的输入、输出用一个常系数差分方程表示。

一、线性常系数微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t) \qquad y(t)=f(x(t))$$

设：$x(t)=K[\cos\omega_0 t]\cdot u(t)$

则有：$x(t)=\mathscr{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$

齐次方程：$\dfrac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0$

方程的解：$y(t)=\underbrace{y_h(t)}_{\text{齐次解}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{特解}}$

设方程的特解为：$y_p(t)=\mathscr{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\}$

代入原方程

$$\mathscr{Re}\{j\omega_0 Y e^{j\omega_0 t} + 2Ye^{j\omega_0 t}\} = \mathscr{Re}\{Ke^{j\omega_0 t}\}$$

$$j\omega_0 Y + 2Y = K$$

$$Y = \frac{K}{j\omega_0 + 2} = \frac{K}{\sqrt{\omega_0^{\ 2} + 4}} e^{-j\theta} \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{\omega_0}{2})$$

方程的特解:

$$y_p(t) = \mathscr{Re}\{Ye^{j\omega_0 t}\} = \mathscr{Re}\{\frac{K}{\sqrt{\omega_0^{\ 2} + 4}} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t}\}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{\omega_0^{\ 2} + 4}} \cos(\omega_0 t - \theta)$$

设方程的齐次解（通解）为:

$y_h(t) = Ae^{st}$　　代入齐次方程

$$Ase^{st}+2Ae^{st}=0$$

$$As+2A=0 \qquad s=-2$$

原方程的全解为:

$$y(t)=Ae^{-2t}+\frac{K}{\sqrt{\omega_0{}^2+4}}\cos(\omega_0 t-\theta) \quad t>0$$

方程的边界（初始）条件:

$$y(0)=y_0$$

则有:

$$A=y_0-\frac{K}{\sqrt{\omega_0{}^2+4}}\cos\theta$$

$$y(t)=y_0e^{-2t}+\frac{K}{\sqrt{\omega_0{}^2+4}}(\cos(\omega_0 t-\theta)-e^{-2t}\cos\theta) \qquad t>0$$

系统的线性特性讨论:

线性系统的另一个重要性质：0输入产生0输出。

$$x(t) = K[\cos\omega_0 t]\cdot u(t)$$

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{K}{\sqrt{\omega_0^{\ 2}+4}}(\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t}\cos\theta) \qquad t > 0$$

令K=0，则系统的输入为0: $y(t) = y_0$

因此初始条件y_0如不为0，系统就是非线性的。

设初始条件为0，$x_1(t)$，$x_2(t)$分别为系统的两个输入:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=x_1(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=x_2(t) \qquad y_1(0)=y_2(0)=0$$

$$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$$

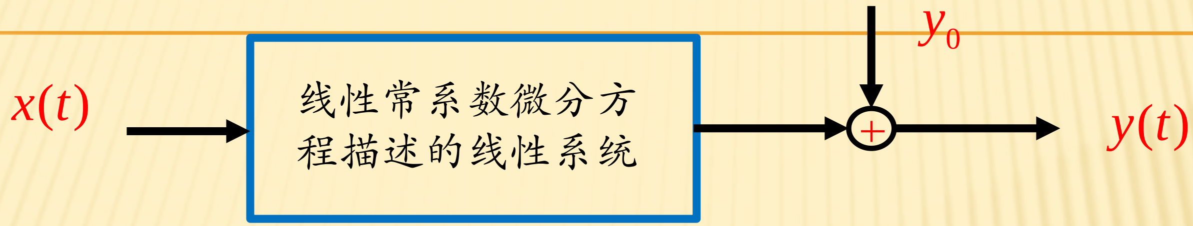
$$\begin{cases} a\dfrac{dy_1(t)}{dt}+a2y_1(t)=ax_1(t) \\ b\dfrac{dy_2(t)}{dt}+b2y_2(t)=bx_2(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{d(ay_1(t)+by_2(t))}{dt}+2(ay_1(t)+by_2(t))=ax_1(t)+bx_2(t)$$

从而有:

$$\frac{dy_3(t)}{dt}+2y_3(t)=x_3(t) \qquad y_3(0)=ay_1(0)+by_2(0)=0$$

符合线性叠加性。



系统的因果关系（推导思路）：

定义： $x(t)\big|_{t\le t_0}=0$ 则要求系统的输出： $y(t)\big|_{t\le t_0}=0$

即系统在没有输入以前是“松弛的”，没有任何初始条件。

系统的时不变性（推导思路）：

定义系统的输入： $x_1(t)\big|_{t\le t_0}=0$

则有系统的对应输出： $y_1(t)\big|_{t\le t_0}=0$

设系统的另一输入： $x_2(t)=x_1(t-T)$ $x_2(t)\big|_{t\le t_0}=x_1(t)\big|_{t\le t_0+T}=0$

系统的对应输出： $y_2(t)\big|_{t\le t_0} = y_1(t)\big|_{t\le t_0+T} = 0$

总结：N阶线性常系数微分方程通式

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1}\frac{d^{M-1}x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$

$$y(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{齐次解}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{特解}} \qquad y(0) = y_0$$

初始条件 $y^{(k)}(t_0) = 0,\ x^{(k)}(t_0) = 0,\ k = 0,1,2\cdots N$，系统是线性的；某一个初始条件不为0，系统是增量线性的。

二、线性常系数差分方程

N阶线性常系数差分方程通式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

相应的齐次差分方程:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

差分方程的解:

$$y(n) = \underbrace{y_h(n)}_{\text{齐次解}} + \underbrace{y_p(n)}_{\text{特解}}$$

初始条件:

$$y(n_0), y(n_0-1), y(n_0-2), \cdots y(n_0-N+1),$$
$$x(n_0), x(n_0-1), x(n_0-2) \cdots x(n_0-M+1)$$

同理可以证明：当所有初始条件为0，系统是线性的；有一个初始条件不为0，系统就是增量线性的。

方程的当前输出（解）：

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{a_0}y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}x(n-k)$$

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}a_k'y(n-k)}_{\text{输出历史值}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{M}b_k'x(n-k)}_{\text{输入现在值+历史值}}$$ 递归方程：

N=0，非递归方程：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k'x(n-k)$$

实例分析1: $$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k),\quad x(n)=\delta(n)$$

$$h(n)=\begin{cases} b_k & 0\le n\le M \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

系统对单位冲激的响应是一个有限持续的脉冲序列，即所谓的有限冲击响应系统(FIR)。

实例分析2: $$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n),\quad y(-1)=a,\ x(n)=\delta(n)$$

则有: $$y(n)=x(n)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

$$h(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}h(n-1)$$

$$h(0)=\delta(0)+\frac{1}{2}h(-1)=\delta(0)+\frac{1}{2}a$$

所以：

$$h(1)=\delta(1)+\frac{1}{2}h(0)=\delta(1)+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}a)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a$$

$$h(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}h(n-1)=(\frac{1}{2})^n(1+\frac{1}{2}a)$$

$$=(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n+1}a \qquad 0\le n<+\infty$$

系统对单位冲激的响应是一个无限持续的长脉冲序列，即所谓的无限冲击响应系统(IIR)。

为保证系统的线性性和因果性，要求：

当：$n\le n_0$，$x(n)=0$，　　则：$n\le n_0$，$y(n)=0$

结论：只要系统是递归的，只要系数a_k不全为0，系统就会有一个无限持续的单位冲激响应。

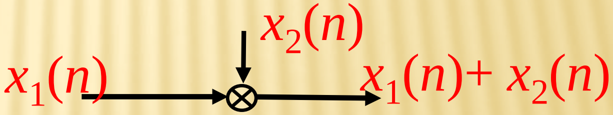
§6 LTI系统的方框图表示

一、由差分方程描述的系统表示

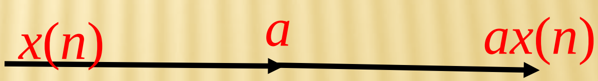
一个线性常系数差分方程可以看作是一种算法，可以在数字计算机上或专用（硬件）设备上实现；而用结构图表示这个计算过程，也是一种重要的算法实现途径。

基本计算的图形表示:

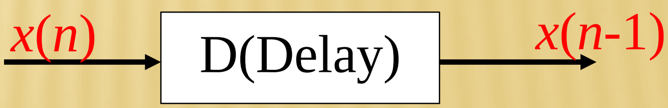
1、相加运算:



2、乘系数运算:

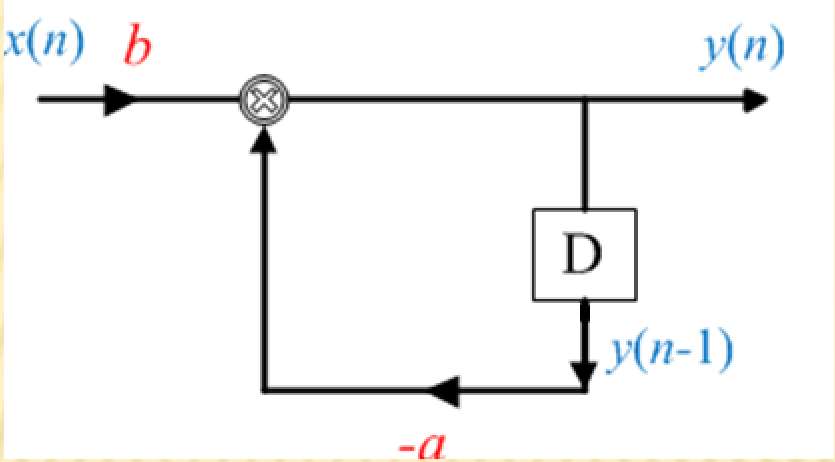


3、延迟运算:



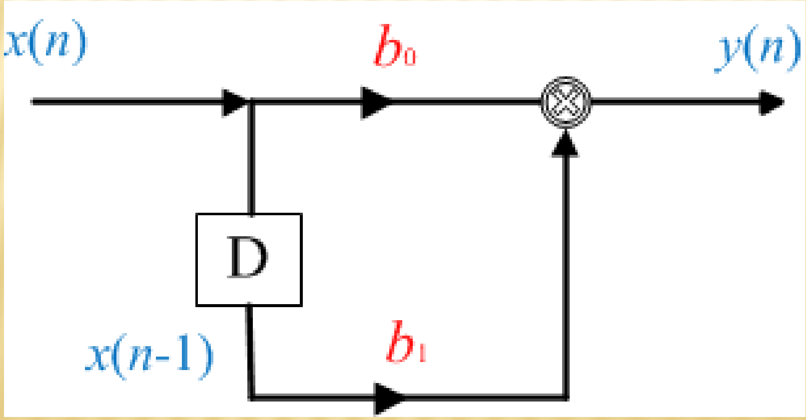
实例1:

$$y(n)+ay(n-1)=bx(n)$$

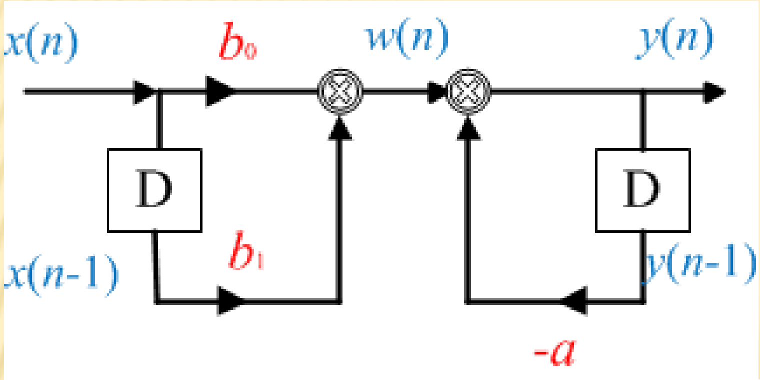


实例2:

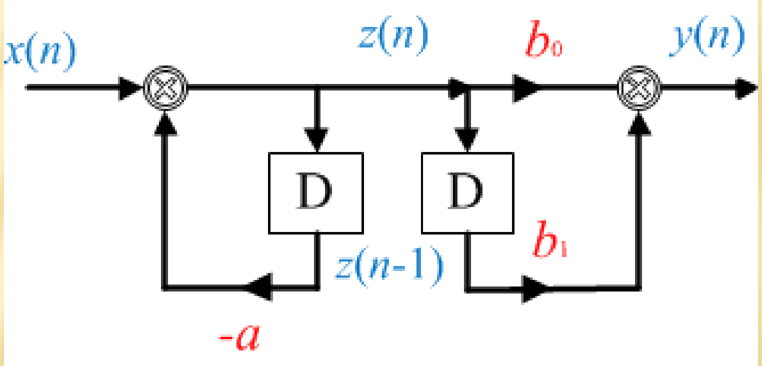
$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$



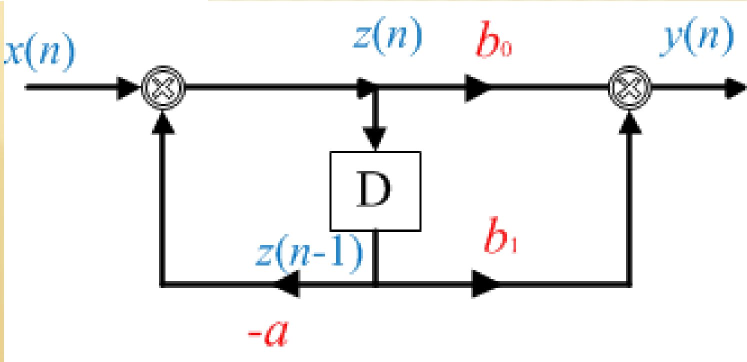
实例3: $y(n)+ay(n-1)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$



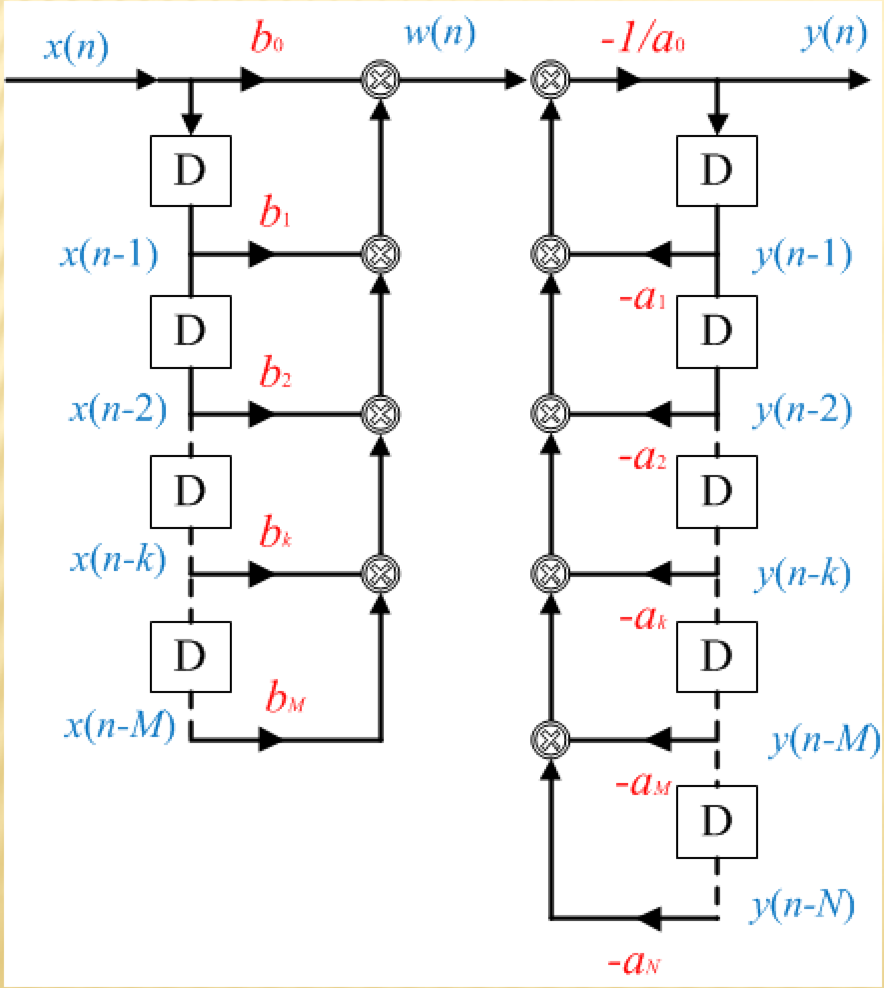
$$w(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)$$
$$y(n)=-ay(n-1)+w(n)$$



$$z(n)=-az(n-1)+x(n)$$
$$y(n)=b_0z(n)+b_1z(n-1)$$



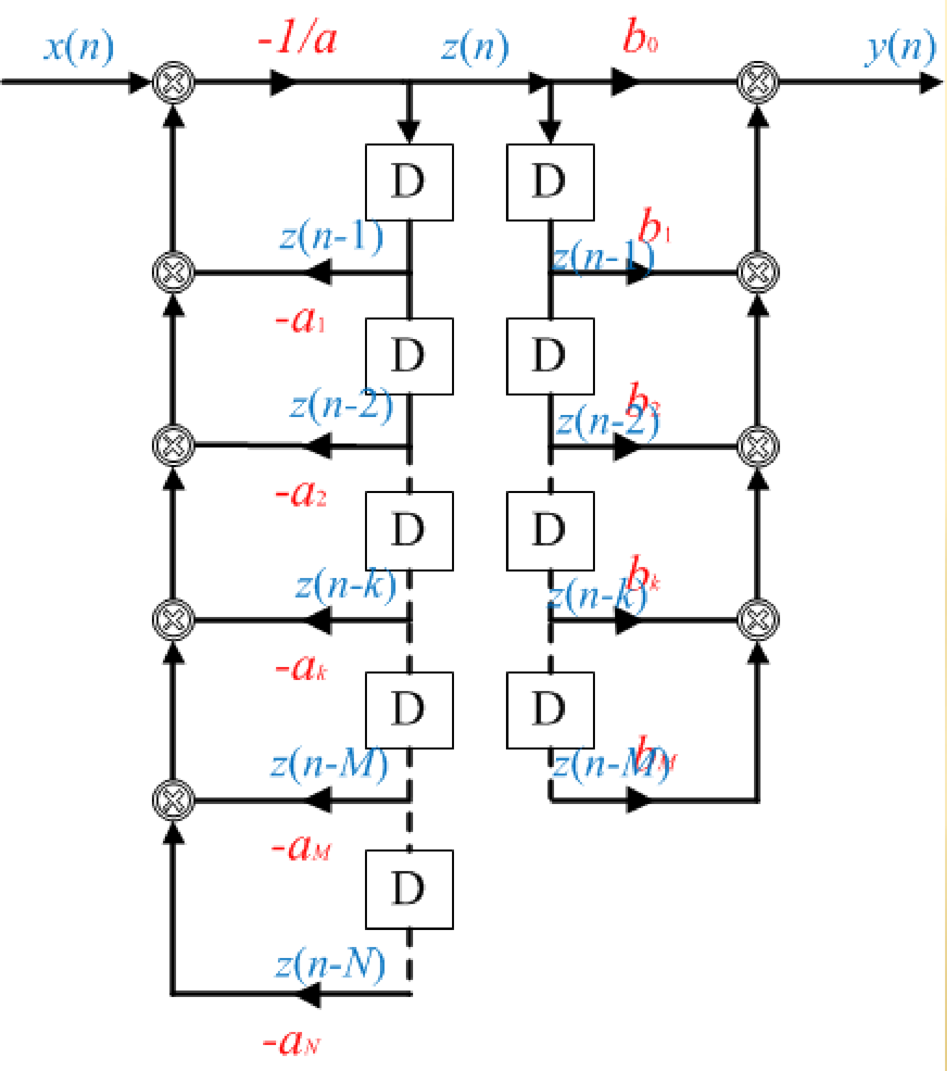
结果推广：$y(n)=\frac{1}{a_0}\{\boxed{\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)}-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\}$



$$w(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

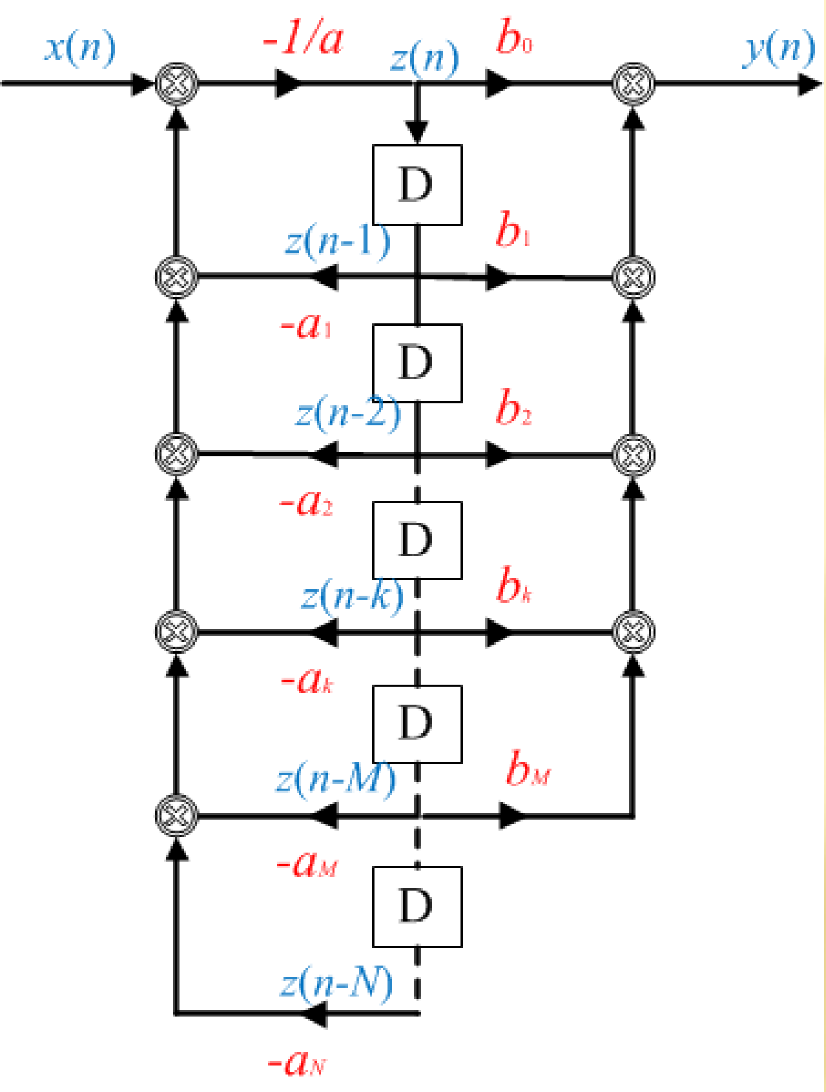
$$y(n)=\frac{1}{a_0}\{-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+w(n)\}$$

$$y(n) = \frac{1}{a_0}\{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\}$$



$$z(n) = \frac{1}{a_0}\{-\sum_{k=1}^{N} a_k z(n-k) + x(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k z(n-k)$$



$$y(n) = \frac{1}{a_0}\{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\}$$

$$z(n) = \frac{1}{a_0}\{-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + x(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k z(n-k)$$

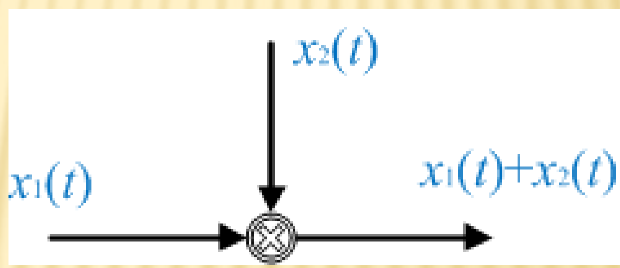
二、由微分方程描述的系统表示

在分析由线性常系数微分方程描述的连续时间系统时，可以完全按照分析离散时间系统相同的方法进行。下面是一个线性常系数微分方程的通式，是对某连续时间系统的描述。

$$y(t)=\frac{1}{a_0}\{\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}-\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}\}$$

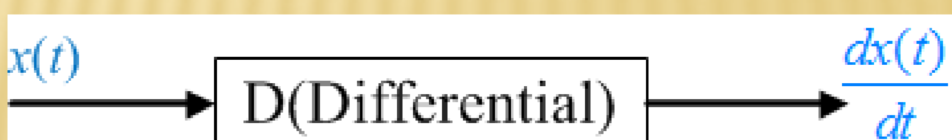
基本计算的表示：

1、相加运算：

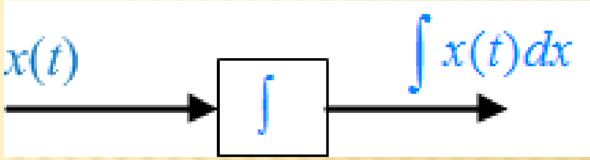


2、乘系数运算：

3、微分运算：



但是在实际操作中，微分运算很难实现，而积分运算则很容易用运算放大器实现。因此，要将微分方程变换为积分方程。做如下定义：



$$y_{(0)}(t) = y(t)$$

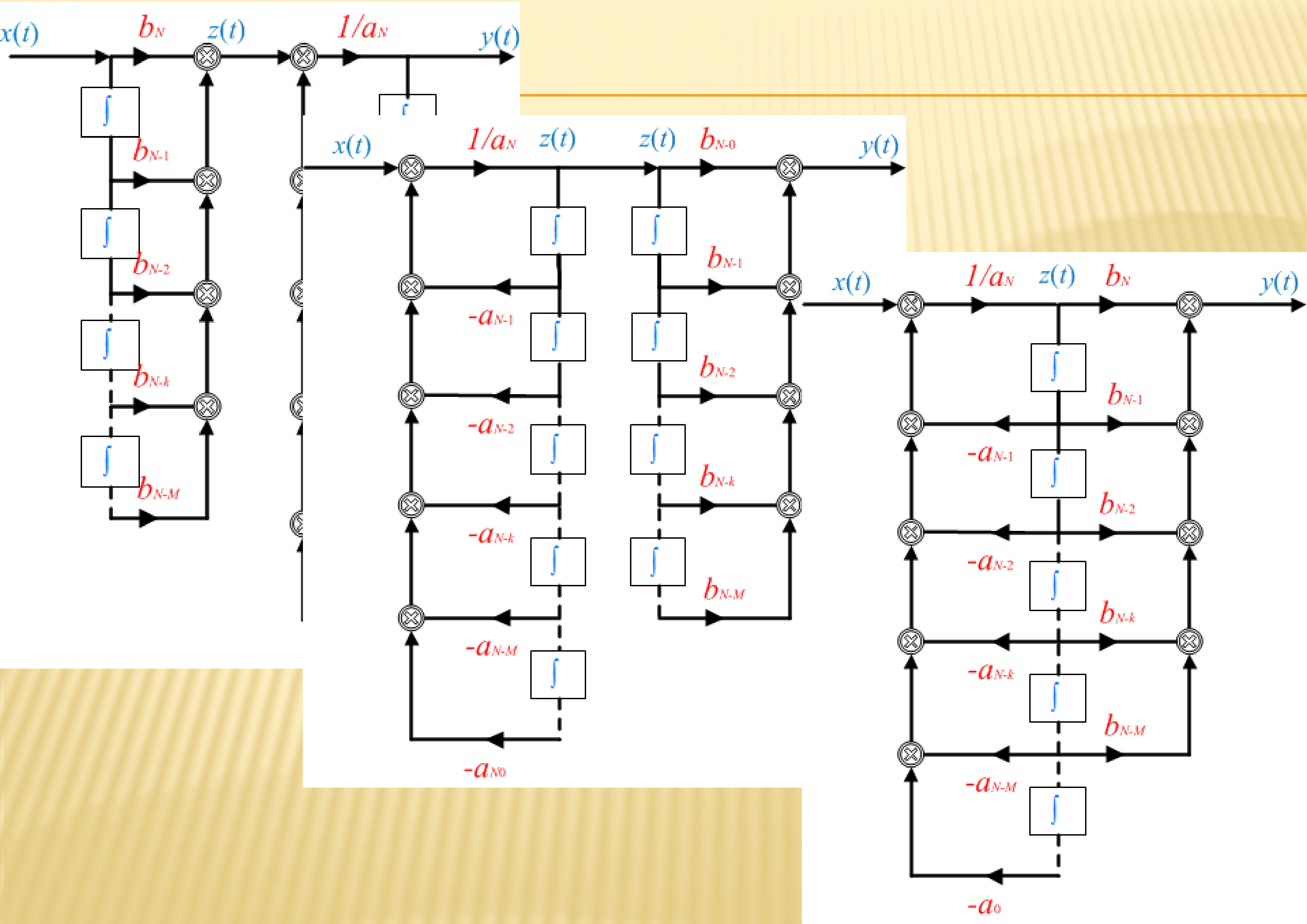
$$y_{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)u(t-\tau)d\tau = y_{(0)}(t) * u(t)$$

$$y_{(2)}(t) = y_{(1)}(t) * u(t)$$

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * u(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y_{(N)}(t) = \frac{1}{a_0}\{\sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t)\}$$


x(t)
b_N
z(t)
1/a_N
y(t)
b_N-1
b_N-2
b_N-k
b_N-M
x(t)
1/a_N
z(t)
z(t)
b_N-0
y(t)
b_N-1
-a_N-1
b_N-2
-a_N-2
b_N-k
-a_N-k
b_N-M
-a_N-M
-a_N0
x(t)
1/a_N
z(t)
b_N
y(t)
b_N-1
-a_N-1
b_N-2
-a_N-2
b_N-k
-a_N-k
b_N-M
-a_N-M
-a_0

§7 奇异函数

一、单位冲激函数的讨论

恒等系统：单位冲激函数与任何函数做卷积，其结果还等于该函数。

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

如果令：

$$x(t) = \delta(t)$$

则有：

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$$

推广：

$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t) * \cdots \delta(t) * \delta(t)$$

二、单位冲激函数的微分的表示与讨论

设一微分环节：
$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

如果令：
$$x(t)=\delta(t)$$

则该系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$ 定义： $$u_1(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$ 单位冲激偶

则有：
$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}=x(t)*u_1(t)$$

推广：
$$\frac{d^k\delta(t)}{dt^k}=u_k(t)=\underbrace{u_1(t)*u_1(t)*\cdots*u_1(t)}_{k}$$

$$y(t)=\frac{d^k x(t)}{dt^k}=x(t)*u_k(t)$$

二、单位冲激函数的微分的表示与讨论

设一积分环节：
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

如果令：
$$x(t)=\delta(t)$$

则该系统的单位冲激响应为：
$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

即：
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u(t)$$

如定义：
$$u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)$$

则推广：
$$u_{-2}(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t_1}\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}u(t_1)dt_1=u(t)*u(t)$$

$$u_{-k}(t)=\underbrace{u(t)*u(t)*\cdots*u(t)}_{k}=\int_{-\infty}^{t}u_{-(k-1)}(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u_{-k}(t)$$

$$u_{-k}(t)=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

归纳:

$$\delta(t)=u_0(t) \qquad u_k(t)*u_r(t)=u_{k+r}(t)$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt}=u_1(t) \qquad \frac{d^k x(t)}{dt^k}=x(t)*u_k(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)=u_{-1}(t) \qquad \int\cdots\int x(t)dt=x(t)*u_{-k}(t)$$

第二章结束