

离散数学试题及答案

一、填空题

1. 设集合 A, B , 其中 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$, 则 $A - B =$ _____; $\rho(A) - \rho(B) =$ _____.
2. 设有限集合 $A, |A| = n$, 则 $|\rho(A \times A)| =$ _____.
3. 设集合 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$, 则从 A 到 B 的所有映射是 _____, 其中双射的是 _____.
4. 已知命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \wedge R$, 则 G 的主析取范式是 _____.
5. 设 G 是完全二叉树, G 有 7 个点, 其中 4 个叶点, 则 G 的总度数为 _____, 分枝点数为 _____.
6. 设 A, B 为两个集合, $A = \{1, 2, 4\}, B = \{3, 4\}$, 则从 $A \cap B =$ _____; $A \cup B =$ _____; $A - B =$ _____.
7. 设 R 是集合 A 上的等价关系, 则 R 所具有的关系的三个特性是 _____, _____, _____.
8. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow (Q \wedge R))$, 则使公式 G 为真的解释有 _____, _____, _____.
9. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R_1 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}, R_2 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$, 则 $R_1 \bullet R_2 =$ _____, $R_2 \bullet R_1 =$ _____, $R_1^2 =$ _____.
10. 设有限集 $A, B, |A| = m, |B| = n$, 则 $|\rho(A \times B)| =$ _____.
11. 设 A, B, R 是三个集合, 其中 R 是实数集, $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, x \in R\}, B = \{x \mid 0 \leq x < 2, x \in R\}$, 则 $A - B =$ _____, $B - A =$ _____, $A \cap B =$ _____.
13. 设集合 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, R 是 A 上的整除, 则 R 以集合形式(列举法)记为 _____.
14. 设一阶逻辑公式 $G = \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$, 则 G 的前束范式是 _____.
15. 设 G 是具有 8 个顶点的树, 则 G 中增加 _____ 条边才能把 G 变成完全图.

16. 设谓词的定义域为 $\{a, b\}$, 将表达式 $\forall xR(x) \rightarrow \exists xS(x)$ 中量词消除, 写成与之对应的命题公式是 _____.

17. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的二元关系 $R = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$, $S = \{(1,3), (2,3), (3,2)\}$. 则 $R \cdot S$

= _____,

$R^2 =$ _____.

二、选择题

1 设集合 $A = \{2, \{a\}, 3, 4\}$, $B = \{\{a\}, 3, 4, 1\}$, E 为全集, 则下列命题正确的是().

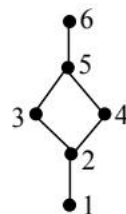
(A) $\{2\} \in A$ (B) $\{a\} \subseteq A$ (C) $\emptyset \subseteq \{\{a\}\} \subseteq B \subseteq E$ (D) $\{\{a\}, 1, 3, 4\} \subset B$.

2 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的关系 $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$, 则 R 不具备().

(A) 自反性 (B) 传递性 (C) 对称性 (D) 反对称性

3 设半序集 (A, \leq) 关系 \leq 的哈斯图如下所示, 若 A 的子集 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则元素 6 为 B 的().

(A) 下界 (B) 上界 (C) 最小上界 (D) 以上



答案都不对

4 下列语句中, () 是命题。

(A) 请把门关上 (B) 地球外的星球上也有人

(C) $x + 5 > 6$ (D) 下午有会吗?

5 设 I 是如下一个解释: $D = \{a, b\}$, $\frac{P(a,a) \ P(a,b) \ P(b,a) \ P(b,b)}{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0}$

则在解释 I 下取真值为 1 的公式是().

(A) $\exists x \forall y P(x, y)$ (B) $\forall x \forall y P(x, y)$ (C) $\forall x P(x, x)$ (D) $\forall x \exists y P(x, y)$.

6. 若供选择答案中的数值表示一个简单图中各个顶点的度, 能画出图的是().

(A) (1, 2, 2, 3, 4, 5) (B) (1, 2, 3, 4, 5, 5) (C) (1, 1, 1, 2, 3) (D) (2, 3, 3, 4, 5, 6).

7. 设 G, H 是一阶逻辑公式, P 是一个谓词, $G = \exists x P(x)$, $H = \forall x P(x)$, 则一阶逻辑公式 $G \rightarrow H$ 是().

(A) 恒真的 (B) 恒假的 (C) 可满足的 (D) 前束范式.

8 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q)$, $H = P \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$, 则 G 与 H 的关系是().

(A) $G \Rightarrow H$ (B) $H \Rightarrow G$ (C) $G = H$ (D)以上都不是.

9 设 A, B 为集合, 当()时 $A - B = B$.

(A) $A = B$ (B) $A \subseteq B$ (C) $B \subseteq A$ (D) $A = B = \emptyset$.

10 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, 则 R 具有().

(A)自反性 (B)传递性 (C)对称性 (D)以上答案都不对

11 下列关于集合的表示中正确的为().

(A) $\{a\} \in \{a, b, c\}$ (B) $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ (C) $\emptyset \in \{a, b, c\}$ (D) $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

12 命题 $\forall x G(x)$ 取真值 1 的充分必要条件是().

(A)对任意 x , $G(x)$ 都取真值 1. (B)有一个 x_0 , 使 $G(x_0)$ 取真值 1.

(C)有某些 x , 使 $G(x_0)$ 取真值 1. (D)以上答案都不对.

13. 设 G 是连通平面图, 有 5 个顶点, 6 个面, 则 G 的边数是().

(A)9 条 (B)5 条 (C)6 条 (D)11 条.

14. 设 G 是 5 个顶点的完全图, 则从 G 中删去()条边可以得到树.

(A)6 (B)5 (C)10 (D)4.

15. 设图 G 的相邻矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 G 的顶点数与边数分别为().

(A)4, 5 (B)5, 6 (C)4, 10 (D)5, 8.

三、计算证明题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$, R 为整除关系。

(1) 画出半序集 (A, R) 的哈斯图;

(2) 写出 A 的子集 $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界;

(3) 写出 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元。

2. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ 且 } x \geq y\}$, 求

(1) 画出 R 的关系图;

(2) 写出 R 的关系矩阵.

3. 设 R 是实数集合, σ, τ, φ 是 R 上的三个映射, $\sigma(x) = x+3$, $\tau(x) = 2x$, $\varphi(x) = x/4$, 试求复合映射 $\sigma \circ \tau$, $\sigma \circ \sigma$, $\sigma \circ \varphi$, $\varphi \circ \tau$, $\sigma \circ \varphi \circ \tau$.

4. 设 I 是如下一个解释: $D = \{2, 3\}$,

a	b	$f(2)$	$f(3)$	$P(2, 2)$	$P(2, 3)$	$P(3, 2)$	$P(3, 3)$
3	2	3	2	0	0	1	1

试求 (1) $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$;

(2) $\forall x \exists y P(y, x)$.

5. 设集合 $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 12\}$, R 为 A 上整除关系。

(1) 画出半序集 (A, R) 的哈斯图;

(2) 写出 A 的最大元, 最小元, 极大元, 极小元;

(3) 写出 A 的子集 $B = \{4, 6, 8, 12\}$ 的上界, 下界, 最小上界, 最大下界.

6. 设命题公式 $G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$, 求 G 的主析取范式。

7. (9 分) 设一阶逻辑公式: $G = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \rightarrow \forall x R(x)$, 把 G 化成前束范式.

9. 设 R 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$. R 是 A 上的二元关系, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$,

(1) 求出 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$;

(2) 画出 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图.

11. 通过求主析取范式判断下列命题公式是否等价:

(1) $G = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

(2) $H = (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$

13. 设 R 和 S 是集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 上的关系, 其中 $R = \{(a, a), (a, c), (b, c), (c, d)\}$,

$S = \{(a, b), (b, c), (b, d), (d, d)\}$.

(1) 试写出 R 和 S 的关系矩阵;

(2) 计算 $R \circ S, R \cup S, R^{-1}, S^{-1} \circ R^{-1}$.

四、证明题

1. 利用形式演绎法证明: $\{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R\}$ 蕴涵 $Q \vee S$.

2. 设 A, B 为任意集合, 证明: $(A-B)-C = A-(B \cup C)$.

3. (本题 10 分)利用形式演绎法证明: $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$.

4. (本题 10 分) A, B 为两个任意集合, 求证:

$$A - (A \cap B) = (A \cup B) - B.$$

参考答案

一、填空题

1. $\{3\}; \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

2. 2^{n^2} .

3. $\alpha_1 = \{(a, 1), (b, 1)\}, \alpha_2 = \{(a, 2), (b, 2)\}, \alpha_3 = \{(a, 1), (b, 2)\}, \alpha_4 = \{(a, 2), (b, 1)\}; \alpha_3, \alpha_4$.

4. $(P \wedge \neg Q \wedge R)$.

5. 12, 3.

6. $\{4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}$.

7. 自反性; 对称性; 传递性.

8. $(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$.

9. $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}; \{(2, 4), (3, 3), (4, 2)\}; \{(2, 2), (3, 3)\}$.

10. $2^{m \times n}$.

11. $\{x \mid -1 \leq x < 0, x \in \mathbb{R}\}; \{x \mid 1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}; \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$.

12. 12; 6.

13. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

14. $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$.

15. 21.

16. $(R(a) \wedge R(b)) \rightarrow (S(a) \vee S(b))$.

17. $\{(1, 3), (2, 2)\}; \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

二、选择题

1. C. 2. D. 3. B. 4. B.

5. D. 6. C. 7. C.

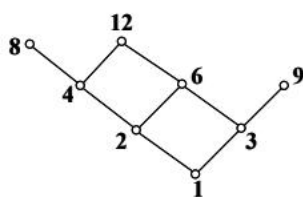
8. A. 9. D. 10. B. 11. B.

13. A. 14. A. 15. D

三、计算证明题

1.

(1)

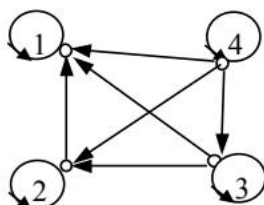


(2) B 无上界，也无最小上界。下界 1, 3; 最大下界是 3.

(3) A 无最大元，最小元是 1，极大元 8, 12, 90+; 极小元是 1.

2. $R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

(1)



(2) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (1) $\sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)) = \tau(x) + 3 = 2x + 3 = 2x + 3$.

(2) $\sigma \circ \sigma = \sigma(\sigma(x)) = \sigma(x) + 3 = (x + 3) + 3 = x + 6$,

(3) $\sigma \circ \varphi = \sigma(\varphi(x)) = \varphi(x) + 3 = x/4 + 3$,

(4) $\varphi \circ \tau = \varphi(\tau(x)) = \tau(x)/4 = 2x/4 = x/2$,

(5) $\sigma \circ \varphi \circ \tau = \sigma(\varphi \circ \tau) = \varphi \circ \tau + 3 = 2x/4 + 3 = x/2 + 3$.

$$4. (1) P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b)) = P(3, f(3)) \wedge P(2, f(2))$$

$$= P(3, 2) \wedge P(2, 3)$$

$$= 1 \wedge 0$$

$$= 0.$$

$$(2) \forall x \exists y P(y, x) = \forall x (P(2, x) \vee P(3, x))$$

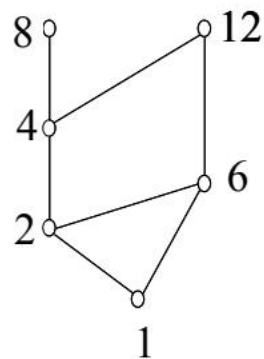
$$= (P(2, 2) \vee P(3, 2)) \wedge (P(2, 3) \vee P(3, 3))$$

$$= (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1$$

$$= 1.$$

5. (1)



(2) 无最大

元, 最小元 1, 极大元 8, 12; 极小元是 1.

(3) B 无

上界, 无最小上界。下界 1, 2; 最大下界 2.

$$6. G = \neg(P \rightarrow Q) \vee (Q \wedge (\neg P \rightarrow R))$$

$$= \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge (P \vee R))$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (P \vee R))$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

R)

$$= (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \Sigma(3, 4, 5, 6, 7).$$

$$7. G = (\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)) \rightarrow \forall xR(x)$$

$$= \neg(\forall xP(x) \vee \exists yQ(y)) \vee \forall xR(x)$$

$$= (\neg\forall xP(x) \wedge \neg\exists yQ(y)) \vee \forall xR(x)$$

$$= (\exists x\neg P(x) \wedge \forall y\neg Q(y)) \vee \forall zR(z)$$

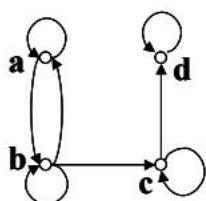
$$= \exists x\forall y\forall z((\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee R(z))$$

$$9. (1) r(R) = R \cup I_A = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\},$$

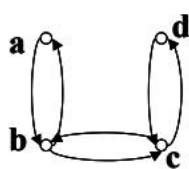
$$s(R) = R \cup R^{-1} = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c)\},$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,d)\};$$

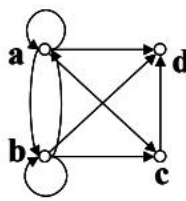
(2)关系图:



r(R)



s(R)



t(R)

$$11. G = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= m_6 \vee m_7 \vee m_3$$

$$= \Sigma(3, 6, 7)$$

$$H = (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg P \wedge R))$$

$$= (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$= m_6 \vee m_3 \vee m_7$$

$$=\Sigma(3, 6, 7)$$

G,H 的主析取范式相同, 所以 $G = H$.

$$13. \quad (1) M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R \bullet S = \{(a, b), (c, d)\},$$

$$R \cup S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (d, d)\},$$

$$R^{-1} = \{(a, a), (c, a), (c, b), (d, c)\},$$

$$S^{-1} \bullet R^{-1} = \{(b, a), (d, c)\}.$$

四 证明题

1. 证明: $\{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R\}$ 蕴涵 $Q \vee S$

$$(1) P \vee R \quad P$$

$$(2) \neg R \rightarrow P \quad Q(1)$$

$$(3) P \rightarrow Q \quad P$$

$$(4) \neg R \rightarrow Q \quad Q(2)(3)$$

$$(5) \neg Q \rightarrow R \quad Q(4)$$

$$(6) R \rightarrow S \quad P$$

$$(7) \neg Q \rightarrow S \quad Q(5)(6)$$

$$(8) Q \vee S \quad Q(7)$$

2. 证明: $(A-B)-C = (A \cap \sim B) \cap \sim C$

$$= A \cap (\sim B \cap \sim C)$$

$$= A \cap \sim(B \cup C)$$

$$= A - (B \cup C)$$

3. 证明: $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$

(1) A D (附加)

(2) $\neg A \vee B$ P

(3) B $Q(1)(2)$

(4) $\neg C \rightarrow \neg B$ P

(5) $B \rightarrow C$ $Q(4)$

(6) C $Q(3)(5)$

(7) $C \rightarrow D$ P

(8) D $Q(6)(7)$

(9) $A \rightarrow D$ $D(1)(8)$

所以 $\{\neg A \vee B, \neg C \rightarrow \neg B, C \rightarrow D\}$ 蕴涵 $A \rightarrow D$.

4. 证明: $A - (A \cap B)$

$$= A \cap \sim(A \cap B)$$

$$= A \cap (\sim A \cup \sim B)$$

$$= (A \cap \sim A) \cup (A \cap \sim B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap \sim B)$$

$$= (A \cap \sim B)$$

$$= A - B$$

而 $(A \cup B) - B$

$$= (A \cup B) \cap \sim B$$

$$= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim B)$$

$$= (A \cap \sim B) \cup \emptyset$$

$$= A - B$$

所以: $A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$.

离散数学试题 (A 卷及答案)

一、(10 分) 某项工作需要派 A 、 B 、 C 和 D 4 个人中的 2 个人去完成, 按下面 3 个条件, 有几种派法? 如何派?

(1) 若 A 去, 则 C 和 D 中要去 1 个人;

(2) B 和 C 不能都去;

(3) 若 C 去, 则 D 留下。

解 设 A : A 去工作; B : B 去工作; C : C 去工作; D : D 去工作。则根据题意应有:
 $A \rightarrow C \oplus D$, $\neg(B \wedge C)$, $C \rightarrow \neg D$ 必须同时成立。因此

$$(A \rightarrow C \oplus D) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (C \rightarrow \neg D)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg D)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)) \wedge ((\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg D) \vee \neg C \vee (\neg C \wedge \neg D))$$

$\neg D))$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C \wedge \neg D)$$

$$\vee (C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg$$

$D \wedge \neg C \wedge \neg D)$

$$\vee (\neg C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge D$$

$\wedge \neg C \wedge \neg D)$

$$\Leftrightarrow F \vee F \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee F \vee F \vee (C \wedge \neg D \wedge \neg B) \vee F \vee F \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg B) \vee F \vee$$

$(\neg C \wedge D) \vee F$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$$

$$\Leftrightarrow T$$

故有三种派法: $B \wedge D$, $A \wedge C$, $A \wedge D$ 。

二、(15 分) 在谓词逻辑中构造下面推理的证明: 某学术会议每个成员都是专家并且是工人, 有些成员是青年人, 所以, 有些成员是青年专家。

解：论域：所有人的集合。 $s(x)$ ： x 是专家； $w(x)$ ： x 是工人； $y(x)$ ： x 是青年人；
则推理化形式为：

$$\forall x(s(x) \wedge w(x)), \exists x y(x) \vdash \exists x(s(x) \wedge y(x))$$

下面给出证明：

- | | |
|-----------------------------------|------------|
| (1) $\exists x y(x)$ | P |
| (2) $y(c)$ | T(1), ES |
| (3) $\forall x(s(x) \wedge w(x))$ | P |
| (4) $s(c) \wedge w(c)$ | T(3), US |
| (5) $s(c)$ | T(4), I |
| (6) $s(c) \wedge y(c)$ | T(2)(5), I |
| (7) $\exists x(s(x) \wedge y(x))$ | T(6), EG |

三、(10分) 设 A 、 B 和 C 是三个集合，则 $A \subset B \Rightarrow \neg(B \subset A)$ 。

证明： $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow \forall x(x \notin A \vee x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \neg \forall x(x \notin B \vee x \in A) \Rightarrow \neg \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \neg \forall x(x \in A \vee \\ &x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \forall x(x \in A \vee x \notin B)) \Leftrightarrow \neg(\exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in \\ &A)) \\ &\Leftrightarrow \neg(B \subset A)。 \end{aligned}$$

四、(15分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， R 是 A 上的二元关系，且 $R = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle\}$ ，求 $r(R)$ 、 $s(R)$ 和 $t(R)$ 。

解 $r(R) = R \cup I_A = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle\}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$

$$R^2 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$$

$$R^3 = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$$

$$R^4 = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\} = R^2$$

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle\}$$

$1\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$ 。

五、(10分) R 是非空集合 A 上的二元关系, 若 R 是对称的, 则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 是对称的。

证明 对任意的 $x, y \in A$, 若 $xr(R)y$, 则由 $r(R) = R \cup I_A$ 得, xRy 或 xI_Ay 。因 R 与 I_A 对称, 所以有 yRx 或 yI_Ax , 于是 $yr(R)x$ 。所以 $r(R)$ 是对称的。

下证对任意正整数 n , R^n 对称。

因 R 对称, 则有 $xR^2y \Leftrightarrow \exists z(xRz \wedge zRy) \Leftrightarrow \exists z(zRx \wedge yRz) \Leftrightarrow yR^2x$, 所以 R^2 对称。若 R^n 对称, 则 $xR^{n+1}y \Leftrightarrow \exists z(xR^n z \wedge zRy) \Leftrightarrow \exists z(zR^n x \wedge yRz) \Leftrightarrow yR^{n+1}x$, 所以 R^{n+1} 对称。因此, 对任意正整数 n , R^n 对称。

对任意的 $x, y \in A$, 若 $xt(R)y$, 则存在 m 使得 $xR^m y$, 于是有 $yR^m x$, 即有 $yt(R)x$ 。因此, $t(R)$ 是对称的。

六、(10分) 若 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射。

证明 因为 $f: A \rightarrow B$ 是双射, 则 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。下证 f^{-1} 是双射。

对任意 $x \in A$, 必存在 $y \in B$ 使 $f(x) = y$, 从而 $f^{-1}(y) = x$, 所以 f^{-1} 是满射。

对任意的 $y_1, y_2 \in B$, 若 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 则 $f(x) = y_1, f(x) = y_2$ 。因为 $f: A \rightarrow B$ 是函数, 则 $y_1 = y_2$ 。所以 f^{-1} 是单射。

综上可得, $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是双射。

七、(10分) 设 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群, 如果 S 是有限集, 则必存在 $a \in S$, 使得 $a*a = a$ 。

证明 因为 $\langle S, * \rangle$ 是一个半群, 对任意的 $b \in S$, 由 $*$ 的封闭性可知, $b^2 = b*b \in S, b^3 = b^2*b \in S, \dots, b^n \in S, \dots$ 。

因为 S 是有限集, 所以必存在 $j > i$, 使得 $b^i = b^j$ 。令 $p = j - i$, 则 $b^j = b^p * b^i$ 。所以对 $q \geq i$, 有 $b^q = b^p * b^q$ 。

因为 $p \geq 1$, 所以总可找到 $k \geq 1$, 使得 $kp \geq i$ 。对于 $b^{kp} \in S$, 有 $b^{kp} = b^p * b^{kp} = b^p * (b^p * b^{kp}) = \dots = b^{kp} * b^{kp}$ 。

令 $a = b^{kp}$, 则 $a \in S$ 且 $a*a = a$ 。

八、(20分) (1) 若 G 是连通的平面图, 且 G 的每个面的次数至少为 $l (l \geq 3)$, 则 G

的边数 m 与结点数 n 有如下关系:

$$m \leq \frac{l}{l-2} (n-2)。$$

证明 设 G 有 r 个面, 则 $2m = \sum_{i=1}^r d(f_i) \geq lr$ 。由欧拉公式得, $n - m + r = 2$ 。于是, $m \leq \frac{l}{l-2} (n-2)。$

(2) 设平面图 $G = \langle V, E, F \rangle$ 是自对偶图, 则 $|E| = 2(|V| - 1)。$

证明 设 $G^* = \langle V^*, E^* \rangle$ 是连通平面图 $G = \langle V, E, F \rangle$ 的对偶图, 则 $G^* \cong G$, 于是 $|F| = |V^*| = |V|$, 将其代入欧拉公式 $|V| - |E| + |F| = 2$ 得, $|E| = 2(|V| - 1)。$

离散数学试题（B 卷及答案）

一、（10 分）证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \vdash S \vee R$

证明 因为 $S \vee R \Leftrightarrow \neg R \rightarrow S$ ，所以，即要证 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \vdash \neg R \rightarrow S$ 。

(1) $\neg R$	附加前提
(2) $P \rightarrow R$	P
(3) $\neg P$	$T(1)(2), I$
(4) $P \vee Q$	P
(5) Q	$T(3)(4), I$
(6) $Q \rightarrow S$	P
(7) S	$T(5)(6), I$
(8) $\neg R \rightarrow S$	CP
(9) $S \vee R$	$T(8), E$

二、（15 分）根据推理理论证明：每个考生或者勤奋或者聪明，所有勤奋的人都将有所作为，但并非所有考生都将有所作为，所以，一定有些考生是聪明的。

设 $P(e)$: e 是考生, $Q(e)$: e 将有所作为, $A(e)$: e 是勤奋的, $B(e)$: e 是聪明的, 个体域: 人的集合, 则命题可符号化为: $\forall x(P(x) \rightarrow (A(x) \vee B(x))), \forall x(A(x) \rightarrow Q(x)), \neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge B(x))$ 。

(1) $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
(2) $\neg \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$	$T(1), E$
(3) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	$T(2), E$
(4) $P(a) \wedge \neg Q(a)$	$T(3), ES$
(5) $P(a)$	$T(4), I$
(6) $\neg Q(a)$	$T(4), I$
(7) $\forall x(P(x) \rightarrow (A(x) \vee B(x)))$	P
(8) $P(a) \rightarrow (A(a) \vee B(a))$	$T(7), US$
(9) $A(a) \vee B(a)$	$T(8)(5), I$
(10) $\forall x(A(x) \rightarrow Q(x))$	P
(11) $A(a) \rightarrow Q(a)$	$T(10), US$
(12) $\neg A(a)$	$T(11)(6), I$
(13) $B(a)$	$T(12)(9), I$

$$(14) P(a) \wedge B(a)$$

$$T(5)(13), I$$

$$(15) \exists x(P(x) \wedge B(x))$$

$$T(14), EG$$

三、(10 分) 某班有 25 名学生, 其中 14 人会打篮球, 12 人会打排球, 6 人会打篮球和排球, 5 人会打篮球和网球, 还有 2 人会打这三种球。而 6 个会打网球的人都会打另外一种球, 求不会打这三种球的人数。

解 设 A 、 B 、 C 分别表示会打排球、网球和篮球的学生集合。则:

$$|A|=12, |B|=6, |C|=14, |A \cap C|=6, |B \cap C|=5, |A \cap B \cap C|=2, |(A \cup C) \cap B|=6.$$

因为 $|(A \cup C) \cap B| = |(A \cap B) \cup (B \cap C)| = |(A \cap B)| + |(B \cap C)| - |A \cap B \cap C| = |(A \cap B)| + 5 - 2 = 6$, 所以 $|(A \cap B)| = 3$ 。于是 $|A \cup B \cup C| = 12 + 6 + 14 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20$, $|\overline{A \cup B \cup C}| = 25 - 20 = 5$ 。故, 不会打这三种球的共 5 人。

四、(10 分) 设 A_1 、 A_2 和 A_3 是全集 U 的子集, 则形如 $\bigcap_{i=1}^3 A_i'$ (A_i' 为 A_i 或 $\overline{A_i}$) 的集合称为由 A_1 、 A_2 和 A_3 产生的小项。试证由 A_1 、 A_2 和 A_3 所产生的所有非空小项的集合构成全集 U 的一个划分。

证明 小项共 8 个, 设有 r 个非空小项 s_1 、 s_2 、...、 s_r ($r \leq 8$)。

对任意的 $a \in U$, 则 $a \in A_i$ 或 $a \in \overline{A_i}$, 两者必有一个成立, 取 A_i' 为包含元素 a 的 A_i 或 $\overline{A_i}$, 则 $a \in \bigcap_{i=1}^3 A_i'$, 即有 $a \in \bigcup_{i=1}^r s_i$, 于是 $U \subseteq \bigcup_{i=1}^r s_i$ 。又显然有 $\bigcup_{i=1}^r s_i \subseteq U$, 所以 $U = \bigcup_{i=1}^r s_i$ 。

任取两个非空小项 s_p 和 s_q , 若 $s_p \neq s_q$, 则必存在某个 A_i 和 $\overline{A_i}$ 分别出现在 s_p 和 s_q 中, 于是 $s_p \cap s_q = \emptyset$ 。

综上所述, $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ 是 U 的一个划分。

五、(15 分) 设 R 是 A 上的二元关系, 则: R 是传递的 $\Leftrightarrow R^*R \subseteq R$ 。

证明 (5) 若 R 是传递的, 则 $\langle x, y \rangle \in R^*R \Rightarrow \exists z(xRz \wedge zSy) \Rightarrow xRc \wedge cSy$, 由 R 是传递的得 xRy , 即有 $\langle x, y \rangle \in R$, 所以 $R^*R \subseteq R$ 。

反之, 若 $R^*R \subseteq R$, 则对任意的 $x, y, z \in A$, 如果 xRz 且 zRy , 则 $\langle x, y \rangle \in R^*R$, 于是有 $\langle x, y \rangle \in R$, 即有 xRy , 所以 R 是传递的。

六、(15 分) 若 G 为连通平面图, 则 $n - m + r = 2$, 其中, n 、 m 、 r 分别为 G 的结点数、边数和面数。

证明 对 G 的边数 m 作归纳法。

当 $m=0$ 时, 由于 G 是连通图, 所以 G 为平凡图, 此时 $n=1$, $r=1$, 结论自然成立。

假设对边数小于 m 的连通平面图结论成立。下面考虑连通平面图 G 的边数为 m 的情况。

设 e 是 G 的一条边, 从 G 中删去 e 后得到的图记为 G' , 并设其结点数、边数和面数分别为 n' 、 m' 和 r' 。对 e 分为下列情况来讨论:

若 e 为割边, 则 G' 有两个连通分支 G_1 和 G_2 。 G_i 的结点数、边数和面数分别为 n_i 、 m_i 和 r_i 。显然 $n_1+n_2=n'$, $m_1+m_2=m'=m-1$, $r_1+r_2=r'+1=r+1$ 。由归纳假设 $n_1-m_1+r_1=2$, $n_2-m_2+r_2=2$, 从而 $(n_1+n_2)-(m_1+m_2)+(r_1+r_2)=4$, $n-(m-1)+(r+1)=4$, 即 $n-m+r=2$ 。

若 e 不为割边, 则 $n'=n$, $m'=m-1$, $r'=r-1$, 由归纳假设 $n'-m'+r'=2$, 从而 $n-(m-1)+r-1=2$, 即 $n-m+r=2$ 。

由数学归纳法知, 结论成立。

七、(10 分) 设函数 $g: A \rightarrow B$, $f: B \rightarrow C$, 则:

(1) $f \circ g$ 是 A 到 C 的函数;

(2) 对任意的 $x \in A$, 有 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。

证明 (1) 对任意的 $x \in A$, 因为 $g: A \rightarrow B$ 是函数, 则存在 $y \in B$ 使 $\langle x, y \rangle \in g$ 。对于 $y \in B$, 因 $f: B \rightarrow C$ 是函数, 则存在 $z \in C$ 使 $\langle y, z \rangle \in f$ 。根据复合关系的定义, 由 $\langle x, y \rangle \in g$ 和 $\langle y, z \rangle \in f$ 得 $\langle x, z \rangle \in g \circ f$, 即 $\langle x, z \rangle \in f \circ g$ 。所以 $D_{f \circ g} = A$ 。

对任意的 $x \in A$, 若存在 $y_1, y_2 \in C$, 使得 $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f \circ g = g \circ f$, 则存在 t_1 使得 $\langle x, t_1 \rangle \in g$ 且 $\langle t_1, y_1 \rangle \in f$, 存在 t_2 使得 $\langle x, t_2 \rangle \in g$ 且 $\langle t_2, y_2 \rangle \in f$ 。因为 $g: A \rightarrow B$ 是函数, 则 $t_1 = t_2$ 。又因 $f: B \rightarrow C$ 是函数, 则 $y_1 = y_2$ 。所以 A 中的每个元素对应 C 中唯一的元素。

综上所述, $f \circ g$ 是 A 到 C 的函数。

(2) 对任意的 $x \in A$, 由 $g: A \rightarrow B$ 是函数, 有 $\langle x, g(x) \rangle \in g$ 且 $g(x) \in B$, 又由 $f: B \rightarrow C$ 是函数, 得 $\langle g(x), f(g(x)) \rangle \in f$, 于是 $\langle x, f(g(x)) \rangle \in g \circ f = f \circ g$ 。又因 $f \circ g$ 是 A 到 C 的函数, 则可写为 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。

八、(15 分) 设 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 定义 $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in G \text{ 且 } a^{-1} * b \in H \}$, 则 R 是 G 中的一个等价关系, 且 $[a]_R = aH$ 。

证明 对于任意 $a \in G$, 必有 $a^{-1} \in G$ 使得 $a^{-1} * a = e \in H$, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$ 。

若 $\langle a, b \rangle \in R$, 则 $a^{-1} * b \in H$ 。因为 H 是 G 的子群, 故 $(a^{-1} * b)^{-1} = b^{-1} * a \in H$ 。所以 $\langle b, a \rangle \in R$ 。

若 $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, c \rangle \in R$, 则 $a^{-1} * b \in H$, $b^{-1} * c \in H$ 。因为 H 是 G 的子群, 所以 $(a^{-1} * b) * (b^{-1} * c) = a^{-1} * c \in H$, 故 $\langle a, c \rangle \in R$ 。

综上所述, R 是 G 中的一个等价关系。

对于任意的 $b \in [a]_R$, 有 $\langle a, b \rangle \in R$, $a^{-1} * b \in H$, 则存在 $h \in H$ 使得 $a^{-1} * b = h$, $b = a * h$, 于是 $b \in aH$, $[a]_R \subseteq aH$ 。对任意的 $b \in aH$, 存在 $h \in H$ 使得 $b = a * h$, $a^{-1} * b = h \in H$, $\langle a, b \rangle \in R$, 故 $aH \subseteq [a]_R$ 。所以, $[a]_R = aH$ 。