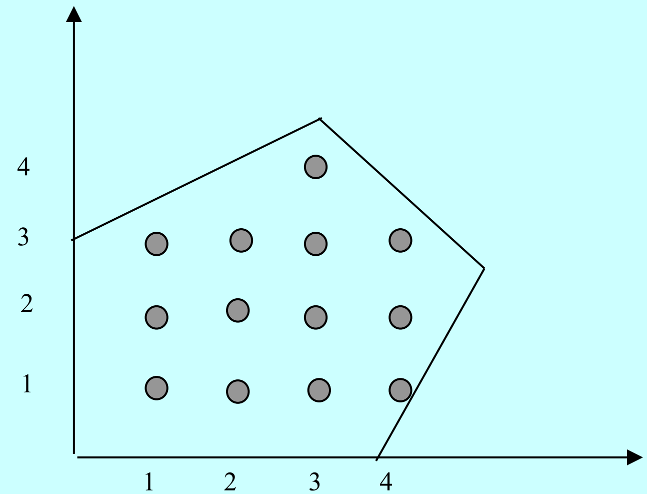
第四章 整数规划与分配问题

1．整数规划的特点
2．分枝定界法
3．割平面法
4．解0-1规划问题的隐枚举法
5．分配问题与匈牙利法

§1. 整数规划的特点

在一个线性规划中要求全部变量取整数值的，称纯整数线性规划或简称**纯整数规划**；只要求一部分变量取整数值的，称为**混合整数(线性)规划**。如果全部变量为只能取0或1的逻辑变量，则线性规划问题称为0-1规划。

纯整数规划的可行域是离散点集。



§1．整数规划的特点

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leqslant 4.5 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0，\text{且均取整数值} \end{cases}$$

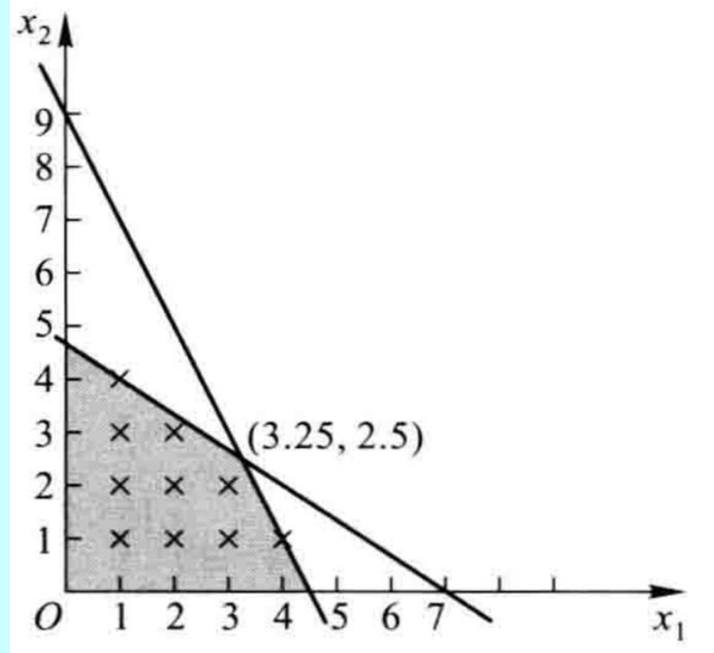


图 4－1

单纯形法求解可得：

（3.25，2.5）

z=14.75

整数最优解的可能情况？

§2．分枝定界法

第一步：寻找替代问题并求解。

第二步：分枝与定界。

第三步：剪枝。

第一步：寻找替代问题并求解

1．放松或取消原问题的某些约束，得到替代问题：容易求解，且原问题的解应无例外地包含在替代问题的解集中。

例如：

§2．分枝定界法

IP	LP
max z = CX $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \quad ,X\text{是整数} \end{cases}$	max z = CX $\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$
max z = 3x1 + 2x2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0,\text{且均为整数} \end{cases}$	max z = 3x1 + 2x2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

整数规划问题（IP）可行解集合是替代问题（LP）可行解集合的一个子集，**因此（IP）最优解的目标函数值不会优于（LP）问题最优解的目标函数值。**

§2．分枝定界法

2．解（LP）问题：

L_0： max z = 3x1 + 2x2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解得 x1 = 3.25， x2 = 2.5， z = 14.75

§2．分枝定界法

第二步：分枝与定界

1．分枝　任选一个不符合整数条件的变量 x_j，如果 $x_j = b_j^*$，做两个后继子问题，它们是对原（LP）各增加一个条件

$$x_j \le [b_j^*] \quad 和 \quad x_j \ge [b_j^*]+1$$

求解这两个后继子问题。

§2．分枝定界法

例如：$x_2 = 2.5$，增加条件$x_2 \le [2.5] = 2$ 和$x_2 \ge [2.5] + 1 = 3$

L_1：max z = 3x1 + 2x2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$	L_2：max z = 3x1 + 2x2 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ \quad\quad x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

分枝只去掉非整数部分，没有去掉整数解。

§2. 分枝定界法

问题 L_1 和 L_2 中仍包含原问题的全部可行解. 容易求得 L_1 的最优解为(3.5,2), $z=14.5$; L_2 的最优解为(2.5,3), $z=13.5$. 由于两个子问题的最优解仍非原问题的可行解, 故选取边界值 z 较大的子问题 L_1 继续分枝. 在 L_1 中分别加上约束 $x_1 \leqslant 3$ 和 $x_1 \geqslant 4$ 得 L_{11} 和 L_{12} 如下:

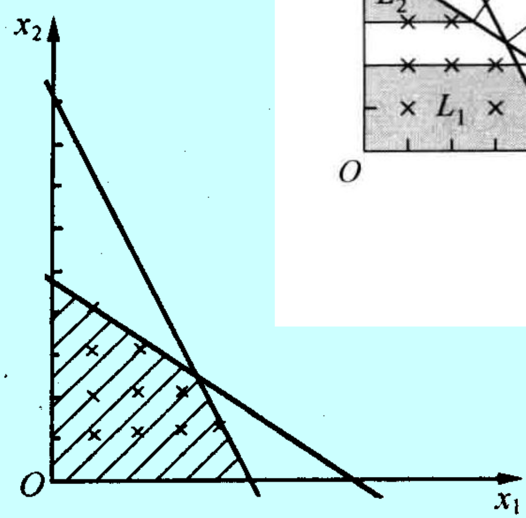
$$L_{11}:\ \max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leqslant 4.5 \\ \qquad\quad x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \qquad\quad \leqslant 3 \\ x_1,\quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$L_{12}:\ \max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leqslant 4.5 \\ \qquad\quad x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \qquad\quad \geqslant 4 \\ \qquad\quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

L11和L12的最优解分别是（3，2）和（4，1），对应的z取值分别是13和14.

§2. 分枝定界法

P134



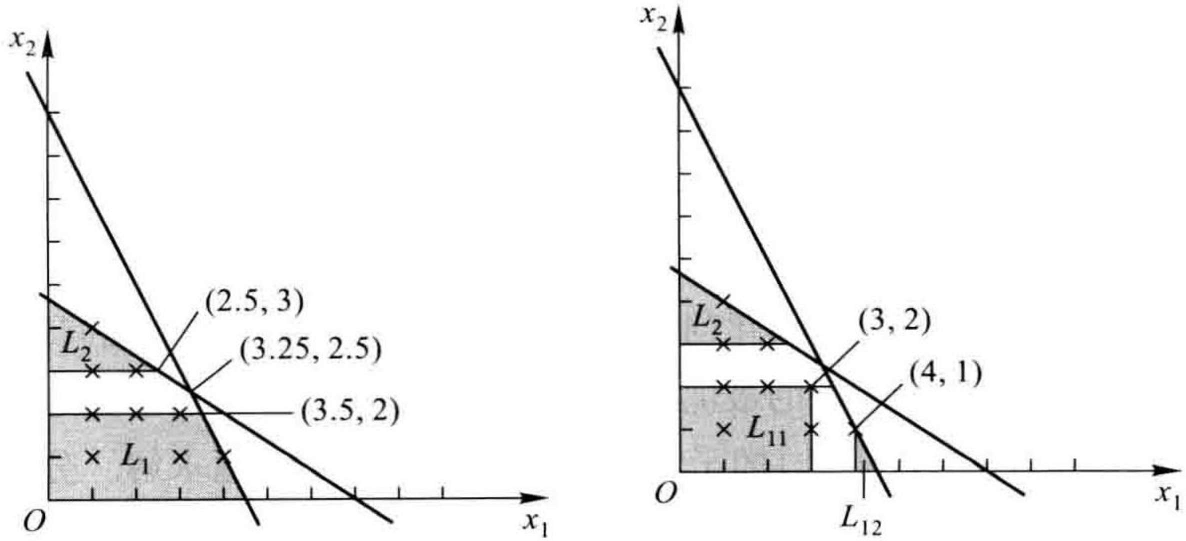
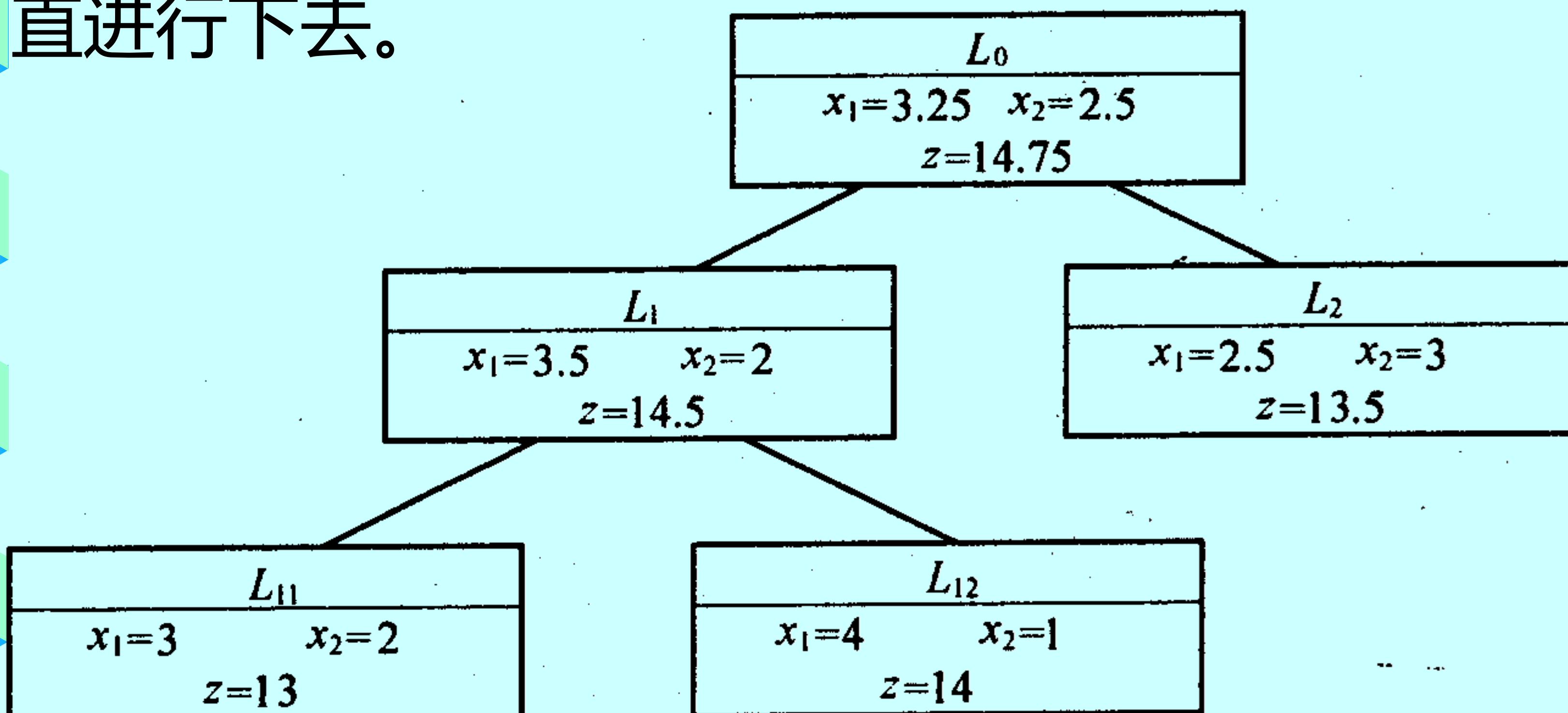


图 4－2　图 4－3

2．定界

以每个后继子问题为一个分枝求最优解，如果该解满足原问题的约束，即找到原问题的一个可行解；否则，该解为所属分枝的目标函数的边界值；如果所有子问题的最优解均非原问题的可行解，则选取边界值最大的子问题进一步再细分子问题求解。一直进行下去。



§2．分枝定界法

第三步：剪枝

将各子问题边界值与保留的可行解的值进行比较。**把边界值劣于可行解的分枝剪去**。如果除保留下来的可行解外，其余分枝均被剪去，则该可行解就是原问题最优解。否则回到第二步，选取边界值最优的一个继续分枝。如果计算中又出现新的可行解时，则与原可行解比较，保留最优的，并重复上述步骤。

§3．割平面法

基本思想：是在整数规划问题的松弛问题中依次引进线性约束条件(称Gomory约束或割平面)，使问题的可行域逐步缩小。**但每次切割只割去问题的部分非整数解**，直到使问题的目标函数值达到最优的整数点成为缩小后可行域的**一个顶点**，这样就可以用求解线性规划问题的方法找出这个最优解。

第一步：把问题中所有**约束条件的系数均化为整数**，用单纯形法求解。

例如：

$$G_0: \quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

§3. 割平面法

			x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_2	5/2	0	1	1/2	–1/2
3	x_1	13/4	1	0	–1/4	3/4
	$c_j - z_j$		0	0	–1/4	–5/4

第二步：找出非整数解变量中**分数部分最大**的一个变量（x 2）：

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2\frac{1}{2}$$

将所有系数和常数项分解成整数和**非负真分数**之和：

$$x_2 + (0+\frac{1}{2})x_3 + (-1+\frac{1}{2})x_4 = (2+\frac{1}{2})$$

将分数项移到等式右端，整数项移到等式左端：

$$x_2 - x_4 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

§3．割平面法

考虑变量取整的要求，等式两端均应为整数，又因 x_3、$x_4 \geq 0$，故

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4 \leq \frac{1}{2} < 1$$

因此有

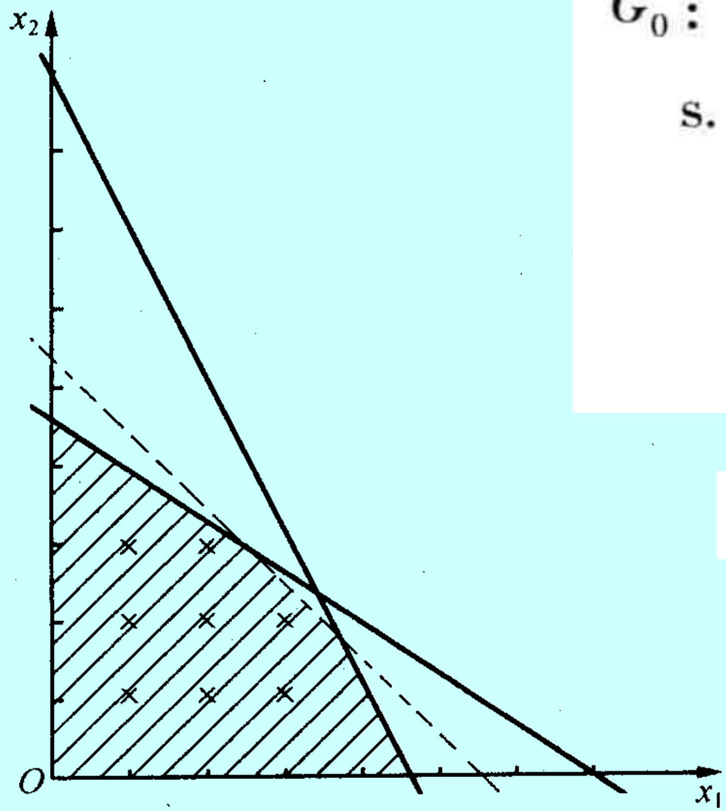
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4 \leq 0$$ ——Gomory约束

代入 x_3、x_4：

$$\begin{cases} x_3 = 14-2x_1-3x_2 \\ x_4 = 9-2x_1-x_2 \end{cases}$$

得 $2x_1+2x_2 \leq 11$

§3. 割平面法



$$G_0: \quad \max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11$$

§3. 割平面法

第三步：将Gomory约束加到G_0中得到新的线性规划问题G_1：

G_1： max z = 3x1 + 2x2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \qquad + x_4 & = 4.5 \\ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 & = -\frac{1}{2} \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

增加一个新的约束，用灵敏度分析中的方法求解：

§3. 割平面法

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4\le 0$$

			2	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	$2\frac{1}{2}$	0	1	1/2	−1/2	0
3	x_1	$3\frac{1}{4}$	1	0	−1/4	3/4	0
0	x_5	−1/2	0	0	[−1/2]	−1/2	1
	c_j-z_j		0	0	−1/4	−5/4	0
2	x_2	2	0	1	0	−1	1/2
3	x_1	$3\frac{1}{2}$	1	0	0	1	−1/2
0	x_3	1	0	0	1	1	−2
	c_j-z_j		0	0	0	−1	−1/2

§3. 割平面法

$$x_1 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 3\frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_4 - x_5 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5$$

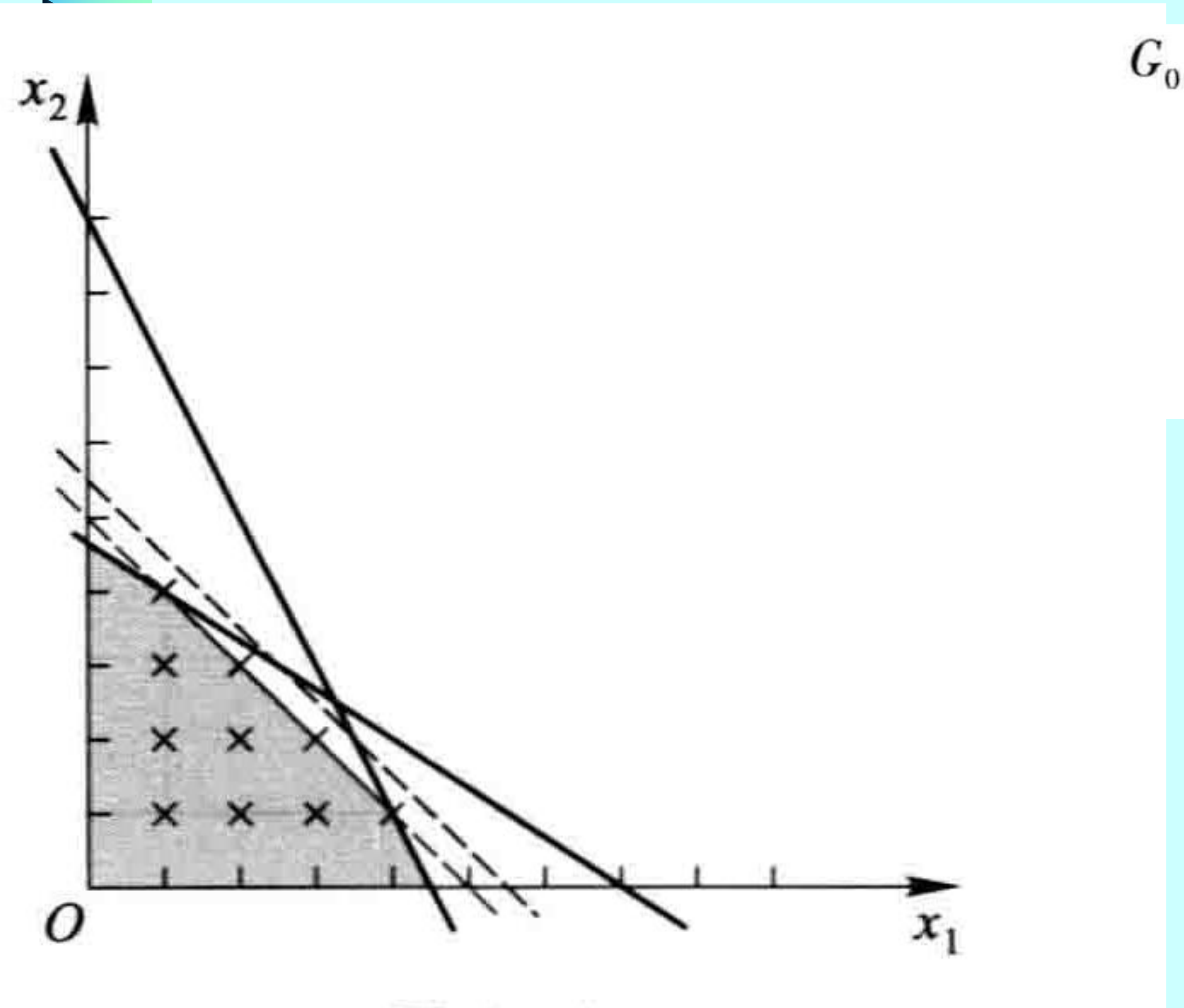
G_2: $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2} \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

§3. 割平面法

			2	3	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_2	2	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0
3	x_1	$3\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	0
0	x_3	1	0	0	1	1	-1	0
0	x_6	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\left[-\frac{1}{2}\right]$	1
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0
2	x_2	1	0	1	0	-1	0	2
3	x_1	4	1	0	0	1	0	-1
0	x_3	3	0	0	1	1	0	-4
0	x_5	1	0	0	0	0	1	-2
	$c_j - z_j$		0	0	0	-1	0	-1

§3. 割平面法



G_0: $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 9 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 5$$

§3．割平面法

第四步：重复第一至第三步，直到找出问题的整数最优解。

注：每次增加的约束条件应具备两个基本性质：

1．**已获得的松弛问题的最优解一定不满足这个线性约束条件**，从而不可能在以后的解题过程中再出现；

2．**凡整数可行解均满足这个线性约束条件**，因而整数最优解始终被保留在每次形成的线性规划可行域中。

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

整数规划中如果全部变量为0或1的逻辑变量，称为0-1规划。

4-1． 0-1逻辑变量在建立数学模型中的作用

1．m个约束条件中只有k个起作用

m个约束条件：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m})$

定义 $y_i = \begin{cases} 1, & \text{假定第}i\text{个约束条件不起作用} \\ 0, & \text{假定第}i\text{个约束条件起作用} \end{cases}$

又设M为任意大的正数，则

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + M\ y_i & (i=1,\cdots,m) \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m-k \end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

2．约束条件右端可能是r个值中的某一个

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_1\text{或}b_2,\cdots,\text{或}b_r$$

定义 $$y_i=\begin{cases}1, & \text{假定约束条件右端为}b_i\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

则 $$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \sum_{i=1}^{r} b_i y_i\\ y_1+y_2+\cdots+y_r=1\end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

3．两组条件中满足其中一组

例如：若 $x_1 \le 4$，则 $x_2 \ge 1$；否则，$x_1 \ge 4$ 时，$x_2 \le 3$

定义 $y_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{组条件不起作用} \\ 0, & \text{第}i\text{组条件起作用} \end{cases} \quad (i=1,2)$

又设M为任意大的正数，则

$$\begin{cases} x_1 \le 4 + y_1 M \\ x_2 \ge 1 - y_1 M \\ x_1 > 4 - y_2 M \\ x_2 \le 3 + y_2 M \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

4．固定费用问题

某种产品j的生产费用函数可表示为：

$$C_j(x_j)=\begin{cases} K_j+c_jx_j & (x_j>0) \\ 0 & (x_j=0) \end{cases}$$

其中 x_j 表示生产数量， K_j 表示与产量无关的固定的生产准备费用。目标是使所有产品的总生产费用为最小：

$$\min\ z=\sum_{j=1}^{n}C_j(x_j)$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

定义

$$y_j=\begin{cases}0, & \text{不生产第}j\text{种产品（即}x_j=0\text{）}\\ 1, & \text{生产第}j\text{种产品（即}x_j>0\text{）}\end{cases}$$

M为任意大的正数，则

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}(c_j x_j+K_j y_j)$$

$$\begin{cases}x_j\le M\,y_j\\ x_j\ge 0\\ y_j=0\text{或}1\end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

4-2．隐枚举法

对0-1规划有较简便的求解方法，隐枚举法(implicit enumeration method)是其中之一。

隐枚举法的实质也是分枝定界法。但一般用分枝定界法求解整数规划时，替代问题是放宽变量的整数约束。但用隐枚举法时，替代问题是在保持变量0-1的约束条件下先不考虑问题的主要约束。

例：

$$\max\ z = 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4 \\ x_j = 0\text{或}1 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

第一步：把问题转换成规格的形式。

（1）目标函数求极小化，约束条件为“≥”形式：

$$\min z' = -8x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \geq -4 \\ -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq -4 \\ x_j = 0\text{或}1 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

（2）进行变换，使目标函数中各变量的系数为正：

令 ，则

$$x_1' = 1 - x_1, x_2' = 1 - x_2$$

§4. 解0-1规划问题的隐枚举法

$$\min\ z' = 8x_1' + 2x_2' + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 - 10$$

$$\begin{cases} 3x_1' + 3x_2' - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \geq 2 \\ 5x_1' + 3x_2' + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 4 \\ x_j(\text{或}x_j') = 0\text{或}1 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

（3）按目标函数中各变量的系数值从小到大，重新排列各变量：

$$\min\ z' = 2x_2' + 4x_3 + 5x_5 + 7x_4 + 8x_1' - 10$$

$$\begin{cases} 3x_2' - x_3 - 3x_5 - 2x_4 + 3x_1' \geq 2 \\ 3x_2' + 2x_3 - x_5 + x_4 + 5x_1' \geq 4 \\ x_j(\text{或}x_j') = 0\text{或}1 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

第二步：在规格化后的0-1规划问题中令所有变量为0，这时z' ＝ －10，代入约束条件中检查是否满足，如果满足即为问题的最优解，否则转下一步。

第三步：**按在目标函数中排列顺序**依次令各变量分别取“1”或“0”，将问题分成两个子问题，分别检查是否满足约束条件，如果不满足，继续进行分枝，直到找出一个可行解为止。

注意当发生下列三种情形之一时，该分枝不再继续往下分，或保留或剪枝。

（a）该分枝的子问题为可行解，这时应保留所有可行解中z ' 值最小的分枝，将可行解中边界值大的分枝剪去；

§4．解0-1规划问题的隐枚举法

（b）不管是否为可行解，该分枝边界值劣于保留下来的可行解值；

（c）当该分枝中某些变量的值已确定的情况下，其余变量不管取什么值都无法满足一个或几个约束时，即该分枝无可行解，实行剪枝。

第四步：对（a）、（b）、（c）三种情况以外的分枝中找出边界值最小的分枝再往下分，一直到除保留的分枝外，其余全被剪去为止。这时保留下来的分枝的可行解值即为问题的最优解值。

§4. 解0-1规划问题的隐枚举法

变量				目标函数值 z	条件				是否可行解
x_1	x_2	…	x_n		①	②	③	…	
(0	0	…	0)		√	×	√		×
(1	0	…	0)						√

§4. 解0-1规划问题的隐枚举法

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ 4x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

§5．分配问题与匈牙利法

1．问题的提出与数学模型

2．匈牙利法

3．两点说明

5-1．问题的提出与数学模型

分配问题也称为指派问题（assignment problem），是一种特殊的整数线性规划问题：分配**m个人完成m项任务**，每人完成其中一项，每项任务只能交给一个人完成；由于每人的专长不同，各人完成任务的效率也不同，于是产生了应指派哪个人去完成哪项任务的问题，使**完成m项任务的总效率最高**（或所需总时间最少）。

§5. 分配问题与匈牙利法

【例2】 有一份说明书，要分别译成英、日、德、俄四种文字，交甲、乙、丙、丁四个人去完成。因各人专长不同，他们完成翻译不同文字所需的时间（h）不同。应如何分配，使这四个人分别完成这四项任务总的时间为最小。

工作 \ 人	甲	乙	丙	丁
译成英文	2	10	9	7
译成日文	15	4	14	8
译成德文	13	14	16	11
译成俄文	4	15	13	9

在分配问题中，利用不同资源完成不同计划活动的效率通常用表格形式表示，表格中数字组成**效率矩阵**。

§5．分配问题与匈牙利法

设用[a ｉｊ]表示分配问题的效率矩阵，令

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\text{分配第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\\0,\text{不分配第}i\text{个人去完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

(ｉ＝1，…，ｍ；ｊ＝1，…，ｍ)

则分配问题的数学模型一般写为：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1 & (i=1,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1 & (j=1,\cdots,m)\\ x_{ij}=0\text{或}1 & (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,m)\end{cases}$$

§5．分配问题与匈牙利法

5-2．匈牙利法

如果效率矩阵的所有元素$a_{ij}\geq 0$，而其中存在一组位于不同行不同列的零元素，则只要令对应于这些零元素位置的$x_{ij}=1$，其余

$x_{ij}=0$，则 $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_{ij}$ 就是问题的最优解。例如

$$\begin{pmatrix} 0 & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 20 & 0 & 23 \\ 23 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 12 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

问题：如何产生并寻找这组位于不同行不同列的零元素?

§5. 分配问题与匈牙利法

定理1 如果从分配问题效率矩阵 $[a_{ij}]$ 的每一行元素中分别减去（或加上）一个常数 u_i（被称为该行的位势），从每一列分别减去（或加上）一个常数 v_j（称为该列的位势），得到一个新的效率矩阵 $[b_{ij}]$，其中 $b_{ij} = a_{ij} - u_i - v_j$，则 $[b_{ij}]$ 的最优解等价于 $[a_{ij}]$ 的最优解。

定理2 若矩阵A的元素可分成"0"与非"0"两部分，则覆盖"0"元素的最少直线数等于位于不同行不同列的"0"元素的最大个数。

§5. 分配问题与匈牙利法

匈牙利法的计算步骤：

第一步：找出效率矩阵每行的最小元素，并分别从每行中减去

$$
\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \min \\ 2 \\ 4 \\ 11 \\ 4 \end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 5 \end{pmatrix}
$$

§5. 分配问题与匈牙利法

第二步：再找出矩阵每列的最小元素，再分别从各列中减去

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

min 0 0 5 0

§5．分配问题与匈牙利法

第三步：能否找出m个位于不同行不同列的零元素的（本例中m=4）？

（1）从第一行开始，若该行只有一个零元素，就对这个零元素打上（ ）号。对打（ ）号零元素所在列画一条直线。若该行没有零元素或有两个以上零元素（**已划去的不计在内**），则转下一行，依次进行到最后一行；

（2）从第一列开始，若该列只有一个零元素就对这个零元素打上（ ）号（**同样不考虑已划去的零元素**），再对打（ ）号零元素所在行画一条直线。若该列没有零元素或有两个以上零元素，则转下一列，依次进行到最后一列；

§5．分配问题与匈牙利法

（3）**重复（1）、（2）两个步骤**，可能出现三种情况：

①效率矩阵每行（或者每列）都有一个打（ ）号的零元素，得到问题的最优解；

②打（ ）号的零元素个数小于m，但尚有未被划去或打（ ）号的零元素；

③矩阵中所有零元素或被划去，或打上（ ）号，但打（ ）号的零元素个数小于m，转入第四步。

§5．分配问题与匈牙利法

第四步：为设法使每一行都有一个打（ ）号的零元素，需要继续按定理1对矩阵进行变换：

（1）从矩阵**未被直线覆盖的数字**中找出一个最小的数k；

（2）对矩阵的每行，当该行有直线覆盖时，令$u_i = 0$，无直线覆盖的，令$u_i = k$；

（3）对矩阵中有直线覆盖的列，令$v_j = -k$，对无直线覆盖的列，令$v_j = 0$；

（4）从原矩阵的每个元素a_{ij}中分别减去u_i和v_j，得到一个新的矩阵。

§5. 分配问题与匈牙利法

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} (0) & 8 & 2 & 5 \\ 11 & (0) & 5 & 4 \\ 2 & 3 & (0) & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 & -2 & 0 & 0 \end{matrix} & \end{array}$$

§5．分配问题与匈牙利法

第五步：回到第三步，反复进行，一直到矩阵的每一行都有一个打（　）号的零元素为止，即找到了最优分配方案。

5-3．两点说明

1．分配问题中人数和任务数不相等时的处理方法

2．目标函数为求最大值

§5. 分配问题与匈牙利法

4.6 分配甲、乙、丙、丁四个人去完成 A、B、C、D、E 五项任务，每个人完成各项任务的时间如表 4－16 所示. 有如下考虑：

（a）任务 E 必须完成，其他 4 项中可任选 3 项完成；

（b）其中有一人完成两项，其他每人完成一项；

（c）任务 A 由甲或丙完成，任务 C 由丙或丁完成，任务 E 由甲、乙或丁完成，且规定 4 人中乙或丁完成两项任务，其他每人完成一项；

试分别确定各自最优分配方案，使完成任务的总时间为最少.

表 4－16 单位：h

人	任务				
	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45