第二章 线性规划的对偶理论

§1．对偶问题的提出

原问题　设某企业有m种资源用于生产n种不同产品，各种资源的拥有量分别为b_i（i=1，…，m），又生产单位第j种产品（j=1，…，n）消费第i种资源a_{ij}单位，产值为c_j元。用x_j代表第j种产品的生产数量，为使该企业产值最大，可将上述问题建立线性规划模型：

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

§1．对偶问题的提出

现在从另一角度提出问题：假定有另一企业欲将上述企业拥有的资源收买过来，至少应付出多少代价，才能使前一企业愿意放弃生产活动，出让资源。

设用y_i代表收买该企业一单位i种资源时付给的代价，则总收买价为：

$$\omega = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$$

前一企业生产一单位第 j种产品时，消耗各种资源的数量分别为a_{1j}，a_{2j}，…，a_{mj}，如果出让这些资源，价值应不低于单位j种产品的价值c_j元，因此：

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

§1. 对偶问题的提出

对后一企业来说，希望用最小代价把前一企业所有资源收买过来，因此有：

$$\min\ \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{mn} y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

§1．对偶问题的提出

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min\ \omega = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_m \geqslant 0 \end{cases}$$

§2．原问题与对偶问题

后一个线性规划问题是前一个问题从不同角度作的阐述。如果前者称为线性规划原问题的话，后者称为它的对偶问题。

§2．原问题与对偶问题

将上述线性规划的原问题与对偶问题进行比较可以看出：

（1）一个问题中的约束条件个数等于另一个问题中的变量数；

（2）一个问题中目标函数的系数是另一个问题中约束条件的右端项；

（3）约束条件在一个问题中为“≤”，则在另一问题中为“≥”；

（4）目标函数在一个问题中是求极大值，在另一问题中则为求极小值。

见表2-l。

§2. 原问题与对偶问题

表 2－2

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数 max	目标函数 min
变量 n 个	约束条件 n 个
变量 $\geqslant 0$	约束条件 $\geqslant$
变量 $\leqslant 0$	约束条件 $\leqslant$
变量 无约束	约束条件 $=$
目标函数中变量的系数	约束条件右端项
约束条件 m 个	变量 m 个
约束条件 $\leqslant$	变量 $\geqslant 0$
约束条件 $\geqslant$	变量 $\leqslant 0$
约束条件 $=$	变量 无约束
约束条件右端项	目标函数中变量的系数

§2．原问题与对偶问题

原问题与对偶问题关系 实例

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
$\min\ z=7x_1+4x_2-3x_3$	$\max\ w=24y_1+15y_2+30y_3$
s. t.	s. t.
$-4x_1+2x_2-6x_3\leqslant 24$	$y_1\leqslant 0$
$-3x_1-6x_2-4x_3\geqslant 15$	$y_2\geqslant 0$
$5x_2+3x_3=30$	y_3 取值无约束
$x_1\leqslant 0$	$-4y_1-3y_2\geqslant 7$
x_2 取值无约束	$2y_1-6y_2+5y_3=4$
$x_3\geqslant 0$	$-6y_1-4y_2+3y_3\leqslant -3$

§3．对偶问题的基本性质

原问题：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}) \\ x_j \ge 0 & (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}) \end{cases}$$

对偶问题：

$$\min \ \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i \ y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j & (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}) \\ y_i \ge 0 & (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}) \end{cases}$$

§3．对偶问题的基本性质

1．弱对偶性

如果 $\bar{x}_j$（j=1,2,…,n）是原问题的可行解，$\bar{y}_i$ (i=1,2,…,m）是其对偶问题的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

§3．对偶问题的基本性质

2．最优性

如果 $\bar{x}_j$（j=1,2,…,n）是原问题的可行解，$\bar{y}_i$（i=1,2,…,m）是其对偶问题的可行解，且有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \bar{y}_i$$

则 $\bar{x}_j$（j=1,2,…,n）是原问题的最优解，$\bar{y}_i$ 是（i=1,2,…,m）其对偶问题的最优解。

§3．对偶问题的基本性质

3．无界性

如果原问题（对偶问题）具有无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。

§3．对偶问题的基本性质

4．强对偶性（对偶定理）

如果原问题有最优解，则其对偶问题也一定有最优解，且它们的目标函数值相等

$$\max\ z = \min\ \omega$$

一对互为对偶的线性规划问题，其中一个若没有最优解，则另一个必定也没有最优解。

§3．对偶问题的基本性质

5．互补松弛性

如果 $\bar{X}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)^T$ 和 $\bar{Y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_n)$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，则

当 $\bar{y}_i>0$ 时，必有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j=b_i$

当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j$ 时 b_i 必有 $\bar{y}_i=0$

当 $\bar{x}_j>0$ 时，必有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i=c_j$

当 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i$ 时 c_j 必有 $\bar{x}_j=0$

§3．对偶问题的基本性质

6．用单纯形法求解线性规划问题时，迭代的每一步在得到原问题一个基本可行解的同时，其检验数行是其对偶问题的一个基本解；在单纯形表中，原问题的松弛变量对应对偶问题的变量，对偶问题的剩余变量对应原问题的变量；这些互相对应的变量如果在一个问题的解中是基变量，则在另一问题的解中是非基变量；将这两个解代入各自的目标函数中有$z=\omega$。

§3．对偶问题的基本性质

表 2–3

		原问题变量		原问题松弛变量		
基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$
x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$
x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
z_j-c_j		0	0	1	0	$\frac{1}{5}$
		对偶问题剩余变量		对偶问题变量		
		y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

表 2–4

		对偶问题变量			对偶问题剩余变量	
基	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	1	1	2	0	$-\frac{1}{2}$	0
y_3	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
z_j-c_j		0	4	0	3	3
		原问题松弛变量			原问题变量	
		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

表 2－5

序号	原问题(LP_1')						$z=w$	对偶问题(LP_2')					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	是否可行		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	是否可行
1	4	3	−2	0	0	否	17	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	0	0	是
2	3	3	0	4	0	是	15*	1	0	$\frac{1}{5}$	0	0	是
3	4	2	0	0	5	是	14	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	否
4	4	0	4	0	15	是	8	0	$\frac{1}{2}$	0	0	−3	否
5	6	0	0	−8	15	否	12	1	0	0	0	−1	否
6	0	3	6	16	0	是	9	0	0	$\frac{3}{5}$	−2	0	否
7	0	6	0	16	−15	否	18	$\frac{3}{2}$	0	0	1	0	是
8	0	0	12	16	15	是	0	0	0	0	−2	−3	否

注：表中标 * 的解为两个问题的最优解.

§3．对偶问题的基本性质

P72 【例3】

目标函数值		原问题	
		可行解	非可行解
对偶问题	可行解	最优	$z > z_{max}$
	非可行解	$z < z_{max}$	—

§4．影子价格

对偶变量 y_i 的经济意义：

对第i种资源的估价。并非在市场上的真正价格，而是企业根据具体的生产过程，为使资源实现最大利润而得到的一种估计价格，称为 影子价格 (shadow price)。

在纯市场经济条件下，当资源的市场价格低影子价格时，可以买进这种资源；相反当市场价格高于影子价格时，则可以卖出这种资源。

§5．对偶单纯形法

对偶单纯形法基本思想：保持对偶问题为可行解（这时一般原问题为非可行解），通过迭代，减小目标函数，当原问题也达到可行解时，即得到了目标函数的最优值。

设某线性规划问题，存在一个对偶问题的可行基B，不妨设

$$B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$$

§5. 对偶单纯形法

设某线性规划问题，存在一个对偶问题的可行基B，不妨设　　B＝（P 1，P 2，…，Pm）

C_B	基	b	x_1		x_r		x_m	x_{m+1}		x_s		x_n
c_1	x_1	$\bar{b}_1$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1s}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_r	x_r	$\bar{b}_r$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$a_{r,m+1}$	$\cdots$	a_{rs}	$\cdots$	a_{rn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	$\bar{b}_m$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{ms}	$\cdots$	a_{mn}
	$c_j - z_j$		0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - z_{m+1}$	$\cdots$	$c_s - z_s$	$\cdots$	$c_n - z_n$

其中 $c_j - z_j \le 0$

§5．对偶单纯形法

对偶单纯形的算法步骤：

1．确定换出变量

$$\bar{b}_r = \min_i \{ \bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0 \}$$ ，x_r为换出变量

2．确定换入变量

$$\theta = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \middle| a_{rj} < 0 \right\} = \frac{c_s - z_s}{a_{rs}}$$

x_s —— 换入变量 a_{rs} —— 主元素

§5．对偶单纯形法

对偶单纯形的算法步骤：

$$(c_j - z_j)' = (c_j - z_j) - \frac{a_{rj}}{a_{rs}}(c_s - z_s) = a_{rj}\left[\frac{c_j - z_j}{a_{rj}} - \frac{c_s - z_s}{a_{rs}}\right] \le 0$$

3．用换入变量替换换出变量，得到一个新的基。

§5．对偶单纯形法

解的判别：

如果存在$b_r<0$，并且对$j=1,\ldots,n$，有$a_{rj}\geq 0$，则原问题无解，对偶问题有无界解。

$$x_r + a_{r,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r$$

§5. 对偶单纯形法

P76 【例5】

表 2－7

	$c_j \rightarrow$		-12	-16	-15	0	0
C_B	基	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_4	-2	-2	-4	0	1	0
0	y_5	-3	-2	0	[-5]	0	1
	$c_j - z_j$		-12	-16	-15	0	0
0	y_4	-2	[-2]	-4	0	1	0
-15	y_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$
	$c_j - z_j$		-6	-16	0	0	-3
-12	y_1	1	1	2	0	$-\frac{1}{2}$	0
-15	y_3	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
	$c_j - z_j$		0	-4	0	-3	-3

§6．灵敏度分析

灵敏度分析：当a_{ij}，b_i，c_j这些参数中的一个或几个发生变化时，问题的最优解会有什么变化；或者这些参数在一个多大范围内变化时，问题的最优解不变。

1．分析c_j变化的影响

2．分析b_i变化的影响

3．增加一个变量的分析

4．增加一个约束条件的分析

$$\Delta b^* = B^{-1}\Delta b \qquad \Delta P_i^* = B^{-1}\Delta P_i$$

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

§6．灵敏度分析

6-1 分析c_j 变化的影响

			$2+\lambda_1$	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+\lambda_1$	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$
0	x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$
3	x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
	c_j-z_j		0	0	$-1-\frac{1}{2}\lambda_1$	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda_1$

§6．灵敏度分析

6-2 分析b ¡变化的影响

P80 例7

$$\Delta b^* = B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -2 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b^* + \Delta b^* = \begin{bmatrix} 3 + \frac{1}{2}\lambda_1 \\ 4 - 2\lambda_1 \\ 3 \end{bmatrix} \geqslant 0$$

§6．灵敏度分析

6-3 增加一个变量的分析

P81 例8

表 2－11

			2	3	0	0	0	4
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$	0
0	x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$	[4]
3	x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	1
	c_j-z_j		0	0	-1	0	$-\frac{1}{5}$	1

§6. 灵敏度分析

6-4 增加一个约束条件的分析

表 2－13

			2	3	0	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	(1)
0	x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$	0	(2)
3	x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	(3)
0	x_6	14	3	2	0	0	0	1	(4)
	c_j-z_j		0	0	-1	0	$-\frac{1}{5}$	0	

§6．灵敏度分析

表 2－14

			2	3	0	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	(1)′
0	x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$	0	(2)′
3	x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	(3)′
0	x_6	-1	0	0	$\left[-\frac{3}{2}\right]$	0	0	1	(4)′
	c_j-z_j		0	0	-1	0	$-\frac{1}{5}$	0	

§7．参数线性规划

a_{ij}，b_i，c_j 等参数中某一个参数连续变化时，使最优解发生变化的各临界点的值。

P84 【例10】

$$\max z(\lambda) = (2+2\lambda)x1 + (3+\lambda)x2$$

$$\begin{cases} 2x1 + 2x2 \le 12 \\ 4x1 \le 16 \\ 5x2 \le 15 \\ x1,\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

§7. 参数线性规划

表 2-3

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		原问题变量		原问题松弛变量		
x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$
x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$
x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$
z_j-c_j		0	0	1	0	$\frac{1}{5}$
		对偶问题剩余变量		对偶问题变量		
		y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

表 2-16

			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$2+2\lambda$	x_1	3	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{5}$	
0	x_4	4	0	0	-2	1	$\frac{4}{5}$	$-1\leqslant\lambda\leqslant1$
$3+\lambda$	x_2	3	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	
	c_j-z_j		0	0	$-1-\lambda$	0	$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\lambda$	

§7. 参数线性规划

表 2－17

			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	2	0	1	0	$-\frac{2}{5}$	
0	x_4	16	4	0	0	1	0	$-3\leqslant\lambda\leqslant-1$
$3+\lambda$	x_2	3	0	1	0	0	$\left[\frac{1}{5}\right]$	
	c_j-z_j		$2+2\lambda$	0	0	0	$-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\lambda$	
0	x_3	12	2	2	1	0	0	
0	x_4	16	4	0	0	1	0	$\lambda\leqslant-3$
0	x_5	15	0	5	0	0	1	
	c_j-z_j		$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0	

§7. 参数线性规划

表 2-18

			$2+2\lambda$	$3+\lambda$	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$2+2\lambda$	x_1	4	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	
0	x_5	5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	1	$\lambda \geqslant 1$
$3+\lambda$	x_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	
	$c_j - z_j$		0	0	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\lambda$	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda$	0	