第八章

离散时间系统的最优控制

第八章 离散系统的最优控制

8.1 解离散时间无约束最优控制问题的变分法

（由于变分法的结果是最大值原理的特殊情形，不细讲）

8.2 离散的最大值原理

8.3 离散的线性二次型问题

- 8.3.1 离散线性二次型问题的解
- 8.3.2 解离散线性二次型问题的MATLAB程序

离散系统的最优控制的重要性

- 1.许多实际问题本身就是离散的：

  如交通管制问题、河流污染控制

- 2.计算机控制

- 3.连续最优控制难以求解的两点边值问题，可以化为易于用计算机求解的离散化的两点边值问题

§8.2　离散的最大值原理

- 定理8.1　　设离散时间系统的状态方程为：

$$x(k+1)=f(x(k),u(k),k)\quad x(0)=x_0\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

目标函数为

$$J=\theta(x(N),N)+\sum_{k=0}^{N-1}L(x(k),u(k),k)$$

求控制 $u(k)\in U,\quad k=0,1,\cdots,N-1$ 使 J 最小（最大）。

假设 $f(\bullet),\theta(\bullet)$ 和 $\mathrm{L}(\bullet)$ 都是其自变量 $x(k)$ 的连续可微函数,

集合 $\{f(x(k),u(k),k)|u\in U\}$ 对 $k=0,1,\cdots,N-1$ 和 $u\in U$ 是凸集.

设 N 固定，末端状态 $x(N)$ 自由

若 $u^*(k)$ 是使性能指标极小的最优控制序列，$x^*(k)$ 为相应的最优轨迹序列，则必存在 n 维向量序列 $\lambda(k)$，使得最优解满足如下条件：

（1）$x(k)$ 和 $\lambda(k)$ 满足下列差分方程（正则方程组）

$$\begin{cases} x(k+1) = \dfrac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} = f(x(k), u(k), k), \\ \lambda(k) = \dfrac{\partial H(k)}{\partial x(k)} \end{cases}$$

其中，离散哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(k) &\overset{\Delta}{=} H(x(k), u(k), \lambda(k), k) \\ &= L(x(k), u(k), k) + \lambda^T(k+1) f(x(k), u(k), k) \end{aligned}$$

（2）边界条件与横截条件

$$x(0) = x_0\ , \qquad \lambda(N) = \frac{\partial \theta(x(N), N)}{\partial x(N)}$$

（3）离散哈密顿函数对最优控制序列取最小值

$$H^*(k) = \min_{u(k) \in U} H(k)$$

若控制变量 $u(k)$ 不受约束，则极值条件为 $\dfrac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = 0$

离散的最大值原理应用举例

【例8-1】 设离散系统的状态方程为

$$x(k+1)=1.3x(k)-0.3u(k) \qquad x(0)=5$$

求 $u(k)$ 使 $\frac{1}{2}\le u(k)\le 1$, 并使目标函数

$$J=\sum_{k=0}^{3}0.25[x(k)+u(k)]$$ 最小。

解 该问题的哈密顿函数为

$$H_k=0.25[x(k)+u(k)]+\lambda(k+1)[1.3x(k)-0.3u(k)]$$
$$=0.25x(k)+1.3\lambda(k+1)x(k)+[0.25-0.3\lambda(k+1)]u(k)$$

由最大值原理，$u^*(k)$ 应在约束条件 $1/2 \le u(k) \le 1$ 之下使 H_k 达最小值，于是

$$u^*(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{当}0.25-0.3\lambda(k+1)>0\text{时}\\ 1 & \text{当}0.25-0.3\lambda(k+1)<0\text{时}\end{cases}$$

协状态方程为

$$\lambda(k)=0.25+1.3\lambda(k+1)$$

边界条件是$\lambda(4)=0.$ 由此可逐次解出：

$$\lambda(3)=0.25, \lambda(2)=0.575, \lambda(1)=0.9975.$$

由于

$$0.25-0.3\lambda(1)<0,\quad 0.25-0.3\lambda(2)>0,\quad 0.25-0.3\lambda(3)>0,\quad 0.25-0.3\lambda(4)>0,$$

最优控制序列为

$$u^*(0)=1,\quad u^*(1)=1/2,\quad u^*(2)=1/2, u^*(3)=1/2$$

【例8-2】 设有若干台机器，每台机器可以做两种工作，

如果用 d 台机器做第一种工作可获利润 $3d$ 元，机器的损坏率为 $2/3$；

如果用 d 台机器做第二种工作，可获利润 $2.5d$ 元，机器的损坏率为 $1/3$。现考虑三年的生产周期，问如何安排生产计划可获得最大利润。

解 设第 k 年的机器总台数为 $x(k)$，第 k 年分配做第一种工作的机器为 $u(k)$台，显然满足不等式 $0 \le u(k) \le x(k)$，这是约束条件。描述这个系统的状态方程是：

$$x(k+1) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{2}{3}[x(k) - u(k)] \Rightarrow x(k+1) = \frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k)$$

目标函数为

$$J = \sum_{k=0}^{2}[3u(k) + 2.5(x(k) - u(k))] = \sum_{k=0}^{2}[2.5x(k) + 0.5u(k)]$$

问题是求 $u^*(0), u^*(1), u^*(2)$ 使满足约束条件 $0 \le u(k) \le x(k)$，并使 J 最大。

该问题的哈密顿函数为

$$H_k = 2.5x(k) + 0.5u(k) + \lambda(k+1)\left[\frac{2}{3}x(k) - \frac{1}{3}u(k)\right]$$

$$= 2.5x(k) + \frac{2}{3}\lambda(k+1)x(k) + \left[0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1)\right]u(k)$$

由 $H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u^*(k), k) = \max_{u \in U} H_k(x^*(k), \lambda^*(k+1), u(k), k)$

$$u^* = \begin{cases} x(k) & \text{当} 0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) > 0 \text{时} \\ 0 & \text{当} 0.5 - \frac{1}{3}\lambda(k+1) < 0 \text{时} \end{cases}$$

协状态方程和边界条件为

$$\lambda(k) = 2.5 + \frac{2}{3}\lambda(k+1) \qquad\qquad \lambda(3) = 0$$

由此可解出 $\lambda(2) = 2.5, \lambda(1) = \dfrac{12.5}{3}$，因此有

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(1) < 0 \qquad\qquad u^*(0) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(2) < 0 \qquad\qquad u^*(1) = 0$$

$$0.5 - \frac{1}{3}\lambda(3) > 0 \qquad\qquad u^*(2) = x(2)$$

由此得到最优生产计划为：前两年用全部机器做第二种工作，第三年将全部剩下的机器做第一种工作，这样获总利润最多。

§8.3　离散的线性二次型问题

- 8.3.1　　离散的线性二次型问题的解

设系统的状态方程是线性的：

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \qquad x(0) = x_0 \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

目标函数是 x 和 u 的二次型：

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Fx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)]$$

假设 $F, Q(k)$ ——对称半正定矩阵　$R(k)$——对称正定矩阵

问题是求 $u(k)$ 使 J 最小。

首先写出该问题的哈密顿函数

$$H(k)=\frac{1}{2}x^T(k)Q(k)x(k)+\frac{1}{2}u^T(k)R(k)u(k)+\lambda^T(k+1)[A(k)x(k)+B(k)u(k)]$$

由必要条件

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=0 \quad \Rightarrow \quad R(k)u(k)+B^T(k)\lambda(k+1)=0$$

由于$R(k)$是正定矩阵，由上式可解出

$$u(k)=-R^{-1}(k)B^T(k)\lambda(k+1)$$

协状态方程及其边界条件为

$$\lambda(k)=Q(k)x(k)+A^T(k)\lambda(k+1) \qquad \lambda(N)=Fx(N)$$

设 $\lambda(k) = P(k)x(k)$

代入状态方程和协状态方程得到

$$x(k+1) = A(k)x(k) - B(k)R^{-1}(k)B^{T}(k)P(k+1)x(k+1)$$

$$P(k)\boldsymbol{x}(k) = Q(k)\boldsymbol{x}(k) + A^{T}(k)P(k+1)\boldsymbol{x}(k+1)$$

由边界条件 $\lambda(N) = Fx(N)$ 又得到 $P(k)$ 满足的边界条件

$$P(N) = F$$

通过推导得到最优控制

$$u(k) = -\{R(k)[I + R^{-1}(k)B^{T}(k)P(k+1)B(k)]\}^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

$$= -[R(k) + B^{T}(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

$$P(k) = Q(k) + A^{T}(k)P(k+1)A(k) - A^{T}(k)P(k+1)B(k)[R(k)$$

$$+ B^{T}(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^{T}(k)P(k+1)A(k)$$

为了节省计算量，引进如下记号：

$$Z_1(k)=Q(k)+A^T(k)P(k+1)A(k)$$

$$Z_2(k)=B^T(k)P(k+1)A(k)$$

$$Z_3(k)=R(k)+B^T(k)P(k+1)B(k)$$

则

$$u(k)=-Z_3^{-1}(k)Z_2(k)\mathrm{x(k)}$$

$$P(k)=Z_1(k)-Z_2^T(k)Z_3^{-1}Z_2(k)$$

求最优控制的步骤

- **第1步** 令 $P(N)=F$
- **第2步** 对 $k=N-1$ 计算 $Z_1(k),Z_2(k),Z_3(k)$
- **第3步** 计算 $K(k)=-Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$
- **第4步** 计算 $P(k)=Z_1(k)-Z_2^T(k)Z_3^{-1}(k)Z_2(k)$
- **第5步** 对 $k=N-2,\cdots,0$ 重复第2至第4步
- **第6步** $u^*(k)=K(k)x(k)$ 即所求

【**例8-3**】设系统的状态方程为

$$x(k+1)=a(k)x(k)+b(k)u(k)$$

初始状态为 $x(0)=2$, 求$u(k), k=0,1,2$使

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2}[q(k)x^2(k)+r(k)u^2(k)]+\frac{1}{8}x^2(3)$$

最小，式中

$$a(0)=\frac{1}{2} \qquad b(0)=\frac{1}{6} \qquad q(0)=0 \qquad r(0)=1$$

$$a(1)=3 \qquad b(1)=\frac{1}{2} \qquad q(1)=12 \qquad r(1)=2$$

$$a(2)=4 \qquad b(2)=2 \qquad q(2)=2 \qquad r(2)=1$$

解　　按上述求解步骤，

第1步 令 $P(3)=\dfrac{1}{4}$

第2步 对 $k=2$

$$Z_1(2)=q(2)+a^2(2)P(3)=6 \qquad Z_2(2)=b(2)P(3)a(2)=2$$

$$Z_3(2)=r(2)+b^2(2)P(3)=2$$

第3步 计算 $K(2)=-Z_3^{-1}(2)Z_2(2)=-1$

第4步 计算 $P(2)=Z_1(2)-Z_2^2(2)Z_3^{-1}(2)=4$

第5步 对 $k=1,0$ 重复第2－4步，得到

$$K(1)=-2 \qquad K(0)=-\frac{3}{2}$$

第6步 所求最优控制为

$$u^*(0)=-\frac{3}{2}x(0) \qquad u^*(1)=-2x(1) \qquad u^*(2)=-x(2)$$

u^* 必是线性二次型问题的最优控制

定理8.2 控制向量

$$u(k) = -[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1} \cdot B^T(k)P(k+1)A(k)x(k)$$

是线性二次型问题的解，并且 J 的最小值为

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0)$$

式中 $P(k)$ 是式

$$P(k) = Q(k) + A^T(k)P(k+1)A(k) - A^T(k)P(k+1)B(k)[R(k) + B^T(k)P(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)P(k+1)A(k)$$

的解。

与连续的线性二次型问题类似，当 $A(k), B(k), Q(k), R(k)$ 都是常阵，Q、R 正定，(A, B) 能控。并且 $N = \infty$ 时，得到非时变控制器

$$u^* = -[R + B^T PB]^{-1} B^T PAx(k)$$

式中P是代数黎卡提方程的解

$$P = Q + A^T PA - A^T PB[R + B^T PB]^{-1} B^T PA$$

应用控制 u^* 时得到的闭环系统是渐近稳定的。

当Q半正定，$Q = C^T C, (C, A)$ 能观测时，以上结果仍成立。

P的递推解法

【例8-4】 已给定常线性系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1.5 & 1\\ -0.5 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(k) \qquad x(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 0.5\end{bmatrix}$$

求 u 使

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x^T(k)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(k)+u^2(k)\right]$$ 最小

解 取 $P_0=I$，由 P 的递推解法得

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5 & 1.5\\ 1.5 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0.25 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.0833 & 1.3166\\ 1.3166 & 0.8333\end{bmatrix}$$

继续迭代可得到（P_2，P_3的计算略）

$$P_4=P_5=\begin{bmatrix}2.2402 & 0.7900\\ 0.7900 & 0.5159\end{bmatrix}$$

将它取为P，代入解式u^*得到最优控制：

$$u^*(k)=[-0.5694 \quad -0.4514]x(k)$$

$$u^*=-[R+B^TPB]^{-1}B^TPAx(k)$$

▪8.3.2 解离散线性二次型问题的MATLAB程序

初始化A，B，Q， R，F

```
P(N)=F;
for k=N-1:0
        Z1(k)=Q(k)+A(k)'*P(k+1)*A(k);
        Z2(k)=B(k)'*P(k+1)*A(k);
        Z3(k)=R(k)+B(k)'*P(k+1)*B(k);
        K(k)=-inv(Z3(k))*Z2(k);
        P(k)=Z1(k)-Z2(k)'*inv(Z3(k))*Z2(k);
end
```