

信号与系统

南开大学 人工智能学院
机器人与信息自动化研究所

张建勋

Email: Zhangjx@nankai.edu.cn

Tel: 022-23505706-805

信号与系统

本科生专业基础课

数字信号处理

硕士研究生专业基础课

信号与系统分析、信号处理具有丰富、悠久的历史，是一门横跨多个学科的技术。

信号分析与处理技术的发展要素：理论研究的成果、实际应用的需求、功能实现技术的进步，三者之间相互促进，紧密结合。

应用范围日益扩大，对信号与系统分析、信号处理高性能的追求，催生了信号处理的各种高级算法，促进了信号处理系统的理论、技术与器件（软件、硬件）的发展。

教学用书与参考书

A. V. Oppenheim, 《信号与系统》, 西安交大出版社, 刘树棠 等译

任何一本《信号与系统》的专著, 编著, 教科书都可以当做本课程的教材。

应用领域:

▶ 通讯领域

信号分析与处理技术、微电子技术、光纤通讯技术、无线通讯技术为通讯领域带来了革命性的变化。

▶ 控制领域

对控制系统的分析与设计, 信号的分析与处理技术的数字化, 提高了系统的控制质量和可靠性。

▶ 社会经济领域

大量离散数据(经济数据)的积累和应用, 对社会、经济系统的运行情况进行分析、建模、预测等都成为了现实。

第一章 信号与系统分析

本章引入信号与系统的数学描述与表示方法，用数学方法阐述隐含在信号与系统分析之中的基本概念，从而建立起分析体系。使我们对信号与系统的性质和表示方法有一个深入而直观的理解。

§ 1 信号

- “信号” 广泛存在于环境中；

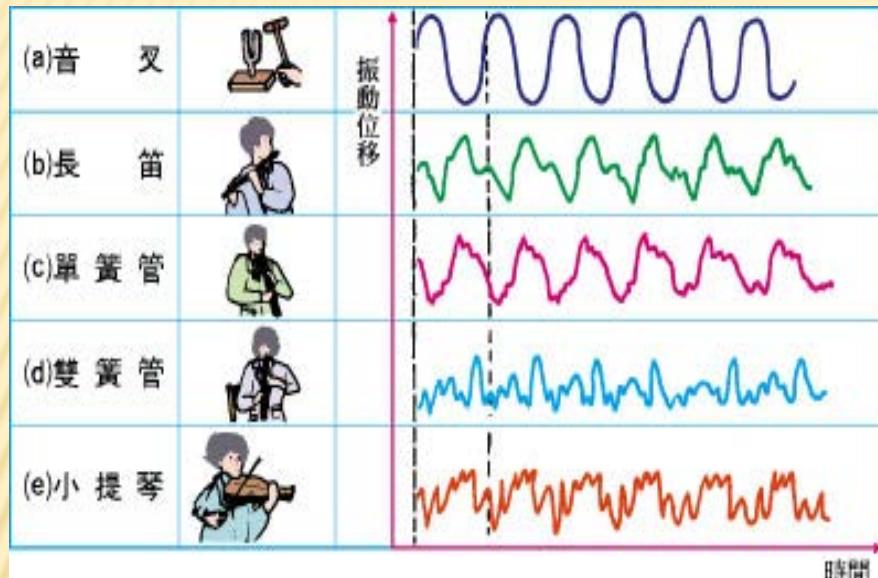
在我们的周围存在着各种信号，我们听到的，看到的，嗅到的，感觉到的各种现象，都是我们接收到的信号。

- “信号” 以各种形式存在着；

生活中接触到的声音、光亮、色彩等等，物理系统中的温度、压力、电压、作用力等等都是信号的表现形式。

- “信号” 包括的极为广泛。

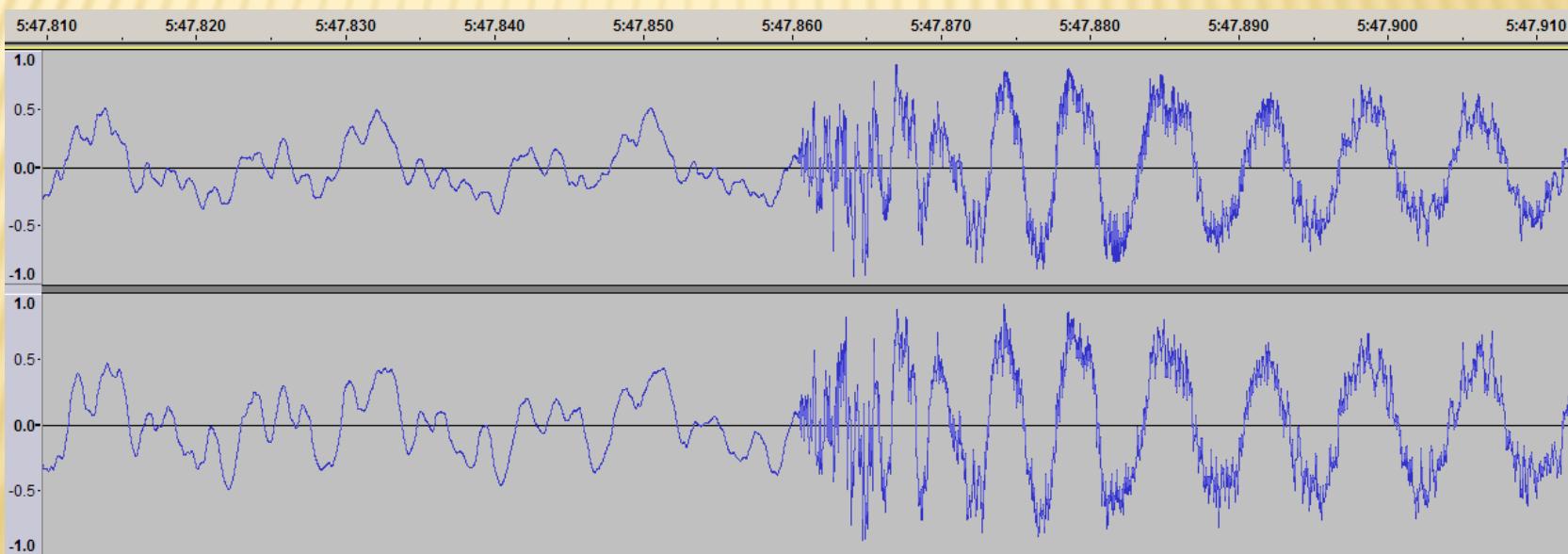
形形色色的信号存在于社会的各个角落，充满我们的日常生活和工作环境中，我们也在与各种信号进行交互。



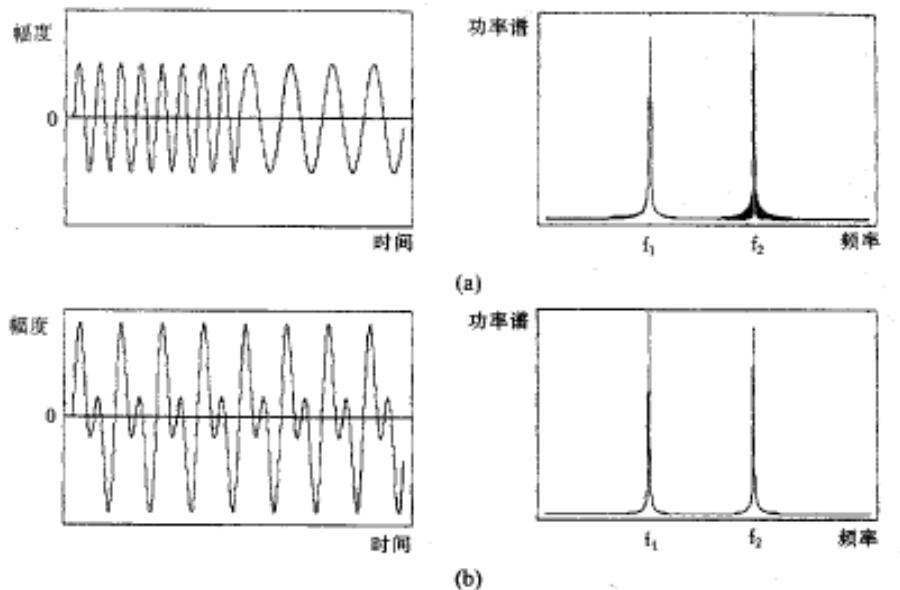
乐器信号



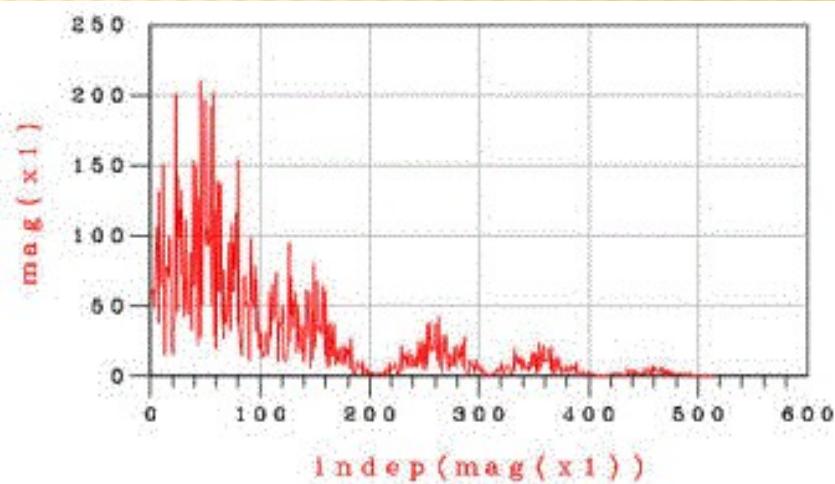
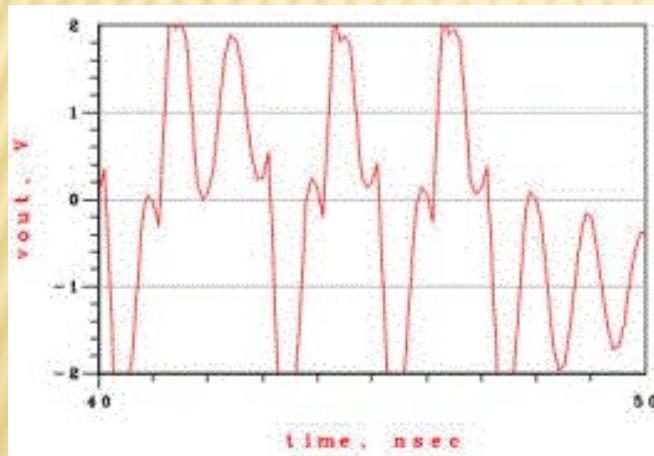
实时声音波形



记录下的信号波形



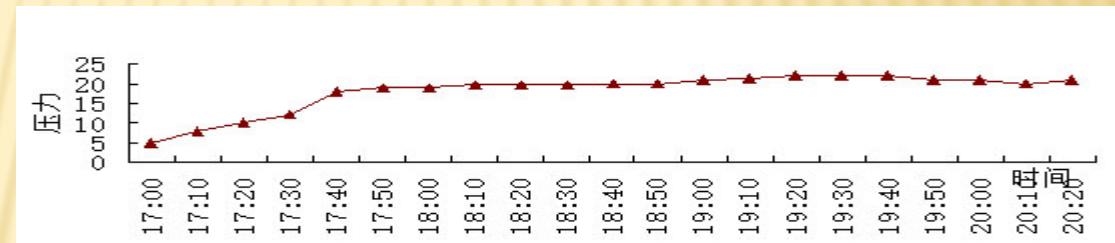
信号波形与频谱



在数学上，信号可以表示为一个或多个变量的函数。

单变量信号：压力随时间的变化（记录曲线）

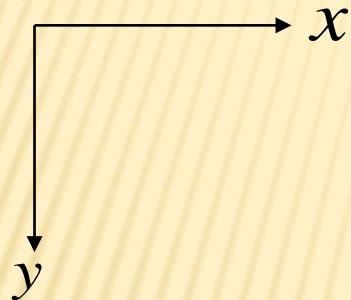
$$P(t)$$



正弦信号： $x(t) = \sin \omega t$

一般情况下，表示信号函数的自变量为时间 t 或 n 。

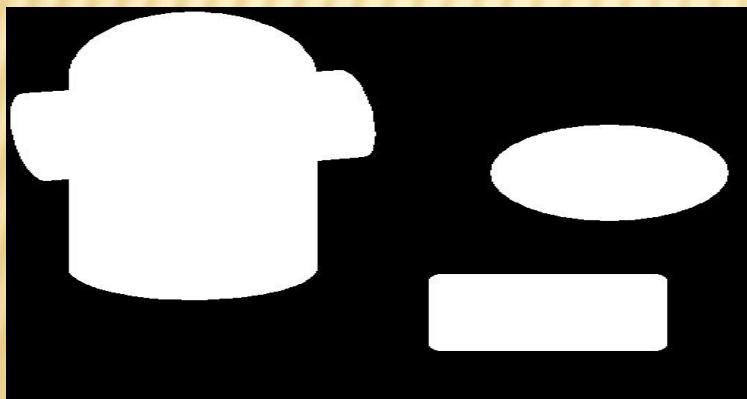
多变量 (图像) 信号:



$$\{r(x, y), g(x, y), b(x, y)\}$$

$$g(x, y)$$

$$g(x, y) = 0 \text{ or } 1$$



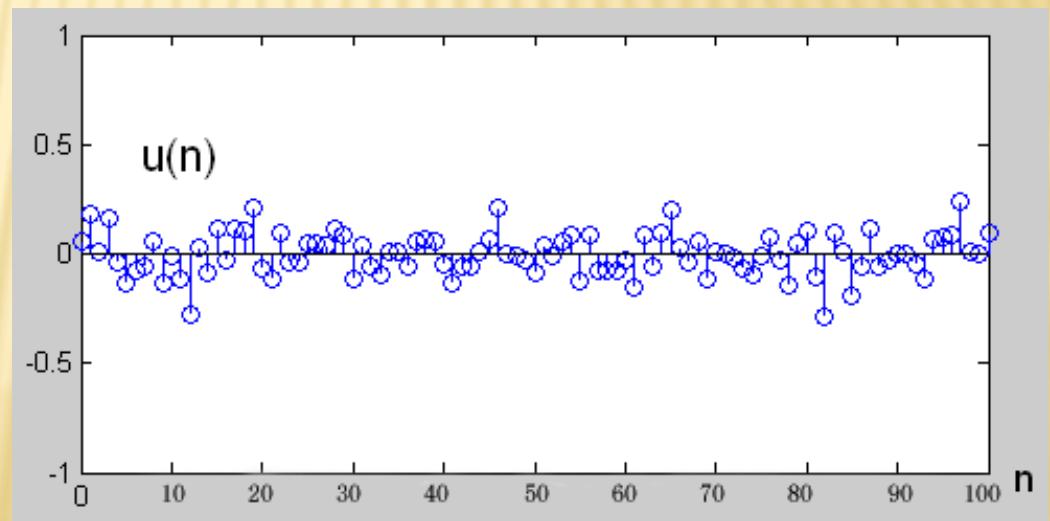
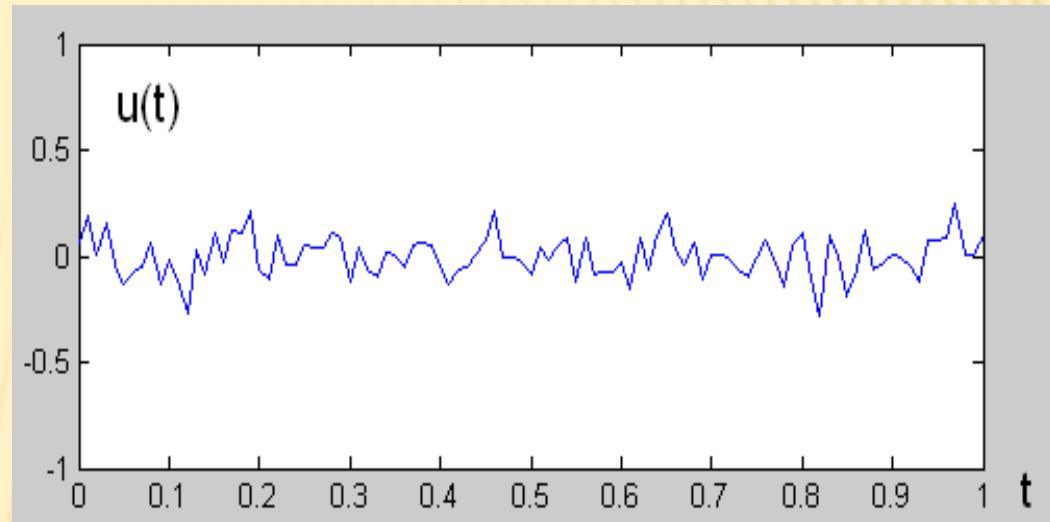
两种基本类型的信号：

连续时间信号：

时间轴上处处有定义，能够用一条连续曲线表示。

离散时间信号：

时间轴上只有整数点有定义，用一序列强度不同的脉冲表示。



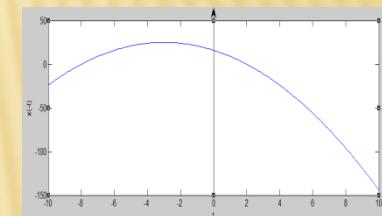
§ 2 自变量的变换

在对信号进行分析时，要对函数（信号）的自变量进行各种变换和计算。

轴对称变换：

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$

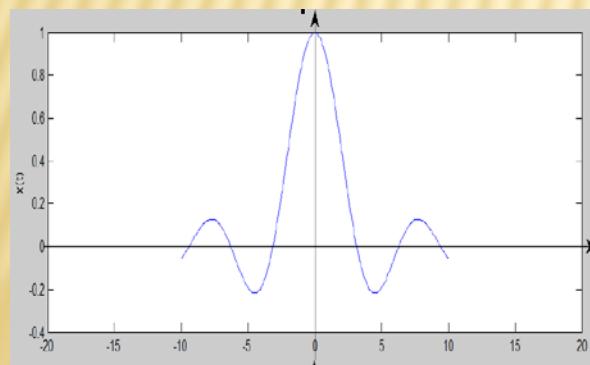
$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



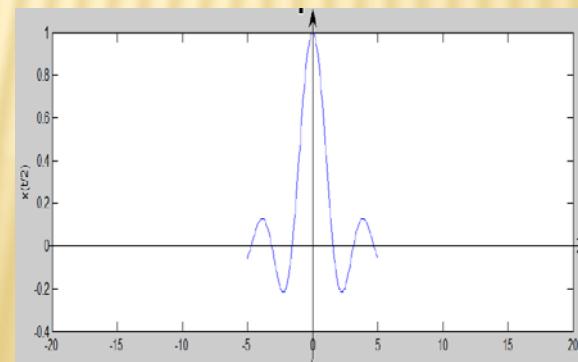
自变量尺度变换： $x(t) \rightarrow x(at)$

$$x(n) \rightarrow x(an)$$

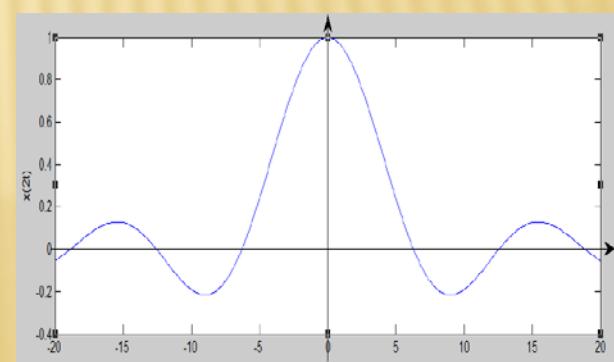
$x(t)$

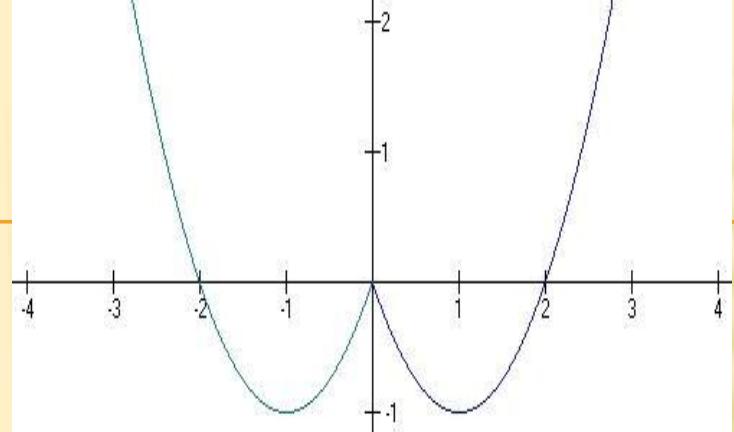


$x(2t)$



$x\left(\frac{t}{2}\right)$

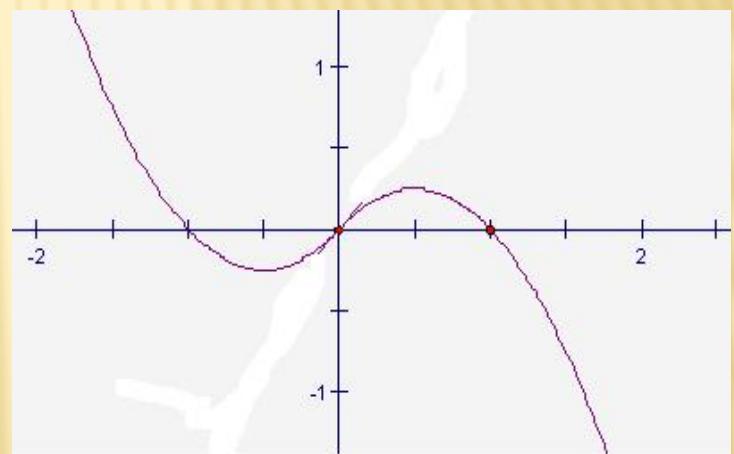




偶信号： $x(t) = x(-t)$

奇信号： $x(t) = -x(-t)$

任何一个信号可以由一个偶函数与一个奇函数相加组成。

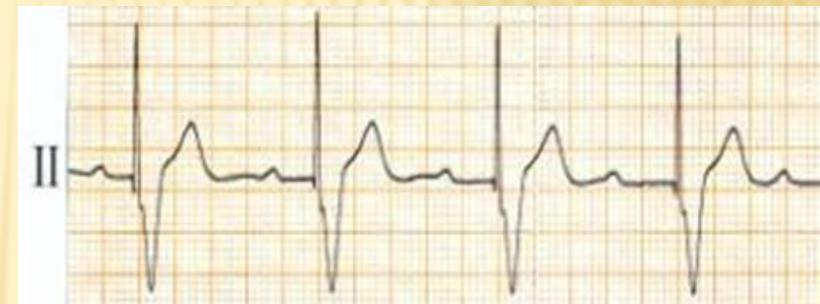
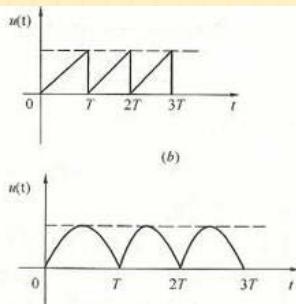
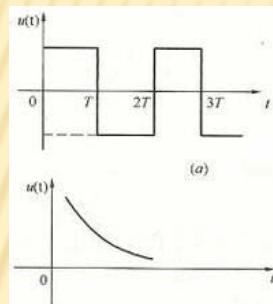
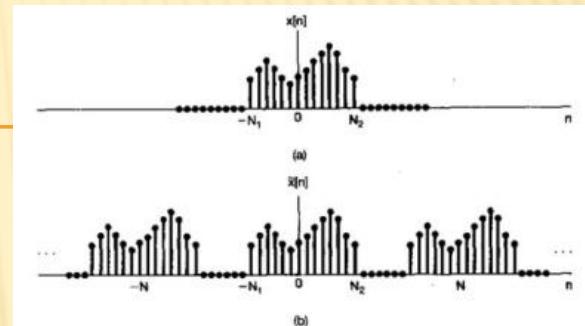
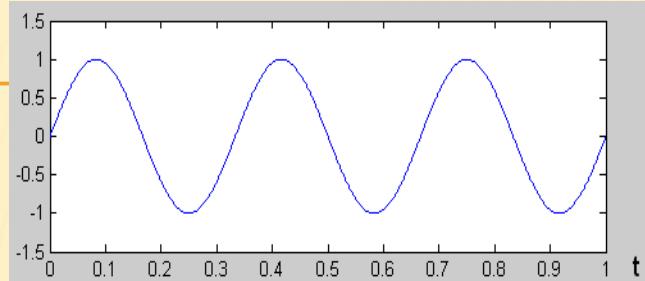


$$x(t) = \text{Er}\{x(t)\} + \text{Od}\{x(t)\}$$

$$\text{Er}\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

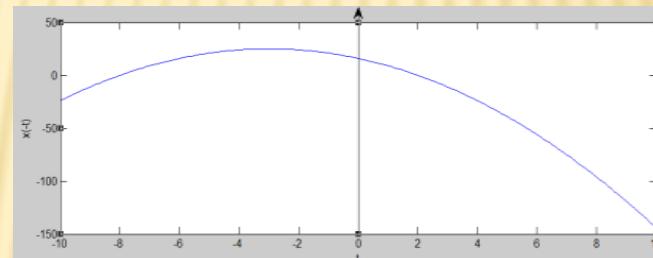
$$\text{Od}\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

周期信号：

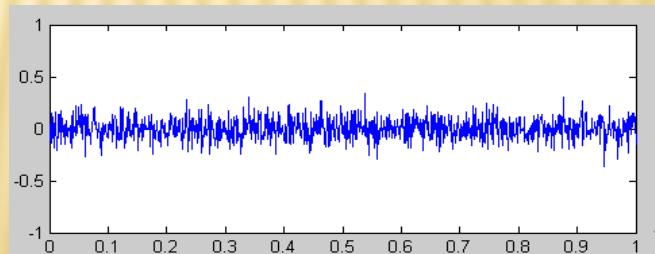


准周期信号

非周期信号：



随机信号：



§ 3 基本连续时间信号

几种重要的函数说明

1. 连续时间复指数信号

$$x(t) = c \cdot e^{at} \quad a, c \text{ 可以是复数。}$$

(1). a, c 是实数时: $a > 0$

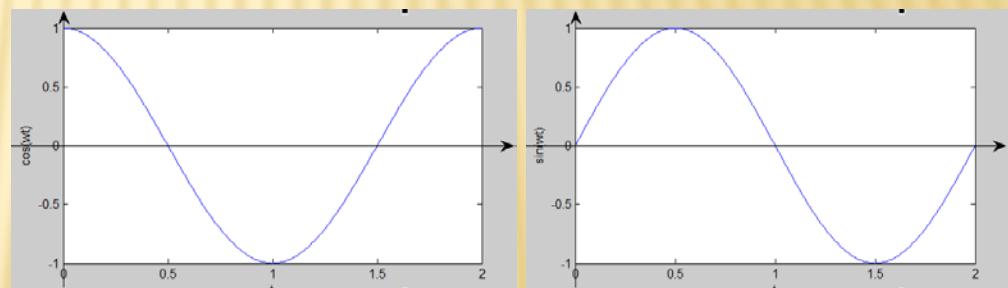
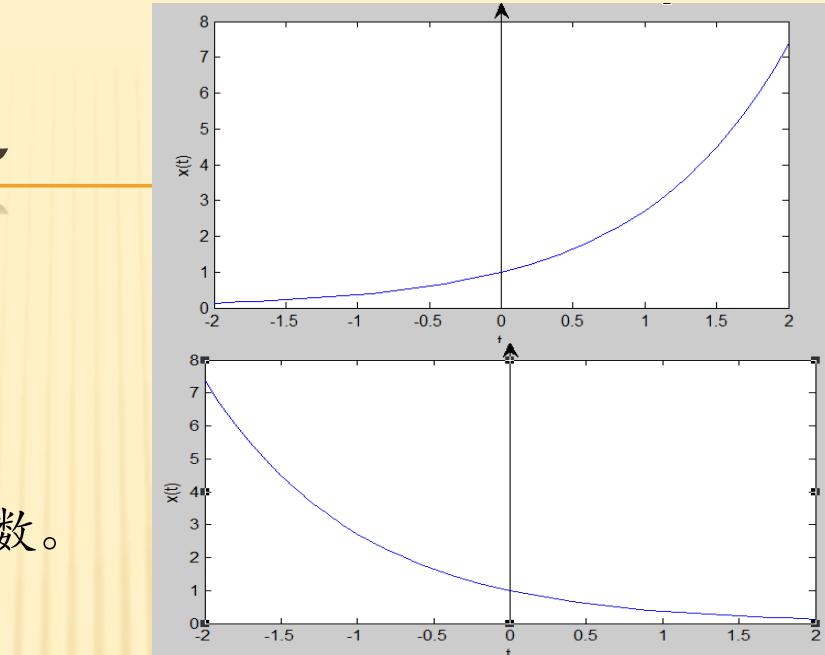
$$a < 0$$

$$a = 0, x(t) = c$$

(2). a 是纯虚数时:

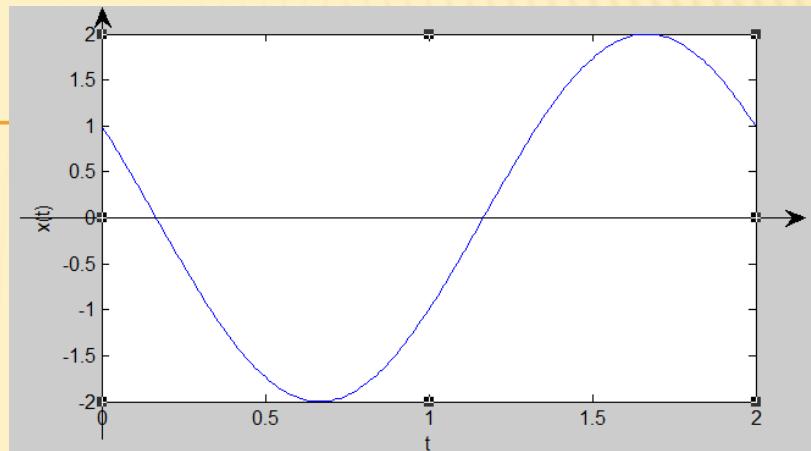
$$a = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c = 1, \quad x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

ω_0 : 基波频率。



2. 连续时间正弦信号

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



欧拉方程：

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$A = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}$$

基波与谐波：

$$x(t) = A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$x(t) = \frac{A}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t)$$

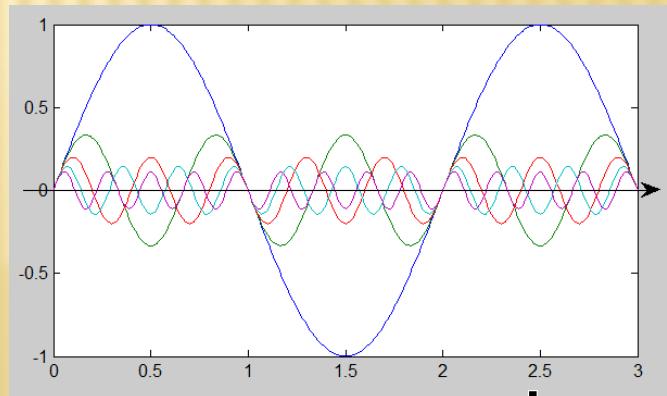
$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$$

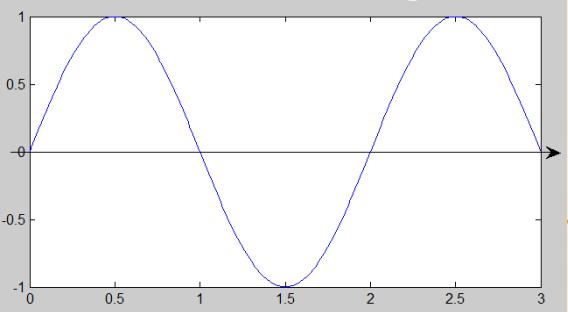
$$x_3(t) = \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t)$$

$$x_5(t) = \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t)$$

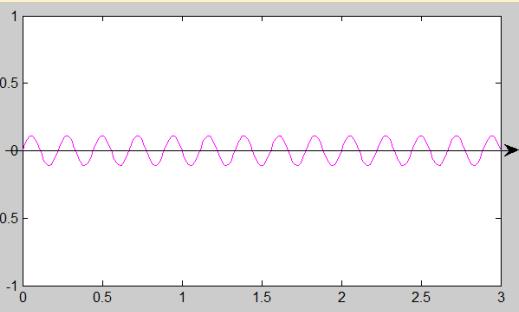
$$x_7(t) = \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t)$$

$$x_9(t) = \frac{1}{9} \sin(9\omega_0 t)$$

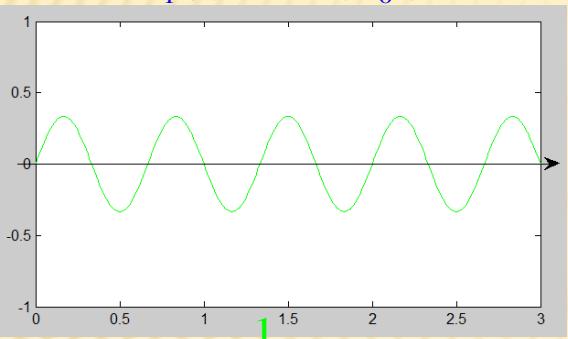




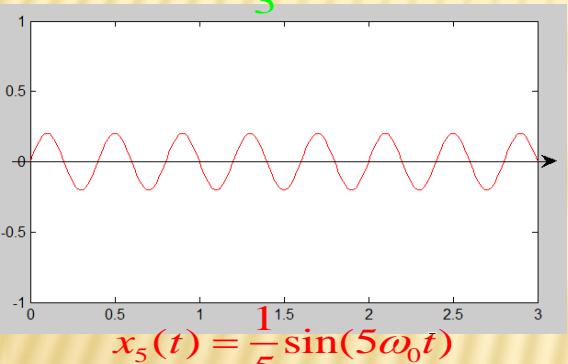
$$x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$$



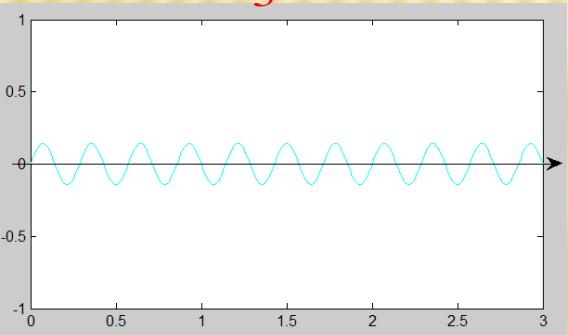
$$x_9(t) = \frac{1}{9} \sin(9\omega_0 t)$$



$$x_3(t) = \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t)$$

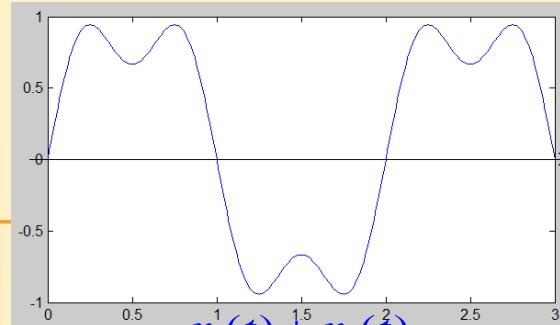


$$x_5(t) = \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t)$$

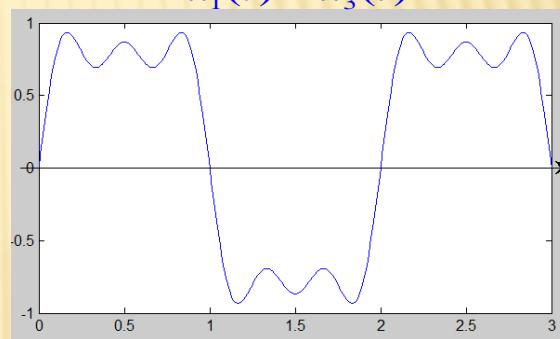


$$x_7(t) = \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t)$$

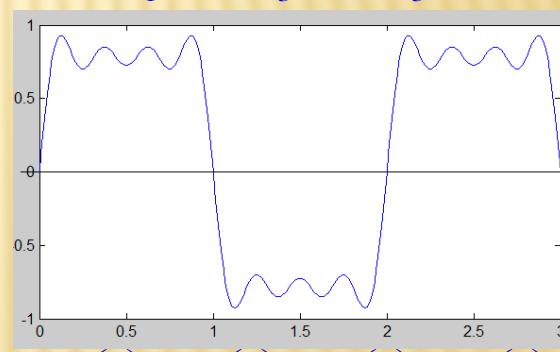
基波与各级高次谐波相叠加，可以合成出各种（周期性）波形。



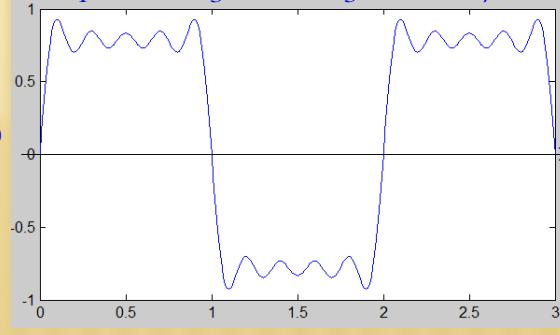
$$x_1(t) + x_3(t)$$



$$x_1(t) + x_3(t) + x_5(t)$$



$$x_1(t) + x_3(t) + x_5(t) + x_7(t)$$

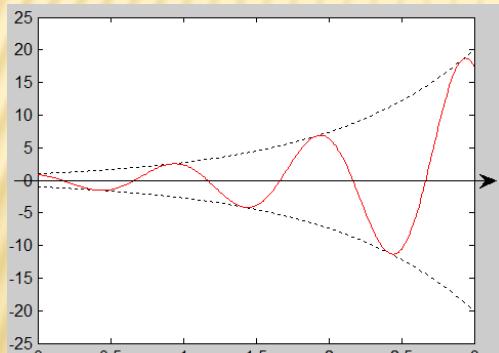


3. 一般复指数信号

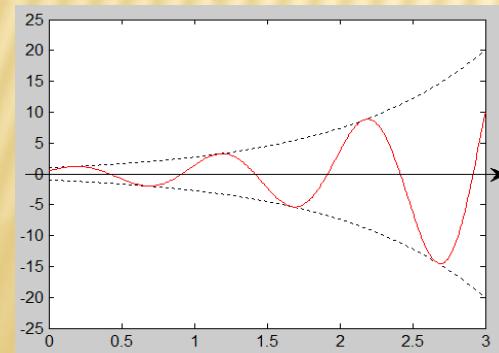
$$x(t) = c \cdot e^{at} \quad c = |c| \cdot e^{j\theta} \quad a = r + j\omega_0$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c \cdot e^{at} = |c| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{(r+j\omega_0)t} \\ &= |c| \cdot e^{rt} \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\ &= |c| \cdot e^{rt} \cdot [\cos(\omega_0 t + \theta) + j \sin(\omega_0 t + \theta)] \end{aligned}$$

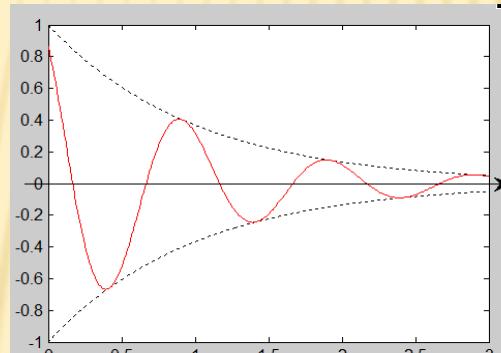
$r > 0$ Re



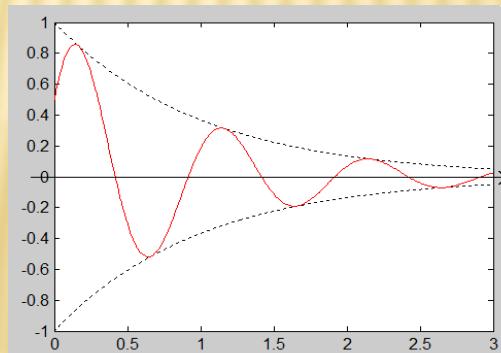
$r > 0$ Im



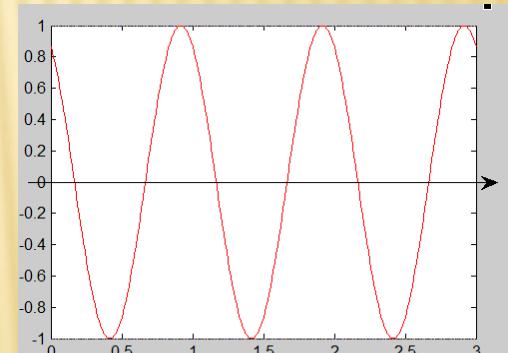
$r < 0$ Re



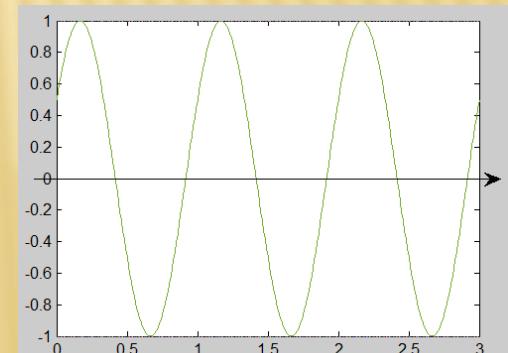
$r < 0$ Im



$r = 0$ Re



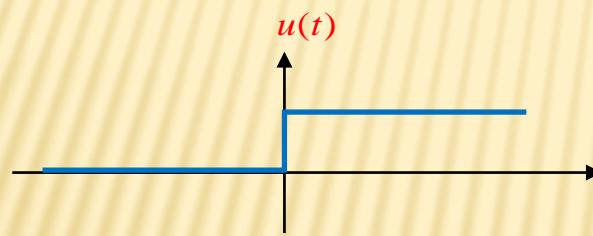
$r = 0$ Im



4. 连续时间阶跃与脉冲信号

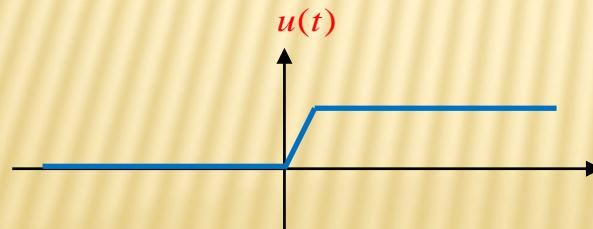
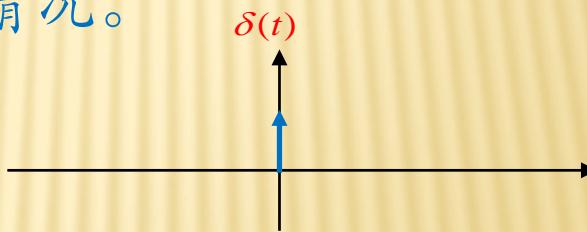
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) \cdot dt$$

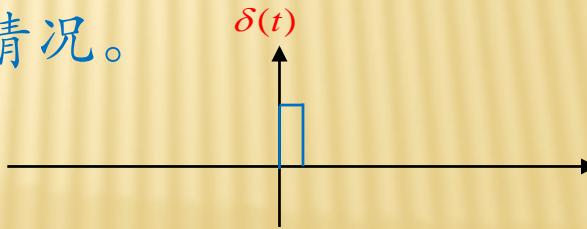


$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

理想情况。



实际情况。



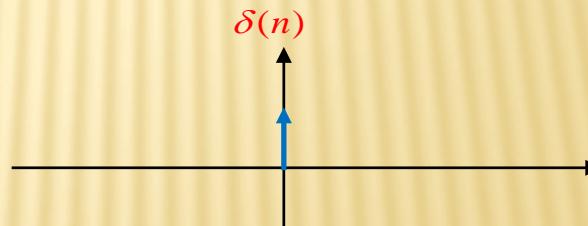
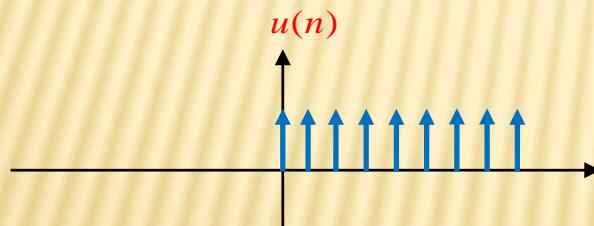
§ 4 基本离散时间信号

1. 离散时间的单位阶跃与单位脉冲信号

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$u(n) = \sum_{-\infty}^n \delta(n)$$

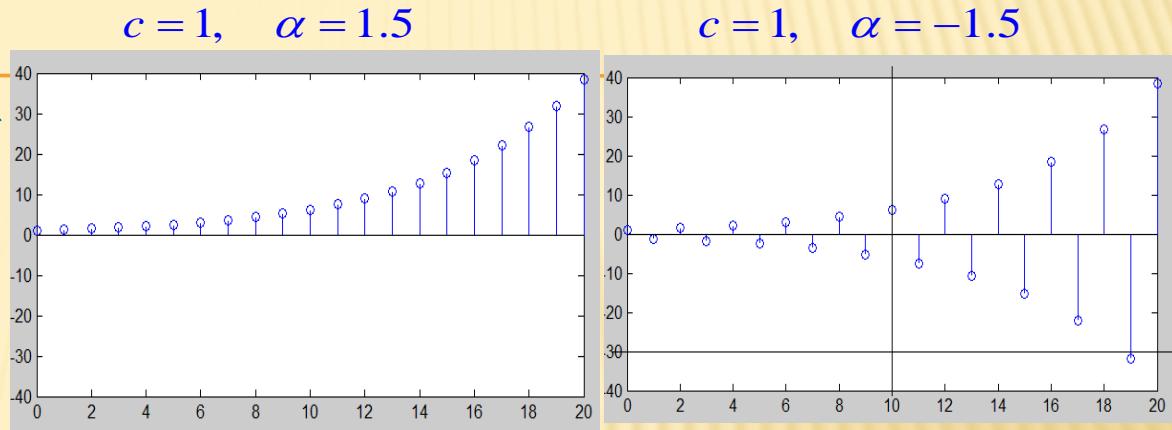
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$



2. 离散时间复指数信号

$$x(n) = c \cdot \alpha^n, \quad \alpha = e^\beta$$

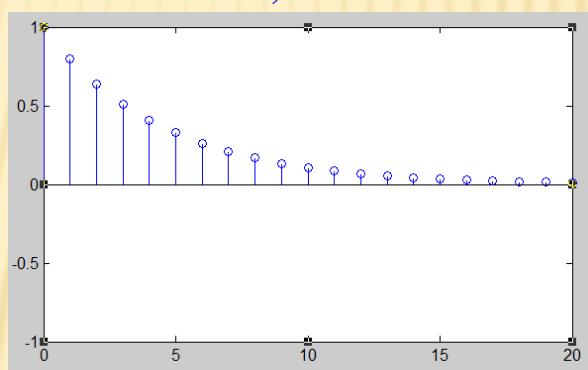
$$x(n) = c \cdot e^{\beta n}$$



(1). c 是实数时: $\alpha > 1$

$$\alpha < 1$$

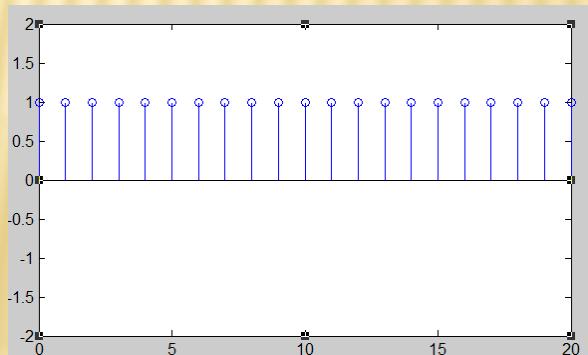
$$\alpha = 1$$



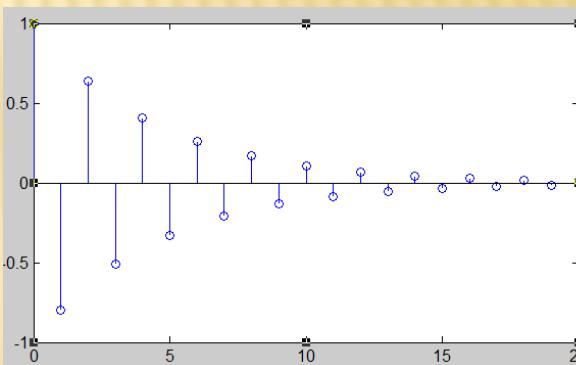
(2). c 是实数时: $\alpha > -1$

$$\alpha < -1$$

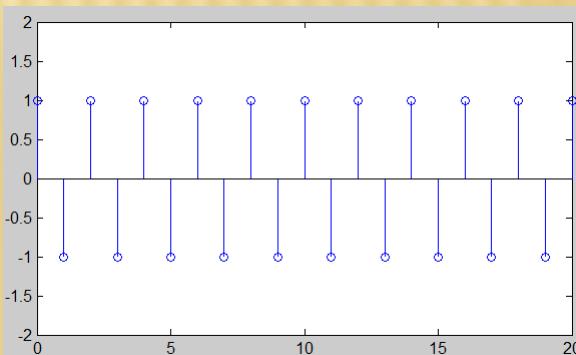
$$\alpha = -1$$



$c = 1, \alpha = -0.8$



$c = 1, \alpha = -1$



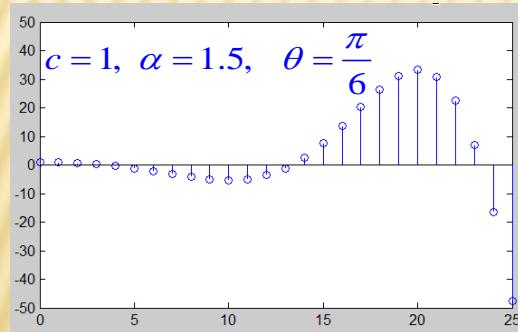
(3). c, β 是复数时:

$$x(n) = c \cdot e^{\beta n}, \quad c = |c| \cdot e^{j\theta}, \quad e^\beta = |\alpha| \cdot e^{j\Omega_0}$$

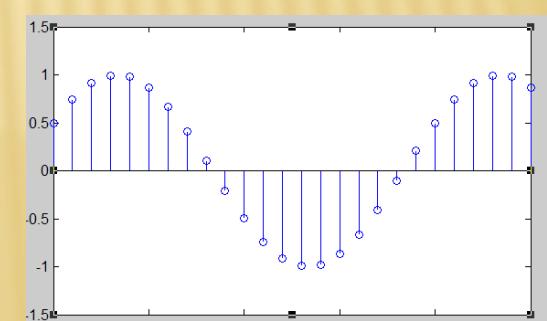
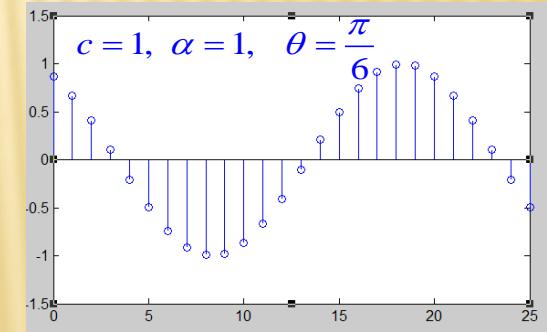
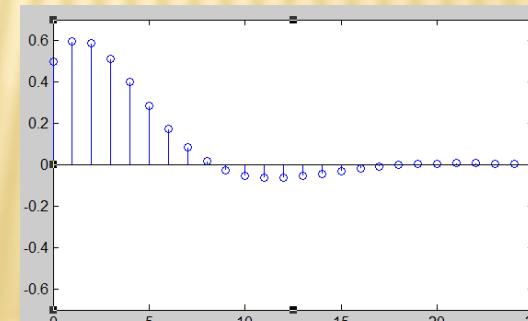
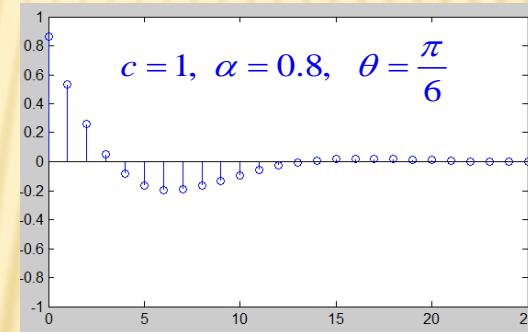
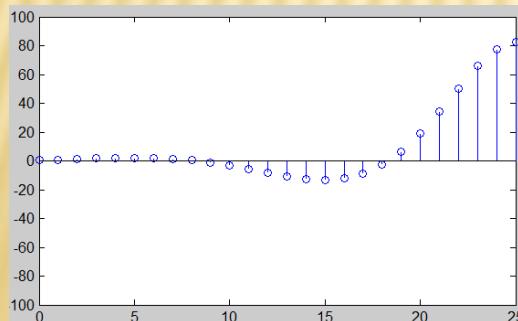
$$\alpha^n = e^{\beta n} = e^{j\Omega_0 n}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= c \cdot \alpha^n = |c| \cdot e^{j\theta} \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j\Omega_0 n} \\ &= |c| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j(\Omega_0 n + \theta)} \\ &= |c| \cdot |\alpha|^n \cdot [\cos(\Omega_0 n + \theta) + j \sin(\Omega_0 n + \theta)] \end{aligned}$$

Real



Image



§ 5 系统

系统是产生信号，对信号进行变换（计算、处理）的装置或过程。

一个系统必须要有至少一个输入和一个输出，系统对输入信号进行某种变换（计算、处理）后，得到该输出信号。

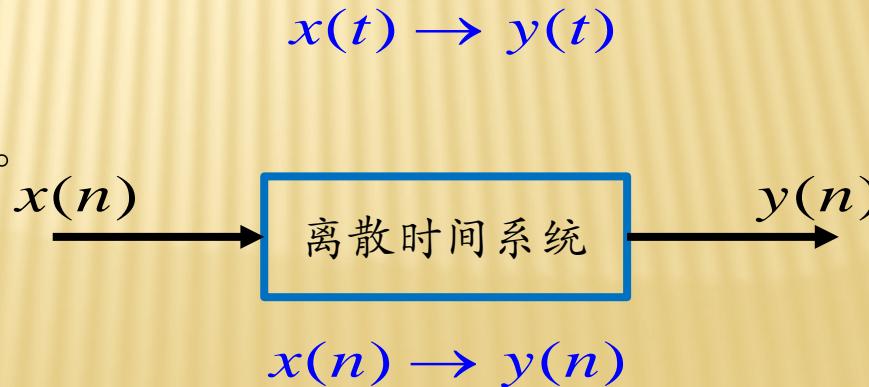
连续时间系统：



输入输出都是连续时间信号。

离散时间系统：

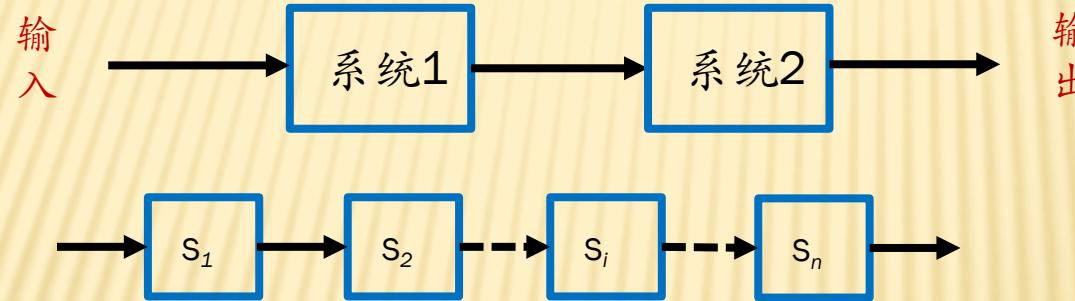
输入输出都是离散时间信号。



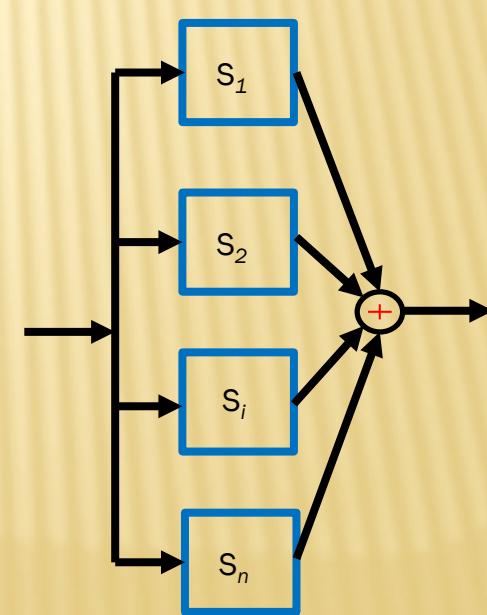
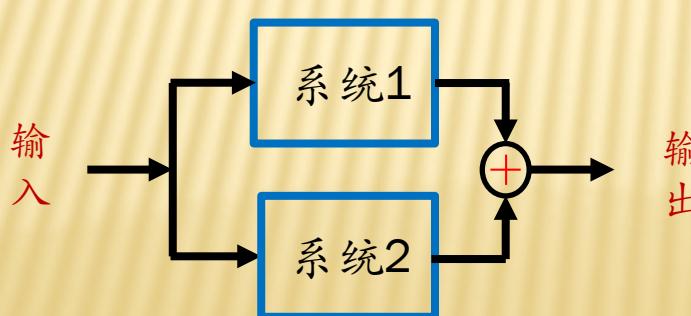
方框图表示

系统与子系统之间的关系：

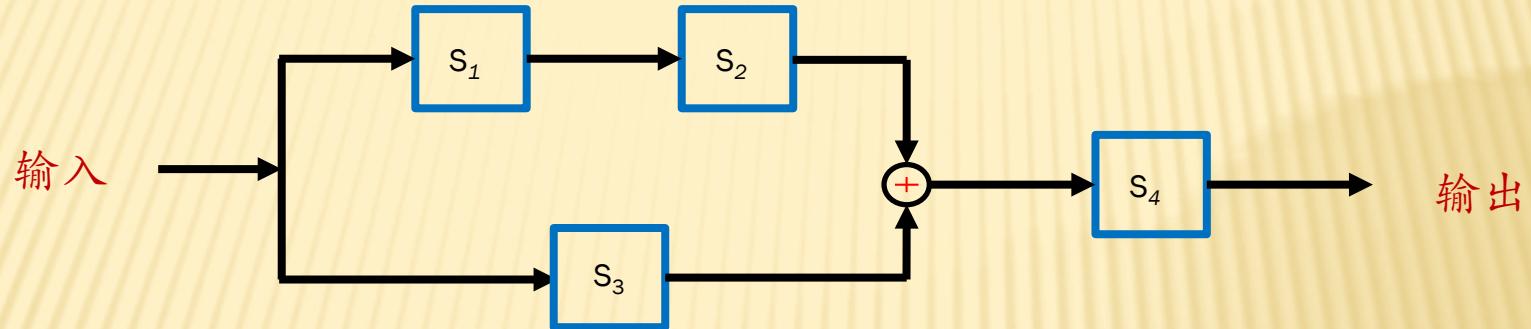
1、两个（多个）子系统的级联（串联）



2、两个（多个）子系统的并联

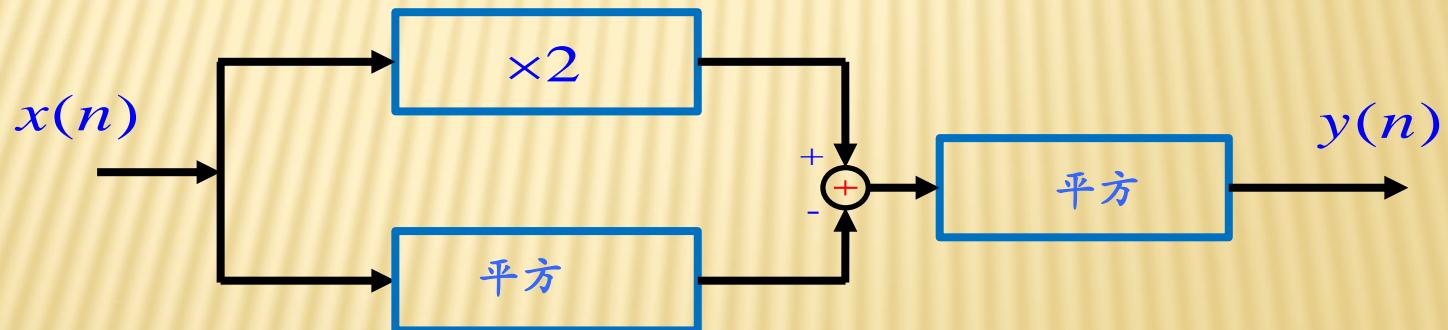


3、多个子系统的混合联接：

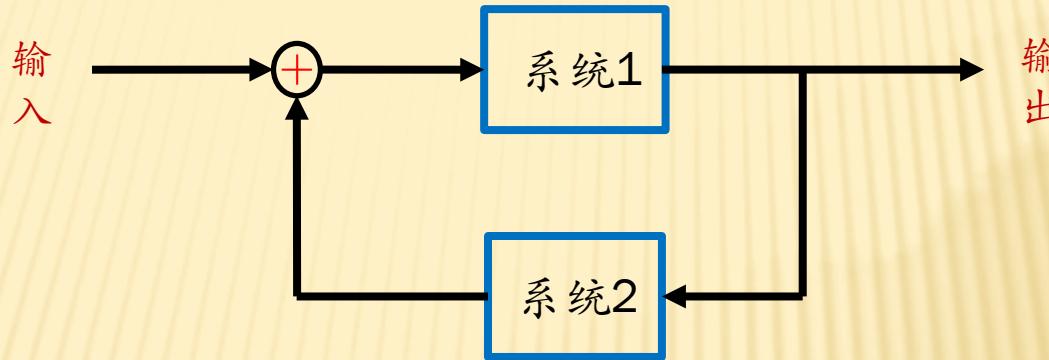


实例：

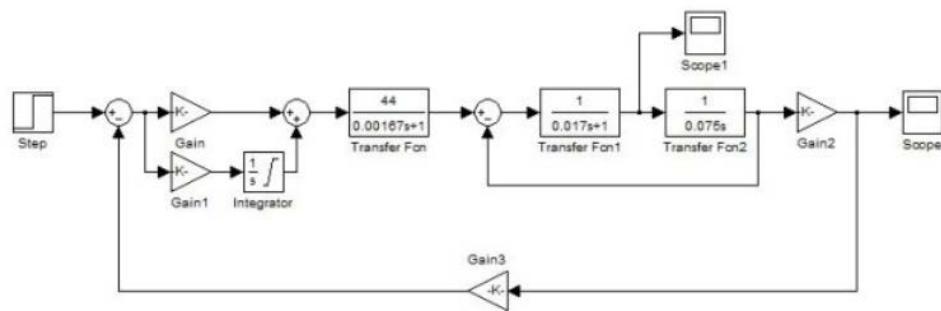
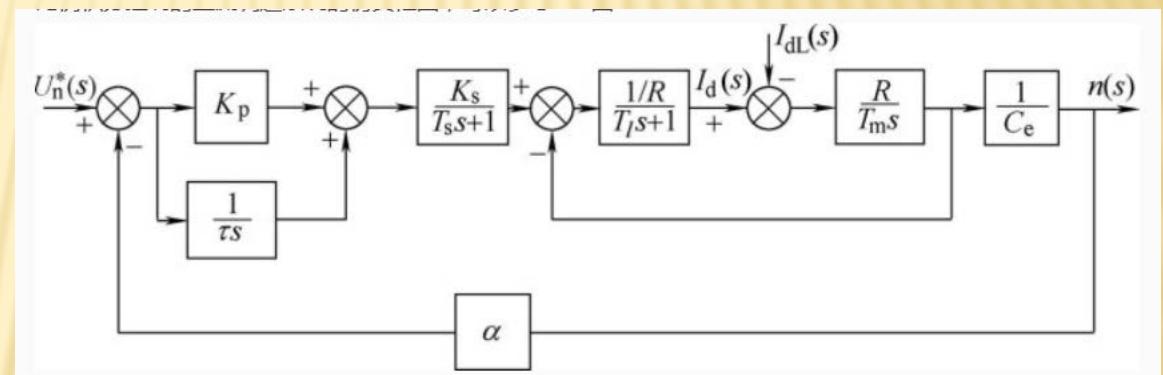
$$y(n) = (2x(n) - x^2(n))^2$$



4、带有反馈的系统：



直流电机闭环
调速系统框图：



§ 6 系统的性质

一、记忆系统与非记忆系统

如果对自变量的每一个值，系统的输出只决定于该时刻的输入，则该系统就称为无记忆系统。

无记忆系统：

$$y(t) = f(x(t))$$

$$y(n) = f(x(n))$$

电阻器，欧姆定律。

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

恒等系统：

$$y(t) = x(t)$$

$$y(n) = x(n)$$

电容器，电感器

有记忆系统：

$$y(t) = K \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(n) = K \sum_{-\infty}^n x(n)$$

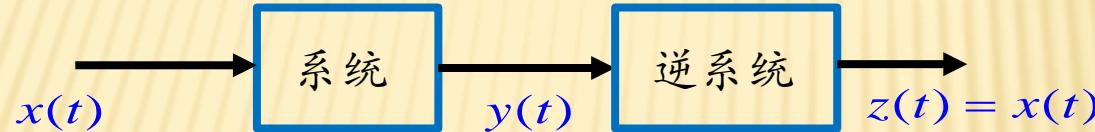
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau$$

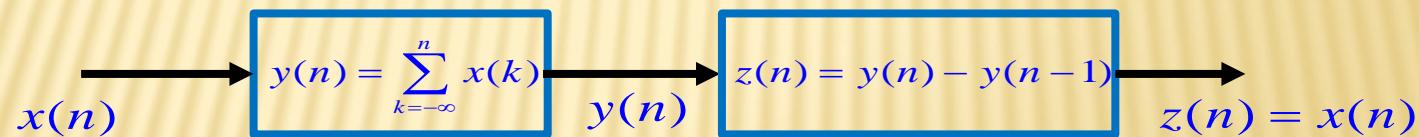
二、可逆性与可逆系统

如果系统可以通过输出量 $y(t)$ 确定其输入量 $x(t)$ ，则称系统是可逆的。

可构造一个可逆系统达到以下效果：



实例：累加与差分



三、因果系统

系统在任何时刻的输出只决定于现在时刻的输入和过去的输入，而不决定于将来的输入，则该系统为因果系统，又称为不可预测的系统。

所有的非记忆系统都是因果系统。

因果系统：

$$y(t) = f(x(t), x(t - \tau))$$

$$y(n) = f(x(n), x(n - m))$$

非因果系统：

$$y(t) = f(x(t), x(t + \tau))$$

$$y(n) = f(x(n), x(n + m))$$

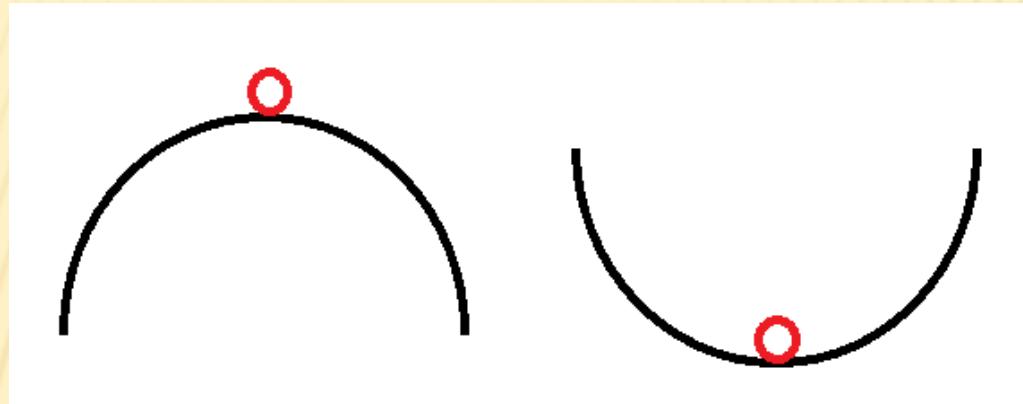
实例：

$$y(n) = x(n) - x(n + 1)$$

自变量不是时间量，如图像处理，非因果系统是有实际意义的。

四、系统的稳定性

直观讲：一个稳定的系统在小输入（或扰动）下是不会发散的。



系统稳定性的定义：

一个稳定的系统在任何时刻，系统的输入是有界的，则系统的输出也是有界的。

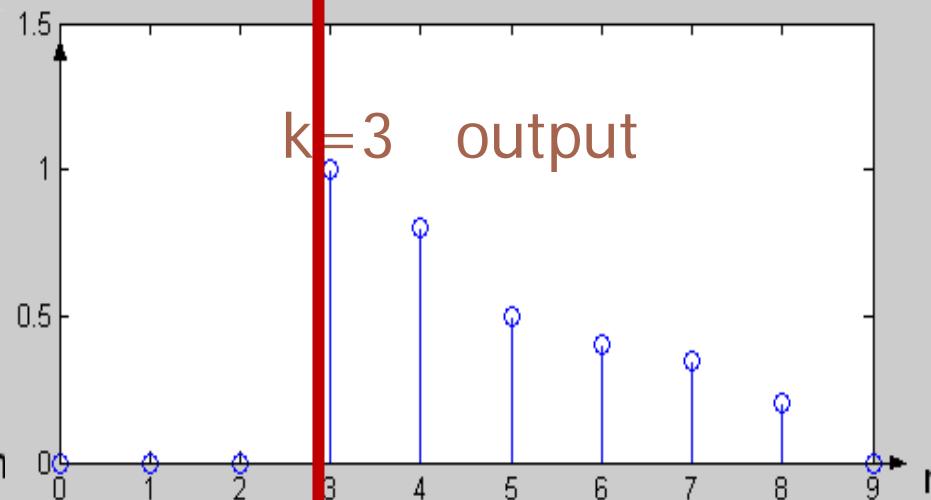
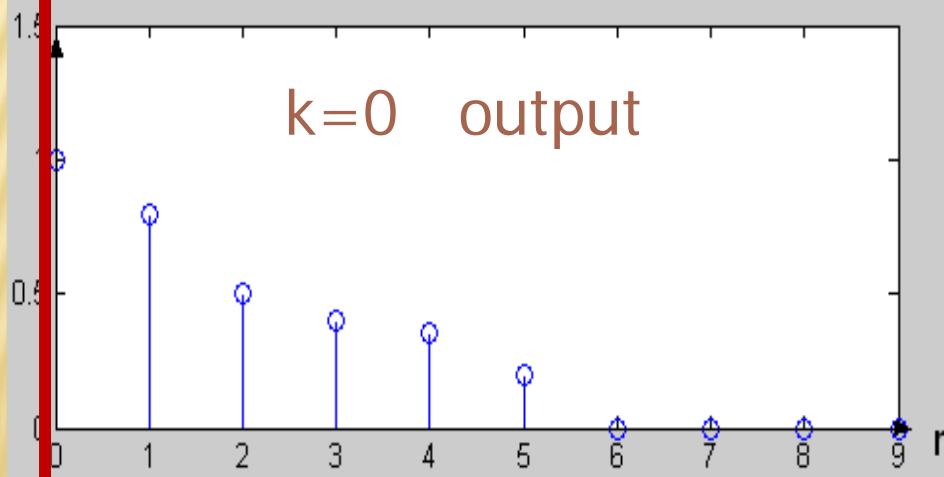
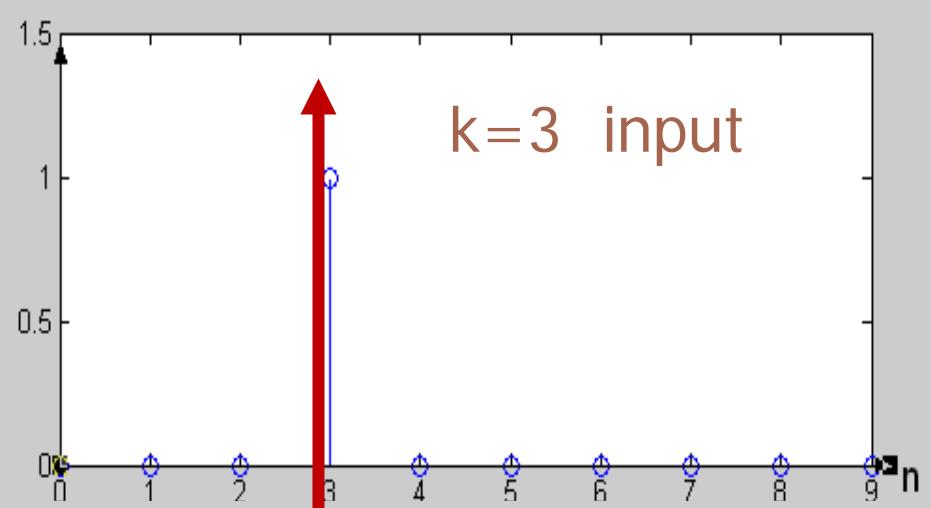
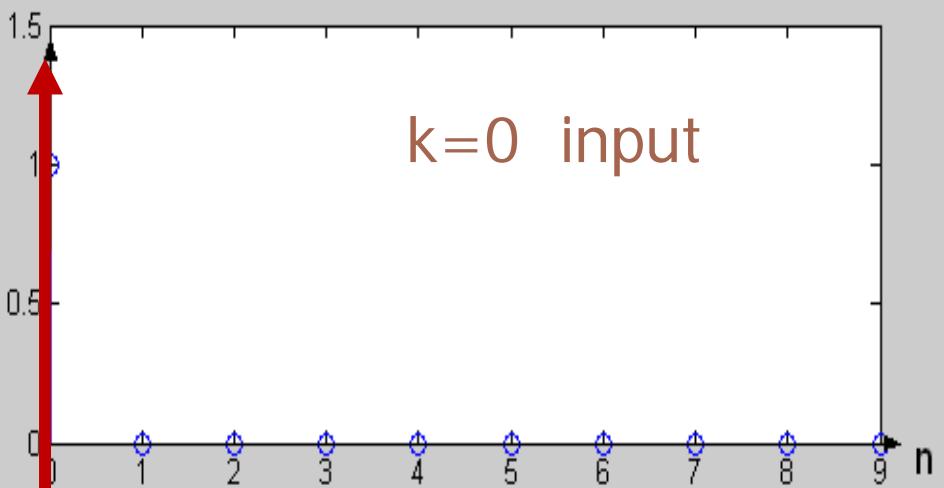
$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x(n-k) \quad |x(n)| < R \quad \text{稳定的系统}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k+1)u(k) \quad \text{不稳定的系统}$$

附加条件：当系统的输入变为0时，系统的输出在有限的时间内，由当前值趋近于0值。

五、时不变系统

如果系统的输入在时间上有个平移，而引起的输出信号也产生一个相同时间的平移，而输入、输出关系不变，该系统就称为时不变系统。



某时不变系统: $y(t) = \sin[x(t)]$

对应两个输入 $x_1(t), x_2(t)$:

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)]$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \sin[x_2(t)], \quad x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad y_2(t) &= \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t - t_0)] \\ &&&= y_1(t - t_0) \end{aligned}$$

系统的输入输出关系不变, 同时滞后了 t_0 时间:

某时变系统: $y(n) = nx(n)$

对应两个输入 $x_1(n), x_2(n)$:

$$y_1(n) = nx_1(n)$$

$$y_2(n) = nx_2(n), \quad x_2(n) = x_1(n - n_0)$$

$$y_2(n) = nx_2(n) = nx_1(n - n_0)$$

$$y_1(n - n_0) = (n - n_0)x_1(n - n_0), \quad y_2(n) \neq y_1(n - n_0)$$

六、线性系统

如果系统的输入是由几个信号的加权和组成的，那么系统的输出也是对应这组信号中每一个信号的响应的，同样形式的加权和。

线性系统的重要性之，满足叠加性。

如果： $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

则有： $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$ a, b 是常数。

推广：

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \cdots + a_k x_k(n)$$

$$y(t) = \sum_k a_k y_k(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + \cdots + a_k y_k(n)$$

线性系统的另一个重要性质：
0输入产生0输出。

$$0 \cdot x(t) \rightarrow 0 \cdot y(t)$$

非线性系统举例：

$$y(n) = x(n) + 3$$

线性增量系统

$$y(n) = x(n) + y_0(n), \quad y_0(n) = 3$$

系统输出的增加部分是线性的，但是还存在一个常量。



第一章结束