

命题：称能判断真假的陈述句为命题。

命题公式：若在复合命题中， p, q, r 等不仅可以代表命题常项，还可以代表命题变项，这样的复合命题形式称为命题公式。

命题的赋值：设 A 为一命题公式， p, p, \dots, p 为出现在 A 中的所有命题变项。给 p, p, \dots, p 指定一组真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**。若指定的一组值使 A 的值为真，则称**成真赋值**。

真值表：含 n ($n \geq 1$) 个命题变项的命题公式，共有 2^n 组赋值。将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列成表，称为 A 的真值表。

命题公式的类型：(1) 若 A 在它的各种赋值下均取值为真，则称 A 为重言式或永真式。

(2) 若 A 在它的赋值下取值均为假，则称 A 为矛盾式或永假式。

(3) 若 A 至少存在一组赋值是成真赋值，则 A 是可满足式。

主析取范式：设命题公式 A 中含 n 个命题变项，如果 A 得析取范式中的简单合取式全是极小项，则称该析取范式为 A 的主析取范式。

主合取范式：设命题公式 A 中含 n 个命题变项，如果 A 得析取范式中的简单合析式全是极大项，则称该析取范式为 A 的主析取范式。

命题的等值式：设 A, B 为两命题公式，若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

约束变元和自由变元：在合式公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，称 x 为**指导变项**，称 A 为相应量词的**辖域**， x 称为**约束变元**， x 的出现称为**约束出现**， A 中其他出现称为**自由出现** (**自由变元**)。

一阶逻辑等值式：设 A, B 是一阶逻辑中任意的两公式，若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$ ，称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式。

前束范式：设 A 为一谓词公式，若 A 具有如下形式 $Q_1 x_1 / Q_2 x_2 Q_k \dots x_k B$ ，称 A 为前束范式。

集合的基本运算：并、交、差、相对补和对称差运算。

笛卡尔积：设 A 和 B 为集合，用 A 中元素为第一元素，用 B 中元素为第二元素构成有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡尔积，记为 $A \times B$ 。

二元关系：如果一个集合 R 为空集或者它的元素都是有序对，则称集合 R 是一个二元关系。

特殊关系：(1)、空关系： \emptyset (2) **全域关系**： $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$

(3) **恒等关系**： $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

(4) **小于等于关系**： $L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \in A \}, A \subseteq R$

(5) **整除关系**： $R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \Psi \wedge x \subseteq y \}, \Psi$ 是集合族

二元关系的运算：设 R 是二元关系，

(1) R 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 R 的**定义域** $\text{dom} R = \{ x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \}$

(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的**值域** $\text{ran} R = \{ y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \}$

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的**域** $\text{fld} R = \text{dom} R \cup \text{ran} R$

二元关系的性质：自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性。

等价关系：如果集合 A 上的二元关系 R 是自反的，对称的和传递的，那么称 R 是**等价关系**。

设 R 是 A 上的等价关系， x, y 是 A 的任意元素，记作 $x \sim y$ 。

等价类：设 R 是 A 上的等价关系，对任意的 $\forall x \in A$ ，令 $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x R y \}$ ，称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的**等价类**。

偏序关系：设 R 是集合 A 上的二元关系，如果 R 是自反的，反对称的和传递的，那么称 R 为 A 上的**偏序**，记作 \leq ；称序偶 $\langle A, R \rangle$ 为**偏序集合**。

函数的性质：设 $f: A \rightarrow B$ ，

(1) 若 $\text{ran} f = B$ ，则称 f 是**满射** (**到上**) 的。

(2) 若 $\forall y \in \text{ran} f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$ ，则称 f 是**单射** (**一一**) 的。

(3) 若 f 既是满射又是单射的，则称 f 是**双射** (**一一到上**) 的。

无向图：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$ ，记作 G ，其中：

(1) $V \neq \emptyset$ 称为顶点集，其元素称为**顶点**或**结点**。

(2) E 为边集，它是无序积 $V \times V$ 的多重子集，其元素称为**无向边**，简称**边**。

有向图：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$ ，记作 D ，其中

(1) V 同无向图。(2) E 为边集，它是笛卡尔积 $V \times V$ 的多重子集，其元素称为**有向边**。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个无向图或有向图。

有限图：若 V, E 是有限集，则称 G 为有限图。

n 阶图：若 $|V| = n$ ，称 G 为 n 阶图。

零图：若 $|E| = 0$ ，称 G 为零图，当 $|V| = 1$ 时，称 G 为平凡图。

基图：将有向图变为无向图得到的新图，称为有向图的基图。

图的同构：在用图形表示图时，由于顶点的位置不同，边的形状不同，同一个事物之间的关系可以用不同的图表示，这样的图称为图同构。

带权图：在处理有关图的实际问题时，往往有值的存在，一般这个值成为权值，带权值的图称为带权图或赋权图。

连通图：若无向图是平凡图，或图中任意两个顶点都是连通的，则称 G 是**连通图**。否则称为**非连通图**。设 D 是一个有向图，如果 D 的基图是连通图，则称 D 是**弱连通图**，若 D 中任意两个顶点至少一个可达另一个，则称 D 是**单向连通图**。若 D 中任意两个顶点是相互可达的，则称 D 是**强连通图**。

欧拉图：通过图中所有边一次且仅一次并且通过所有顶点的通路（回路），称为**欧拉通路（回路）**。存在欧拉回路的图称为欧拉图。

哈密顿图：经过图中每个顶点一次且仅一次的通路（回路），称为哈密顿通路（回路），存在哈密顿回路的图称为哈密顿图。

平面图：一个图 G 如果能以这样的方式画在平面上：出定点处外没有变交叉出现，则称 G 为平面图。画出的没有边交叉出现的图称为 G 的一个**平面嵌入**。

二部图：若无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的顶点集合 V 可以划分成两个子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$)，使 G 中的任何一条边的两个端点分别属于 V_1 和 V_2 ，则称 G 为二部图（**偶图**）。二部图可记为 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ， V_1 和 V_2 称为互补顶点子集。

树的定义：连通无回路的无向图称为无向树，简称**树**，常用 T 表示树。平凡图称为**平凡树**。若无向图 G 至少有两个连通分支，每个连通都是树，则称 G 为**森林**。在无向图中，悬挂顶点称为**树叶**，度数大于或等于 2 的顶点称为**分支点**。

树的性质：**性质 1**、设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树 (2) G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径 (3) G 中无回路且 $m = n - 1$ 。

(4) G 是连通的且 $m = n - 1$ 。 (5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥。 (6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

性质 2、设 T 是 n 阶非平凡的无向树，则 T 中至少有两片树叶。

证：设 T 有 x 片树叶，由握手定理及性质 1 可知， $2(n-1) = \sum d(v_i) \geq x + 2(n-x)$ 由上式解出 $x \geq 2$ 。

最小生成树：设 T 是无向图 G 的子图并且为树，则称 T 为 G 的树。若 T 是 G 的树且为生成子图，则称 T 是 G 的生成树。设 T 是 G 的生成树。 $e \in E(G)$ ，若 $e \in E(T)$ ，则称 e 为 T 的树枝，否则称 e 为 T 的弦。并称导出子图 $G[E(G) - E(T)]$ 为 T 的余树，记作 T' 。

最优二元树：设 2 叉树 T 有 t 片树叶 v_1, v_2, \dots, v_t ，权分别为 w_1, w_2, \dots, w_t ，称 $W(t) = \sum w_i l(v_i)$ 为 T 的权，其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数。在所有有 t 片树叶，带权 w_1, w_2, \dots, w_t 的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为**最优 2 叉树**。

最佳前缀码：利用 Huffman 算法求最优 2 叉树，由最优 2 叉树产生的前缀码称为最佳前缀码，用最佳前缀码传输对应的各符号能使传输的二进制数位最省。

蕴含式推理

E ₁	$\neg \neg p \Leftrightarrow p$	E ₁₂	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E ₂	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	E ₁₃	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E ₃	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	E ₁₄	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$
E ₄	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	E ₁₅	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$
E ₅	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	E ₁₆	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E ₆	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	E ₁₇	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E ₇	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	E ₁₈	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E ₈	$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	E ₁₉	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E ₉	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	E ₂₀	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E ₁₀	$P \vee P \Leftrightarrow P$	E ₂₁	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E ₁₁	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	E ₂₂	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

等值公式表

$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简式		
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	化简式		
$P \Rightarrow P \vee Q$	附加式		
$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式		
$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式		
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	变形简化式		
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	变形简化式		
$p \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推论		
$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	拒取式		
$\neg p \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	析取三段式		
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	条件三段式		
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	双条件三段式		
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \wedge R) \Rightarrow Q \rightarrow S$	合取构造二难		
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$	析取构造二难		
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$	前后附加式		
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$	前后附加式		
E ₂₃	$(\exists x)((Ax) \vee (Bx)) \Leftrightarrow (\exists x)(Ax) \vee (\exists x)(Bx)$	E ₃₀	$(\forall x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)((Ax) \rightarrow B)$
E ₂₄	$(\forall x)((Ax) \wedge (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$	E ₃₁	$(\exists x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow B)$
E ₂₅	$\neg (\exists x)(Ax) \Leftrightarrow (\forall x) \neg (Ax)$	E ₃₂	$A \rightarrow (\forall x)(Bx) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow (Bx))$
E ₂₆	$\neg (\forall x)(Ax) \Leftrightarrow (\exists x) \neg (Ax)$	E ₃₃	$A \rightarrow (\exists x)(Bx) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow (Bx))$
E ₂₇	$(\forall x)(A \vee (Bx)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)(Bx)$	I ₁₇	$(\forall x)(Ax) \vee (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \vee (Bx))$
E ₂₈	$(\exists x)(A \wedge (Bx)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)(Bx)$	I ₁₈	$(\exists x)((Ax) \wedge (Bx)) \Rightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$
E ₂₉	$(\exists x)((Ax) \rightarrow (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \rightarrow (\exists x)(Bx)$	I ₁₉	$(\forall x)(Ax) \rightarrow (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow (Bx))$

集合恒等式: P61

幂等律: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律: $A \cup \phi = A$; $A \cap E = A$

零律: $A \cup E = E$; $A \cap \phi = \phi$

排中律: $A \cup \sim A = E$

矛盾律: $A \cap \sim A = \phi$

吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$

德摩根定律: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$; $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$; $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$; $\sim \phi = E$; $\sim E = \phi$

双重否定律: $\sim(\sim A) = A$

二元关系的运算:

设 F, G, H 是任意的关系,

$$(1) (F -) - \vdash F$$

$$(2) \text{dom}(F -) = \text{ran} F ; \text{ran}(F -) = \text{dom} F$$

$$(3) (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) \quad (4) (F \circ G) - ^{-1} = G - ^{-1} \circ F - ^{-1}$$

设 R 是 A 上的关系 (幂运算)

$$(1) R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} \quad (2) R^n = R^{n-1} \circ R, n \geq 1 \quad (3) R \circ R^0 = R^0 \circ R = R$$

图的矩阵表示:

(1) 无向图的关联矩阵: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边的关联次数, 则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵。记为 $M(G)$ 。

(2) 有向图的关联矩阵: 设无向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵。记为 $M(D)$ 。