人工智能学院本科生 2022—2023 学年第一学期
《现代控制论》课程期末考试试卷 (B 卷)
（参考答案）

一、判断题：判断正误，并说明理由 (本题共 18 分，每小题 6 分)

1、错误(2 分)。离散定常线性系统$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$完全能控的充要条件是对某个正整数k，$\mathrm{span}(B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{k-1}B)\supseteq\mathrm{span}(A^k)$(4 分)。

2、错误(2 分)。即便连续系统是能控或能观的，如果采样周期选取不合适，对应的离散化系统有可能不能控或不能观测，甚至既不能控又不能观测(4 分)。

3、错误(2 分)。变分法与极大值原理得到的结果均为必要条件，而动态规划方法得到的结果为充分条件(4 分)。

二、简答题 (本题共 18 分，每小题 6 分)

1、判断能控性的 4 个常用判据如下(写出 2 个即可，每个 3 分)：

- 能控性矩阵$U=(B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B)$的秩为$n$。
- 对于A的每个特征值λ，矩阵$(\lambda I-A\ B)$的秩为n。
- 矩阵$\mathrm{e}^{-At}B$的所有行在$[0,\infty)$上线性无关。
- 对于$t_1>t_0$，能控克莱姆矩阵$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{e}^{-A\tau}BB^\top\mathrm{e}^{-A^\top\tau}d\tau$为非奇异。

2、经典控制论与现代控制论的几点不同之处 (写出 3 点即可，每点 2 分)

- 研究工具：经典控制论为拉普拉斯变换方法 (频域)；现代控制论使用状态空间方法(时域)。
- 研究对象：经典控制论研究单输入单输出系统；现代控制论为多输入多输出系统。
- 控制方法：经典控制论主要研究 PID 控制；现代控制论为状态反馈控制、输出反馈控制、最优控制、智能控制等，涉及范围更为广泛。

3、求解 Riccati 代数方程的方法主要包括：(1)直接求解非线性代数方程组方法(2 分)；(2) 求解 Riccati 微分方程稳态解方法(2 分)；(3) 哈密顿矩阵方法(2 分)。

三、(本题 15 分)

解：根据题意，设

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

相应地，闭环矩阵为

$$A + BK = \begin{pmatrix} k_{11} & 1 + k_{12} \\ 1 + k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

因此，其对应的特征多项式为

$$f_k(s) = \det(sI - (A + BK)) = s^2 - (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} + (1 + k_{21})(1 + k_{12})$$

另一方面，期望极点对应的特征多项式为

$$f^*(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

对比系数，可以求得：

$$k_{11} + k_{22} = -5,\ k_{11}k_{22} + (1 + k_{12})(1 + k_{21}) = 6$$

令$k_{11} = -1,\ k_{12} = -4$，可得$k_{22} = -4,\ k_{21} = -5/3$，因此：

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -5/3 & -4 \end{pmatrix}$$

四、(本题 20 分)

解：(1) 判断系统的能观性。

经过计算，不难求得能观测性矩阵V如下所示：

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

经判断，可知

$$\mathrm{rank}(V) = 2$$

因此，系统能观测。

(2) 全维观测器设计。

令$G = (g_1,\ g_2)^\top$，易得：

$$A + GC = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ 1 & g_2 - 6 \end{pmatrix}$$

因此，经计算，有

$$f_g = \det(\lambda I - (A+GC)) = \lambda^2 + (6-g_2)\lambda - g_1$$

另一方面，极点对应的期望特征多项式如下：

$$f^*(\lambda) = (\lambda+10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

对比两者的系数，不难求得：

$$g_1 = -100,\ g_2 = -14$$

即：

$$G = (-100, -14)^\top$$

因此，全维观测器的表达式为

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 100 \\ 14 \end{pmatrix} y$$

(3) 降维观测器设计。

由系统的结构易知

$$A_{11} = 0,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = -6,\ B_1 = 1,\ B_2 = 0$$

因此，降维观测器可表示为如下：

$$\dot{w} = (A_{11} + gA_{21})w + (B_1 + gB_2)u + [A_{12} + gA_{22} - (A_{11} + gA_{21})g]y$$

代入上面的结论，可将其进一步化简为

$$\dot{w} = gw + u + [-6g - g^2]y$$

因此，闭环多项式为$f_g := \lambda - g$；另一方面，期望多项式为$f^* = \lambda + 10$，故$g = -10$。所以，降维观测器为

$$\dot{w} = -10w + u - 40y,\ z_1 = \hat{x}_1 = w + 10x_2$$

五、(本题 15 分)

解：构造哈密顿函数如下所示：

$$H = 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_2}u$$

由 H-J-B 方程可得

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_u \left\{ 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_2}u \right\} := \min_u \{H\}$$

由于u无限制，因此由$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$可得

$$u^* = -\frac{\partial J^*}{\partial x_2}$$

将$u^*(t)$代入H的表达式，可知

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = 2x_1^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

根据方程的形式，设

$$J^* = a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2$$

代入上式并整理，可得

$$(1-a_2^2)x_1^2 + (a_1 - 2a_2a_3)x_1x_2 + (a_2 - a_3)^2 \cdot x_2^2 = 0$$

由x_1, x_2的任意性，有

$$1 - a_2^2 = 0,\ a_1 - 2a_2a_3 = 0,\ a_2 - a_3 = 0 \Longrightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$$

因此，

$$J^* = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

进一步，可求得最优控制为

$$u^* = -\frac{\partial J^*}{\partial x_2} = -2(x_1 + x_2)$$

六、(本题 14 分)

证明：(1)证明$(x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top$为平衡点。令$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$，可得：

$$x_2 = x_1\left[2 - \sin^2(t)\right],\ -3x_1 - x_2\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2(t)\right] = 0$$

利用三角函数的性质$\sin^2(*) \leq 1$，求解该方程组，不难得到：

$$x_1 = x_2 = 0$$

因此，该系统的唯一平衡点为$(x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top$。

(2)构造如下正定标量函数：

$$V(x_1, x_2) := \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2$$

对其关于时间求导，并将系统的动态方程代入、整理，可得

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{3}x_2\dot{x}_2 = -x_1^2[2 - \sin^2(t)] - \frac{1}{3}x_2^2\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2(t)\right]$$

利用三角函数的性质$\sin^2(*) \leq 1$，可得出：

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -x_1^2 - \frac{x_2^2}{6} \leq 0$$

因此，$\dot{V}(x_1, x_2)$关于x_1，x_2为负定，故平衡点$(x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$为 Lyapunov 意义下的渐近稳定。Q.E.D.