第四章

状态观测器与动态反馈

§4 观测器设计

- 4.1 观测器的结构
- 4.2 观测器存在的基本定理
- 4.3 观测器的设计方法
  - 4.3.1 全状态观测器
  - 4.3.2 降维观测器
- 4.4 带观测器的状态反馈控制器
- 4.5 动态反馈与动态补偿器的设计

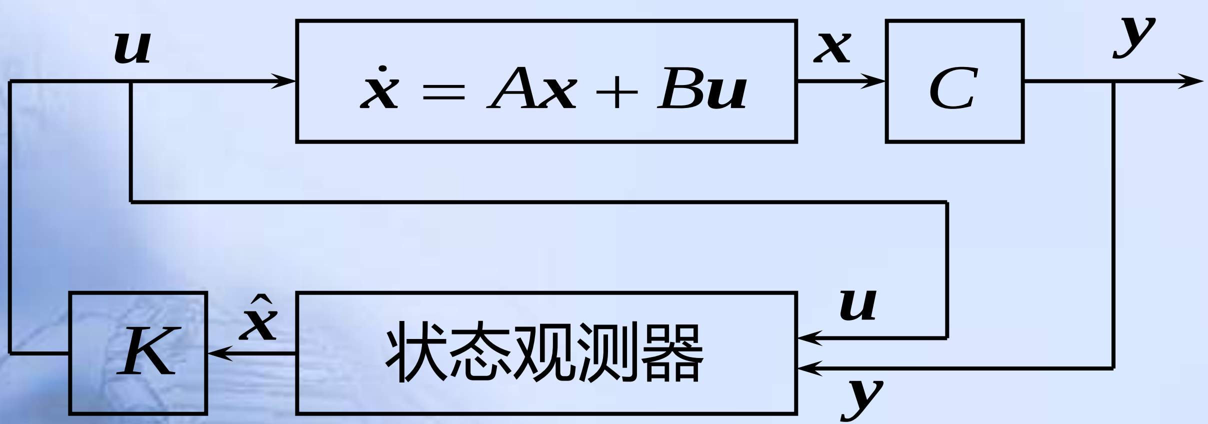
4.1 观测器的结构

- 在实际应用中常遇到不是所有的状态变量都能用做反馈的情况，有的状态分量根本无法测量。
- 当系统的状态变量不能全部用做反馈时，可以考虑输出反馈或者**设计观测器估计系统的状态**，然后以系统状态的估计代替系统的状态进行反馈。

已知定常线性系统

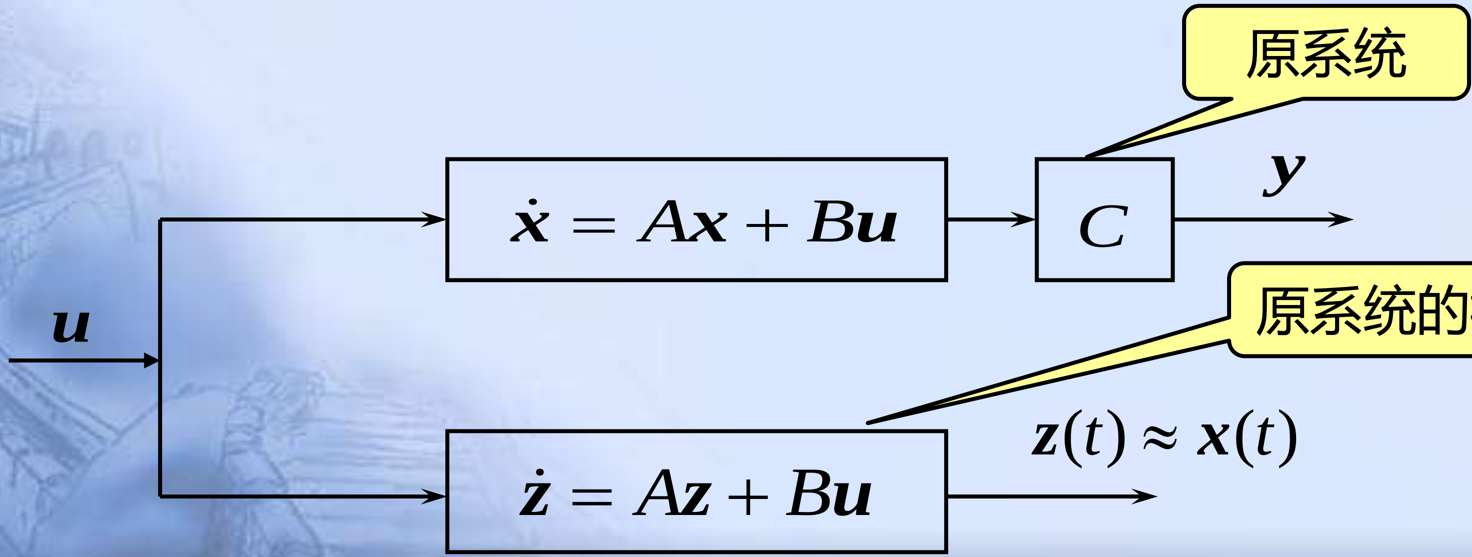
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{4.1}$$

观测器是由输入$\boldsymbol{u}$和输出$\boldsymbol{y}$产生对系统的状态$\boldsymbol{x}$的估计，因此观测器也称为**状态估计器**或**状态重构器**。



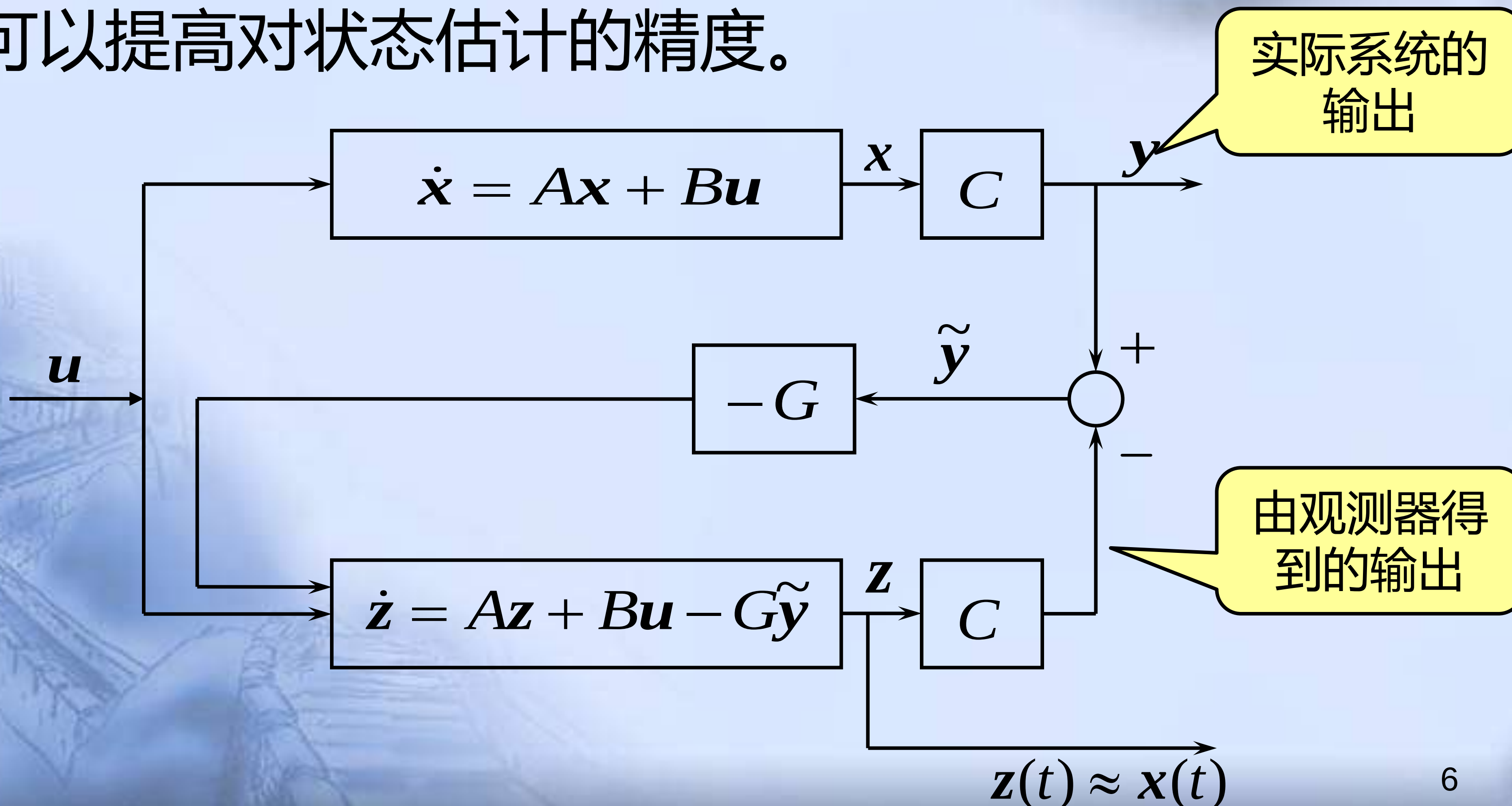
1) **开环观测器** - 重构原系统

- 最简单的状态观测器是重构一个系统，它的状态方程与原系统相同，但它的状态可以测量。这种方法是做一个状态能测量的原系统的模型。
- 下图给出的观测器称为**开环观测器**。它不能根据估计的误差修改对状态的估计，因此估计误差较大。



2) **闭环观测器** - 根据估计误差修改状态的估计值

为克服开环观测器估计误差较大这一缺点，设计**闭环观测器**，它可以根据估计误差修改状态的估计值，从而可以提高对状态估计的精度。



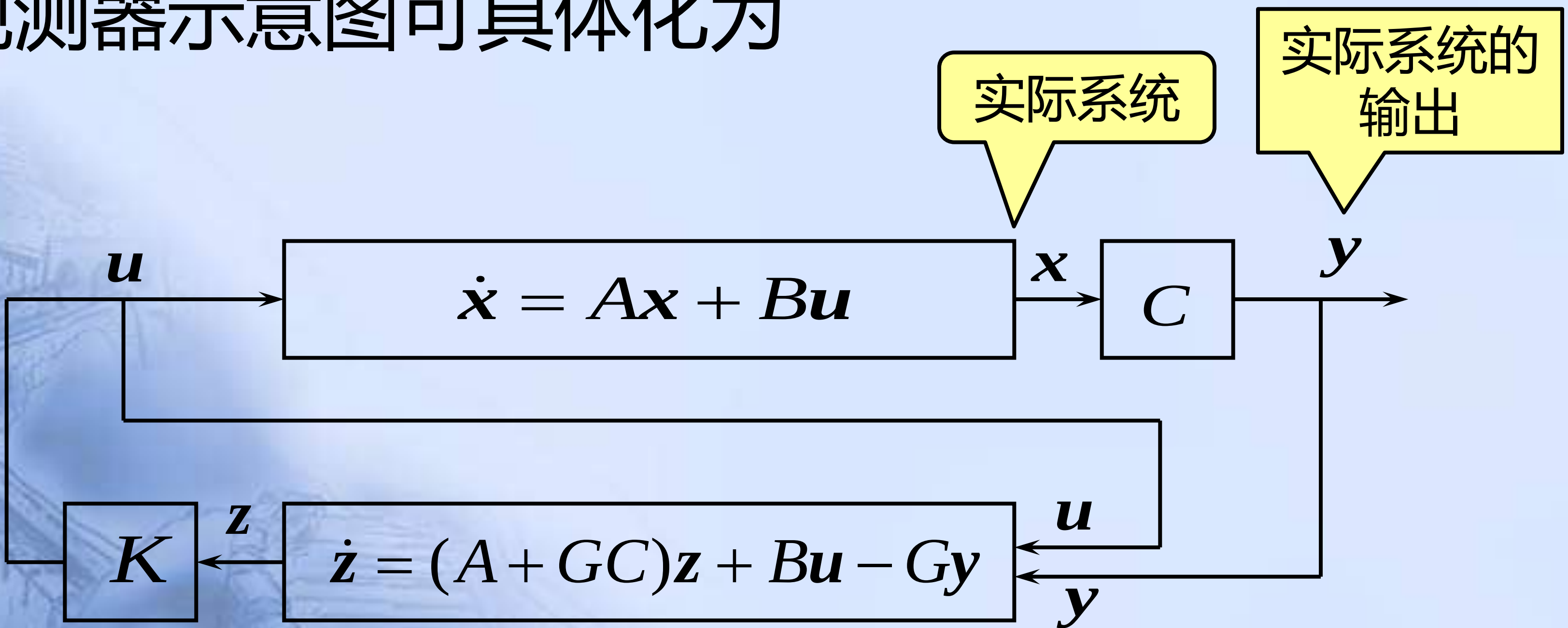
对于闭环观测器

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{u} - G\tilde{\mathbf{y}} = A\mathbf{z} + B\mathbf{u} - G(\mathbf{y} - C\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + B\mathbf{u} + GC\mathbf{z} - G\mathbf{y}$$

观测器的方程化为

$$\dot{\mathbf{z}} = (A + GC)\mathbf{z} + B\mathbf{u} - G\mathbf{y}$$

则观测器示意图可具体化为



设计观测器的问题就集中于如何选取矩阵G，使$\boldsymbol{z}(t)$可作为$\boldsymbol{x}(t)$的**渐近**估计，即如何选取G使得

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{x}(t)]=0$$

由观测器的方程和状态方程得到

$$\dot{\boldsymbol{z}}-\dot{\boldsymbol{x}}=(A+GC)\boldsymbol{z}-A\boldsymbol{x}-GC\boldsymbol{x}=(A+GC)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})$$

这说明当$A+GC$为稳定矩阵时,

$$\dot{\boldsymbol{z}}=(A+GC)\boldsymbol{z}+B\boldsymbol{u}-G\boldsymbol{y}$$

给出了原系统的一个观测器 (**龙伯格观测器**)。

实际设计观测器时，不仅要求$A+GC$为稳定矩阵，还要求$\boldsymbol{z}(t)$-$\boldsymbol{x}(t)$以比较快的速度趋向零。具体做法是将$A+GC$的极点配置到复平面的左半开平面的适当位置。

4.2 观测器存在的基本定理

下面利用对偶性来讨论观测器极点可以任意配置的问题，为此考虑原系统的对偶系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A^T \boldsymbol{x} + C^T \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = B^T \boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} - \dot{\boldsymbol{x}} = (A + GC)\boldsymbol{z} - A\boldsymbol{x} - GC\boldsymbol{x} = (A + GC)(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x})$$

- 存在K使$A+BK$的极点可以任意配置的充分必要条件是(A, B)完全能控。
- 而任意配置$A+GC$的极点$\Longleftrightarrow$任意配置$(A+GC)^T$的极点$\Longleftrightarrow$存在G^T使$A^T+C^TG^T$有事先指定的极点。
- 因而任意配置$A+GC$的极点$\Longleftrightarrow(A^T, C^T)$完全能控。

由对偶原理得到如下定理：

定理4.1 系统能设计形如

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (A + GC)\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{u} - G\boldsymbol{y}$$

的观测器，并且**观测器的极点可以任意配置**的充分必要条件是(C, A)完全**能观测**。

极点可任意配置

如果不要求观测器的极点可以任意配置，观测器存在$\Longleftrightarrow$存在G使$A+GC$的极点全有负实部$\Longleftrightarrow$存在G^T使$A^T+C^TG^T$的极点均在左半开平面。这相当于(A^T, C^T)能稳，这时称(C, A)**能检测**。于是有如下定理：

定理4.2 系统能设计形如

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (A + GC)\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{u} - G\boldsymbol{y}$$

的观测器的充分必要条件是(C, A)**能检测**。

极点能配置到
左半平面
龙伯格观测器

4.3 观测器的设计方法

- 观测器的设计方法

第1步 设 $C^T=[\boldsymbol{c}_1^T,\boldsymbol{c}_2^T\cdots\boldsymbol{c}_r^T]$，构造矩阵(列线性独立)

$$
\begin{aligned}
R=[&\underline{\boldsymbol{c}_1^T \quad A^T\boldsymbol{c}_1^T \quad \cdots \quad A^{T\,\mu_1-1}\boldsymbol{c}_1^T};\quad\cdots\quad; && \boldsymbol{c}_1\text{有关的}\\
&\boldsymbol{c}_{r-1}^T \quad A^T\boldsymbol{c}_{r-1}^T \quad \cdots \quad A^{T\,\mu_{r-1}-1}\boldsymbol{c}_{r-1}^T; && \cdots\\
&\underline{\boldsymbol{c}_r^T \quad A^T\boldsymbol{c}_r^T \quad \cdots \quad A^{T\,\mu_r-1}\boldsymbol{c}_r^T}\,] && \boldsymbol{c}_r\text{有关的}
\end{aligned}
$$

$$W=[0\cdots0\ \boldsymbol{e}_2;\cdots;0\cdots0\ \boldsymbol{e}_r;0\cdots0]$$

第μ_1列　第$\mu_1+\cdots+\mu_{r-1}$列　第n列

式中e_i是r阶单位矩阵的第i列，计算$\hat{G}^T=WR^{-1}$。

第2步 计算$\overline{A}^T = A^T + C^T\hat{G}^T$和它的特征多项式

$$|sI - \overline{A}^T| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

第3步 对观测器的给定的n个极点$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，计算

要求的特征多项式:

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

并计算

$$\boldsymbol{g}^T = \begin{bmatrix} a_0 - \alpha_0 & a_1 - \alpha_1 & \cdots & a_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

第4步 计算 $\tilde{\boldsymbol{g}}^T = \boldsymbol{g}^T T^{-1}$，式中

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{q}\bar{A}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}(\bar{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{q}$是$(\bar{A}^T, \boldsymbol{c}_1^T)$的能控性矩阵的逆矩阵的最后一行。

第5步 计算 $G^T = \hat{G}^T + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}^T \\ 0 \end{bmatrix}$ 或 $G = \hat{G} + [\tilde{\boldsymbol{g}} \quad 0]$

按照以上步骤设计的观测器维数与状态方程的维数相同，称为**全状态观测器 (全阶观测器)**。

例4.1 已知系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

设计观测器

$$\dot{\boldsymbol{z}}=(A+GC)\boldsymbol{z}+B\boldsymbol{u}-G\boldsymbol{y}$$

使它的极点为$-1, -1, -2$。

解：经验证系统完全能观测

第1步 构造矩阵

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad W=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad R^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

计算 $\hat{G}^{T}=WR^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

第2步 计算

$$\bar{A}^{T}=A^{T}+C^{T}\hat{G}^{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$$

特征多项式 $|sI-\bar{A}^{T}|=s^{3}-2s^{2}-s+2$

第3步 对$\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，计算多项式

$$(s+1)^2(s+2)=s^3+4s^2+5s+2$$

$$\boldsymbol{g}^T=\begin{bmatrix}0 & -6 & -6\end{bmatrix}$$

第4步 $(\bar{A}^T,\boldsymbol{c}_1^T)$的能控性矩阵为

$$U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad U^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

U^{-1}最后一行为 $\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{q}\bar{A}^T\\ \boldsymbol{q}\bar{A}^{T2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

于是 $\tilde{\boldsymbol{g}}^T=\boldsymbol{g}^TT^{-1}=\begin{bmatrix}-6 & -24 & -12\end{bmatrix}$

第5步 计算

$$G^T = \hat{G}^T + \begin{bmatrix} \tilde{g}^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -24 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$$

设计的观测器为 $\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -24 & 1 & 2 \\ -12 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 24 & 0 \\ 12 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$

显然，上一章给出的极点配置的简化算法也适用于观测器的设计。

- 用Matlab程序实现观测器设计(以例3.5为例)

初始化

程序为极点配置程序改变而成

```
clc
clear
A=[1 0 1;0 1 2;0 0 0];
B=[1 0;0 0;0 1];
C=[1 0 0;0 1 0];
J=[-1 0 0;0 -1 0;0 0 -2];%目标极点
A=A';
C=C';
[m,n]=size(A);
```

本例中C'相当于极点配置中的B,则对应的A也应做转置。

第一步 构造矩阵Q和S

```
%%计算Q,S,K1
u(m)=0;
u=u+1;
x=1;
temp=eye(m);
Q=zeros(m);
for i=1:m
    Q(:,i)=temp*C(:,x);
    if rank(Q)~=i
        u(x)=u(x)-1;
        x=x+1;
        Q(:,i)=C(:,x);
        temp=A;
    else
         u(x)=u(x)+1;
         temp=temp*A;
      end
end
```

```
y=0;z=2;
S=zeros(size(C'));
t=eye(size(C'));
for step2=1:m
    y=y+u(step2);
    if(y<m)
        S(:,y)=t(:,z);
        z=z+1;
    end
end
K1=S*inv(Q)
```

第二步　第三步

```
A1=A+C*K1;
Poly_A1=poly(A1);
Poly_J=poly(J);
for step1=1:m
    k(:,step1)=Poly_A1(m+2-step1)-Poly_J(m+2-step1);
end
```

第四步

```
%计算q
temp=eye(m);
temp1(m)=1;
for step1=1:m
    temp2(:,step1)=temp*C(:,1);
    temp=temp*A1;
end
temp1
inv(temp2)
q=temp1*inv(temp2)
```

```
%计算t1
temp=eye(m);
for step1=1:m
    t1(:,step1)=(q*temp)';
    temp=temp*A1;
end
t1=t1‘;
%得到t1
```

第五步 计算反馈增益矩阵

```
%计算k1,K
k1=k*t1;
temp3=zeros(size(C));
temp3(:,1)=(k1)';
K=K1+temp3';
G＝K'
%得到G
```

计算结果:

```
K1 =
    0     0     0     0
    0     0     0     1
temp1 =
    0     0     0     1
ans =
    0          1.0000     0           -2.0000
   -1.0000   1.0000    1.0000      0
    0.5000   -0.5000   -1.5000     1.5000
    0          0           0.5000    -0.5000
```

```
q =

    0        0       0.5000   -0.5000

G =

    -6     0

   -24     0

   -12     1
```

4.3.2 降维观测器

- 有的系统有一部分状态可以用作反馈，这一部分状态不需要再估计，对这样的系统可以设计**降维观测器**。
- 定常线性系统中，设矩阵C的秩为 $r<n$，则可以找到一个变换，使得系统的输出是状态变量的一部分，即系统化为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_2 \qquad (\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-r},\ \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{r}) \end{cases} \tag{4.2}$$

这样只需设计一个n-r阶观测器估计n-r维分状态向量。

如何选取线性变换

设将系统(4.1)化为(4.2)的变换可取为

$$\boldsymbol{x}' = Q\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = Q^{-1}\boldsymbol{x}' \qquad Q = \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}$$

式中矩阵D可适当选取，只要使由它构成的矩阵Q可逆即可。

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} = CQ^{-1}\boldsymbol{x}'$$

由于$[0 \quad I_r]Q = [0 \quad I_r]\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = C \Rightarrow CQ^{-1} = [0 \quad I_r]$

因而变换后 $C' = CQ^{-1} = [0 \quad I_r]$

在此变换下，系统化为(4.2)形式。

- 可以设计降阶观测器的条件

为设计观测器估计状态x_1，考虑关于x_1的子系统，将它改写成如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11} x_1 + v \\ \bar{y} = A_{21} x_1 \end{cases} \qquad (4.3)$$

式中 $v = A_{12} x_2 + B_1 u = A_{12} y + B_1 u$

$$\bar{y} = \dot{x}_2 - A_{22} x_2 - B_2 u = \dot{y} - A_{22} y - B_2 u$$

引理4.3 如果系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} x$$

完全能观测，则系统(4.3)也完全能观测。

引理4.3的证明 因为系统(4.2)完全能观测，因此

$$rank\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{21}A_{11}+A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12}+A_{22}^2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ A_{21} & 0 \\ A_{21}A_{11}+A_{22}A_{21} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ \hline A_{21} & 0 \\ A_{21}A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow r\text{行独立} \\ \\ \\ \\ \end{array} = n$$

因此

n-r 列

$$rank\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{21}A_{11} \\ A_{21}A_{11}^2 \\ \vdots \\ A_{21}A_{11}^{n-2} \end{bmatrix} = n-r \quad \text{即} \quad rank\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{21}A_{11} \\ \vdots \\ A_{21}A_{11}^{n-r-1} \end{bmatrix} = n-r$$

则(A_{21}, A_{11})完全能观测 □

- 若系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$ 能观测

$\Longrightarrow$ 系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

能观测。

$\Longrightarrow$ 系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v} \\ \bar{\boldsymbol{y}} = A_{21}\boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

能观测。

- 这样就可以针对子系统设计观测器：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \left(A_{11} + GA_{21}\right)\boldsymbol{z} + \boldsymbol{v} - G\bar{\boldsymbol{y}}$$

或者 $\dot{\boldsymbol{z}} = (A_{11} + GA_{21})\boldsymbol{z} + A_{12}\boldsymbol{y} + B_1\boldsymbol{u} - G(\dot{\boldsymbol{y}} - A_{22}\boldsymbol{y} - B_2\boldsymbol{u})$

$$\left(\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= A_{12}\boldsymbol{x}_2 + B_1\boldsymbol{u} = A_{12}\boldsymbol{y} + B_1\boldsymbol{u} \\ \bar{\boldsymbol{y}} &= \dot{\boldsymbol{x}}_2 - A_{22}\boldsymbol{x}_2 - B_2\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{y}} - A_{22}\boldsymbol{y} - B_2\boldsymbol{u} \end{aligned}\right)$$

使 $A_{11} + GA_{21}$ 有事先给定的 n-r 个极点。

于是得到的对状态向量的估计是

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}$$

由于观测器中出现了$\dot{y}$，应用时不方便。需设法在前面得到的观测器方程的右端消去$\dot{y}$，为此将右边的$G\dot{y}$与左边的$\dot{z}$合并，做变换：

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z} + G\boldsymbol{y} \quad \left(\underline{\dot{z}} = (A_{11} + GA_{21})\boldsymbol{z} + A_{12}\boldsymbol{y} + B_1\boldsymbol{u} - G(\underline{\dot{y}} - A_{22}\boldsymbol{y} - B_2\boldsymbol{u})\right)$$

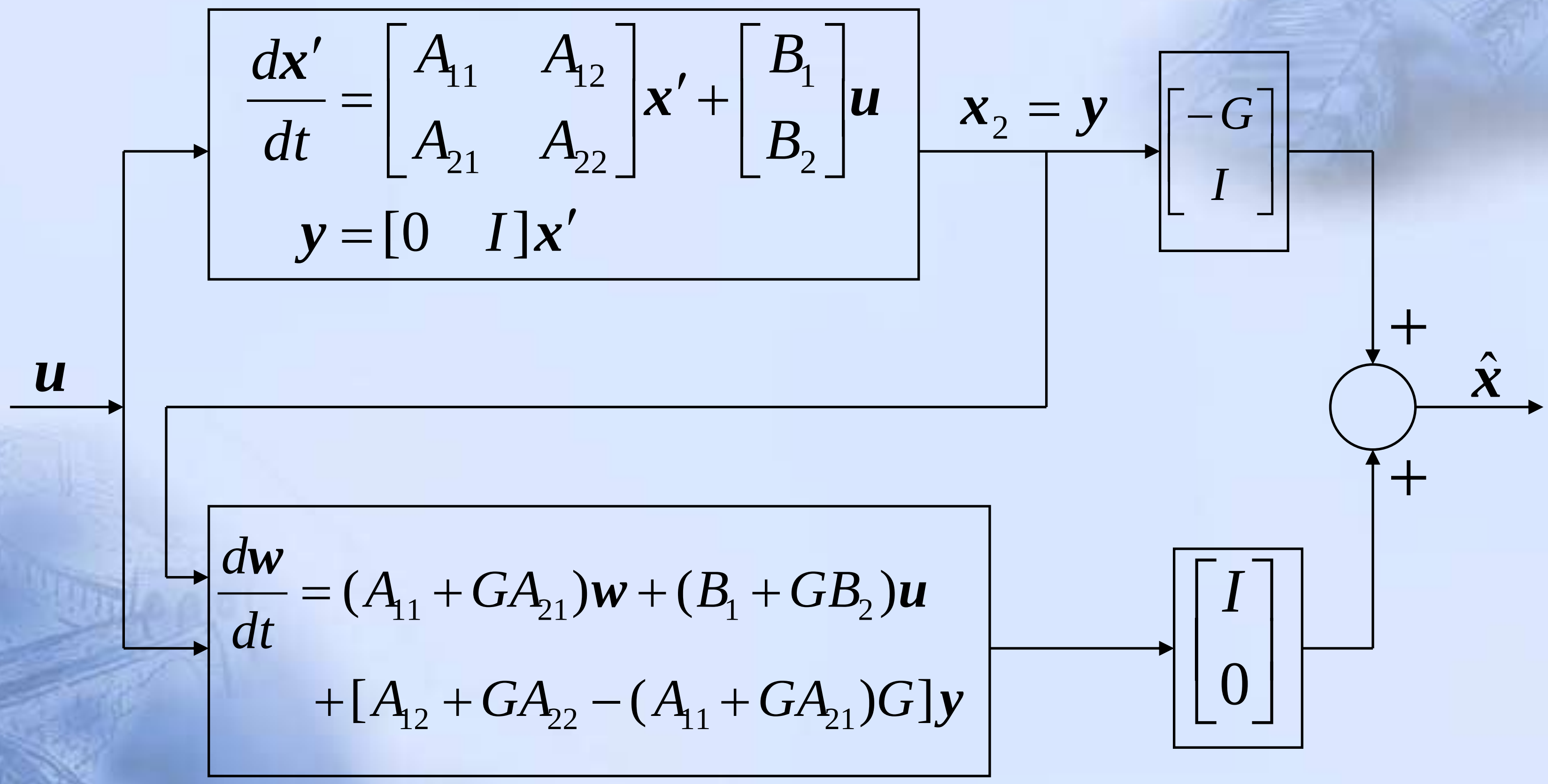
于是观测器化为：

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \dot{\boldsymbol{z}} + G\dot{\boldsymbol{y}} = (A_{11} + GA_{21})\boldsymbol{w} + (B_1 + GB_2)\boldsymbol{u}$$
$$+ \left[A_{12} + GA_{22} - (A_{11} + GA_{21})G\right]\boldsymbol{y}$$

这时x的估计为：

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} - G\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} -G \\ I \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

- 框图



- 应用时注意返回原坐标系。

例4.2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

设计一个降阶观测器使三个极点为$-3, -2 \pm i$。

解：先将系统改写成如下形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 11 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\boldsymbol{x}+\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ -1\\ \hline 0\end{array}\right]u \qquad y=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_1\end{bmatrix}$$

对这个系统

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 11 & 0\end{bmatrix} \quad A_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad A_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad A_{22}=0$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} \qquad B_2=0$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} = (A_{11} + GA_{21})\boldsymbol{w} + (B_1 + GB_2)\boldsymbol{u} + [A_{12} + GA_{22} - (A_{11} + GA_{21})G]\boldsymbol{y}$$

$$B_2 = A_{22} = 0, A_{12} = [0,0,0]^T$$

于是得到降维观测器

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \left(A_{11} + GA_{21}\right)\boldsymbol{w} + B_1\boldsymbol{u} - \left(A_{11} + GA_{21}\right)G\boldsymbol{y}$$

观测器的设计问题化为求G使$A_{11}+GA_{21}$的极点为-3，$-2\pm i$。根据求全阶观测器的方法，得

$$G = \begin{bmatrix} -7 \\ 28 \\ 92 \end{bmatrix}$$

将B_1, A_{11}, A_{21}, G代入上面求得的降维观测器得到

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 28 & 0 & 1 \\ 92 & 11 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} -21 \\ 104 \\ 336 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

于是对状态的观测

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} -G \\ I \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} 7 \\ -28 \\ -92 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

返回原坐标系下

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -28 \\ -92 \end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

4.4 带观测器的状态反馈控制器

对系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$ 设计状态反馈 $\mathbf{u} = K\mathbf{x} + v$ 。

在状态反馈中，用 $\hat{\mathbf{x}}$(或z) 代替$\mathbf{x}$，得到控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A+GC)\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} - G\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = K\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \end{cases}$$

称为**带观测器的状态反馈控制器**。

- ✓ 观测器是否影响闭环系统极点?
- ✓ 带有观测器的反馈控制器的闭环系统的传递函数是否会改变?

1. 带观测器的状态反馈控制器的极点分离定理

- 问题: 反馈系统加入观测器后能不能保持原来配置的极点。
- 带有观测器的反馈系统由以下方程组描述

原系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = (A + GC)\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{u} - G\boldsymbol{y} \qquad \text{观测器}$$

$$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{z} + \boldsymbol{v} \qquad \text{反馈}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

它可以改写成以下的**组合系统**的形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A+GC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.4}$$

组合系统的状态为 $[\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{z}]^T$。

由于经等价变换系统的极点不变，系统经变换

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$$

化为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}} = A'\boldsymbol{w} + B'\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = C'\boldsymbol{w} \end{cases}$$

上式中:

$$A' = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A+GC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+GC \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

因此系统的特征多项式

$$|sI - A| = \det\begin{bmatrix} sI - A & -BK \\ GC & sI-(A+GC+BK) \end{bmatrix}$$

原系统A

$$= \det\begin{bmatrix} sI-(A+BK) & BK \\ 0 & sI-(A+GC) \end{bmatrix}$$

变换后系统A'

$$= \det[sI-(A+BK)]\cdot\det[sI-(A+GC)]$$

- **这表明：** 带有观测器的反馈控制器的极点是**原闭环系统的极点**加上**观测器的极点**，这一结论常称为**分离定理。**
- **定理4.3(分离定理)** 带有观测器的反馈控制系统的闭环极点集合为

$$\sigma(A+BK)\cup\sigma(A+GC)$$

2. 带有观测器的状态反馈控制器的传递函数阵

带有观测器的反馈控制系统经等价变换化为(P37)：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

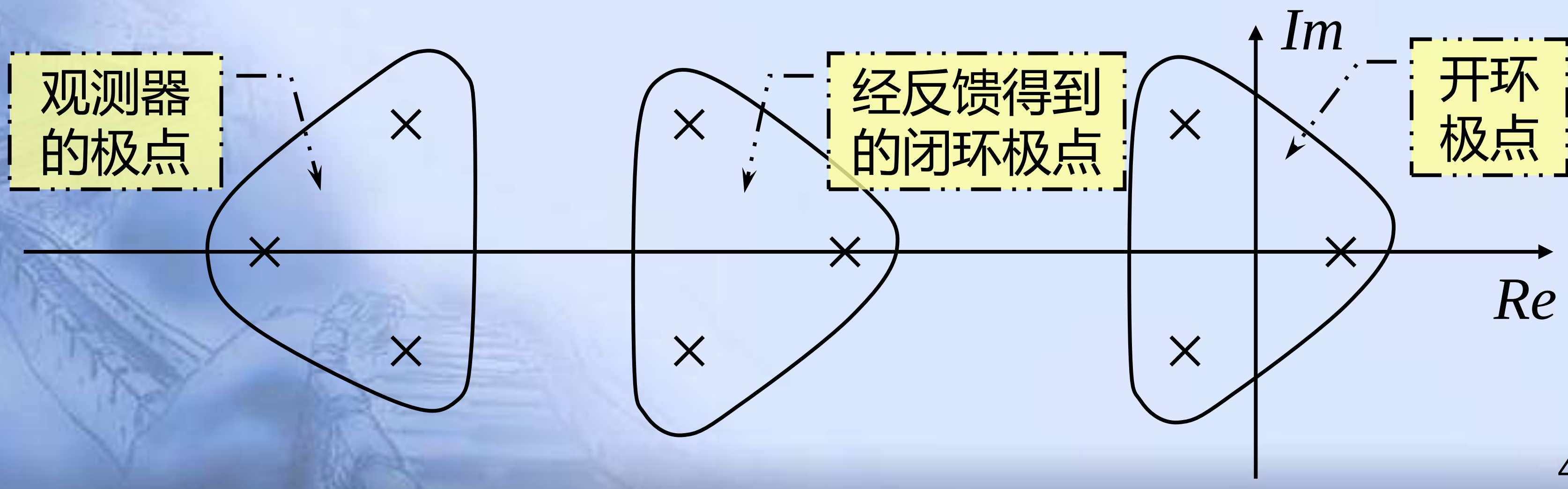
它的传递函数阵为

$$\begin{aligned} C'(sI-A')^{-1}B' &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \left[sI - \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+GC \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-(A+BK) & BK \\ 0 & sI-(A+GC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C[sI-(A+BK)]^{-1}B \end{aligned}$$

这表明**带有观测器的反馈控制器**与**直接用状态反馈的控制器**的**闭环传递函数阵完全相同**。

3. 观测器极点位置的确定

- 当系统**完全能观测**时可以设计观测器，并且可以将观测器的极点设置在复平面的**左半开平面的任意位置**。
- **一般原则：观测器的极点**应设置在闭环极点更靠左面一些的位置上。这样使得状态估计误差的衰减速度快于系统响应速度，即不会因为加入了观测器而影响闭环系统的响应速度。



设计原则

- 一方面，要求估计尽量快地逼近系统的实际状态；
- 另一方面，要兼顾状态估计误差的衰减速度与观测器的抗干扰能力。

4.5 动态反馈与动态补偿器的设计

- (静态)状态反馈和输出反馈的共同点：
  - 不增加新的状态变量，系统开环与闭环同维。
  - 反馈为线性反馈，反馈增益阵都是常矩阵。

状态反馈：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} = k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \end{cases}$$

输出反馈：

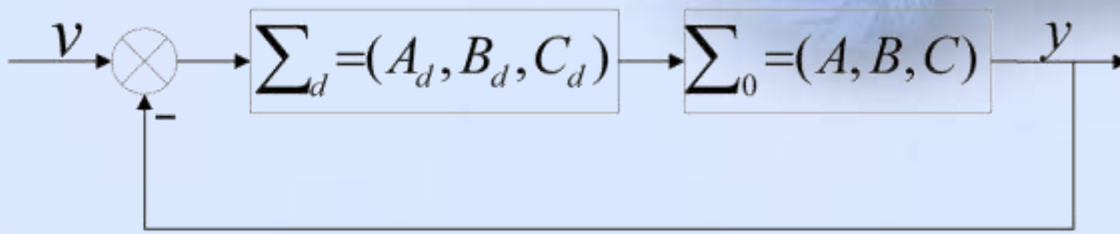
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}$$

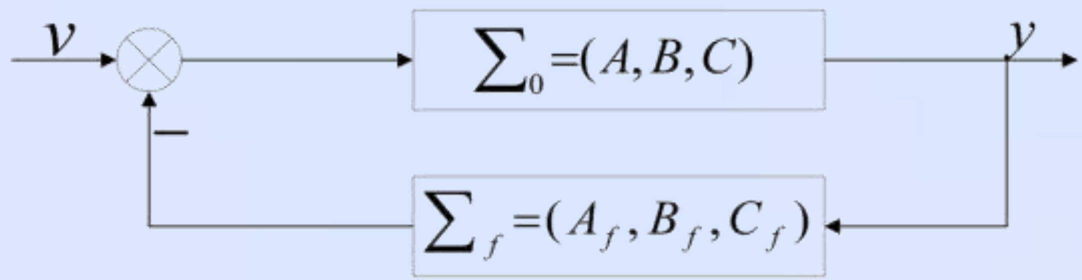
静态输出反馈一般不能任意配置系统的极点

- 在带观测器的状态反馈系统中，引入一个动态子系统(状态观测器)来改善系统性能，这种动态子系统称为动态补偿器(动态输出反馈控制器)。

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\
\dot{\boldsymbol{z}} &= (A + GC)\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{u} - G\boldsymbol{y} \\
\boldsymbol{u} &= K\boldsymbol{z} + \boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$



a) 串联结构



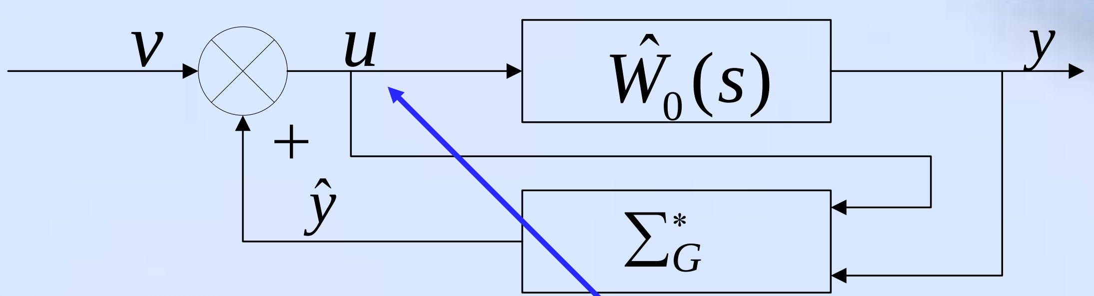
b) 反馈结构

带动态补偿器的闭环系统结构

- 这类系统的维数等于受控系统与动态补偿器二者维数之和。采用反馈连接比采用串联连接容易获得更好的性能。

带观测器状态反馈系统与带补偿器输出反馈系统的等价性

- 在工程实际中，往往更关心系统输入和输出之间的控制特性，即传递特性。



带观测器的状态反馈系统

图中$\hat{W}_0(s)$——受控系统$\sum_0$的传递函数阵；

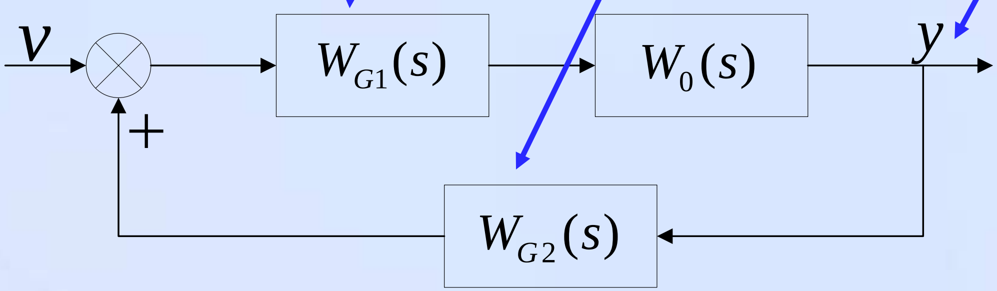
$\sum_G^*$——带反馈阵$\boldsymbol{K}$的观测器系统，状态空间表达式为：

$$\dot{\hat{x}} = (A+GC)\hat{x} + Bu - Gy$$

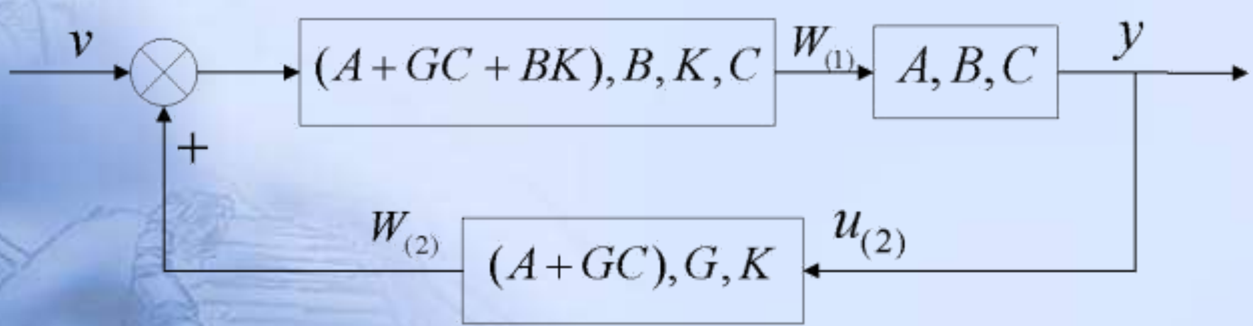
$$\hat{y} = K\hat{x}$$

此时$u = K\hat{x} + v$

- 可以证明，仅就传递特性而言，带观测器的状态反馈系统完全等效于同时带有串联补偿器和反馈补偿器的输出反馈系统。或者说用补偿器可以构成完全等效于带观测器的状态反馈系统。带观测器的状态反馈系统实质上是一个输出动态反馈控制器。



带观测器的状态反馈系统(P44)传递特性的等效变换



由补偿器构成的闭环系统结构图

- 动态补偿器的一般形式为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = E\boldsymbol{z} + F\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{u} = K\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y} \end{cases}$$

在它作用下的闭环系统为：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{z}} = E\boldsymbol{z} + F\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{u} = K\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y} \end{cases} \tag{4.5}$$

- 则得到如下形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A + BLC)\boldsymbol{x} + BK\boldsymbol{z} \\ \dot{\boldsymbol{z}} = FC\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{z} \end{cases} \tag{4.6}$$

- 如果对系统 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}\end{cases}$ 能设计一个动态补偿器

$$\dot{\boldsymbol{z}} = E\boldsymbol{z} + F\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{z} + L\boldsymbol{y}$$

使得闭环系统(4.6)的极点可以任意指定，则称该系统**可用动态补偿器任意配置极点**。

- 如果能设计一个动态补偿器使得到的闭环系统稳定，则称该系统**可用动态补偿器镇定**。

- **定理4.4** 系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

的**固定模**经任何输出动态反馈不变。

证明：

不失一般性设系统已化为标准结构形式：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

则闭环系统(4.6) $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}} = (A+BLC)\mathbf{x} + BK\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} = FC\mathbf{x} + E\mathbf{z}\end{cases}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} sI-(A+BLC) & -BK \\ -FC & sI-E \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} sI-A_{11} & -\left(A_{12}+B_1LC_2\right) & -A_{13} & -\left(A_{14}+B_1LC_4\right) & -B_1K \\ 0 & sI-\left(A_{22}+B_2LC_2\right) & 0 & -\left(A_{24}+B_2LC_4\right) & -B_2K \\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44} & 0 \\ 0 & -FC_2 & 0 & -FC_4 & sI-E \end{vmatrix}$$

最后一列调到第三列

最后一行调到第三行

则闭环系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A+BLC)\boldsymbol{x} + BK\boldsymbol{z} \\ \dot{\boldsymbol{z}} = FC\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{z} \end{cases}$ 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} sI-(A+BLC) & -BK \\ -FC & sI-E \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} sI-A_{11} & -(A_{12}+B_1LC_2) & -B_1K & -A_{13} & -(A_{14}+B_1LC_4) \\ 0 & sI-(A_{22}+B_2LC_2) & -B_2K & 0 & -(A_{24}+B_2LC_4) \\ 0 & -FC_2 & sI-E & 0 & -FC_4 \\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sI-A_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \left| sI-A_{11} \right| \times \left| sI-A_{33} \right| \times \left| sI-A_{44} \right| \times \begin{vmatrix} sI-(A_{22}+B_2LC_2) & -B_2K \\ -FC_2 & sI-E \end{vmatrix}$$

即对任何输出动态反馈，闭环系统的极点集都包含了

$\Lambda(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$

- **定理4.5** 系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} \end{cases}$ 能用动态补偿器 $\begin{matrix} \dot{\mathbf{z}} = E\mathbf{z} + F\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = K\mathbf{z} + L\mathbf{y} \end{matrix}$ 任意配置极点的**充分必要条件**是系统完全能控、完全能观测。

证明：充分性

(A,B)能控 $\Longrightarrow$ 存在K使 $\sigma(A+BK)$有事先给定的n个极点；

(C,A) 能观测 $\Longrightarrow$ 存在G使 $\sigma(A+GC)$有事先指定的n个极点;

由**极点分离定理(P38定理4.3)**，由求得的K,G构造的输出动态补偿器就是所求的具有指定的$2n$个极点的动态补偿器。

必要性

若系统不是完全能控、完全能观测的，则A的固定模非空，这部分极点经输出动态反馈不变，因此该系统不能用输出动态反馈任意配置极点。 □

例4.3 已知系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

设计一个输出动态补偿器，使闭环极点为$-1,-2,-3,-3$。

解:

第1步 求K使$\sigma(A+BK)=\{-1,-2\}$，按单输入系统极点配置的方法可求出$K=\begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}$。

第2步 构造观测器，使$\sigma(A+GC)=\{-3 \quad -3\}$。可求得$G=\begin{bmatrix}8 & -6\end{bmatrix}^T$。

第3步 由式 (P36 (4.4)式)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -GC & A+GC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \qquad u = Kz,\ v = 0 \end{cases}$$

得所求的动态补偿器为：

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} - \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} y$$

$$u = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}$$

- 注：**分离定理**对**降维观测器**也成立，因此也可以用降维观测器来设计输出动态补偿器。