选择题：

1. $H(s)=\dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s^2+1)}$，属于其零点的是（　　B　　）。

A、*-1*　　　　　　　　B、*-2*

C、*-j*　　　　　　　　D、*j*

2. $H(s)=\dfrac{2s(s+2)}{(s+1)(s-2)}$，属于其极点的是（　B　　）。

A、1　　　　　　　　B、2

C、0　　　　　　　　D、-2

3. 下列说法不正确的是（　D　　）。

A、H(*s*)在左半平面的极点所对应的响应函数为衰减的。即当 $t\to\infty$时，响应均趋于 0。

B、H(*s*)在虚轴上的一阶极点所对应的响应函数为稳态分量。

C、H(*s*)在虚轴上的高阶极点或右半平面上的极点，其所对应的响应函数都是递增的。

D、H(*s*)的零点在左半平面所对应的响应函数为衰减的。即当 t→∞时，响应均趋于 0。

4. 下列说法不正确的是（　D　　）。

A、H(*z*)在单位圆内的极点所对应的响应序列为衰减的。即当 $k\to\infty$时，响应均趋于 0。

B、H(z)在单位圆上的一阶极点所对应的响应函数为稳态响应。

C、H(*z*)在单位圆上的高阶极点或单位圆外的极点，其所对应的响应序列都是递增的。即当 $k\to\infty$时，响应均趋于∞。

D、H(*z*)的零点在单位圆内所对应的响应序列为衰减的。即当 $k\to\infty$时，响应均趋于 0。

5. 对因果系统，只要判断 H(*s*)的极点，即 A(*s*)=0 的根（称为系统特征根）是否都在左半平面上，即可判定系统是否稳定。下列式中对应的系统可能稳定的是（　　B　）

A、$s^3+2008s^2-2000s+2007$

B、$s^3+2008s^2+2000s$

C、$s^3-2008s^2-2000s-2007$

D、$s^3+2008s^2+2000s+2007$

6. 序列的收敛域描述错误的是（　B　）：

A 对于有限长的序列，其双边 z 变换在整个平面；

B 对因果序列，其 z 变换的收敛域为某个圆外区域；

C 对反因果序列，其 z 变换的收敛域为某个圆外区域；

D 对双边序列，其 z 变换的收敛域为环状区域。

7. If $f_1(t)\longleftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t)\longleftrightarrow F_2(j\omega)$ Then（　C　）

A $[af_1(t)+bf_2(t)]\longleftrightarrow[aF_1(j\omega)\cdot bF_2(j\omega)]$

B $[af_1(t)+bf_2(t)]\longleftrightarrow[aF_1(j\omega)-bF_2(j\omega)]$

C $[af_1(t)+bf_2(t)]\longleftrightarrow[aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)]$

D $[af_1(t)+bf_2(t)]\longleftrightarrow[aF_1(j\omega)/bF_2(j\omega)]$

8. If $f_1(t)\longleftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t)\longleftrightarrow F_2(j\omega)$，Then（　A　）

A $[f_1(t)*f_2(t)]\longleftrightarrow[F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)]$

B $[f_1(t)+f_2(t)]\longleftrightarrow[F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)]$

C $[f_1(t)-f_2(t)]\longleftrightarrow[F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)]$

D $[f_1(t)/f_2(t)]\longleftrightarrow[F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)]$

9. 下列傅里叶变换错误的是（　D　）

A $1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

B $e^{j\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

C $\cos(\omega_0 t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

D $\sin(\omega_0 t)\longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

10. If $f(t)\longleftrightarrow F(j\omega)$ then（　A　）

A $F(jt)\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$　　B $F(jt)\longleftrightarrow 2\pi f(\omega)$

C $F(jt)\longleftrightarrow f(-\omega)$　　D $F(jt)\longleftrightarrow f(\omega)$

思考题：

1、周期信号的频谱有什么特点？它的傅里叶系数是否与信号的周期有关？

是离散分布的；幅值与周期 T 成反比。

2、周期信号的傅里叶级数满足收敛的条件是什么？

在一个整周期内满足平方可积，或满足狄里赫利条件。

3、信号的时移对其幅度谱有什么影响吗？

没有

4、信号经过微分运算后，其频谱中高频分量增加还是减少？

增加

5、如果一个周期信号经过 1）时移，2）频移，3）时间尺度变化，4）时域微分运算，其中哪些将对信号的功率发生变化？

1）不影响，2）不影响，3）影响，4）影响

6、某连续系统频率特性已知为：$H(\omega)=j\omega$，求出系统对信号 $x(t)=\sin 3t$ 的响应 $y(t)$。

$y(t)=3\cos 3t$

练习题：

1、求下列周期信号的复指数型傅里叶级数的系数：

（1） $x(t)=\cos(2t+\frac{\pi}{4})$

$$x(t)=\cos(2t+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}(e^{j(2t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(2t+\frac{\pi}{4})})=\frac{1}{2}e^{j2t}e^{j\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}e^{-j2t}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{4}+j\frac{\sqrt{2}}{4})e^{j2t}+(\frac{\sqrt{2}}{4}-j\frac{\sqrt{2}}{4})e^{-j2t}$$

$$a_{-1}=\frac{\sqrt{2}}{4}-j\frac{\sqrt{2}}{4},\qquad a_1=\frac{\sqrt{2}}{4}+j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

（2） $x(t)=\cos 2t+3\cos 4t$

$$x(t)=\cos 2t+3\cos 4t=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})+\frac{3}{2}(e^{j4t}+e^{-j4t})$$

$$a_{-4}=\frac{3}{2},\qquad a_{-2}=\frac{1}{2},\qquad a_2=\frac{1}{2},\qquad a_4=\frac{3}{2}$$

（3） $x(t)=\cos 4t+\sin 6t$

$$x(t)=\cos 4t+\sin 6t=\frac{1}{2}(e^{j4t}+e^{-j4t})+\frac{1}{2j}(e^{j6t}-e^{-j6t})$$

$$a_{-6}=\frac{j}{2},\qquad a_{-4}=\frac{1}{2},\qquad a_4=\frac{1}{2},\qquad a_6=-\frac{j}{2}$$

（4） $x(t)=\sin^2 t$

$$x(t)=\sin^2 t=(\frac{1}{2j}(e^{jt}-e^{-jt}))^2=-\frac{1}{4}(e^{-j2t}-2+e^{jt})$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-j2t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{j2t}$$

$$a_{-2}=-\frac{1}{4},\qquad a_0=\frac{1}{2},\qquad a_2=-\frac{1}{4}$$

（5） $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{jn\pi t}$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{jn\pi t}e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1}e^{j(n-k)\pi t}dt==\frac{1}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1}e^{j(n-k)\pi t}dt=\frac{1}{2}$$

2、某一 LTI 系统的冲激响应 $h(t)=e^{-4t}u(t)$，当系统的输入信号为

$$x(t)=\sin 4\pi t+\cos(6\pi t+\frac{\pi}{4})$$

求系统输出 $y(t)$ 的傅里叶级数。

$$x(t)=\sin 4\pi t+\cos(6\pi t+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2j}(e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t})+\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j6\pi t}+e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j6\pi t})$$

$$X(\omega)=-j\pi(\delta(\omega-4\pi)-\delta(\omega+4\pi))+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-6\pi)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+6\pi)$$

$$h(t)=e^{-4t}u(t),\qquad H(\omega)=\frac{1}{4+j\omega}=\frac{1}{\sqrt{16+\omega^2}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{\omega}{4})}$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=(-j\pi\delta(\omega-4\pi)+j\pi\delta(\omega+4\pi)+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-6\pi)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+6\pi))\frac{1}{\sqrt{16+\omega^2}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{\omega}{4})}$$

$$=-j\pi\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega-4\pi)+j\pi\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega+4\pi)$$

$$+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega-6\pi)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega+6\pi)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{16+16\pi^2}}j\pi(e^{-j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega-4\pi)-e^{j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega+4\pi))$$

$$+\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}\pi(e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega-6\pi)+e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega+6\pi))$$

$$y(t)=\frac{1}{4\sqrt{1+\pi^2}}\sin(4\pi t-\tan^{-1}(\pi))+\frac{1}{2\sqrt{4+9\pi^2}}\cos(6\pi t+\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2}))$$

$$Y(\omega)=-j\pi\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega-4\pi)+j\pi\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\pi)}\delta(\omega+4\pi)$$
$$+\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega-6\pi)+\pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}\delta(\omega+6\pi)$$

$$a_{-6}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})},\qquad a_{-4}=-\frac{j}{2}\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{j\tan^{-1}(\pi)},$$
$$a_{4}=\frac{j}{2}\frac{1}{\sqrt{16+16\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\pi)},\qquad a_{6}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{16+36\pi^2}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})}$$

$$a_{-6}=\frac{1}{8\sqrt{4+9\pi^2}}e^{j(\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})-\frac{\pi}{4})},\qquad a_{-4}=\frac{1}{8\sqrt{1+\pi^2}}e^{j(\tan^{-1}(\pi)-\frac{\pi}{2})},$$
$$a_{4}=\frac{1}{8\sqrt{1+\pi^2}}e^{-j(\tan^{-1}(\pi)+\frac{\pi}{2})},\qquad a_{6}=\frac{1}{8\sqrt{4+9\pi^2}}e^{-j(\tan^{-1}(\frac{3\pi}{2})+\frac{\pi}{4})}$$

3、某一 LTI 系统的单位冲激响应为$h(t)=e^{-4|t|}$，在下面两种输入条件下，求出$y(t)$的傅里叶级数展开式。

（1）$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$

（2）$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-n)$

$$h(t)=e^{-4|t|}\qquad H(\omega)=\frac{8}{16+\omega^2}\qquad x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n),\quad T=1,\qquad X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0),\ \omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi$$
$$X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$
$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)\frac{8}{16+\omega^2}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{4\pi}{4+(k\pi)^2}\delta(\omega-2k\pi)$$
$$a_k=\frac{2}{4+(k\pi)^2}$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2m)-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2m-1),\quad T=2$$
$$X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)-2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega}\delta(\omega-k\omega_0),\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\pi$$
$$X(\omega)=2\pi(1-e^{-j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\pi),$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=2\pi(1-e^{-j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\pi)\frac{8}{16+\omega^2}=2\pi(1-e^{-j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{8}{16+(k\pi)^2}\delta(\omega-k\pi)$$
$$a_k=\frac{8(1-e^{-jk\pi})}{16+(k\pi)^2}$$

4、某一 LTI 系统的频率响应为：

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\ge 250\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

当系统输入信号 $x(t)$ 是一个基本周期为 $T=\frac{\pi}{7}$，且其傅里叶级数的系数为 a_k 的信号时，有系统的输出 $y(t)=x(t)$。试问 k 如何取值，才有 $a_k=0$？

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\ge 250\\ 0 & \text{other}\end{cases},\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0},\quad T_0=\frac{\pi}{7}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{j14kt},\quad y(t)=\begin{cases}x(t) & |\omega|\ge 250\\ 0 & \text{other}\end{cases},\quad a_k=\begin{cases}a_k & |\omega|\ge 250\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

$$-250<14k<250,\quad a_k=0,\quad -17<k<17$$

k 取整数。

5、求以下傅里叶变换的反变换

（1）$H(\omega)=\dfrac{3}{(5+j\omega)^2+9}$

$$H(\omega)=\frac{3}{(5+j\omega)^2+9}=\frac{3}{j^2(\frac{5}{j}+\omega)^2-(j3)^2}=-\frac{3}{(\omega-j5)^2+(j3)^2}$$

$$\omega'=\omega-j5,\quad \alpha=j3,\qquad H(\omega')=\frac{j}{2}\frac{2\alpha}{\omega'^2+\alpha^2},\qquad \frac{j}{2}=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$h(t)=\frac{j}{2}e^{-\alpha|t|}e^{j(j5)t}=\frac{1}{2}e^{-j3|t|}e^{-5t}e^{j\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}e^{-5t}e^{-j(3|t|+\frac{\pi}{2})}$$

（2）$H(\omega)=\cos 2\omega$

$$h'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\cos 2\omega e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{4\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}(e^{j(t+2)\omega}+e^{j(t-2)\omega})d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{j\omega t_1}d\omega\Big|_{t_1=t+2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{j\omega t_2}d\omega\Big|_{t_2=t-2}\}=\frac{1}{2}(\frac{\sin\Omega t_1}{\pi t_1}+\frac{\sin\Omega t_2}{\pi t_2})$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin\Omega t}{\pi t}$$

$$h(t)=\lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{\sin\Omega t_1}{\pi t_1}+\frac{\sin\Omega t_2}{\pi t_2})=\frac{1}{2}\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\sin\Omega t_1}{\pi t_1}+\frac{1}{2}\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\sin\Omega t_2}{\pi t_2}$$

$$\lim_{\Omega\to\infty}\frac{\sin\Omega t}{\pi t}=\delta(t)$$

$$=\frac{1}{2}\delta(t_1)+\frac{1}{2}\delta(t_2)=\frac{1}{2}(\delta(t+2)+\delta(t-2))$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\delta(t+2)+\frac{1}{2}\delta(t-2)$$

（3） $H(\omega)=e^{a\omega}u(-\omega)$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{a\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{(a+jt)\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{a+jt}e^{(a+jt)\omega}\Big|_{-\infty}^{0},\qquad a>0$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{a+jt}=\frac{1}{2\pi}\frac{a-jt}{a^2+t^2}$$

（4） $H(\omega)=[u(\omega+2\pi)-u(\omega-2\pi)]e^{-j3\omega}$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[u(\omega+2\pi)-u(\omega-2\pi)]e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{+2\pi}e^{-j3\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{+2\pi}e^{-j(3+t)\omega}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-j(3+t)}e^{-j(3+t)\omega}\Big|_{-2\pi}^{+2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{j}{3+t}(2j)\sin 2\pi t=-\frac{1}{\pi(3+t)}\sin 2\pi t$$

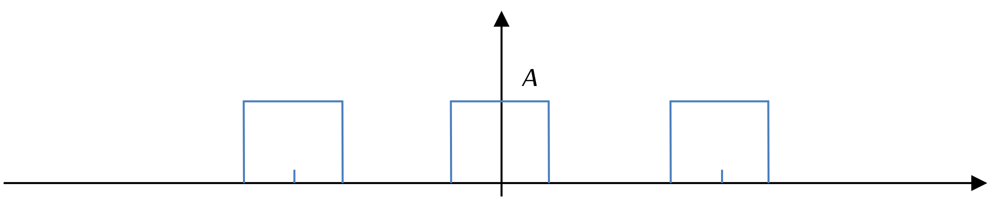
（5） $H(\omega)=j\dfrac{d}{d\omega}\{\dfrac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\}$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\frac{d}{d\omega}\{\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\}e^{j\omega t}d\omega=\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\omega}\{\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\}e^{j\omega t}d\omega=\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\{\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\}$$
$$=\frac{j}{2\pi}(e^{j\omega t}\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}de^{j\omega t})=\frac{j}{2\pi}(\frac{e^{j(2+t)\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-jt\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j2\omega}}{1+j\frac{\omega}{3}}e^{j\omega t}d\omega)$$
$$=\frac{3t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j2\omega}}{3+j\omega}e^{j\omega t}d\omega=\frac{3t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3+j\omega}e^{j\omega(t+2)}d\omega,\ \ t+2=t'$$
$$h(t')=\frac{3(t'-2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3+j\omega}e^{j\omega t'}d\omega=\frac{3(t'-2)}{2\pi}e^{-3t'}u(t'),\ \ h(t)=\frac{3t}{2\pi}e^{-3(t+2)}u(t+2)$$

（6） $H(\omega)=\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

$$h(t)=te^{-at}u(t)$$

6、求下图中三个矩形脉冲信号的频谱函数 $F(\omega)$



-T -τ/2 τ/2 T

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-(T+\frac{\tau}{2})}^{-(T-\frac{\tau}{2})}e^{-j\omega t}dt+\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt+\int_{(T-\frac{\tau}{2})}^{(T+\frac{\tau}{2})}e^{-j\omega t}dt$$

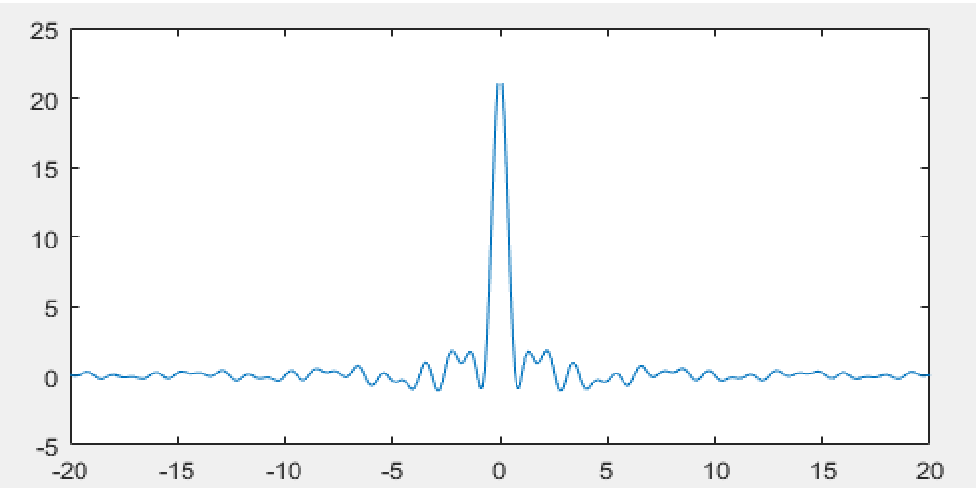
$$=\frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega t}\Big|_{-(T+\frac{\tau}{2})}^{-(T-\frac{\tau}{2})}+e^{-j\omega t}\Big|_{(-\frac{\tau}{2})}^{(\frac{\tau}{2})}+e^{-j\omega t}\Big|_{(T-\frac{\tau}{2})}^{(T+\frac{\tau}{2})}\right)$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\left(e^{j\omega(T-\frac{\tau}{2})}-e^{j\omega(T+\frac{\tau}{2})}+e^{-j\omega(\frac{\tau}{2})}-e^{j\omega(\frac{\tau}{2})}+e^{-j\omega(T+\frac{\tau}{2})}-e^{-j\omega(T-\frac{\tau}{2})}\right)$$

$$=-\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega(T-\frac{\tau}{2})}-e^{-j\omega(T-\frac{\tau}{2})}\right)+\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega(\frac{\tau}{2})}-e^{-j\omega(\frac{\tau}{2})}\right)+\frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega(T+\frac{\tau}{2})}-e^{-j\omega(T+\frac{\tau}{2})}\right)$$

$$=\frac{2}{\omega}\left(\sin(\frac{\tau}{2})\omega+\sin(T+\frac{\tau}{2})\omega+\sin(T-\frac{\tau}{2})\omega\right)$$

$$T=5,\quad \tau=2,\quad F(\omega)=\frac{2}{\omega}(\sin\omega+\sin 6\omega+\sin 4\omega)$$



综合题：

1、已知某系统的单位冲激响应$h(t)=e^{-at}u(t)$，现设其频谱函数为$H(\omega)=R(\omega)+jI(\omega)$。

（1）求$R(\omega)$和$I(\omega)$　（2）证明$R(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*I(\omega)$　（3）证明$I(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*R(\omega)$

$$h(t)=e^{-at}u(t),\ H(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}=\frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$R(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2},\qquad I(\omega)=\frac{-\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$r(t)=\frac{1}{2}e^{-a|t|},\quad i(t)=\begin{cases} j\frac{1}{2}e^{-at} & t\ge 0\\ -j\frac{1}{2}e^{at} & t<0\end{cases}$$

$$x(t)=\mathrm{sgn}(t),\quad X(\omega)=\frac{2}{j\omega},\quad \frac{1}{\pi\omega}=\frac{j}{2\pi}\cdot\frac{2}{j\omega}\Rightarrow 2\pi\frac{j}{2\pi}\mathrm{sgn}(t)=j\,\mathrm{sgn}(t)$$

$$R(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*I(\omega)\quad\Rightarrow\quad r(t)=-\frac{j}{2\pi}\mathrm{sgn}(t)\cdot i(t)$$

$$\frac{1}{2}e^{-a|t|}=-j\,\mathrm{sgn}(t)\begin{cases} j\frac{1}{2}e^{-at} & t\ge 0 \\ -j\frac{1}{2}e^{at} & t<0 \end{cases}=\frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

$$I(\omega)=-\frac{1}{\pi\omega}*R(\omega)\quad\Rightarrow\quad i(t)=-\frac{j}{2\pi}\mathrm{sgn}(t)\cdot r(t)$$

$$\begin{cases} j\frac{1}{2}e^{-at} & t\ge 0 \\ -j\frac{1}{2}e^{at} & t<0 \end{cases}=-j\,\mathrm{sgn}(t)\cdot\frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

2、已知系统函数 $H(\omega)=\dfrac{j\omega}{-\omega^2+j5\omega+6}$，系统的初始状态 $y(0)=2,\quad y'(0)=1,$ 激励 $f(t)=e^{-t}u(t)$

（1）求 0 输入响应 $y_{zi}(t)$　　（2）求 0 状态响应 $y_{zs}(t)$　　（3）求全响应 $y(t)$

$$H(\omega)=\frac{j\omega}{-\omega^2+j5\omega+6},\qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=0,\quad y(t)=Ae^{j\omega t}\to A(j\omega)^2e^{j\omega t}+5A(j\omega)e^{j\omega t}+6Ae^{j\omega t}=0$$

$$(j\omega)^2+5(j\omega)+6=0,\qquad j\omega_1=-3,\qquad j\omega_2=-2$$

$$y_q(t)=A_1e^{-3t}+A_2e^{-2t},\ y(0)=2,\qquad y'(0)=1,\qquad y_q(t)=-3e^{-3t}+4e^{-2t}$$

$$H(\omega)=\frac{j\omega}{-\omega^2+j5\omega+6}=\frac{j\omega}{(j\omega)^2+j5\omega+6}=\frac{j\omega}{(3+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{3}{(3+j\omega)}-\frac{2}{(2+j\omega)}$$

$$h(t)=(3e^{-3t}-2e^{-2t})u(t)$$

$$x(t)=e^{-t}u(t),\quad X(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\left(\frac{3}{(3+j\omega)}-\frac{2}{(2+j\omega)}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)$$

$$=\frac{1.5}{1+j\omega}-\frac{1.5}{3+j\omega}+\frac{2}{1+j\omega}-\frac{2}{2+j\omega}=\frac{3.5}{1+j\omega}-\frac{1.5}{3+j\omega}-\frac{2}{2+j\omega}$$

$$y_t(t)=e^{-t}u(t)-(1.5e^{-3t}+2e^{-2t})u(t)$$

$$y(t)=y_q(t)+y_t(t)=(-3e^{-3t}+4e^{-2t})u(t)+(e^{-t}-1.5e^{-3t}+2e^{-2t})u(t)$$

3、设一个连续时间 LTI 系统的频率响应为：

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

如果系统的输入信号 $x(t)$ 是一个周期 $T=8$ 的信号，即：

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<4\\ -1 & 4\le t<8\end{cases}$$ 求系统的输出 $y(t)$。

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<4\\ -1 & 4\le t<8\end{cases},$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{4}e^{-j\omega t}dt-\int_{4}^{8}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{-1}{j\omega}(e^{-j\omega t}\Big|_0^4-e^{-j\omega t}\Big|_4^8)=\frac{-1}{j\omega}(e^{-j\omega 4}-1-e^{-j\omega 8}+e^{-j\omega 4})$$

$$=\frac{1}{j\omega}(1-2e^{-j\omega 4}+e^{-j\omega 8})=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega 4})^2$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{\sin(4\omega)}{\omega},\qquad h(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -4\le t<4\\ 0 & other\end{cases}$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{j\omega}(1-2e^{-j\omega 4}+e^{-j\omega 8})\frac{\sin(4\omega)}{\omega}$$

$$=\frac{1}{j\omega}(\frac{\sin(4\omega)}{\omega}-2e^{-j4\omega}\frac{\sin(4\omega)}{\omega}+e^{-j8\omega}\frac{\sin(4\omega)}{\omega})$$

$$x(t-t_0)\underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftarrows}}e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\rightleftarrows}}\frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau-2\int_{-\infty}^{t-4}h(\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{t-8}h(\tau)d\tau$$

$$=0.5\int_{-4}^{t}d\tau-\int_{0}^{t-4}d\tau+0.5\int_{4}^{t-8}d\tau=0.5(t+4-2(t-4)+t-8-4)$$

$$=0$$

计算机实践：

脉动喷水式推进器的脉动激励信号如下图所示：

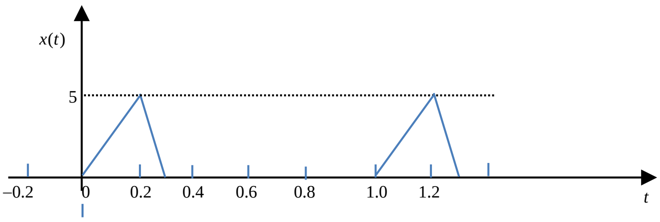
用 MATLAB 编程机算：

（1） $x(t)$ 的频谱，并画出在 $-4\le\omega\le 4$ 区间的波形；

（2） 求出信号 $x(t)$ 的频带范围（又称带宽）；

（3） 计算信号 $x(t)$ 的功率，并求出在信号带宽中的能量占比（能量谱）；

（4） 画出信号在带宽中的波形，在同一坐标中绘制 $X(\omega)$ 的幅频特性、相频特性波形。



$$x(t)=\begin{cases}25t & 0\le t<0.2\\ -50t+15 & 0.2\le t<0.3,\quad T=1,\quad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\\ 0 & 0.3\le t<1\end{cases}$$

$$X(\omega)=\int_0^1 x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\int_0^{0.2}25te^{-j2k\pi t}dt+\int_{0.2}^{0.3}(-50t+5)e^{-j2k\pi t}dt$$

$$=-\frac{25}{j2\pi}(\int_0^{0.2}tde^{-j2k\pi t})+\frac{50}{j2\pi}(\int_{0.2}^{0.3}tde^{-j2k\pi t})+5(\int_{0.2}^{0.3}e^{-j2k\pi t}dt)$$

$$=-\frac{25}{j2\pi}(te^{-j2k\pi t}\Big|_0^{0.2}-\int_0^{0.2}e^{-j2k\pi t}dt)+\frac{50}{j2\pi}(te^{-j2k\pi t}\Big|_{0.2}^{0.3}-\int_{0.2}^{0.3}e^{-j2k\pi t}dt)-\frac{5}{j2\pi}e^{-j2k\pi t}\Big|_{0.2}^{0.3}$$

$$=-\frac{25}{j2\pi}(te^{-j2k\pi t}\Big|_0^{0.2}+\frac{1}{j2\pi}e^{-j2k\pi t}\Big|_0^{0.2})+\frac{50}{j2\pi}(te^{-j2k\pi t}\Big|_{0.2}^{0.3}+\frac{1}{j2\pi}e^{-j2k\pi t}\Big|_{0.2}^{0.3})-\frac{5}{j2\pi}e^{-j2k\pi t}\Big|_{0.2}^{0.3}$$

$$=-\frac{25}{j2\pi}(0.2e^{-j0.4k\pi})+\frac{25}{4\pi^2}(e^{-j0.4k\pi})+\frac{50}{j2\pi}(0.3e^{-j0.6k\pi}-0.2e^{-j0.4k\pi})$$

$$-\frac{50}{4\pi^2}(e^{-j0.6k\pi}-e^{-j0.4k\pi})-\frac{5}{j2\pi}(e^{-j0.6k\pi}-e^{-j0.4k\pi})$$

$$=(-\frac{5}{j2\pi}+\frac{25}{4\pi^2}-\frac{10}{j2\pi}+\frac{50}{4\pi^2}+\frac{5}{j2\pi})e^{-j0.4k\pi}+(\frac{15}{j2\pi}-\frac{50}{4\pi^2}-\frac{5}{j2\pi})e^{-j0.6k\pi}$$

$$=(\frac{75}{4\pi^2}+\frac{j10}{2\pi})e^{-j0.4k\pi}-(\frac{50}{4\pi^2}+\frac{j10}{2\pi})e^{-j0.6k\pi},\qquad j=e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{75}{4\pi^2}e^{-j0.4k\pi}-\frac{50}{4\pi^2}e^{-j0.6k\pi}+\frac{10}{2\pi}e^{-j(0.4k\pi+\frac{\pi}{2})}-\frac{10}{2\pi}e^{-j(0.6k\pi+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\frac{75}{4\pi^2}\cos(0.4k\pi)-\frac{50}{4\pi^2}\cos(0.6k\pi)+\frac{10}{2\pi}\cos(0.4k\pi+\frac{\pi}{2})-\frac{10}{2\pi}\cos(0.6k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$-j\frac{75}{4\pi^2}\sin(0.4k\pi)+j\frac{50}{4\pi^2}\sin(0.6k\pi)-j\frac{10}{2\pi}\sin(0.4k\pi+\frac{\pi}{2})+j\frac{10}{2\pi}\sin\sin(0.6k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$=\{\frac{75}{4\pi^2}\cos(0.4k\pi)-\frac{50}{4\pi^2}\cos(0.6k\pi)-\frac{10}{2\pi}\sin(0.4k\pi)+\frac{10}{2\pi}\sin(0.6k\pi)\}$$

$$-j\{\frac{75}{4\pi^2}\sin(0.4k\pi)-\frac{50}{4\pi^2}\sin(0.6k\pi)+\frac{10}{2\pi}\cos(0.4k\pi)-\frac{10}{2\pi}\cos(0.6k\pi)\}$$

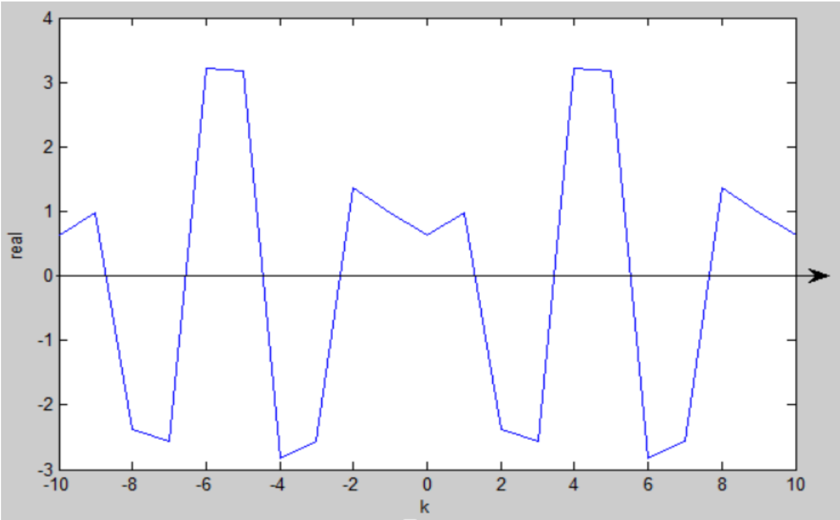
$$a_1=\frac{75}{4\pi^2},\qquad a_2=-\frac{50}{4\pi^2},\qquad a_3=-\frac{10}{2\pi},\qquad a_4=\frac{10}{2\pi}$$

$$\alpha=0.4k\pi,\qquad \beta=0.6k\pi$$

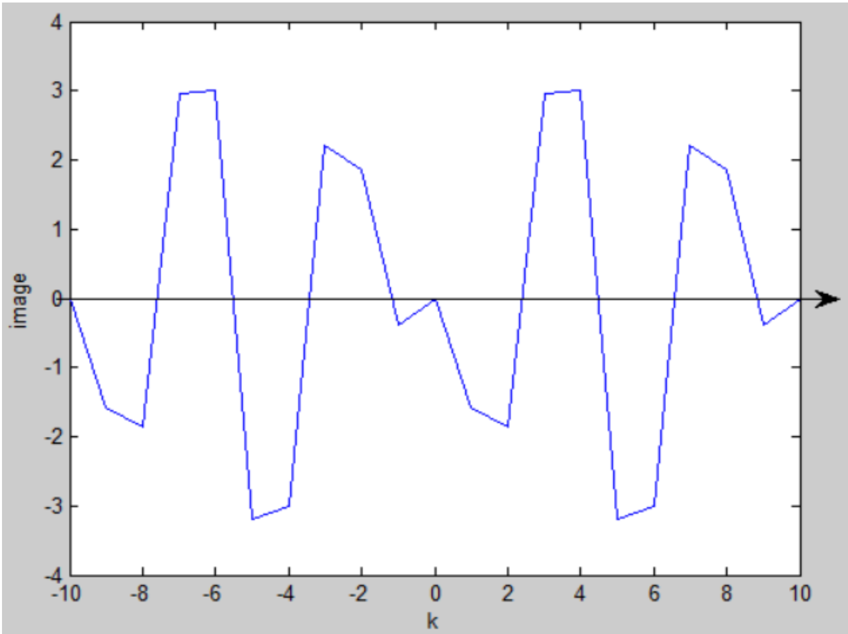
$$X(k) = R(k) + jI(k)$$

$$R(k) = a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_3 \sin\alpha + a_4 \sin\beta$$

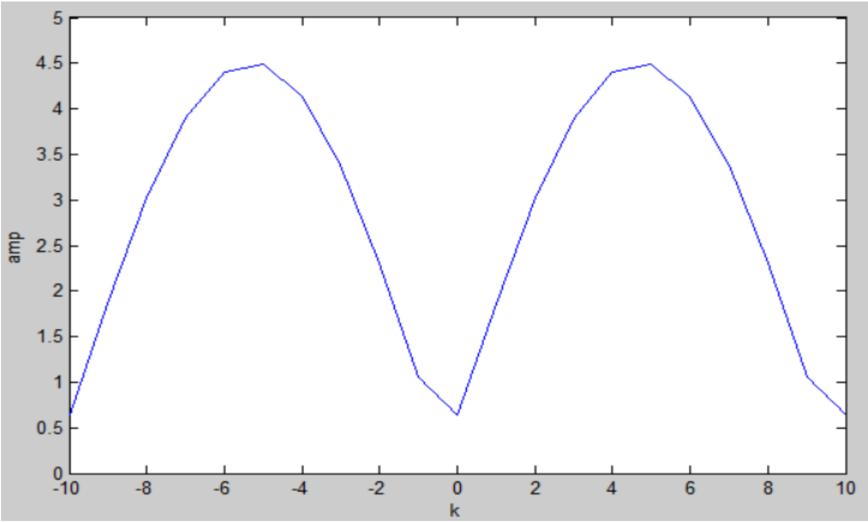
$$I(k) = -a_1 \sin\alpha - a_2 \sin\beta + a_3 \cos\alpha + a_4 \cos\beta$$



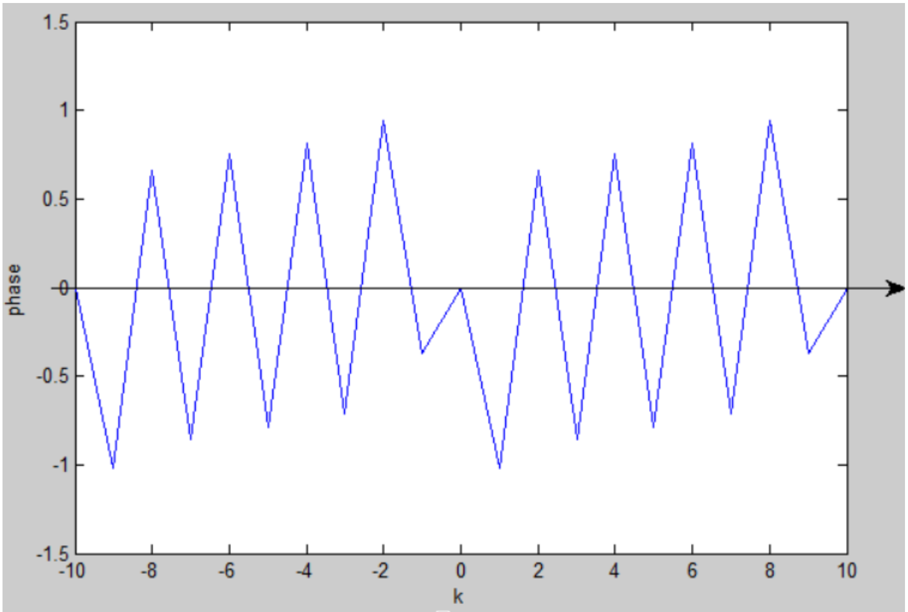
$\text{Real}\left[X(\Omega)\right]$



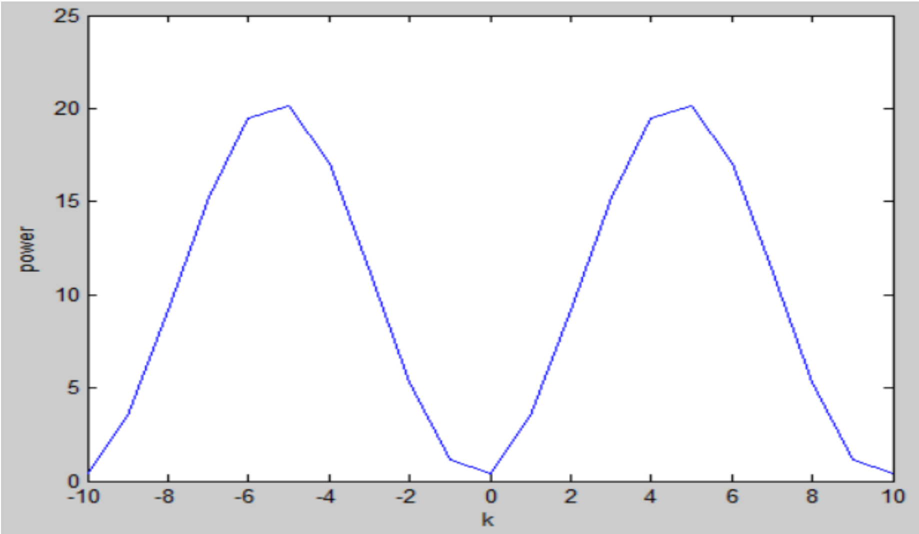
$\text{Image}\left[X(\Omega)\right]$



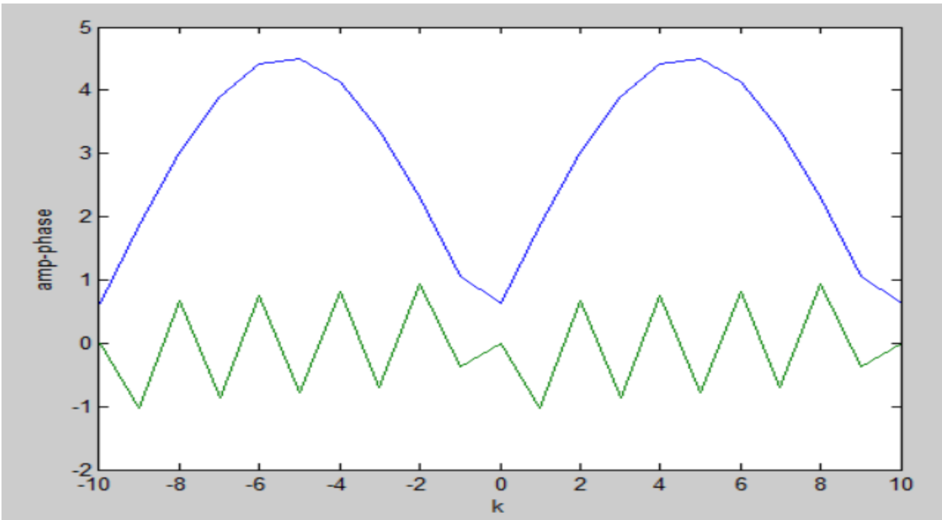
Amplitude$\left[X(\Omega)\right]$



Phase$\left[X(\Omega)\right]$



$\text{Power}\left[X(\Omega)\right]$



$\text{Amplitude}\left[X(\Omega)\right]$ & $\text{Phase}\left[X(\Omega)\right]$