

# 人工智能学院 2020 – 2021 学年《离散数学》 A 卷（参考答案）

(100 分钟 共 9 道题，满分 100 分)

一、 判断与选择题：对、错、错、对、B、C、D、A。

二、 逻辑题目。

1. 引入  $s$ ,  $\neg s \vee p$  即  $s \rightarrow p$ , 因此  $p$ , 又已知  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ , 因此  $q \rightarrow r$  为真, 又已知  $q$  为真, 因此  $r$ 。因此  $s \rightarrow r$ 。(6分)
2. 引入  $p$ , 由已知  $p \vee q \rightarrow r \wedge s$ , 因此  $p \rightarrow r$ , 因此  $r$  为真, 因此  $r$ 。又已知  $r \vee u \rightarrow v$ , 因此  $r \rightarrow v$  为真。因此  $v$ 。于是  $p \rightarrow v$ 。

三、 集合题目。

1. 对任意  $x \in A - B$ , 则  $x \in A$  且  $x \notin B$ 。(2分)  
又已知  $A - B = B - A$ , 所以  $x \in B - A$ , 所以  $x \notin A$  且  $x \in B$ 。矛盾。(1分)  
因此  $\forall x, x \notin A - B$ 。即  $A - B = \emptyset$ 。(1分)  
但  $A - B = A - A \cap B$  而  $A \cap B \subset A$ , 所以  $A = A \cap B = B$ 。(1分)
2. 300 以内的素数为 300 以内除不尽 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 的数。应用集合的计数方法。(1分)

为了避免计算除法, 计算分割点为:

300, 150, 100, 75, 60, 50, 42, 37, 33, 30, 27, 25, 23, 21, 20.

更小的分割点不再计算。除分割点及其以下得到的商依次为 1 到 15。简单计算得到的表:

- 300 : 11 · 17, 13 · 17; 2 · 5 · 17, 2 · 7 · 11, 2 · 7 · 13, 2 · 7 · 17, 2 · 11 · 13, 3 · 5 · 11, 3 · 5 · 13, 3 · 5 · 17, ...;
- 150 : 7 · 17, 11 · 13; 2 · 3 · 17, 2 · 5 · 11, 2 · 5 · 13, 3 · 5 · 7;
- 100 : 5 · 17, 7 · 11, 7 · 13; 2 · 3 · 13;
- 75 : 5 · 13; 2 · 3 · 11, 2 · 5 · 7;
- 60 : 3 · 17, 5 · 11;
- 42 : 3 · 13; 2 · 3 · 7;
- 37 : 2 · 17, 5 · 7;
- 33 : 3 · 11;
- 30 : ; 2 · 3 · 5;
- 27 : 2 · 13;
- 23 : 2 · 11;

- $21 : 3 \cdot 7$ ;

其中的省略号为  $3 \cdot 7 \cdot 11, 3 \cdot 7 \cdot 13$ 。注意到最小的 4 个不同素数的积为  $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ , 比它更大的都超过 300。设  $s_{300}$  表示 300 以内不是以上素数倍数的数的个数。除法为取整除法,

$$\begin{aligned} s_{300} &= 300 - \frac{300}{2} - \frac{300}{3} - \frac{300}{5} - \frac{300}{7} - \frac{300}{11} - \frac{300}{13} - \frac{300}{17} \\ &\quad + \frac{300}{2 \cdot 3} + \frac{300}{2 \cdot 5} + \frac{300}{2 \cdot 7} + \frac{300}{3 \cdot 5} + 14 + 13 + 11 + 9 + 8 \cdot 2 + 7 + 5 \cdot 2 + 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &\quad - 10 - 7 - 4 \cdot 2 - 3 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 10 \\ &\quad + 1 \\ &= 300 - 419 + 220 - 46 + 1 = 56, \end{aligned}$$

扣除 1 并补上前 7 个素数, 因此共 62 个素数。

同样方法计算 150 以内的素数:

$$\begin{aligned} s_{150} &= 150 - \frac{150}{2} - \frac{150}{3} - \frac{150}{5} - \frac{150}{7} - \frac{150}{11} \\ &\quad + \frac{150}{2 \cdot 3} + \frac{150}{2 \cdot 5} + \frac{150}{2 \cdot 7} + \frac{150}{2 \cdot 11} + \frac{150}{3 \cdot 5} + \frac{150}{3 \cdot 7} + \frac{150}{3 \cdot 11} + \frac{150}{5 \cdot 7} + \frac{150}{5 \cdot 11} + \frac{150}{7 \cdot 11} \\ &\quad - \frac{150}{2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{150}{2 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{150}{2 \cdot 3 \cdot 11} - \frac{150}{2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{150}{2 \cdot 5 \cdot 11} - \frac{150}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= 150 - 75 - 50 - 30 - 21 - 13 + 20 + 7 + 6 + 8 + 2 + 1 - 5 - 3 - 4 - 2 \\ &= 150 - 189 + 84 - 14 = 31, \end{aligned}$$

因此 150 以内共  $31 - 1 + 5 = 35$  个素数。150 和 300 之间共 27 个素数。

此题计算量较大, 酌情给分。

#### 四、二元关系题目。

- 设  $g(\langle x, y \rangle) = \langle u, v \rangle$ 。即

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \end{cases} \quad (1\text{分})$$

反函数即是  $u, v$  已知, 求  $x, y$ 。(1 分) 对上式解  $x, y$ , 得

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{-u+v}{2} \end{cases} \quad (2\text{分})$$

因此  $g^{-1}(\langle x, y \rangle) = \langle \frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2} \rangle$ 。(1 分)

2. 记正偶数集为  $E$ , 正奇数集为  $O$ , 负整数集记为  $Z_-$ 。

定义映射  $f_1 : N \rightarrow E$  为  $f_1(x) = 2x$ 。对不同的  $x_1, x_2 \in N$ , 显然得到的像是不同的, 且对任意偶数, 都可以找到该映射的原像。因此  $f_1$  是双射。(3分)

定义映射  $f_2 : Z_- \rightarrow O$  为  $f_2(x) = -2x - 1$ 。和上面证明过程类似, 得到  $f_2$  是双射。(3分)

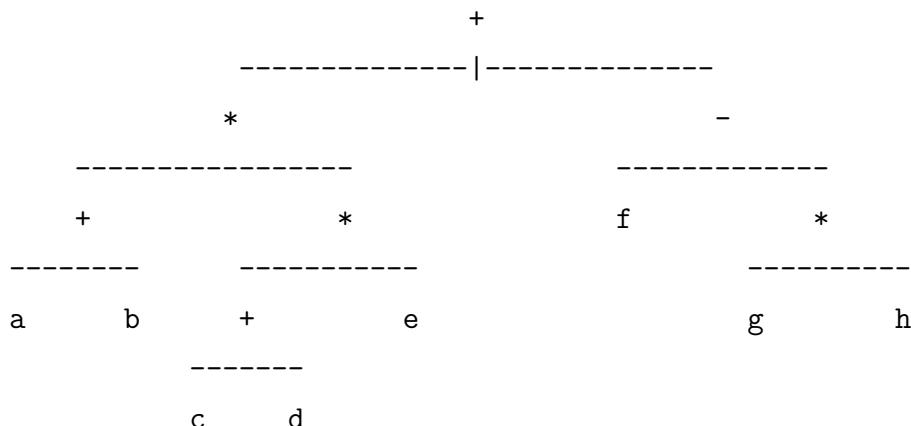
构造  $f : Z \rightarrow N$  为:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \geq 0 \\ f_2(x) & x < 0 \end{cases} \quad (2\text{分})$$

对任意不等的  $x_1, x_2 \in Z$ , 若  $x_1, x_2 \in N$ , 则  $f(x_1) = f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in Z_-$  类似可证。若  $x_1, x_2$  分别属于  $N$  和  $Z_-$ , 则由于  $f_1$  和  $f_2$  的像集之交是空集, 因此必有  $f(x_1) = f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f(x_2)$ 。因此  $f$  是映上的。(1分)

而对任意  $x \in N$ , 若  $x$  为偶数, 则取  $y = \frac{x}{2}$ , 若  $x$  为奇数, 则取  $y = -\frac{x+1}{2}$ 。显然有  $f(y) = x$ 。即  $f$  是满射。因此  $f$  是双射。(1分)

五、 算式的二叉有序树为: (7分)



波兰符号表示为:  $+*+ab**+cde-f*gh$ 。(3分)

六、 6人中选定一人, 记为  $a$ , 则除  $a$  外剩 5 人。这 5 人中或者  $a$  认识至少 3 个人, 或者  $a$  不认识至少 3 个人。(3分)

对  $a$  认识至少 3 个人的情形, 从  $a$  认识的人中取出任意 3 人。记这 3 人为  $b, c, d$ 。 $b, c, d$  这三人中若有两人相互认识, 比如  $b, c$  相互认识, 则  $a, b, c$  就是相互认识。若这三人两两相互不认识, 则也符合题意。因此这个情形下, 待证结论成立。(3分)

对  $a$  不认识至少 3 个人的情形同样证明。(2分)

图暂略。此题是书上题目换个叙述, 且留作作业题。(2分)

## 七、

1.  $G = \langle a \rangle$  的元为  $a^i, i = 1, \dots, 19$  和幺元  $e$ 。(1分)

$a^i$  是  $G$  的生成元是指满足  $\langle a^i \rangle = G$  的  $a^i$ 。故充要条件是  $i$  与 20 互素。(2分)

$G$  的生成元为  $a^1, a^3, a^7, a^9, a^{11}, a^{13}, a^{17}, a^{19}$ 。(2分)

2. 由运算表知集合关于该运算  $\circ$  是封闭的。(2分)

且对任意  $x \in \{e, a, b, c\}$ , 都有  $x \circ e = e \circ x = x$ 。 $e$  是幺元。(2分)

仍由运算表看出, 对任意  $x \in \{e, a, b, c\}$ , 都有  $x \circ x = e$ 。即每个元素都有逆元, 是其本身。(2分)

以下只需证明运算  $\circ$  满足结合律。即证对任意  $x, y, z \in G$ , 都有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

首先若  $x, y, z$  中某一个为  $e$ , 则易证。比如  $x = e$ , 则

$$(e \circ y) \circ z = y \circ z = e \circ (y \circ z).$$

对  $x, y, z$  均不是  $e$  的情形, 首先注意到  $a, b, c$  三个元素中任意两个做  $\circ$  都等于剩下那个元素。因此若  $x, y, z$  两两不等, 则

$$(x \circ y) \circ z = z \circ z = e = x \circ x = x \circ (y \circ z),$$

若  $x, y, z$  中两个相等, 另一个不等, 比如  $x = y \neq z$ , 则

$$(x \circ y) \circ z = e \circ z = z = x \circ (y \circ z),$$

若  $x, y, z$  都相等, 则

$$(x \circ x) \circ x = e \circ x = x = x \circ e = x \circ (x \circ x),$$

综合以上各种情形的等式知, 运算  $\circ$  满足结合律。因此  $G$  是群。(4分)

## 八、 问题就是从以下多重集

$$\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \dots, \infty \cdot 8, \infty \cdot 9\}$$

中取 5 组合。(2分)

因此这样的数个数为:

$$\binom{9+5-1}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5!} = 1287.$$

满足条件的数共有 1287 个。(3分)

九、由二项式定理，

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$
$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{2}\frac{1}{x^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{x^n}$$

因此  $(1+x)^n\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$  的常数项  $c_0$  为

$$c_0 = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2, \quad (2\text{分})$$

另一方面，

$$(1+x)^n\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = (1+x)^n \cdot \frac{(1+x)^n}{x^n} = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n} = \frac{1}{x^n} \left[ \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \cdots + \binom{2n}{2n}x^{2n} \right],$$

其常数项  $c'_0$  为

$$c'_0 = \binom{2n}{n}, \quad (2\text{分})$$

$c_0$  和  $c'_0$  是同一母函数的常数项，因此相等。即

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2, \quad (1\text{分})$$

证毕。