第二章

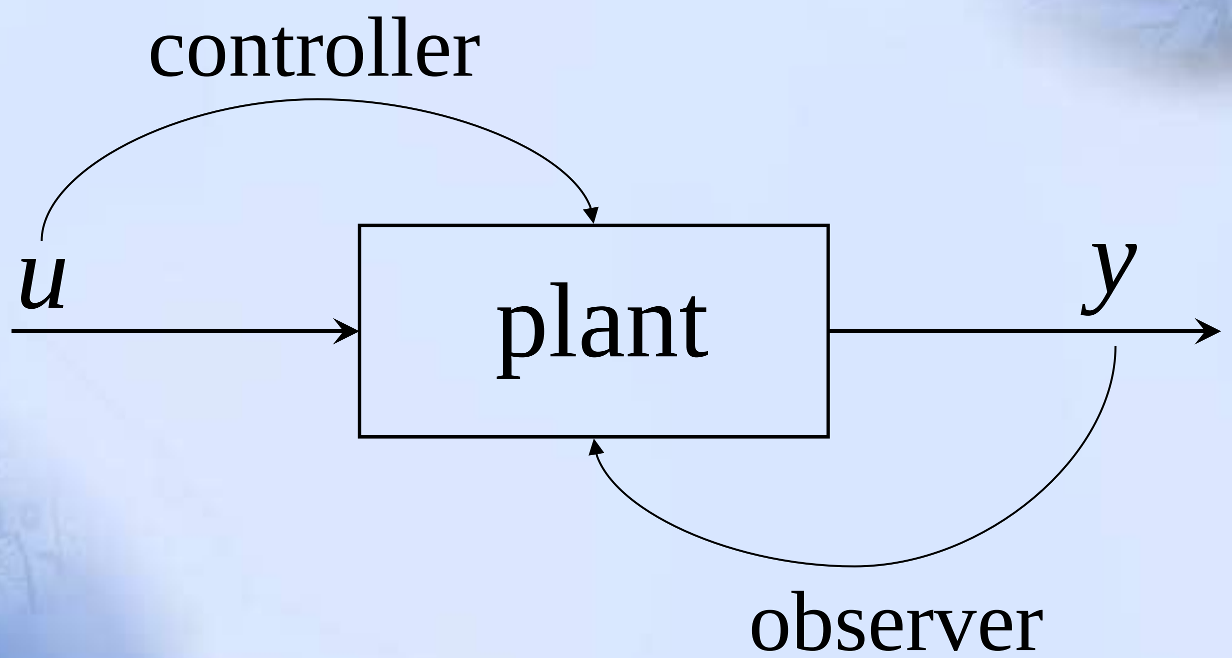
控制系统的结构性质

第二章控制系统的结构性质

- 2.1 线性定常系统的能控性与能观测性的概念
- 2.2 线性定常连续系统的能控性判据
- 2.3 线性定常连续系统的能观测性判据
- 2.4 线性离散系统的能控性与能观测性
- 2.5 线性定常系统的线性变换与规范分解
- 2.6 最小实现问题
- 2.7 动态系统的稳定性

§2.1线性定常系统的能控性与能观测性概念

§ 2.1.1 Introduction



- 能控性(Controllability) 、能观性(Observability)的概念由R. E. Kalman在1960年提出。

§ 2.1.1 Introduction

Design based on state space. Given $G(s)$, obtain a realization (A, B, C, D).

Based on (A, B, C, D), design a controller to meet the requirements. A realization can be viewed as a modeling method of a physical plant. Since realization is not unique, there are good as well as bad realizations (一个系统的实现是不唯一的，有好的，也有不好的).

From the control point of view, which one is good, and which one is bad?

Controllability and observability are two criteria for good realization (**能观能控是判断一个实现优良的两点重要准则**).

Example I

- To what extent, the input u can affect the state x.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = x_2 + u, & x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t x_{10} \\ x_2(t) = e^t x_{20} + e^t \int_0^t e^{-\tau} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

No matter how $u(t)$ is chosen or designed, it cannot affect $x_1(t)$.

Hence this system is uncontrollable.

Example II

- 给定系统动态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \xrightarrow{\text{表示为标量方程组}} \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u \\ y &= -6x_2 \end{aligned}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 状态变量 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 都是可通过选择控制量 $\boldsymbol{u}$ 而由始点达到原点，因而系统完全能控。
- 输出 $\boldsymbol{y}$ 只能反映状态变量 $\boldsymbol{x}_2$，而与状态变量 $\boldsymbol{x}_1$ 既无直接关系也无间接关系，所以系统是不完全能观测的。

§2.1.2 能控性

- 能控性
  - 对于控制系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是系统在 $\boldsymbol{t}_0$ 时刻的状态，如果存在一个有限时刻 $\boldsymbol{t}_1 > \boldsymbol{t}_0$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ $(\boldsymbol{t}_0 \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{t}_1)$，在 $\boldsymbol{u}(t)$ 的作用下将系统的状态 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $\boldsymbol{t}_1$ 时刻转移到原点，则称状态 $\boldsymbol{x}_0$ 是**能控**的(或可控的)。
  - 如果系统的任一状态都是能控的，则称该系统是**完全能控**的，简称 (A, B) **能控**。

§2.1.2 能控性

- 能达性
  - 对于上面的系统，若存在 $x(t_0)=0$ 转移到 $x(t_f)=x_f$ 的控制作用，则称状态 x_f 是**能达**的。
  - 若系统对于状态空间中的每一个状态都是能达的，则称系统是**完全能达**的。

对于线性定常系统而言，能控与能达是等效的。

§2.1.3 能观测性

- 系统完全能观测性

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

输入为零时，如果对任意给定的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 都存在有限时刻 $t_1>t_0$，使得通过$[t_0, t_1]$上的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 能唯一确定初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，则称该系统是**完全能观测**的，简记为(C, A)**能观测**。

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- 引理**2-1**及其证明
- 凯莱-哈密顿定理及推论
- **LTI**系统的能控性判据
- 能控性判据的证明
- 约当规范型判据

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- **引理2-1** 对线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

完全能控的充分必要条件是对任意$\boldsymbol{x}_0$，存在t_1

和$\boldsymbol{u}(t)$ $(0 \le t \le t_1)$，使得

$$\boldsymbol{x}_0 = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

引理2-1的证明：

假设(A, B)能控，由定义，对任意初始状态$\boldsymbol{x}_0$，存在$t_1>0$和$\boldsymbol{u}(t)$ $(0\le t\le t_1)$，使得

$$\boldsymbol{x}(t_1)=e^{\boldsymbol{A}t_1}\boldsymbol{x}_0+\int_0^{t_1}e^{\boldsymbol{A}(t_1-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=0$$

即

$$\boldsymbol{x}_0=-\int_0^{t_1}e^{-A\tau}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

反之，也容易得出能控，证毕。

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- **凯莱-哈密顿定理**

设n阶矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|$$

$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

则A满足其特征方程，即

$$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- **推论1**

矩阵A的$k(k\geq n)$次幂可表示为A的$(n-1)$阶多项式

$$A^k=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m A^m, \qquad k\geq n$$

- **推论2**

矩阵指数 e^{At} 可表示为A的$(n-1)$阶多项式

$$e^{At}=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- 判据：

n 维线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 完全能控的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件：

1. 能控性矩阵 $U = [B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B]$ 秩为 n。

2. $e^{-At}B$ 的所有行在 $[0,\infty)$ 上线性无关。

3. 对任意 $t_1 > t_0$，能控性克莱姆矩阵 $W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau$ 非奇异。

4. 对 A 的每个特征值 λ(因此对任意复数)，矩阵 $[\lambda I - A \vdots B]$ 秩为 n。

能控性判据1的证明 (必要性)

由(A, B)能控导出条件 (1)：

假设(A, B)能控, 则对任意初始状态$\boldsymbol{x}_0$，存在$t_1>0$和$\boldsymbol{u}(t)$ $(0\le t\le t_1)$，使得 $\boldsymbol{x}_0=-\int_0^{t_1}e^{-A\tau}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$，又$e^{-At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)(-A)^k=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\alpha_k(t)A^k$

则

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\underline{\int_0^{t_1}(-1)^{k+1}\alpha_k(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau}=\sum_{k=0}^{n-1}A^kB\tilde{u}_k=\left[B\ \vdots\ AB\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ A^{n-1}B\right]\tilde{\boldsymbol{u}}$$

即$[B\ \vdots\ AB\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ A^{n-1}B]\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{x}_0$ (*)

其中$\tilde{\boldsymbol{u}}=[\tilde{u}_0^T,\tilde{u}_1^T,\cdots,\tilde{u}_{n-1}^T]^T$, $\tilde{u}_k=(-1)^{k+1}\int_0^{t_1}\alpha_k(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$，$k=0, 1, \cdots, n-1$

由于(*)式作为一个线性代数方程组对任意$\boldsymbol{x}_0$有解，因此矩阵$[B\ \vdots\ AB\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ A^{n-1}B]$秩为$n$。

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- 判据：

n 维线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 完全能控的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件：

1. 能控性矩阵 $U = [B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B]$ 秩为 n。

2. $e^{-At}B$ 的所有行在 $[0,\infty)$ 上线性无关。

3. 对任意 $t_1 > t_0$，能控性克莱姆矩阵 $W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau$ 非奇异。

4. 对 A 的每个特征值 λ(因此对任意复数)，矩阵 $[\lambda I - A \vdots B]$ 秩为 n。

能控性判据1→2的证明

由条件(1)导出条件(2)：

反设(1)成立，(2)不成立，则存在$t_1 > t_0$及非零常向量$\boldsymbol{\alpha}$，使得在$[t_0, t_1]$上 $e^{-At}B$ 的行线性相关，即 $\boldsymbol{\alpha}^T e^{-At} B \equiv 0$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n]\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots \alpha_n E_n = 0$$

对上式逐次求导数得到

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}^T e^{-At} AB \equiv 0 \\ &\boldsymbol{\alpha}^T e^{-At} A^2 B \equiv 0 \\ &\qquad\vdots \\ &\boldsymbol{\alpha}^T e^{-At} A^{n-1} B \equiv 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}^T \underline{\{e^{-At}[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B]\}} \equiv 0$$

式中花括号中的矩阵将非零向量化为0，因此

$$rank\{e^{-At}[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B]\} < n$$

由于e^{At}可逆，因此得到$rank[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B] < n$

与(1)矛盾。

§2.2 线性定常连续系统的能控性判据

- 判据：

n 维线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 完全能控的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件：

1. 能控性矩阵 $U = [B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B]$ 秩为 n。

2. $e^{-At}B$ 的所有行在 $[0,\infty)$ 上线性无关。

3. 对任意 $t_1 > t_0$，能控性克莱姆矩阵 $W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}BB^Te^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau$ 非奇异。

4. 对 A 的每个特征值 λ(因此对任意复数)，矩阵 $[\lambda I - A \vdots B]$ 秩为 n。

能控性判据2 → 3的证明

由条件(2)导出条件(3):

半正定

反设(2)成立(3)不成立，存在$t_1 > t_0$使$|W(t_0,t_1)|=0$，因此存在非零向量$\boldsymbol{\alpha}$，使得$W(t_0,t_1)\boldsymbol{\alpha}=0$，因而$\boldsymbol{\alpha}^T W(t_0,t_1)\boldsymbol{\alpha}=0$，即

$$\boldsymbol{\alpha}^T W(t_0,t_1)\boldsymbol{\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{(\boldsymbol{\alpha}^T e^{-A\tau}B)(\boldsymbol{\alpha}^T e^{-A\tau}B)^T} d\tau = 0$$

$(\boldsymbol{\alpha}^T e^{-A\tau}\boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{1\times m})$ 行向量

由此可得

$$\boldsymbol{\alpha}^T e^{-A\tau}B \equiv 0 \qquad t_0 \le \tau \le t_1$$

这表明$e^{-At}B$的行线性相关，与(2)矛盾。

能控性判据的证明(充分性)

由条件(3)推出(*A*, *B*)能控：

设(3)成立，对任意$t_1 > t_0$, $W(t_0,t_1)$非奇异, 即$W(t_0,t_1)$可逆, 对任意$\boldsymbol{x}_0$，控制向量

$$\boldsymbol{u}(\tau) = -\boldsymbol{B}^T e^{-\boldsymbol{A}^T\tau}[W^{-1}(t_0,t_1)e^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}_0], \quad t_0 \le \tau \le t_1$$

将$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$在$t_1$时刻转移到原点。事实上

$$\boldsymbol{x}(t_1) = e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\boldsymbol{A}(t_1-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$= e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}\boldsymbol{x}_0 - e^{\boldsymbol{A}t_1}\underline{\int_{t_0}^{t_1} e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{-\boldsymbol{A}^T\tau}d\tau}\ \boldsymbol{W}^{-1}(t_0,t_1)e^{-\boldsymbol{A}t_0}\boldsymbol{x}_0$$

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}\boldsymbol{x}_0 - e^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}\boldsymbol{x}_0 = 0$$

这样就证明了(1)、(2)、(3)都是(*A*, *B*)能控的充分必要条件。

充分必要条件(4)的证明留在以后(P118)给出。

约当规范型判据

线性定常连续系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ 完全能控的充分必要条件分两种情况：

1) 矩阵A的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是两两相异的。线性变换可将系统状态方程变为对角线规范型：

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{B}\boldsymbol{u}$$

则系统完全能控的充分必要条件是上式中, $\bar{B}$ 不包含元素全为零的行。

约当规范型判据 (续)

2) 矩阵A的特征值为 $\lambda_1(\sigma_1$重$), \lambda_2(\sigma_2$重$), \cdots, \lambda_l(\sigma_l$重$)$ 且 $\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l=n$ 由线性变换可将系统状态方程化为约当规范型 $\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{B}\boldsymbol{u}$

其中:

$$\underset{(n\times n)}{\hat{A}}=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix},\quad \underset{(n\times m)}{\hat{B}}=\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_l \end{bmatrix}$$

$$\underset{(\sigma_i\times\sigma_i)}{J_i}=\begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha} \end{bmatrix},\quad \underset{(\sigma_i\times m)}{\hat{B}_i}=\begin{bmatrix} \hat{B}_{i1} \\ \hat{B}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{B}_{i\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(r_{ik}\times r_{ik})}{J_{ik}}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix},\quad \underset{(r_{ik}\times m)}{\hat{B}_{ik}}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{b}}_{1ik} \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{2ik} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{rik} \end{bmatrix}$$

而 $(r_{i1}+r_{i2}+\cdots+r_{i\alpha})=\sigma_i$，由 $\hat{B}_{ik}(k=1,2,\cdots,\alpha)$ 的最后一行所组成的矩阵

$$\hat{B}_{\sigma_i}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{b}}_{ri1} \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{ri2} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{b}}_{ri\alpha} \end{bmatrix}$$

对 i=1, 2, …, l 均为行线性无关。

关于能控性定义的说明（一）

- 对于连续时间定常线性系统，能控性与能达性是等价的。
- 对定常线性系统的能控性也可采用如下定义：如果对定常线性系统在时刻t_0的任一初始状态$\boldsymbol{x}_0$和任意状态$\boldsymbol{x}_1$，都存在有限时刻 $t_1>t_0$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ $(t_0\le t\le t_1)$，使在$\boldsymbol{u}(t)$的作用下将系统的状态$\boldsymbol{x}_0$在时刻t_1转移到$\boldsymbol{x}_1$，则称该定常线性系统是完全能控的。
- 对连续的定常线性系统，这两个定义是等价的。

关于能控性定义的说明（二）

- 可以证明在先前定义下的能控系统，对任意给定的$t_1>t_0$，以及任意两个状态$\mathbf{x}_0$和$\mathbf{x}_1$，都存在控制向量$\boldsymbol{u}(t)$（$t_0 \le t \le t_1$），使在$\boldsymbol{u}(t)$的作用下，系统的状态由$\boldsymbol{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$转移到$\boldsymbol{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$。实现这一状态转移的控制向量是：

$$\boldsymbol{u}(t)=B^T e^{-A^T t}\{W^{-1}(t_0,t_1)[e^{-At_1}\mathbf{x}_1-e^{-At_0}\mathbf{x}_0]\}$$

P21的$\boldsymbol{u}(t)$是上式在$\boldsymbol{x}_1=0$时的特例

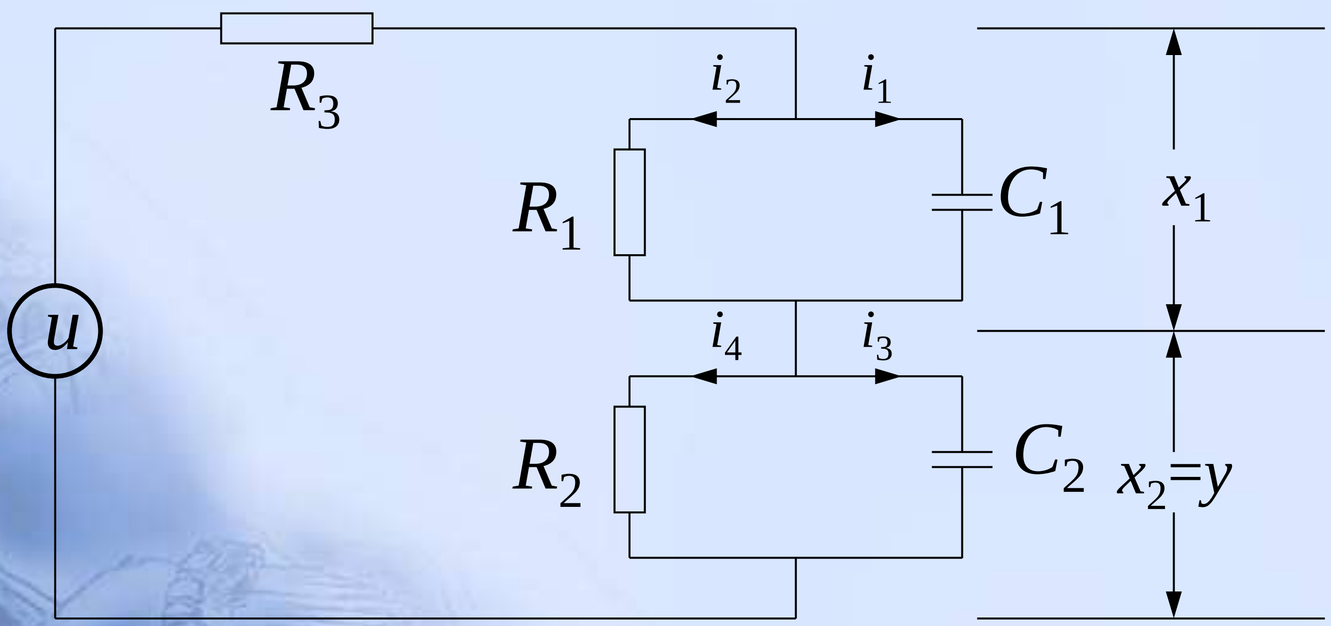
举例

- 一级倒立摆是完全能控的。

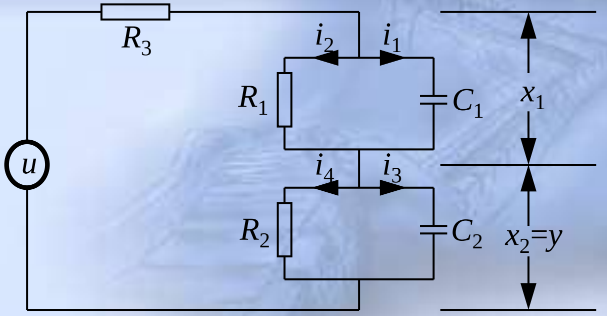
  含义：当摆杆稍稍偏离垂直位置时，总可以通过在小车上施加适当的外力，使得摆杆推回到垂直位置(零状态)。

举例

- 例2.1：如下图所示网络，试用能控性判据判断其能控性



- 解：如图所示网络的微分方程为



$$x_1 = R_1 i_2,\ x_2 = R_2 i_4$$

$$R_3(i_1 + i_2) + x_1 + x_2 = u$$

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4, \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} i_1, \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} i_3$$

式中 $x_1 = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt;\quad x_2 = \frac{1}{C_2}\int i_3 dt$

消去 $i_1 \sim i_4$，得到状态方程

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1}\right)x_1 - \frac{1}{R_3 C_1}x_2 + \frac{1}{R_3 C_1}u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{R_3 C_2}x_1 - \left(\frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)x_2 + \frac{1}{R_3 C_2}u$$

(接上页)

$$S=\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_3C_1} & -\dfrac{1}{R_3C_1}\left(\dfrac{1}{R_3C_1}+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)-\dfrac{1}{R_3^2C_1C_2} \\ \dfrac{1}{R_3C_2} & -\dfrac{1}{R_3C_2}\left(\dfrac{1}{R_3C_2}+\dfrac{1}{R_2C_2}\right)-\dfrac{1}{R_3^2C_1C_2} \end{bmatrix}$$

- 当R_1=R_2，C_1=C_2 时，$\operatorname{rank} S=1<n$，系统不能控。

  否则，$\operatorname{rank} S=2=n$，系统能控。

- 当R_1=R_2，C_1=C_2 时，$x_1=x_2$，此时不能控
- 无法使系统状态偏离平面上的直线 $x_1=x_2$

判断能控性的MATLAB程序

- 如本章开篇的例子（例II）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

判断能观测性的例子

判断能控性的Matlab程序如下：

```
A=[4 0;0 -5];
B=[1;2];
[m,n]=size(A);
temp=eye(size(A));
for i=1:m
    U(:,i)=temp * B;
    temp=A*temp;
end
r=rank(U);
fprintf('\n');
if(r==m)
    disp('(A,B)能控');
else
    disp('(A,B)不完全能控');
end
fprintf('\n');
```

这段程序可用

U=ctrb(A, B)

代替，则U为能控矩阵。

输出结果为：

```
>>
(A, B)能控

>>
```

§2.2 LTI 系统的能观测性判据

- 2.2.1 能观测性判据
- 2.2.2 能观测性判据的证明
- 2.2.3 能控性与能观测性的对偶性

§2.1.3 能观测性

- 系统完全能观测性

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$$

系统输入为零时，如果对系统的任意给定的初始状态$\boldsymbol{x}_0$都存在有限时刻$t_1>t_0$，使得通过在时间区间$[t_0, t_1]$上的输出$y(t)$能唯一确定初始状态$\boldsymbol{x}_0$，则称该系统是**完全能观测**的，简记为$\boldsymbol{(C, A)}$**能观测**。

对定常线性系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$

- 直观含义：对于自治运动(非零初始状态)，若系统输出响应是静止的，即初始状态对系统输出响应没有任何影响，输出不能反映状态的任何信息
  - 当 $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$，初始状态为 $\boldsymbol{x}_0$ 时，设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是对应于初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 的状态轨线，如果与之对应的输出 $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$，则由输出 $\boldsymbol{y}$ 不能唯一确定初始状态 $\boldsymbol{x}$ (除零状态以外)，这时称 $\boldsymbol{x}_0$ 为不能观测的状态。
  - 如果系统不存在不能观测的状态，则称系统是完全能观测的。

§2.2 LTI 系统的能观测性判据

- 系统能观测性判据：

n维定常线性系统完全能观测的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件满足：

1. 能观测矩阵$V=\begin{bmatrix}C^T & \vdots & A^TC^T & \vdots & (A^T)^2C^T & \vdots & \cdots & \vdots & (A^T)^{n-1}C^T\end{bmatrix}^T$秩为$n$。

2. Ce^{At}的所有列在$[0,\infty)$上线性无关。

3. 对任$t_1>t_0$，能观测性克莱姆矩阵$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}\mathrm{d}\tau$非奇异。

4. 对A的每个特征值λ(因此对任意复数), 矩阵$\begin{bmatrix}\lambda I-A\\ C\end{bmatrix}$秩为$n$。

能观测性判据的证明 (必要性)

由(C, A)能观测得到条件(1)：

用反证法，设(C, A)能观测，能观测性矩阵V的秩$<n$，则必存在n维非0向量$\boldsymbol{x}_0$，使得$V\boldsymbol{x}_0=0$，即

$$V\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} C\boldsymbol{x}_0 \\ CA\boldsymbol{x}_0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\boldsymbol{x}_0 \end{bmatrix}=0 \quad 或 \quad CA^i\boldsymbol{x}_0=0 \quad i=0,1,\cdots,n-1$$

在状态方程中令$\boldsymbol{u}(t)=0$，则$\boldsymbol{y}(t)=Ce^{At}\boldsymbol{x}_0$，由$e^{At}$的有限形式得

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)CA^k\boldsymbol{x}_0=0$$

这表明x_0不能由输出$y(t)$决定，与(C, A)能观测矛盾。

§2.2 LTI 系统的能观测性判据

- 系统能观测性判据判据：

n维定常线性系统完全能观测的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件满足：

1. 能观测矩阵$V=\begin{bmatrix}C^T & \vdots & A^TC^T & \vdots & (A^T)^2C^T & \vdots & \cdots & \vdots & (A^T)^{n-1}C^T\end{bmatrix}^T$秩为$n$。

2. Ce^{At}的所有列在$[0,\infty)$上线性无关。

3. 对任$t_1>t_0$，能观测性克莱姆矩阵$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}\mathrm{d}\tau$非奇异。

4. 对A的每个特征值λ(因此对任意复数), 矩阵$\begin{bmatrix}\lambda I-A \\ C\end{bmatrix}$秩为$n$。

能观测性判据1→2的证明

由条件(1)导出条件(2)：

设V的秩为n，反设(2)不成立，即存在非零常向量$\boldsymbol{\alpha}_0$和$t_1 > t_0$，使得在$[t_0, t_1]$上

$$Ce^{At}\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0$$

$$[E_1, E_2, \cdots E_n]\begin{bmatrix} \alpha_{0,1} \\ \alpha_{0,2} \\ \vdots \\ \alpha_{0,n} \end{bmatrix} = \alpha_{0,1}E_1 + \alpha_{0,2}E_2 + \cdots \alpha_{0,n}E_n = 0$$

对上式逐次求导数得到

$$\left.\begin{array}{l} CAe^{At}\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0 \\ CA^2e^{At}\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0 \\ \quad\vdots \\ CA^{n-1}e^{At}\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} e^{At}\boldsymbol{\alpha}_0 \equiv 0$$

因此矩阵的V秩小于n，与(1)矛盾。

§2.2 LTI 系统的能观测性判据

- 系统能观测性判据判据：

n维定常线性系统完全能观测的充分必要条件是下列互相等价的任何一个条件满足：

1. 能观测矩阵$V=\begin{bmatrix}C^T & \vdots & A^TC^T & \vdots & (A^T)^2C^T & \vdots & \cdots & \vdots & (A^T)^{n-1}C^T\end{bmatrix}^T$秩为$n$。

2. Ce^{At}的所有列在$[0,\infty)$上线性无关。

3. 对任$t_1>t_0$，能观测性克莱姆矩阵$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}\mathrm{d}\tau$非奇异。

4. 对A的每个特征值λ(因此对任意复数), 矩阵$\begin{bmatrix}\lambda I-A\\ C\end{bmatrix}$秩为$n$。

能观测性判据2→3的证明

由条件(2)导出条件(3)：

反设(2)成立(3)不成立，存在 $t_1 > t_0$，使$|W(t_0,t_1)|=0$，或存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{\alpha}^T W(t_0,t_1)=0$ ，因而 $\boldsymbol{\alpha}^T W(t_0,t_1)\boldsymbol{\alpha}=0$，即

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\alpha}^T e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\boldsymbol{\alpha}\, d\tau = \int_{t_0}^{t_1} (Ce^{A\tau}\boldsymbol{\alpha})^T \underline{(Ce^{A\tau}\boldsymbol{\alpha})}\, d\tau = 0$$

列向量

由此可得到在 $[t_0,t_1]$上

$$Ce^{At}\boldsymbol{\alpha} \equiv 0$$

与(2)矛盾。

能观测性判据的证明(充分性)

由条件(3)推得(C, A)能观测：

设(3)成立, 对任$t_1 > t_0, W^{-1}(t_0, t_1)$存在。当$\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$时有

$$\boldsymbol{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) = Ce^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

上式两端左乘$e^{A^T t}C^T$得到$e^{A^T t}C^T\boldsymbol{y}(t) = e^{A^T t}C^T Ce^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$

积分得

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t}C^T\boldsymbol{y}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t}C^T Ce^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0\,dt = W(t_0, t_1)e^{-At_0}\boldsymbol{x}_0$$

由此得到 $\boldsymbol{x}_0 = e^{At_0}W^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t}C^T\boldsymbol{y}(t)\,dt$

即$\boldsymbol{x}_0$由$\boldsymbol{y}(t)$唯一确定, 因此(C, A)能观测。

这样就证明了(1), (2), (3) 都是(C, A)能观测的充分必要条件, 充分必要条件(4)的证明在后面(P123)给出。

关于能观测性的说明

- 能观测克拉姆矩阵的理论意义，给出了由输出 $y(t)$ 确定能观测状态 x_0 的构造方法

$$\boldsymbol{x}_0 = e^{At_0} W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T t} C^T \boldsymbol{y}(t) \mathrm{d}t$$

- 对任意的 t_1 成立
- 理论结果与实际应用之间的差异。当 t_1 太小时，被积函数在物理上可能是不能实现的。

能控性与能观测性的对偶性

由前两节的内容可以看出，能控性与能观测性的定理及其证明非常相似，实际上能控性与能观测性之间存在着很紧密的对偶关系。这个对偶关系在理论上和应用上都是很重要的 。

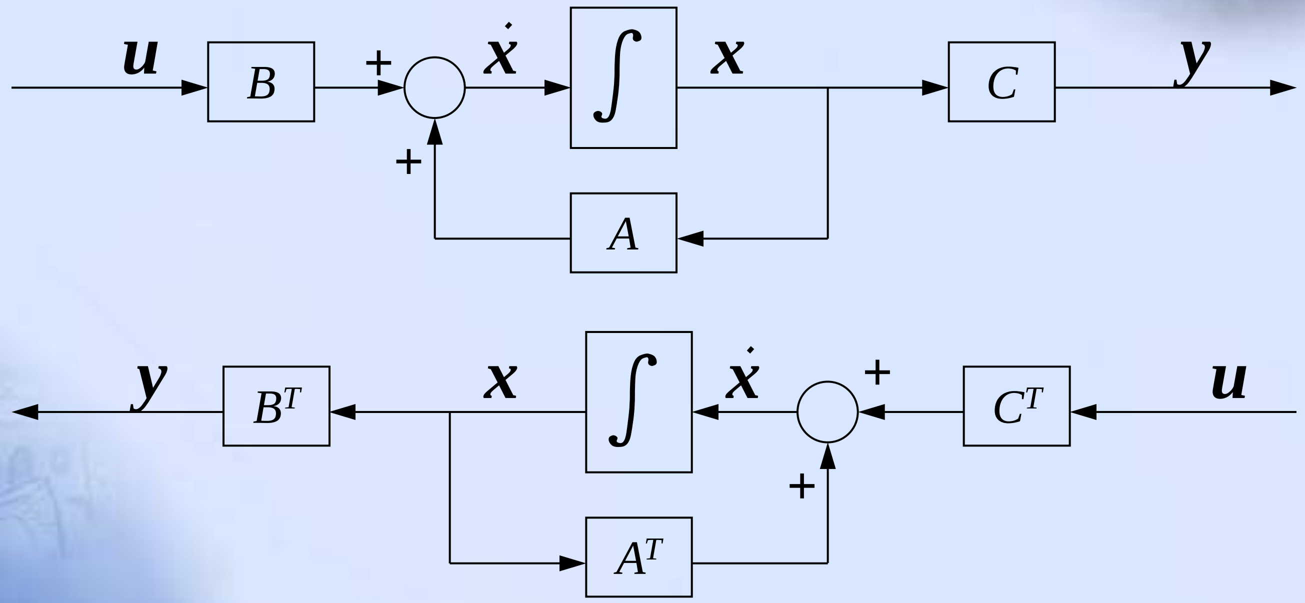
对连续时间定常线性系统

$$S: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{定义对偶系统}} S^T: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A^T\boldsymbol{x} + C^T\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = B^T\boldsymbol{x} \end{cases}$$

可将系统的能观性(能控性)分析问题转换为其对偶系统的能控性(能观性)分析。

能控性与能观测性的对偶性

- 对偶系统的关系如下图所示：



- 互为对偶的两个系统，信号传递方向相反，输入端与输出端互换，信号引出点与综合点互换，相应的矩阵转置。

能控性与能观测性的对偶性

关于对偶系统有如下定理：

定理2.1 若系统 S 完全能控，则对偶系统 S^T 完全能观测；若系统S完全能观测，则对偶系统S^T完全能控。

设V和V_T分别为S和S^T的能观测性矩阵,

U和U_T分别为S和S^T的能控性矩阵, 则 $U_T = V^T$, $V_T = U^T$

所以，S能控$\Leftrightarrow rankU = n \Leftrightarrow rankU^T = n \Leftrightarrow rankV_T = n \Leftrightarrow$ S^T能观。

同理，S能观$\Leftrightarrow rankV = n \Leftrightarrow rankV^T = n \Leftrightarrow rankU_T = n \Leftrightarrow$ S^T能控。

判断能观测性的Matlab程序

仍以判断能控性的例子判断能观测性，程序如下：

```
A=[4,0;0,-5];
C=[0 -6];
[m,n]=size(A);
temp=eye(size(A));
for i=1:m
    V(i,:)=C*temp;
    temp=A*temp;
end
r=rank(V);
fprintf('\n');
if(r==m)
    disp('(C,A)能观测');
else
    disp('(C,A)不完全能观测');
end
fprintf('\n');
```

这段程序可用

V=obsv(A, C);

代替，则V为能观测矩阵。

输出结果为：

```
>>
(C, A)不完全能观测

>>
```

2.4 线性离散系统的能控性与能观测性

- 2.4.1 线性离散系统的能控性和能达性
- 2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据
- 2.4.3 线性离散系统的能观测性
- 2.4.4 线性定常离散系统的能观测性判据
- 2.4.5 连续动态方程离散化后的能控性和能观测性

2.4.1 线性离散系统的能控性和能达性

- 设线性时变离散时间系统的状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k), \quad k \in T_k \qquad (2.4.1)$$

其中 T_k 为时间区间。如果对**初始时刻** $l \in T_k$ 和状态空间中的**所有非零状态** $\boldsymbol{x}(l)$，都存在时刻 $m \in T_k$，$m > l$ 和对应的控制 $\boldsymbol{u}(k)$，使得 $\boldsymbol{x}(m) = \boldsymbol{0}$，则称系统在时刻 l 为完全能控。

- 对应地，如果对初始时刻 $l \in T_k$ 和**初始状态** $\boldsymbol{x}(l) = \boldsymbol{0}$，存在时刻 $m \in T_k$，$m > l$ 和相应的控制 $\boldsymbol{u}(k)$，使 $\boldsymbol{x}(m)$ **可为状态空间中的任意非零点**，则称系统在时刻 l 为完全能达。

离散系统能控性和能达性的等价条件

- 线性时变离散时间系统(2.4.1)的能控性和能达性等价的充分必要条件是系统矩阵$A(k)$对所有 $k\in[l, m\text{-}1]$为非奇异。
- 线性定常离散时间系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k) \quad k=0,1,2,\cdots \qquad (2.4.2)$$

能控性和能达性等价的充分必要条件是系统矩阵A为非奇异。

- 如果离散时间系统(2.4.1)或(2.4.2)是相应连续时间系统的时间离散化模型，则其能控性和能达性必是等价的。

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

- 1. 首先讨论A非奇异的情况：

对于多输入系统，设系统状态方程为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$$

所谓能控性问题即能否求出无约束控制向量序列$\boldsymbol{u}(0)$, $\boldsymbol{u}(1)$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}(n\text{-}1)$, 使系统从任意初态$\boldsymbol{x}(0)$转移至$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{0}$。上式的解为

$$\boldsymbol{x}(k)=A^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}B\boldsymbol{u}(i)$$

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

$$\boldsymbol{x}(k)=A^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}B\boldsymbol{u}(i)\qquad \boldsymbol{x}\in R^n, A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, \boldsymbol{u}\in R^m$$

n为x的维数，等于控制步数

令$k=n$, $\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{0}$, 且解式两端左乘 A^{-n} ,有

$$\boldsymbol{x}(0)=-\sum_{i=0}^{n-1}A^{-1-i}B\boldsymbol{u}(i)=-[A^{-1}B\boldsymbol{u}(0)+A^{-2}B\boldsymbol{u}(1)+\cdots+A^{-n}B\boldsymbol{u}(n-1)]$$

$$=-\begin{bmatrix}A^{-1}B & A^{-2}B & \cdots & A^{-n}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}(0)\\ \boldsymbol{u}(1)\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}(n-1)\end{bmatrix}\qquad(2.4.3)$$

记 $S_1'=[A^{-1}B \quad A^{-2}B \quad \cdots \quad A^{-n}B]$

S_1'为(nxnm)矩阵，由子列向量$\boldsymbol{u}$(0)，$\boldsymbol{u}$(1)，…$\boldsymbol{u}$(n-1)构成的控制列向量是nm维的。(2.4.3)式含n个方程，但有nm个待求的控制量。由于初态$\boldsymbol{x}$(0)可任意给定，根据解存在定理, 矩阵S_1'的秩为n时，方程组才有解。

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

A 非奇异时，多输入线性离散系统能控的充分必要条件

1. $\mathrm{rank} S_1' = n \qquad (S_1' = [A^{-1}B \quad A^{-2}B \quad \cdots \quad A^{-n}B])$

2. $\mathrm{rank} S_2' = \mathrm{rank}[A^n S_1'] = \mathrm{rank}[A^{n-1}B \quad \cdots \quad AB \quad B] = n$

3. $\mathrm{rank} S_2 = \mathrm{rank}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = n$

4. $\det S_2 S_2^T \neq 0$

5. $\mathrm{rank} S_2 S_2^T = n$

1至5都是多输入离散系统的能控性判据，通常使用式3或4较为方便。

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

由于(2.4.3)式中的方程个数少于未知量个数，方程组的解不唯一，可以任意假定$(nm-n)$个控制量，其余n个控制量才能唯一确定。多输入系统控制序列的选择，通常具有无穷多种方式。

由于S_2的行数总小于列数，因而在列写S_2时，只要所选取的列能判断出S_2的秩为n，便不必再将S_2的其余列都列写出来。由于S_2满秩时，S_2^T必满秩，n阶方阵$S_2S_2^T$也必满秩，这时计算一次n阶行列式$\det S_2S_2^T$便可确定能控性，可能会比多次计算S_2的n阶行列式要简单一些。

多输入线性定常离散系统由任意初态转移至原点一般可少于n个采样周期。

Example 2.2

两输入线性定常离散系统的状态方程为:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

试判断能控性，并研究使 $\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{0}$ 的可能性。

一步控制到原点

解：

$$S_2=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 10\end{array}\right]$$

显然，由前三列组成的矩阵的行列式不为零，故系统能控，一定能求得控制序列使系统由任意初始状态三步内转移到原点。

由 $\boldsymbol{x}(1)=A\boldsymbol{x}(0)+B\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{0}$ 可得

$$\boldsymbol{x}(0)=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)=-\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1(0)\\ \boldsymbol{u}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1(0)\\ \boldsymbol{u}_2(0)\end{bmatrix}$$

设初始状态为$\boldsymbol{x}(0)=[2\ \ 2\ \ 2]^T$，由于

$$\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & \frac{1}{2}\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}$$

可知不存在$u_1(0), u_2(0)$使得上述方程组成立。

因此，本例不能使系统由任意初始状态一步内转移到原点。

当B为满秩的方阵时，存在控制序列在一步之内转移到原点。$\boldsymbol{x}(1)=A\boldsymbol{x}(0)+B\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{u}(0)=-B^{-1}A\boldsymbol{x}(0)$

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

- 2. A 为奇异阵的情况

  $\mathrm{rank}(S_2)=n$ 只是系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$ 能控的充分条件，但不是必要条件，因为如果 $A^n=0$，对任何 $\boldsymbol{x}_0$，控制序列 $\boldsymbol{u}(0)=0,\cdots,\boldsymbol{u}(n\text{-}1)=0$ 总可将它转移到原点。

$$\boldsymbol{x}(n)=A^n\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-1-i}B\boldsymbol{u}(i)$$

2.4.2 线性定常离散系统的能控性判据

- 线性定常离散系统能控性与能达性的一般判据(A为奇异或非奇异)

定理1. 定常线性时间离散系统**完全能控**的充分必要条件是对某个正整数k，

$$Span[B \ \vdots \ AB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ A^{k-1}B] \supseteq Span[A^k]$$

其中$Span[\ ]$表示方括号中的列向量所生成的向量空间

定理2. 系统**完全能达**的充分必要条件是矩阵

$$U = [B \ \vdots \ AB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ A^{n-1}B]$$

的秩为n。

证明：$\boldsymbol{x}(k) = A^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B\boldsymbol{u}(i) \qquad \boldsymbol{x}(0) = 0$

$$\boldsymbol{x}(n) = \left[B \ \vdots \ AB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ A^{n-1}B\right][\boldsymbol{u}^T(n-1), \cdots, \boldsymbol{u}^T(0)]^T$$

2.4.3 线性离散系统的能观测性

- 设离散系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A(k)\boldsymbol{x}(k)+B(k)\boldsymbol{u}(k),\quad k\in T_k$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C(k)\boldsymbol{x}(k)+D(k)\boldsymbol{u}(k)$$

若对初始时刻$l\in T_k$的任意初始状态$\boldsymbol{x}(l)=\boldsymbol{x}_0$，都存在有限时刻$m\in T_k$，$m>l$，且可由$[l, m]$上的输出$\boldsymbol{y}(k)$唯一地确定$\boldsymbol{x}_0$，则称系统在时刻$l$完全能观测。

2.4.4 线性定常离散系统的能观测性判据

- 设线性定常离散系统的动态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{u}(k)$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{y}(k)$ 为 r 维输出向量，其解为

$$\boldsymbol{x}(k)=A^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}B\boldsymbol{u}(i)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=CA^k\boldsymbol{x}(0)+C\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-1-i}B\boldsymbol{u}(i)+D\boldsymbol{u}(k)$$

2.4.4 线性定常离散系统的能观测性判据

研究能观测性问题时，$\boldsymbol{u}(k)$, A, B, C, D均为已知 (which can be cancelled in the designed observers)，故不失一般性，可将动态方程简化为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)$$

对应的解为

$$\boldsymbol{x}(k)=A^k\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=CA^k\boldsymbol{x}(0)$$

2.4.4 线性定常离散系统的能观测性判据

将$\boldsymbol{y}(k)$写成展开式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y}(0) &= C\boldsymbol{x}(0) \\ \boldsymbol{y}(1) &= CA\boldsymbol{x}(0) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{y}(n\text{-}1) &= CA^{n\text{-}1}\boldsymbol{x}(0) \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.4)$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(0) \\ \boldsymbol{y}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \qquad (2.4.5) \qquad \text{令} \quad V_1^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.4.4 线性定常离散系统的能观测性判据

- V_1^T 称为线性定常离散系统的能观测性矩阵，为$(nr \times n)$ 维矩阵。
- 式(2.4.5)含有n个未知数，$n \times r$个方程，若其中有n个独立方程, 便可确定唯一的一组$x_1(0), x_2(0), \cdots x_n(0)$。
- 故系统能观测的充分必要条件为：$\mathrm{rank}\, V_1^T = n$

  由于$\mathrm{rank} V_1^T = \mathrm{rank} V_1$，故线性定常离散系统的能观测性判据常表示为

$$\mathrm{rank} V_1 = \mathrm{rank}[C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] = n$$

2.4.5 连续动态方程离散化后的能控性与能观测性

一个能控的或能观测的连续系统，当其离散化后并不一定能保持其能控性或能观测性，现举例来说明。

设连续系统动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}U=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=2$，故一定能控。

根据能观测性判据有 $\mathrm{rank}V_1 = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$

故系统能观测。

系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1}=\mathscr{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+\omega^2} & \dfrac{1}{s^2+\omega^2} \\ \dfrac{-\omega^2}{s^2+\omega^2} & \dfrac{s}{s^2+\omega^2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\omega t & \dfrac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

$$G(t)=\int_0^t \Phi(\tau)\boldsymbol{b}d\tau=\int_0^t \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\omega\tau}{\omega} \\ \cos\omega\tau \end{bmatrix} d\tau=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega t}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega t}{\omega} \end{bmatrix}$$

系统离散化后的状态方程为 (第一章PPT的P82)

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\Phi(T)\boldsymbol{x}(k)+G(T)u(k)$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\omega T & \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega\sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} \\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}u(k)$$

离散化后系统的能控性矩阵为：

$$S_1=\begin{bmatrix}G(T) & \Phi(T)G(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cos\omega T}{\omega^2} & \dfrac{\cos\omega T-\cos^2\omega T+\sin^2\omega T}{\omega^2}\\ \dfrac{\sin\omega T}{\omega} & \dfrac{2\sin\omega T\cos\omega T-\sin\omega T}{\omega}\end{bmatrix}$$

离散化后系统的能观测性矩阵为

$$V_1=\begin{bmatrix}C^T & \Phi^T(T)C^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos\omega T\\ 0 & \dfrac{\sin\omega T}{\omega}\end{bmatrix}$$

当采样周期$T = k\pi/\omega \ (k = 1,2,\cdots)$时，能控性矩阵$S_1$和能观测性矩阵$V_1$出现零行，$\mathrm{rank}S_1=1<n$，$\mathrm{rank}V_1=1<n$，系统不能控也不能观测。

- 连续系统能控或能观测时，若采样周期选择不当，对应的离散化系统有可能不能控或不能观测，也有可能既不能控又不能观测。
- 若连续系统不能控或不能观测，不管采样周期T如何选择，离散化后的系统一定是不能控或不能观测的。

离散时间定常线性系统的对偶性

定理4: 若系统S完全能达，则对偶系统S^T完全能观测；若系统S完全能观测，则对偶系统S^T完全能达(P58)。

- 对离散时间定常线性系统，能控性对偶于能构造性

- **定义**：如果系统在t_f时刻的状态可以由系统在时间区间$[t_0,t_f]$的输出决定，则称该系统是能构造的(constructability).

- **定理5**：若系统S能控，则对偶系统S^T能构造；若系统S能构造，则对偶系统S^T能控。

2.5 线性定常系统的线性变换与规范分解

- 2.5.1 状态空间表达式的线性变换
- 2.5.2 非奇异线性变换的不变特性
- 2.5.3 线性定常系统的结构分解

引言

为便于对系统进行分析和综合设计，经常需要对系统进行各种非奇异变换, 例如:

- 将A对角化、约当化
- 将$\{A, B\}$化为能控标准型
- 将$\{C, A\}$化为能观测标准型
- 将系统进行结构分解

本节将介绍在线性定常系统研究中常用的一些线性变换方法及非奇异线性变换的一些不变特性。

2.5.1状态空间表达式的线性变换

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt}&=A\mathbf{x}+B\mathbf{u}\\ \mathbf{y}&=C\mathbf{x}\end{aligned}\ \xrightarrow[\mathbf{x}=P\bar{\mathbf{x}}\text{变换后}]{\text{经非奇异变换}}\ \begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}&=P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}}+P^{-1}B\mathbf{u}\\ \mathbf{y}&=CP\bar{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

(1) 化 A 阵为对角型

(2) 化 A 阵为约当型

(3) 化能控系统为能控标准型

(1) 化 A 阵为对角型 (一)

- 设A为任意形式，且有n个互异实数特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的矩阵，则可由非奇异线性变换化为对角阵$\Lambda$。

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P 阵由 A 阵的实数特征向量 $\boldsymbol{p}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$组成

$$P = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n]$$

特征向量满足 $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i;\ i = 1,2,\cdots,n$

(1) 化 A 阵为对角型 (二)

- 若A为友矩阵, 且有n个互异实数特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则下列范德蒙特(Vandermode)矩阵P可使A对角化:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) 化 A 阵为对角型 (三)

- 设A阵具有m重实数特征值λ_1，其余为$(n\text{-}m)$个互异实数特征值, 但在求解$A\boldsymbol{p}_i=\lambda_1\boldsymbol{p}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$时仍有$m$个独立实特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$，则仍可使$A$阵化为对角阵$\Lambda$。

$$
\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & & & & & \\
& \ddots & & & 0 & \\
& & \lambda_1 & & & \\
& & & \lambda_{m+1} & & \\
& 0 & & & \ddots & \\
& & & & & \lambda_n
\end{bmatrix}
$$

(1) 化 A 阵为对角型 (四)

$$P=\left[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_m \;\middle|\; \boldsymbol{p}_{m+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n\right]$$

式中 $\boldsymbol{p}_{m+1}, \boldsymbol{p}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 是 n-m 个互异实数特征值对应的实特征向量。

展开$A\boldsymbol{p}_i=\lambda_1\boldsymbol{p}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$时，$n$个代数方程中若只有$(n$-$m)$个独立方程，则有$m$个独立实特征向量。

(2) 化 A 阵为约当型 (一)

- 设A阵具有m重实特征值λ_1，其余为$(n\text{-}m)$个互异实特征值，但在求解 $A\boldsymbol{p}_i = \lambda_1 \boldsymbol{p}_i$ 时只有一个独立实特征向量 $\boldsymbol{p}_1$，则只能使A化为约当阵J。

$$
J = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & \lambda_1 & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\
 & & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & \lambda_1 & & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_{m+1} & & \\
 & \mathbf{0} & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \lambda_n
\end{array}\right]
$$

J 中虚线示出存在一个约当块。

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_m & | & \boldsymbol{p}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \cdots, \boldsymbol{p}_m$ 是**广义实特征向量**，满足

$$\because PJ = AP$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{p}_{m+1}, \boldsymbol{p}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 是互异特征值对应的实特征向量。

- 代数重数：相同特征值的个数。
- 几何重数：特征子空间的维数为几何重数，rank($\lambda I-A$)=$n-\alpha$ 中的α值。几何重数 ≤ 代数重数。
- 在几何重数=代数重数时，A可以变换为对角阵；两者不相同时，A只能变换为约当阵，这里需要使用广义特征向量。
- 广义特征向量的简易求法

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \boldsymbol{p}_1 - A\boldsymbol{p}_1 &= 0 \\
\lambda_1 \boldsymbol{p}_2 - A\boldsymbol{p}_2 &= -\boldsymbol{p}_1 \\
\lambda_1 \boldsymbol{p}_3 - A\boldsymbol{p}_3 &= -\boldsymbol{p}_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$P=\left[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_m \;\middle|\; \boldsymbol{p}_{m+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n\right]$$

(2) 化 A 阵为约当型 (二)

- 设A阵具有五重实特征值 λ_1，但有两个独立实特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$，其余为$(n\text{-}5)$个互异实特征值，$A$阵约当化的可能形式是

$$J = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc}
\lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & & & \lambda_1 & 1 & & & \\
 & & & & \lambda_1 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & & \lambda_6 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & \lambda_n
\end{array}\right]$$

两个独立实特征向量对应2个约当块，J中虚线示出存在两个约当块

(3) 化能控系统为能控标准型

单输入线性定常系统状态方程的能控标准型可表示为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

与该状态方程对应的能控性矩阵U是右下三角阵(P81)，其主对角线元素均为1，故$\det U \neq 0$，系统一定能控，这就是形如上式中的A，$\boldsymbol{b}$称为能控标准型名称的由来。

其能控性矩阵S形如

$$U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times & \times\\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \times & \times\\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2}+a_{n-1}^2 & \cdots & \times & \times\end{bmatrix}$$

一个**能控系统**，当A, $\boldsymbol{b}$不具有能控标准型时，**一定可以**选择适当的变换**化为能控标准型**。设系统状态方程为:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u$$

进行T变换，即令 $\boldsymbol{x}=T\,\bar{\boldsymbol{x}}$

变换为：$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = T^{-1}AT\bar{\boldsymbol{x}} + T^{-1}\boldsymbol{b}u$

要求

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ T^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

以下具体推导变换矩阵$\boldsymbol{T}$。

设变换矩阵T^{-1}为：$T^{-1}=[\boldsymbol{p}_1^T \quad \boldsymbol{p}_2^T \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n^T]^T$

根据A阵变换要求，T^{-1}应满足式(2.5.1)，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-1} \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-1} \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

展开得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 A &= \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_2 A &= \boldsymbol{p}_3 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-1} A &= \boldsymbol{p}_n \\ \boldsymbol{p}_n A &= -a_0 \boldsymbol{p}_1 - a_1 \boldsymbol{p}_2 - \cdots - a_{n-1} \boldsymbol{p}_n \end{aligned}$$

经整理有

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 A$$
$$\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 A = \boldsymbol{p}_1 A^2$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_{n-1} A = \boldsymbol{p}_1 A^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{得变换矩阵}} T^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{n-1} \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 A \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad ?$$

又根据**b**阵变换要求，T^{-1}应满足式(2.5.1)，有

$$T^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 A \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p}_1 A\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1 A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即 $\quad \boldsymbol{p}_1 [\boldsymbol{b} \quad A\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\boldsymbol{b}] = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$

故 $\quad \boldsymbol{p}_1 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\boldsymbol{b} \quad A\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad A^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}$

该式表明$\boldsymbol{p}_1$是能控性矩阵的逆矩阵的最后一行。

于是可得出变换矩阵T的求法如下：

1) 计算能控性矩阵 $U=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$

2) 计算能控性矩阵的逆阵U^{-1},

3) 取出U^{-1}的最后一行(即第n行)构成 $\boldsymbol{p}_1$

4) 构造T^{-1}阵

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 A \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

5) T 便是将非标准型能控系统化为能控标准型的变换矩阵。

2.5.2 非奇异线性变换的不变特性

- 设系统动态方程为 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u} \end{cases}$

  令 $\boldsymbol{x} = P\bar{\boldsymbol{x}}$，变换后动态方程为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = P^{-1}AP\bar{\boldsymbol{x}} + P^{-1}B\boldsymbol{u}$$

$$y = \bar{\boldsymbol{y}} = CP\bar{\boldsymbol{x}} + D\boldsymbol{u}$$

  变换后

  - 系统特征值不变
  - 系统传递矩阵不变
  - 系统能控性不变
  - 系统能观测性不变

系统特征值不变

变换后系统的特征值为

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda I - P^{-1}AP\right| &= \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP\right| \\
&= \left|P^{-1}(\lambda I - A)P\right| = \left|P^{-1}\right| \cdot \left|(\lambda I - A)\right| \cdot \left|P\right| \\
&= \left|P^{-1}\right| \cdot \left|P\right| \cdot \left|(\lambda I - A)\right| = \left|(\lambda I - A)\right|
\end{aligned}
$$

可见，系统变换后与变换前的特征值完全相同。这说明对非奇异线性变换，系统特征值具有不变性。

系统传递矩阵不变

变换后的系统的传递矩阵为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = P^{-1}AP\bar{\boldsymbol{x}} + P^{-1}B\boldsymbol{u} \\ y = \bar{\boldsymbol{y}} = CP\bar{\boldsymbol{x}} + D\boldsymbol{u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G'(s) &= CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP(P^{-1}sIP - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \end{aligned}$$

这表明变换前与变换后系统的传递矩阵完全相同，系统的传递矩阵对于非奇异线性变换具有不变性。

系统能控性不变

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = P^{-1}AP\bar{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} \\ y = \bar{\mathbf{y}} = CP\bar{\mathbf{x}} + D\mathbf{u} \end{cases}$$

变换后系统能控性矩阵的秩为

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}S' &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} P^{-1}B & (P^{-1}AP)P^{-1}B & (P^{-1}AP)^2P^{-1}B & \cdots & (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} P^{-1}B & P^{-1}AB & P^{-1}A^2B & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}P^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}S \end{aligned}$$

其中，S'为变换后系统的能控性矩阵；S为变换前系统的能控性矩阵。可见，二者的秩相等，所以对于非奇异线性变换，系统的能控性不变。

系统能观测性不变

设变换后系统的能观测性矩阵为V'，变换前系统的可观测性矩阵为V，则有

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}} = P^{-1}AP\overline{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} \\ y = \overline{\mathbf{y}} = CP\overline{\mathbf{x}} + D\mathbf{u} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}V' &= \mathrm{rank}\left[(CP)^T \quad (P^{-1}AP)^T(CP)^T \quad ((P^{-1}AP)^2)^T(CP)^T \quad \cdots \right. \\
&\qquad \left. ((P^{-1}AP)^{n-1})^T(CP)^T\right]^T \\
&= \mathrm{rank}\left[P^TC^T \quad P^TA^TC^T \quad P^T(A^2)^TC^T \quad \cdots \quad P^T(A^{n-1})^TC^T\right]^T \\
&= \mathrm{rank}P^T\left[C^T \quad A^TC^T \quad (A^2)^TC^T \quad \cdots \quad (A^{n-1})^TC^T\right]^T \\
&= \mathrm{rank}\left[C^T \quad A^TC^T \quad (A^2)^TC^T \quad \cdots \quad (A^{n-1})^TC^T\right]^T = \mathrm{rank}V
\end{aligned}$$

可见变换后与变换前系统的能观测性矩阵的秩相等，故系统的能观测性不变。

2.5.3 线性定常系统的结构分解

- 1. 能控子空间
- 2. 系统的能控结构形式——能控部分的分离
- 3. 不能观测子空间
- 4. 系统能观测结构形式——能观测部分的分离
- 5. 能控性与能观测性的PBH判据
- 6. 定常线性系统的卡尔曼标准分解

1. 能控子空间

- 由引理2.1(P11)知，状态x_0能控的充分必要条件是存在 t_1 和 $\boldsymbol{u}(t),(0 \le t \le t_1)$,使得

$$\boldsymbol{x}_0 = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- 子空间的定义

设 X_1 是 n 维线性空间 X 的一个子集，若 X_1 满足：

对于任意两个向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X_1$，以及任意实数 α, β,

恒有 $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 \in X_1$，则称 X_1 为 X 的一个子空间。

- 引理：**所有能控的状态构成状态空间的一个子空间。**

(教材P32）能控状态的线性组合也是能控的

1. 能控子空间

$$x_0 = \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(P16)}$$

- **定理2.2** (教材P32)

  能控子空间 X_c 是由 $B, AB, \cdots, A^{n-1}B$ 的列所张成的子空间，即 $X_c = Span\{B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\}$

  证明:

  ① 先证 $X_c \subset Span\{B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\}$.

  ② 再证 X_c 的维数= $Span\{B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\}$ 的维数

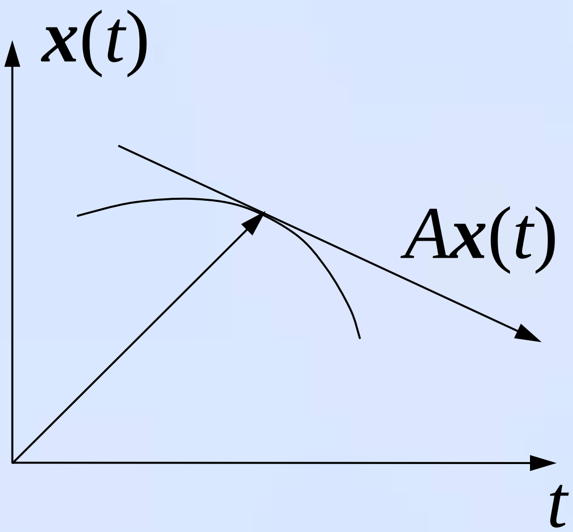
- 不变子空间的定义：

  设$X_1 \subset X$ 是X一子空间，在线性变换A的作用下，X_1仍变到X_1内，即 $A(X_1) \subset X_1$，则称X_1为A的不变子空间。

- **定理2.3**：能控子空间是A的不变子空间。(教材P33)　$AX_c \subset X_c$

- A 的不变子空间的物理含义

  研究如下系统 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$，$\mathbf{x}(t)$是其状态向量，则在$\mathbf{x}(t)$处的切向量，即是$\mathbf{x}(t) \in X_1$在变换$A$下的像，其**切向量仍属于$X_1$**。



命题

设$X_1 \subset X$是A的不变子空间，对任一$\boldsymbol{x}_0 \in X_1$，则由

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

所确定的轨迹$\boldsymbol{x}(t)$，对任意t，必有$\boldsymbol{x}(t) \in X_1$，即其运动不会超出子空间$X_1$。

2. 系统的能控结构形式—能控部分的分离

- 求一个非奇异线性变换**将一个不完全能控系统**化为能控结构形式，显式地将系统的**能控部分分离**出来。

设能控子空间X_c的维数为$n_c<n$。由原坐标系到新坐标系的坐标变换为：$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'$

其中

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n_c} & t_{1\,n_c+1} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n_c} & t_{2\,n_c+1} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn_c} & t_{n\,n_c+1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

对任意$\boldsymbol{x}\in X$, 变换后可得到: $x' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix}$

其中

$$\boldsymbol{x}'_C = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n_c} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}'_{NC} = \begin{bmatrix} x'_{n_c+1} \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

则原系统经坐标变换得

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}'_C \\ \hdashline \dot{\boldsymbol{x}}'_{NC} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{c:c} C_1 & C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \hdashline \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix}$$

定理2.4：(教材P35)

定常线性系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n_c} & t_{1\,n_c+1} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n_c} & t_{2\,n_c+1} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn_c} & t_{n\,n_c+1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

X_c的基

经坐标变换可表示成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}'_C \\ \dot{\boldsymbol{x}}'_{NC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \qquad \textbf{(2.5.2)}$$

$$\boldsymbol{y} = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix}$$

且 (A_1, B_1) 能控。

$X = X_C \oplus X_{NC}$ 意味着状态空间可以分解为能控子空间 X_C 和子空间 X_{NC}。于是系统分解为

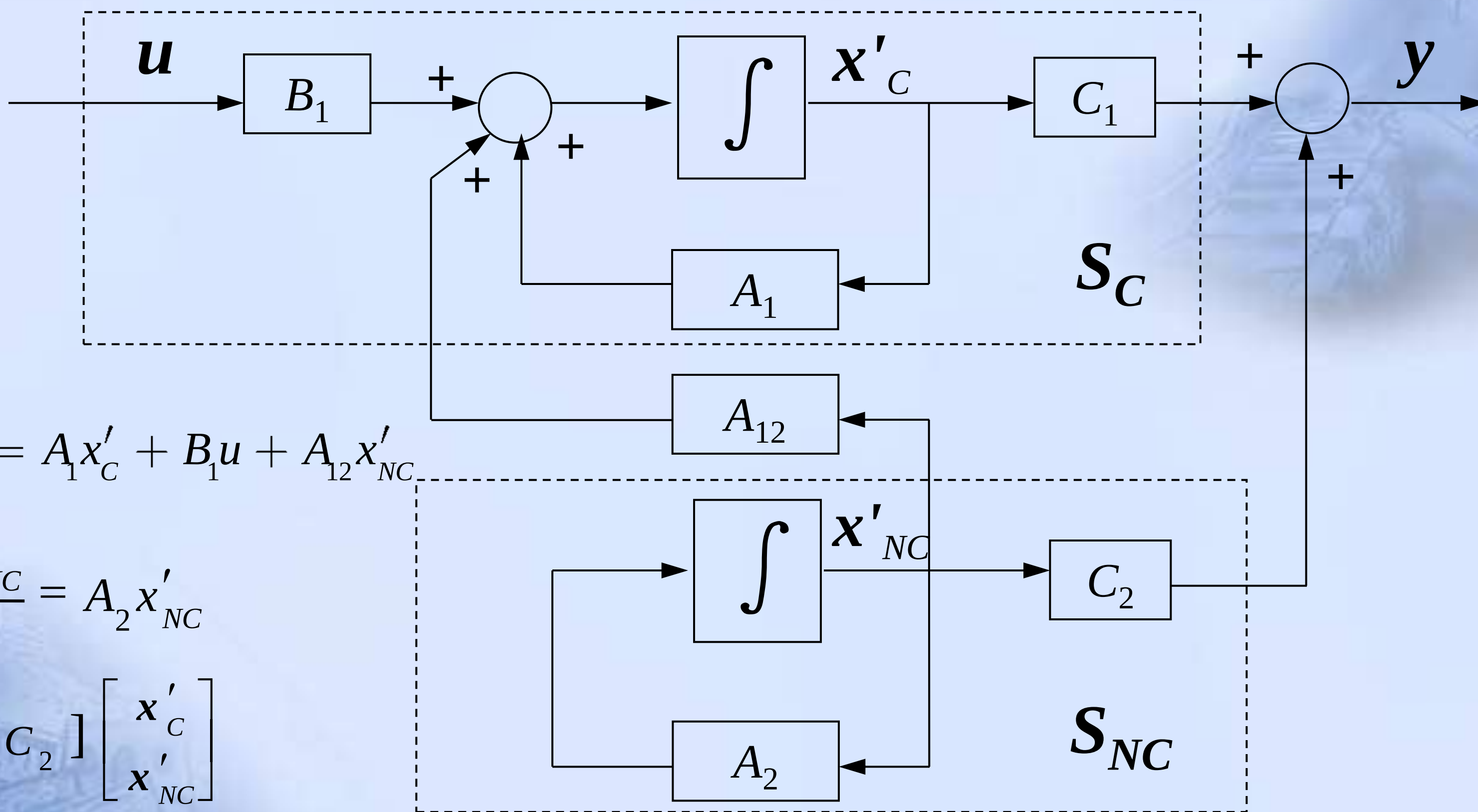
能控子系统

$$S_C : \frac{dx_C'}{dt} = A_1 x_C' + B_1 u + A_{12} x_{NC}'$$

和不能控子系统

$$S_{NC} : \frac{dx_{NC}'}{dt} = A_2 x_{NC}'$$

两个子系统通过 A_{12} 耦合在一起，如图所示。



$$S_C:\ \frac{dx'_C}{dt} = A_1 x'_C + B_1 u + A_{12} x'_{NC}$$

$$S_{NC}:\ \frac{dx'_{NC}}{dt} = A_2 x'_{NC}$$

$$\boldsymbol{y} = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_C \\ \boldsymbol{x}'_{NC} \end{bmatrix}$$

由**(2.5.2)**式原系统的极点集 $\sigma(A_1)\cup\sigma(A_2)$, $\sigma(A_1)$ 称为能控极点, $\sigma(A_2)$ 称为不能控极点。

例2.3：已给系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x,$$

试判断其能控性，如果不是完全能控的，将该按能控性进行分解。

解：系统的能控性判别矩阵为

$$M=[b \quad Ab \quad A^2b]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow rank\{M\}=2<n=3$$

因此，系统不是完全能控的。

构造如下非奇异变换矩阵(P93)：

$$T_1=b=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, T_2=Ab=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, T_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

其中，T_3的选取是任意的，只要保证T非奇异即可。

那么，变换后的状态空间表达式为

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & \vdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x'$$

这就是所求的能控结构形式。

求能控结构形式的MATLAB程序

```
A=[-2 0 1 -1;
-4 -2 4 -4;
-4 0 3 -3;
0 0 0 1];
B=[2;1;2;0];
C=[1 1 -1 2];
[m,n]=size(A);
temp=eye(size(A));
for i=1:n
    temp0(:,i)=temp*B;
    temp=temp*A;
end
r=rank(temp0);
temp2(:,1)=temp0(:,1);
```

```
for i=1:r
    for j=1:n
        temp2(:,i)=temp0(:,j);
        if rank(temp2)==i
            break
        end
    end
end
```

```
temp1=eye(size(A));
for i=r+1:n
    for j=1:n
        temp2(:,i)=temp1(:,j);
        if rank(temp2)==i
            break
        end
    end
end
t=temp2
t1=inv(t);
A=t1*A*t
B=t1*B
C=C*t
```

初始化部分

能控子空间的基组

位阵的列补齐)

输出结果:

```
>>
t =
     2    -2     1     0
     1    -2     0     0
     2    -2     0     0
     0     0     0     1
A =
         0   -2.0000         0    1.0000
    1.0000   -3.0000    2.0000    2.5000
         0         0    2.0000    2.0000
         0         0         0    1.0000
B =
     1
     0
     0
     0
C =
     1    -2     1     2
>>
```

3. 不能观测子空间

- 当$\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$, 初始状态为$\boldsymbol{x}_0$时，设$\boldsymbol{x}(t)$是对应于初始状态$\boldsymbol{x}_0$的状态轨线，如果与之对应的输出$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$，则由输出$\boldsymbol{y}$不能唯一确定初始状态$\boldsymbol{x}_0$ (除零状态以外)，这时称$\boldsymbol{x}_0$为不能**观测的状态**。
- **引理2.3**

  所有不能观测的状态构成状态空间的一个子空间。

- **定理2.5**(教材P39)：不能观测子空间是$C,CA,\ldots CA^{n-1}$的核空间的交，即

$$X_{NO}=\bigcap_{i=0}^{n-1}KerCA^{i}$$

$x_0\in\bigcap_{i=0}^{n-1}KerCA^{i}$，则

$Cx_0=CAx_0=\cdots=CA^{n-1}x_0=0$

证明：① 先证 $\bigcap_{i=0}^{n-1}KerCA^{i}\subset X_{NO}$

② 再证 $X_{NO}\subset\bigcap_{i=0}^{n-1}KerCA^{i}$

- **定理2.6-1**(教材P39)：系统完全能观测的充分必要条件是$X_{NO}=\{0\}$。
- **定理2.6-2**(教材P39)：**LTI** 系统的不能观测子空间X_{NO}是A的不变子空间。

4. 系统的能观测结构形式—能观测部分的分离

- 类似于能控结构形式的推导，选择一个坐标变换，使系统化为能观测结构形式，显式地**将系统的不能观测部分分离出来**。

设不能观测子空间X_{NO}的维数为n_1。由原坐标系到新坐标系的坐标变换为：$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'$

其中

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n_1} & t_{1\,n_1+1} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n_1} & t_{2\,n_1+1} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn_1} & t_{n\,n_1+1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

对任意$x \in X$, 变换后可得到: $x' = \begin{bmatrix} x_{NO} \\ x_O \end{bmatrix}$

其中

$$x_{NO} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n_1}' \end{bmatrix}, x_O = \begin{bmatrix} x_{n_1+1}' \\ x_{n_1+2}' \\ \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

则原系统经坐标变换得

$$\frac{dx'}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_{NO}}{dt} \\ \frac{dx_O}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NO} \\ x_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NO} \\ x_O \end{bmatrix}$$

定理2.7

定常线性系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases}$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n_1} & t_{1\,n_1+1} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n_1} & t_{2\,n_1+1} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn_1} & t_{n\,n_1+1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

X_{NO}的基

经坐标变换T可表示成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_{NO}}{dt} \\ \dfrac{dx_O}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NO} \\ x_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{NO} \\ x_O \end{bmatrix},$$

且(C_2, A_2)能观测。

返回

类似于能控性分解，可以通过非异变换将定常线性系统分解为能观测子系统

$$S_O:\begin{cases}\dfrac{dx_O}{dt}=A_2x_O+B_2u\\ y=C_2x_O\end{cases}$$

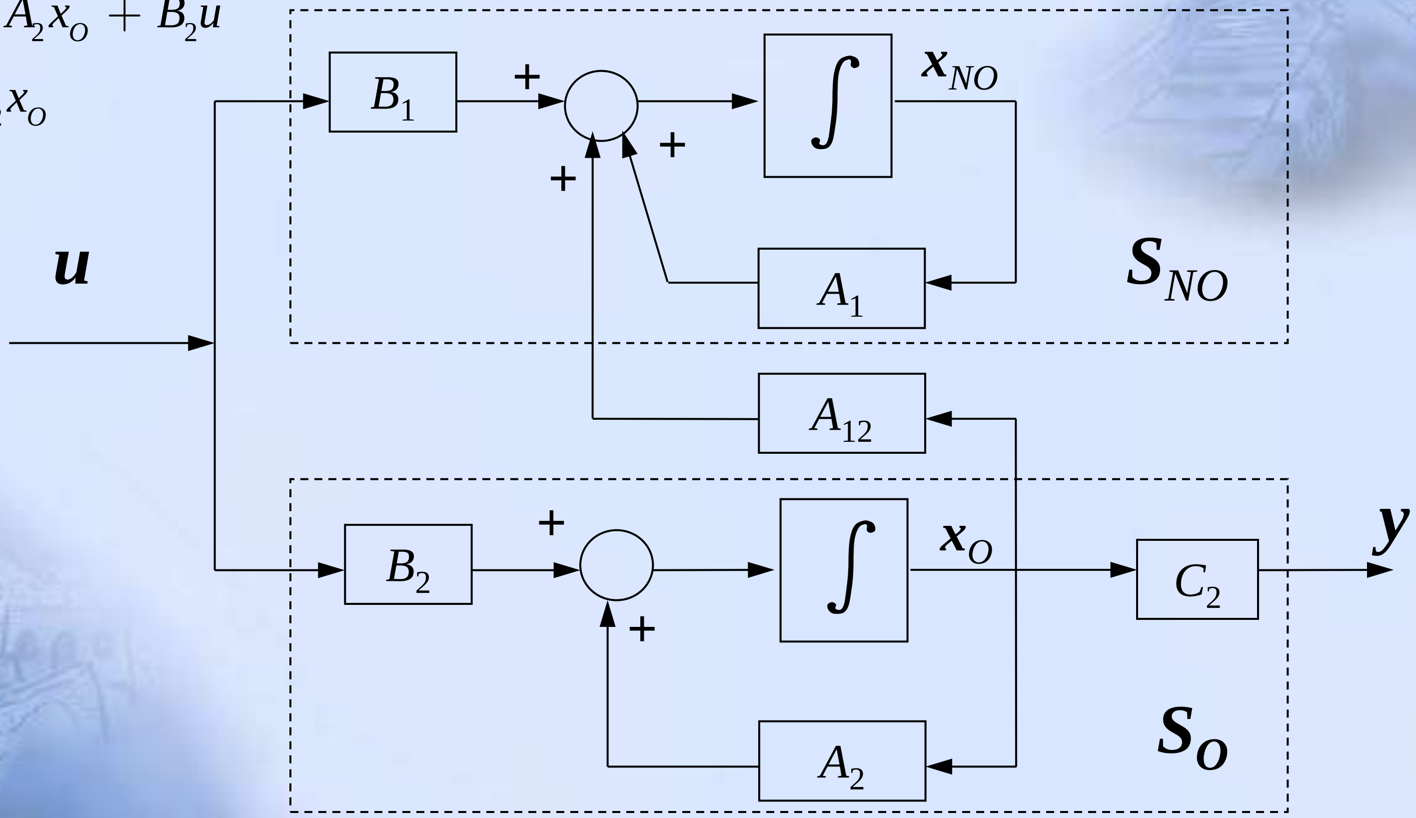
和不能观测子系统

$$S_{NO}:\frac{dx_{NO}}{dt}=A_1x_{NO}+A_{12}x_O+B_1u$$

两个子系统通过A_{12}耦合在一起，如图所示。

$$S_{NO}: \frac{dx_{NO}}{dt} = A_1 x_{NO} + A_{12} x_O + B_1 u$$

$$S_O: \begin{cases} \frac{dx_O}{dt} = A_2 x_O + B_2 u \\ y = C_2 x_O \end{cases}$$



并且$\sigma(A_1)$称为不能观测极点，$\sigma(A_2)$称为能观测极点。

例2.4：对于例2.3中系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x,$$

试判断其能观性，如果不是完全能观的，将该按能观性进行分解。

解：系统的能观性判别矩阵为

$$N=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rank\{N\}=2<3$$

因此，该系统不是完全能观的。

为构造非奇异变换矩阵 R_O^{-1} ($\underline{x=R_O x'}$)，取

$$R_1'=C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$R_2'=CA=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$R_3'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_O^{-1}=\begin{bmatrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{bmatrix}$$

其中，R_3' 是在保证 R_O^{-1} 为非奇异的情况下任意选取的(本着尽量简洁的原则)。

因此，

$$R_O^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_O = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么，状态空间表达式变为：

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 \\ -1 & -2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} x'$$

求能观测形式的MATLAB程序(示例)

```
A=[-2 0 1 -1;
-4 -2 4 -4;
-4 0 3 -3;
0 0 0 1];
B=[2;1;2;0];
C=[1 1 -1 2];
[m,n]=size(A);
temp=eye(size(A));
for i=1:m
   temp0(i,:)=C*temp;
   temp=temp*A;
End
temp0=null(temp0);
r=rank(temp0);
```

```
temp=eye(size(A));
for i=r+1:m
   for j=1:m
      temp0(:,i)=temp(:,j);
      if rank(temp0)==i
         break
      end
   end
end
T=temp0
t1=inv(T);
A=t1*A*T
B=t1*B
C=C*T
```

输出结果如下：

```
>>
T =
   -0.8165   -0.0012    1.0000         0
    0.4072    0.7077         0         0
   -0.4093    0.7065         0         0
   -0.0000    0.0000         0    1.0000
A =
   -1.5017   -0.8720    0.0084   -1.2174
    2.0148    2.5017   -5.6568   -4.9516
    0.0000    0.0000   -2.0000   -2.0000
   -0.0000   -0.0000    0.0000    1.0000
B =
   -1.2279
    2.1195
    1.0000
   -0.0000
C =
   -0.0000    0.0000    1.0000    2.0000
>>
```

5. 能控性与能观测性的PBH判据

- **定理**(教材P42)：(A, B)能控的充分必要条件是不存在A的左特征矢量($\boldsymbol{pA} = \boldsymbol{p}\lambda$)正交于$B$的所有列。
- **定理**(教材P42)：(A, B)能控的充分必要条件是对A的每个特征值λ，矩阵$[\lambda I - A \vdots B]$秩为n。

证明：必要条件

$\lambda I - A$对除A的特征值以外的所有复数非奇异，因此$[\lambda I - A \vdots B]$对除A的特征值以外的复数λ秩为n。

现证明如果(A, B)能控，则对A的特征值λ，矩阵$[\lambda I - A \vdots B]$的秩为n。

用反证法，设存在A的特征值λ和非0行向量α，使得

$$\alpha[\lambda I - A \vdots B] = 0$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n]\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots \alpha_n E_n = 0$$

于是有

$$\lambda\alpha = \alpha\lambda I = \alpha A, \alpha B = 0$$

这意味着 $\alpha A^2 = \lambda\alpha A = \lambda^2\alpha$，依此类推可以导出

$$\alpha A^i = \lambda^i \alpha, i = 1,2\cdots,$$

因此

$$\alpha[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] = [\alpha B \vdots \lambda\alpha B \vdots \cdots \vdots \lambda^{n-1}\alpha B] = 0$$

与(A, B)能控矛盾。所以(A, B)能控时，$[\lambda I - A \vdots B]$秩为n。

α为A的左特征矢量，且正交于B的所有列。

充分条件 $[\lambda I - A \vdots B]$秩为$n \Rightarrow (A, B)$能控

下面证明：如果(A, B)不能控，那么，对A的某个特征值λ，$[\lambda I - A \vdots B]$的秩小于n。

如果(A, B)不能控，那么存在非奇异变换T将(A, B)变换为(A', B')。(定理2.4 能控结构分解)

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (A_1, B_1) \text{ 能控}$$

也是A的特征根

下面证明对A_2的特征值λ，$[\lambda I - A \vdots B]$的秩小于n。

设λ是A_2的特征值，可选取A_2的左特征向量$\beta \neq 0$，使得

行向量

$$\beta A_2 = \lambda \beta$$

应用β构成n维向量$\alpha=[0,\beta]$，那么有

$$\alpha\left[\lambda I-A' \vdots B'\right]=[0,\beta]\begin{bmatrix}\lambda I-A_1 & -A_{12} & \vdots & B_1\\ 0 & \lambda I-A_2 & \vdots & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0 & \lambda\beta-\beta A_2 & 0\end{bmatrix}=0$$

因此

$$0=\alpha\left[\lambda I-A' \vdots B'\right]=\alpha\left[T^{-1}\left(\lambda I-A\right)T \vdots T^{-1}B\right]$$

或 $$\alpha T^{-1}\left[(\lambda I-A)T \vdots B\right]=0$$

定义$\overline{\alpha}=\alpha T^{-1}$, 由于$\alpha\neq 0$，$T^{-1}$非奇异，所以$\overline{\alpha}\neq 0$。

由上式得到

$$\overline{\alpha}(\lambda I-A)T=0,\overline{\alpha}B=0$$

又因为

$$\bar{\alpha}\left(\lambda I - A\right)T = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}\left(\lambda I - A\right) = 0$$

于是对$\bar{\alpha} \neq 0$,

$$\bar{\alpha}\left[\lambda I - A \vdots B\right] = 0$$

即如果(A, B)不完全能控，存在A的特征值λ，使得$\left[\lambda I - A \vdots B\right]$的秩小于$n$。 ■

能观测性的PBH判据

- **定理：**(C, A) 能观测的充分必要条件是不存在A的右特征矢量正交于C的所有行。
- **定理：**(C, A) 能观测的充分必要条件是对A的每个特征值 λ，矩阵$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$秩为$n$ 。
- 上述定理的证明可以应用能控性和能观测性的对偶性由前述定理得到。

6. 定常线性系统的标准分解

- 定常线性系统的标准分解，将一个一般的定常线性系统分解为能控能观测、能控不能观测、不能控能观测和不能控不能观测四个子系统。
- 系统的标准分解是现代控制论的一个重要基础。
- 本节有以下两部分内容：
  - (1) 标准分解
  - (2) 零极点相消现象

(1) 按照能控性与能观性进行分解

- 考虑 线性系统， 态空间为X，对它的状态 如下分解：

“能控”
不能观

“能控”
“能观”

不能控
不能观

令 $X_1 = X_C \bigcap X_{NO}$，选取 X_2，使 $X_C = X_1 \oplus X_2$， 选取X_3使$X_{NO} = X_1 \oplus X_3$， 选取X_4 使 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$

设X_i的维数为n_i， 显然有 $+ n_3 + n_4 = n$。

不能控
“能观”

选取 X_1, X_2, X_3, X_4 的基组，构成新的坐标系 $\sum_{co}$

坐标变换

$$x = Tx'$$

显然 T 是非奇异矩阵，

对任一 $x \in X$，可设 $x' = [x_1^T, x_2^T, x_3^T, x_4^T]^T$，其中

$$x_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \\ x_{n_1} \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} x'_{n_1+1} \\ \\ x'_{n_1+n_2} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} x'_{n_1+n_2+1} \\ \\ x'_{n_1+n_2+n_3} \end{bmatrix} \qquad x_4 = \begin{bmatrix} x'_{n_1+n_2+n_3+1} \\ \\ x'_n \end{bmatrix}$$

经此变换原系统化为

$$\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}\\ \frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}\\ \frac{d\boldsymbol{x}_3}{dt}\\ \frac{d\boldsymbol{x}_4}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ B_3\\ B_4\end{bmatrix}u_1$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}'$$

定理2.8 (卡尔曼标准分解定理)定常线性系统，可化为如下标准型:

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}'}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' \end{cases}$$

并且原系统分解为如下四个子系统:

$$S_1: \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}_1}{dt} = A_{11}\boldsymbol{x}_1 + B_1 u + f_1, \\ \boldsymbol{y}_1 = 0\boldsymbol{x}_1 = 0, \end{cases}$$

没有观测输出
(有可能能控)

其中 $f_1 = A_{12}\boldsymbol{x}_2 + A_{13}\boldsymbol{x}_3 + A_{14}\boldsymbol{x}_4$

$$S_2: \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}_2}{dt} = A_{22}\boldsymbol{x}_2 + B_2 u + f_2, \\ \boldsymbol{y}_2 = C_2\boldsymbol{x}_2, \end{cases}$$

能控能观测

其中 $f_2 = A_{24}\boldsymbol{x}_4$

$$S_3: \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}_3}{dt} = A_{33}\boldsymbol{x}_3 + f_{3,} \\ \boldsymbol{y}_3 = 0\boldsymbol{x}_3 = 0, \end{cases}$$

不受任何控制变量的影响，也没有输出

其中 $f_3 = A_{34}\boldsymbol{x}_4$

$$S_4: \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}_4}{dt} = A_{44}\boldsymbol{x}_4, \\ \boldsymbol{y}_4 = C_4\boldsymbol{x}_4. \end{cases}$$

不受任何控制变量的影响 (有可能能观)

注意，$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控，$\left(\begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}\right)$能观测。

- 子系统S_1有控制输入，但并不保证(A_{11}, B_1)能控。
- 子系统S_4有观测输出，但并不保证(C_4, A_{44})能观测。

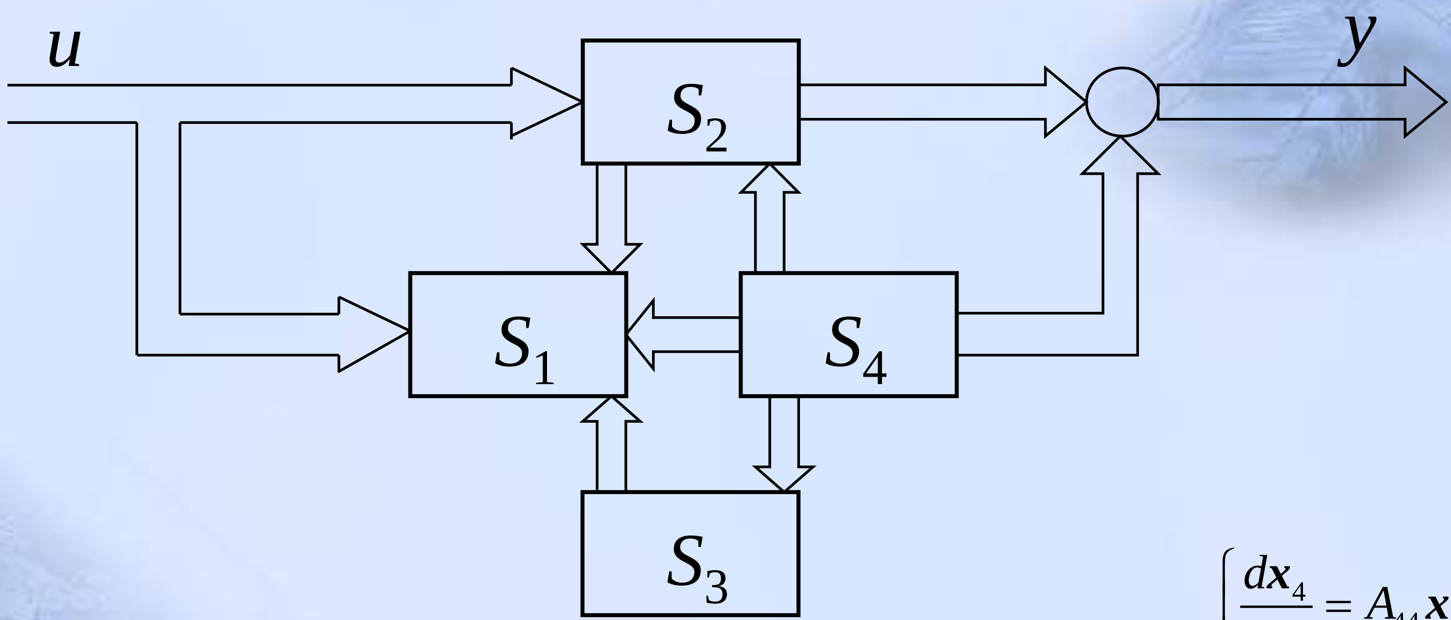
例如，系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

显然已经是标准形式，并且$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$能控，但系统

$S_1 : \dfrac{d\boldsymbol{x}_1}{dt} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 显然是不能控的。

定理2.8中分解的4个子系统之间的关系的示意图。



$$S_4:\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}_4}{dt}=A_{44}\boldsymbol{x}_4,\\ \boldsymbol{y}_4=C_4\boldsymbol{x}_4.\end{cases}$$

$$S_1:\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}=A_{11}\boldsymbol{x}_1+B_1u+f_1,\\ \boldsymbol{y}_1=0\boldsymbol{x}_1=0,\end{cases}$$

其中 $f_1=A_{12}\boldsymbol{x}_2+A_{13}\boldsymbol{x}_3+A_{14}\boldsymbol{x}_4$

$$S_2:\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}=A_{22}\boldsymbol{x}_2+B_2u+f_2,\\ y_2=C_2\boldsymbol{x}_2,\end{cases}$$

其中 $f_2=A_{24}\boldsymbol{x}_4$

$$S_3:\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}_3}{dt}=A_{33}\boldsymbol{x}_3+f_{3,}\\ \boldsymbol{y}_3=0\boldsymbol{x}_3=0,\end{cases}$$

其中 $f_3=A_{34}\boldsymbol{x}_4$

例2.5：将例2.3中的系统按照能控性与能观性进行分解。

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x,$$

解：在例2.3中已经对该系统进行了能控性分解，相应的变换矩阵与分解结果分别为：

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & \vdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C' \\ \cdots \\ x_{NC}' \end{bmatrix}.$$

接下来，将分别对上式中不能观子系统与能观子系统进行分解。不难发现，不能控子空间仅一维，显然为能观的，无需再进行分解。

将能控子系统按照能观性进行分解如下：

$$\dot{x}_C' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_C' + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{NC}' + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x_C'.$$

按能观性分解，根据例2.4中方法，构造非奇异矩阵：

$$R_O^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将能控子系统按照能观性进行分解如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{CO} \\ \dot{x}_{CNO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{CO} \\ x_{CNO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{NC} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{CO} \\ x_{CNO} \end{bmatrix}.$$

综合上述两次变换，得系统按能控性与能观性分解：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{CO} \\ \dot{x}_{CNO} \\ \dot{x}_{NCO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{CO} \\ x_{CNO} \\ x_{NCO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{CO} \\ x_{CNO} \\ x_{NCO} \end{bmatrix}.$$

(2) 零极点相消的现象

- **定理2.9：** 定常线性系统的传递函数阵等于它的能控能观测子系统的传递函数阵。

证明：由于经非奇异线性变换，定常线性系统的传递函数阵不变。因此定常线性系统的传递函数阵就是它的标准分解形式的传递函数阵。于是

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ 0 & sI-A_{22} & 0 & -A_{24}\\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(sI-A_{11}\right)^{-1} & * & * & *\\ & \left(sI-A_{22}\right)^{-1} & * & *\\ & & \left(sI-A_{33}\right)^{-1} & *\\ & & & \left(sI-A_{44}\right)^{-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=C_2\left(sI-A_{22}\right)^{-1}B_2$$

■

由定理2.9可以看出传递函数阵只描述了系统的能控能观测部分。

原来系统的极点集为：$\sigma(A_{11})\cup\sigma(A_{22})\cup\sigma(A_{33})\cup\sigma(A_{44})$，

$\sigma(A_{22})$ 称为能控能观测极点集。

$$\Lambda=\sigma(A_{11})\cup\sigma(A_{33})\cup\sigma(A_{44})$$

称为该系统的**固定模**。

由定理2.9系统的传递函数阵

$$G(s)=C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2=\frac{C_2Adj(sI-A_{22})B_2}{\left|sI-A_{22}\right|}$$

因此，有关系式

$$G(s)=\frac{CAdj(sI-A)B}{\prod_{i=1}^{4}\left|sI-A_{ii}\right|}=\frac{C_2Adj(sI-A_{22})B_2}{\left|sI-A_{22}\right|}$$

如果系统不是完全能控、完全能观测的，则必有$n_2 < n$。所以传递函数阵中必有零点和极点相消的现象。消去的极点是全部固定模Λ。

1. 对SISO LTI系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + bu, \\ y = cx, \end{cases}$$

传递函数 $G(s) = c(sI - A)^{-1}b \quad = \dfrac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$

定理2.10：SISO LTI系统存在零极相消的**充分必要条件**是它不是完全能控能观测的，并且消去的极点是系统的全部固定模。 ▪**基于传递函数的能控能观条件**

2. MIMO LTI

- 系统不是完全能控能观测 $\Rightarrow$ 存在零极相消
- 如果系统完全能控完全能观测，传递函数阵中还会不会有零极相消的现象呢？这个问题的回答依赖于对零极相消的定义。

首先看下面的例子：

例2.6 考虑定常线性系统

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

系统是完全能控、完全能观测的

系统的特征多项式为

$$|sI - A| = (s-1)^2 (s-4),$$

$$Adj(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix}.$$

传递函数

$$G(s)=\frac{CAdj(sI-A)B}{|sI-A|}=\frac{\begin{bmatrix}2(s-1) & (s-1)(s-4)\\ (s-1)(s-4) & 0\end{bmatrix}}{(s-1)^2(s-4)}$$

$$=\frac{1}{(s-1)(s-4)}\begin{bmatrix}2 & s-4\\ s-4 & 0\end{bmatrix}.$$

- 传递函数的分子分母同消去了一个$(s-1)$，表明当系统完全能控、完全能观测时，传递函数阵中仍可能有零极相消现象。

例2.6中传递函数阵的元素的分子分母同消去了一个因子$(s-1)$，但经过对消以后的传递函数阵仍保留了$s=1$和$s=4$两个极点。这样的对消现象对研究多变量系统意义不大。

- 定义：如果传递函数阵

$$G(s)=\frac{CAdj(sI-A)B}{|sI-A|}$$

的分母的零点没有因与分子的零点相消而消失，而只是因相消降低了阶数，就称传递函数阵没有零极相消。

在这样的定义下有如下定理：

定理2.11 如果定常线性系统是完全能控完全能观测的，则它的传递函数阵没有零极相消。

零极相消现象在研究系统的稳定性时是值得注意的，用下面的例来说明这一点。

例2.7 考虑定常线性系统

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x,$$

- 系统不完全能控
- 系统完全能观测

传递函数为

$$G(s)=c(sI-A)^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ -2 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{s-1}{(s+2)(s-1)}=\frac{1}{s+2}.$$

- 从输入输出关系来研究$G(s)=1/(s+2)$，系统是稳定的。
- 但从状态方程来研究系统的极点为$s=-2$和$s=1$，系统是不稳定的。
- 称该系统是输入输出稳定的，但不是状态稳定的。这一现象在研究系统的稳定性时值得注意。

2.6 最小实现问题

- **实现问题：** 传递函数阵 $\Longrightarrow$ 描述系统的状态方程。

若已知控制系统的传递函数阵为$G(s)$，求系统的状态空间描述

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

使得$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$，则称(C, A, B)为$G(s)$的一个实现。

- $G(s)$必须是物理可实现的：

(1) 系数为实数；(2) 真有理分式

定理2.9指出定常线性系统的传递函数阵等于它的能控能观测子系统的传递函数阵，这表明同一个传递函数阵可以有各种不同维数的实现。

- 最小实现：维数最小的实现。
- 步骤：

1. 求传递函数阵的一个具体实现。
2. 求它的能控能观测标准结构形式。
3. 得到能控能观测子系统，即为最小实现。

1. 单输入单输出系统的传递函数的实现

(1) 设单输入单输出系统的传递函数为真有理分式，且无零点：

$$G(s)=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \quad (2.6.1)$$

则输入u和输出y满足的微分方程为

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=u \quad (2.6.2)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=u \qquad (2.6.2)$$

引入状态变量

$$\begin{cases} x_1=y, \\ x_2=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx_1}{dt}, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=\dfrac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}=\dfrac{dx_{n-2}}{dt}, \\ x_n=\dfrac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}=\dfrac{dx_{n-1}}{dt}, \end{cases} \xrightarrow{(2.6.2)\text{化为}} \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt}=x_n, \\ \dfrac{dx_n}{dt}=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u, \\ y=x_1. \end{cases}$$

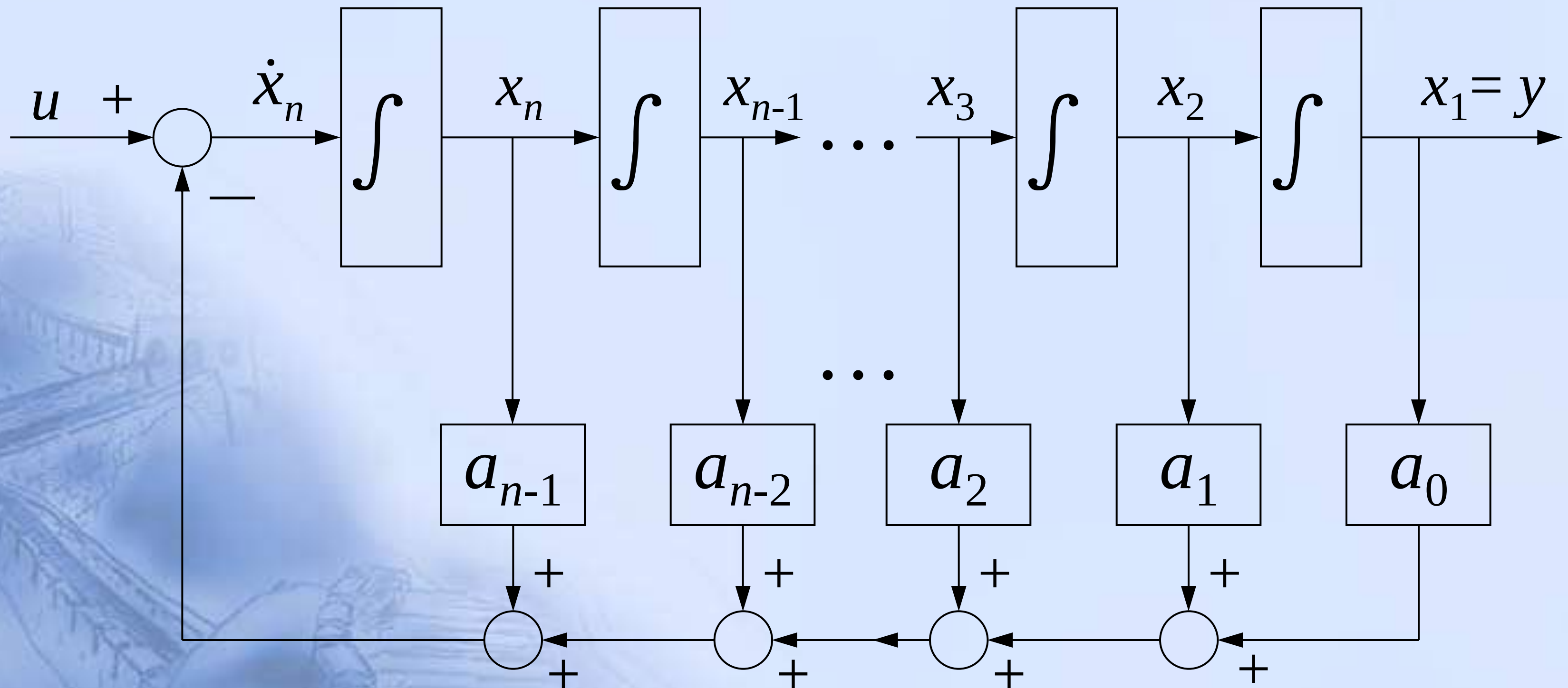
写成矩阵向量形式为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

- 这一实现为传递函数 (2.6.1) 的能控标准型实现。

- 实现框图

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$



(2) 有零点的情况 $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0},\quad m<n, \qquad (2.6.4)$$

令 $G_0(s)=\dfrac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\dfrac{Y_0(s)}{U(s)}.$

则 $G(s)=(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0)G_0(s)$

已知$G_0(s)$的实现已求出，则得

$$Y(s)=G(s)U(s)=(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0)Y_0(s),$$

$G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

即 $$y(t)=b_m\frac{d^m y_0}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}y_0}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dy_0}{dt}+b_0\underset{x_1}{\underline{\underline{y_0}}}$$

$$=b_0x_1+b_1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+b_m\frac{d^m x_1}{dt^m},$$

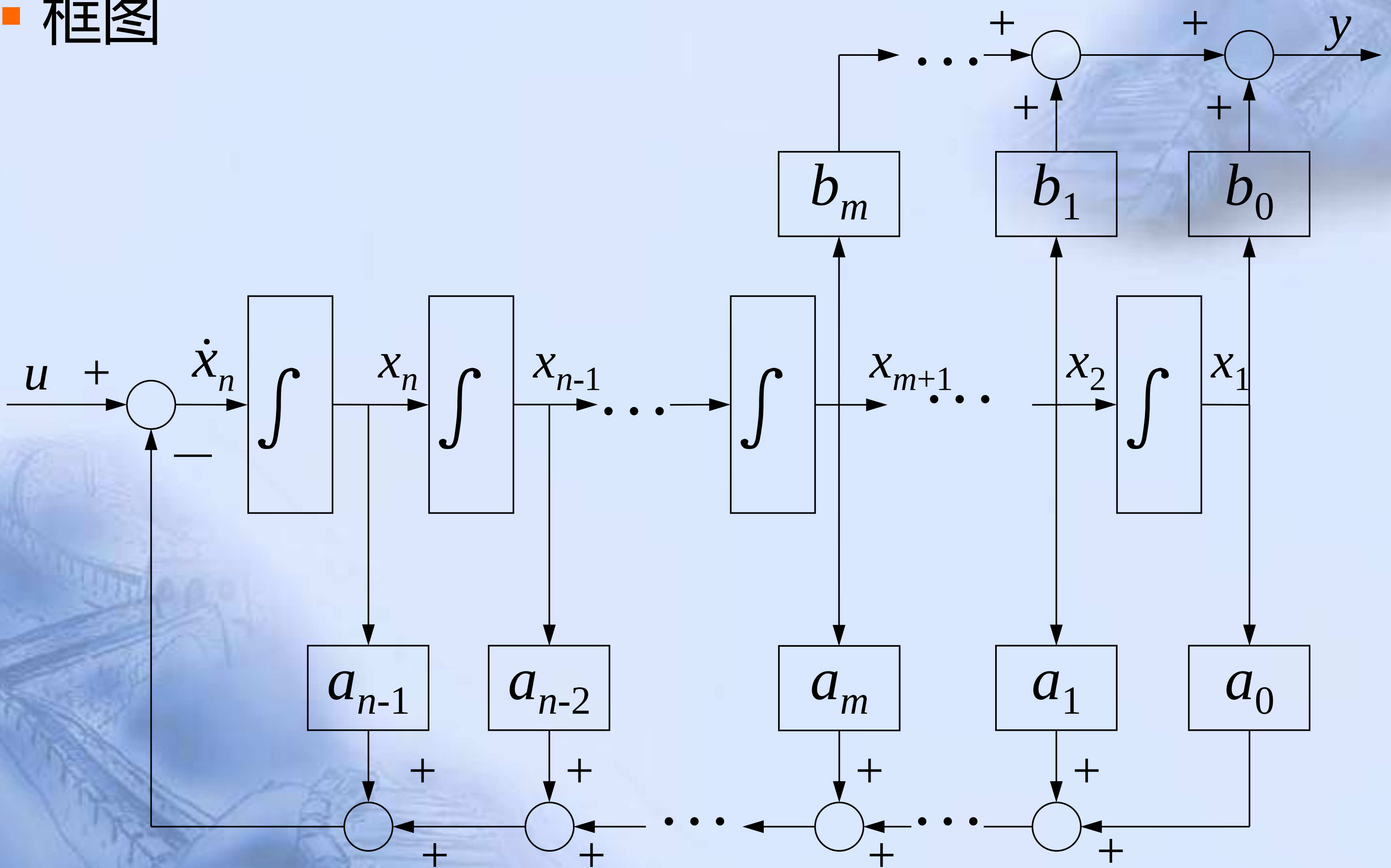
或 $$y(t)=b_0x_1+b_1x_2+\cdots+b_mx_{m+1}$$

$$=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}x, \qquad (2.6.5)$$

为传递函数(2.6.4)的能控标准型实现。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

- 框图



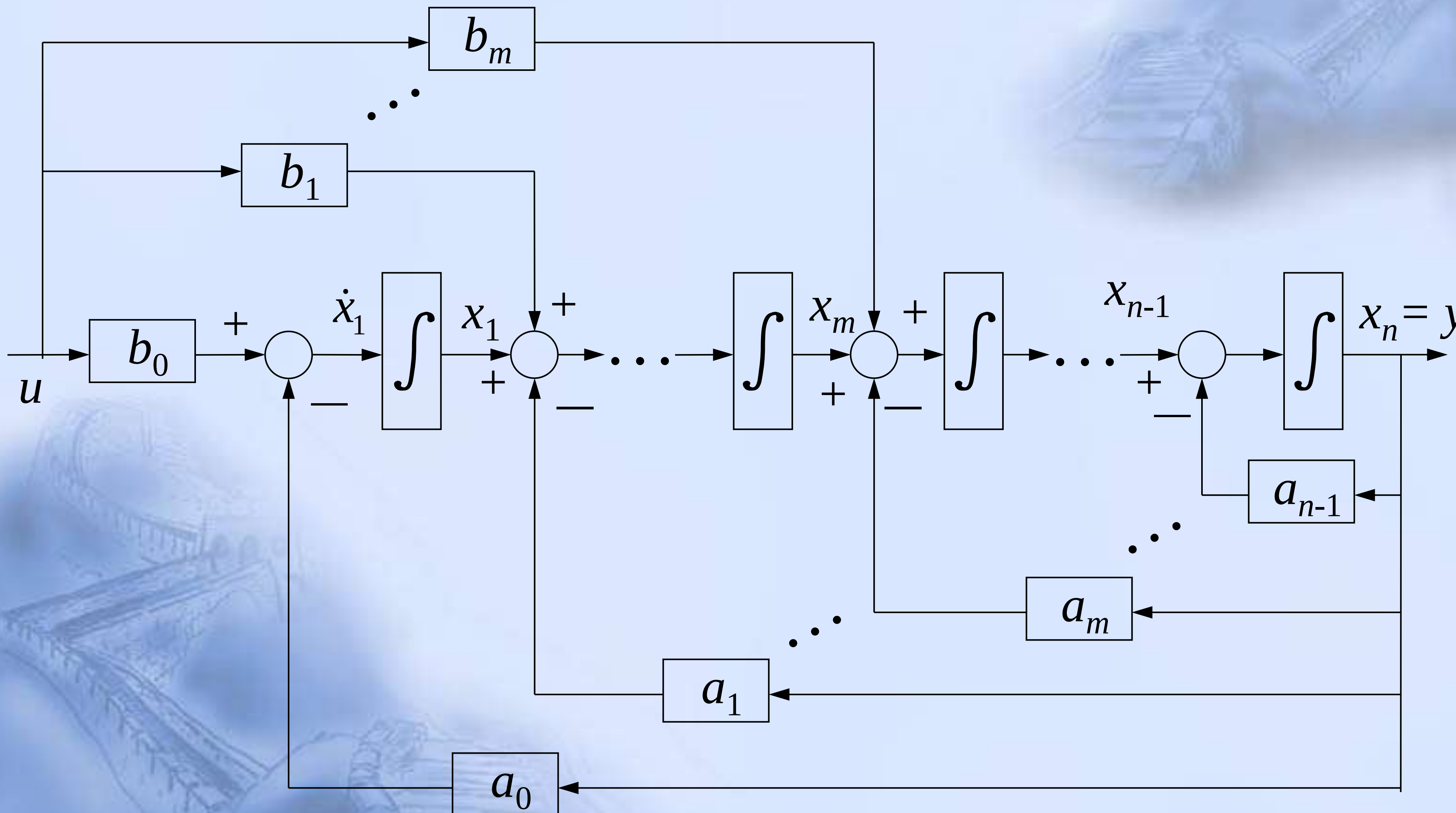
由对偶性原理，系统 (2.6.5)的对偶系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = [0, \quad \cdots \quad 0 \quad 1] x \end{cases} \tag{2.6.6}$$

是能观测的，并且与 (2.6.5)有**相同的传递函数**，所以也为(2.6.4)的一个实现。

- 称(2.6.6)为传递函数(2.6.4)的能观测标准型实现。

- 框图



(3) $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 只含单极点的情况 (并联实现)。

设$D(s)$可分解为$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$

式中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为系统的**单实极点**。

则传递函数可展成部分分式之和。

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}$$

而 $c_i=\left[\dfrac{N(s)}{D(s)}(s-\lambda_i)\right]\Bigg|_{s=\lambda_i}$ 为 $\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 在极点λ_i处的留数，

且有

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

若令状态变量

$$X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s);\qquad i=1,2,\cdots n$$

其反变换结果为

$$\dot{x}_i(t)=\lambda_i x_i(t)+u(t)$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)$$

$\xrightarrow{\text{展开得}}$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1+u\\
\dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2+u\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n+u\\
y &= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n
\end{aligned}$$

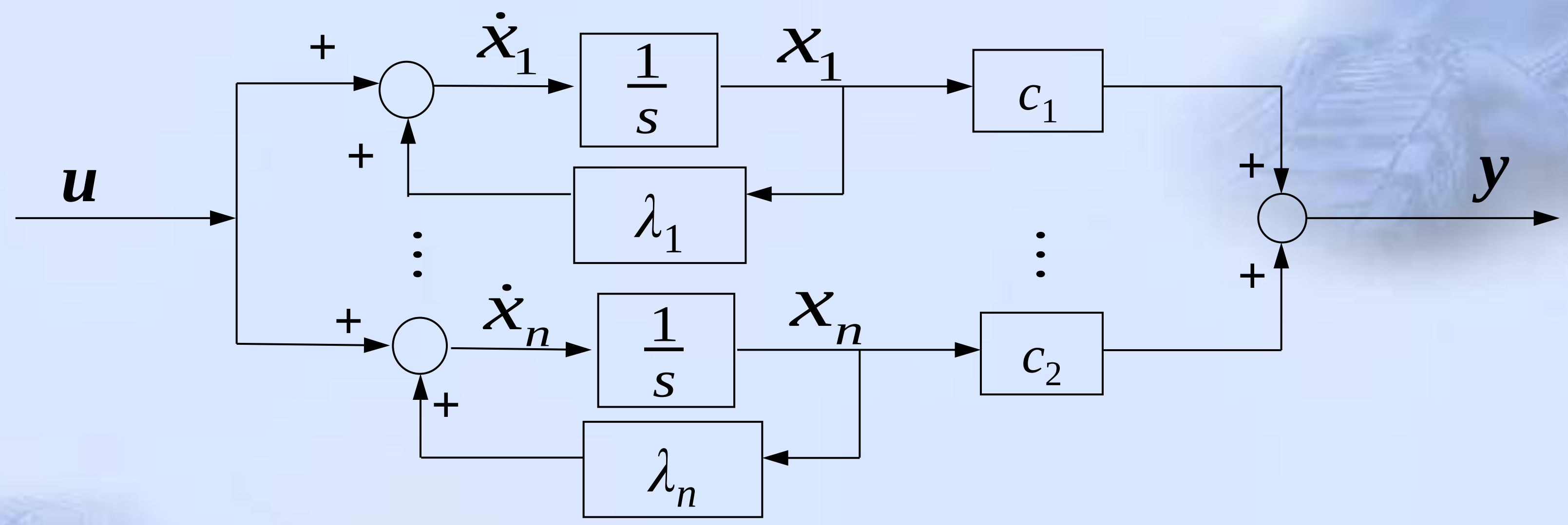
其向量 - 矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

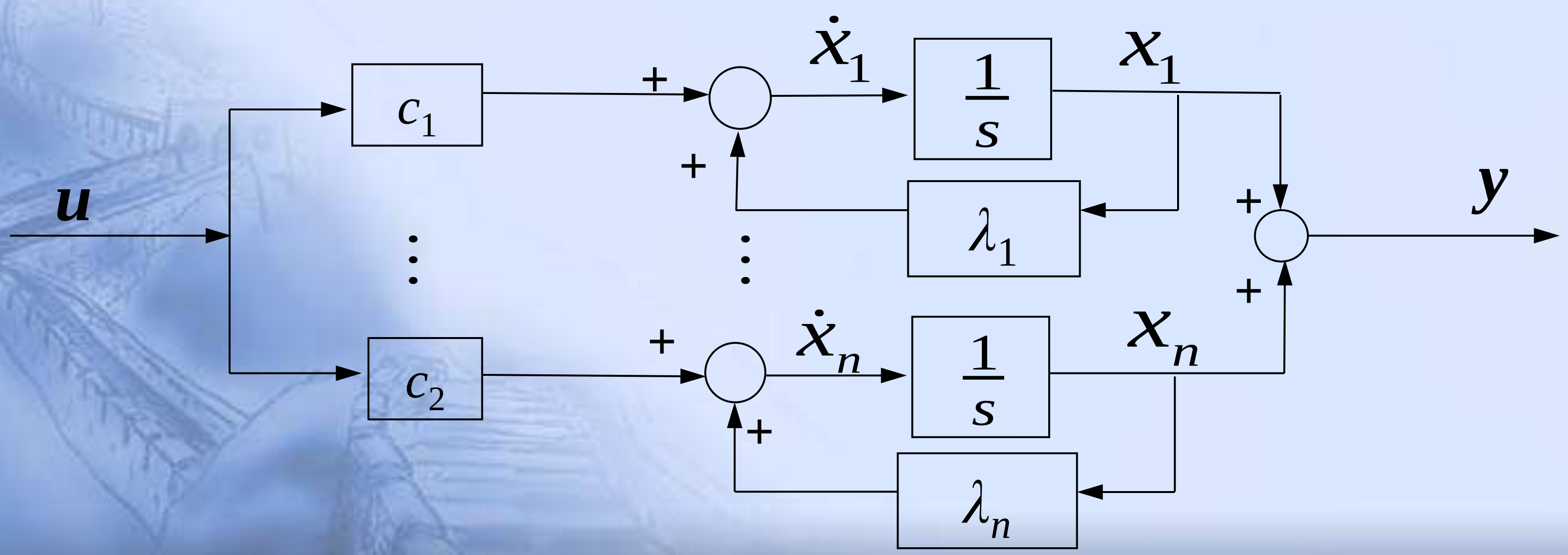
可求得它的对偶关系式如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 二者的状态变量图如下：



u
$+$
$\dot{x}_1$
$\frac{1}{s}$
x_1
c_1
λ_1
y
$\dot{x}_n$
x_n
c_2
λ_n



u
c_1
c_2
$+$
$\dot{x}_1$
$\frac{1}{s}$
x_1
λ_1
y
$\dot{x}_n$
x_n
λ_n

(4) $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ 含重极点的情况（并联实现）。

- 当传递函数除含**单实极点**之外还含有**重实极点**时，不仅可化为**能控或能观测标准型**，还可化为**标准型动态方程**，其A阵是一个含约当块的矩阵。
- 设$D(s)$可分解为：

$$D(s)=(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_4)\cdots(s-\lambda_q)$$

λ_1 为三重实极点，$\lambda_4,\cdots,\lambda_q$ 为单实极点。

则**传递函数**可展成下列部分分式之和：

$$X_{11}(s)=\frac{1}{(s-\lambda_1)^3}U(s)=\frac{1}{s-\lambda_1}X_{12}(s)$$

$$X_{12}(s)=\frac{1}{(s-\lambda_1)^2}U(s)=\frac{1}{s-\lambda_1}X_{13}(s)$$

$$X_{13}(s)=\frac{1}{(s-\lambda_1)}U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{c_{11}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{c_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{c_{13}}{s-\lambda_1}+\sum_{i=4}^{q}\frac{c_i}{s-\lambda_i}$$

$$Y(s)=c_{11}X_{11}(s)+c_{12}X_{12}(s)+c_{13}X_{13}(s)+\sum c_iX_i(s)$$

- 则可分别得出向量 - 矩阵形式的动态方程：

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \hline \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_q \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}
$$

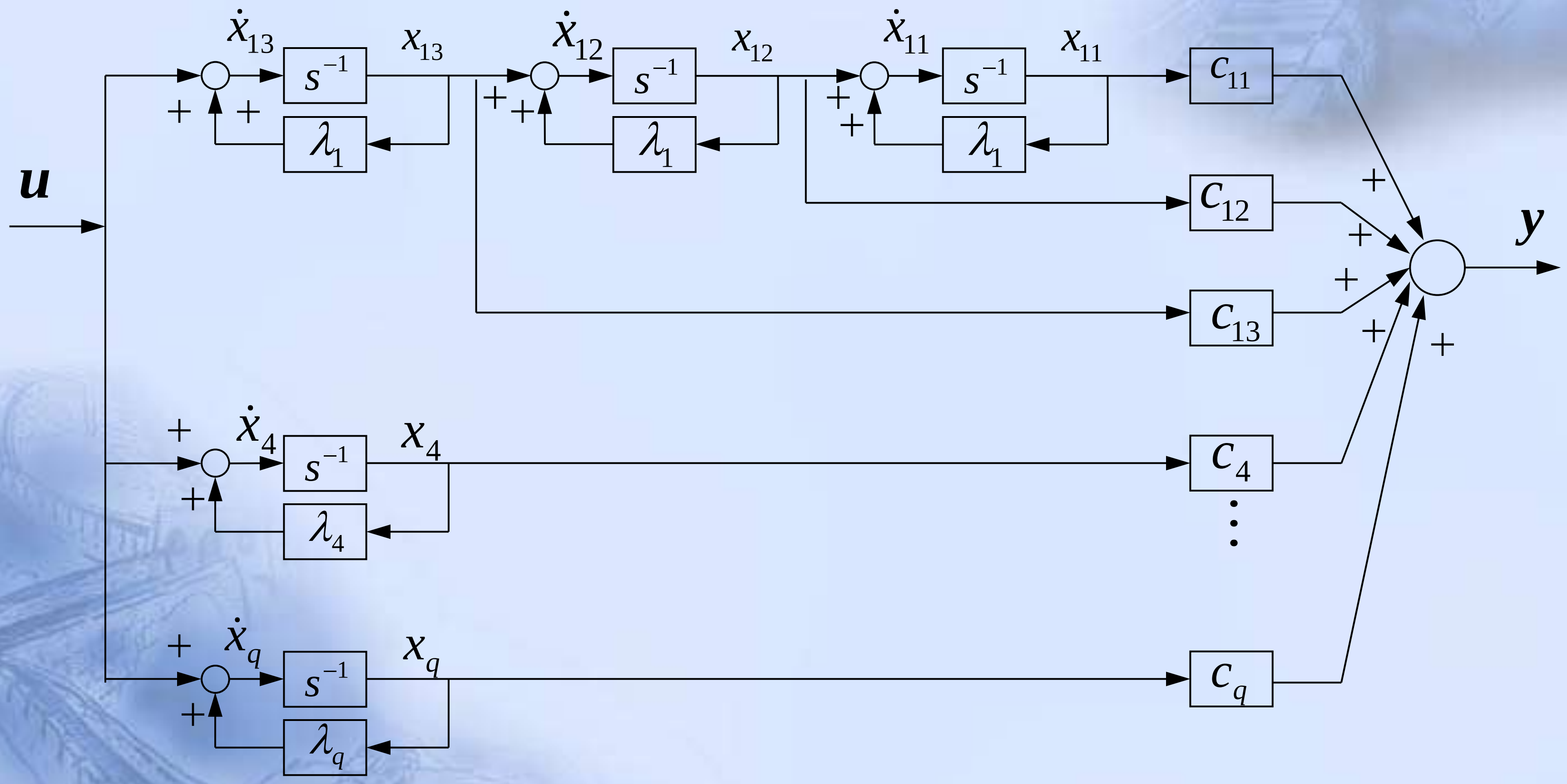
$$
\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_4 & \cdots & c_q \end{array}\right] \boldsymbol{x}
$$

对偶系统

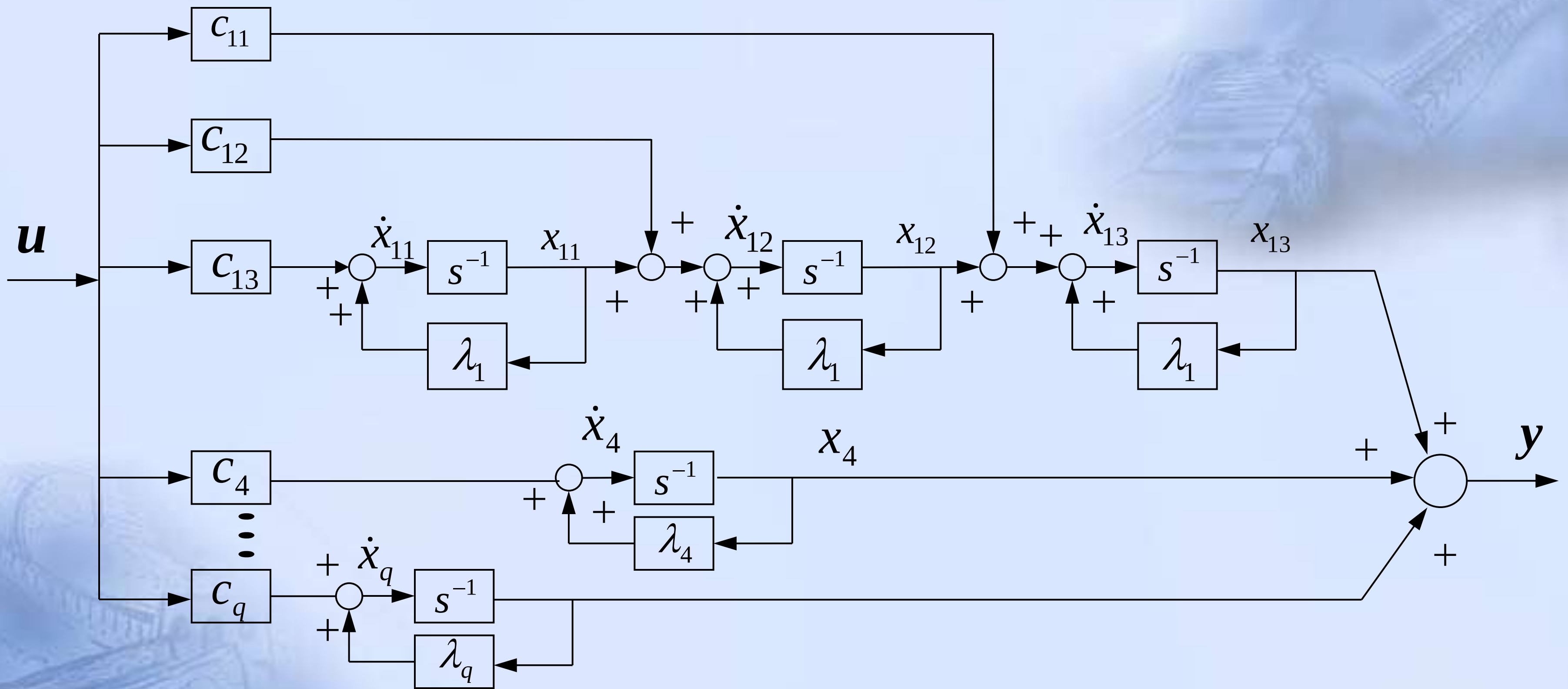
$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \hline \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & 0 & \\ & 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_q \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \hline x_4 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ \hline c_4 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix} \boldsymbol{u}
$$

$$
\boldsymbol{y} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \boldsymbol{x}
$$

- 框图：



u
y
$\dot{x}_{13}$
x_{13}
$\dot{x}_{12}$
x_{12}
$\dot{x}_{11}$
x_{11}
s^{-1}
λ_1
c_{11}
c_{12}
c_{13}
$\dot{x}_4$
x_4
λ_4
c_4
$\dot{x}_q$
x_q
λ_q
c_q



- 二者存在**对偶关系**。

- **例：** 求下列传递函数的约当型实现

$$G(s)=\frac{4s^2+17s+16}{s^3+7s^2+16s+12}$$

解：其分母多项式的根分别是-2两重根和-3单重根。

则$G(s)$的部分分式之和是

$$G(s)=\frac{c_{11}}{(s+2)^2}+\frac{c_{12}}{s+2}+\frac{c_2}{s+3}$$

待定系数c_2和c_{11}分别是：

$$c_2=\lim_{s\to-3}(s+3)G(s)=1$$

$$c_{11}=\lim_{s\to-2}(s+2)^2G(s)=-2$$

待定系数c_{12}由简便方法求出：

$$\lim_{s\to\infty} sG(s)=4=c_{12}+c_2$$

所以

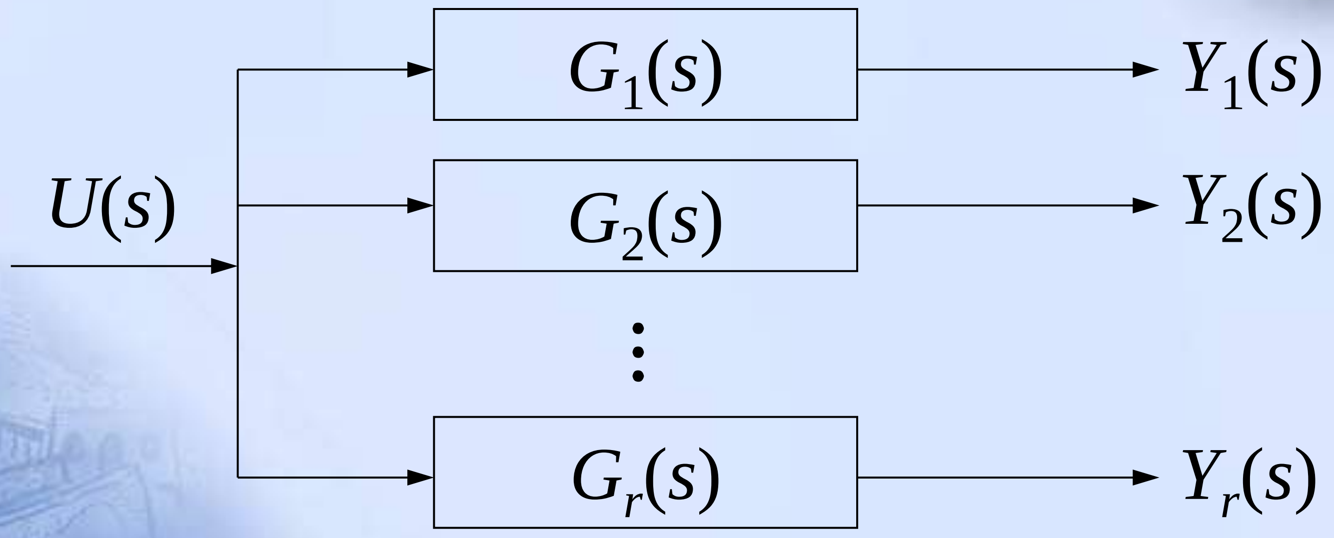
$$c_{12}=4-c_2=3$$

则$G(s)$的约当型实现是

$$A=\left[\begin{array}{cc:c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 \end{array}\right];\qquad B=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 1 \end{array}\right];\qquad C=\left[\begin{array}{cc:c} -2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

2. 单输入－多输出系统传递函数矩阵的实现

设单输入、r 维输出系统如下图所示，



系统可看作 r 个独立子系统组成。

传递矩阵$G(s)$为

$$G(s)=\begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ \vdots \\ G_r(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1+\hat{G}_1(s) \\ d_2+\hat{G}_2(s) \\ \vdots \\ d_r+\hat{G}_r(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \hat{G}_1(s) \\ \hat{G}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{G}_r(s) \end{bmatrix}=\boldsymbol{d}+\hat{G}(s)$$

式中，$\boldsymbol{d}$为常数向量；$\hat{G}_i(s)$ $(i=1,2,\ldots,r)$为不可约分的严格有理真分式函数。通常$\hat{G}_1(s),\hat{G}_2(s),\cdots,\hat{G}_r(s)$的特性并不相同，具有不同的分母，设最小公分母为

$$D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

则$\hat{G}(s)$的一般形式为

$$\hat{G}(s)=\frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix}\beta_{1,n\text{-}1}s^{n\text{-}1}+\cdots+\beta_{11}s+\beta_{10}\\ \beta_{2,n\text{-}1}s^{n\text{-}1}+\cdots+\beta_{21}s+\beta_{20}\\ \vdots\\ \beta_{r,n\text{-}1}s^{n\text{-}1}+\cdots+\beta_{r1}s+\beta_{r0}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\mathbf{d}+\hat{G}(s)$$

$$D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

将$\hat{G}(s)$作串联分解并引入中间变量z，令

$Z(s)=U(s)/D(s)$, $\quad x_1=z,\cdots,x_n=z^{(n-1)}$ (对应P145第(1)种情况)

若将A阵写为友矩阵，便可得到能控标准型实现的状态方程(P146)

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u=A\mathbf{x}+\mathbf{b}u$$

每个子系统的输出方程均表示为

z及其各阶导数的线性组合，即

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_{10}x_1 + \beta_{11}x_2 + \cdots + \beta_{1,n-1}x_n + d_1 u \\
y_2 &= \beta_{20}x_1 + \beta_{21}x_2 + \cdots + \beta_{2,n-1}x_n + d_2 u \\
&\vdots \\
y_r &= \beta_{r0}x_1 + \beta_{r1}x_2 + \cdots + \beta_{r,n-1}x_n + d_r u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= [Y_1(s) \quad Y_2(s) \quad \cdots \quad Y_r(s)]^T \\
&= G(s)U(s) \\
&= (d + \hat{G}(s))U(s) \\
&= \left(d + \frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix} \beta_{1,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{11}s + \beta_{10} \\ \beta_{2,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{21}s + \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{r,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{r1}s + \beta_{r0} \end{bmatrix}\right)U(s) \\
&= dU(s) + \frac{1}{D(s)}\begin{bmatrix} \beta_{1,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{11}s + \beta_{10} \\ \beta_{2,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{21}s + \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{r,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{r1}s + \beta_{r0} \end{bmatrix}U(s) \\
&= dU(s) + \begin{bmatrix} \beta_{1,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{11}s + \beta_{10} \\ \beta_{2,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{21}s + \beta_{20} \\ \vdots \\ \beta_{r,n\text{-}1}s^{n\text{-}1} + \cdots + \beta_{r1}s + \beta_{r0} \end{bmatrix}Z(s)
\end{aligned}
$$

$$x_1 = z, \cdots, x_n = z^{(n-1)}$$

其向量 - 矩阵形式为

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{r0} & \beta_{r1} & \cdots & \beta_{r,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \end{bmatrix} u = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}u
$$

3. 多输入 - 多输出系统传递函数矩阵的实现

- 考虑m个输入，r个输出的系统，传递函数阵$G(s)$为$r\times m$矩阵。设$G(s)$为严格真有理分式阵，以$g(s)$表示$G(s)$的元素的分母的最小公倍式，其首项系数为1，记为：

$$g(s)=s^q+a_{q-1}s^{q-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

于是$G(s)$可表示为

$$G(s)=N(s)(\ g(s)\ )^{-1}=N(s)\cdot(\ g(s)I\ )^{-1}$$

其中

$$N(s)=N_0+N_1s+\cdots+N_{q-1}s^{q-1},$$

$N_0,N_1,\cdots,N_{q-1}$ 是$r\times m$常数矩阵。

- 输入输出关系$Y(s)=G(s)U(s)$化为

$$Y(s)=N(s)(g(s)I)^{-1}U(s).$$

令
$$Y_0(s)=[g(s)I]^{-1}U(s) \tag{2.6.7}$$

$$=\begin{bmatrix} 1/g(s) & & & \\ & 1/g(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/g(s) \end{bmatrix}_{m\times m}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

则上式化为

$$Y(s)=N(s)Y_0(s)$$

$$N(s)=N_0+N_1s+\cdots+N_{q-1}s^{q-1},$$

$$Y(s)\in\mathbb{R}^{r\times 1},N(s)\in\mathbb{R}^{r\times m},Y_0(s)\in\mathbb{R}^{m\times 1}$$

式(2.6.7)实质上是m个相同的**SISO**系统形式上的组合，每个**SISO**系统的传递函数都是$1/g(s)$。

第 $i\,(i=1,2,\ldots m)$ 个SISO系统的一个能控标准型实现为：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_{1,i}}{dt}=x_{2,i}\\ \dfrac{dx_{2,i}}{dt}=x_{3,i}\\ \quad\vdots\\ \dfrac{dx_{q-1,i}}{dt}=x_{q,i}\\ \dfrac{dx_{q,i}}{dt}=-a_0x_{1,i}-a_1x_{2,i}-\cdots-a_{q-1}x_{q,i}+u_i\\ y_{0,i}=x_{1,i}\end{cases}$$

$$Y_{0,i}(s)=[g(s)]^{-1}U_i(s),\ \ g(s)=s^q+a_{q-1}s^{q-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

$$g(s)Y_{0,i}(s)=U_i(s)$$

$$(s^q+a_{q-1}s^{q-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y_{0,i}(s)=U_i(s)$$

$$\frac{d^qy_{0,i}}{dt^q}+a_{q-1}\frac{d^{(q-1)}y_{0,i}}{dt^{(q-1)}}+\cdots+a_0y_{0,i}=u_i$$

$$x_{1,i}=y_{0,i},\ \dot{x}_{1,i}=x_{2,i},\ \cdots,\ \dot{x}_{q-1,i}=x_{q,i},$$

$$\dot{x}_{q,i}=\frac{d^qy_{0,i}}{dt^q}=-a_{q-1}\frac{d^{(q-1)}y_{0,i}}{dt^{(q-1)}}-\cdots-a_0y_{0,i}+u_i$$

$$y_0=[y_{0,1},y_{0,2},\cdots,y_{0,m}]^T,\ x_1=[x_{1,1},x_{1,2},\cdots,x_{1,m}]=y_0$$

而 $Y(s)=N(s)Y_0(s) \qquad N(s)=N_0+N_1 s+\cdots+N_{q-1}s^{q-1}$,

$$Y(s)=N_0Y_0(s)+N_1sY_0(s)+\cdots N_{q-1}s^{q-1}Y_0(s).$$

因此有 $$y(t)=N_0x_1(t)+N_1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+N_{q-1}\frac{d^{q-1}x_1}{dt^{q-1}}$$
$$=N_0x_1+N_1x_2+\cdots N_{q-1}x_{q-1}.$$

如果引进状态 $x=[x_1^T\,x_2^T\,\cdots x_q^T]^T$, 可写为矩阵形式

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\begin{bmatrix}0 & I & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & I & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\\ -a_0I & -a_1I & -a_2I & \cdots & -a_{q-1}I\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\I\end{bmatrix}u,\\ y=[N_0 \quad N_1 \quad \cdots \quad N_{q-1}]\boldsymbol{x},\end{cases}$$

其中I为m阶单位矩阵，容易验证它是完全能控的，因而是$G(s)$的能控实现。

对于传递函数$G(s)$，其能控标准型实现为：

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & I_m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & I_m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m\\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \cdots & -a_{q-1} I_m\end{bmatrix};B_c=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ I_m\end{bmatrix};C_c=\begin{bmatrix}N_0 & \cdots & N_{q-1}\end{bmatrix}$$

其能观测标准型实现为：

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 I_r\\ I_r & 0 & 0 & \cdots & -a_1 I_r\\ 0 & I_r & 0 & \cdots & -a_2 I_r\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{q-1} I_r\end{bmatrix};B_c=\begin{bmatrix}N_0\\ \vdots\\ N_{q-2}\\ N_{q-1}\end{bmatrix};C_c=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & I_r\end{bmatrix}$$

一般来说$m\neq r$，能控实现和能观测实现的维数是不一样的。可以根据输入维数m和输出维数r的大小，选择其中一个维数较低的实现做为传递函数的实现。

例2.6.1：

已知单输入－双输出系统的传递矩阵为

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\\[2ex]\dfrac{s+4}{s+1}\end{bmatrix}$$

求传递矩阵的能控标准型实现。

解：由于系统是单输入、双输出的，故输入矩阵只有一列，输出矩阵有两行。

将$G(s)$化为严格有理真分式

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{s+4}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{3}{s+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{d}+\hat{G}(s)$$

$\hat{G}(s)$ 各元素的最小公分母$D(s)$为 $D(s)=(s+1)(s+2)$

故

$$G(s)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3\\3(s+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3\\3s+6\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3\\3s+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+N(s)(g(s)I)^{-1}$$

$$g(s)=s^q+a_{q-1}s^{q-1}+\cdots+a_1s+a_0=s^2+3s+2$$

$$q=2,a_0=2,a_1=3$$

$$N(s)=\begin{bmatrix}s+3\\3s+6\end{bmatrix},N_0=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix},N_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

则能控标准型动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}u=\begin{bmatrix}3&1\\6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

4. 最小实现

定理2.12 $G(s)$的实现是最小实现的充分必要条件是它完全能控能观测的。

由这个定理得到如下的求最小实现的方法：

第一步 求$G(s)$的一个实现。

第二步 化为标准结构形式，其能控能观测子系统就是$G(s)$的一个最小实现。

如果按照上面的做法第一步求出的是$G(s)$的能控实现，则第二步只需将它化为能观测结构形式，由此得到的能观测子系统就是$G(s)$的一个最小实现。

如果传递函数阵$G(s)$是严格真有理分式阵，那么可以证明如下定理：

定理2.13 设$G(s)$是严格真有理分式阵，那么它的最小实现是彼此等价的。

这就是说如果(C_1, A_1, B_1)和(C_2, A_2, B_2)是$G(s)$的两个最小实现，则存在可逆方阵T，使得

$$A_2 = T^{-1} A_1 T$$

$$B_2 = T^{-1} B_1$$

$$C_2 = C_1 T$$

注：系统按能控结构形式的分解和按能观测结构形式的分解以及标准分解，因只涉及A、B、C矩阵的变换，所得结果对离散系统均成立。

对离散时间定常线性系统的最小实现，有如下定理：

定理2.14 离散时间定常线性系统传递函数阵的一个实现是最小实现的充分必要条件是它是能达、能观测的。

§2.7 动态系统的稳定性

- 2.7.1 李雅普诺夫意义下的稳定性
- 2.7.2 李雅普诺夫第一方法
- 2.7.3 李雅普诺夫第二方法
- 2.7.4 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析

李雅普诺夫 (Lyapunov)

- **李雅普诺夫 (A. M. Lyapunov)**，俄国数学家、力学家，切比雪夫所创立的圣彼得堡数学学派的杰出代表人之一。
- 1892年，发表了博士论文**《运动稳定性的一般问题》**，从能量的角度出发，提出了两大著名的稳定性判定方法，为自动控制理论的发展做出了巨大贡献。

(1857~1918)

2.7.1 李雅普诺夫意义下的稳定性

设系统方程为：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$

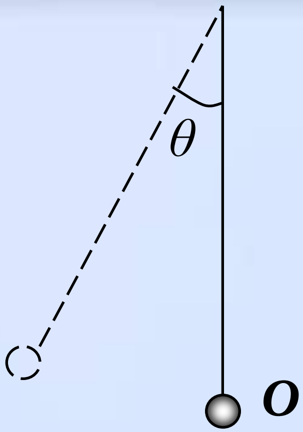
其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，t 为时间变量。

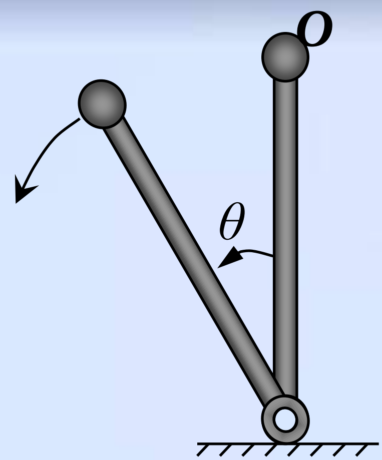
设 t_0 为初始时刻，$\boldsymbol{x}_0$ 为初始状态向量。

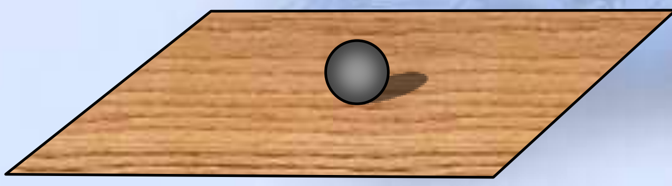
方程的解为：$\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$

- **(1) 平衡状态**

对于系统，如果对所有的 t，满足 $f(x_e, t) = \mathbf{0}$ 的状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为平衡状态。

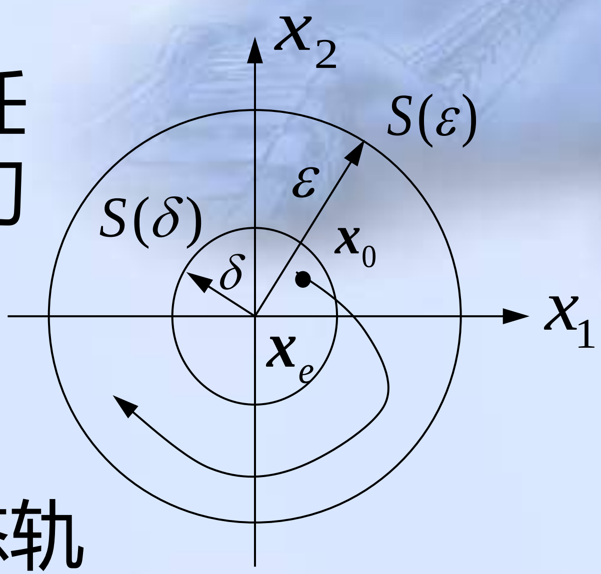






- 单摆：仅当其位于垂直线O点处时，单摆才不动，所以O点是唯一的平衡位置。
- 倒摆：当它严格位于垂直向上的O点位置时，也应保持不动，所以O点是它的平衡位置。
- 小球：若轻轻将小球放在水平平面内任何一个位置，它都将保持不动，所以平面上任意一点都是平衡位置。

▪ (2) 李雅普诺夫稳定性



设$\boldsymbol{x}_e$为系统的平衡状态，如果对任意一个ε>0，总存在一个δ>0，使当初值满足

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta,$$

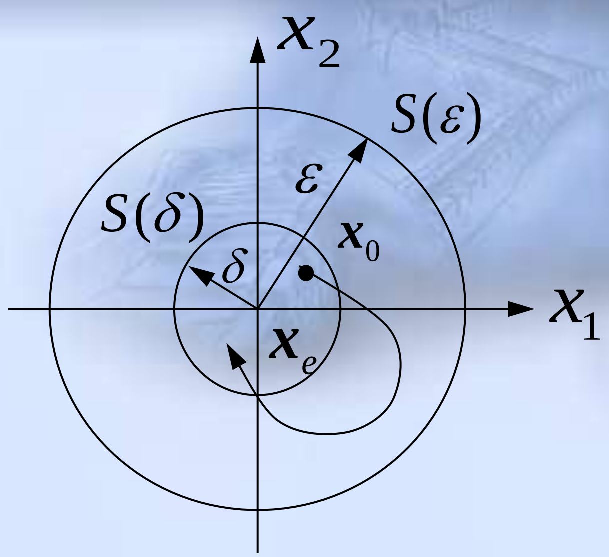
时，对于以 x_0 为初值的系统的动态轨迹 $x(t;x_0,t_0)$，恒有

$$\|x(t;x_0,t_0) - x_e\| \le \varepsilon, \quad t \ge t_0$$

则称系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$在李雅普诺夫意义下是**稳定**的。

其中 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| = \sqrt{(x_{10} - x_{1e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2}$

(3) 渐近稳定性



若系统的平衡状态x_e不仅具有李雅普诺夫意义下的稳定性，且有

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e\right\|=0$$

则称此平衡状态是**渐近稳定**的。

(4) 大范围(全局)渐近稳定性

设x_e为系统**唯一**的一个平衡状态，且是稳定的。如果对**任意初始状态**$\boldsymbol{x}_0$，其对应轨迹$\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$恒有：

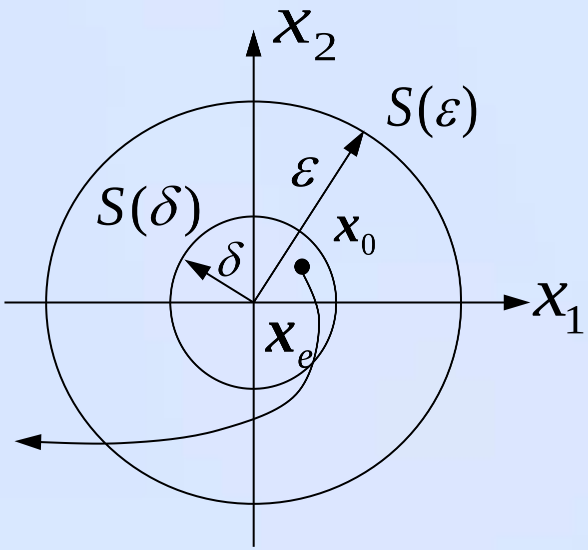
$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e\right\|=0$$

则称平衡状态x_e是**大范围渐近稳定**的。此时，由状态空间中任一点出发的轨迹都收敛至x_e。

注意：从**工程观点**，**渐近稳定**比**稳定**更为重要。实际上，**渐近稳定**即为工程意义下的稳定，而**李雅普诺夫意义下**的**稳定**则是工程意义下的临界不稳定。

- **(5) 不稳定性**

如果对于某个实数 $\varepsilon>0$ 和任一个实数 $\delta>0$，在 $S(\delta)$ 内总存在着一个状态 $\boldsymbol{x}_0$ 使得由这一状态出发的轨迹超出 $S(\varepsilon)$，则平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 就称为是**不稳定**的。



- **李雅普诺夫稳定性理论**包含两种方法:
  - ✓ 通过求**微分方程**的**解**，再根据**解**的**特性**来判别系统的稳定性。**(第一方法、间接法)**
  - ✓ 根据系统的微分方程构造**李雅普诺夫函数**，再根据**李雅普诺夫函数**来判断系统的稳定性。**(第二方法、直接法)**

2.7.2 李雅普诺夫第一方法 (间接法)

定理2.15 对于线性定常系统 $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$，有

- 若A的特征根均具有负实部，则系统**大范围渐近稳定**。
- 若A至少有一个正实部的特征根，则系统是**不稳定**的。
- 假定A没有正实部的特征根, 但有零实部的特征根。
  - 若所有零实部的特征根皆是A的最小多项式(以A为根的多项式中，次数最低的首一多项式)的单根，则系统是**稳定**的，但不是**渐近稳定**的；
  - 若有一零实部的特征根，是A的最小多项式的重根，则系统是**不稳定**的。

- 线性定常系统 $\dot{x}=A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, 当系统是渐近稳定时，$A$的特征根都具有负实部，因而没有零特征根。故$A$是满秩的，此时其平衡状态0是唯一的。
- 对于控制系统，今后均要求是渐近稳定，因此其平衡状态仅为0。

LTI系统的平衡状态 **0** 是**渐近稳定**的。

$\Longleftrightarrow$ 系统的平衡状态0是稳定的，并且

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)\right\|=0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} t^{\beta_i}e^{\alpha_i t+j\omega_i t}=0\text{，即}\lim_{t\to\infty}\left\|e^{At}\right\|=0$$

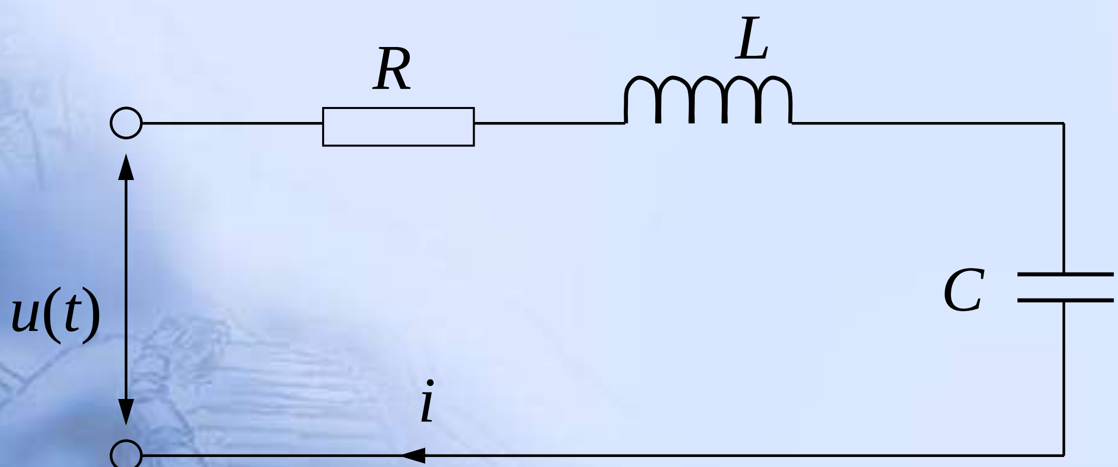
$\Longleftrightarrow$ A特征值均具有负实部。

2.7.3 李雅普诺夫第二方法(直接法)

- **例2.7.1** 如图所示*RLC*串联电路，输入电压$u(t)=0$，系统的状态变量选取为

$$x_1 = i\,(t)$$

$$x_2 = u_c(t)$$



方程为
$$\begin{cases} L\dfrac{di}{dt}+i(t)R+u_c(t)=0 \\ C\dfrac{du_c(t)}{dt}=i(t) \end{cases}$$

状态方程为
$$\begin{cases} \dot{x}_1=-\dfrac{R}{L}x_1-\dfrac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

设系统初值为$\mathbf{x}_0\neq 0$，那么其对应的系统状态轨线为$\mathbf{x}(t)$。

此时对应于轨线$\mathbf{x}(t)$的系统的电场能量为

$$W_1=\frac{1}{2}Cu_c^2=\frac{1}{2}Cx_2^2$$

系统具有的磁场能量为

$$W_2=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}Lx_1^2$$

总能量 $$W=W_1+W_2=\frac{1}{2}(Cx_2^2+Lx_1^2)$$

则能量的变化率为

$$\frac{dW(x)}{dt}=\frac{\partial W(x)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial W(x)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$=Lx_1\dot{x}_1+Cx_2\dot{x}_2$$

$$=Lx_1(-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{L}x_2)+Cx_2\frac{1}{C}x_1$$

$$=-Rx_1^2$$

- 当R=0时，$\frac{dW(x)}{dt}\equiv 0$，这时无能量消耗，系统稳定但不是渐近稳定。
- 当R>0时，$\frac{dW(x)}{dt}\le 0$，且不恒等于0，电路消耗能量。最终将回到平衡位置0，所以系统是渐近稳定的。

- 从物理角度分析
  - 当系统在运动(变化)过程中**总能量不变**，则应是**稳定**的。
  - 若**能量是衰减**的，最终衰减完毕系统回到平衡位置，则系统是**渐近稳定**的。
- 现将上述**能量函数的概念**推广到系统的所谓**李雅普诺夫函数的概念**上来。

系统 $$\dot{x} = f(x)$$

设 $x=0$ 是**孤立平衡状态**，

即存在 $x=0$ 的一个邻域 $\Omega:\|x\|\le K, K>0$，使得在该邻域内，仅有 $x=0$ 这一个平衡状态。

李雅普诺夫函数

若在邻域Ω内存在函数$V(\boldsymbol{x})$，满足下列条件：

- **$V(x)$是正定的**，即$V(\boldsymbol{x})$是连续的，且

$$V(0)=0,\quad V(\boldsymbol{x})>0 \quad (\text{当}\boldsymbol{x}\neq 0\text{时})$$

- $V(\boldsymbol{x})$的偏导 $\dfrac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\cdots,n)$，存在且连续。

- $$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T \dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

$$=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}f_2+\cdots+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}f_n$$

$\dot{V}(x)$是半负定的，即$\dot{V}(\boldsymbol{x})$连续且$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leq 0$

则$V(\boldsymbol{x})$为系统的一个**李雅普诺夫函数**。

- 应用**李雅普诺夫函数**可以分析系统的稳定性，称之为**李雅普诺夫第二方法**，这个方法适用于一般系统。

有以下定理：

- **定理2.16** 设 $x=\mathbf{0}$ 是系统的**平衡状态**，如果对该系统**存在李雅普诺夫函数**，则平衡状态 $x=\mathbf{0}$ 是**稳定**的。

- **定理2.17** 设 $x=\mathbf{0}$ 是系统的**平衡状态**，如果对该系统**存在李雅普诺夫函数**$V(x)$，并且沿轨线 $dV/dt<\mathbf{0}$，则系统的平衡状态 $x=\mathbf{0}$ 是**渐近稳定**的。

- **定理2.18** 设 $x = 0$ 是系统的**平衡状态**，如果
  - 存在有连续一阶导数的函数 $V(x)$， $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
  - 对 $x = \mathbf{0}$ 的任一邻域都存在 $x^* \neq \mathbf{0}$ 使 $V(x^*) < \mathbf{0}$，沿非零轨线 $dV/dt \leq \mathbf{0}$，

则系统的平衡状态 $x = \mathbf{0}$ 不是**渐近稳定**的。

如果沿非零轨线 $dV/dt < \mathbf{0}$，那么平衡状态 $x = \mathbf{0}$ 是**不稳定的**。

- **例2.7.2**：试确定下面系统的稳定性。

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

解：原点为系统惟一的平衡状态。

选取正定标量函数 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

则 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$

由此可看出，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$V(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$，$dV/dt < \boldsymbol{0}$,

则系统的平衡状态 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的(定理2.17)。

2.7.4 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析

(1) 线性定常连续系统渐近稳定的判别

定理2.19 定常线性系统渐近稳定的**充分必要条件**是对任一给定的对称正定矩阵Q, 矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q \qquad (2.7.1)$$

有唯一解，并且P也是正定的。

方程(2.7.1)称为**李雅普诺夫方程**。

证明:

充分性 设对任一对称正定矩阵Q，式(2.7.1)存在唯一正定解P。令$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T P\mathbf{x}$，显然$V(\mathbf{x})$是正定函数,并且

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dx^T}{dt}Px+x^T P\frac{dx}{dt}$$

$$=x^T A^T Px+x^T PAx$$

$$=x^T(A^T P+PA)x$$

$$=x^T(-Q)x<0$$

则系统的平衡状态$\mathbf{x}=0$是渐近稳定的，即系统渐近稳定。

必要性 **1) 唯一解**

设系统是渐近稳定的，则A的特征值均有负实部，对A的任意两个特征值 $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j \neq 0$ 。这恰是矩阵方程(2.7.1)有唯一解的充分必要条件。

2) 对称解 $A^T P^T + P^T A = (PA)^T + (A^T P)^T = (PA + A^T P)^T$

$$= -Q^T = -Q$$

因此P^T也是式(2.7.1)的解。由解的唯一性知P^T=P，即(2.7.1)有唯一对称矩阵解P。

3) *P*半正定 令$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T P\mathbf{x}$，则有

$$\frac{dV}{dt} = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Qx < 0$$

反证法： 如果P不是半正定的，即$V(\mathbf{x})$不是半正定的，则存在$\mathbf{x}^*\neq 0$，使得$V(\mathbf{x}^*)=\mathbf{x}^{*T}P\mathbf{x}^* < 0$，由定理2.18知系统不是渐近稳定的，与假设矛盾，因此P必是半正定的。

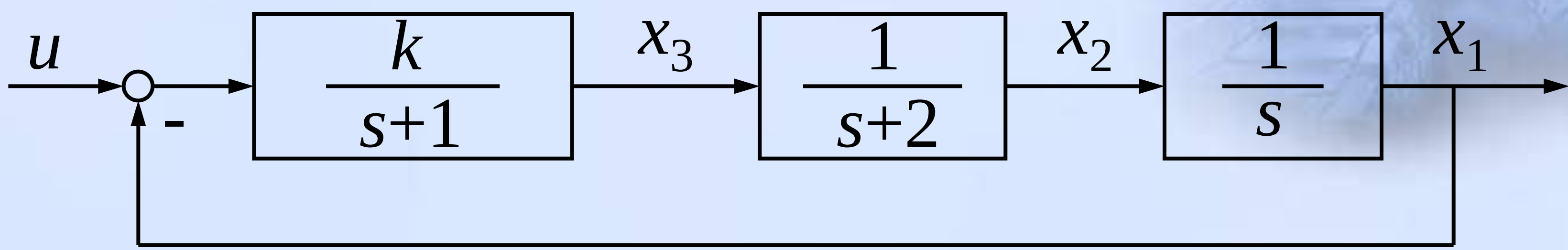
4) P是正定的

如果P不是正定的，即$V(\mathbf{x})$不是正定的，因此在$\mathbf{x}=0$的任意邻域内存在$\mathbf{x}^*\neq 0$，使得$V(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^{*T}P\mathbf{x}^* = 0$，以$\mathbf{x}^*$为初始状态的系统的轨线设为$\mathbf{x}(t)$，那么存在$t'$，使对$0\leqslant t\leqslant t'$, $\mathbf{x}(t)\neq 0$。因为有

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -x^T Qx < 0$$

于是$V(\mathbf{x})<V(\mathbf{x}^*)=0$，这与$V(\mathbf{x})$半正定矛盾，这就证明了$P$为正定矩阵。

例2.7.3：试用李雅普诺夫方法确定使系统稳定的k值范围。



解：如图示可得出状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u$$

研究系统稳定性时，可令u=0。由于$detA=-k \neq 0$，故A非奇异，原点为唯一的平衡状态。(若A奇异，$Ax=0$有非零解。)

假定Q取为半正定矩阵 $Q=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

则$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{T}Q\boldsymbol{x}=-x_3^2$，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为半负定。

令$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$，有$x_3\equiv 0$；考虑到状态方程中

$$\dot{x}_3=-kx_1-x_3 \quad 则 \quad x_1\equiv 0$$

而 $$\dot{x}_1=x_2 \quad 则 \quad x_2\equiv 0$$

这表明惟有原点使$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$，故可采用半正定Q来简化稳定性分析

令 $$A^TP+PA=-Q$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-k\\1&-2&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-k&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

得$n(n+1)/2$个方程，解得

$$P=\begin{bmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{6k}{12-2k} & 0 \\ \frac{6k}{12-2k} & \frac{3k}{12-2k} & \frac{k}{12-2k} \\ 0 & \frac{k}{12-2k} & \frac{6}{12-2k} \end{bmatrix}$$

使P正定的**充分必要条件**为：

$$12-2k>0 \text{ 及 } k>0$$

故$0<k<6$时，**系统稳定**。

定理2.20 定常线性系统的极点实部都小于$-\sigma$ (σ 为正数) 的充分必要条件是对某个正定矩阵Q，矩阵方程

$$A^T P + PA + 2\sigma P = -Q$$

存在唯一正定解。

- 矩阵A的特征值的实部都小于$-\sigma$等价于矩阵$A+\sigma I$的特征值都具有负实部。

$$A' = A + \sigma I$$

$$A'^T P + PA' = -Q$$

$$\Rightarrow (A+\sigma I)^T P + P(A+\sigma I) = -Q$$

$$\Rightarrow A^T P + PA + 2\sigma P = -Q$$

(2) 线性定常离散系统渐近稳定的判别

李雅普诺夫方法也可以应用于离散系统，应用于离散时间定常线性系统为：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0;\ k=0,1,2,\cdots \qquad (2.7.2)$$

式中A非奇异，原点是平衡状态。取正定二次型函数：

$$V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^T(k)P\,\boldsymbol{x}(k)$$

而
$$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k))$$

有
$$\begin{aligned}\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) &= \boldsymbol{x}^T(k+1)P\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}^T(k)P\boldsymbol{x}(k)\\ &=[A\boldsymbol{x}(k)]^T P[A\boldsymbol{x}(k)]-\boldsymbol{x}^T(k)P\boldsymbol{x}(k)\\ &=\boldsymbol{x}^T(k)(A^TPA-P)\boldsymbol{x}(k)\end{aligned}$$

令$A^TPA-P=-Q$，则$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) = -\boldsymbol{x}^T(k)Q\,\boldsymbol{x}(k)$

定理2.21 离散定常线性系统(2.7.2)渐近稳定的充分必要条件是对任一给定的正定矩阵Q，矩阵方程

$$A^TPA-P=-Q$$

存在唯一正定解。

- $V(\boldsymbol{x}(k))$是系统的一个李雅普诺夫函数。
- $A^TPA-P=-Q$ 称为离散的李雅普诺夫代数方程，通常可取$Q=I$。