

命题: 称能判断真假的陈述句为命题。

命题公式: 若在复合命题中, p 、 q 、 r 等不仅可以代表命题常项, 还可以代表命题变项, 这样的复合命题形式称为命题公式。

命题的赋值: 设 A 为一命题公式, p, p, \dots, p 为出现在 A 中的所有命题变项。给 p, p, \dots, p 指定一组真值, 称为对 A 的一个**赋值或解释**。若指定的一组值使 A 的值为真, 则称成**真赋值**。

真值表: 含 n ($n \geq 1$) 个命题变项的命题公式, 共有 2^n 组赋值。将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列成表, 称为 A 的真值表。

命题公式的类型: (1) 若 A 在它的各种赋值下均取值为真, 则称 A 为**重言式或永真式**。

(2) 若 A 在它的赋值下取值均为假, 则称 A 为**矛盾式或永假式**。

(3) 若 A 至少存在一组赋值是成真赋值, 则 A 是**可满足式**。

主析取范式: 设命题公式 A 中含 n 个命题变项, 如果 A 得析取范式中的简单合取式全是极小项, 则称该析取范式为 A 的主析取范式。

主合取范式: 设命题公式 A 中含 n 个命题变项, 如果 A 得析取范式中的简单合析式全是极大项, 则称该析取范式为 A 的主合取范式。

命题的等值式: 设 A 、 B 为两命题公式, 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式, 则称 A 与 B 是**等值的**, 记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

约束变元和自由变元: 在合式公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中, 称 x 为**指导变项**, 称 A 为相应量词的**辖域**, x 称为**约束变元**, x 的出现称为**约束出现**, A 中其他出现称为**自由出现 (自由变元)**。

一阶逻辑等值式: 设 A , B 是一阶逻辑中任意的两公式, 若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式, 则称 A 与 B 是等值的, 记作 $A \Leftrightarrow B$, 称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式。

前束范式: 设 A 为一谓词公式, 若 A 具有如下形式 $Q_1x_1 Q_2x_2 Q_k \cdots x_k B$, 称 A 为前束范式。

集合的基本运算: 并、交、差、相对补和对称差运算。

笛卡尔积: 设 A 和 B 为集合, 用 A 中元素为第一元素, 用 B 中元素为第二元素构成有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡尔积, 记为 $A \times B$ 。

二元关系: 如果一个集合 R 为空集或者它的元素都是有序对, 则称集合 R 是一个二元关系。

特殊关系: (1)、**空关系**: \emptyset (2) **全域关系**: $EA = \{<x, y> | x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

(3) **恒等关系**: $IA = \{<x, x> | x \in A\}$

(4) **小于等于关系**: $LA = \{<x, y> | x, y \in A \wedge x \leq y \in A\}, A \subseteq R$

(5) **整除关系**: $R \subseteq = \{<x, y> | x, y \in \Psi \wedge x \mid y\}, \Psi$ 是集合族

二元关系的运算: 设 R 是二元关系,

(1) R 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 R 的**定义域** $\text{dom } R = \{x | \exists y (<x, y> \in R)\}$

(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的**值域** $\text{ran } R = \{y | \exists x (<x, y> \in R)\}$

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的**域** $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

二元关系的性质: 自反性, 反自反性, 对称性, 反对称性, 传递性。

等价关系: 如果集合 A 上的二元关系 R 是自反的, 对称的和传递的, 那么称 R 是**等价关系**。

设 R 是 A 上的等价关系, x, y 是 A 的任意元素, 记作 $x \sim y$ 。

等价类: 设 R 是 A 上的等价关系, 对任意的 $\forall x \in A$, 令 $[x]R = \{y | y \in A \wedge x R y\}$, 称 $[x]R$ 为 x 关于 R 的**等价类**。

偏序关系: 设 R 是集合 A 上的二元关系, 如果 R 是自反的, 反对称的和传递的, 那么称 R 为 A 上的**偏序**, 记作 \leq ; 称序偶 $\langle A, R \rangle$ 为**偏序集合**。

函数的性质: 设 $f: A \rightarrow B$,

(1) 若 $\text{ran } f = B$, 则称 f 是**满射 (到上)** 的。

(2) 若 $\forall y \in \text{ran } f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 是**单射 (一一)** 的。

(3) 若 f 既是满射又是单射的, 则称 f 是**双射 (一一到上)** 的。

无向图：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$, 记作 G , 其中:

(1) $V \neq \emptyset$ 称为顶点集, 其元素称为**顶点或结点**。

(2) E 为边集, 它是无序积 $V \& V$ 的多重子集, 其元素称为**无向边**, 简称**边**。

有向图：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$, 记作 D , 其中

(1) V 同无向图。 (2) E 为边集, 它是笛卡尔积 $V \times V$ 的多重子集, 其元素称为**有向边**。

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个无向图或有向图。

有限图：若 V, E 是有限集, 则称 G 为有限图。

n 阶图：若 $|V|=n$, 称 G 为 n 阶图。

零图：若 $|E|=0$, 称 G 为零图, 当 $|V|=1$ 时, 称 G 为平凡图。

基图：将有向图变为无向图得到的新图, 称为有向图的基图。

图的同构：在用图形表示图时, 由于顶点的位置不同, 边的形状不同, 同一个事物之间的关系可以用不同的图表示, 这样的图称为图同构。

带权图：在处理有关图的实际问题时, 往往有值的存在, 一般这个值成为权值, 带权值的图称为带权图或赋权图。

连通图：若无向图是平凡图, 或图中任意两个顶点都是连通的, 则称 G 是**连通图**。否则称为**非连通图**。设 D 是一个有向图, 如果 D 的基图是连通图, 则称 D 是**弱连通图**, 若 D 中任意两个顶点至少一个可达另一个, 则称 D 是**单向连通图**。若 D 中任意两个顶点是相互可达的, 则称 D 是**强连通图**。

欧拉图：通过图中所有边一次且仅一次并且通过所有定点的通路(回路), 称为**欧拉通路(回路)**。存在欧拉回路的图称为欧拉图。

哈密顿图：经过图中每个顶点一次且仅一次的通路(回路), 称为哈密顿通路(回路), 存在哈密顿回路的图称为哈密顿图。

平面图：一个图 G 如果能以这样的方式画在平面上: 出定点处外没有交叉出现, 则称 G 为平面图。画出的没有边交叉出现的图称为 G 的一个**平面嵌入**。

二部图：若无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 的顶点集合 V 可以划分成两个子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$), 使 G 中的任何一条边的两个端点分别属于 V_1 和 V_2 , 则称 G 为**二部图(偶图)**。二部图可记为 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$, V_1 和 V_2 称为互补顶点子集。

树的定义：连通无回路的无向图称为**无向树**, 简称**树**, 常用 T 表示树。平凡图称为**平凡树**。若无向图 G 至少有两个连通分支, 每个连通都是树, 则称 G 为**森林**。在无向图中, 悬挂顶点称为**树叶**, 度数大于或等于 2 的顶点称为**分支点**。

树的性质：性质 1、设 $G = \langle V, E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图, 则下面各命题是等价的:

(1) G 是树 (2) G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径 (3) G 中无回路且 $m=n-1$ 。

(4) G 是连通的且 $m=n-1$. (5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥。 (6) G 中没有回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边, 在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

性质 2、设 T 是 n 阶非平凡的无向树, 则 T 中至少有两片树叶。

证: 设 T 有 x 片树叶, 由握手定理及性质 1 可知, $2(n-1)=\sum d(v_i) \geq x+2(n-x)$ 由上式解出 $x \geq 2$.

最小生成树：设 T 是无向图 G 的子图并且为树, 则称 T 为 G 的树。若 T 是 G 的树且为生成子图, 则称 T 是 G 的生成树。设 T 是 G 的生成树。 $e \in E(G)$, 若 $e \in E(T)$, 则称 e 为 T 的树枝, 否则称 e 为 T 的弦。并称导出子图 $G[E(G)-E(T)]$ 为 T 的余树, 记作 T' 。

最优二元树：设 2 叉树 T 有 t 片树叶 v_1, v_2, \dots, v_t , 权分别为 w_1, w_2, \dots, w_t , 称 $W(t)=\sum w_i l(v_i)$ 为 T 的权, 其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数。在所有有 t 片树叶, 带权 w_1, w_2, \dots, w_t 的 2 叉树中, 权最小的 2 叉树称为**最优 2 叉树**。

最佳前缀码：利用 Huffman 算法求最优 2 叉树, 由最优 2 叉树产生的前缀码称为最佳前缀码, 用最佳前缀码传输对应的各符号能使传输的二进制数位最省。

蕴含式推理

E_1	$\neg \neg p \Leftrightarrow p$	E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	E_{17}	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_8	$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_9	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	E_{20}	$P \Leftarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	E_{21}	$P \Leftarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	E_{22}	$\neg (P \Leftarrow Q) \Leftrightarrow P \Leftarrow \neg Q$

等值公式表

$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简式
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	化简式
$P \Rightarrow P \vee Q$	附加式
$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式
$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	变形简化式
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	变形简化式
$p \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推论
$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	拒取式
$\neg p \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	析取三段式
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	条件三段式
$(P \Leftarrow Q) \wedge (Q \Leftarrow R) \Rightarrow P \Leftarrow R$	双条件三段式
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \wedge R) \Rightarrow Q \rightarrow S$	合取构造二难
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$	析取构造二难
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$	前后附加式
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$	前后附加式
$E_{23} \quad (\exists x)((Ax) \vee (Bx)) \Leftrightarrow (\exists x)(Ax) \vee (\exists x)(Bx)$	$E_{30} \quad (\forall x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)((Ax) \rightarrow B)$
$E_{24} \quad (\forall x)((Ax) \wedge (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$	$E_{31} \quad (\exists x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow B)$
$E_{25} \quad \neg (\exists x)(Ax) \Leftrightarrow (\forall x)\neg(Ax)$	$E_{32} \quad A \rightarrow (\forall x)(Bx) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow (Bx))$
$E_{26} \quad \neg (\forall x)(Ax) \Leftrightarrow (\exists x)\neg(Ax)$	$E_{33} \quad A \rightarrow (\exists x)(Bx) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow (Bx))$
$E_{27} \quad (\forall x)(A \vee (Bx)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)(Bx)$	$I_{17} \quad (\forall x)(Ax) \vee (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \vee (Bx))$
$E_{28} \quad (\exists x)(A \wedge (Bx)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)(Bx)$	$I_{18} \quad (\exists x)((Ax) \wedge (Bx)) \Rightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$
$E_{29} \quad (\exists x)((Ax) \rightarrow (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \rightarrow (\exists x)(Bx)$	$I_{19} \quad (\forall x)(Ax) \rightarrow (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow (Bx))$

集合恒等式: P61

幂等律: $A \cup A = A ; A \cap A = A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) ; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律: $A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律: $A \cup \emptyset = A ; A \cap E = A$

零律: $A \cup E = A ; A \cap \emptyset = \emptyset$

排中律: $A \cup \sim A = E$

矛盾律: $A \cap \sim A = \emptyset$

吸收律: $A \cap (A \cup B) = A ; A \cup (A \cap B) = A$

德摩根定律: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) ; A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C ; \sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C ; \sim \emptyset = E ; \sim E = \emptyset$

双重否定律: $\sim (\sim A) = A$

二元关系的运算:

设 F, G, H 是任意的关系,

$$(1) (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) \quad (2) \text{dom}(F \circ G) = \text{ran} F ; \text{ran}(F \circ G) = \text{dom} F$$

$$(3) (F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1} \quad (4) (F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$

设 R 是 A 上的关系 (幂运算)

$$(1) R^o = \{(x, x) | x \in A\} \quad (2) R^n = R^{(n-1)} \circ R, n \geq 1 \quad (3) R \circ R^o = R^o \circ R = R$$

图的矩阵表示:

(1) 无向图的关联矩阵: 设无向图 $G = \langle V, E \rangle, V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵。记为 $M(G)$ 。

(2) 有向图的关联矩阵: 设无向图 $D = \langle V, E \rangle, V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$,

$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \end{cases}$

$m_{ij} = \begin{cases} -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵。记为 $M(D)$ 。