第四章 离散时间信号与系统的傅里叶变换

南开大学 计算机与控制工程学院

机器人与信息自动化研究所

张建勋

Email: Zhangjx@nankai.edu.cn

Tel: 022-23505706-805

第四章 离散时间信号与系统的傅里叶变换

在本章中将专门讨论离散时间傅里叶分析，讨论的方式与连续时间情况基本相同，基本结论也将是相同的，离散时间傅里叶分析对离散时间信号与系统的研究是一个极为有用的工具。

因为离散时间信号和系统的研究涉及到对大量数据的实时计算，受计算工具的限制，虽然理论上已经基本完善，但直到上个世纪80年代末期才得到大范围的实际应用。

另一方面，虽然离散时间傅里叶分析在很多方面都与连续时间傅里叶分析有很大的相似性，但是也存在着某些重要的差别。

§1 离散时间LTI系统对复指数信号的响应

和连续时间的情况一样，我们定义一组基本信号,即离散的复指数信号（或序列）；同时证明：这个序列也是离散时间系统的特征函数，是建立离散时间傅里叶表示法的出发点，也就是如何将一个离散时间序列表示成一个复指数序列的线性组合。

设一离散的LTI系统，其单位冲激响应序列为$h(n)$，输入序列为$x(n)$。

设：　$x(n) = z^n$　　z为复数，则系统的输出为：

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} = x(n) \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}}$$

从而得出：如果$x(n)$是一个复指数序列，则$y(n)$就是一个复指数序列乘以一个常数。

$$y(n)=z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)z^{-k}=x(n)H(z) \qquad H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)z^{-k}$$

$H(z)$就是与特征函数有关的特征值。

设： $x(n)=\sum_k a_k z_k^n$ 是若干个复指数序列的线性组合，则有：

$y(n)=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n$ 也是对应项的相同形式的线性组合。

令：

$$z=e^{j\Omega}, \quad |z|=1$$

$$z^n=e^{j\Omega n}$$

$$x(n)=\sum_k a_k e^{j\Omega_k n} \qquad y(n)=\sum_k a_k H(z_k) e^{j\Omega_k n}$$

§2 周期信号的表示：离散时间傅里叶级数

一、成谐波关系的复指数序列的线性组合

定义一个周期序列： $x(n) = x(n+N)$ N为周期

$N>0$，而且周期为N的所有离散时间周期复指数序列的集合为：

$$\Phi_k(n) = e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

因为$e^{jk\Omega_0 n}$是一个周期序列，周期为N，则有：

$$\Phi_k(n) = \Phi_k(n+N)$$

$$\Phi_k(t) = \left\{ e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

$$k = -\infty \cdots -1, 0, 1, \cdots \infty$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

所以在集合中只有N个独立的序列。

设一离散时间序列： $x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \Phi_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\Omega_0 n}$， $k = 0, 1, \cdots N-1$

如果上式成立，即能够唯一的求出系数集$\{a_k\}$，则称为离散序列的傅里叶级数。

离散序列傅里叶级数表达式:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \qquad k = 0, 1, \cdots N-1$$

$$\begin{cases} x(0) = \sum\limits_{k=\langle N \rangle} a_k \\ x(1) = \sum\limits_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0} \\ \quad \vdots \\ x(N-1) = \sum\limits_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 (N-1)} \end{cases} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

二、傅里叶级数系数的求解

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jr\Omega_0 n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n} e^{-jr\Omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \boxed{\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)\Omega_0 n}}$$

正交函数集

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-r)\Omega_0 n} = \begin{cases} N & k=r,\ \pm N+r\cdots \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

因此有:

$$a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jr\Omega_0 n}$$

或者:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

其中$x(n)$与a_k的变化周期都为N: $x(n)=x(n+N),\quad a_k = a_{k+N}$

与连续时间情况不同，离散时间序列的傅里叶级数是有限项（N项）。

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

例题1

$$x(n)=\sin\Omega_0 n \qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

$$x(n)=\frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 n}-\frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 n}, \qquad a_{-1}=-\frac{1}{2j}, \qquad a_1=\frac{1}{2j}$$

例题2

$$x(n)=1+\sin(\frac{2\pi}{N}n)+3\cos(\frac{2\pi}{N}n)+\cos(\frac{4\pi}{N}n+\frac{\pi}{2})$$

$$x(n)=1+(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$+(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{4\pi}{N}n}+(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}})e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$

$$=1+(\frac{3}{2}+\frac{1}{2j})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2j})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}+j\frac{1}{2}e^{j\frac{4\pi}{N}n}-j\frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$

$$=1+(\frac{3-j}{2})e^{j\frac{2\pi}{N}n}+(\frac{3+j}{2})e^{-j\frac{2\pi}{N}n}+j\frac{1}{2}e^{j\frac{4\pi}{N}n}-j\frac{1}{2}e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$

a_0 a_1 a_{-1} a_2 a_{-2}

例题3

$$x(n)=\begin{cases}1 & -N_1\le n\le N_1\\ 0 & -\dfrac{N}{2}<n<-N_1 \ \ or\ \ N_1<n<\dfrac{N}{2}\end{cases},\qquad x(n)=x(n+N)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$ 有限项等比级数求和。

$$a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\frac{2\pi k(N_1+1/2)}{N})}{\sin\frac{2\pi k}{2N}} & k\ne 0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ \dfrac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\end{cases}$$

定义:

$$Na_k=\frac{\sin(\frac{2\pi k(N_1+1/2)}{N})}{\sin(\frac{\pi k}{N})}\qquad 2N_1+1=5,\qquad N=10,\ 20,\ 100$$

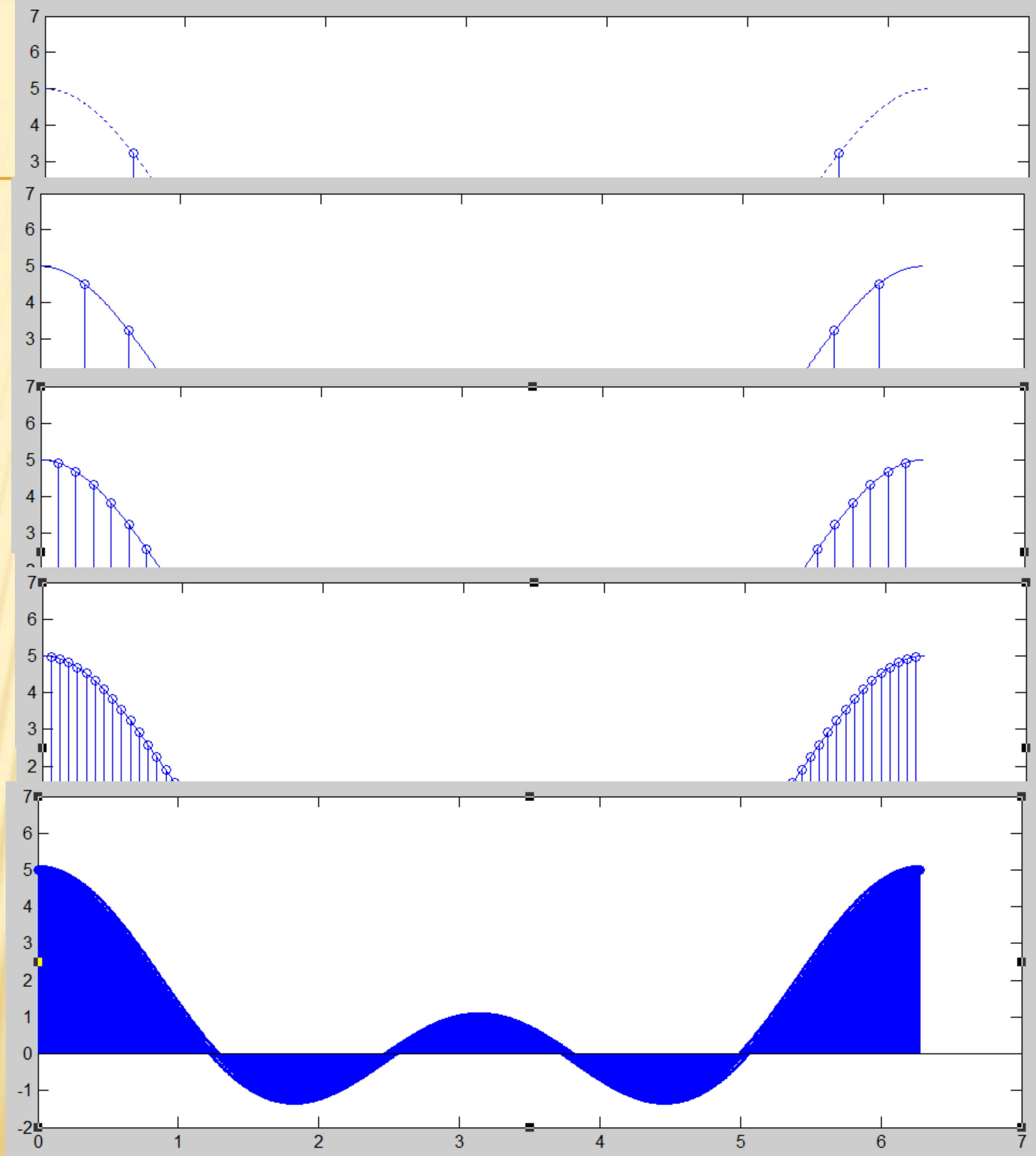
$N_1 = 2, \quad N = 10$

$N_1 = 2, \quad N = 20$

$N_1 = 2, \quad N = 50$

$N_1 = 2, \quad N = 100$

$N_1 = 2, \quad N = 1000$



$$x(n)=\sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad N=9$$

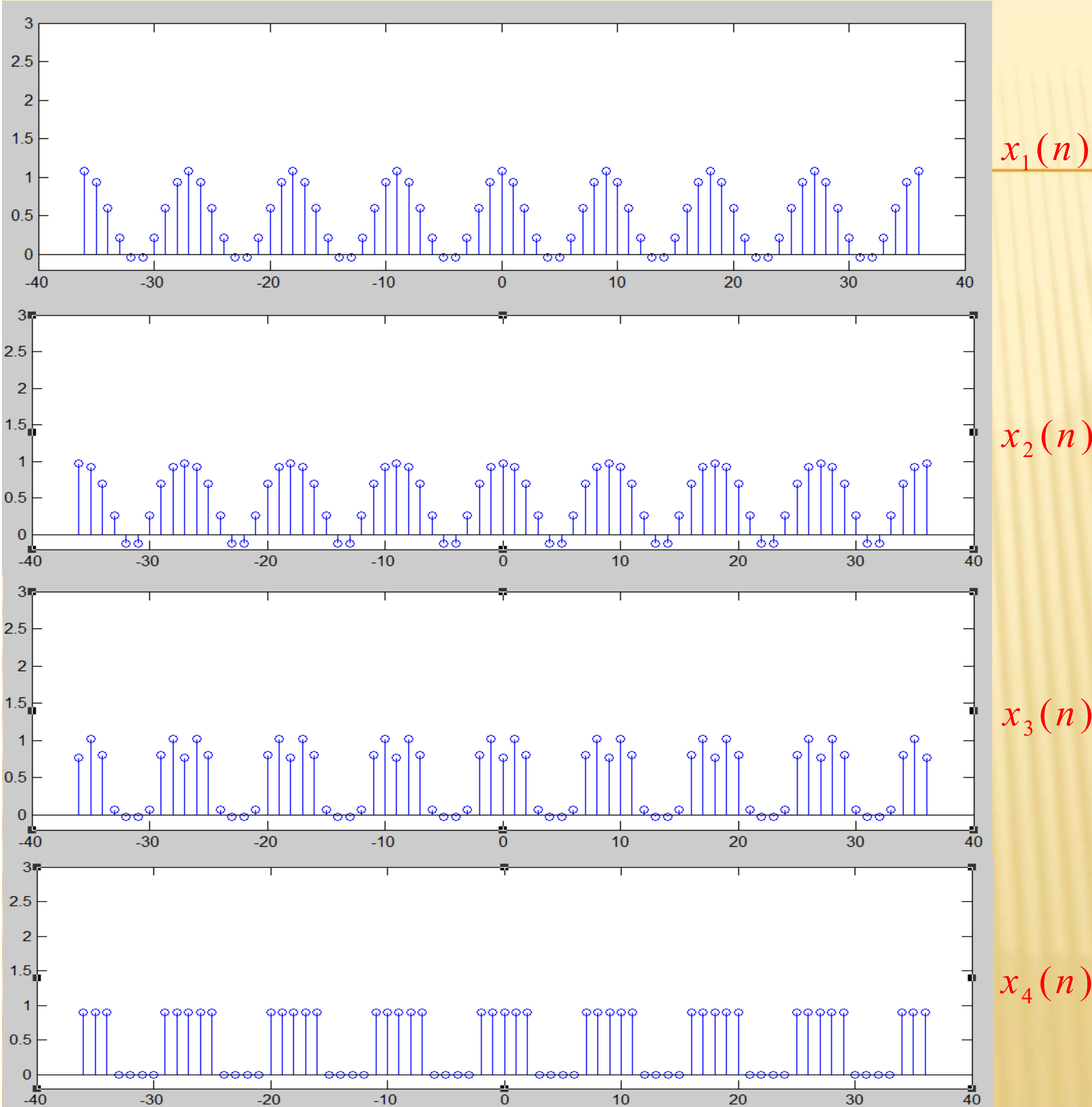
$$x(n)=\sum_{k=-4}^{4} a_k e^{jk\frac{2\pi}{10}n}=\sum_{k=-4}^{4}\frac{\sin(\frac{5}{9}\pi k)}{10\sin(\frac{\pi k}{9})}e^{jk\frac{2\pi}{9}n}=\sum_{k=0}^{4}\frac{\sin(\frac{5}{9}\pi k)}{5\sin(\frac{\pi k}{9})}\cos(k\frac{2\pi}{9}n)$$

如令:
$$x_i(n)=\sum_{k=0}^{i}\frac{\sin(\frac{5}{9}\pi k)}{5\sin(\frac{\pi k}{9})}\cos(k\frac{2\pi}{9}n), \qquad i=1,2,3,4$$

则有:

$$x_1(n)=1+\frac{\sin(\frac{5}{9}\pi)}{5\sin(\frac{\pi}{9})}\cos(\frac{2\pi}{9}n)$$

$$x_2(n)=1+\frac{\sin(\frac{5}{9}\pi)}{5\sin(\frac{\pi}{9})}\cos(\frac{2\pi}{9}n)+\frac{\sin(\frac{10}{9}\pi)}{5\sin(\frac{2\pi}{9})}\cos(\frac{4\pi}{9}n)$$



结论：

与连续时间系统相比较：

1、因为是有限项的求和，没有是否收敛的问题；

2、对原始序列的求和没有误差，是完全相等，没有逼近过程；

3不会产生吉伯斯效应。

§3 非周期信号的表示：离散时间傅里叶变换

仿照连续时间信号与系统的分析方法，离散时间周期序列可以表示为傅里叶级数的形式:

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \qquad k=0,1,\cdots N-1$$

对于一个非周期序列 $x(n)$，设其周期延拓的序列为 $\tilde{x}(n)$，两者之间的关系如下:

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & -\frac{N}{2}<n<\frac{N}{2}\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n}\tilde{x}(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

令:

$$X(k\Omega_0)=Na_k=\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-jk\Omega_0 n}$$

当： $N \to \infty$

$$\tilde{x}(n) \to x(n) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \to d\Omega \quad \sum_{k=\langle N\rangle} \to \int_{-\pi}^{+\pi} \quad \sum_{n=\langle N\rangle} \to \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \quad k\frac{2\pi}{N} \to \Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

以上就是离散时间非周期序列的傅里叶变换。一般情况下$x(n)$是有限长序列，长度为N。

$X(\Omega)$是$x(n)$的频谱。满足的条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \qquad \text{或者：} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

例1:

$$x(n)=a^{n}u(n),\quad |a|<1$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{n}u(n)e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\Omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$$

例2:

$$x(n)=a^{|n|},\qquad |a|<1$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\Omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}e^{-j\Omega n}+\sum_{m=1}^{+\infty}a^{n}e^{j\Omega n}$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}+\frac{1}{1-ae^{j\Omega}}-1=\frac{1-a^{2}}{1-2a\cos\Omega+a^{2}}$$ 实数

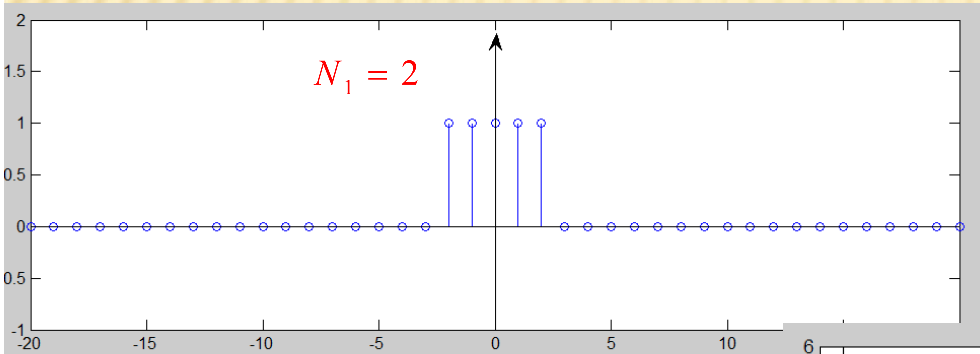
例3：

$$x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

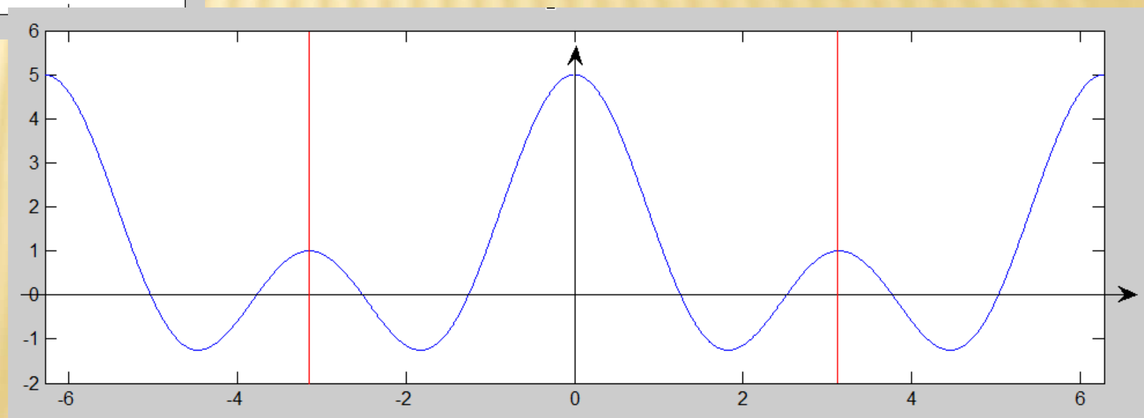
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega N_1}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin\Omega(N_1+\frac{1}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

$x(n)$



$X(\Omega)$

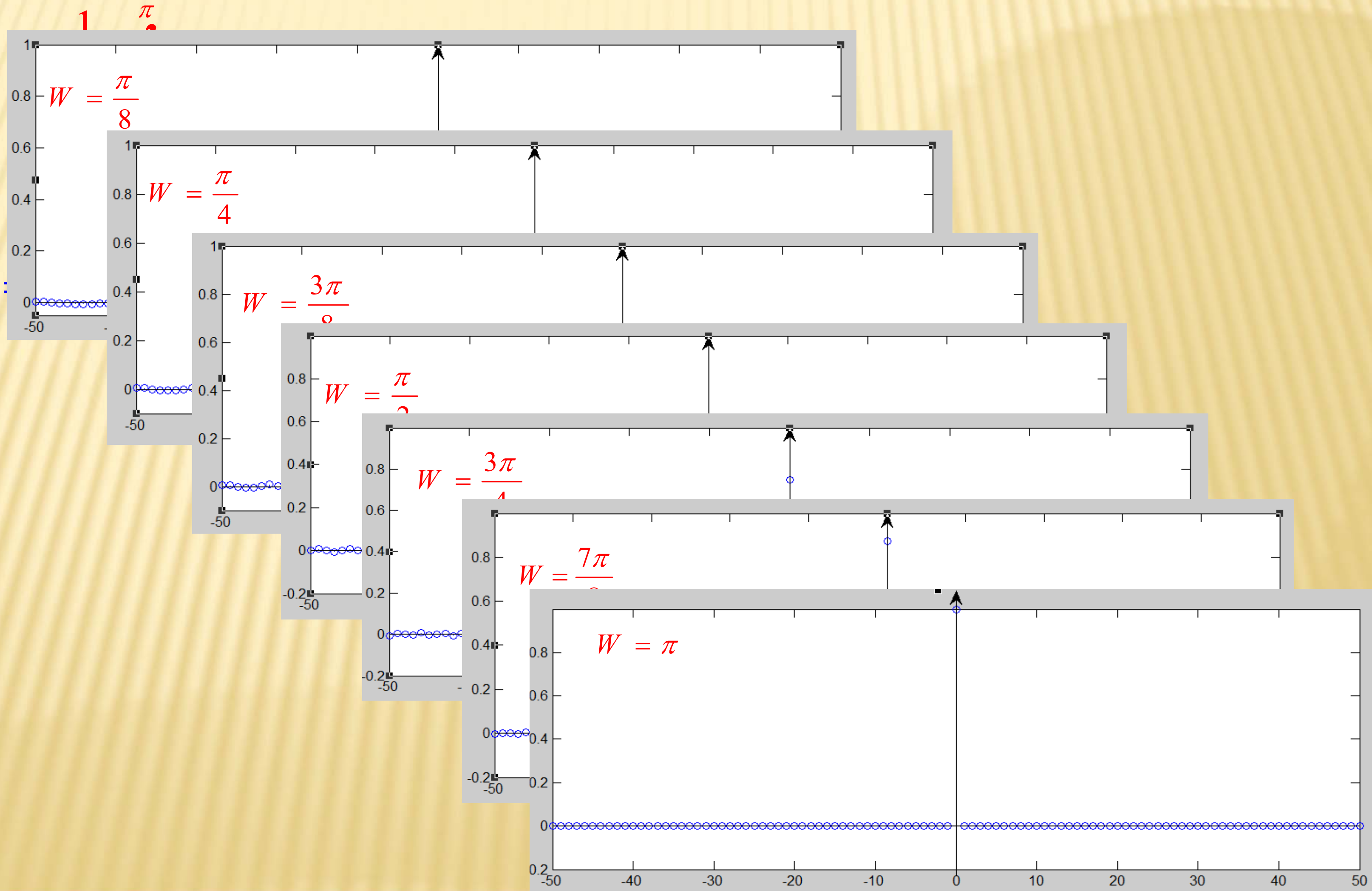


例4： $x(n)=\delta(n)$

$X(\Omega)=1$

$x(n)$

$\hat{x}(n)$



§4 周期信号与离散时间傅里叶变换

一、傅里叶级数系数的傅里叶变换

周期信号与非周期信号的关系如下:

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & M<n<M+N-1\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

周期信号的傅里叶级数的系数为: $a_k=\frac{1}{N}\sum_n \tilde{x}(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

非周期信号的傅里叶变换为: $X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$

由连续时间傅里叶变换得知: $Na_k=X(k\Omega_0)$

是对连续函数的采样(或离散化),采样点序列为: $k\Omega_0=k\frac{2\pi}{N}$

与M无关。

例1:

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x_1(n)=\delta(n),\qquad X_1(\Omega)=1$$

$$x_2(n)=\delta(n-N),\qquad X_2(\Omega)=e^{-j\Omega N}$$

两个连续函数不相同

如果令: $\Omega=k\frac{2\pi}{N}$ 分别带入上面的两个式子，则有:

$$X_2(\Omega)=X_2(k\frac{2\pi}{N})=1$$

所以，两个连续函数在采样点上相等。

二、周期信号的傅里叶变换

设一周期序列: $\tilde{x}(n)=e^{-j\Omega_0 n}$

回忆连续时间周期信号：$\tilde{x}(t) = e^{-j\omega_0 t}$

其傅里叶变换（频谱）是在ω_0处的一个脉冲信号。

针对周期序列：$\tilde{x}(n) = e^{-j\Omega_0 n}$

其傅里叶变换（频谱）也应该是在Ω_0处的一个脉冲信号，但是离散序列的傅里叶变换应该是周期变化的，即：

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}, \quad r = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \cdots$$

所以：

$$X(\Omega) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r)$$

是周期出现的一串脉冲，周期为2π。

其反变换为：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= e^{j\Omega_0 n}$$

推广到一般情况:

$$\tilde{x}(n) = b_1 e^{-j\Omega_1 n} + b_2 e^{-j\Omega_2 n} + \cdots = \sum_{k=1}^{M} b_k e^{-j\Omega_k n}$$

则应该有:

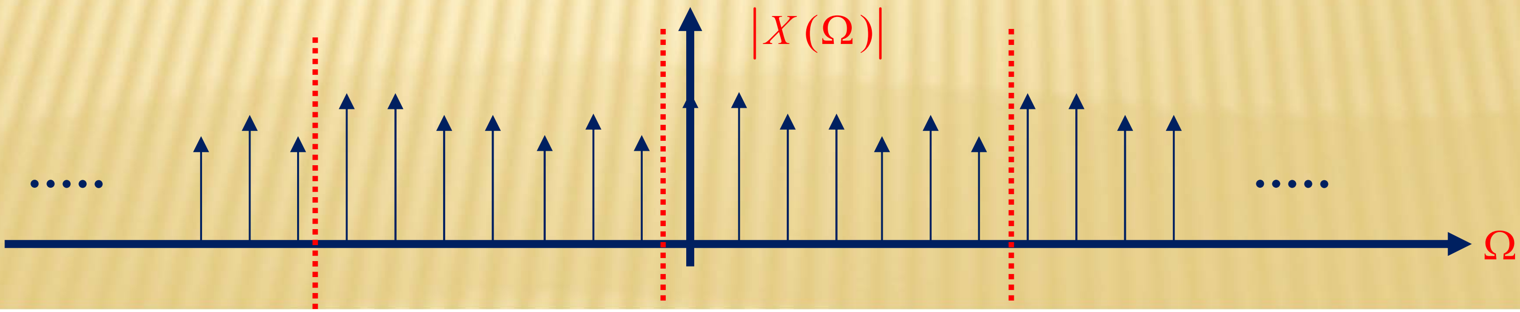
$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=1}^{M} b_k \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_k - 2\pi r)$$

某一周期序列的傅里叶级数:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=<N>} a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

其对应的傅里叶变换为:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N>} a_k \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi r)$$



§5 离散时间傅里叶变换的性质

某一离散时间序列$x(n)$，其对应的傅里叶变换为$X(\Omega)$，可表示如下：

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = \mathscr{F}\{x(n)\} \qquad x(n) = \mathscr{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$$

一、离散时间序列傅里叶变换的周期性

$X(\Omega)$总是周期变化的，周期为2π，而连续时间信号的傅里叶变换是非周期的。

二、线性特性：

如果：

$$x_1(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_1(\Omega)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X_2(\Omega)$$

则有：

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

三、对称性：

如果$x(n)$是一个实序列，则有：

$$X(-\Omega)=X^*(\Omega)$$

进而有：

$$\mathrm{Re}[X(\Omega)]=\mathrm{Re}[X(-\Omega)]$$

$$\mathrm{Im}[X(\Omega)]=-\mathrm{Im}[X(-\Omega)]$$

$$|X(\Omega)|=|X(-\Omega)|$$

$$\mathrm{Arg}[X(\Omega)]=-\mathrm{Arg}[X(-\Omega)]$$

四、时移和频移性：

如果： $x(n)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X(\Omega)$

则有： $x(n-n_0)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$

$$e^{j\Omega_0 n}x(n)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}X(\Omega-\Omega_0)$$

五、差分与求和:

如果: $$x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$$

则有: $$x(n) - x(n-1) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} (1 - e^{-j\Omega}) X(\Omega)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} Y(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$$

六、时间和频率的尺度变换:

如果: $x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$ 则有: $x(-n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(-\Omega)$

如果定义: $$x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{k}) & n/k = \text{Integer} \\ 0 & n/k \neq \text{Integer} \end{cases}$$

则有: $$x_{(k)}(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(k\Omega)$$

六、频域微分：

如果：$x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \xrightarrow{\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}} -j\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)e^{-j\Omega n}$$

则有：

$$nx(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

七、帕斯维尔（Povseval）定理，能量守恒：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

对于周期信号$\tilde{x}(n)$，可以用下式表示其功率谱。

$$\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}|x(n)|^2=\sum_{n=<N>}|a_k|^2$$

即用一个周期内的能量和的平均值表示其功率依变量$k\Omega_0$的分布。

§6 卷积性质

一、离散时间系统的卷积定理

设一离散时间LTI系统的输入、输出、和单位冲激响应序列分别为:

$$x(n) \quad y(n) \quad h(n)$$

各变量对应的傅里叶变换为:

$$X(\Omega) \quad Y(\Omega) \quad H(\Omega)$$

则下面的关系成立:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

其中$H(\Omega)$是离散系统的频率响应。

例1: $h(n)=\delta(n-n_0)$

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\Omega n}=e^{-j\Omega n_0}$$

则有:
$$\begin{aligned}Y(\Omega)&=H(\Omega)\cdot X(\Omega)\\&=e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)\end{aligned}$$

$$y(n)=x(n-n_0)$$

是一个时间延迟环节。

例2:
$$h(n)=\alpha^n u(n)\qquad x(n)=\beta^n u(n)$$

$$y(n)=?$$

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\qquad X(\Omega)=\frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\cdot X(\Omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\cdot X(\Omega)=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})(1-\beta e^{-j\Omega})}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha e^{-j\Omega}}-\frac{\beta}{1-\beta e^{-j\Omega}}\right)$$

$$y(n)=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+1}u(n)-\beta^{n+1}u(n))$$

特例，如果： $\alpha=\beta$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\cdot X(\Omega)=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$$

$$Y(\Omega)=\frac{1}{j\alpha}e^{j\Omega}\cdot\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})}$$

$$n\alpha^n x(n)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{e^{j\Omega}}{j}\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$$

$$(n+1)\alpha^{(n+1)}u(n+1)\xleftrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{j\alpha}e^{j\Omega}\cdot\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})}=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$$

$$(n+1)\alpha^{(n+1)}u(n+1) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{j\alpha}e^{j\Omega}\cdot\frac{d}{d\Omega}\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})} = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\Omega})^2}$$

如果考虑到n<0时，输出为0，则有:

$$y(n) = (n+1)\alpha^{(n)}u(n)$$

$e^{j\Omega}$ 称为移位因子，向左移一位，$e^{-j\Omega}$ 向右移一位。

如果一个离散的LTI系统是稳定的，则有:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)| < \infty$$ 满足狄里赫利条件。

二、周期卷积

两个具有相同周期的周期序列做卷积运算，定义其卷积运算如下:

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

运算结果也是一个周期序列，且具有相同的周期。

各种信号的傅里叶变换总结

$x(t)$ or $x(n)$		$X(\Omega)$ or $X(\omega)$
连续非周期	$\longleftrightarrow$	连续非周期
连续周期	$\longleftrightarrow$	离散非周期
离散非周期	$\longleftrightarrow$	连续周期
离散周期	$\longleftrightarrow$	离散周期

周期 $\Longleftrightarrow$ **离散**

非周期 $\Longleftrightarrow$ **连续**

连续 $\Longleftrightarrow$ **非周期**

离散 $\Longleftrightarrow$ **周期**

§7 调制性质（略）

§8 傅里叶变换与傅里叶级数的性质及基本傅里叶变换对列表（略）

§9 对偶性（略）

§ 10 离散时间傅里叶变换的极坐标表示

频率特性分解

设一个离散时间序列 $x(n)$，其傅里叶变换为$X(\Omega)$。

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega)$$

一般情况下，$x(n), X(\Omega)$ 均认为是复数:

$$X(\Omega) = \underbrace{\left|X(\Omega)\right|}_{\text{幅值}} \cdot e^{\overbrace{j\varphi(\Omega)}^{\text{相位}}}$$

因为$X(\Omega)$是周期变化的，所以$\left|X(\Omega)\right|$和$\varphi(\Omega)$ 也是周期变化的，且具有相同的周期，都是2π。

如果序列$x(n)$为实数序列，则有如下的对称性质:

$$\left|X(\Omega)\right| = \left|X(-\Omega)\right| \qquad \varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega)$$

针对一个离散时间系统:

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega) \cdot H(\Omega)| = |X(\Omega)| \cdot |H(\Omega)|$$

幅频特性:

$$\lg|Y(\Omega)| = \lg|X(\Omega)| + \lg|H(\Omega)|$$

$$20\lg|Y(\Omega)| = 20\lg|X(\Omega)| + 20\lg|H(\Omega)|$$ 伯德图

相频特性:

$$\varphi_Y(\Omega) = \varphi_X(\Omega) + \varphi_H(\Omega)$$

§11 由线性常系数差分方程表示的系统的频率特性

一、频率响应的计算

由差分方程表示一个离散LTI系统的输入输出关系，输入为$x(n)$，输出为$y(n)$，差分方程的通式如下：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} X(\Omega) \qquad\qquad y(n) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} Y(\Omega)$$

利用傅里叶变换的移位性质，对差分方程两边做傅里叶变换，得到如下方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} = H(\Omega)$$ 即为离散LTI系统的频率响应的通式

例1: $y(n) - ay(n-1) = x(n)$

$$Y(\Omega) - ae^{-jk\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

$$\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-jk\Omega}}$$

$$h(n) = a^n u(n)$$

例2:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n)$$

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$h(n) = 4(\frac{1}{2})^n u(n) - 2(\frac{1}{4})^n u(n)$$

例3：对于上例，令：

$$x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n) \qquad X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega)=H(\Omega)\cdot X(\Omega)=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$=\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}-\frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}+\frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y(n)=[4(\frac{1}{4})^n-2(n+1)(\frac{1}{4})^n+8(\frac{1}{2})^n]u(n)$$

二、系统的级联与并联

1、级联

$$H(\Omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

分子分母均为$e^{-j\Omega}$的多项式，如按照以下原则对分子分母分别做因式分解。

1）所有分解的因式的系数均为实数；

2）所有分解的因式的最高阶数不大于2。

$$H(\Omega)=\frac{b_0}{a_0}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{P}(1+\beta_{1k}e^{-j\Omega}+\beta_{2k}e^{-j2\Omega})}{\prod_{k=1}^{Q}(1+\alpha_{1k}e^{-j\Omega}+\alpha_{2k}e^{-j2\Omega})}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{N-2P}(1+\mu_k e^{-j\Omega})}{\prod_{k=1}^{N-2Q}(1+\eta_k e^{-j\Omega})}$$

$$H(\Omega)=\frac{b_0}{a_0}\cdot H_1(\Omega)\cdot H_2(\Omega)\cdots H_K(\Omega)\qquad H_i(\Omega)=\frac{(1+\beta_{1i}e^{-j\Omega}+\beta_{2i}e^{-j2\Omega})}{(1+\alpha_{1i}e^{-j\Omega}+\alpha_{2i}e^{-j2\Omega})}$$

可以看作是由若干个分子和分母都不高于2阶的子系统的级联（串联），每个子系统的结构很简单。各自系统之间没有严格的次序要求，分子、分母的因式可以任意搭配。

2、并联

对系统的真分式按照以下原则进行部分分式。

1）所有分解的分式的系数均为实数；

2）所有分解的分式的最高阶数不大于2。

$$H(\Omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk\Omega}}=\frac{b_N}{a_N}+\sum_{k=0}^{Q}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}e^{-j\Omega}}{1+\alpha_{1k}e^{-j\Omega}+\alpha_{2k}e^{-j2\Omega}}+\sum_{k=0}^{N-2Q}\frac{A_k}{1+\eta_k e^{-j\Omega}}$$

可以看作是由若干个分子和分母都不高于2阶的子系统的并联，每个子系统的结构很简单。

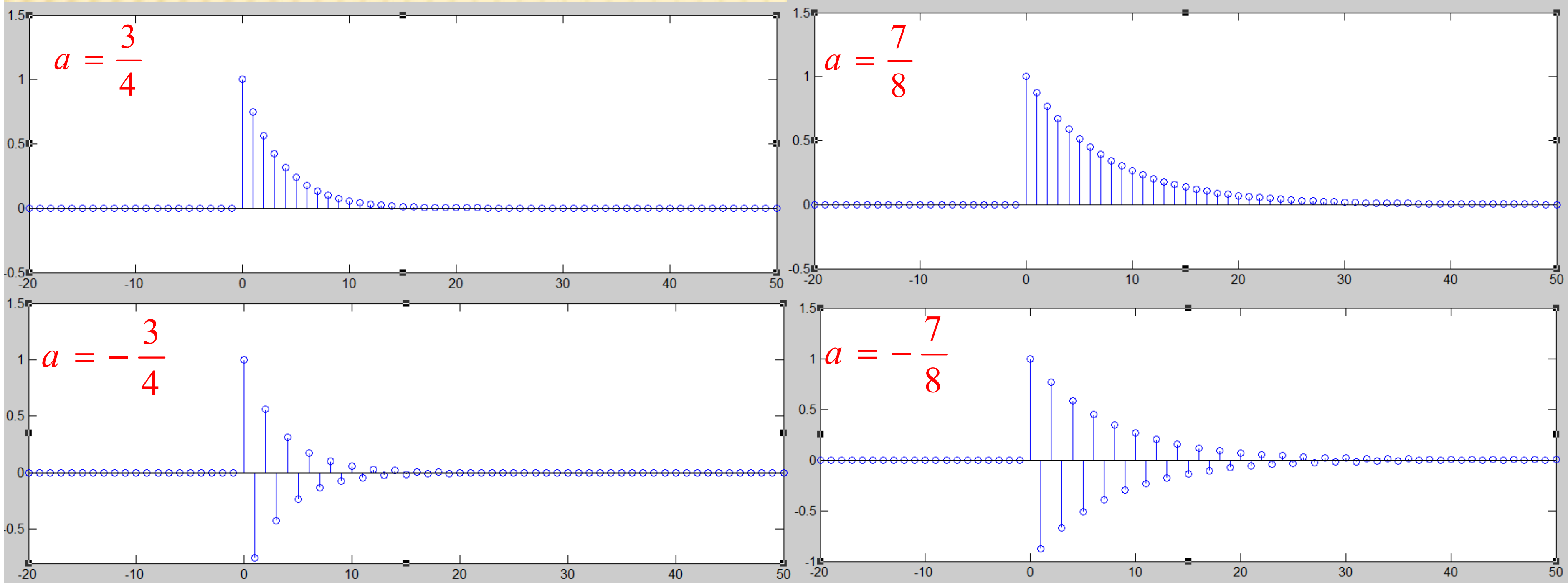
§ 12 一阶系统和二阶系统

一、一阶系统　　$y(n) - ay(n-1) = x(n)$　　$|a| < 1$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-jk\Omega}}$$

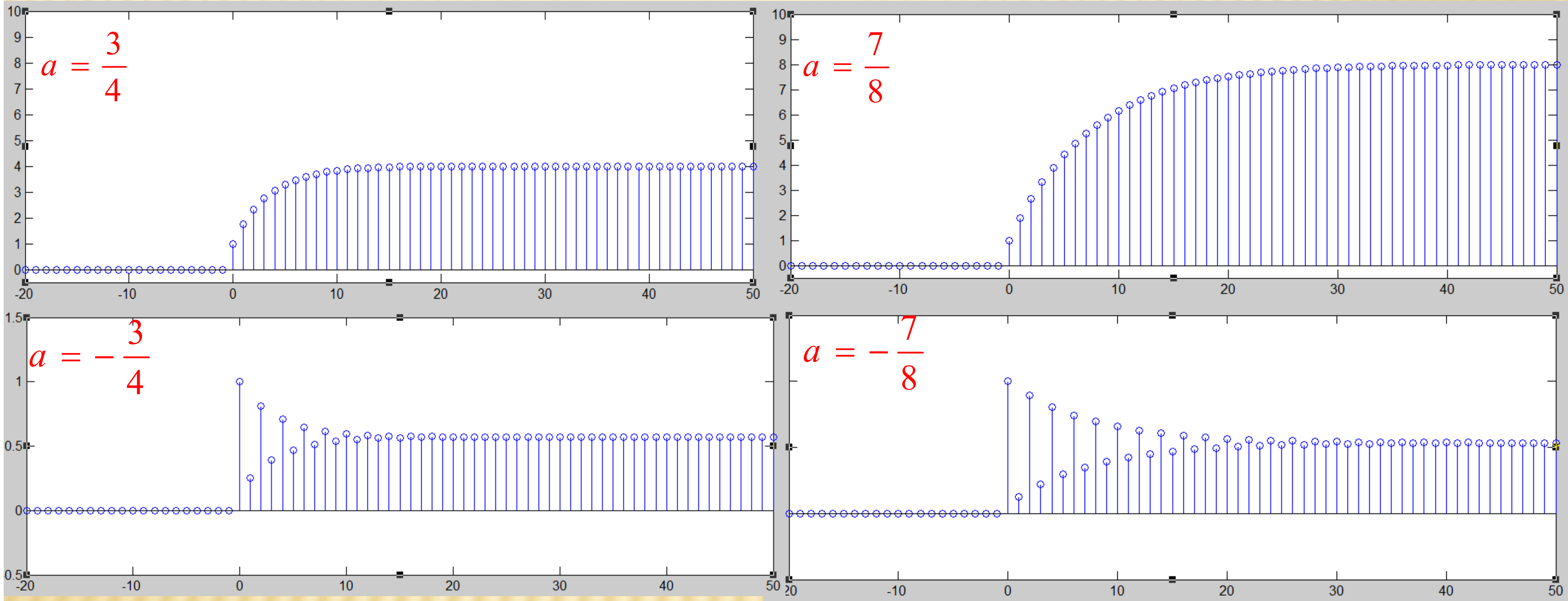
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$ 系统稳定的条件

$$h(n) = a^n u(n)$$

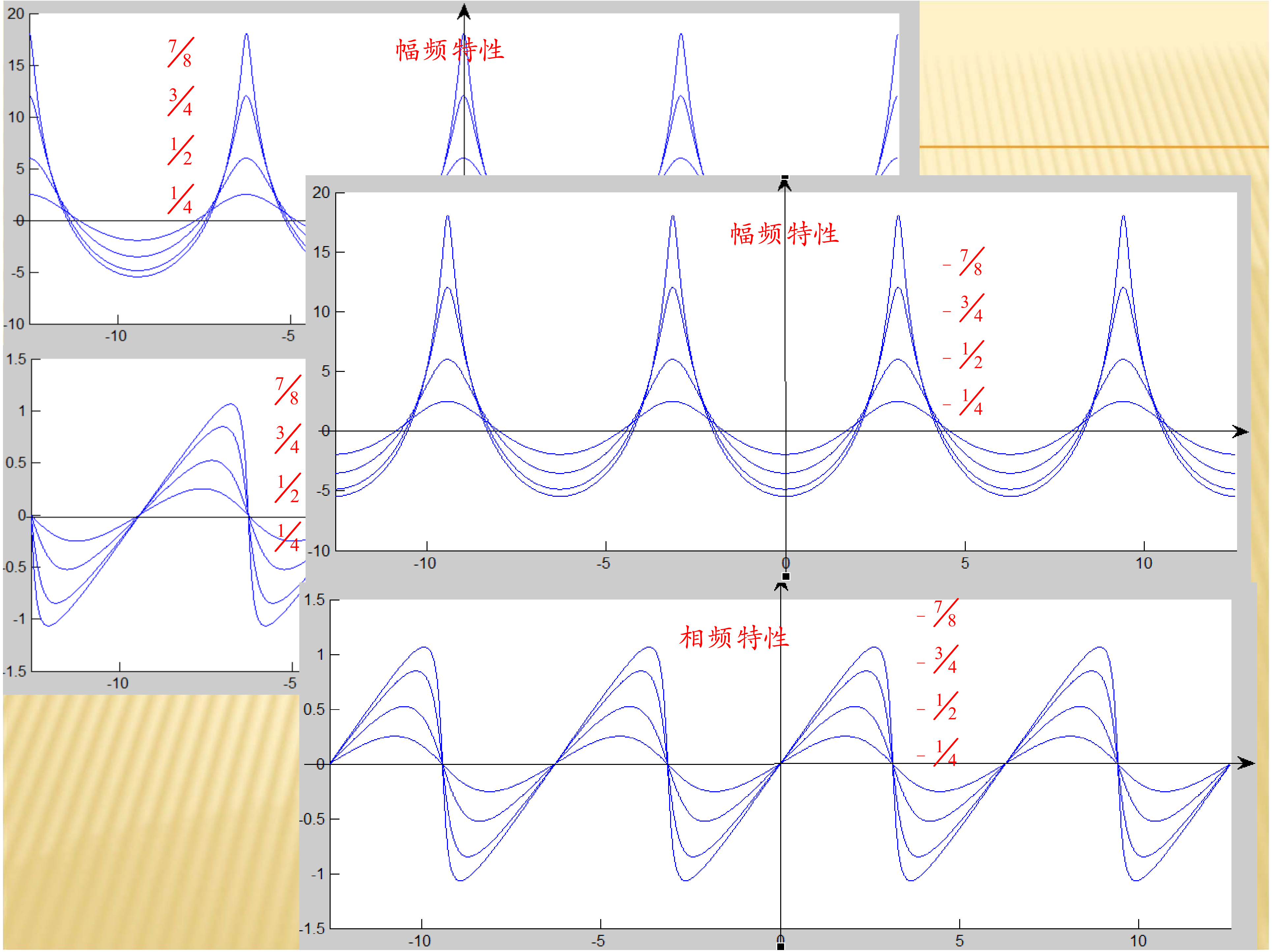


一阶系统的单位阶跃响应:

$$s(n)=h(n)*u(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$



与连续系统不同，当a<0时，系统可以产生超调，并产生振荡现象；但是最后都会稳定到一个确定值。


幅频特性
7/8
3/4
1/2
1/4
幅频特性
−7/8
−3/4
−1/2
−1/4
相频特性
−7/8
−3/4
−1/2
−1/4

二、二阶系统

$$y(n) - 2r\cos\theta\, y(n-1) + r^2 y(n-2) = x(n)$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$= \frac{1}{(1 - re^{j\theta}e^{-j\Omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\Omega})}$$

$$H(\Omega) = \frac{A}{1 - re^{j\theta}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - re^{-j\theta}e^{-j\Omega}} \qquad A = \frac{e^{j\theta}}{j2\sin\theta}, \quad B = -\frac{e^{-j\theta}}{j2\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{1 - 2r\cos\theta e^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}}$$

单位冲激响应：

$$h(n) = [A(re^{j\theta})^n + B(re^{-j\theta})^n]u(n)$$

$$= r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u(n)$$

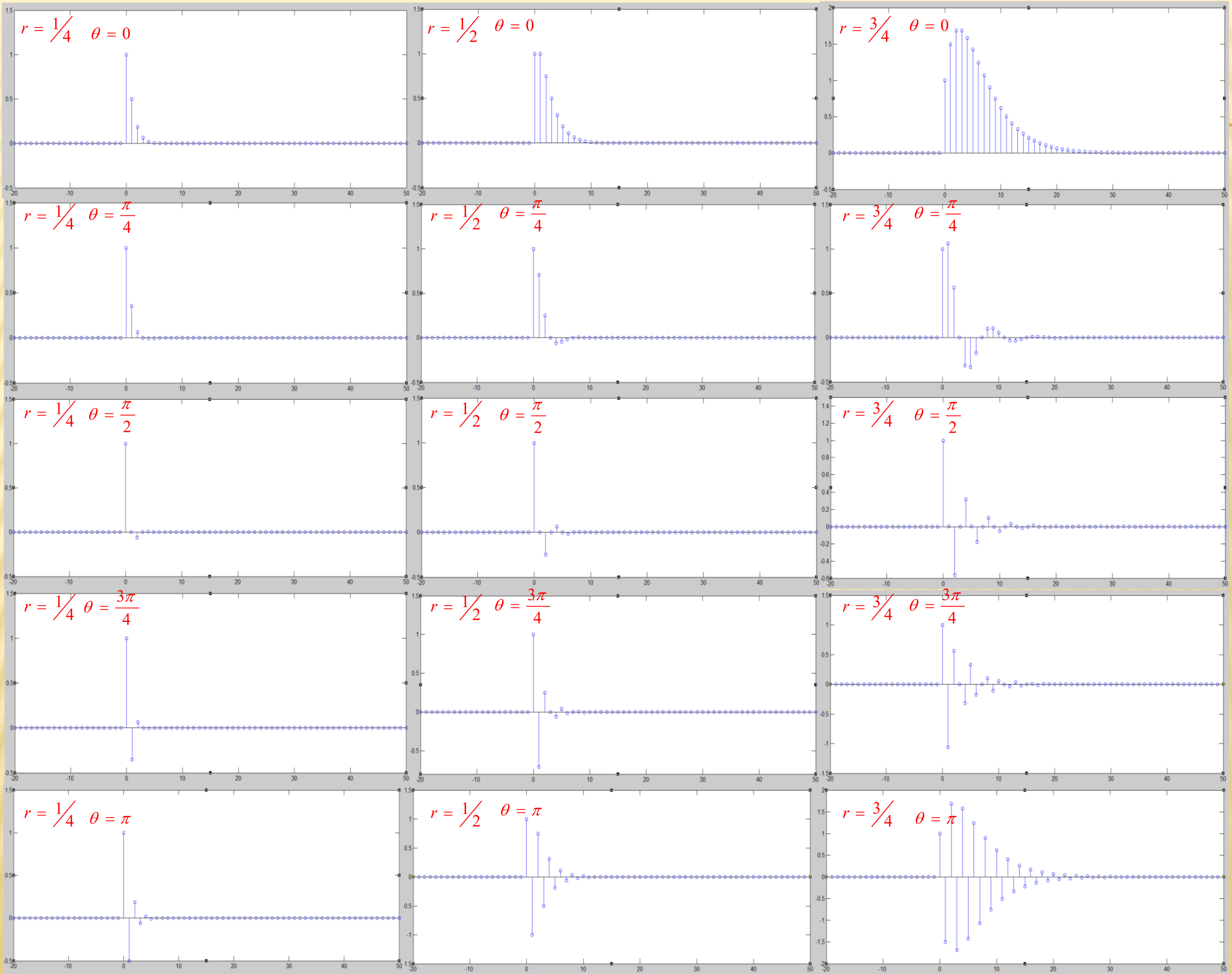
当：

$$\theta = 0 \quad or \quad \pi,$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 \pm 2re^{-j\Omega} + r^2 e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1 \pm re^{-j\Omega})^2}$$

$$h(n) = (n+1)(\pm r)^n u(n)$$

$$|r| < 1$$



r = 1/4 θ = 0
r = 1/2 θ = 0
r = 3/4 θ = 0
r = 1/4 θ = π/4
r = 1/2 θ = π/4
r = 3/4 θ = π/4
r = 1/4 θ = π/2
r = 1/2 θ = π/2
r = 3/4 θ = π/2
r = 1/4 θ = 3π/4
r = 1/2 θ = 3π/4
r = 3/4 θ = 3π/4
r = 1/4 θ = π
r = 1/2 θ = π
r = 3/4 θ = π

单位阶跃响应：

$$s(n)=[A\frac{1-(re^{j\theta})^{n+1}}{1-re^{j\theta}}+B\frac{1-(re^{-j\theta})^{n+1}}{1-re^{-j\theta}}]u(n)$$

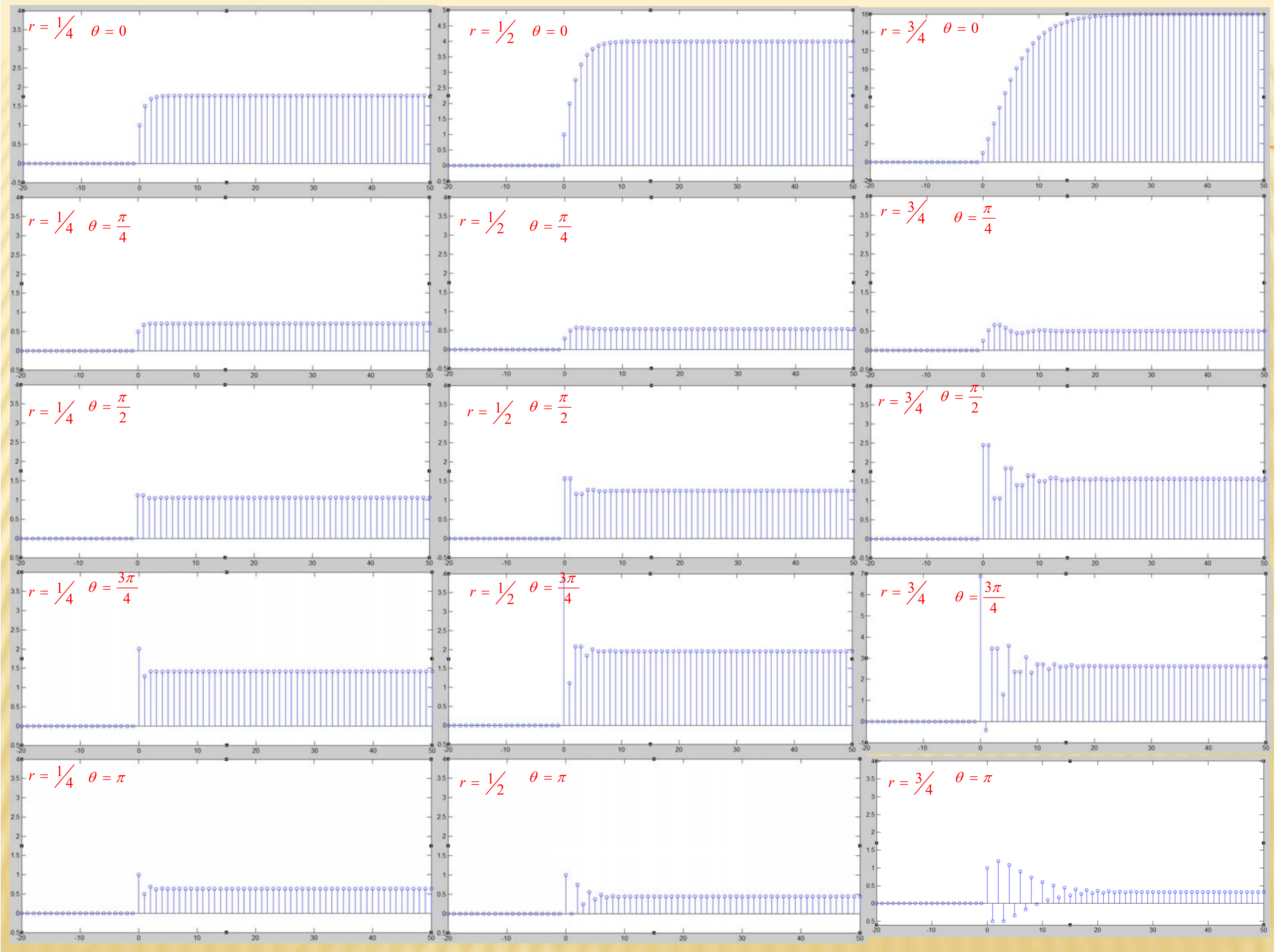
$$=\frac{\sin\theta-r^{n+1}\sin[(n+2)\theta]+r^{n+2}\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta(1-2r\cos\theta+r^2)}u(n)$$

当: $\theta=0$

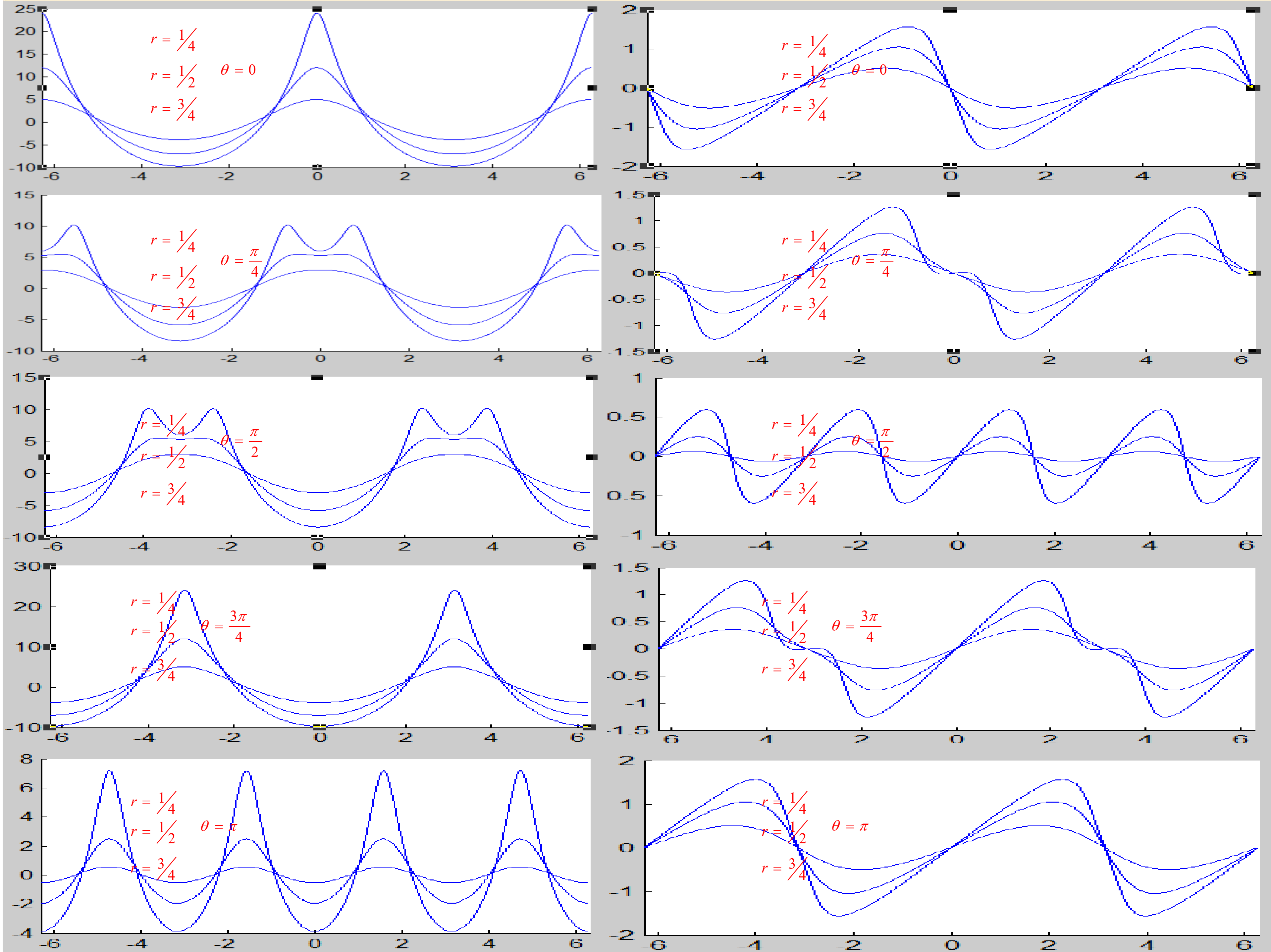
$$s(n)=[\frac{1}{(r-1)^2}-\frac{r}{(r-1)^2}r^n+\frac{r}{r-1}(n+1)r^n]u(n)$$

当: $\theta=\pi$

$$s(n)=[\frac{1}{(r+1)^2}-\frac{r}{(r+1)^2}(-r)^n+\frac{r}{r+1}(n+1)(-r)^n]u(n)$$



$r = 1/4 \quad \theta = 0$
$r = 1/2 \quad \theta = 0$
$r = 3/4 \quad \theta = 0$
$r = 1/4 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
$r = 1/2 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
$r = 3/4 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
$r = 1/4 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$
$r = 1/2 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$
$r = 3/4 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$
$r = 1/4 \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$
$r = 1/2 \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$
$r = 3/4 \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$
$r = 1/4 \quad \theta = \pi$
$r = 1/2 \quad \theta = \pi$
$r = 3/4 \quad \theta = \pi$


r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = 0
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = 0
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π/4
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π/4
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π/2
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π/2
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = 3π/4
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = 3π/4
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π
r = 1/4
r = 1/2
r = 3/4
θ = π

第四章结束