叶贝斯公式使用

$P(H_1)=0.4 \quad P(H_2)=P(H_3)=0.3$

$P(E_1|H_1)=0.5 \quad P(E_1|H_2)=0.6 \quad P(E_1|H_3)=0.3$

$P(E_2|H_1)=0.7 \quad P(E_2|H_2)=0.9 \quad P(E_2|H_3)=0.1$

$$P(H_1|E_1,E_2)=\frac{P(E_1|H_1)P(E_2|H_1)P(H_1)}{\sum_{j=1}^{3}P(E_1|H_j)P(E_2|H_j)P(H_j)}=0.45$$

$P(H_2|E_1,E_2)=0.52 \quad P(H_3|E_1,E_2)=0.03$

贝叶斯主观方法解题

R_1:	IF E_1	THEN	$(2, 10^{-6})$	H_1
R_2	E_2		$(100, 10^{-6})$	H_1
R_3	H_1		$(65, 10^{-2})$	H_2
R_4	E_3		$(300, 10^{-4})$	H_2

$O(H_1)=0.1 \quad O(H_2)=0.01$

$C(E_1|S_1)=3$

$C(E_2|S_2)=1$

$C(E_3|S_3)=-2$

求 $O(H_2|S_1S_2S_3)$

(1) 先求 $O(H_1|S_1)$

$O(H_1)=0.1 \rightarrow P(H_1)=\frac{O(H_1)}{1+O(H_1)}=\frac{1}{11}$ ↙ 易得

$O(H_1|E_1)=LS\ O(H_1)=0.2$ (主观贝叶斯公式) $\rightarrow P(H_1|E_1)=\frac{0.2}{1+0.2}=\frac{1}{6}$

$C(E_1|S_1)=3$

CP公式 $(C(E/S)>0)$

$P(H_1/S_1)=P(H_1)+(P(H_1|E_1)-P(H_1))\times\frac{1}{5}C(E_1/S_1)$

$=\frac{1}{11}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{22}$

$\therefore O(H_1|S_1)=\frac{3}{19}$

(2)求 $O(H_1/S_2)$ 基本同上

$O(H_1|E_2) = LS\ O(H_1) = 10 \rightarrow P(H_1|E_2) = \frac{10}{11}$

$\because C(E_2|S_2) = 1$

$\therefore P(H_1/S_2) = P(H_1) + (P(H_1|E_2) - P(H_1)) \times \frac{1}{5} C(E_2|S_2) = \frac{14}{55}$

$O(H_1/S_2) = \frac{14}{41}$

(3)求 $O(H_1/S_1, S_2)$

多观察后验概率公式

$O(H_1/S_1, S_2) = O(H_1/S_1)\ O(H_1/S_2) / O(H_1) = \frac{42}{41} \times \frac{10}{19}$

(4)求 $O(H_2/S_3)$

$O(H_2) = 0.01 \qquad P(H_2) = \frac{1}{101}$

$O(H_2|\sim E_3) = LN\ O(H_2) = 10^{-6} \rightarrow P(H_2|\sim E_3) = 1/(10^6+1)$

$P(H_2/S_3) = P(H_2/\sim E_3) + [P(H_2) - P(H_2/\sim E_3)] \times [\frac{1}{5} C(E_3/S_3) + 1] \approx \frac{3}{505}$

(5)求 $O(H_2/S_1, S_2)$，把 H_1 当作 H_2 的证据

使用EH公式，发现 $P(H_1/S_1, S_2) > P(H_1)$，用后半部分

$P(H_2/S_1, S_2) = P(H_2) + \frac{P(H_2/H_1) - P(H_2)}{1 - P(H_1)} \times [P(H_1|S_1, S_2) - P(H_1)]$

$O(H_2/H_1) = LS\ O(H_2) = 0.65 \rightarrow P(H_2/H_1) = \frac{13}{33}$

$P(H_2|S_1, S_2) = 0.119 \rightarrow O(H_2/S_1, S_2) = 0.135$

$\therefore O(H_2/S_1, S_2, S_3) = \frac{O(H_2/S_1, S_2)\ O(H_2/S_3)}{O(H_2)} = 0.081$

流程

$O(H_2|S_1,S_2,S_3)$

- $O(H_2|S_1,S_2) \xrightarrow{\uparrow \text{EH公式}} O(H_2|H_1)$、$O(H_1|S_1,S_2)$、$O(H_2)$ ← (H_1充当证据)
  - $O(H_2|H_1)$ ↓ 贝叶斯主观公式
  - $O(H_1|S_1,S_2)$ ← 多观察合并：$O(H_1|S_1)$、$O(H_1|S_2)$
    - $O(H_1|S_1)$ ↑ CP公式：$O(H_1)$、$C(E_1|S_1)$
      - $O(H_1|E_1)$ ← 贝叶斯主观公式
    - $O(H_1|S_2)$ ↑ 同左
- 多观察合并公式
- $O(H_2|S_3) \xrightarrow{\uparrow \text{CP公式}} O(H_2|\sim E_3)$、$O(H_2)$、$C(E_3|S_3)$
  - $O(H_2|\sim E_3)$ → 贝叶斯主观公式

总结

1 $P \leftrightarrow O$ 本质都是概率 $O=\frac{P}{1-P}$ $P=\frac{O}{1+O}$ (P、O转换公式)

2 求 $P(H|S)$ 思路有两种 → 已知 $C(E|S)$ → 用CP公式把 $C(E|S)$、$P(H|E)$、$P(H|\sim E)$、$P(H)$ 做组合

→ 已知 $P(E|S)$ → 用EH公式把 $P(E|S)$、$P(H|E)$、$P(H)$ 做组合

3 CP公式理解 $C(E|S)$ 表示对(观察=证据/反向证据)的确信度，计算本质是 $P(H)$ 和 $P(H|E)/P(H|\sim E)$ 基于 $C(E|S)$ 的加权

$$C(E|S)\neq 0 \rightarrow P(H|S)=\frac{|C(E|S)|}{5}\{P(H|E),P(H|\sim E)\}+\frac{5-|C(E|S)|}{5}P(H)$$

↑ $C(E|S)>0$ 时取 $P(H|E)$，$C(E|S)<0$ 时 $P(H|\sim E)$

$$C(E|S)=0 \rightarrow P(H|S)=P(H)$$

EH公式 用 $P(E)$、$P(E|S)$ 概率区间替代 $C(E|S)$ 做加权

当 $0<P(E|S)<P(E)$ → $P(H|S)=\frac{P(E)-P(E|S)}{P(E)}P(H|\sim E)+\frac{P(E|S)}{P(E)}P(H)$

当 $1>P(E|S)>P(E)$ → $P(H|S)=\frac{P(E|S)-P(E)}{1-P(E)}P(H|E)+\frac{1-P(E|S)}{1-P(E)}P(H)$

$P(E|S)=P(E)$ ↓ $P(H|S)=P(H)$

4 多观察 $O(H|S_1, S_2 \cdots S_n)$ 求解：求出所有 $O(H|S_1) \cdots O(H|S_n)$

$$目标 = \frac{P(H|S_1)}{O(H)} \times \cdots \times \frac{P(H|S_n)}{O(H)} \times O(H)$$

可信度方法

R_1: IF E_1 THEN $H(0.8)$

R_2: E_2 $H(0.6)$

R_3: E_3 $H(-0.5)$

R_4: E_4 AND (E_5 OR E_6) $E_1(0.7)$

R_5: E_7 AND E_8 $E_3(0.9)$

已知 $CF(E_2)=0.8$ $CF(E_4)=0.5$ $CF(E_5)=0.6$ 求 $CF(H)$

$CF(E_6)=0.7$ $CF(E_7)=0.6$ $CF(E_8)=0.9$

$$CF(E_1)=0.7\times\min\{CF(E_4), \max\{CF(E_5), CF(E_6)\}\} = 0.35$$

$$CF(E_2)=0.8$$

$$CF(E_3)=0.9\times\min\{CF(E_7), CF(E_8)\} = 0.54$$

$\therefore$ $CF_1(H)=0.8\times0.35 = 0.28$

$CF_2(H)=0.6\times0.8 = 0.48$

$CF_3(H)=-0.5\times0.54=-0.27$

$\therefore$ $CF_{1,2}(H)= 0.28+0.48-0.28\times0.48 = 0.63$

$CF(H)=(0.63-0.27)/(1-0.27)=0.49$

这题不难，记住CF计算和多CF合成方法即可

AND → min OR → max

$$CF = \begin{cases} CF_1 + CF_2 - CF_1\times CF_2 & (CF_1\geq0, CF_2\geq0) \\ CF_1 + CF_2 + CF_1\times CF_2 & (CF_1\leq0, CF_2\leq0) \\ \dfrac{CF_1+CF_2}{1-\min\{|CF_1|,|CF_2|\}} & (CF_1\ CF_2<0) \end{cases}$$