基本等值式

1.双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

2.幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A$, $A \Leftrightarrow A \wedge A$

3.交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$， $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

4.结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

5.分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ （$\vee$对$\wedge$的分配律）

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ （$\wedge$对$\vee$的分配律）

6.德 摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

7.吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$，$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

8.零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

9.同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

10.排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

11.矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

12.蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

13.等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

14.假言易位 $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

15.等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16.归谬论 $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

求给定公式范式的步骤

(1)消去联结词$\to$、$\leftrightarrow$(若存在)。

(2)否定号的消去(利用双重否定律)或内移(利用德摩根律)。

(3)利用分配律：利用$\wedge$对$\vee$的分配律求析取范式，$\vee$对$\wedge$的分配律求合取范式。

推理定律--重言蕴含式

(1) $A \Rightarrow (A \vee B)$ **附加律**

(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$ **化简律**

(3) $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ **假言推理**

(4) $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ **拒取式**

(5) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ **析取三段论**

(6) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ **假言三段论**

(7) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ **等价三段论**

(8) $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ **构造性二难**

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$ **构造性二难(特殊形式)**

(9)$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$**破坏性二难**

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

设个体域为有限集 D={a1,a2,…,an},则有

（1）$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a1)\wedge A(a2)\wedge\ldots\wedge A(an)$

（2）$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a1)\vee A(a2)\vee\ldots\vee A(an)$

设 A(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，则

（1）$\neg\ \forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg\ A(x)$

（2）$\neg\ \exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg\ A(x)$

设 A(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，B 中不含 x 的出现，则

（1） $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

$\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

$\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

（2） $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

$\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

$\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

设 A(x)，B(x)是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，则

（1）$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

（2）$\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\ \exists xB(x)$

全称量词“∀”对“∨”无分配律。

存在量词“∃”对“∧”无分配律。

UI 规则。 $\dfrac{\forall xA(x)}{\therefore A(y)}$ **或** $\dfrac{\forall xA(x)}{\therefore A(c)}$

UG 规则。 $\dfrac{A(y)}{\therefore \forall xA(x)}$

EG 规则。 $\dfrac{A(c)}{\therefore \exists xA(x)}$

EI 规则。 $\dfrac{\exists xA(x)}{\therefore A(c)}$

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$ 、

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

幂集 $P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$

对称差集 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$

绝对补集 $\sim A=\{x|x\notin A\}$

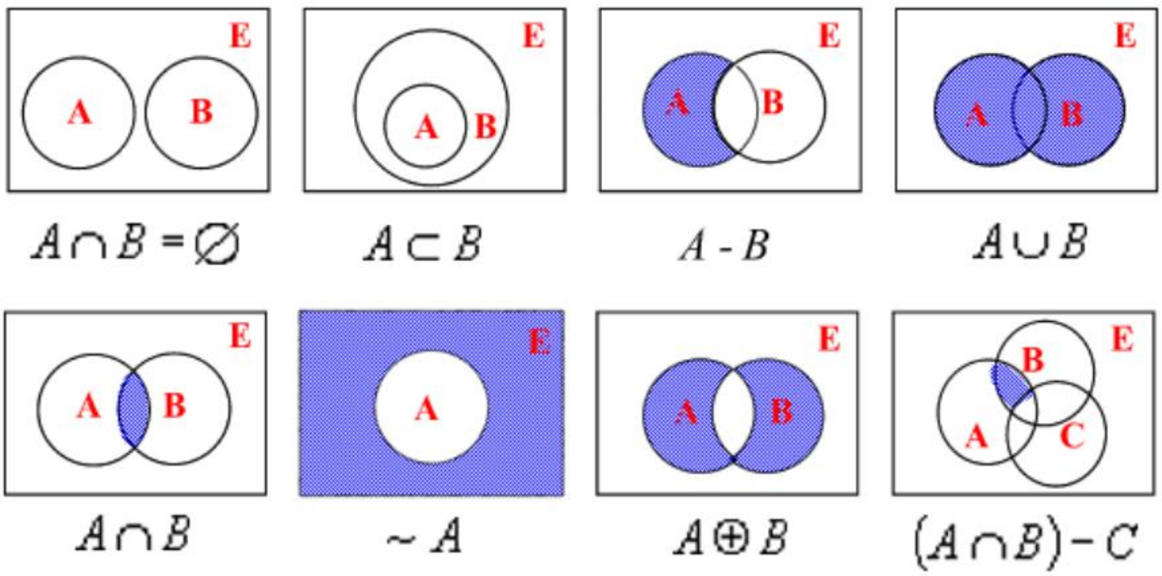


图6.2

广义并 $\cup A=\{x\mid\exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$ 广义交 $\cap A=\{x\mid\forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$

设 $A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$ $B=\{\{a\}\}$ $C=\{a,\{c,d\}\}$

则 $\cup A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\cup B=\{a\}$

$\cup C=a\cup\{c,d\}$

$\cup\varnothing=\varnothing$

$\cap A=\{a\}$

$\cap B=\{a\}$

$\cap C=a\cap\{c,d\}$

集合恒等式

幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零律	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$

排中律 $A \cup \sim A = E$

矛盾律 $A \cap \sim A = \varnothing$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$ $\quad A \cap (A \cup B) = A$

德摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $\quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ $\quad \sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

$\sim \varnothing = E$ $\quad \sim E = \varnothing$

双重否定律 $\sim(\sim A) = A$

集合运算性质的一些重要结果

$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

$A - B \subseteq A$

$A - B = A \cap \sim B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

$A \oplus B = B \oplus A$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

$A \varnothing \oplus = A$

$A \oplus A = \varnothing$

$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

对偶(dual)式：一个集合表达式，如果只含有∩、∪、～、∅、E、=、⊆、⊇，那么同时把∩与∪互换，把∅与 E 互换，把⊆与⊇互换，得到式子称为原式的对偶式。

有序对$\langle x,y\rangle$具有以下性质：（1）当 $x \neq y$ 时，$\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$。

（2）$\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$。

笛卡儿积的符号化表示为 $A \times B = \{\langle x,y\rangle | x \in A \wedge y \in B\}$

如果$|A|=m, |B|=n$,则$|A \times B|=mn$。

笛卡儿积的运算性质

(1)对任意集合 A，根据定义有

$A \times \varnothing = \varnothing, \varnothing \times A = \varnothing$

(2)一般的说，笛卡儿积运算不满足交换律，即

$A \times B \neq B \times A$ （当 $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge A \neq B$ 时）

(3)笛卡儿积运算不满足结合律，即

$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ （当 $A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge C \neq \varnothing$ 时）

(4)笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $\quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $\quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

(5)$A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

常用的关系

对任意集合 A，定义

全域关系 $E_A = \{\langle x,y\rangle | x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x\rangle | x \in A\}$

空关系 $\varnothing$

小于或等于关系：$L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\land x\leq y\}$，其中 $A\subseteq R$。

整除关系：$D_B=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B\land x$ 整除 $y\}$，其中 $A\subseteq Z^*$ ，Z^*是非零整数集

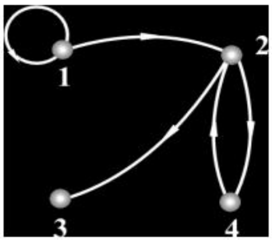
包含关系：$R_\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\land x\subseteq y\}$，其中 A 是集合族。

关系矩阵和关系图

设 $A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，

则 R 的关系矩阵和关系图分别是

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



定义域 $\mathrm{dom}\,R=\{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$

值域 $\mathrm{ran}\,R=\{y \mid \exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$

域 $\mathrm{fld}\,R=\mathrm{dom}\,R\cup\mathrm{ran}\,R$

例 求 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$的定义域、值域和域。

解答 $\mathrm{dom}\,R=\{1,2,4\}$ $\mathrm{ran}\,R=\{2,3,4\}$ $\mathrm{fld}\,R=\{1,2,3,4\}$

逆 $R-1=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in R\}$

右复合 $F\circ G=\{\langle x,y\rangle \mid \exists t(\langle x,t\rangle\in F\land\langle t,y\rangle\in G)\}$

限制 $R\upharpoonright A=\{\langle x,y\rangle \mid xRy\land x\in A\}$

像 $R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$

例 设 $R=\{\langle 1,2\rangle，\langle 1,3\rangle，\langle 2,2\rangle，\langle 2,4\rangle，\langle 3,2\rangle\}$

$R\upharpoonright\{1\}=\{\langle 1,2\rangle，\langle 1,3\rangle\}$ $R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$ $R\upharpoonright\{2,3\}=\{\langle 2,2\rangle，\langle 2,4\rangle\}，\langle 3,2\rangle\}$

$R[\{1\}]=\{2,3\}$ $R[\varnothing]=\varnothing$ $R[\{3\}]=\{2\}$

设 F 是任意的关系，则

(1)$(F-1)-1=F$

(2)$\mathrm{dom}\,F-1=\mathrm{ran}\,F$，$\mathrm{ran}\,F-1=\mathrm{dom}\,F$

设 F，G，H 是任意的关系，则

(1)$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2)$(F\circ G)-1=G-1\circ F-1$

设 R 为 A 上的关系，则 $R\circ I_A=I_A\circ R=R$

设 F，G，H 是任意的关系，则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$

(2) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$

(4) $(G\cap H)\circ F\subseteq G\circ F\cap H\circ F$

设 F 为关系，A,B 为集合，则

(1) F↾(A∪B)＝F↾A∪F↾B

(2) F[A∪B]＝F[A]∪F[B]

(3) F↾(A∩B)＝F↾A∩F↾B

(4) F[A∩B]⊆F[A]∩F[B]

关系的幂运算

设 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为:

（1） R0＝{<x,x>|x∈A}＝IA

（2） Rn+1＝Rn ° R

幂运算的性质

设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t,使得 Rs=Rt。

设 R 是 A 上的关系，m,n∈N，则

(1)Rm ° Rn＝Rm+n (2)(Rm)n＝Rmn

设 R 是 A 上的关系，若存在自然数 s,t(s<t)使得 Rs=Rt，则

(1) 对任何 k∈N 有 Rs+k=Rt+k

(2) 对任何 k,i∈N 有 Rs+kp+i=Rs+i，其中 p=t-s

(3) 令 S={R0，R1，…，Rt-1}，则对于任意的 q∈N 有 Rq∈S

自反 ∀x(x∈A→<x,x>∈R)，

反自反 ∀x(x∈A→<x,x>∉R)，

对称 ∀x∀y(x,y∈A∧<x,y>∈R→<y,x>∈R)

反对称 ∀x∀y(x,y∈A∧<x,y>∈R∧<y,x>∈R→x=y)，

传递 ∀x∀y∀z(x,y,z∈A∧<x,y>∈R∧<y,z>∈R→<x,z>∈R)

关系性质的等价描述

设 R 为 A 上的关系，则

（1）R 在 A 上自反当且仅当 IA⊆R

（2）R 在 A 上反自反当且仅当 R∩IA＝∅

（3）R 在 A 上对称当且仅当 R＝R-1

（4）R 在 A 上反对称当且仅当 R∩R-1⊆IA

（5）R 在 A 上传递当且仅当 R°R⊆R

(1)若 R1，R2 是自反的和对称的，则 R1∪R2 也是自反的和对称的。

(2)若 R1 和 R2 是传递的，则 R1∩R2 也是传递的。

关系性质的特点

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	IA $\subseteq$ R	R∩IA=∅	R=R-1	R∩R-1 $\subseteq$ IA	R°R⊆R
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	矩阵是对称矩阵	若 rij=1，且 i≠j，则 rji=0	对 M2 中 1 所在位置，M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点 xi 到 xj 有边，xj 到 xk 有边，则从 xi 到 xk 也有边

关系的性质和运算之间的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R1-1	√	√	√	√	√
R1∩R2	√	√	√	√	√
R1∪R2	√	√	√	×	×
R1－R2	×	√	√	√	×
R1 ° R2	√	×	×	×	×

闭包的构造方法

设 R 为 A 上的关系，则有

（1）自反闭包 r(R)=R∪R0

（2）对称闭包 s(R)=R∪R-1

（3）t(R)=R∪R2∪R3∪…

关系性质与闭包运算之间的联系

设 R 是非空集合 A 上的关系，

（1）若 R 是自反的，则 s(R)与 t(R)也是自反的。

（2）若 R 是对称的，则 r(R)与 t(R)也是对称的。

（3）若 R 是传递的，则 r(R)是传递的。

等价类的性质

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

（1）∀x∈A，[x]是 A 的非空子集。

（2）∀x,y∈A，如果 xRy，则[x]=[y]。

（3）∀x,y∈A，如果<x,y>∉R，则[x]与[y]不交。

（4）∪{[x]|x∈A}=A。

偏序集中的特殊元素

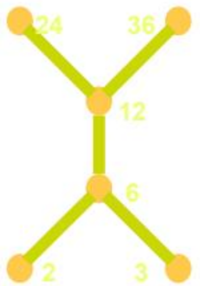
设<A，≤>为偏序集，B⊆A，y∈B。

（1）若∀x(x∈B→y≤x)成立，则称 y 为 B 的最小元。

（2）若∀x(x∈B→x≤y)成立，则称 y 为 B 的最大元。

（3）若∀x(x∈B∧x≤y→x=y)成立，则称 y 为 B 的极小元。

（4）若∀x(x∈B∧y≤x→x=y)成立，则称 y 为 B 的极大元



B	最大元	最小元	极大元	极小元
{2,3,6,12,24,36}	无	无	24，36	2,3
{6,12}	12	6	12	6
{2,3,6}	6	无	6	2,3
{6}	6	6	6	6

B	上界	下界	上确界	下确界
{2,3,6,12,24,36}	无	无	无	无
{6,12}	12,24,36	2,3,6	12	6
{2,3,6}	6,12,24,36	无	6	无
{6}	6,12,24,36,	2,3,6,	6	6

函数相等

由定义可知，两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

（1）dom F=dom G

（2）$\forall x\in$dom F=dom G，都有 $F(x)=G(x)$

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 BA，读作“B 上 A”，符号化表示为 BA={f|f: A→B} 。

例：设 A={1,2,3}，B={a,b}，求 BA。

BA={$f0$, $f1$, $f2$, $f3$, $f4$, $f5$, $f6$, $f7$} 。其中

$f0$={<1,a>,<2,a>,<3,a>}　　$f1$={<1,a>,<2,a>,<3,b>}

$f2$={<1,a>,<2,b>,<3,a>}　　$f3$={<1,a>,<2,b>,<3,b>}

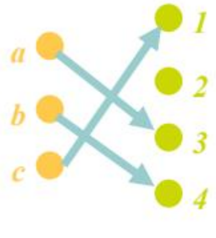
$f4$={<1,b>,<2,a>,<3,a>}　　$f5$={<1,b>,<2,a>,<3,b>}

$f6$={<1,b>,<2,b>,<3,a>}　　$f7$={<1,b>,<2,b>,<3,b>}

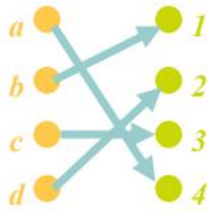
设 f:$A\to B$，（1）若 ran $f=B$，则称 f:$A\to B$ 是满射(*surjection*)的。

（2）若$\forall y\in$ran f 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)$=y，则称 f:$A\to B$ 是单射(*injection*)的。

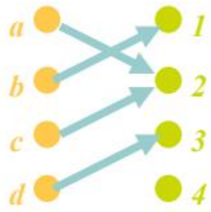
（3）若 f 既是满射又是单射的，则称 $f:A\to B$ 是双射(*bijection*)



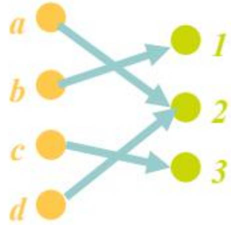
单射



双射



函数



满射

例：判断下面函数是否为单射、满射、双射的，为什么?

(1) f：$R\to R$，$f(x)= -x2+2x-1$　　　　(2) f：$Z+\to R$，$f(x)=ln\ x$，$Z+$为正整数集

(3) f：$R\to Z$，$f(x)=\lfloor x\rfloor$　　　　(4) f：$R\to R$，$f(x)=2x+1$。

解（1）f 在 x=1 取得极大值 0。既不是单射也不是满射的。

（2）f 是单调上升的，是单射的，但不满射。ran $f=\{ln1, ln2, ...\}$。

（3）f 是满射的，　但不是单射的，例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$。

（4）f 是满射、单射、双射的，因为它是单调函数并且 ran $f=R$。

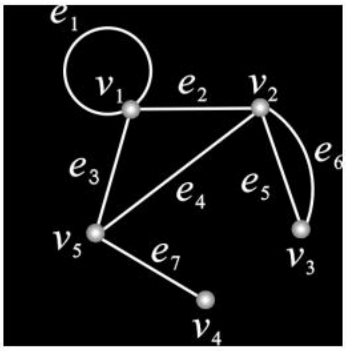
例：(1) 给定无向图 G＝<V,E>，其中 V＝{v1,v2,v3,v4,v5}，

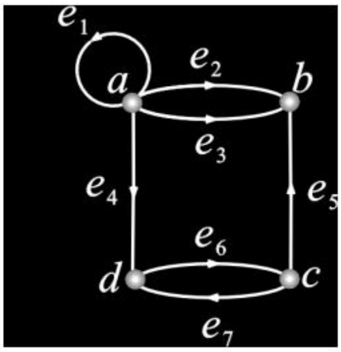
E={(v1,v1),(v1,v2),(v2,v3),(v2,v3),(v2,v5),(v1,v5),(v4,v5)}.

(2) 给定有向图 D=<V,E>，其中 V＝{a,b,c,d}，

E＝{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,d>,<d,c>,<c,b>}。

画出 G 与 D 的图形。





邻域：NG(v1) ＝{v2，v5}

闭邻域：NG(v1) ＝{v1，v2，v5}

关联集：IG(v1) ＝{e1，e2，e3}

d(v1)=4(注意，环提供 2 度)，

△＝4，δ＝1，

v4 是悬挂顶点，e7 是悬挂边。

度数列为 4,4,2,1,3。

后继元集：Γ+D(d) ＝{c}

先驱元集：Γ-D(d) ＝{a，c}

邻域：　ND(d) ＝{a，c}

闭邻域：ND(d) ＝{a，c，d}

出度：d+(a)=4，入度：d-(a)=1

(环 e1 提供出度 1，提供入度 1)，

d(a)=4+1=5。△=5，δ=3，

△+=4 (在 a 点达到)

δ+=0(在 b 点达到)

△-=3(在 b 点达到)

δ-=1(在 a 和 c 点达到)

按字母顺序，度数列：5,3,3,3

出度列：4,0,2,1　　　入度列：1,3,1,2

设 $G=\langle V,E\rangle$是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

（1）G 是树。（2）G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径。

（3）G 中无回路且 $m=n-1$。（4）G 是连通的且 $m=n-1$。

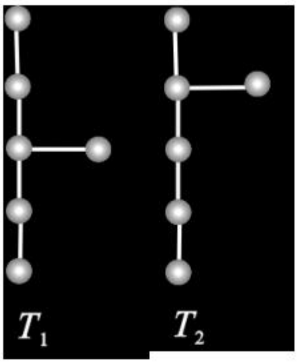
（5）G 是连通的且 G 中任何边均为桥。

（6）G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

例题 已知无向树 T 中，有 1 个 3 度顶点，2 个 2 度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树。

解答 设有 x 片树叶，于是结点总数

$$n=1+2+x=3+x$$



由握手定理和树的性质 $m=n-1$ 可知，

$$2m=2(n-1)=2\times(2+x)$$
$$=1\times3+2\times2+x$$

解出 $x=3$，故 T 有 3 片树叶。

故 T 的度数应为 1、1、1、2、2、3。

求最小生成树的算法（避圈法(Kruskal)）

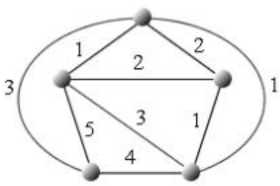
(1)设 n 阶无向连通带权图 $G=\langle V,E,W\rangle$有 m 条边。不妨设 G 中没有环（否则，可以将所有的环先删去），将 m 条边按权从小到大排序：$e1,e2,\ldots,em$。

(2)取 $e1$ 在 T 中。

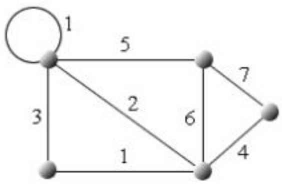
(3)依次检查 $e2,\ldots,em$ ，若 $ej(j\geqslant2)$与已在 T 中的边不构成回路，取 ej 也在 T 中，否则弃去 ej。

(4)算法停止时得到的 T 为 G 的最小生成树为止。

例：求下图所示两个图中的最小生成树。



(1)



(2)

$W(T1)=6$ $W(T2)=12$

T 是 $n(n\geqslant2)$阶有向树，

(1) T 为根树— T 中有一个顶点入度为 0，其余顶点的入度均为 1

(2) 树根——入度为 0 的顶点

(3) 树叶——入度为 1，出度为 0 的顶点

(4) 内点——入度为 1，出度不为 0 的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

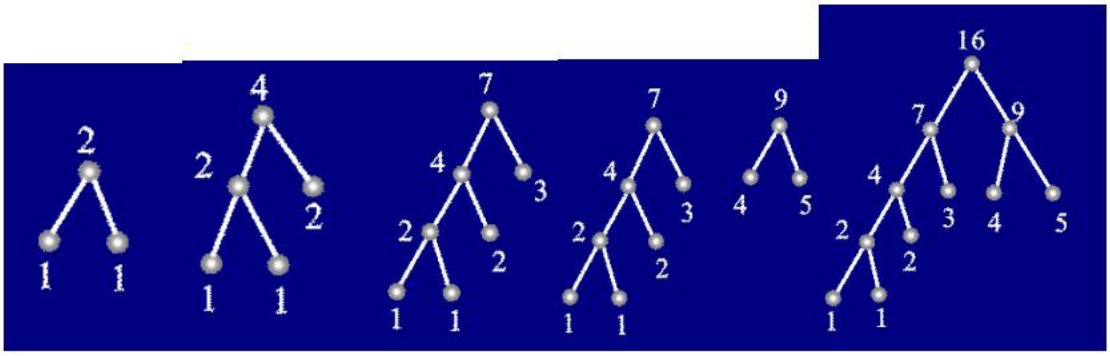
(6) 顶点 v 的层数——从树根到 v 的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

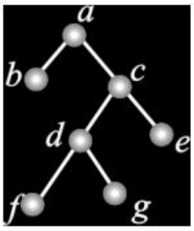
根树的画法：树根放上方，省去所有有向边上的箭头。

树叶——8 片　　内点——6 个　　分支点——7 个　　高度——5

求带权为 1、1、2、3、4、5 的最优树。



$W(T)$=38



中序行遍法：$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$　　前序行遍法：$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$

后序行遍法：$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$

├ 断定符（公式在 L 中可证）
╞ 满足符（公式在 E 上有效，公式在 E 上可满足）
┐ 命题的“非”运算
∧ 命题的“合取”（“与”）运算
∨ 命题的“析取”（“或”，“可兼或”）运算
→ 命题的“条件”运算
↔ 命题的“双条件”运算的
A<=>B 命题 A 与 B 等价关系
A=>B 命题 A 与 B 的蕴涵关系
A* 公式 A 的对偶公式
wff 合式公式
iff 当且仅当
↑ 命题的“与非” 运算（ “与非门” ）
↓ 命题的“或非”运算（ “或非门” ）
□ 模态词“必然”
◇ 模态词“可能”
φ 空集
∈ 属于（∉不属于）
P（A） 集合 A 的幂集
|A| 集合 A 的点数
R^2=R○R [R^n=R^(n-1)○R] 关系 R 的“复合”
ℵ 阿列夫
⊆ 包含
⊂（或下面加 ≠） 真包含
∪ 集合的并运算
∩ 集合的交运算
-（~） 集合的差运算
〡 限制
[X](右下角 R) 集合关于关系 R 的等价类
A/ R 集合 A 上关于 R 的商集
[a] 元素 a 产生的循环群
I (i 大写) 环，理想
Z/(n) 模 n 的同余类集合
r(R) 关系 R 的自反闭包
s(R) 关系 的对称闭包
CP 命题演绎的定理（CP 规则）
EG 存在推广规则（存在量词引入规则）
ES 存在量词特指规则（存在量词消去规则）
UG 全称推广规则（全称量词引入规则）
US 全称特指规则（全称量词消去规则）

R 关系 r 相容关系
R○S 关系 与关系 的复合
domf 函数 的定义域（前域）
ranf 函数 的值域
f:X→Y f 是 X 到 Y 的函数
GCD(x,y) x,y 最大公约数
LCM(x,y) x,y 最小公倍数
aH(Ha) H 关于 a 的左（右）陪集
Ker(f) 同态映射 f 的核（或称 f 同态核）
[1，n] 1 到 n 的整数集合
d(u,v) 点 u 与点 v 间的距离
d(v) 点 v 的度数 G=(V,E) 点集为 V,边集为 E 的图
W(G) 图 G 的连通分支数
k(G) 图 G 的点连通度
△（G） 图 G 的最大点度
A(G) 图 G 的邻接矩阵
P(G) 图 G 的可达矩阵
M(G) 图 G 的关联矩阵
C 复数集
N 自然数集（包含 0 在内）
N* 正自然数集
P 素数集
Q 有理数集
R 实数集
Z 整数集
Set 集范畴
Top 拓扑空间范畴
Ab 交换群范畴
Grp 群范畴
Mon 单元半群范畴
Ring 有单位元的（结合）环范畴
Rng 环范畴
CRng 交换环范畴
R-mod 环 R 的左模范畴
mod-R 环 R 的右模范畴
Field 域范畴
Poset 偏序集范畴