

人工智能学院 医学院 本科生 2020—2021 学年第一学期离散数学课程期末考试试卷 (A 卷)

专业(大类): \_\_\_\_\_ 年级: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 成绩: \_\_\_\_\_

说明:  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置矩阵,  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵,  $E$  是单位矩阵,  $O$  是零矩阵,  $R(A)$  或  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩

$A^{-1}$  表示可逆矩阵  $A$  的逆矩阵,  $|A|$  表示方阵  $A$  的行列式,  $\langle \alpha, \beta \rangle$  表示向量  $\alpha, \beta$  的内积。

草稿区

得分

一. 客观题: 1-4 小题为判断题, 在对的后面括号中填“√”, 错的后面括号中填“×”,  
5-8 为单选题, 将正确选项前的字母填在括号中。(判断题 2 分, 选择题 3 分, 共 20 分)。

1. 集合  $A$  上的恒等关系是双射函数。 ( )
2. 任何无向图中度数为奇数的顶点的个数不一定是偶数。 ( )
3. 已知经过图中每个顶点一次且仅一次的回路称为欧拉回路。 ( )
4.  $G = \langle S, \cdot \rangle$  是一个群,  $a, b, c \in S$ ,  $b \cdot a = c \cdot a$ , 则  $b = c$  ( )
5. 欧拉函数  $\phi(n)$  是  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  中与  $n$  互素 (1 与  $n$  互素) 的数的个数。  $\phi(28)$  等于 ( )  
 (A) 11 (B) 12 (C) 6 (D) 以上答案都不对。
6. 下列式子错误的是: ( )  
 (A)  $\emptyset \subseteq \emptyset$  (B)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  (C)  $\emptyset \in \emptyset$  (D)  $\emptyset \notin \emptyset$
7. 设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{\langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle\} \cup I_A$ , 则对应于  $R$  的  $A$  的划分是 ( )  
 (A)  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$  (B)  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$  (C)  $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$  (D)  $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$
8. 下面的谓词逻辑等值式中, 错误的是 ( )  
 (A)  $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$  (B)  $A \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B(x))$   
 (C)  $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$  (D)  $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg A)$ .

二、构造下面推理的证明（第 1 小题 6 分，第 2 小题 4 分，共 10 分）

1. 前提： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ,  $\neg s \vee p$ ,  $q$ ; 结论： $s \rightarrow r$ 。

2. 前提： $p \vee q \rightarrow r \wedge s$ ,  $r \vee u \rightarrow v$ ; 结论： $p \rightarrow v$ 。

得 分

三、集合相关的问题。 (本题 10 分, 每小题 5 分)

(1) 集合  $A, B$  满足  $A - B = B - A$ 。证明  $A = B$ 。

(2) 求介于 150 和 300 之间的素数的个数。

草 稿 区

得 分

四、二元关系方面的问题。(本题 15 分, 第一小题 5 分, 第二小题 10 分)

- (1) 设  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $g(\langle x, y \rangle) = \langle x - y, x + y \rangle$ , 求  $g$  的反函数。
- (2) 试构造: 自然数集到正偶数(含 0)集的双射  $f_1$  和负整数集到正奇数集的双射  $f_2$ 。

基于  $f_1$  和  $f_2$  构造整数集到自然数集的双射  $f$ 。并证明  $f$  是双射。

得分

五、树相关的问题。(本题 10 分)

草稿区

一个算式用逆波兰符号法表示为:  $ab + cd + e ** fgh * - +$ , 试画出该算式的二叉有序树表示, 并写出该算式的波兰法符号表示。

得 分

六、图论部分的问题。 (本题 10 分)

草 稿 区

某公共场合 6 人相遇。证明：这 6 人中一定可以找出 3 个人，这 3 个人要么相互认识，要么相互不认识。

(不考虑那些形如甲认识乙但乙不认识甲的情形；换句话说，单方面认识视作不认识。) 用图的形式演示证明。

七、代数系统部分的问题。(本题 15 分, 第 1 小题 5 分, 第 2 小题 10 分)

(1) 20 阶循环群  $G = \langle a \rangle$ 。求  $G$  的全部生成元。

(2) 四元集合  $S = \{e, a, b, c\}$  的运算表如下。利用群的定义证明  $\langle S, \circ \rangle$  是群。

*	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

得 分

八、正整数  $n$  满足条件：  $n$  的十进制表示有 5 位且数位上的数字从左到右依次单调不减。比如，12255 就是这样的数字。求满足条件的正整数的个数。（要有计算过程，不能仅有得数）。

(本题 5 分)

得 分

九、 $\binom{n}{m}$  表示组合数  $C_n^m$ 。用两种方法计算  $(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n$ ，从而证明：

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

草 稿 区

(本题 5 分)