选 择 题

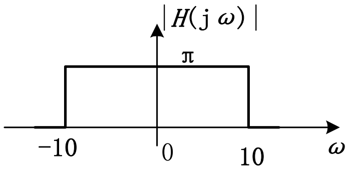
1．系统的幅频特性$|H(j\omega)|$，相频特性$\mathrm{Arg}[H(j\omega)]$如下图(a)　(b)所示，则下列信号通过该系统时，不产生失真的是（ D ）

(A)　$f(t)=\cos(t)+\cos(8t)$

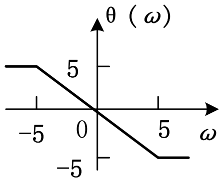
(B)　$f(t)=\sin(2t)+\sin(8t)$

(C)　$f(t)=\sin(2t)\cdot\sin(6t)$

(D)　$f(t)=\cos 2(4t)$



(a)



(b)

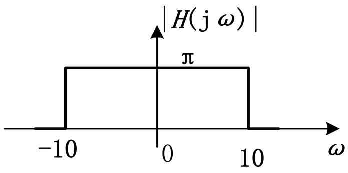
2.系统的幅频特性$|H(j\omega)|$，相频特性$\mathrm{Arg}[H(j\omega)]$如下图(a)　(b)所示，则下列信号通过该系统时，不产生失真的是（ B ）

(A)　$f(t)=\cos(6t)+\cos(4t)$

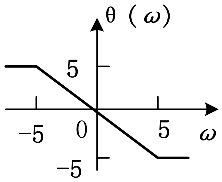
(B)　$f(t)=\sin(2t)+\sin(4t)$

(C)　$f(t)=\sin 4(3t)$

(D)　$f(t)=\cos 2(4t)+\sin(2t)$



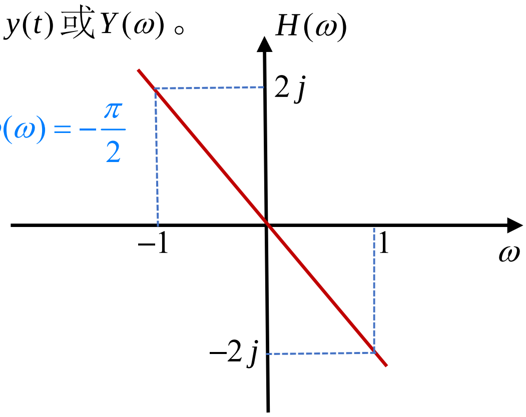
(a)



(b)

计算题

1、一个因果 LTI 滤波器具有下图所示的频率特性$H(\omega)$。对下面所给的每一个输入信号，求滤波器的输出$y(t)$或$Y(\omega)$。



$H(\omega) = -j2\omega = 2\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $|H(\omega)| = 2|\omega|$, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

（1） $x(t) = e^{jt}$

$x(t) = e^{jt} = \cos t + j\sin t$, $\omega = 1$

$$y(t) = 2\cos(t - \frac{\pi}{2}) + j2\sin(t - \frac{\pi}{2})$$
$$= 2e^{j(t-\frac{\pi}{2})} = -j2e^{jt}$$

（2） $x(t) = (\sin\omega_0 t)u(t)$

$x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$, $\omega = \omega_0$

$$y(t) = 2\omega_0 \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})u(t) = -2\omega_0\cos(\omega_0 t)u(t)$$

（3） $X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega(6 + j\omega)}$

$X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega(6+j\omega)}$, $H(\omega) = 2\omega e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j2\omega$

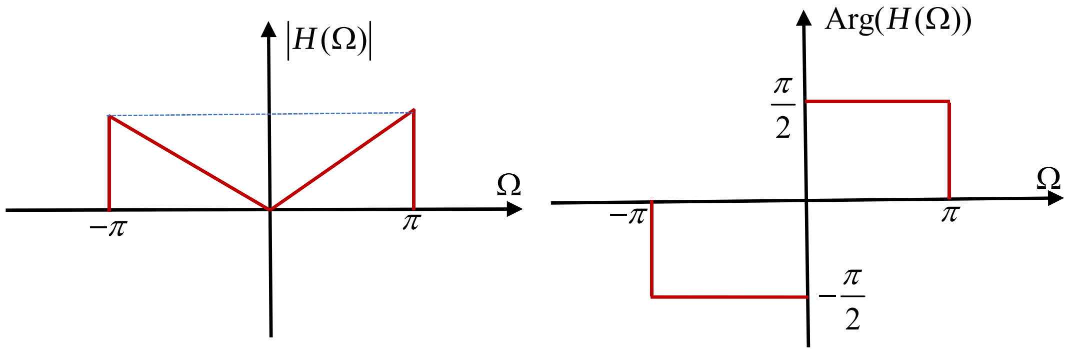
$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega(6+j\omega)}\cdot(-j2\omega) = \frac{-2}{6+j\omega} = \frac{-2(6-j\omega)}{36+\omega^2}$$

（4） $X(\omega) = \dfrac{1}{2 + j\omega}$

$$X(\omega)=\frac{1}{2+j\omega},\qquad H(\omega)=2\omega e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j2\omega$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\cdot(-j2\omega)=\frac{-j2\omega}{2+j\omega}=\frac{-j2\omega(2-j\omega)}{4+\omega^2}$$
$$=-\frac{\omega(\omega+j4)}{4+\omega^2}$$

2、下图是一个连续时间滤波器的频率响应$H(\omega)$（幅频特性、相频特性），该系统称为低通微分滤波器。对下列每一个信号$x(t)$，求滤波器的输出$y(t)$。



$$H(\omega)=\begin{cases}\left|\frac{\omega}{3\pi}\right|e^{j\frac{\pi}{2}} & \omega>0\\ \left|\frac{\omega}{3\pi}\right|e^{-j\frac{\pi}{2}} & \omega<0\end{cases}$$

通频带范围：$-3\pi\le\omega\le+3\pi$

（1） $x(t)=\cos(2\pi t+\theta)$

$x(t)=\cos(2\pi t+\theta),\quad \omega=2\pi>0$

$$y(t)=\frac{2\pi}{3\pi}\cos(2\pi t+\theta+\frac{\pi}{2})$$
$$=-\frac{2}{3}\sin(2\pi t+\theta)$$

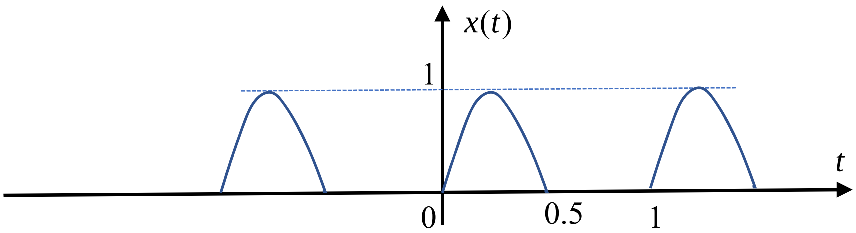
（2） $x(t)=\cos(4\pi t+\theta)$

$x(t)=\cos(4\pi t+\theta),\quad \omega=4\pi>3\pi$

$y(t)=0$

（3） $x(t)$ 是周期为 1 的，经半波整流了的正弦波，如下图：

$$x(t)=\begin{cases}\sin 2\pi t & m\le t\le (m+\frac{1}{2})\\ 0 & (m+\frac{1}{2})\le t\le (m+1)\end{cases}\quad m\text{是整数}\qquad a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$



通频带范围：$-3\pi\le\omega\le+3\pi$

$$x(t)=\begin{cases}\sin 2\pi t & m\le t\le (m+\frac{1}{2})\\ 0 & (m+\frac{1}{2})\le t\le (m+1)\end{cases}$$

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\qquad T_0=1$$

$$=\int_0^1 x(t)e^{-jk2\pi t}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi t)e^{-jk2\pi t}dt=\frac{1}{j2}\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t})e^{-jk2\pi t}dt$$

$$=\frac{1}{j2}(\int_0^{\frac{1}{2}}e^{j2\pi(1-k)t}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-j2\pi(1+k)t}dt)$$

$$a_{-1}=\frac{1}{j2}(\int_0^{\frac{1}{2}}e^{j4\pi t}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}dt)=\frac{1}{j2}[\frac{1}{j4\pi}(e^{j2\pi}-1)-\frac{1}{2}]=\frac{j}{4}$$

$$a_0=\frac{1}{j2}(\int_0^{\frac{1}{2}}e^{j2\pi t}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-j2\pi t}dt)=\frac{1}{j2}\frac{1}{j2\pi}[(e^{j\pi}-1)+(e^{-j\pi}-1)]=\frac{1}{\pi}$$

$$a_1=\frac{1}{j2}(\int_0^{\frac{1}{2}}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-j4\pi t}dt)=\frac{1}{j2}[\frac{1}{2}+\frac{1}{j4\pi}(e^{-j2\pi}-1)]=-\frac{j}{4}$$

$$y(t)=\frac{2\pi}{3\pi}a_{-1}e^{-j2\pi t}e^{-j\frac{\pi}{2}}+\frac{0}{3\pi}a_0e^{j\frac{\pi}{2}}+\frac{2\pi}{3\pi}a_1e^{j2\pi t}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}[\frac{j}{4}(-j)e^{-j2\pi t}-\frac{j}{4}(j)e^{j2\pi t}]=\frac{1}{6}(e^{-j2\pi t}+e^{j2\pi t})=\frac{1}{3}\cos(2\pi t)$$

傅里叶级数的系数通式：

$$a_k = \frac{1}{j2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi(1-k)t}dt - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi(1+k)t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{j2}\left(\frac{1}{j2\pi(1-k)} e^{j2\pi(1-k)t}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{j2\pi(1+k)} e^{-j2\pi(1+k)t}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{1-k}(e^{j\pi(1-k)}-1) + \frac{1}{1+k}(e^{-j\pi(1+k)}-1)\right]$$

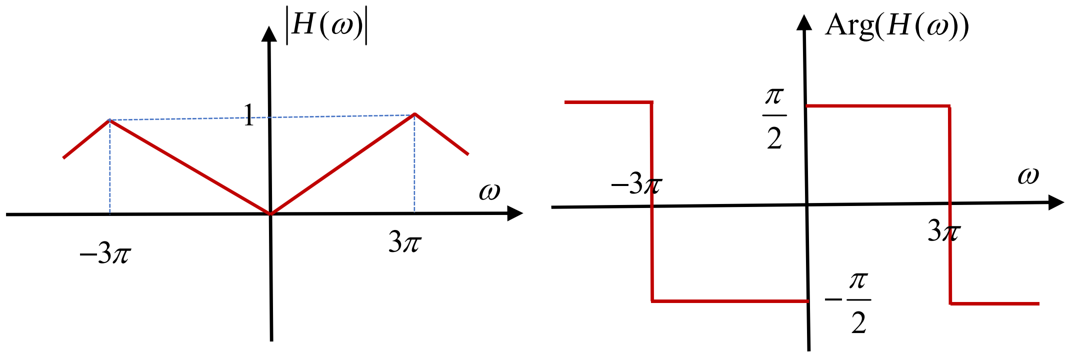
$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(-1)^{(1-k)}}{1-k} - \frac{1}{1-k} + \frac{(-1)^{-(1+k)}}{1+k} - \frac{1}{1+k}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & k = 2l+1 \\ \dfrac{1}{\pi(1-2l)} & k = 2l \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j2\pi kt} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(2\pi t) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1-2l)} e^{j4\pi lt}$$

3、下图是一个离散事件微分器的频率特性 $H(\Omega)$（幅频特性、相频特性）。如果输入 $x(n)$ 为如下式，确定输出 $y(n)$。

$$x(n)=\cos(\Omega_0 n+\theta)$$



$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\Omega}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}} & 0\le\omega\le\pi\\[2ex] -\dfrac{\Omega}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}} & -\pi\le\omega<0\end{cases}$$

$$x(n)=\cos(\Omega_0 n+\theta),\qquad \Omega=\Omega_0,\qquad 0\le|\Omega_0|\le\pi$$

$$=\frac{1}{2}(e^{j(\Omega_0 n+\theta)}+e^{-j(\Omega_0 n+\theta)})$$

$$y(n)=\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\pi}e^{j(\Omega_0 n+\theta)}e^{j\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\pi}e^{-j(\Omega_0 n+\theta)}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Omega_0}{\pi}[je^{j(\Omega_0 n+\theta)}-je^{-j(\Omega_0 n+\theta)}]$$

$$=-\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{1}{j2}[e^{j(\Omega_0 n+\theta)}-e^{-j(\Omega_0 n+\theta)}]$$

$$=-\frac{\Omega_0}{\pi}\sin(\Omega_0 n+\theta)$$