Ton score:

**13/20**

# Maths Mixte Collège et Lycée n°4

**Une série statistique comprend 57 valeurs supposées classées par ordre croissant. Laquelle des affirmations suivantes est exacte ?**

La médiane est la 28e valeur

Le premier quartile est la 15e valeur

**Qu'est-ce qu'un nombre rationnel ?**

Un nombre qui peut s'exprimer sous la forme du quotient de deux nombres relatifs $\frac{a}{b}$, où $b$ est non nul

**Si la courbe représentative d'une fonction du second degré croise deux fois l'axe des abscisses, que peut-on en déduire ?**

Le discriminant du trinôme est positif

Si la courbe croise deux fois l'axe des abscisses, cela signifie que l'équation du second degré s'annule deux fois, donc que le discriminant est positif.

**Sur la carte d'un restaurant, il y a $5$ entrées, $4$ plats et $3$ desserts. Il faut sélectionner un élément de chaque catégorie pour constituer un menu. Combien y a-t-il de menus possibles ?**

$5 \times 4 \times 3 = 60$ menus

C'est le nombre de $3$-uplets du produit cartésien $\{\text{entrées}\} \times \{\text{plats}\} \times \{\text{desserts}\}$. Il y a $5$ possibilités pour l'entrée, $4$ choix possibles pour le plat et $3$ pour le dernier élément.

**On souhaite démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$ :**

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**On a montré que l'égalité est vraie pour $n = 1$ ; on cherche maintenant à démontrer l'hérédité.**

**On suppose qu'il existe un entier quelconque $k \geq 1$ tel que :**

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

**À quelle expression doit-on alors montrer que $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$ est égal ?**

$1 + 4 + \ldots + k^2 + 2k + 1$

$\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

L'hypothèse de récurrence étant faite pour $k$, on veut montrer que la proposition est alors vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

D'ailleurs, montrons-le :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \ \text{[d'après l'hypothèse de récurrence]} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)\big(k(2k+1) + 6(k+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (k+2)(2k+3) &= 2k^2 + 3k + 4k + 6 \\ &= 2k^2 + 7k + 6 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

À vous de terminer !

**Pour tout nombre réel $x$ tel que $-1 \leq x \leq 4$, alors :**

$0 \leq x^2 \leq 16$

**Soit $a$ un réel. Que pouvez-vous dire de la suite $\mathrm{e}^{na}$ pour $n$ un entier naturel ?**

Il s'agit d'une suite géométrique

$\mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{na}$. Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^a$ et de premier terme $\mathrm{e}^0 = 1$.

**$f$ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x^4} \leq f(x)$. Que peut-on en déduire ?**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

On utilise le théorème de comparaison des limites et le fait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$.

**Soit la fonction $f$ définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + 5 + \sqrt{x+1}$.**
**Combien de solutions sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 10^6$ admet-elle ?**

Exactement une solution

Comme somme de fonctions continues et dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, $f$ est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$ :

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Donc, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) > 0$ et $f$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Nous avons en outre :

$$f(0) = 6$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Comme $10^6 \in [6\ ;\ +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution à l'équation $f(x) = 10^6$.

**Soit $f$ une fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.**

**Que vaut alors : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$ ?**

$I = 1$

Nous avons, pour tout $x > 0$ :

$f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$

Nous reconnaissons la forme : $2u'u$, avec $u = \ln$.

Une primitive est alors de la forme : $u^2$.

Une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $F$ définie par :

$F(x) = \ln^2(x)$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} I &= F(\mathrm{e}) - F(1) \\ &= \ln^2(\mathrm{e}) - \ln^2(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Parmi les propositions ci-dessous, laquelle est égale à $19\ \mathrm{m}^3$ ?**

$19\ 000\ \mathrm{L}$

$19\ \mathrm{m}^3 = 19\ 000\ \mathrm{dm}^3 = 19\ 000\ \mathrm{L}$

**Soit une sphère de rayon $R = 2\ \mathrm{cm}$. Quelle est l'aire de cette sphère?**

$A \approx 50,27\ \mathrm{cm}^2$

L'aire d'une sphère se calcule ainsi :

$A = 4\pi R^2$

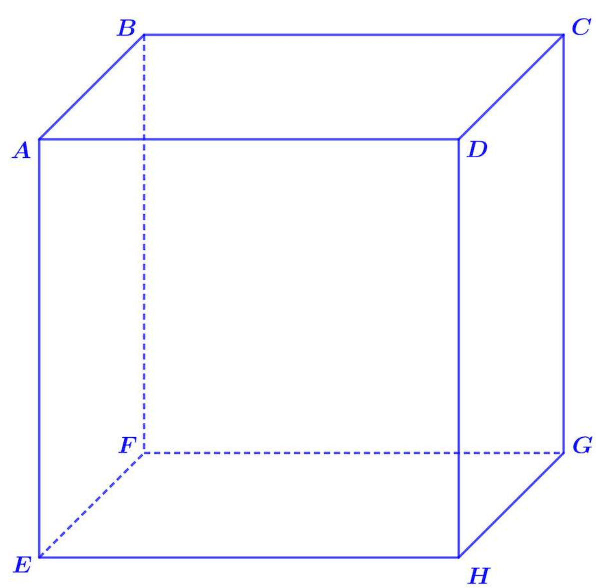
Ici, on a : $A = 4\pi \times 2^2 = 16\pi \approx 50,27 \text{ cm}^2$

**Quel est l'énoncé de la contraposé du théorème de Thalès ?**

Soit $ABC$ un triangle et deux points $M$ et $N$ tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.
Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ou $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ alors on peut affirmer que les droites $(MN)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles

Soit $ABC$ un triangle et deux points $M$ et $N$ tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.
Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ ou $\frac{AM}{AB} \neq \frac{MN}{BC}$ ou $\frac{AN}{AC} \neq \frac{MN}{BC}$ alors on peut affirmer que les droites $(MN)$ et $(BC)$ ne sont pas parallèles

**Soit le cube $ABCDEFGH$ :**




**Quelle affirmation est juste ?**

Les plans $(ADH)$ et $(FHC)$ sont sécants selon une droite passant par $H$

Car $H$ est commun aux deux plans et, comme $C$ n'appartient pas au plan $(ADH)$, les deux plans ne sont pas confondus, ils sont sécants selon une droite qui passe par $H$.

**L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.**
**Soit les droites $(d)$ et $(d')$ dont on donne des représentations paramétriques :**

$$(d) : \begin{cases} x = 9t \\ y = -6t + 1 \\ z = -15t + 2 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad (d') : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 1 \\ z = 5t + 2 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

**Quelle affirmation est correcte ?**

✓ $(d)$ et $(d')$ sont sécantes et leur intersection est le point $I\,(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$

Nous voyons que $(d)$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$, que $(d')$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et donc que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires. $(d)$ et $(d')$ ne sont pas parallèles.

Reste à savoir si elles sont sécantes ou non coplanaires.

Là aussi, les représentations paramétriques nous permettent de voir que $(d)$ et $(d')$ passent toutes les deux par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

Elles sont donc sécantes (et de fait coplanaires) et se coupent en $I\,(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

Par ailleurs, nous voyons que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{u'} \neq 0$, donc $(d)$ et $(d')$ ne sont pas orthogonales.

✓ **On peut exprimer une probabilité sous forme de :**

✓ Fraction, nombre décimal ou pourcentage

✗ **Si la taille de l'échantillon prélevé est $n = 10\,000$ et la proportion $p = 0,5$ d'un caractère étudié. Alors l'intervalle de fluctuation à $95\ \%$ peut-être :**

✗ $\left[0,499\ ;\ 0,501\right]$

✓ $\left[0,49999999\ ;\ 0,50000001\right]$

On a $n = 10000$ et $p = 0,5$, donc l'intervalle de fluctuation à $95\ \% = \left[p - \sqrt{\frac{1}{n}}\ ;\ p + \sqrt{\frac{1}{n}}\right] = \left[0,5 - \sqrt{\frac{1}{10\,000}}\ ;\ 0,5 + \sqrt{\frac{1}{10\,000}}\right] = \left[0,49999999\ ;\ 0,50000001\right]$.

Dans mon lycée, $90\ \%$ des élèves ont un téléphone portable (éteint en cours, bien sûr), $60\ \%$ une tablette (restée à la maison, évidemment), et $50\ \%$ ont les deux. Je croise, au détour d'un couloir, un élève qui téléphone, quelle est la probabilité qu'il ait aussi une tablette ?

$\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{9}$

Si $P$ est l'événement « L'élève a un téléphone » et $T$ « L'élève a une tablette », alors :
$$p_P(T) = \frac{p(P \cap T)}{p(P)} = \frac{0,5}{0,9}.$$

On lance un dé à $3$ faces, supposé non truqué. On note $X$ la variable aléatoire associée au résultat du dé. On définit la variable aléatoire $Y = 2X - 5$. Que vaut la variance de $Y$ ?

$\frac{7}{3}$

$\frac{8}{3}$

Nous avons :
$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{3} \times (2-1)^2 + \frac{1}{3} \times (2-2)^2 + \frac{1}{3} \times (2-3)^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :
$$\begin{aligned} V(Y) &= V(2X-5) \\ &= 2^2 \times V(X) \\ &= 4 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

**Soit le plan $(P)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$, qui passe par le point $A\,(-1\,;\,0\,;\,0)$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ne donne pas une équation cartésienne de $(P)$ ?**

$2x + y + 4z - 2 = 0$

Puisque $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(P)$, une équation cartésienne de $(P)$ est : $2x + y + 4z + d = 0$, avec $d$ un réel, que nous déterminons grâce aux coordonnées de $A$ :

$2 \times (-1) + 0 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

Donc $2x + y + 4z + 2 = 0$ est une équation cartésienne de $(P)$.

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} -2x - y - 4z - 2 &= -1 \times (2x + y + 4z + 2) \\ x + \frac{1}{2}y + 2z + 1 &= \frac{1}{2} \times (2x + y + 4z + 2) \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - z - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4} \times (2x + y + 4z + 2) \end{aligned}$$

$-2x - y - 4z - 2 = 0$, $x + \frac{1}{2}y + 2z + 1 = 0$ et $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - z - \frac{1}{2} = 0$ sont aussi des équations cartésiennes de $(P)$.