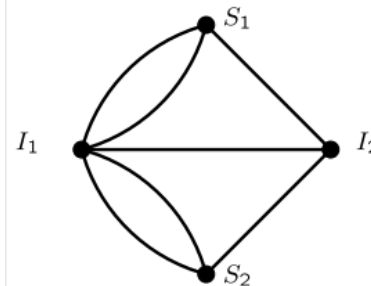
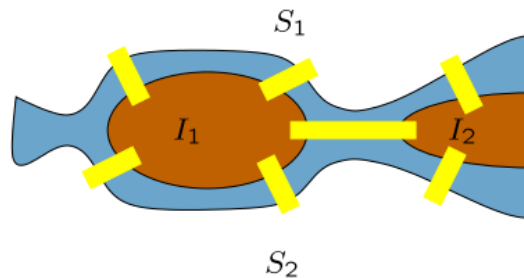


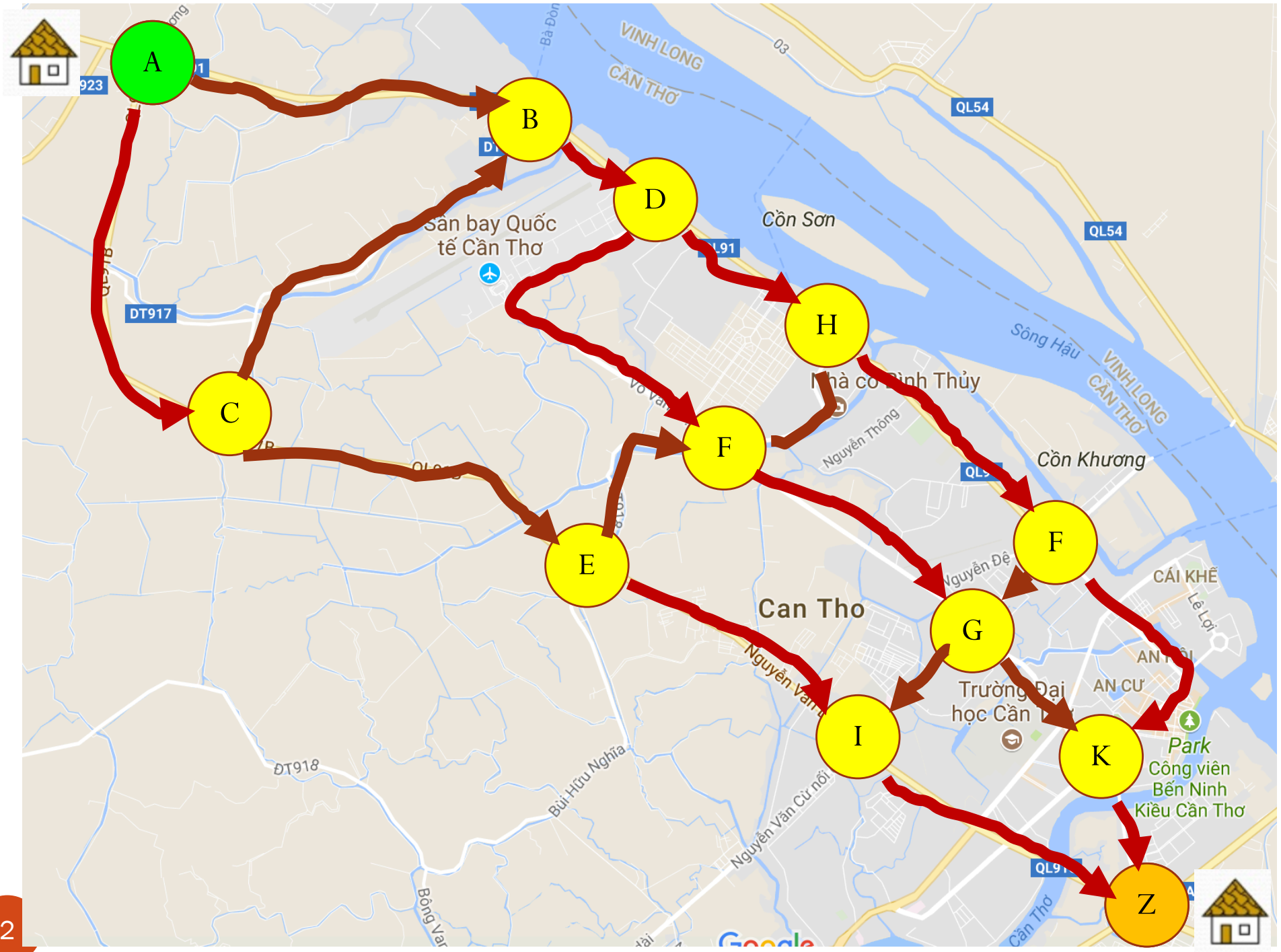
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Luồng cực đại trong mạng

Phạm Nguyên Khang
BM. Khoa học máy tính, CNTT
pnkhang@cit.ctu.edu.vn

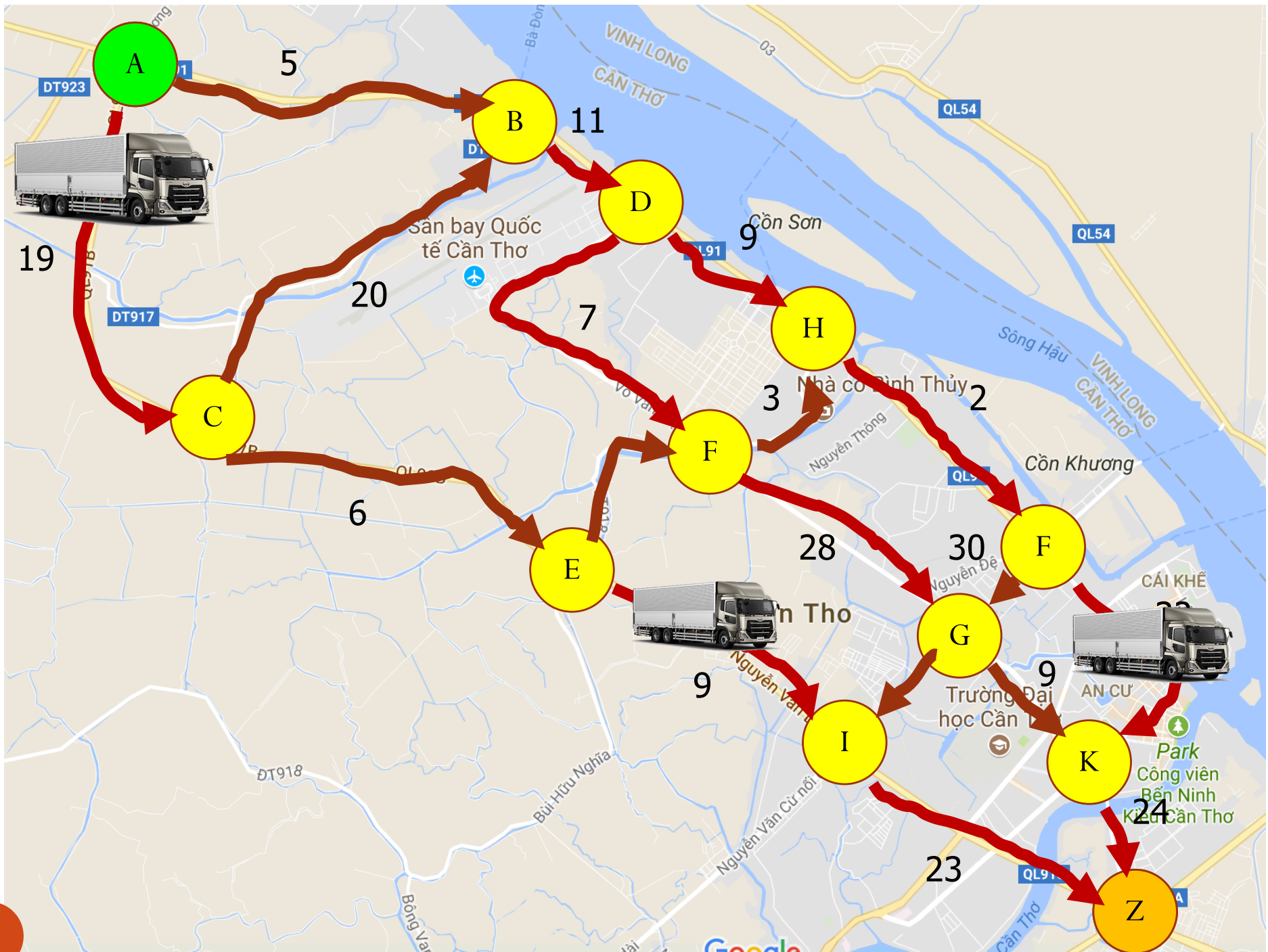


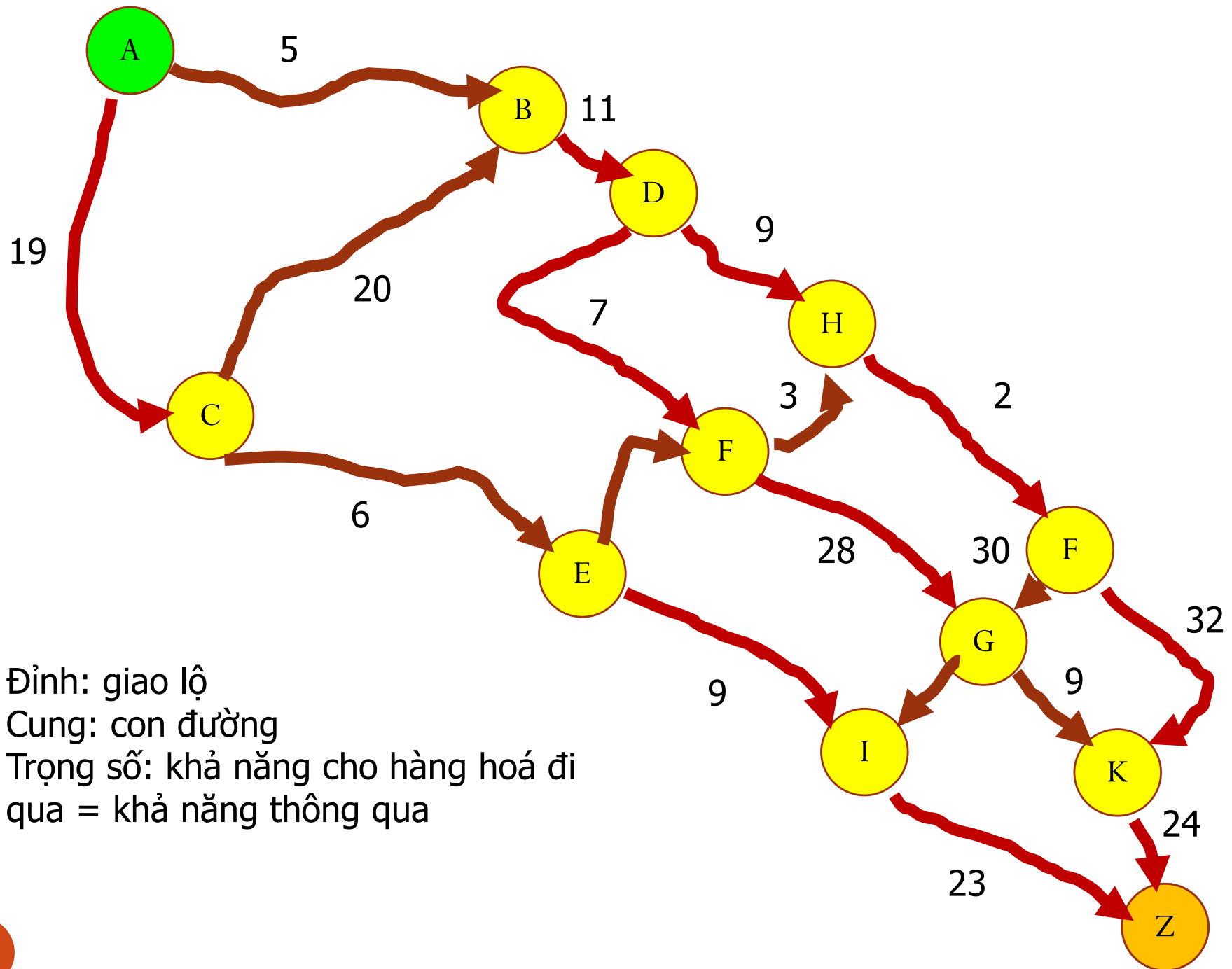
Cần Thơ, 2017











Mạng (các luồng)

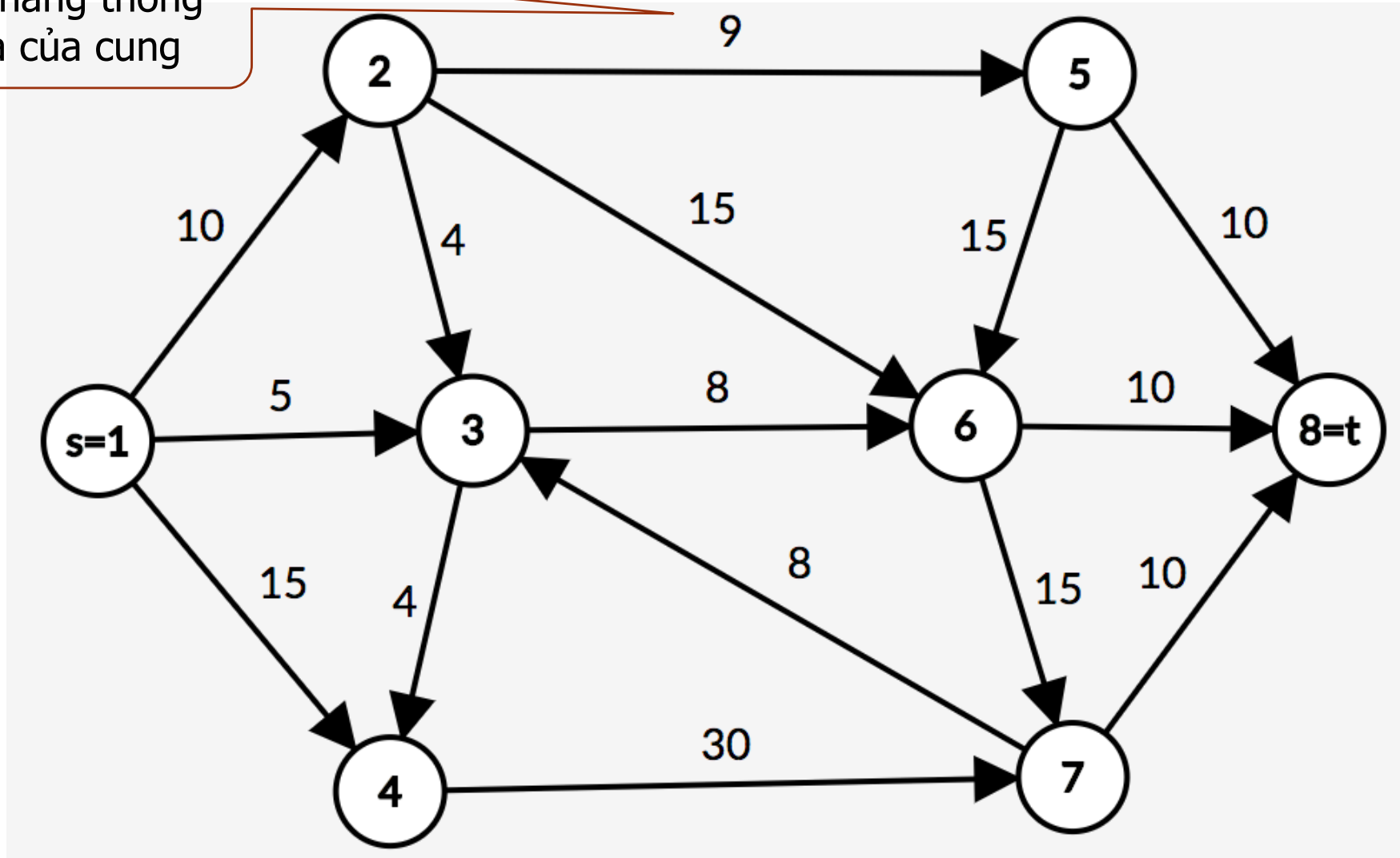
- Network (of flows)/Flow network
 - Mạng là 1 bộ 5: $N = \langle V, E, s, t, c \rangle$ trong đó
 - $\langle V, E \rangle$ là đồ thị có hướng biểu diễn cho mạng
 - V : đỉnh/nút
 - E : cung
 - s : đỉnh phát (source)
 - t : đỉnh thu (sink)
 - $c: (u,v) \rightarrow c(u,v)$ hàm mô tả khả năng thông qua của 1 cung
 - $c(u,v)$: luồng lớn nhất có thể đi qua cung (u, v)- Ví dụ: mạng các luồng giao thông: các luồng giao thông chạy trên mạng

Luồng (trong mạng)

- (Network) Flow: **thứ lưu thông trên mạng**
 - Một luồng đi từ đỉnh phát (s) đến đỉnh thu (t) là 1 hàm $f: (u, v) \rightarrow f(u, v)$
 - thoả mãn các điều kiện:
 - Với mỗi cung: $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
 - Với mỗi đỉnh khác s và t: **tổng luồng vào = tổng luồng ra**
 - **Tổng luồng ra khỏi s = tổng luồng vào t**
 - **Giá trị luồng $|f|$ = tổng luồng ra khỏi s**
- Mẹo: luồng s-t là cách **gán các giá trị luồng cho từng cung** của mạng sao cho **thoả mãn điều kiện luồng**.

Luồng (trong mạng)

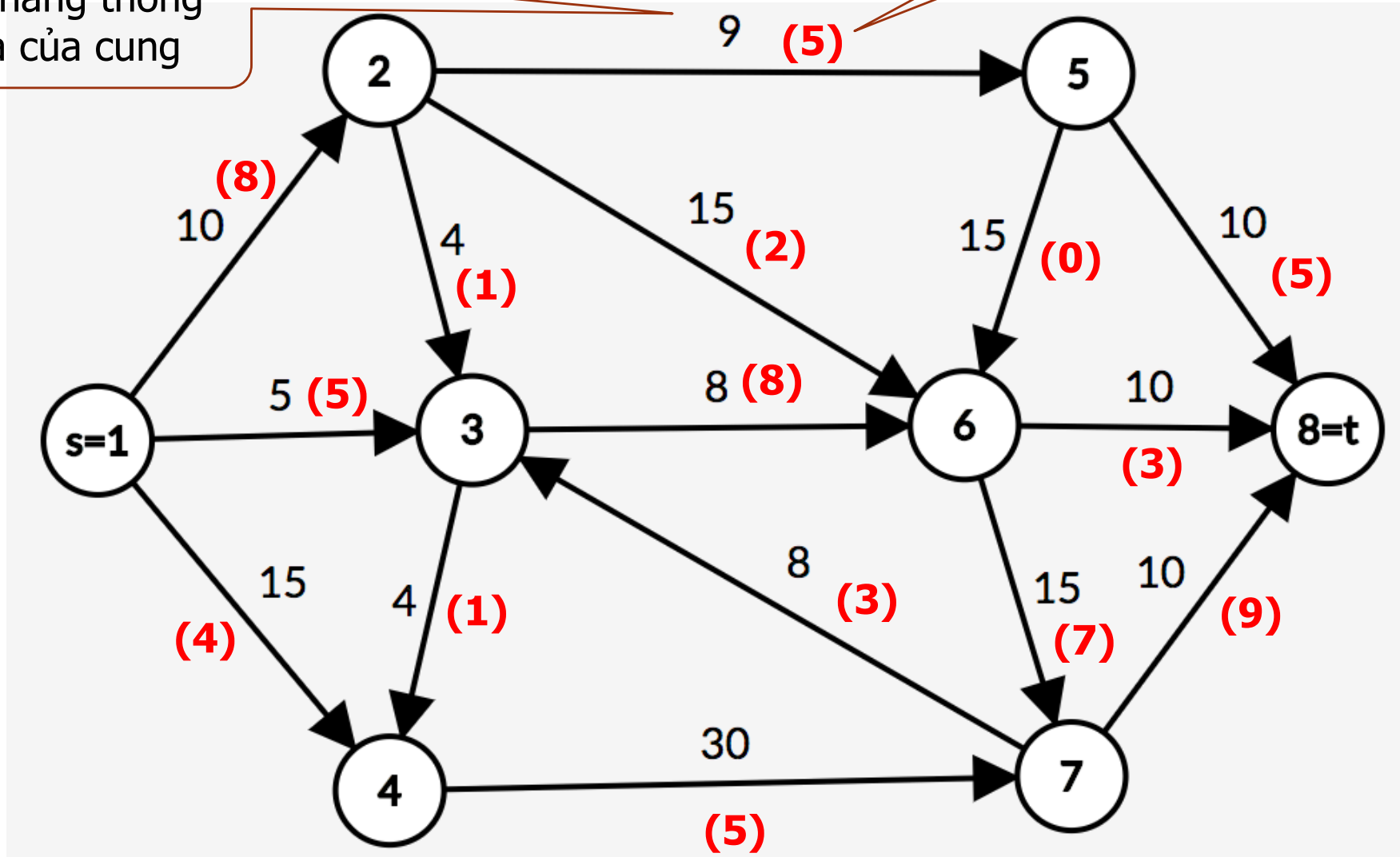
Khả năng thông
qua của cung



Luồng (trong mạng)

Khả năng thông qua của cung

Luồng (qua cung)



Luồng (trong mạng)

- **Bài tập** kiểm tra điều kiện luồng:
 - Tính tổng luồng vào và luồng ra của từng đỉnh
 - Đỉnh 2: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 3: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 4: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 5: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 6: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 7: Tổng luồng vào: ??? Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 1: Tổng luồng ra: ???
 - Đỉnh 8: Tổng luồng vào: ???
- Luồng hợp lệ hay không, tại sao ?
- Giá trị luồng: tổng luồng ra khỏi $s = ???$

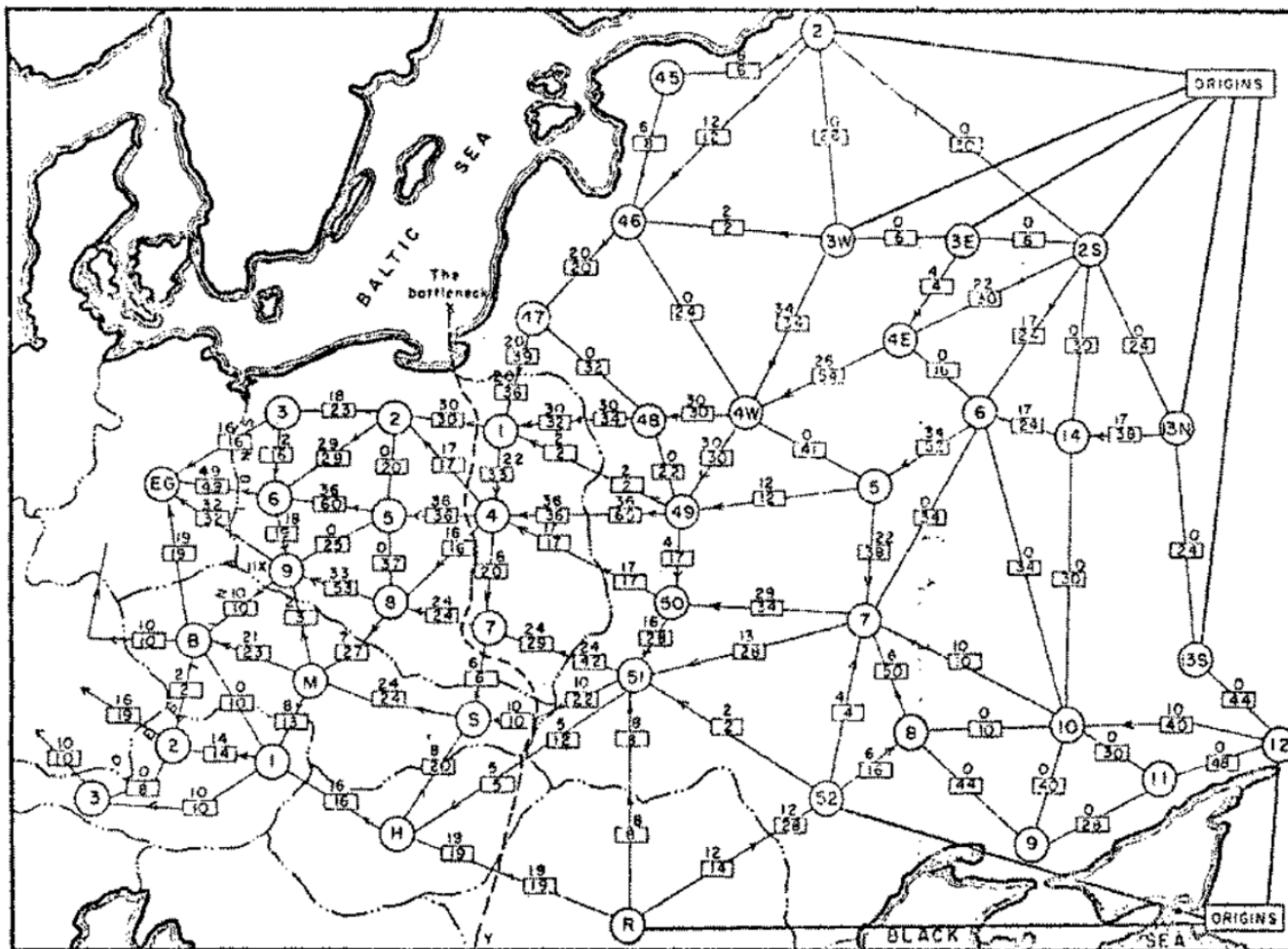
Luồng (trong mạng)

- **Kết quả** kiểm tra điều kiện luồng:
 - Tính tổng luồng vào và luồng ra của từng đỉnh
 - Đỉnh 2: Tổng luồng vào: 8 Tổng luồng ra: 8
 - Đỉnh 3: Tổng luồng vào: 9 Tổng luồng ra: 9
 - Đỉnh 4: Tổng luồng vào: 5 Tổng luồng ra: 5
 - Đỉnh 5: Tổng luồng vào: 5 Tổng luồng ra: 5
 - Đỉnh 6: Tổng luồng vào: 10 Tổng luồng ra: 10
 - Đỉnh 7: Tổng luồng vào: 12 Tổng luồng ra: 12
- Đỉnh $s=1$: Tổng luồng ra: 17
- Đỉnh $t=8$: Tổng luồng vào: 17
- Luồng hợp lệ
- Giá trị luồng: tổng luồng ra khỏi $s = 8+5+4=17$

Luồng trong mạng (ứng dụng)

Mạng	Đỉnh/nút	Cung	Luồng
Truyền thông	Tổng đài điện thoại, máy tính, vệ tinh	Cáp, cáp quang, wifi	Âm thanh, video, gói tin
Mạch điện	Cổng, thanh ghi, vi xử lý	Dây dẫn	Dòng điện
Thuỷ lực	Trạm bơm, bể chứa, hồ	Ống dẫn	Dầu
Tài chính	Chứng khoán, tiền tệ	Giao dịch	Tiền
Giao thông	Sân bay, nhà ga, giao lộ	Con đường	Xe, hành khách
Hoá học	Nguyên tử	Liên kết hoá học	Năng lượng

Mạng đường sắt vận chuyển hàng hoá từ Liên Xô sang Đông Âu



Luồng cực đại

- Cho mạng $N = \langle V, E, s, t, c \rangle$, tìm luồng f (từ s đến t) có **giá trị luồng $|f|$ lớn nhất**
- Bài tập:
 - Hãy tìm 1 luồng khác có giá trị lớn hơn luồng vừa rồi (17)

Lát cắt

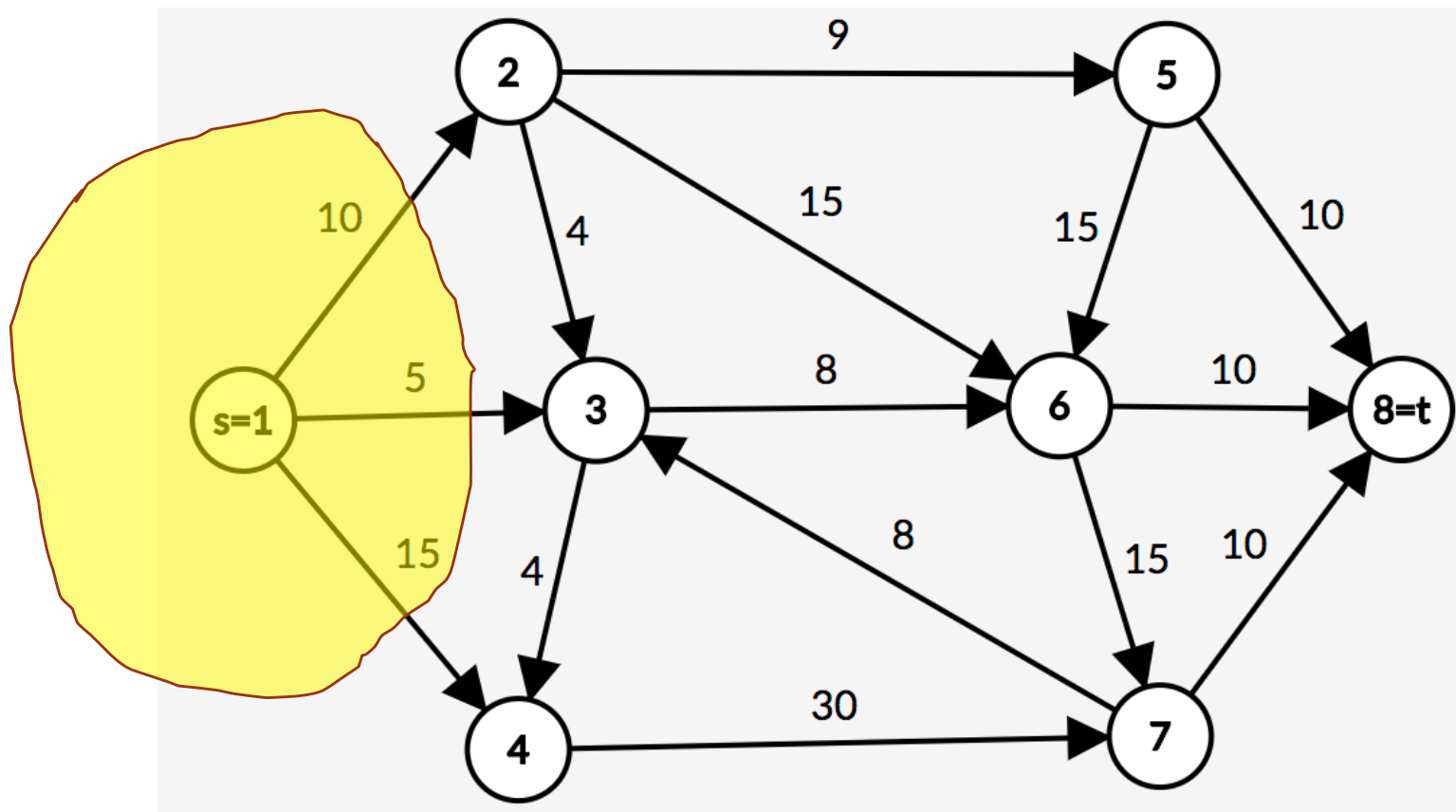
- Một lát cắt cắt tách s và t , (gọi là: **s-t cut**)
 - Là một cách **chia (phân hoạch) tập đỉnh V thành hai phần rời nhau (S, T)** sao cho **s nằm trong S và t nằm trong T**
- Các cung của một lát cắt (tách s và t)
 - Tập các cung xuất phát từ S đi đến T
 $\{(u, v) \mid u \in S \text{ và } v \in T\}$

- Khả năng thông qua của 1 lát cắt (tách s và t)

$$c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v)$$

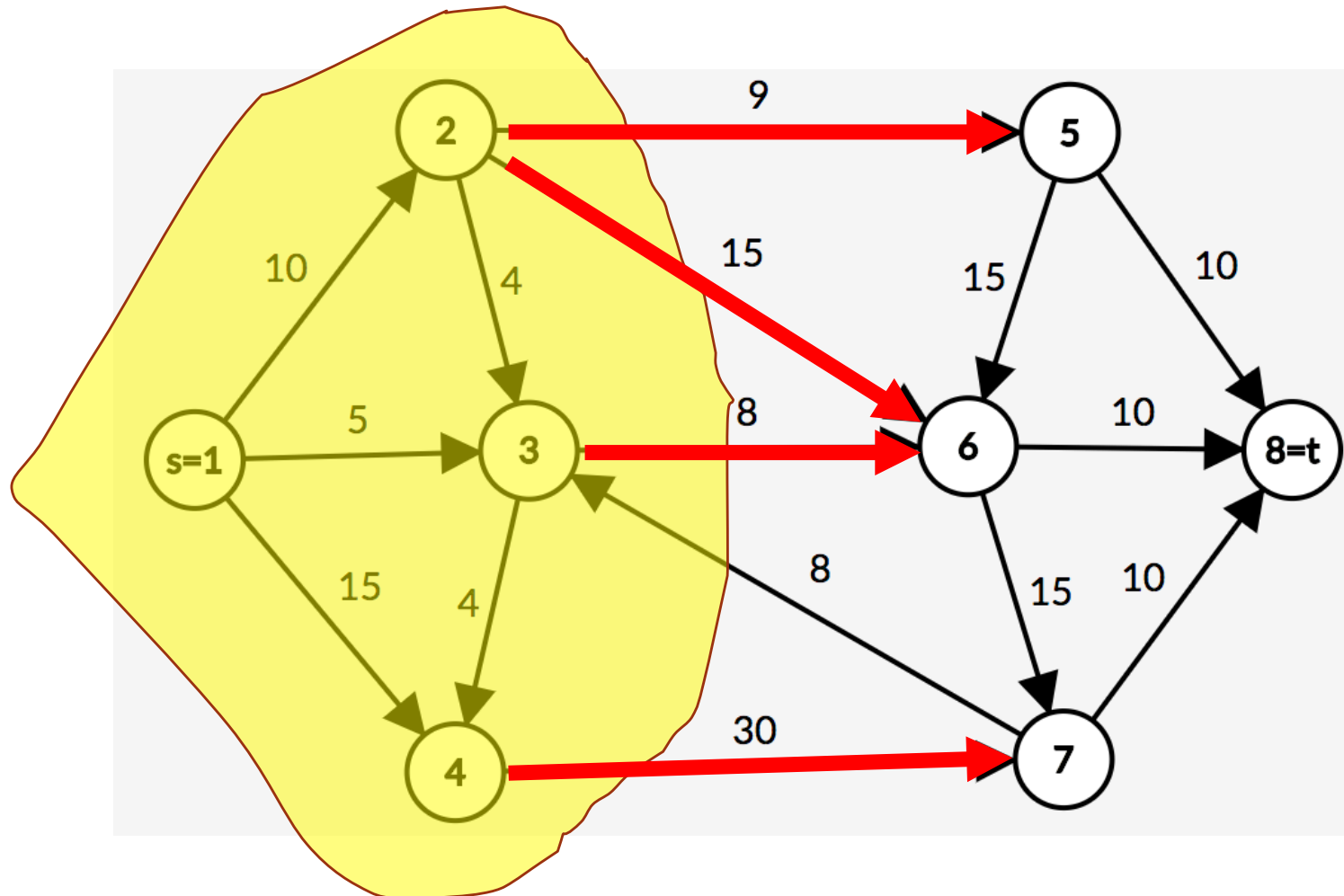
- Tổng khả năng thông qua của các cung của lát cắt

Lát cắt



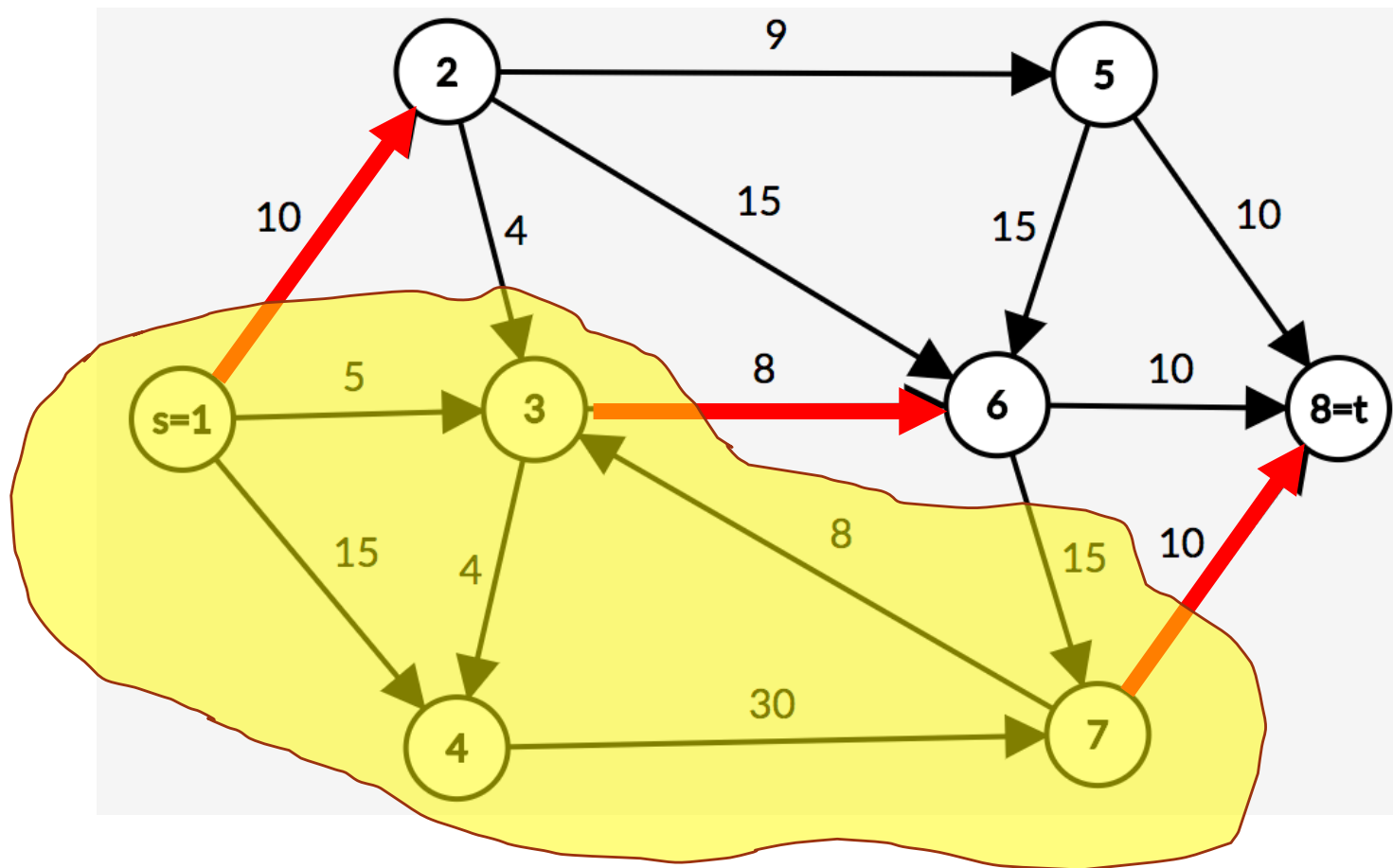
Khả năng thông qua của lát cắt = $10+5+15 = 30$

Lát cắt



Khả năng thông qua của lát cắt = $9+15+8+30 = 62$

Lát cắt



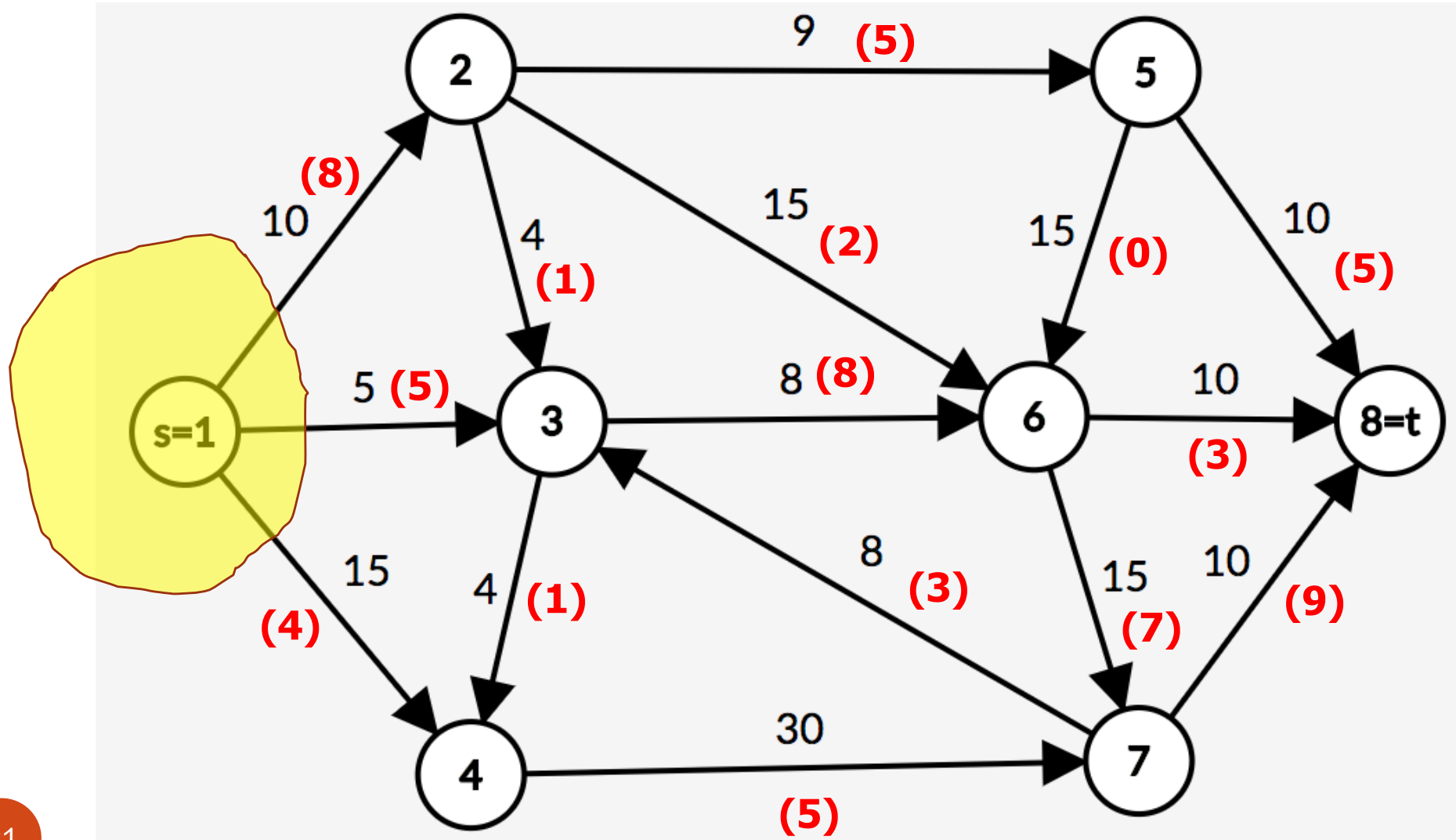
Khả năng thông qua của lát cắt = $10+8+10 = 28$

Luồng và lát cắt

- **Bổ đề 1**
- Nếu gọi:
 - f là luồng đi qua mạng N
 - (S, T) là 1 lát cắt tách s và t
- thì
 - Luồng đi qua lát cắt = luồng ra khỏi s
 - = luồng đi vào t

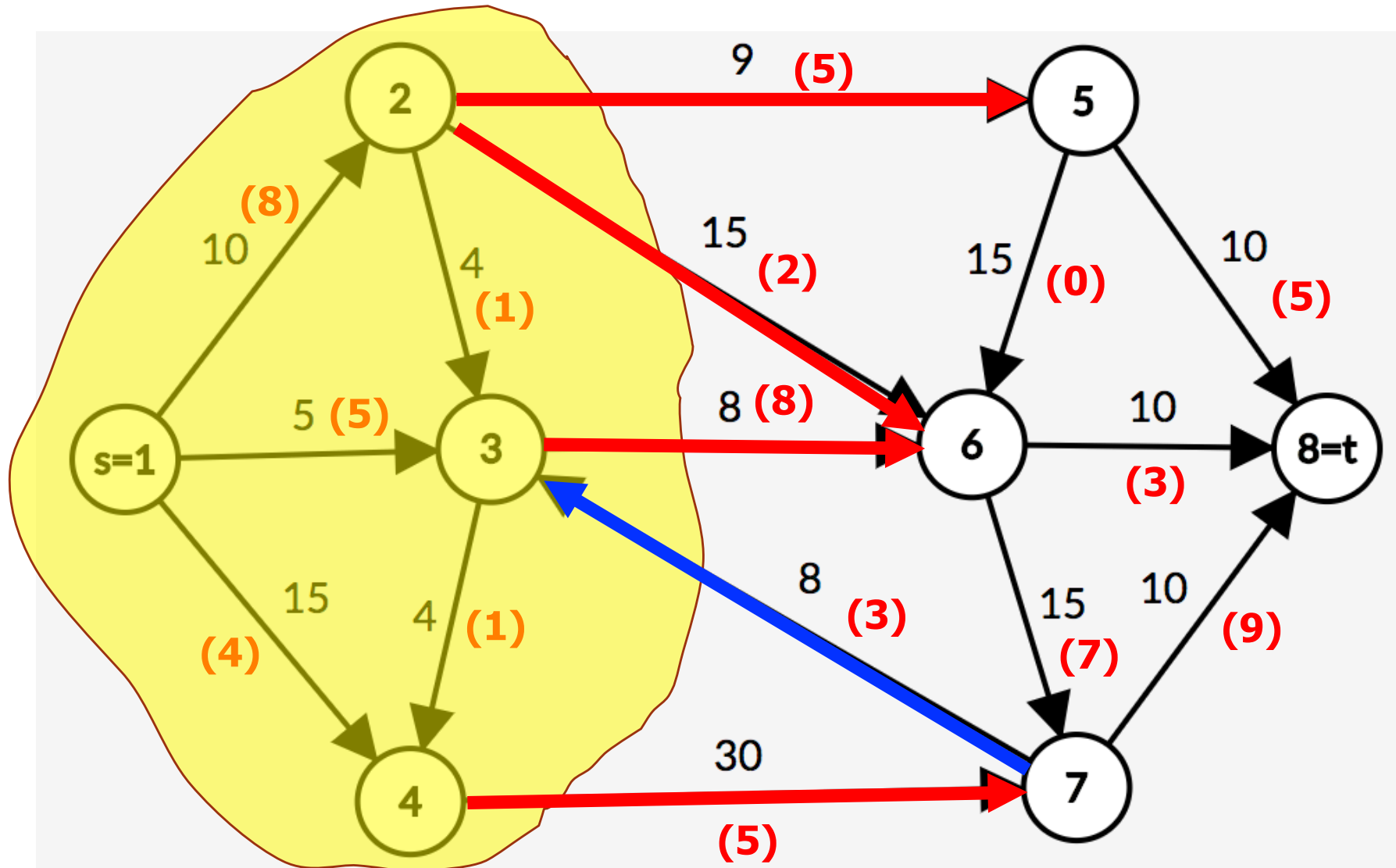
$$\sum_{e \text{ out of } S} f(e) - \sum_{e \text{ in to } S} f(e) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e) = |f|$$

Luồng và lát cắt



Luồng và lát cắt

$$20 - 3 = 17$$



Luồng và lát cắt

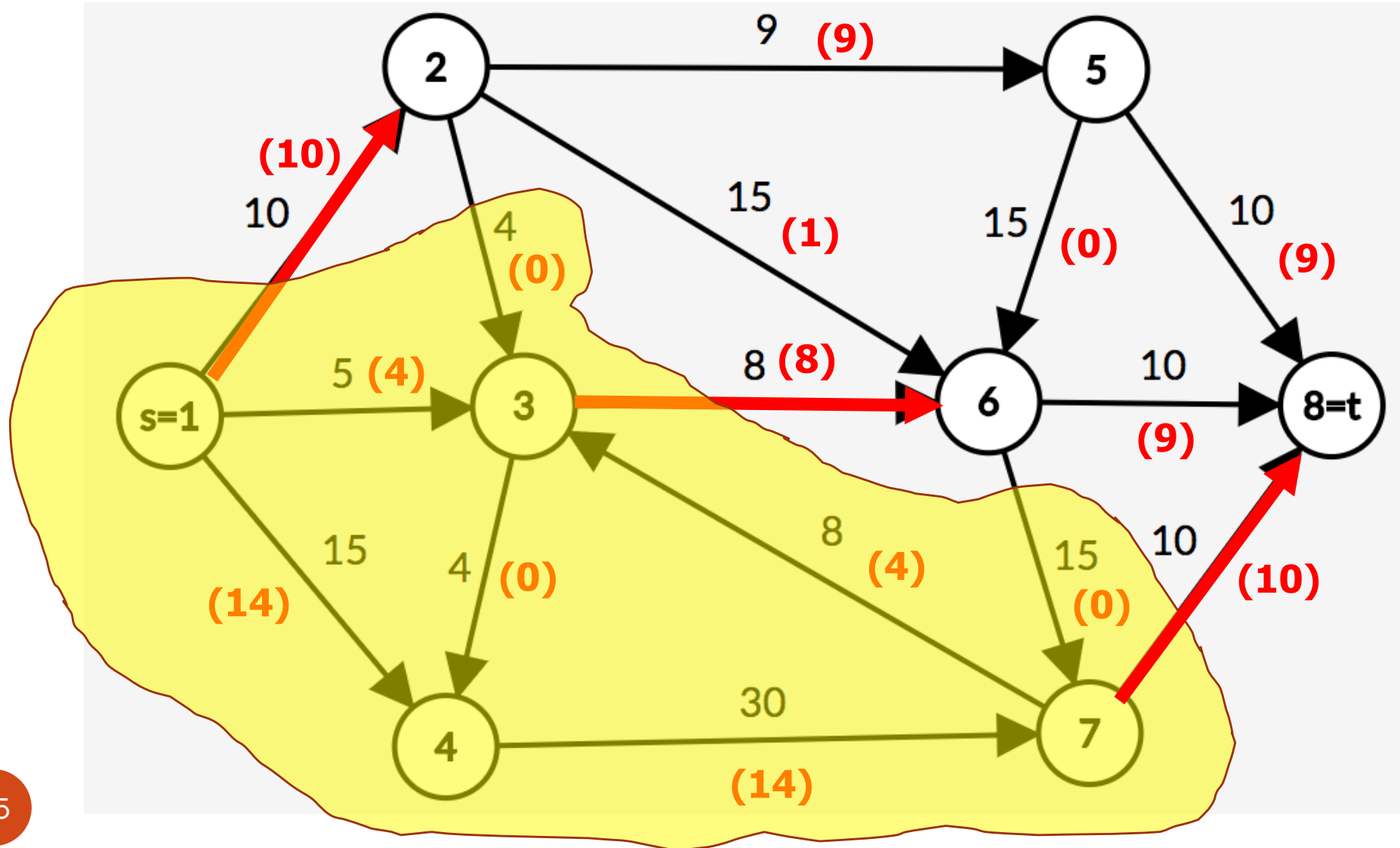
- **Bổ đề 2**
- Nếu gọi:
 - f là luồng đi qua mạng N
 - (S, T) là 1 lát cắt tách s và t
- thì
 - Giá trị luồng không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt

$$|f| \leq c(S, T)$$

Luồng và lát cắt

- **Hệ quả**
- Gọi:
 - f là luồng đi qua mạng N
 - (S, T) là 1 lát cắt tách s và t
- Nếu $|f| = c(S, T)$ thì f là **luồng lớn nhất (luồng cực đại)** và (S, T) là **lát cắt hẹp nhất**.

Luồng và lát cắt



Luồng và lát cắt

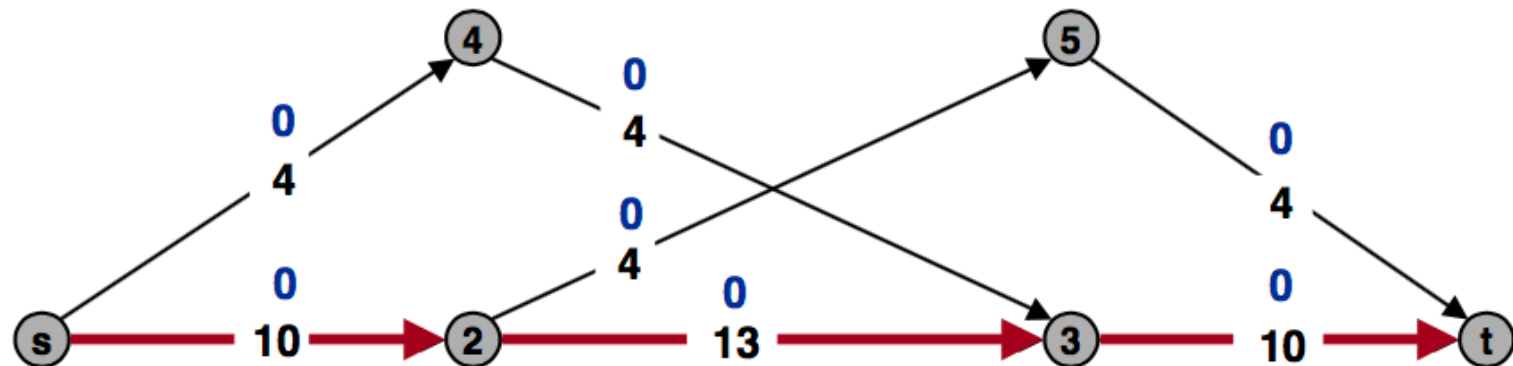
- Định lý luồng cực đại lát cắt hẹp nhất (Ford-Fulkerson, 1956)
 - Giá trị luồng cực đại = khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

Giải thuật Ford-Fulkerson

- Ý tưởng:
 - **Tìm lát cắt hẹp nhất** bằng cách **tăng luồng đi qua mạng**.
 - Tăng luồng đi qua mạng cho đến khi bị ngăn => lát cắt hẹp nhất => giá trị luồng cực đại.
- Tìm **đường tăng luồng** (augmenting path):
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.

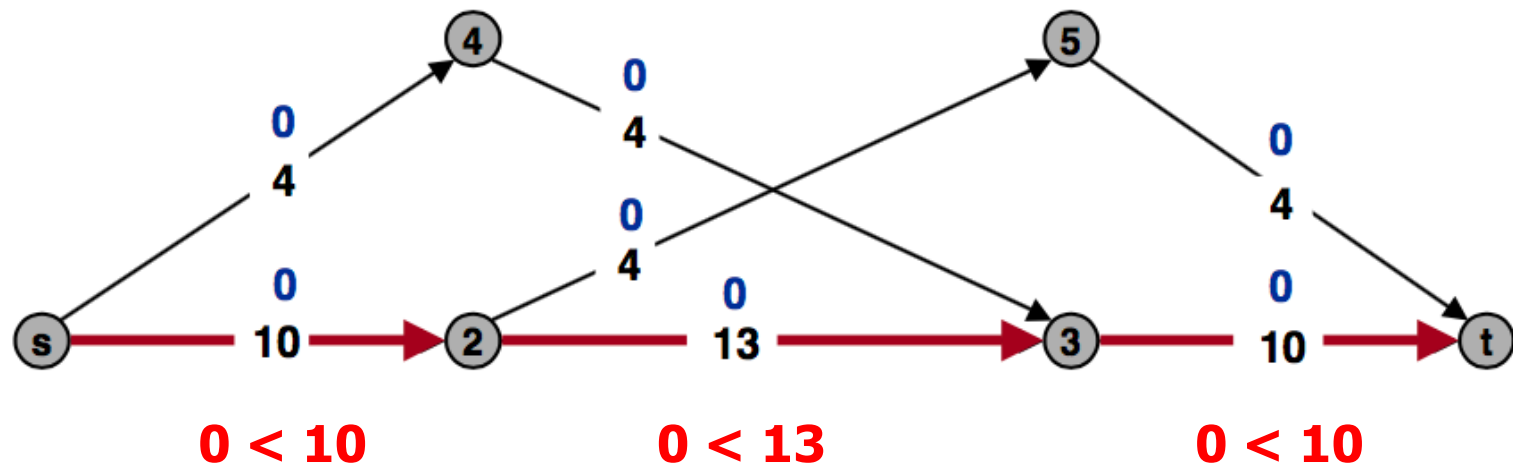
Giải thuật Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



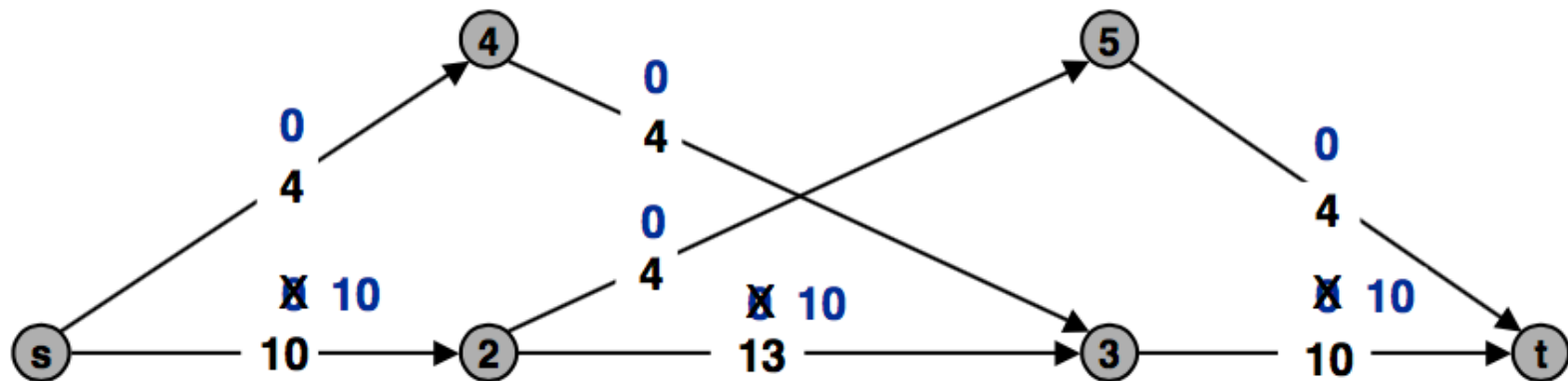
Giải thuật Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



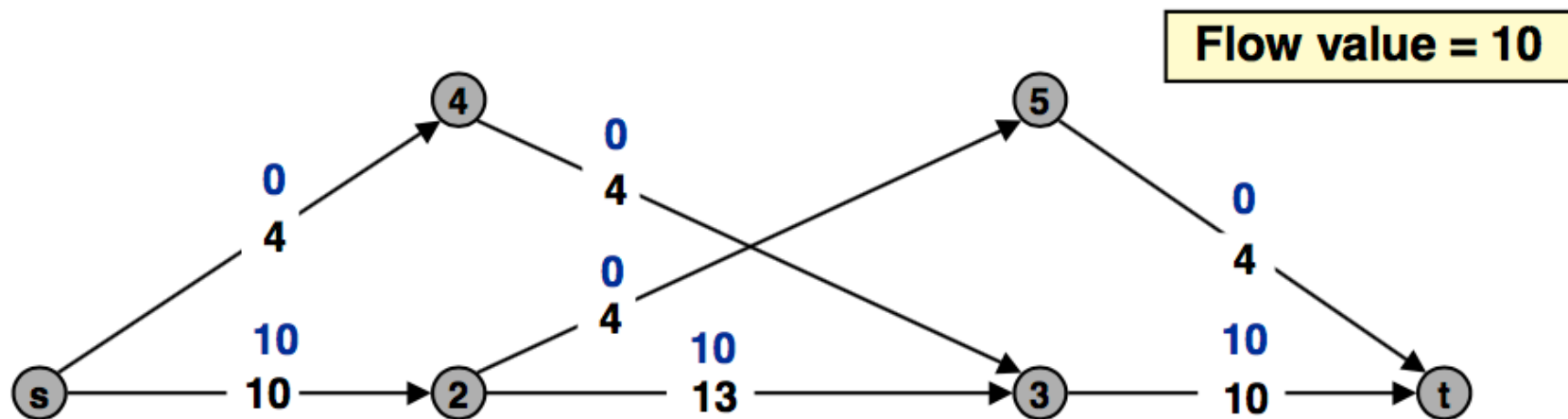
Giải thuật Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



Giải thuật Ford-Fulkerson

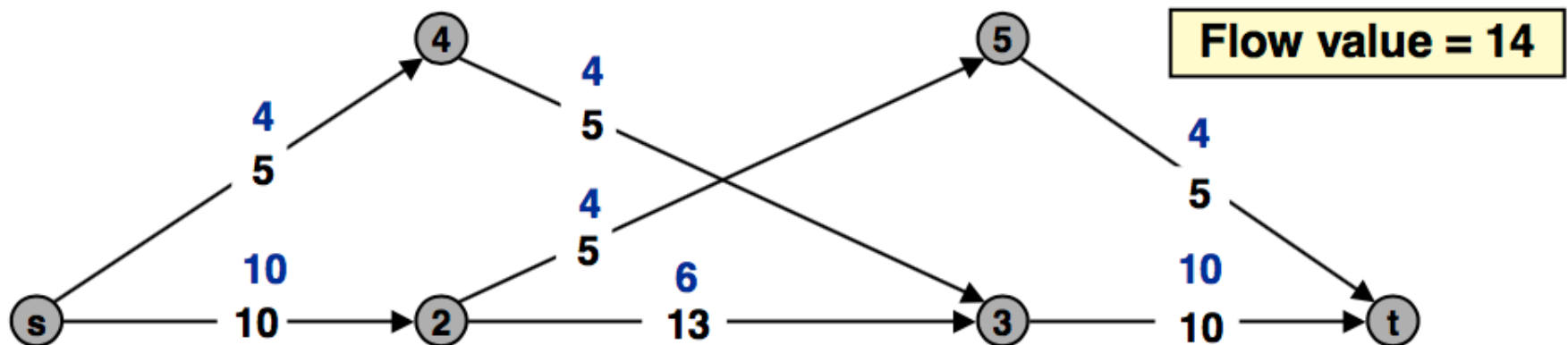
- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



Không tìm được đường đi từ s đến t để tăng luồng !!!

Giải thuật Ford-Fulkerson

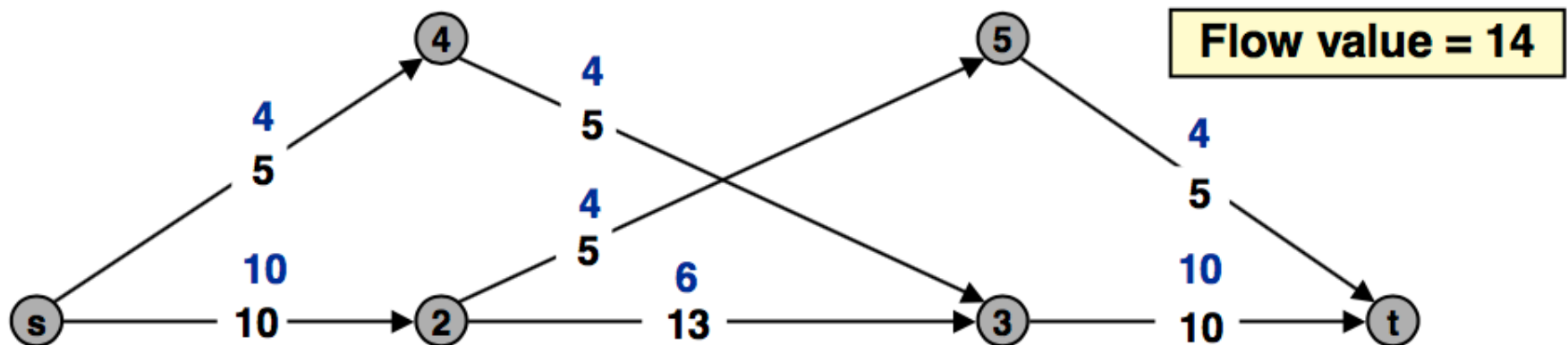
- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



QS1: thất bại !!!

Giải thuật Ford-Fulkerson

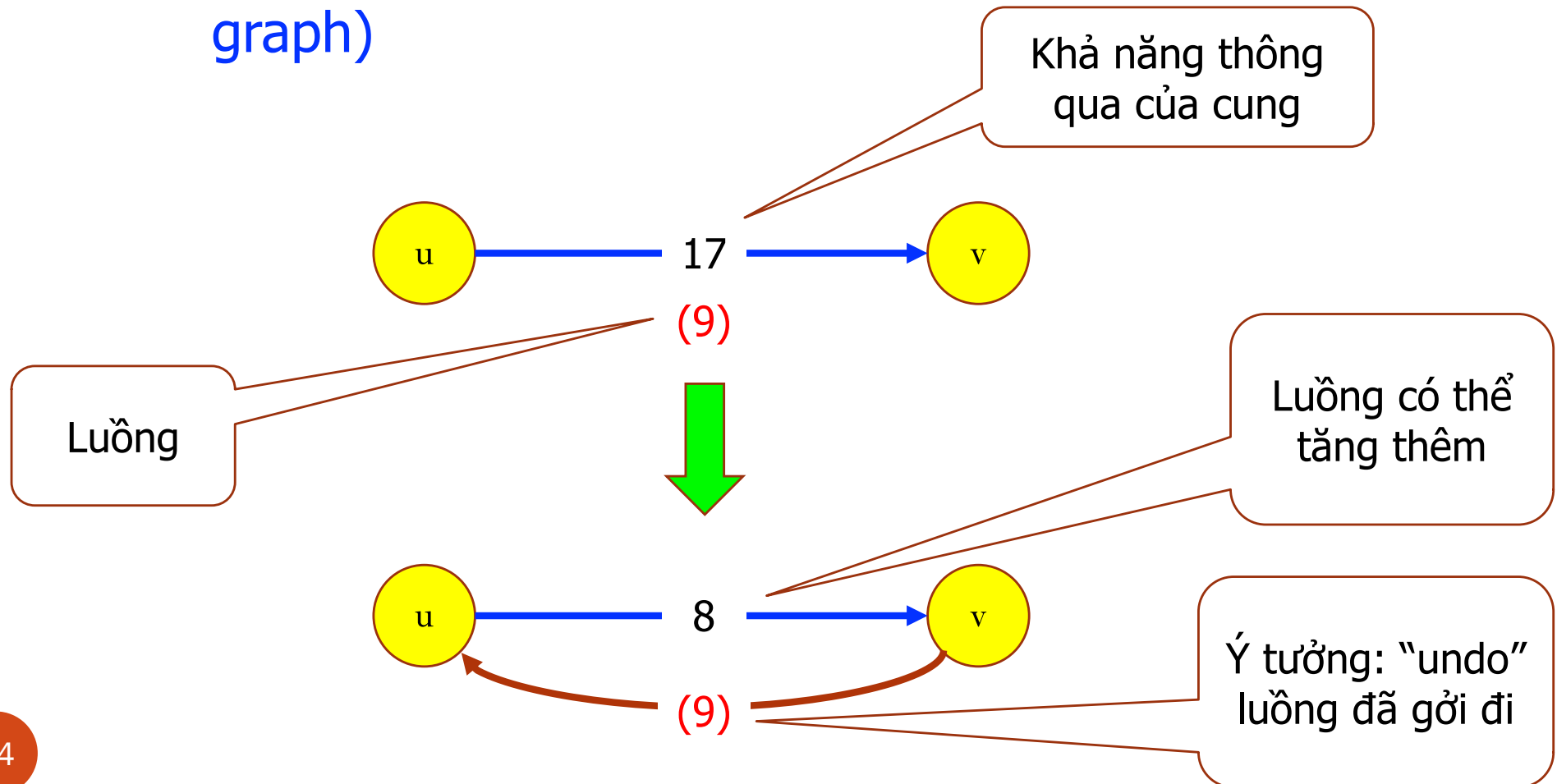
- Tìm đường tăng luồng:
 - Tìm đường đi từ s đến t sao cho có thể tăng thêm luồng trên đường đi đó.
 - **QS1: Tìm đường đi từ s đến t sao cho $c(e) > f(e)$ với tất cả các cung trên đường đi**



Cần tìm cách khác để tăng luồng

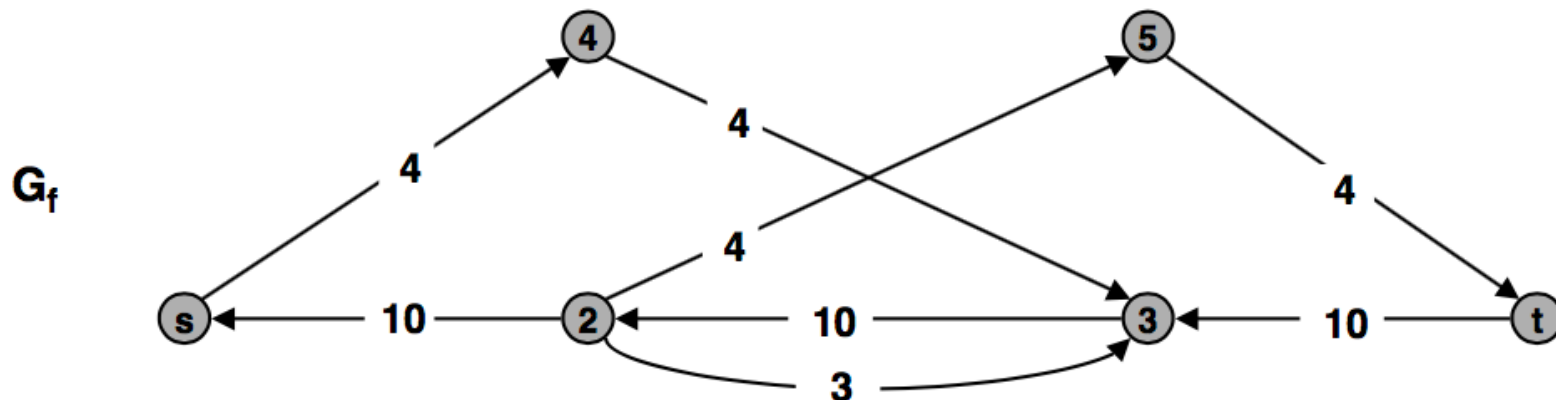
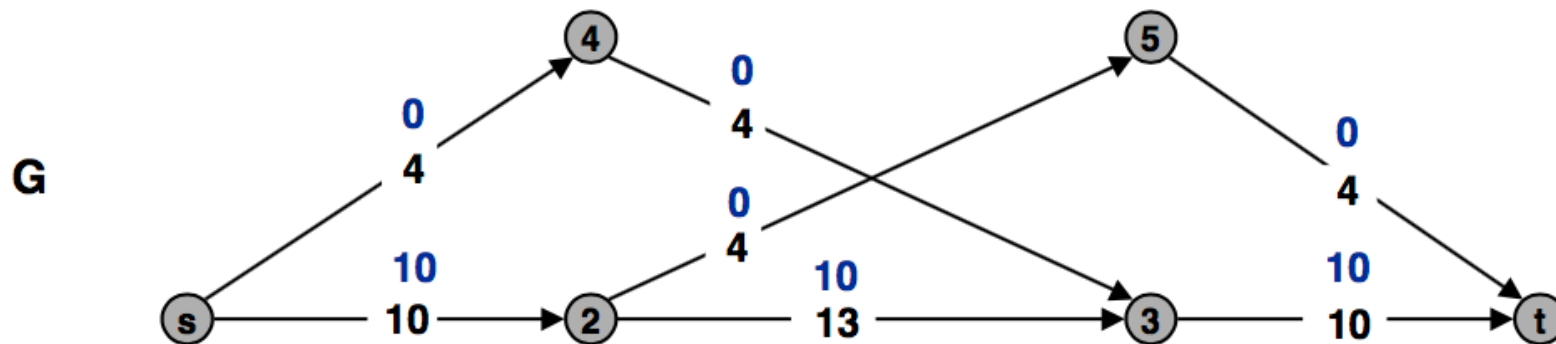
Giải thuật Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng:
 - Xây dựng đồ thị tăng luồng/thặng dư (residual graph)



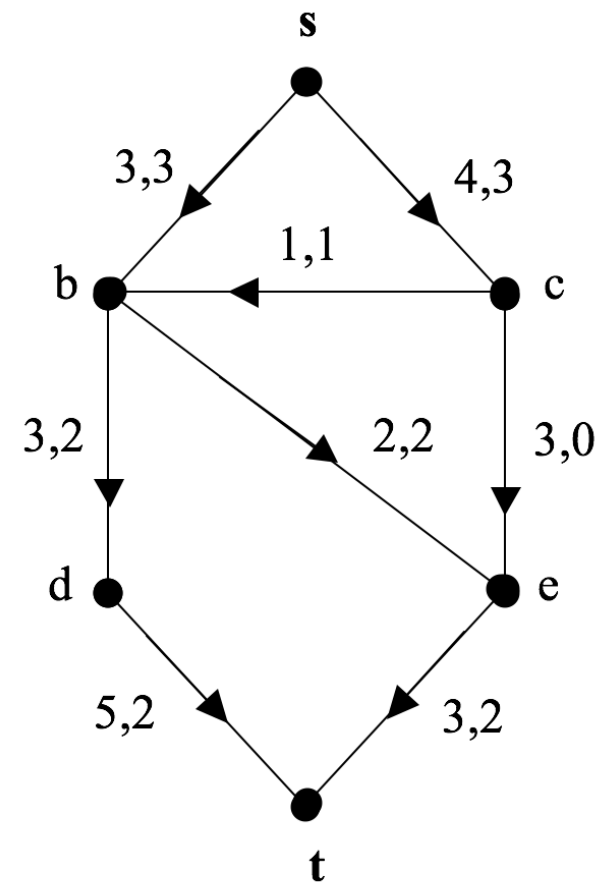
Giải thuật Ford-Fulkerson

- Tìm đường tăng luồng:
 - Xây dựng đồ thị tăng luồng/thặng dư (residual graph)



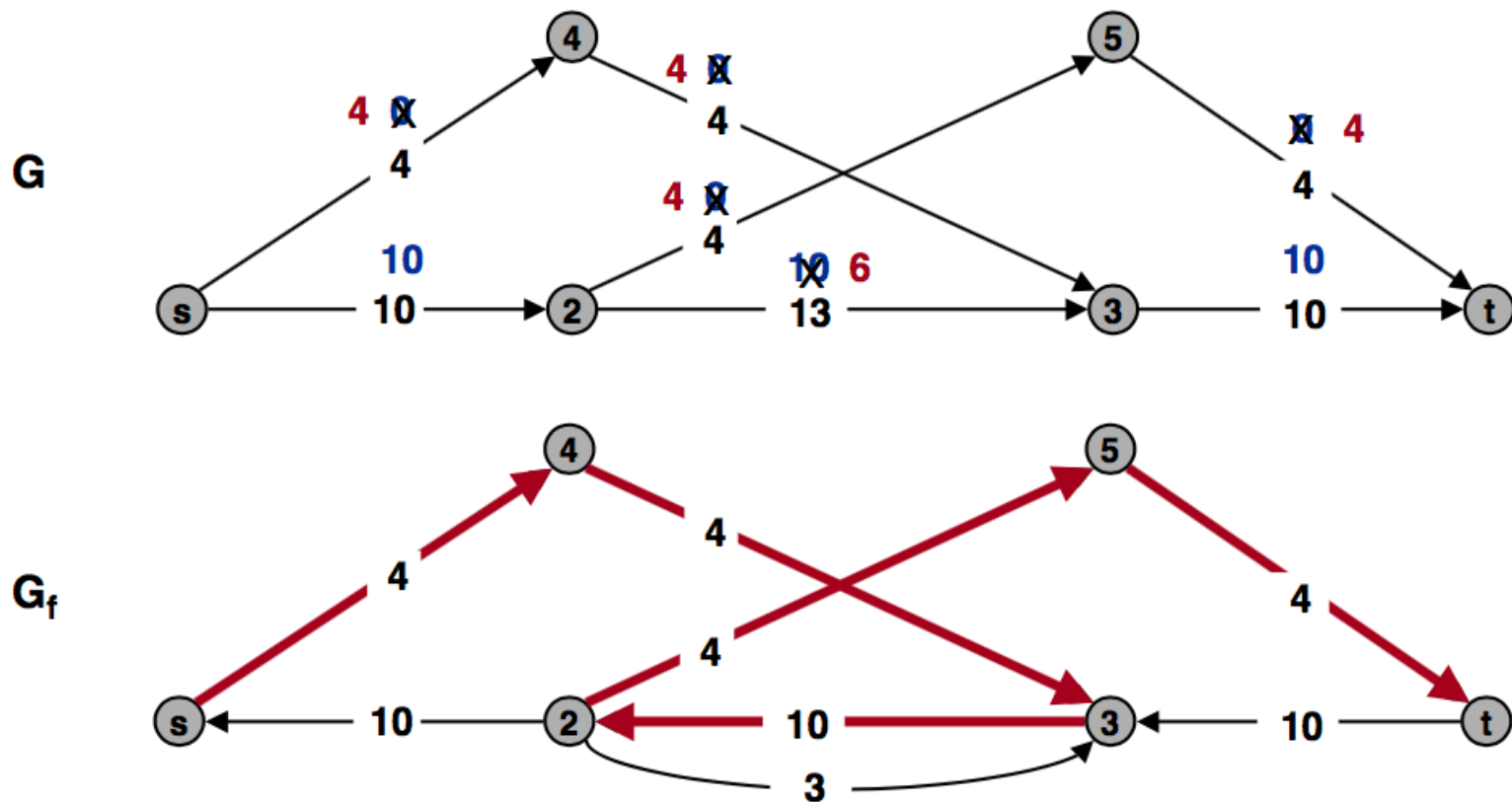
Giải thuật Ford-Fulkerson

- **Bài tập**
- Cho mạng và luồng như hình vẽ, hãy tìm đồ thị tăng luồng
 - Số đứng trước là khả năng thông qua)
 - Số đứng sau là luồng



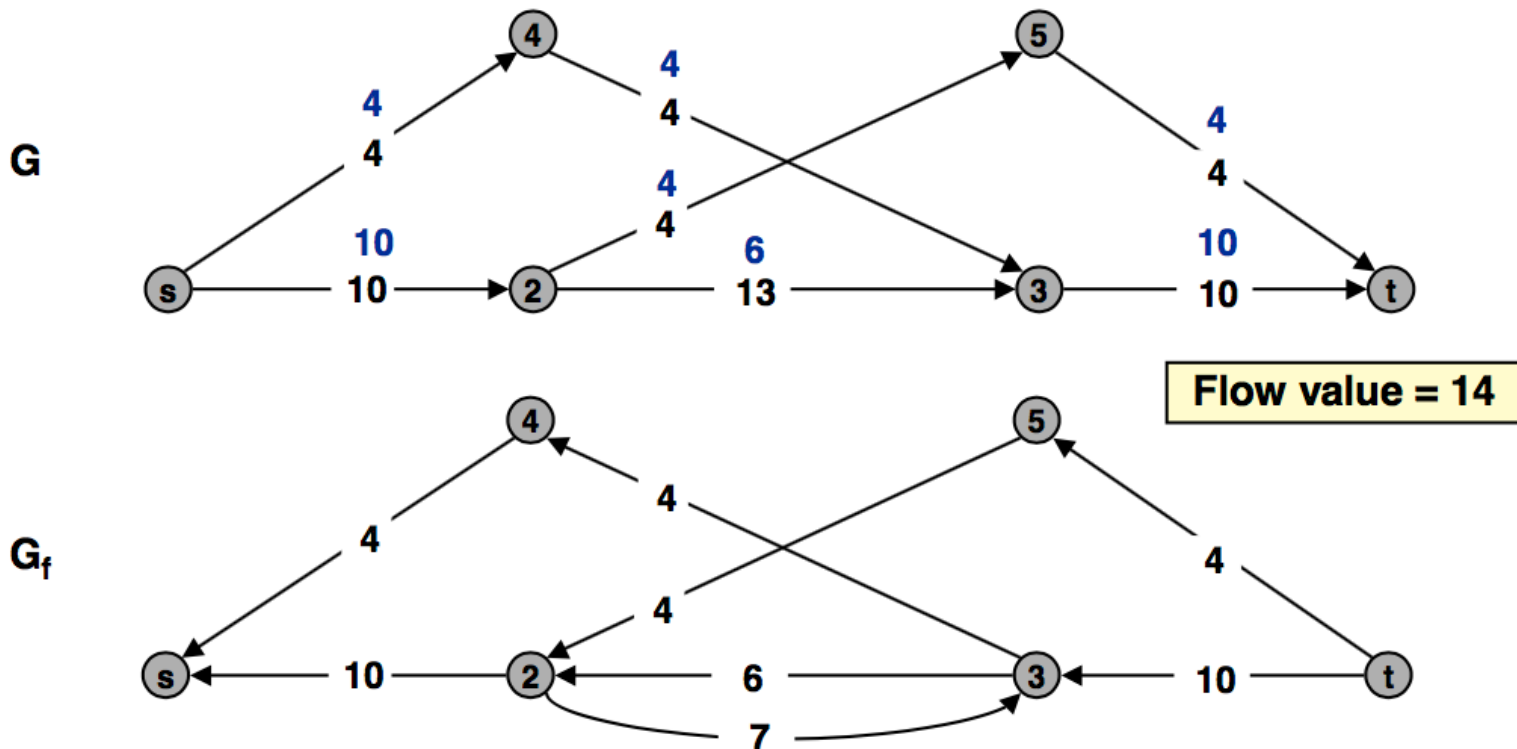
Đường tăng luồng

- Đường tăng luồng = đường đi từ s đến t trên **đồ thị tăng luồng**



Đường tăng luồng

- Đường tăng luồng = đường đi từ s đến t trên **đồ thị tăng luồng**
- Luồng cực đại \Leftrightarrow không còn đường tăng luồng



Giải thuật Ford-Fulkerson

- **Đánh dấu** các đỉnh để tìm đường tăng luồng trên đồ thị tăng luồng
 - Không cần xây dựng tường minh đồ thị tăng luồng
 - Sử dụng **duyệt theo chiều sâu** để tìm đường đi từ s đến t.
- Mỗi đỉnh u được đánh dấu/gán nhãn với các thông tin sau:
 - **d[u]**: hướng của cung (+: cung thuận, -: cung nghịch "undo" luồng)
 - **p[u]**: đỉnh trước đỉnh u
 - **σ[u]**: lượng tăng luồng lớn nhất có thể tăng

Giải thuật Ford-Fulkerson

- **Tìm đường tăng luồng từ s đến t**
 - Đánh dấu s: (+, s, oo)
 - Đánh dấu các đỉnh kề của s
 - Đánh dấu các đỉnh kề của đỉnh kề của s
 - ...
 - Cho đến khi t được đánh dấu => tìm được đường đi từ s đến t.
- Có thể cài đặt bằng đệ quy hoặc vòng lặp sử dụng stack

Giải thuật Ford-Fulkerson

- **Tìm đường tăng luồng từ s đến t dùng Stack**

1. Đánh dấu s: (+, s, ∞)

2. Push s vào Stack

3. while (stack không rỗng) {

- a. $u = \text{top}(\text{Stack}); \text{pop}(\text{Stack});$

- b. for (các đỉnh kề v của u và có $f(u, v) < c(u, v)$)

Đánh dấu v: (+, u, $\min\{\sigma[u], c(u, v) - f(u, v)\}$)

Push v vào Stack

- c. for (các đỉnh x có cung đi đến u có $f(x, u) > 0$)

Đánh dấu x: (-, u, $\min\{\sigma[u], f(u, v)\}$)

push x vào Stack

- d. Nếu t được đánh dấu => thoát vòng lặp while

}

Giải thuật Ford-Fulkerson

- **Tăng luồng theo đường tăng luồng**

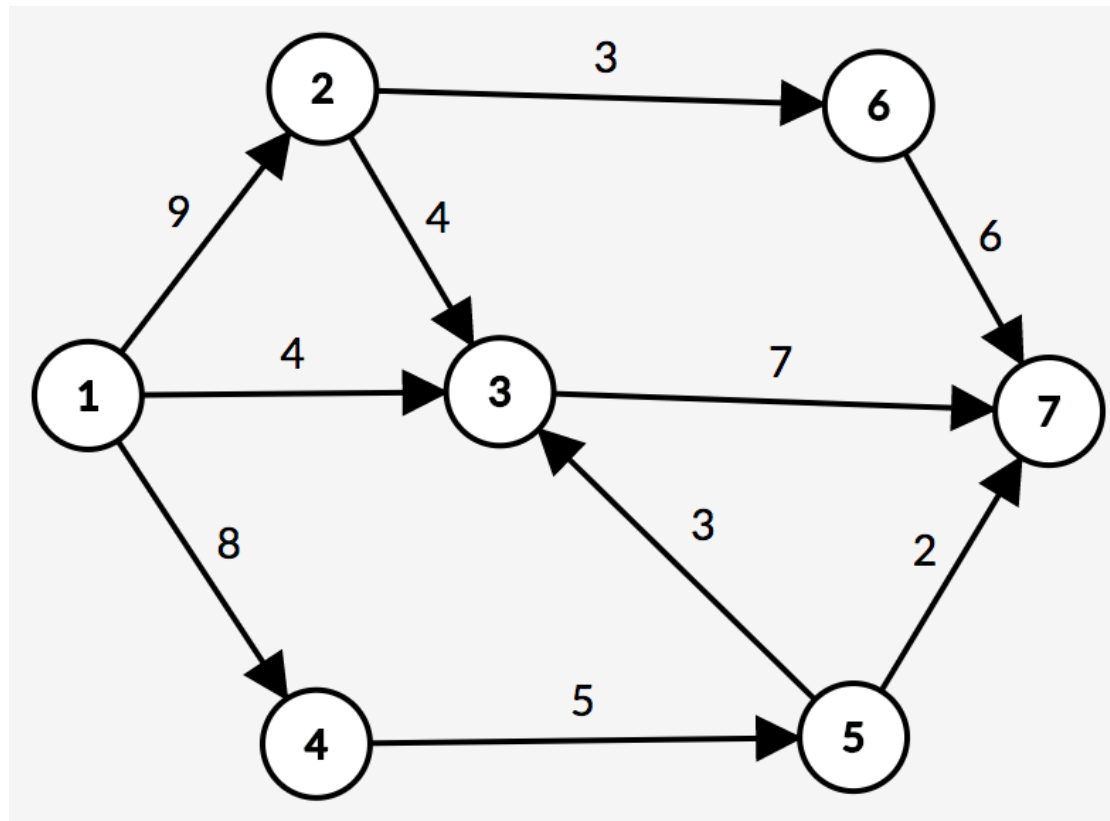
```
x = t;  
sigma =  $\sigma[t]$   
while (x != s) {  
    if (d[x] == '+') //Cung thuận  
        f(p[x], x) += sigma; //TĂNG LUỒNG  
    else //Cung nghịch  
        f(x, p[x]) -= sigma; //GIẢM LUỒNG  
    x = p[x];  
}
```

Giải thuật Ford-Fulkerson

- Khởi tạo $f(u, v) = 0$ với mọi cung (u, v)
- **while** (1) {
 - **Tìm đường tăng luồng**
 - Nếu không tìm thấy => thoát vòng lặp
 - **Tăng luồng theo đường tăng luồng**}
- Lát cắt hẹp nhất = (S, T)
 - S : các đỉnh đã có nhãn
 - T là các đỉnh chưa có nhãn

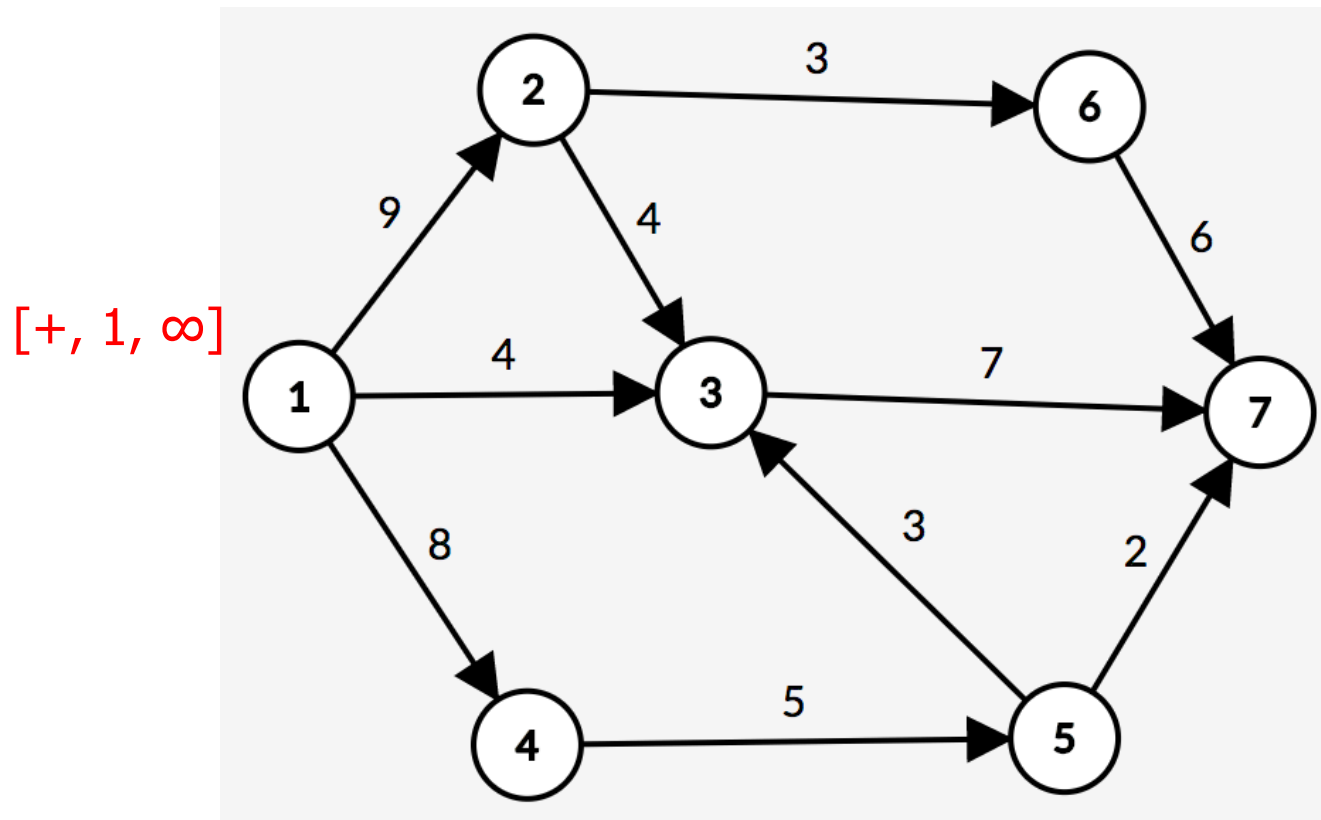
Ví dụ

- Tìm luồng cực đại và lát cắt hẹp nhất



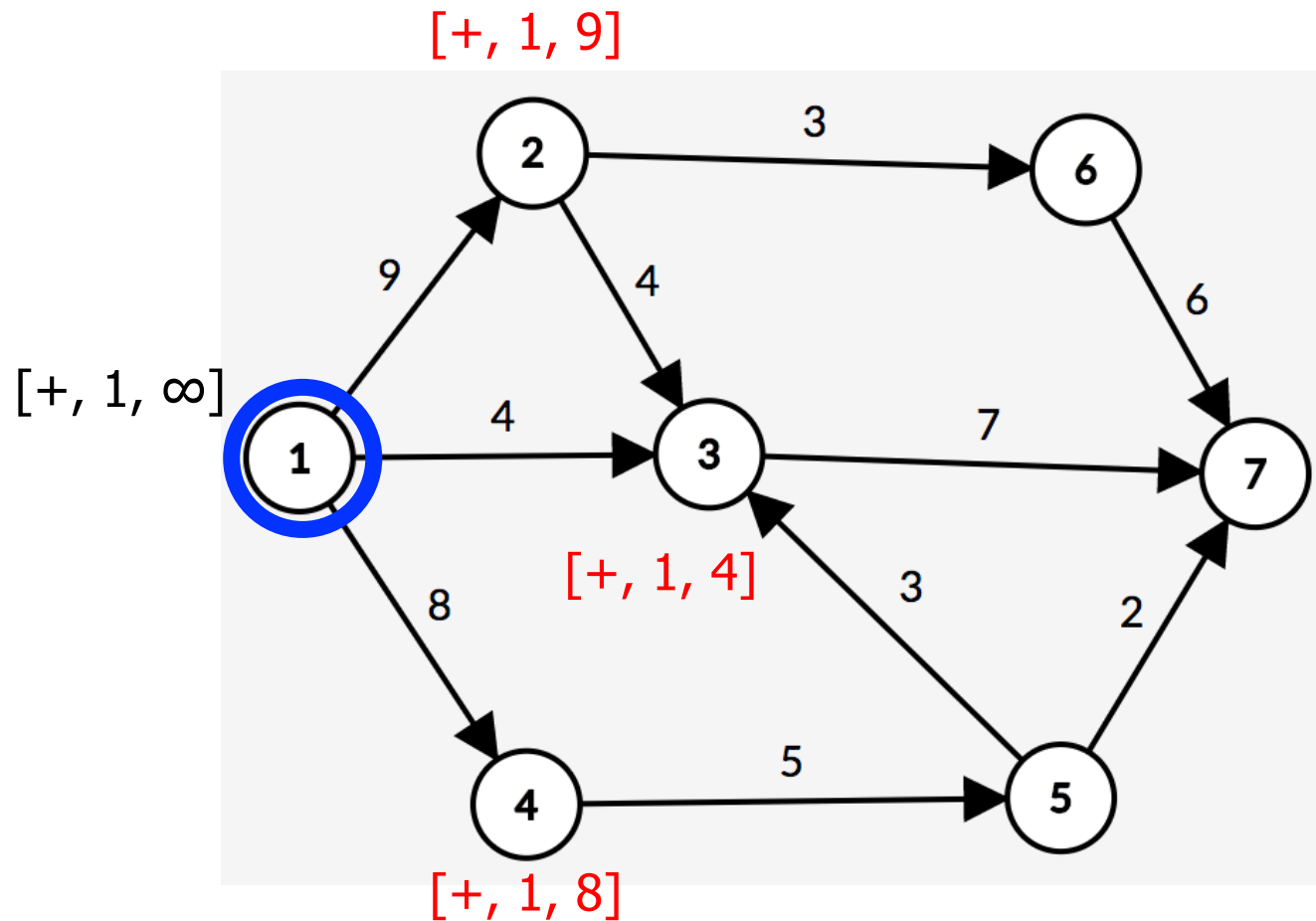
Lặp 1

- Tìm đường tăng luồng



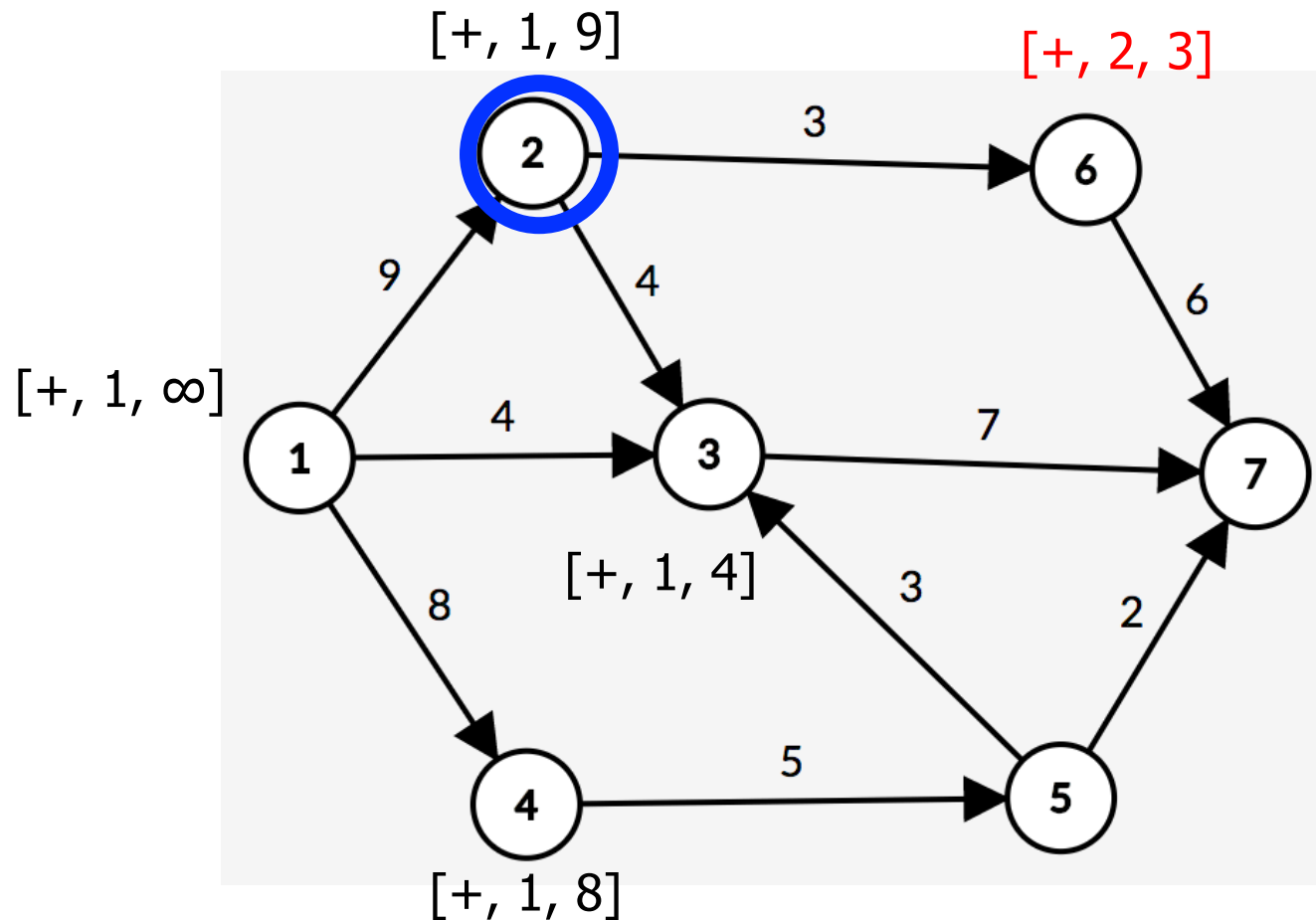
Lặp 1

- Tìm đường tăng luồng



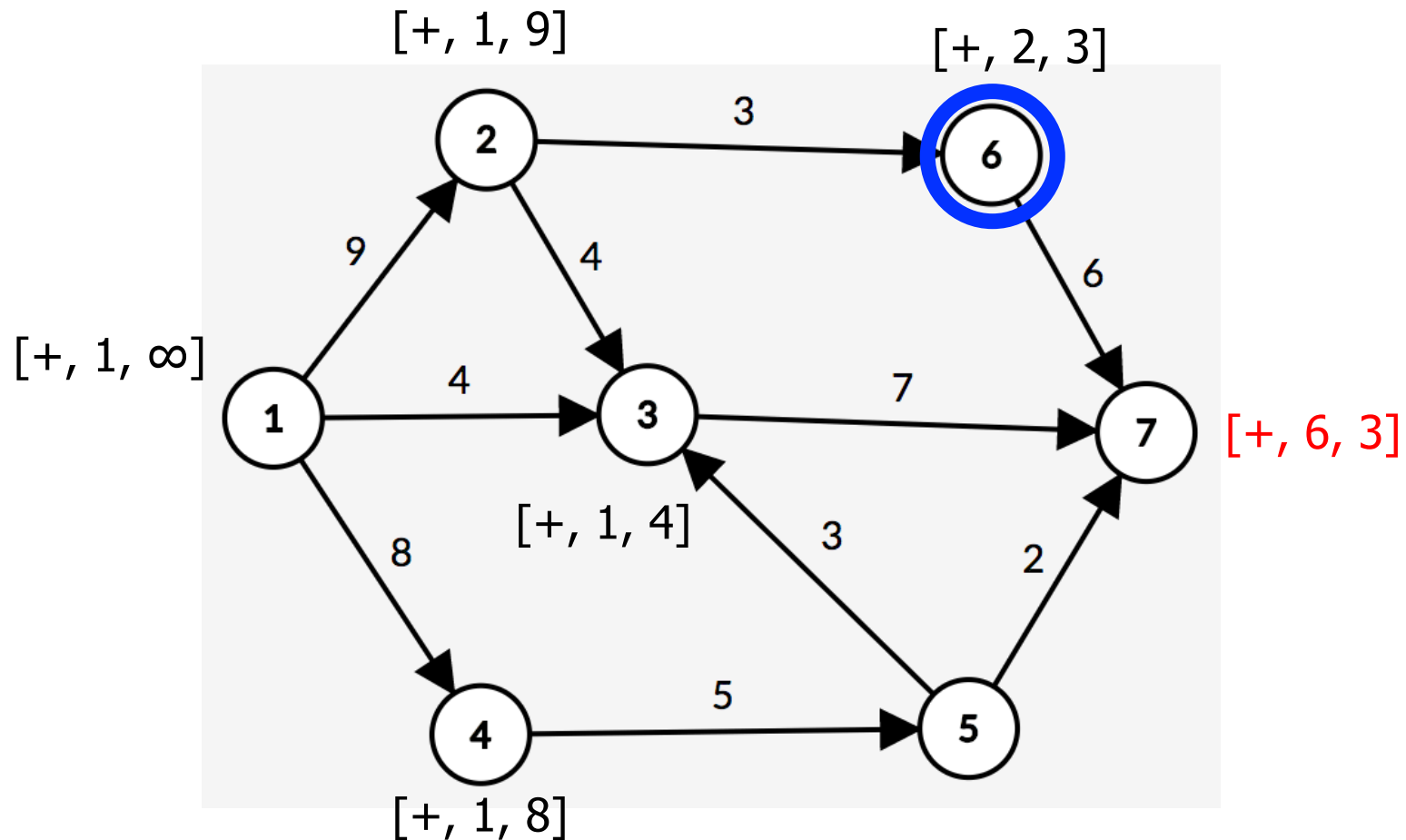
Lặp 1

- Tìm đường tăng luồng



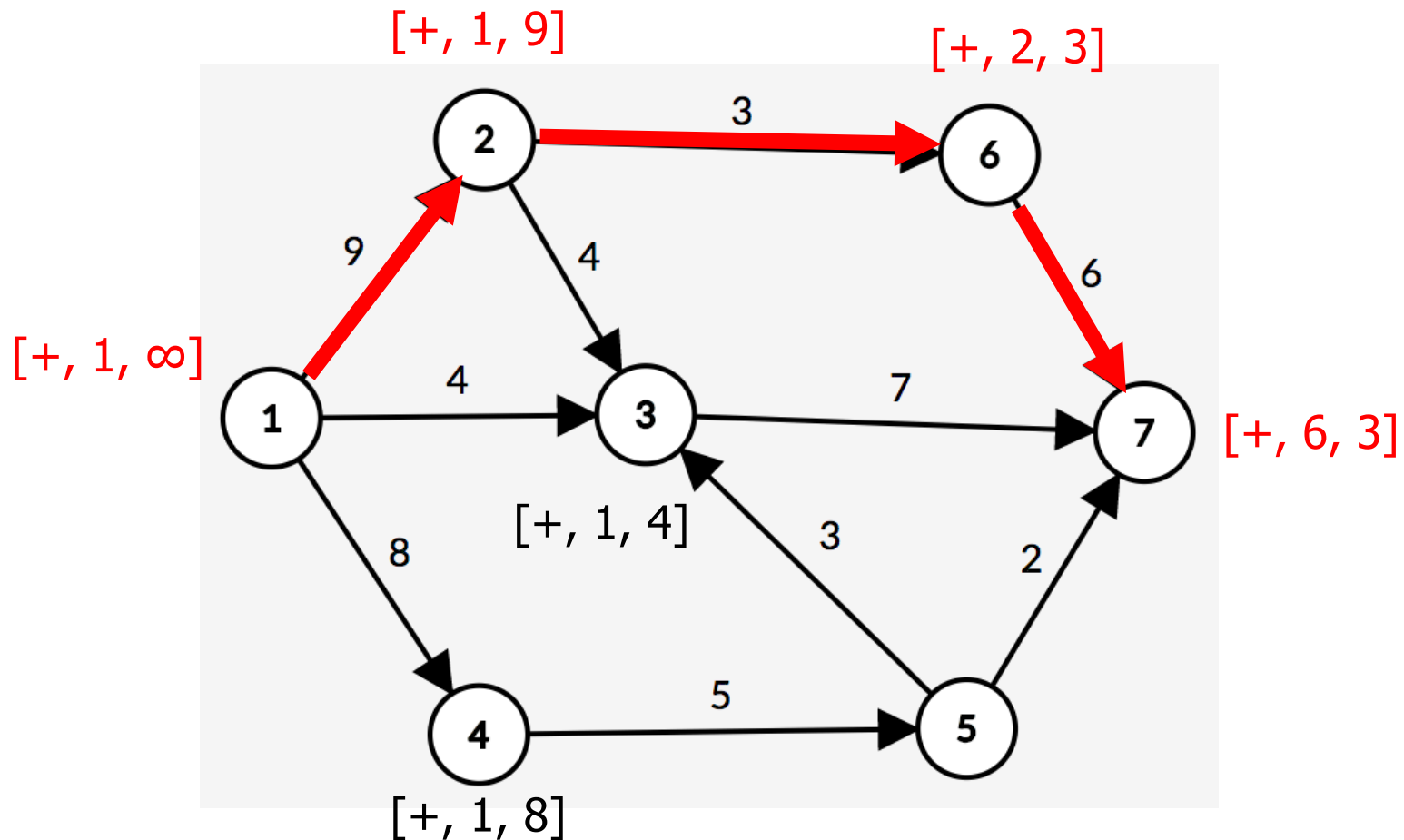
Lặp 1

- Tìm đường tăng luồng



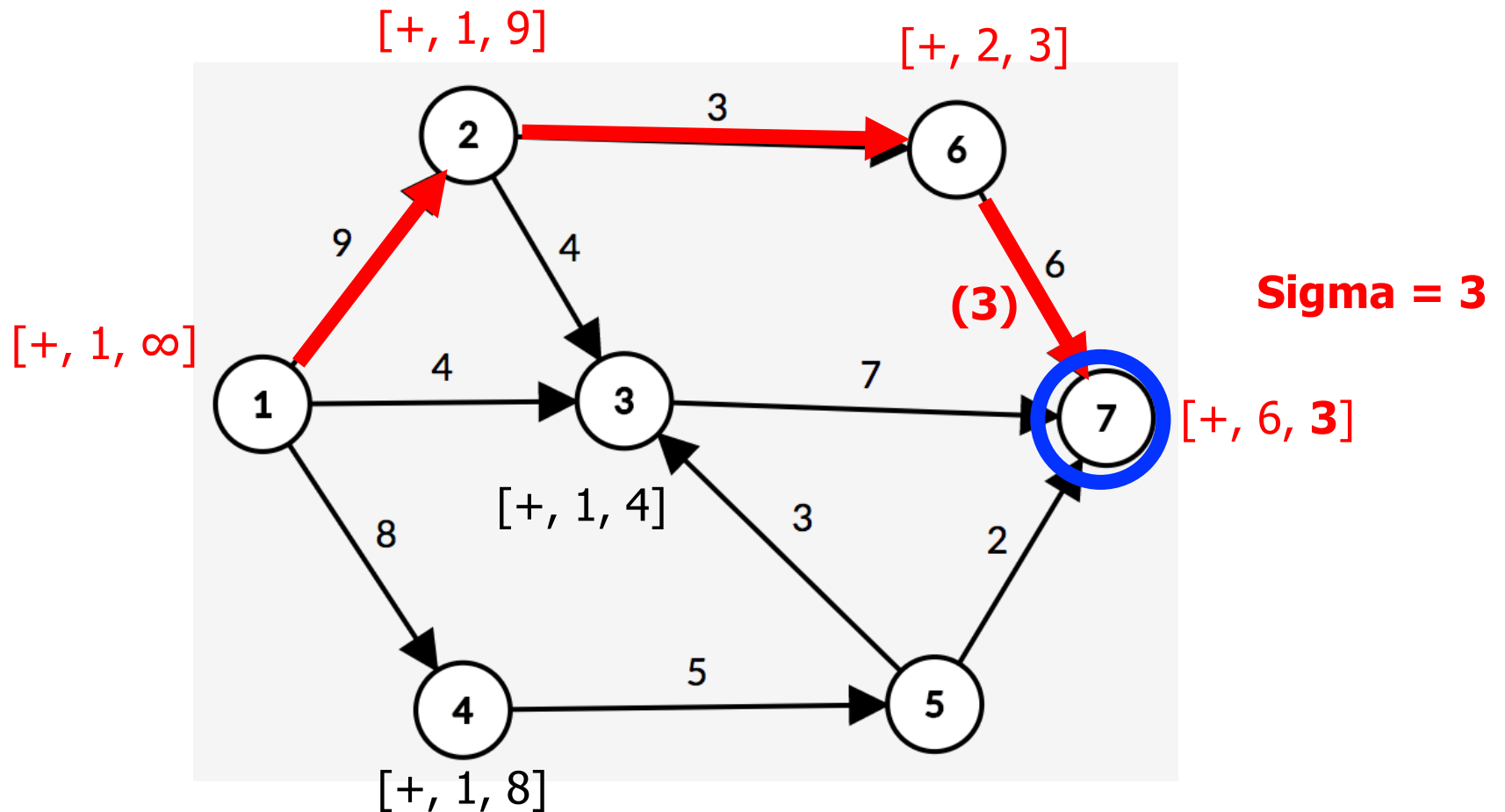
Lặp 1

- Tìm đường tăng luồng



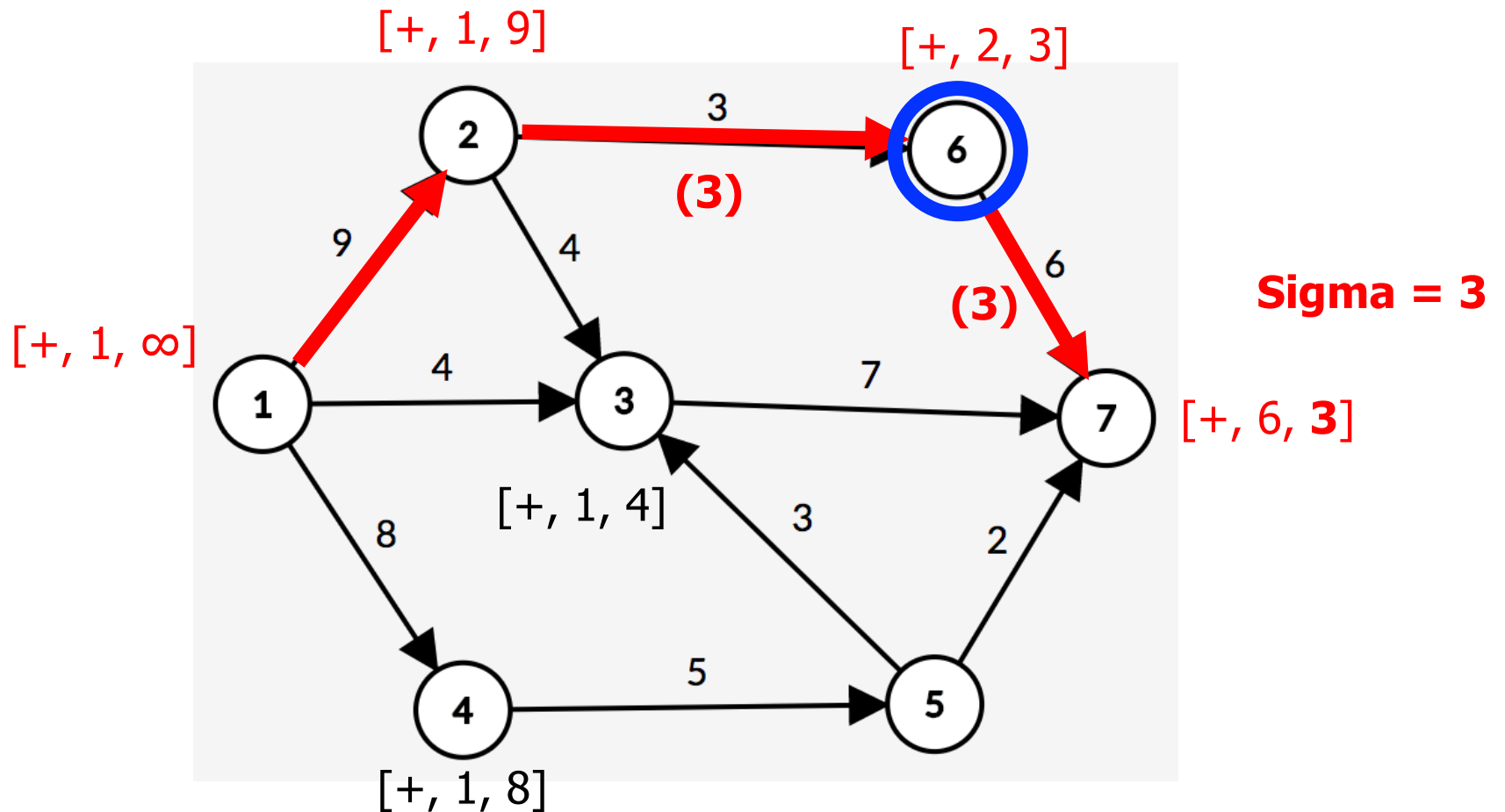
Lặp 1

- Tăng luồng



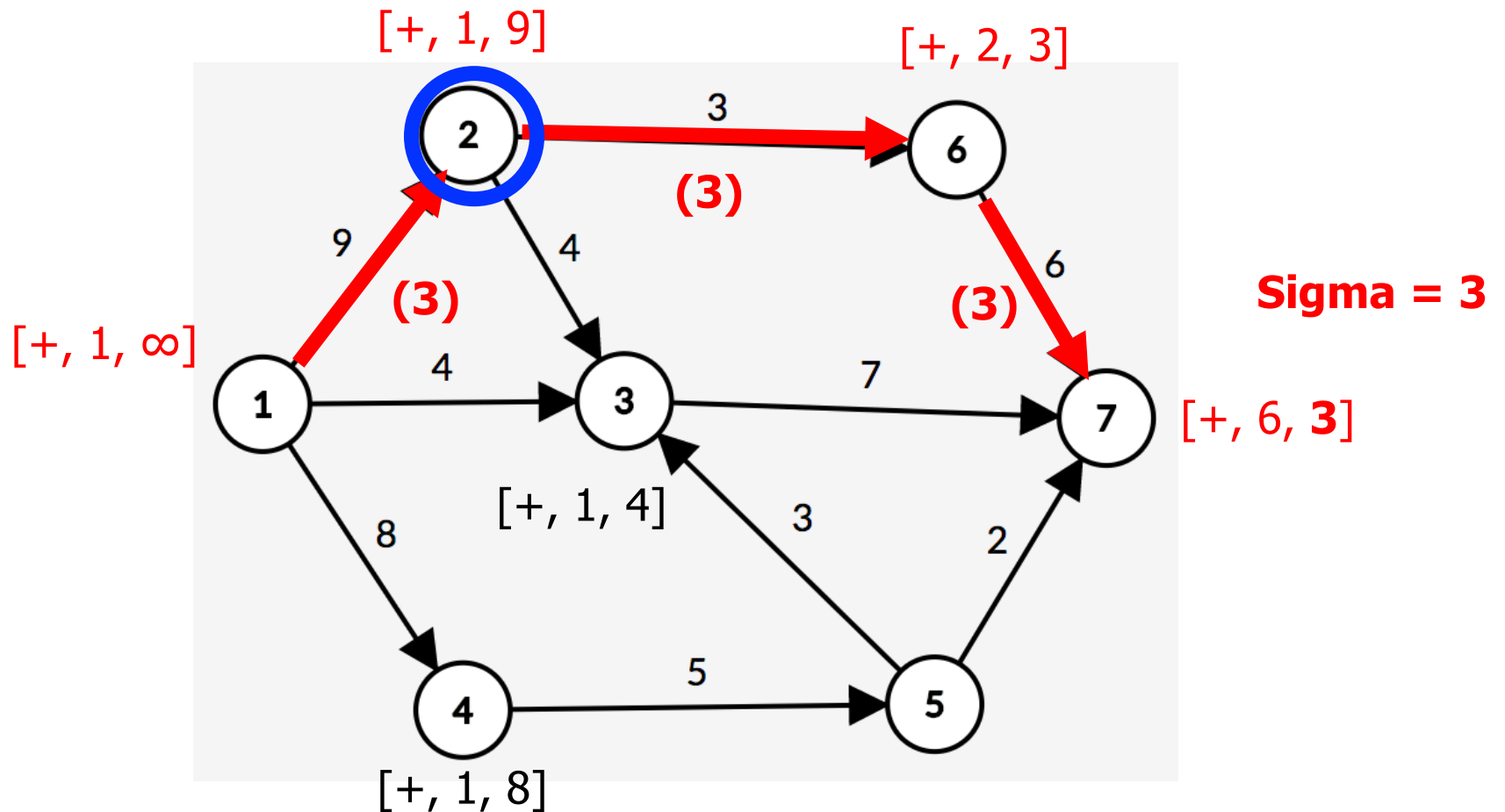
Lặp 1

- Tăng luồng



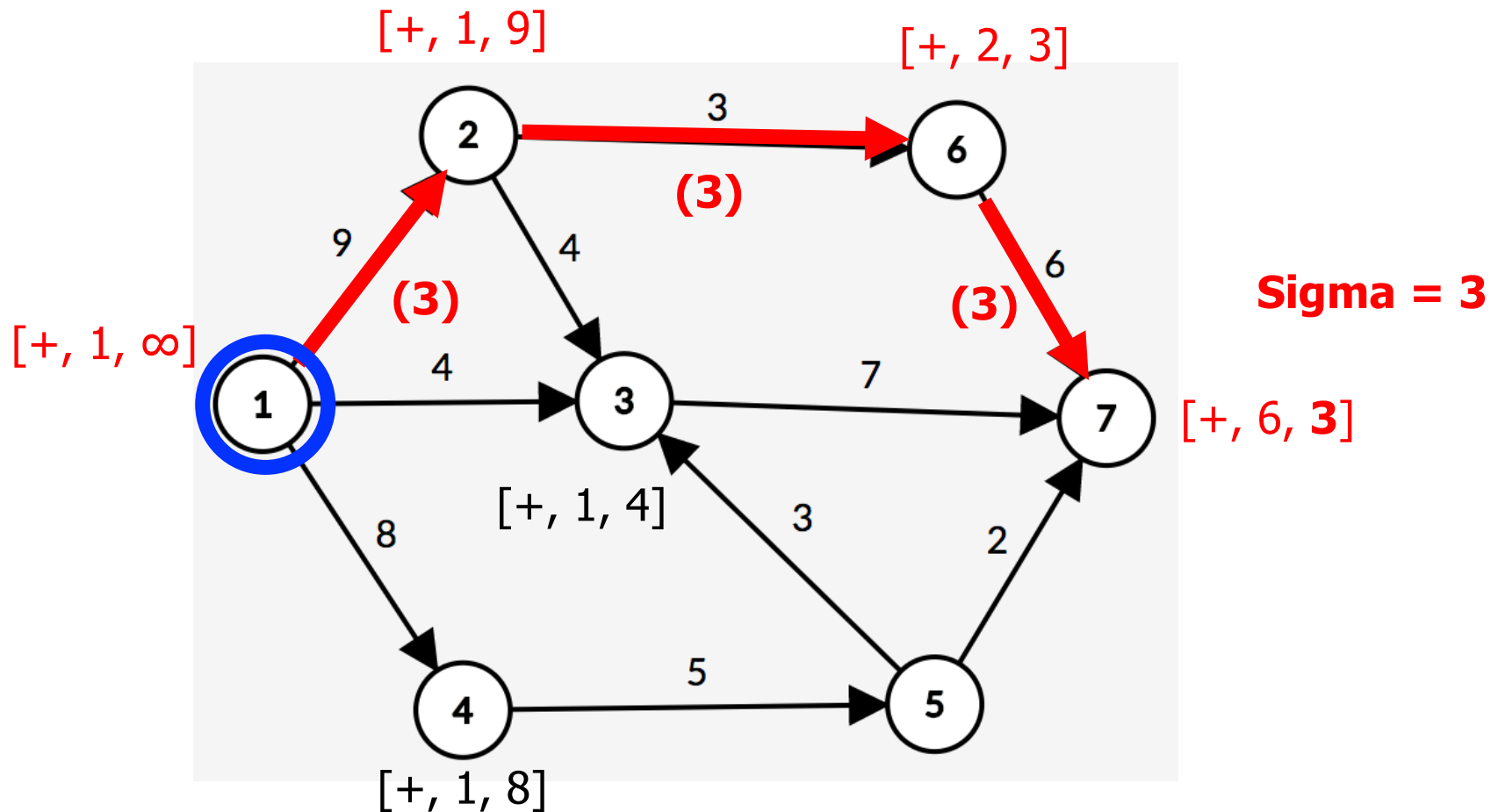
Lặp 1

- Tăng luồng



Lặp 1

- Tăng luồng

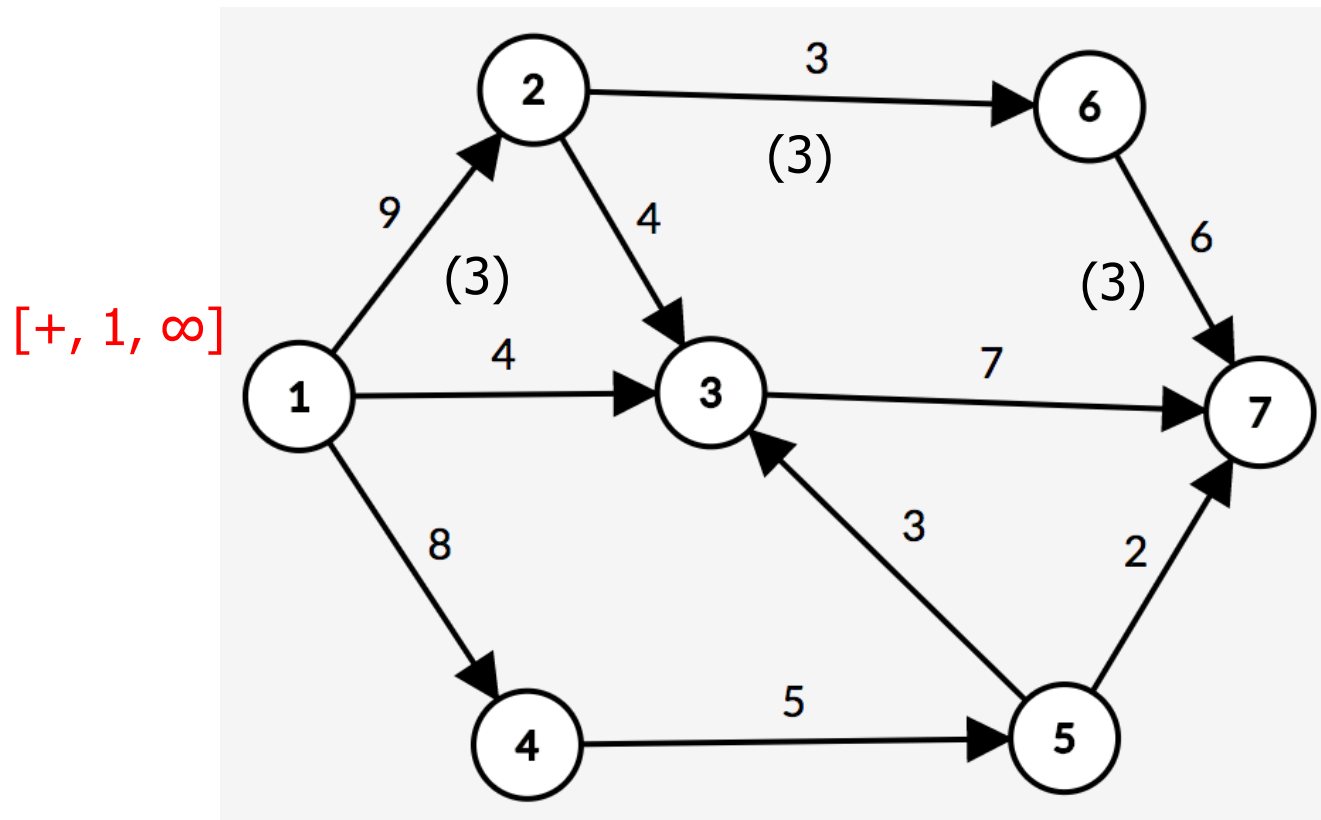


Mèo

- Tất cả các cung trên đường tăng luồng sẽ được tăng/giảm 1 lượng giống nhau = $\sigma[t]$
- Trình bày:
 - Lặp 1:
 - Đánh dấu trên đồ thị gốc
 - Vẽ đồ thị mới và ghi kết quả tăng luồng trên đồ thị mới
 - Lặp 2:
 - Tiếp tục đánh dấu trên đồ thị mới
 - Vẽ đồ thị mới nữa và ghi kết quả tăng luồng
 - ...

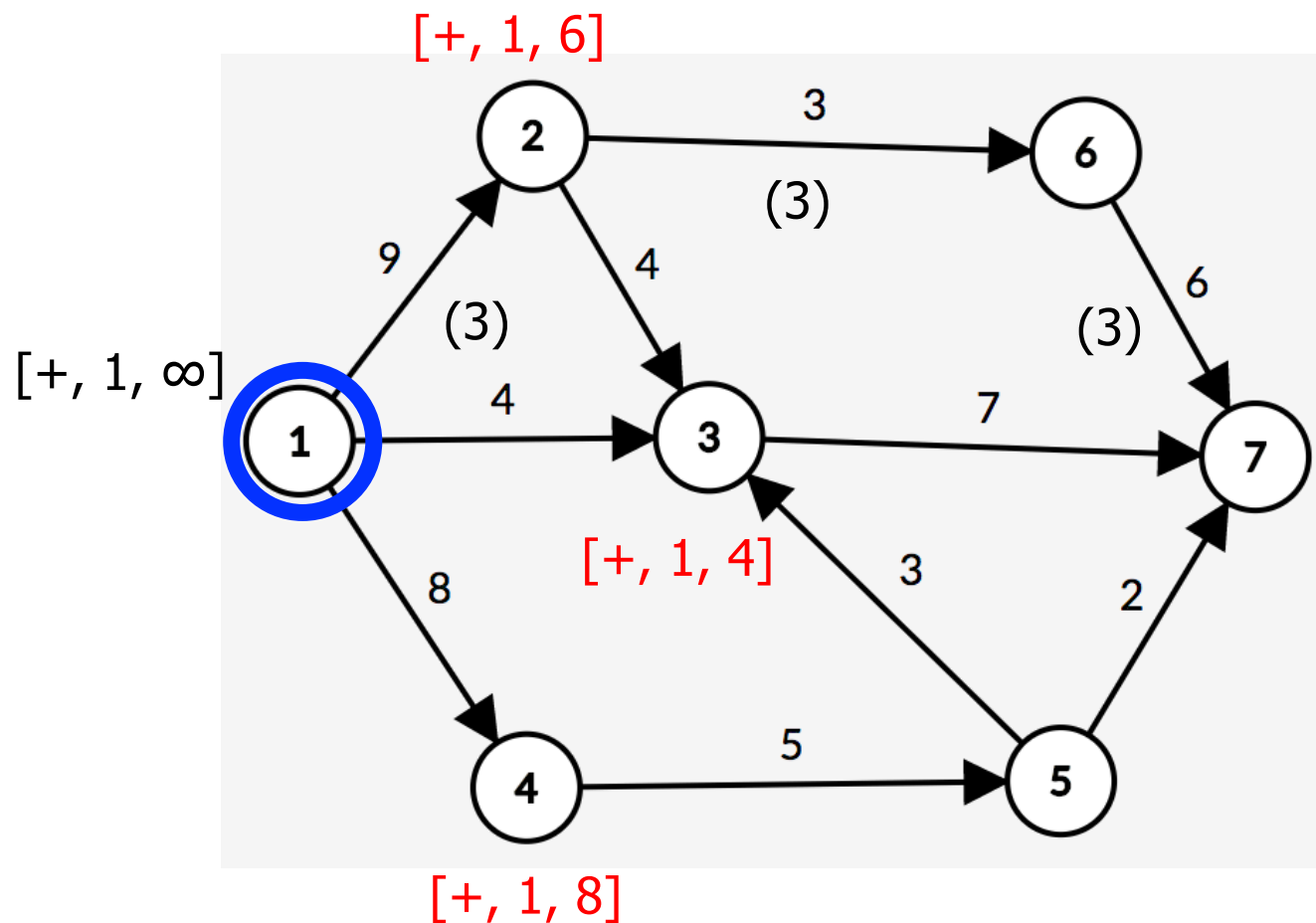
Lặp 2

- Tìm đường tăng luồng



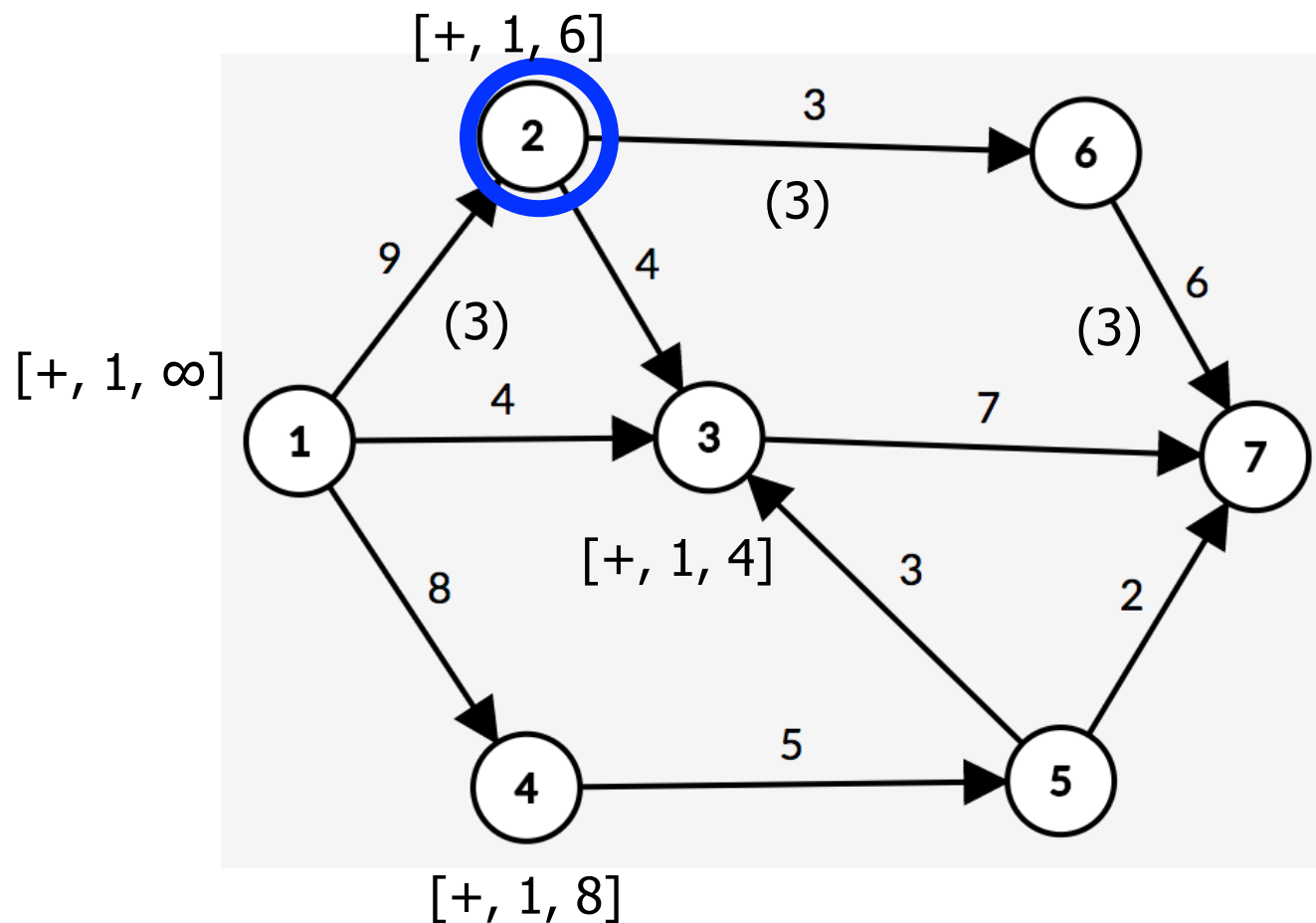
Lặp 2

- Tìm đường tăng luồng



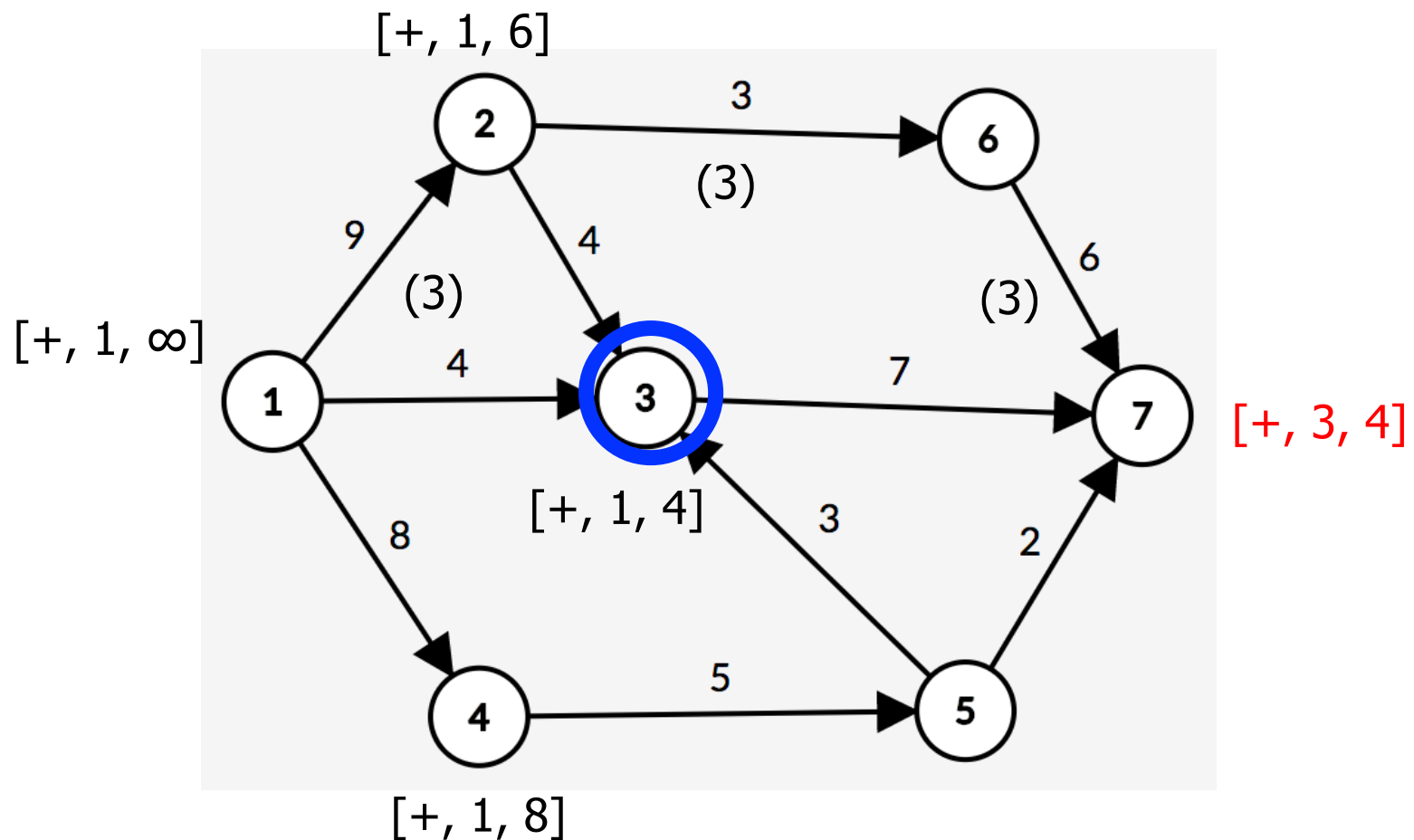
Lặp 2

- Tìm đường tăng luồng



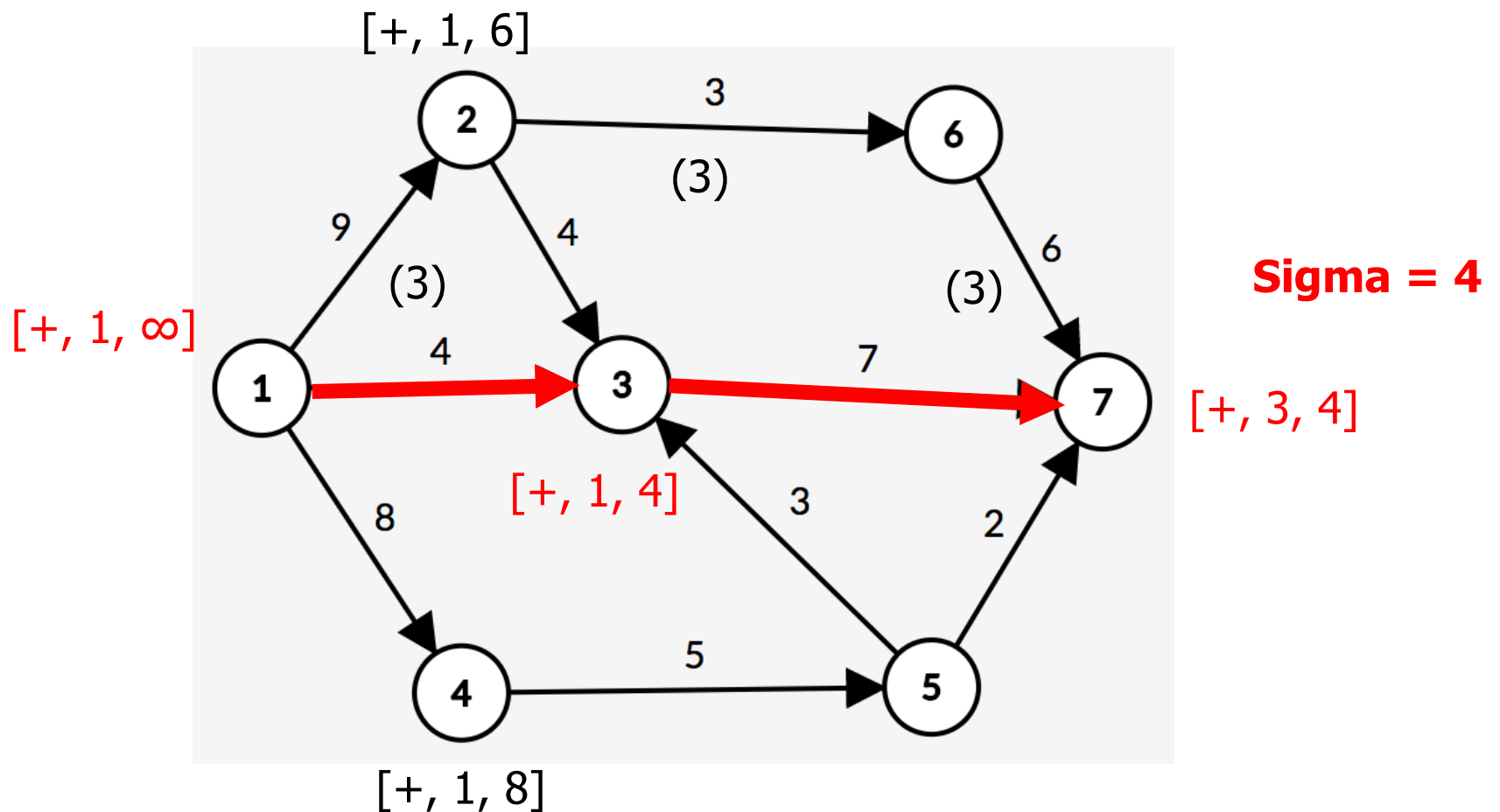
Lặp 2

- Tìm đường tăng luồng



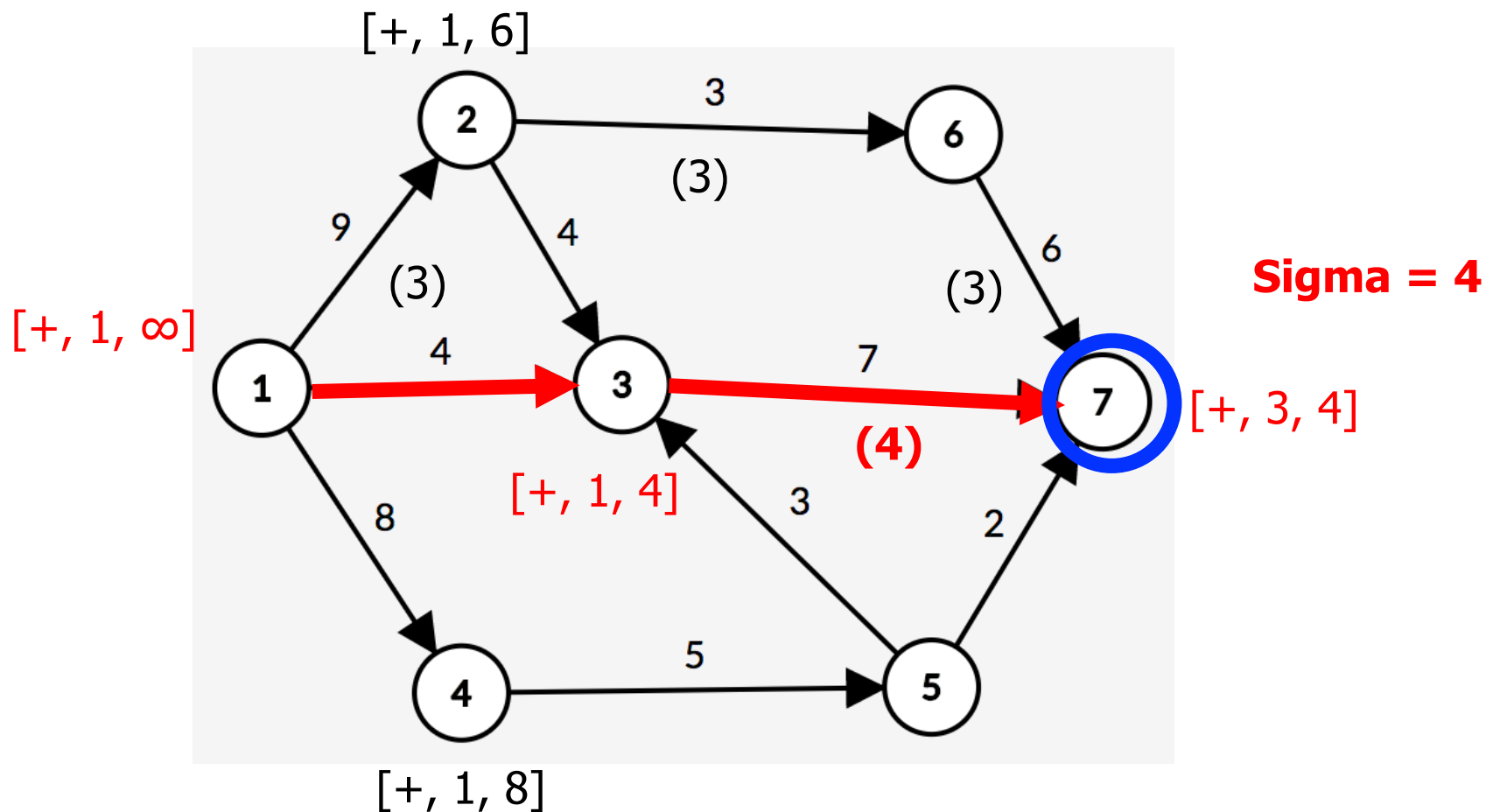
Lặp 2

- Tìm đường tăng luồng



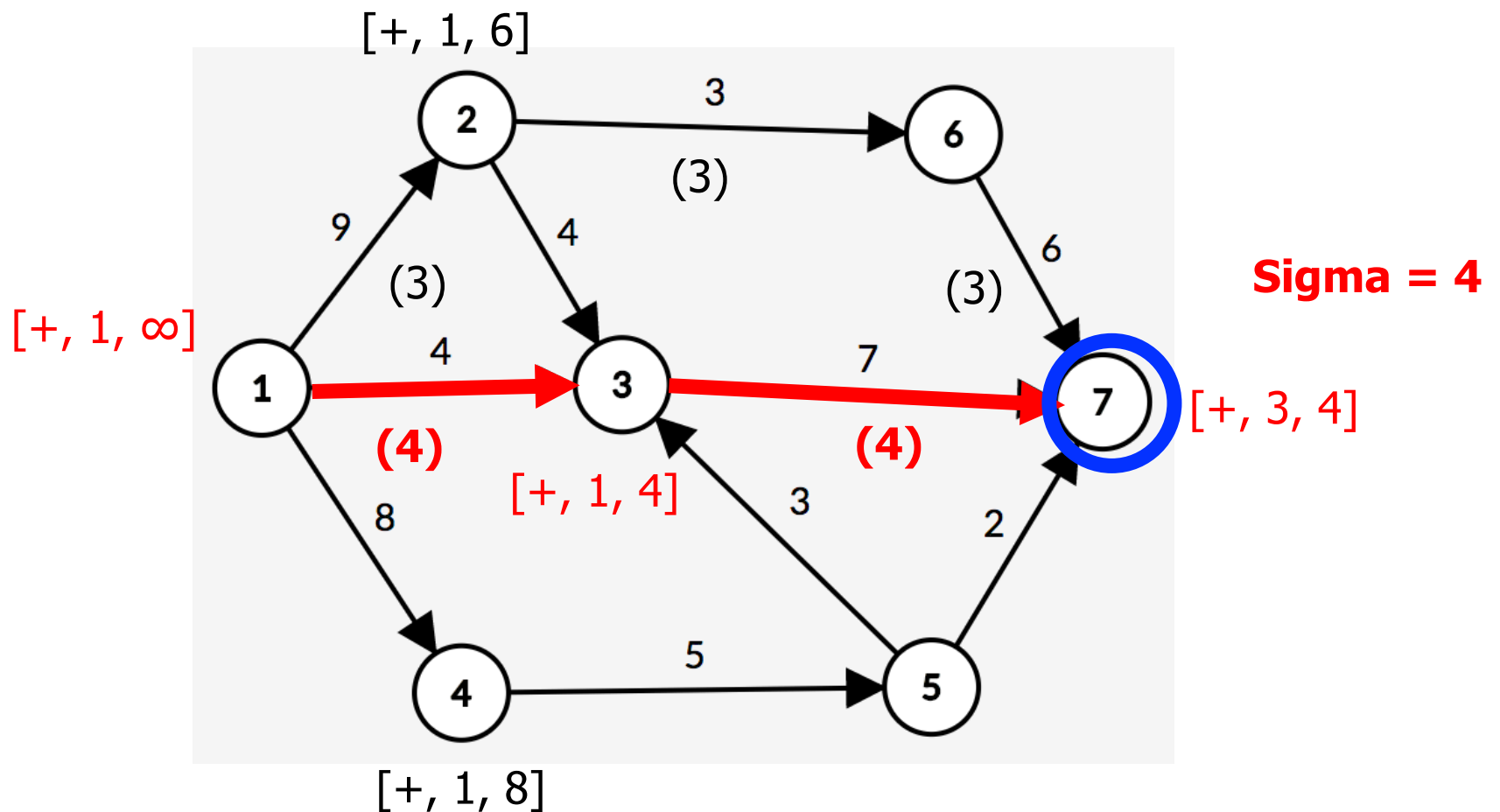
Lặp 2

- Tăng luồng



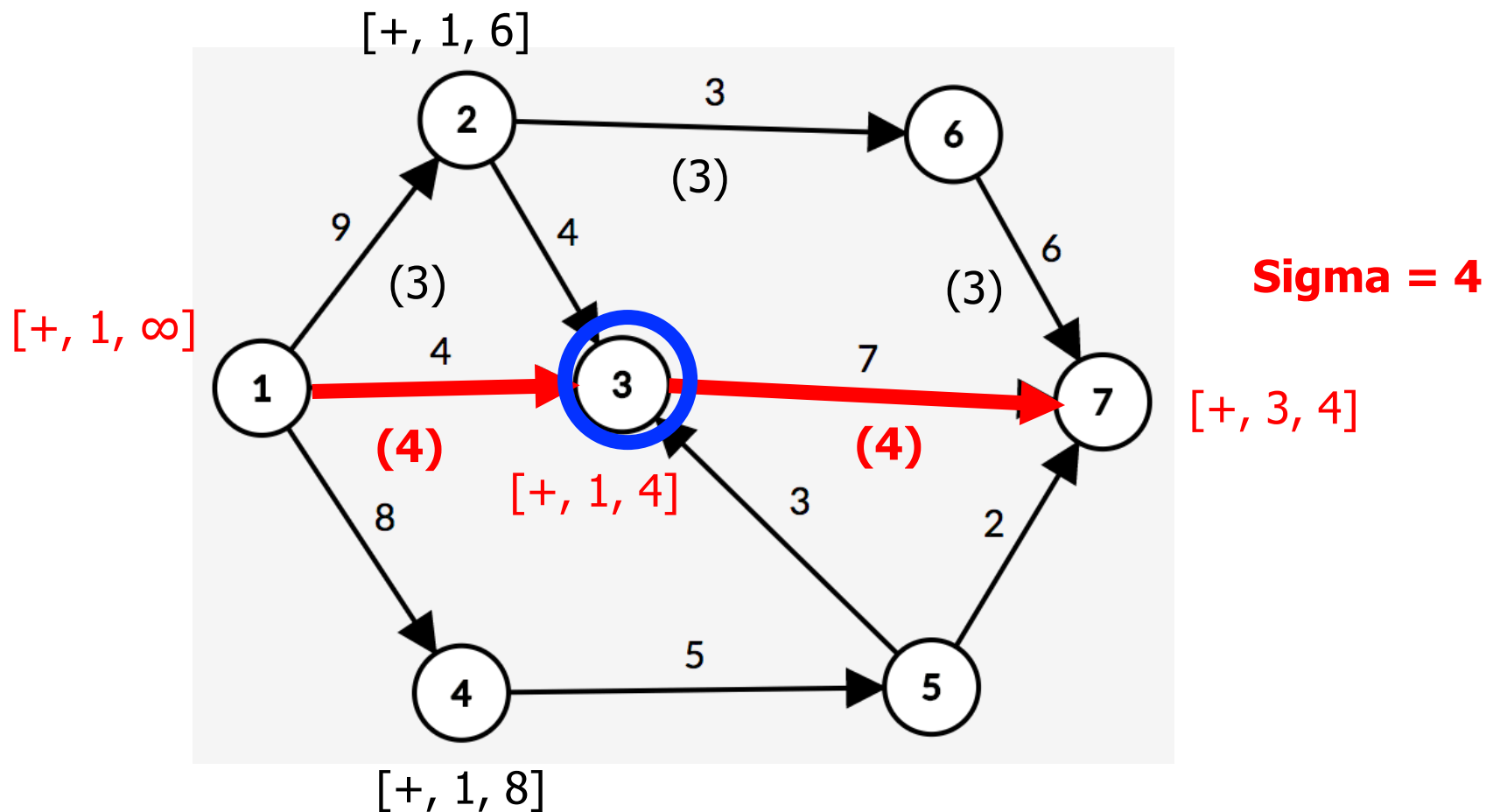
Lặp 2

- Tăng luồng



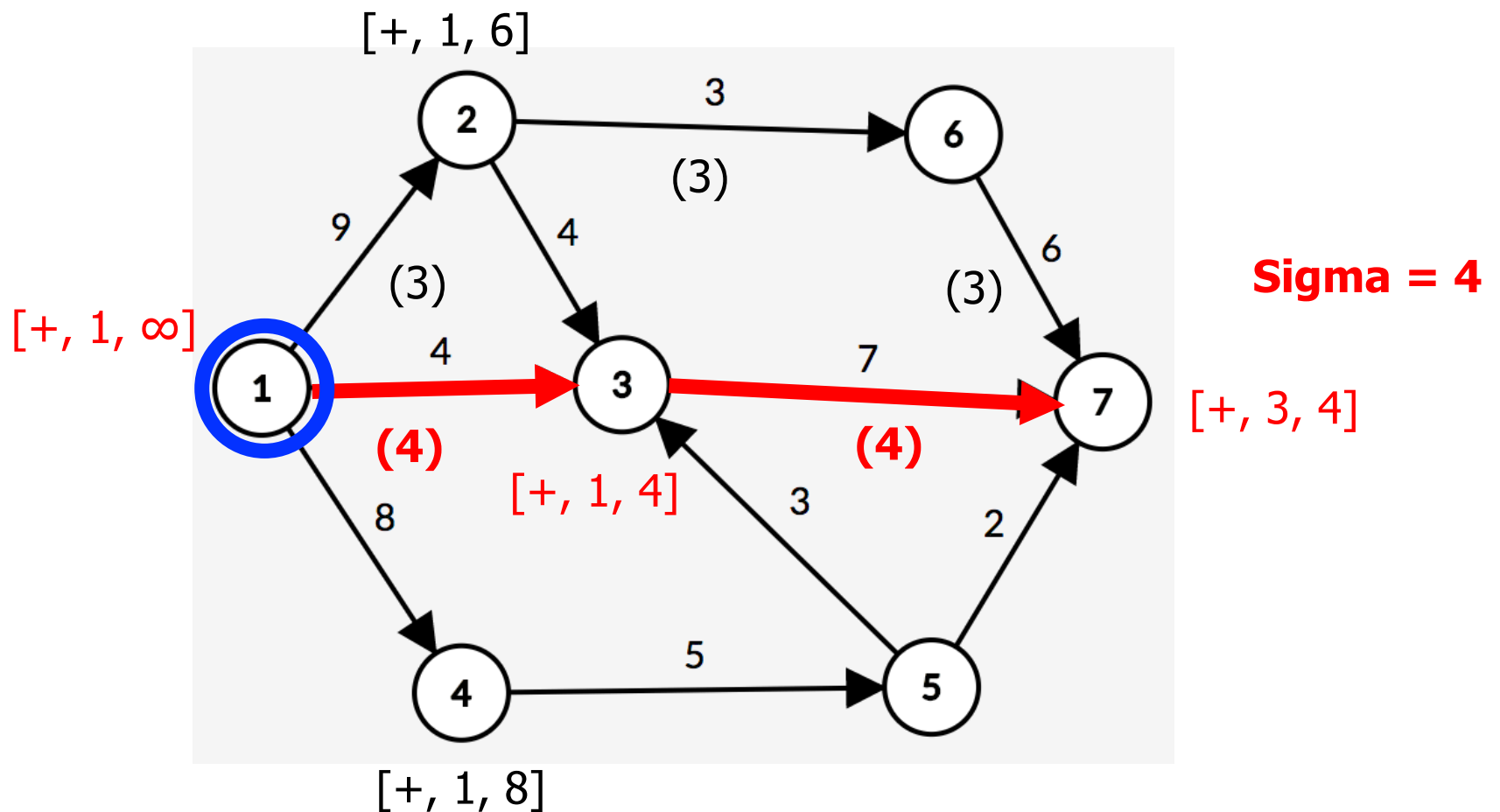
Lặp 2

- Tăng luồng



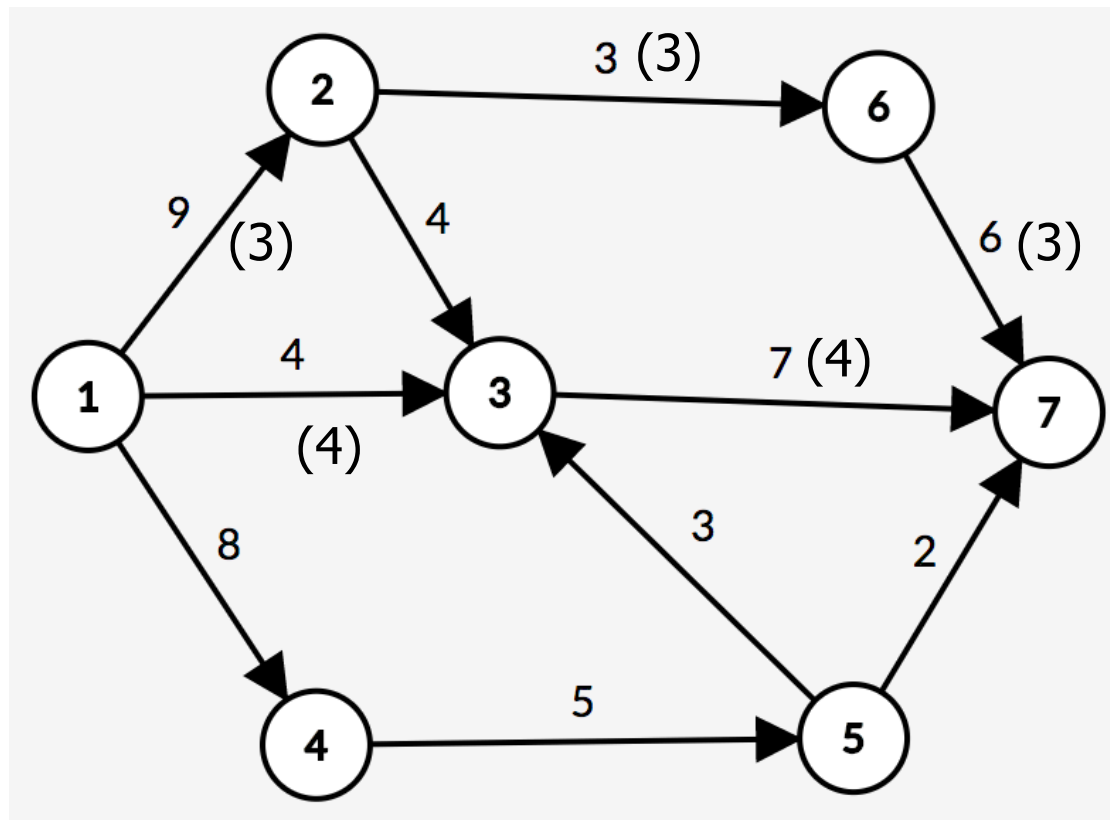
Lặp 2

- Tăng luồng



Lặp 3

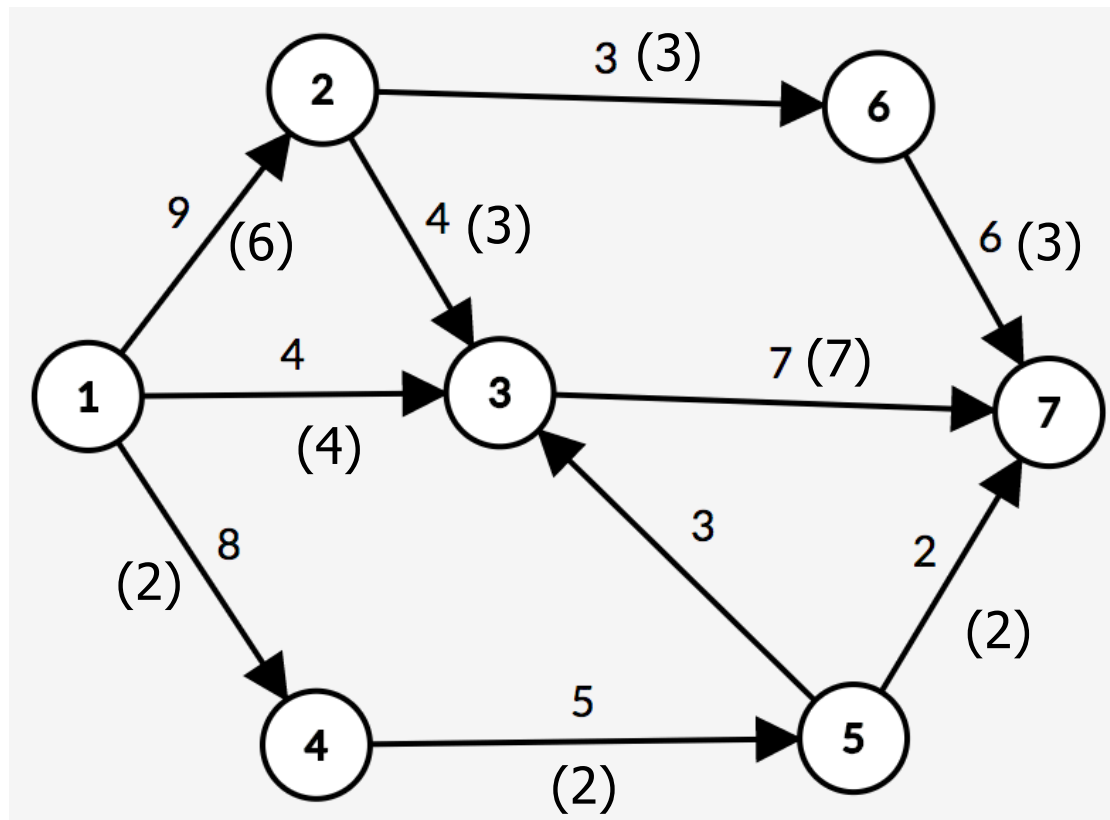
- Tìm đường tăng luồng



...

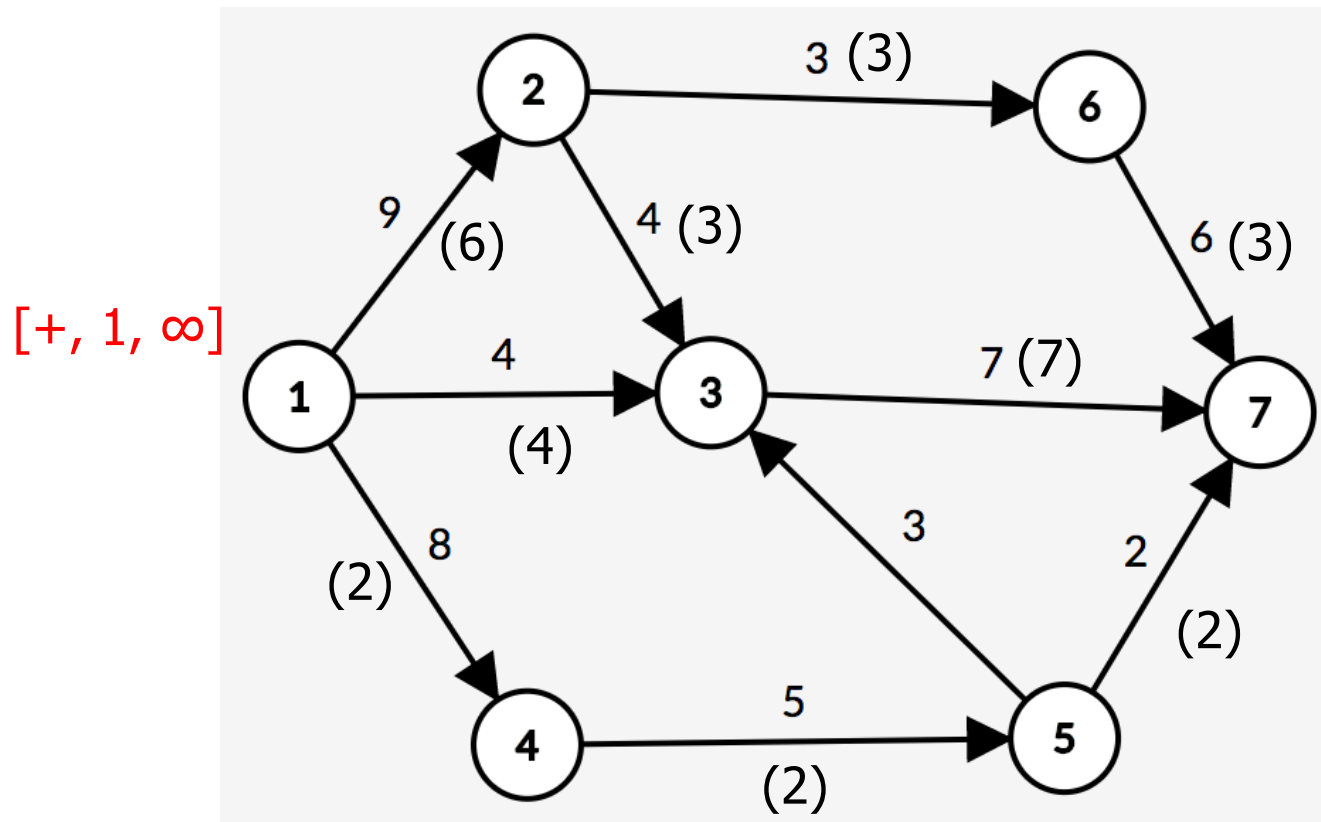
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



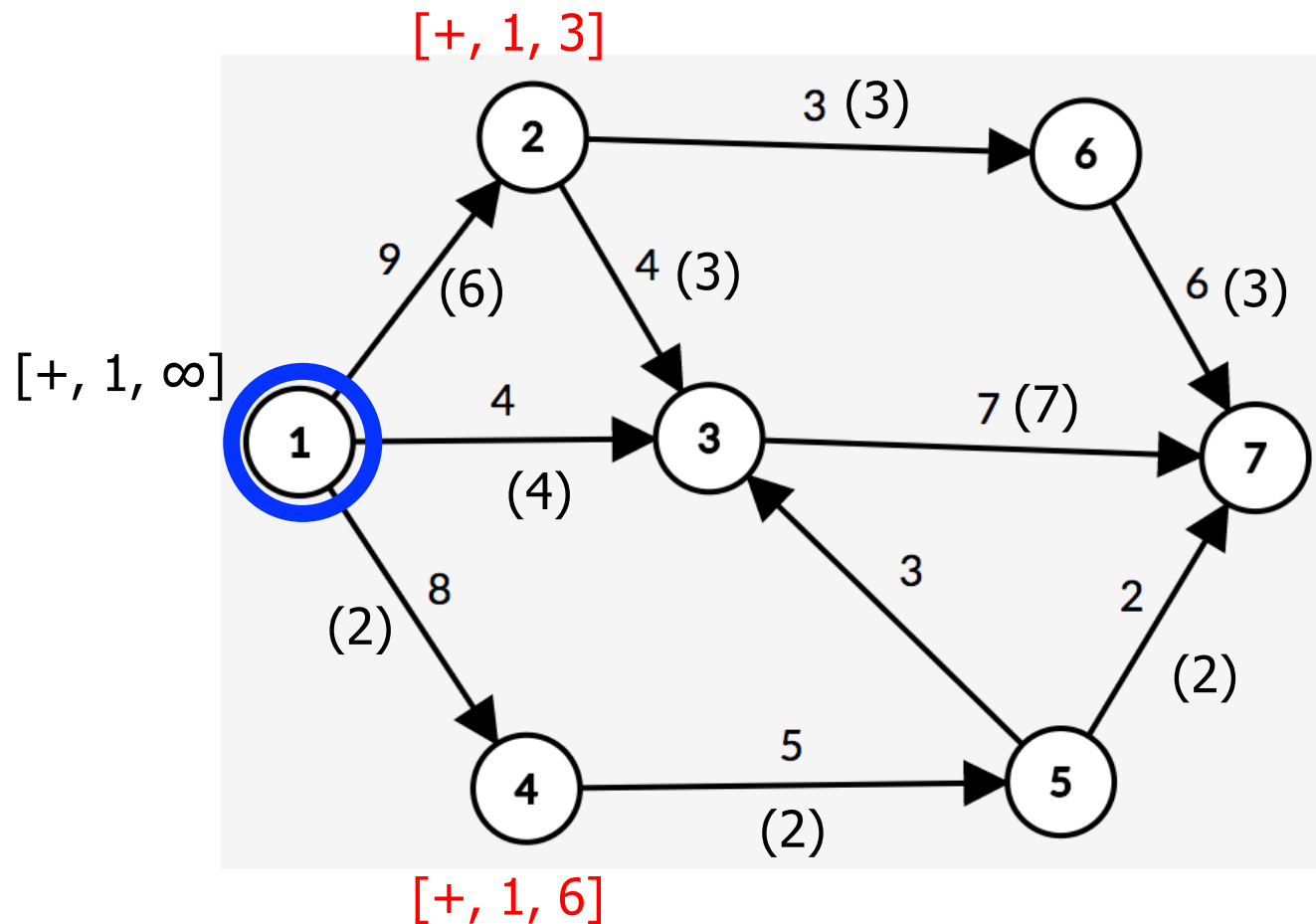
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



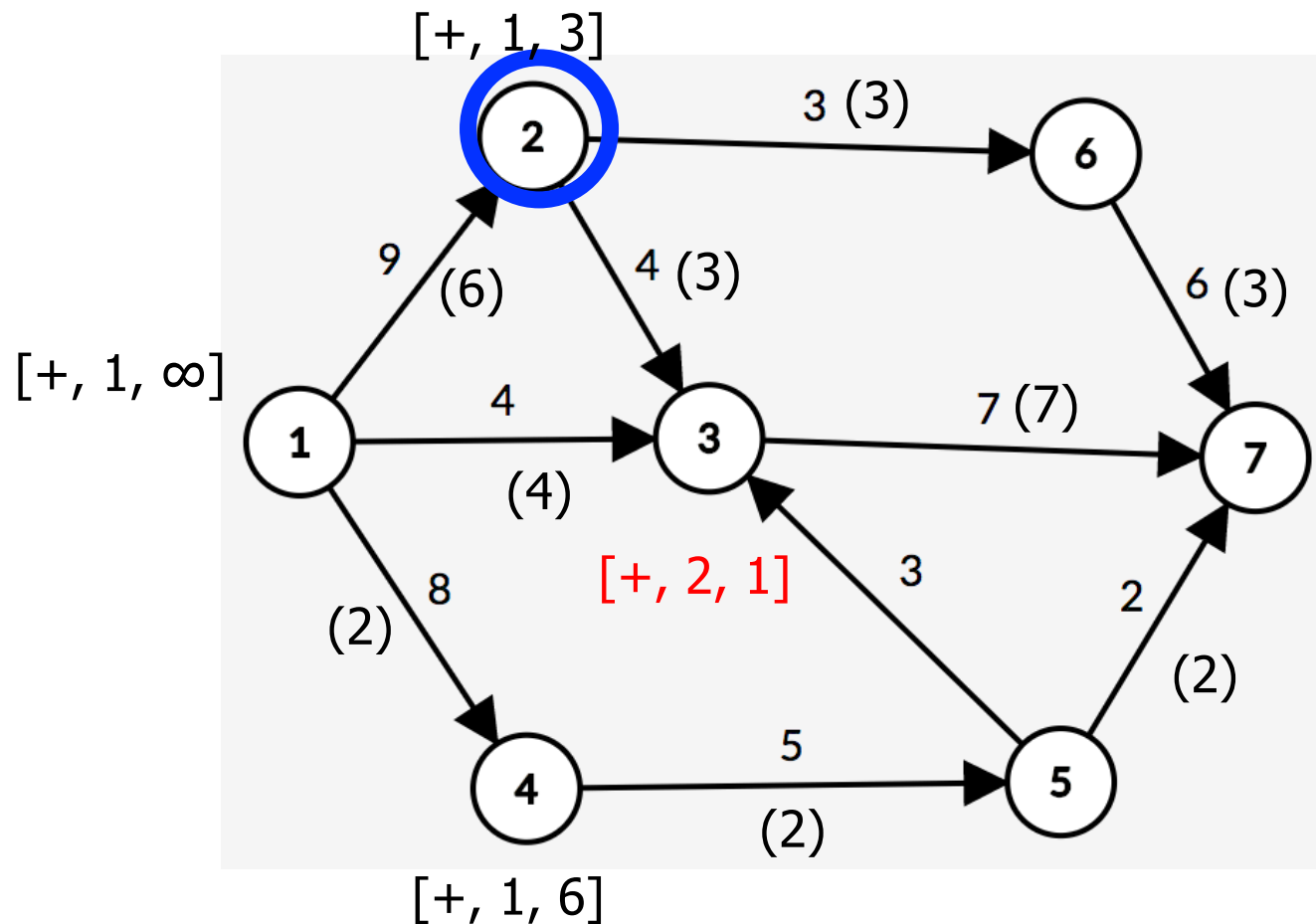
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



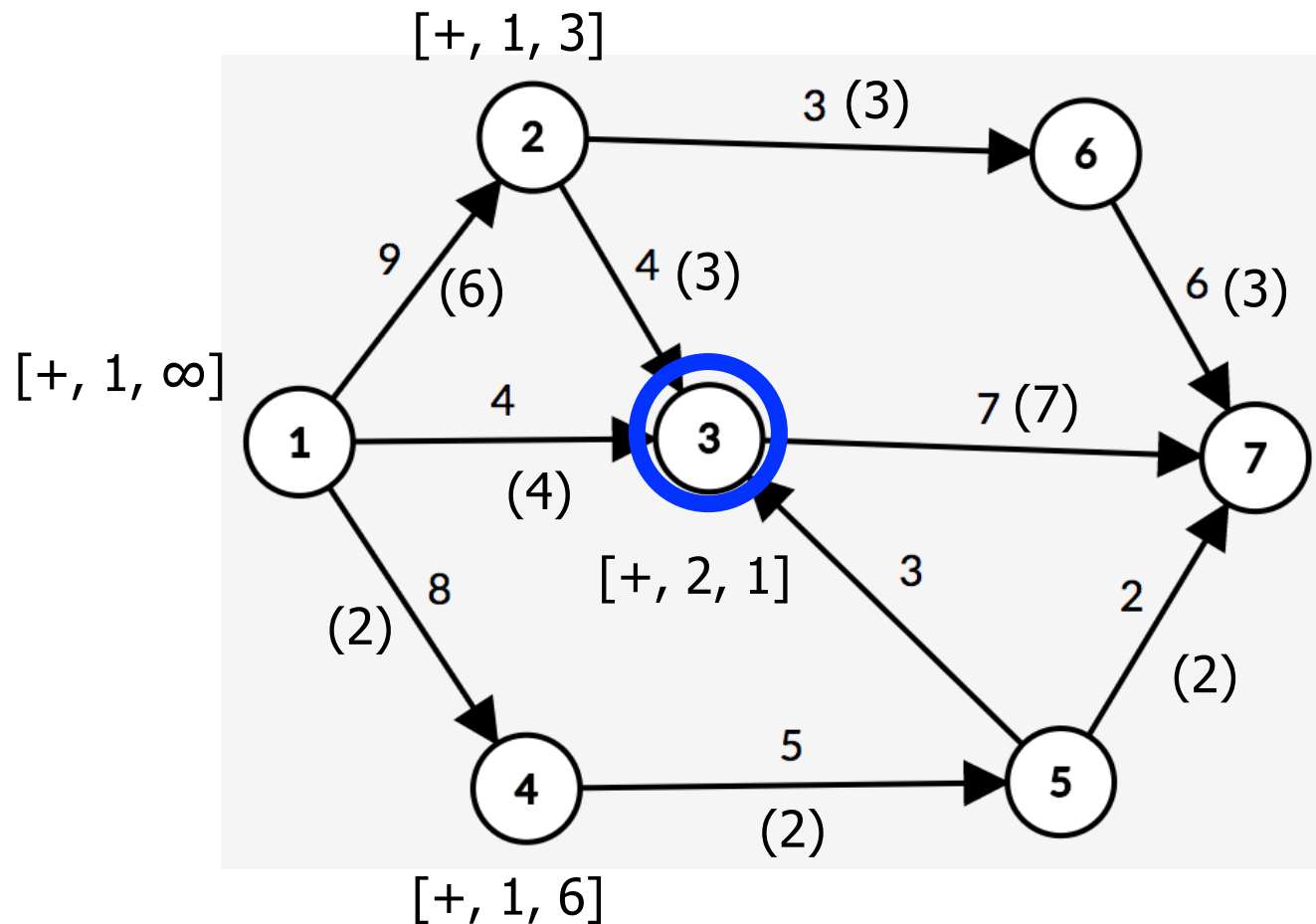
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



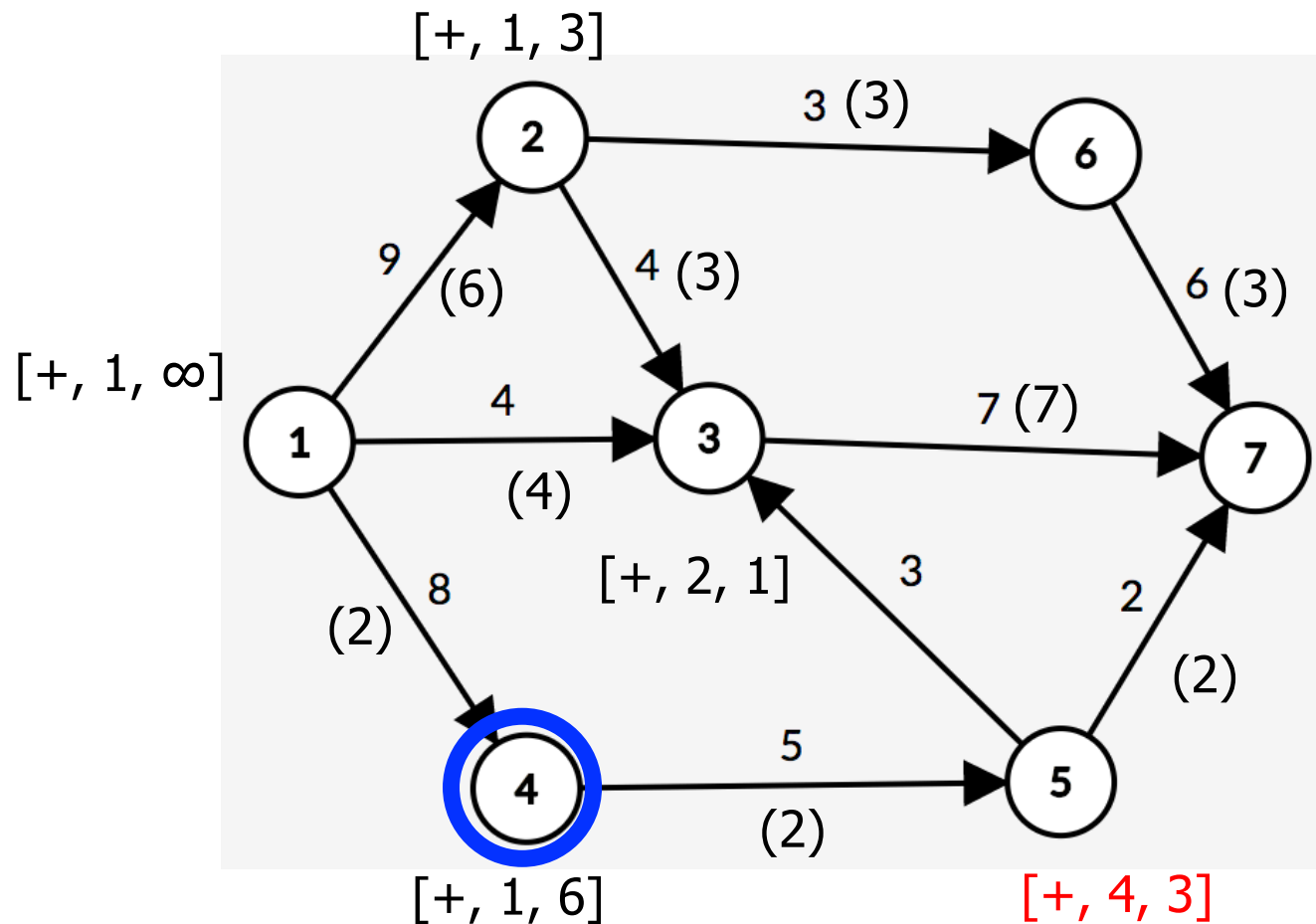
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



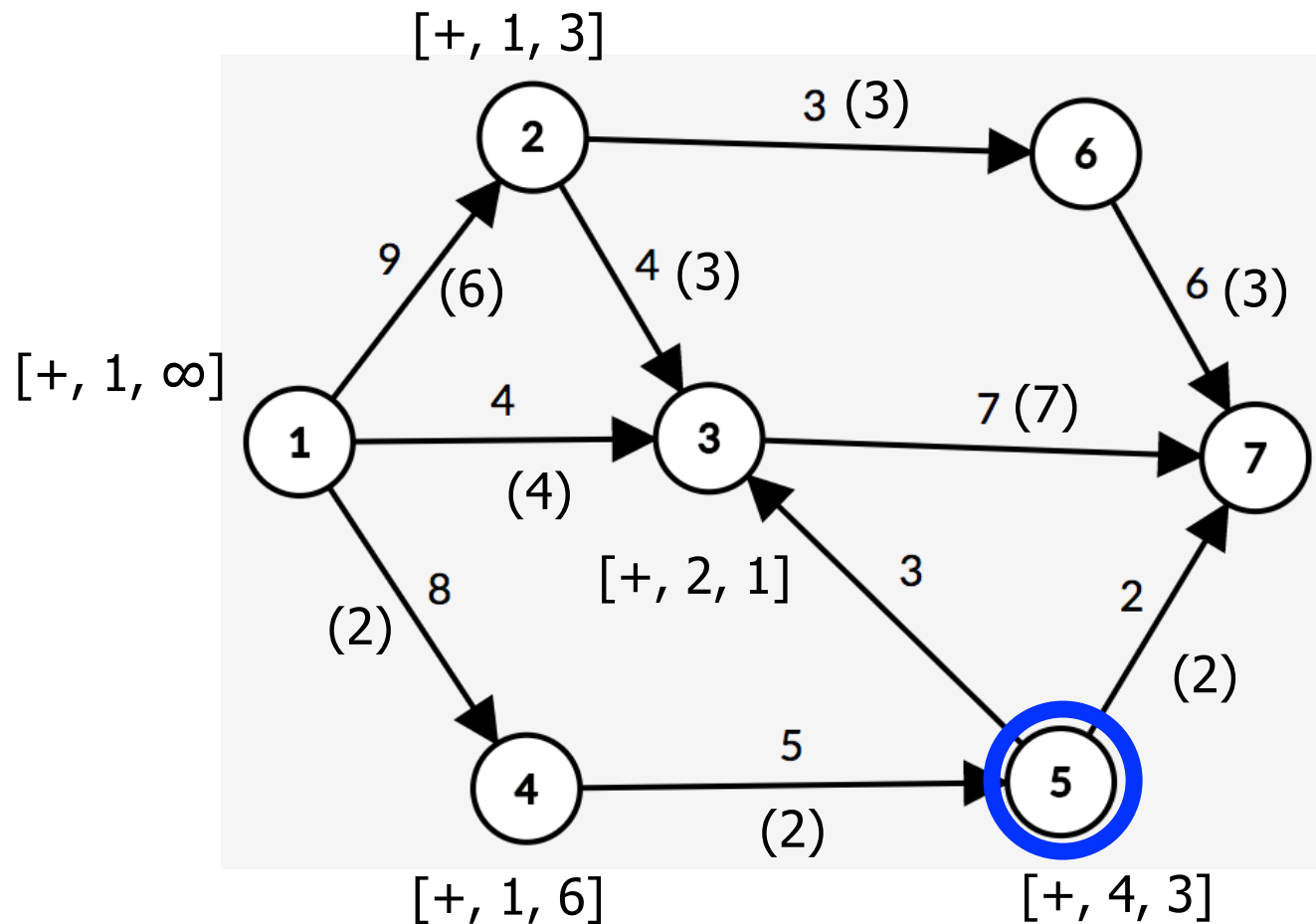
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



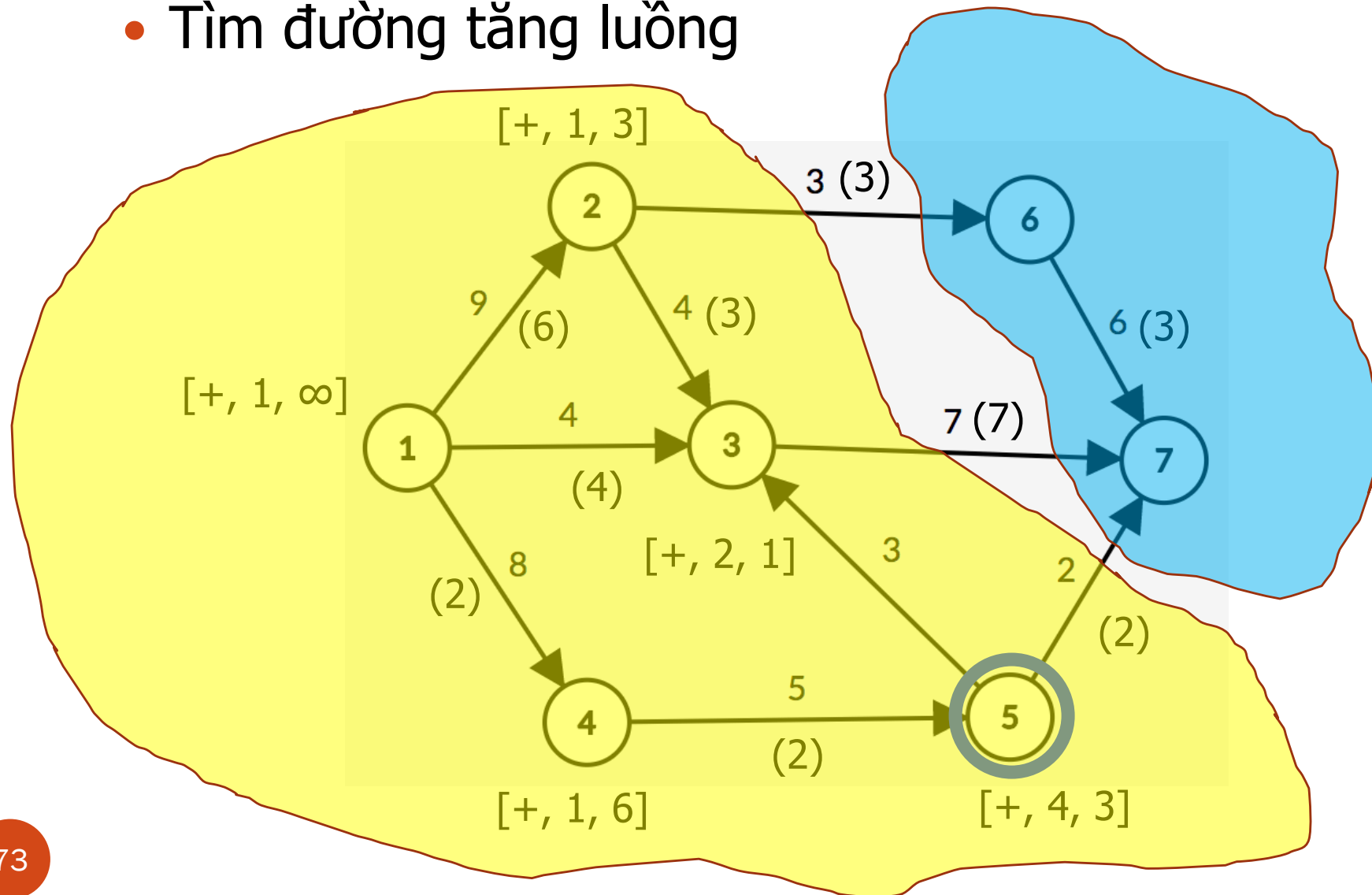
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



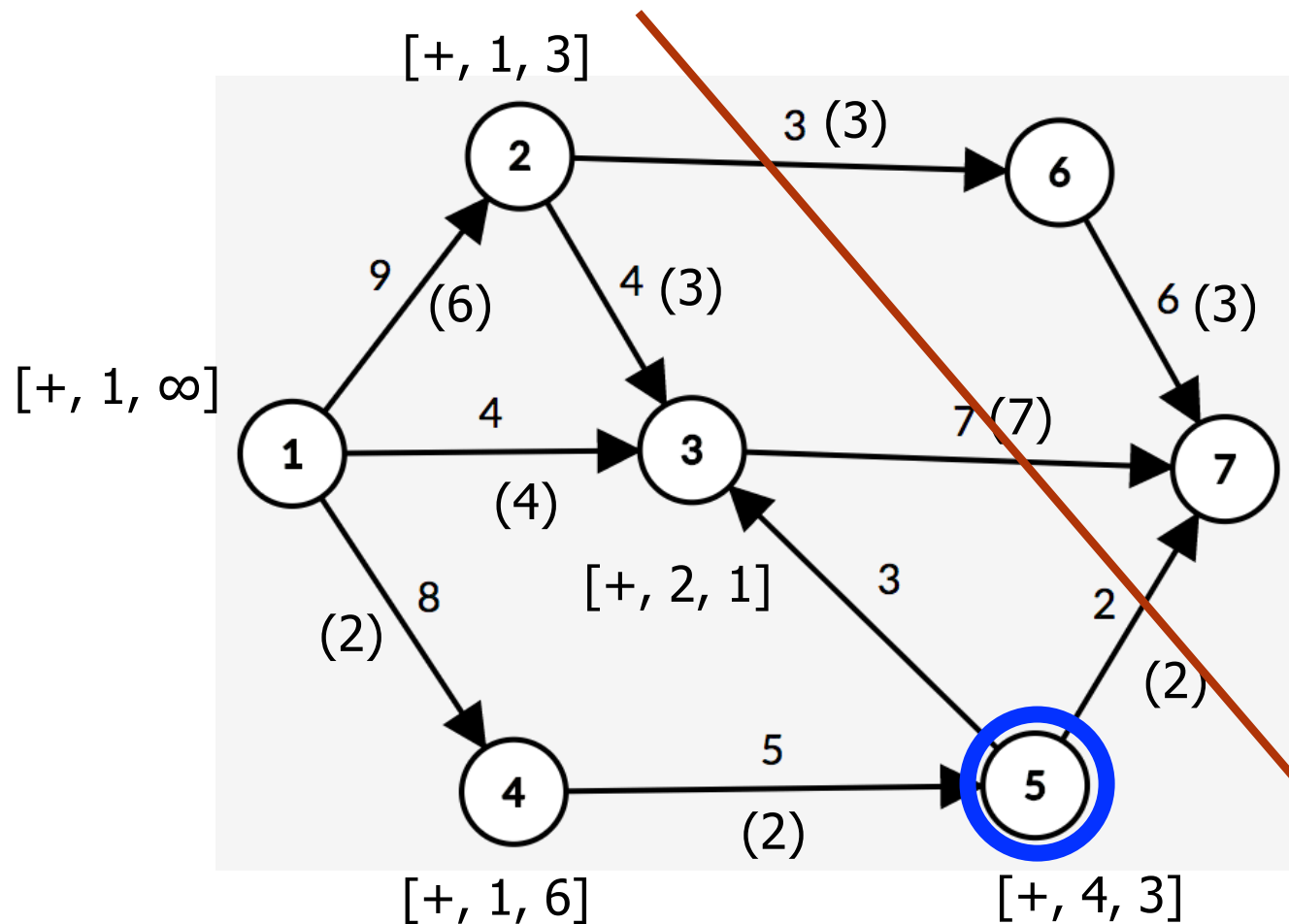
Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



Lặp 5

- Tìm đường tăng luồng



Kết quả

- Lát cắt hẹp nhất (S, T)
 - $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - $T = \{6, 7\}$
- Giá trị luồng cực đại:
 - $|f|_{\max} = c(S, T) = 3 + 7 + 2 = 12$

Cải tiến/biến thể của giai thuật Ford-Fulkerson

- Giải thuật Ford-Fulkerson thường được gọi là **phương pháp** (method) Ford-Fulkerson thay vì **giải thuật** (algorithm)
 - Không mô tả rõ ràng cách tìm đường tăng luồng trên đồ thị tăng luồng
- Biến thể:
 - Giải thuật **Edmonds-Karp**
 - Tìm kiếm theo chiều rộng, sử dụng Queue thay vì Stack
 - Tìm đường tăng luồng có lượng tăng luồng nhiều nhất (cải biên Dijkstra)