

nkhr lab CTF 2019 Summer - Iterated Function

平成 30 年度 大学入試センター試験 数学 1 の「II 解答上の注意」に従って解答せよ.

<https://www.dnc.ac.jp/albums/abm.php?f=abm00033137.pdf&n=h30+suugaku1+00hyousi.pdf>

この問題の flag は, 次のページの から までの解答 (各桁は 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 - のいずれか) を順に連結したものを X として, `n5b2019summer{X}` である. 例えば, , , に対する解答がそれぞれ 1, -, 3 であれば, flag は `n5b2019summer{1-3...}` のような形になる.

メモ欄

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム							

問題

複素数 (complex number) z に対して, 次のような関数 (function) $f(z)$ を考える. ただし, $i = \sqrt{-1}$ と定義し, z の共役複素数 (conjugate complex number) を z^* と表す.

$$f(z) = (3 + 2i)z + (2 + 5i)z^*.$$

(1)

$$f(1) = \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}}i, f(i) = \boxed{\text{ウ}} + i \text{ である.}$$

また, z_1, z_2 を複素数, c_1, c_2 を実数 (real number) とすると, $f(c_1z_1 + c_2z_2) = c_1f(z_1) + c_2f(z_2)$ が常に成り立つ (always holds) .

(2)

$z \neq 0$ に対し, $\frac{f(z)}{z}$ が実数となるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition) は, z が実数 k を用いて $z = k(\boxed{\text{エ}} + i)$ または $z = k(3 - \boxed{\text{オ}}i)$ と表せることである. また, 実数 k によって $z = k(\boxed{\text{エ}} + i)$ と表せるとき, $\frac{f(z)}{z} = \boxed{\text{カ}}$ が成り立つ. 一方で, $z = k(3 - \boxed{\text{オ}}i)$ と表せるとき, $\frac{f(z)}{z} = \boxed{\text{キク}}$ が成り立つ.

(3)

関数 $g(z)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} g(z) &= \left\{ (\boxed{\text{エ}} + i) - i(3 - \boxed{\text{オ}}i) \right\} z + \left\{ (\boxed{\text{エ}} + i) + i(3 - \boxed{\text{オ}}i) \right\} z^* \\ &= (\boxed{\text{ケコ}} - \boxed{\text{サ}}i) z + (\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}}i) z^*. \end{aligned}$$

関数 $g(z)$ の逆関数 (inverse function) $g^{-1}(z)$ は次のように表せる.

$$g^{-1}(z) = \frac{\boxed{\text{セ}} - i}{\boxed{\text{ソタ}}} z + \frac{\boxed{\text{チ}} + i}{\boxed{\text{ツテ}}} z^*.$$

(4)

合成関数 (composite function) $(g^{-1} \circ f \circ g)(z)$ は次のように求められる.

$$(g^{-1} \circ f \circ g)(z) = \boxed{\text{ト}} z + \boxed{\text{ナ}} z^*.$$

(5)

0 以上の整数 n に対し, 関数 $f(z)$ の反復合成関数 (iterated function) $f^n(z)$ を $f^n(z) = \begin{cases} z & (n = 0) \\ (f \circ f^{n-1})(z) & (n \geq 1) \end{cases}$ と定義するとき, $f^n(z)$ は次のように求められる.

$$\begin{aligned} f^n(z) &= \left\{ \frac{\boxed{\text{ニ}}^n + (-\boxed{\text{ヌ}})^n}{\boxed{\text{ネ}}} + \frac{\boxed{\text{ノ}}^n - (-\boxed{\text{ハ}})^n}{\boxed{\text{ヒ}}} i \right\} z + \\ &\quad \left\{ \frac{\boxed{\text{フ}}^n - (-\boxed{\text{ヘ}})^n}{\boxed{\text{ホ}}} + \frac{\boxed{\text{マ}}^n - (-\boxed{\text{ミ}})^n}{\boxed{\text{ム}}} i \right\} z^*. \end{aligned}$$