

**Оптимално разпределение на мандати за 40. Народно събрание
по избирателни райони**

$$F(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right)^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^r x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (2)$$

- r – брой на избирателните райони ($r = 31$);
- p – брой партии, които събират повече от 4% от действителните гласове ($p = 7$);
- v_{ij} – брой гласове на i -тата партия в j -тия район;
- x_{ij} – брой разпределени мандати на i -тата партия в j -тия район (решение на задачата);
- $v_i = \sum_{j=1}^r v_{ij}$ – брой гласове на i -тата партия в страната;
- $w_j = \sum_{i=1}^p v_{ij}$ – брой гласове в j -тия район;
- n_i – брой получени мандати на i -тата партия в страната;
- m_j – брой определени мандати за j -тия район;

Всички числа са цели и се търси целочислено решение!
Дадено е още, че

$$\sum_{i=1}^p n_i = \sum_{j=1}^r m_j = M, \quad (M = 240).$$

Входни данни за CPLEX.
COLUMNS

$$x_{ij} \quad obj \quad -2v_{ij} \left(\frac{1}{v_i n_i} + \frac{1}{w_j m_j} \right)$$

QMATRIX

$$x_{ij} \quad x_{ij} \quad 2 \left(\frac{1}{n_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right)$$

Линеаризация на задачата.

За всяка двойка $(i, j), i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, r$ имаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \dots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^q x_{ijk}$$

$$\left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i}\right)^2 = f_{ijk}^{(1)}, \quad \left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j}\right)^2 = f_{ijk}^{(2)}, k = 0, 1, \dots, q.$$

Целева функция:

$$F(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q x_{ijk} f_{ijk}^{(1)} + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^q x_{ijk} f_{ijk}^{(2)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q \left(f_{ijk}^{(1)} + f_{ijk}^{(2)}\right) x_{ijk}$$

при ограничения:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

и

$$\sum_{k=0}^q x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \text{за всяко } i, j, k.$$

Размери на задачата: $(p = 7, r = 31, q = 6)$

– неизвестни: $pr(q + 1) = 1519$;

– събираеми в целевата функция: $pr(q + 1) = 1519$;

– ограничения: $p + r = 38$ от първия вид и $pr = 217$ от втория вид.

Входни данни за GLPK.