

翻转水瓶平稳落地现象的研究

寻之朋 张晓黎 于泽威

(中国矿业大学 物理学院 江苏 徐州 221116)

摘要: 本文对半满水瓶的翻转过程进行了理论与实验探究. 通过对翻转过程中瓶内水的分布的简化假设, 利用角动量守恒对水瓶翻转过程进行了理论分析. 并且从实验上探究了初始角速度、加水量以及地面粗糙程度对水瓶平稳落地成功率的影响.

关键词: 半满水瓶; 翻转; 平稳落地

中图分类号: O 39

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2019)06-0037-05

【DOI】10.16854/j.cnki.1000-0712.180672

当下十分火热的水瓶投掷游戏^[1]操作如下: 把一个半满的水瓶发射到空中, 使它先翻一个筋斗, 然后平稳垂直地落在地面上, 如图 1 所示.



图 1 水瓶翻转(图片来自 2018CUPT)

半满水瓶在翻转过程中, 水在瓶中的分布改变, 导致相对系统质心的转动惯量增加, 由于系统只受重力, 角动量守恒, 故角速度减小, 翻转一周后近乎垂直下落^[2]. 文献[3]通过对比两个网球在翻转瓶中的运动, 建立水瓶质心的一维运动模型, 得出水瓶转动惯量及角速度的变化规律, 给出了使游戏成功的最优范围. 本文中也采用了先得出质心运动规律, 进一步算出转动惯量及角速度的方法, 不同的是, 本文将建立水瓶质心的二维运动模型, 并通过实验验证其理论的正确性, 最终给出的是使游戏成功率最大的精确值. 此外, 水瓶最终稳定落地与瓶子发射的初始角速度及地面粗糙程度等因素也在本文的讨论范围内.

1 理论分析

首先, 本文给出了水瓶翻转过程的拍摄图像,

如图 2 所示. 从图 2 中可以看出, 在翻转过程中, 水会逐渐分为两个部分(见图中瓶底和瓶口位置), 因此将瓶内水的运动简化为如下五个过程, 如图 3 所示, 其中, θ 为瓶子长对称轴与铅垂线的夹角, 1 和 2 分别表示逐渐分开的两部分水.

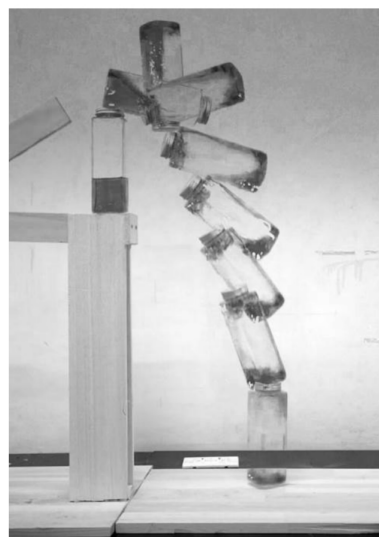


图 2 水瓶翻转拍摄图

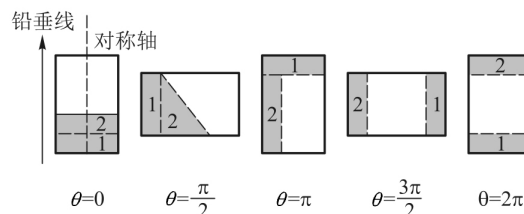


图 3 水瓶翻转过程水的分布图模型

收稿日期: 2018-12-10; 修回日期: 2019-01-09

基金项目: 中国矿业大学课程建设与教学改革项目(2017YB31); 中国矿业大学“十三五”品牌培育专业项目(应用物理学)资助

作者简介: 寻之朋(1983—), 男, 山东金乡人, 中国矿业大学物理学院副教授, 博士, 主要研究方向是凝聚态与统计物理.

为方便计算,本文以方柱形瓶子为例进行分析.建立如图4所示的坐标系,其中 $h_1 = kh$, $h_1 + h_2 = h$. h 为瓶内水的高度, h_1, h_2 分别为1,2两部分水的高度, $k(0 \leq k \leq 1)$ 为比例系数. H 为瓶子的高度, m_0 为瓶子的质量, $2a$ 为方瓶子的边长.

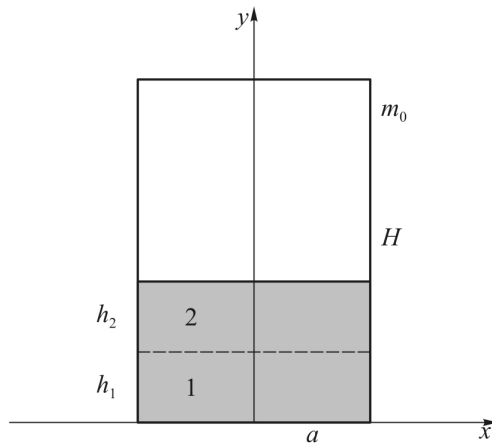


图4 坐标系示意图

水2相对瓶子的质心在同一平面内,设 x 方向上水2质心轨迹近似为二次函数的形式:

$$x_2(\theta) = a_1\theta^2 + b_1\theta + c_1 \quad (1)$$

代入 $\theta = 0, \pi, 3\pi/2$ 处质心坐标,即

$$x_2 = \begin{cases} 0, & \theta = 0 \\ \frac{H-h_1-h_2}{H-h_1}a, & \theta = \pi \\ 0, & \theta = 3\pi/2 \end{cases} \quad (2)$$

可以解得

$$x_2(\theta) = \begin{cases} -\frac{H-h_1-h_2}{H-h_1} \frac{2a}{\pi^2} \theta \left(\theta - \frac{3}{2}\pi \right), & \theta \leq \frac{3}{2}\pi \\ 0, & \theta \geq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (3)$$

设 x_1 为水1沿 x 方向上的质心,则瓶内水(1、2两部分)在 x 方向上相对于瓶子的质心^[4]为

$$x_c = \frac{h_1x_1 + h_2x_2}{h_1 + h_2} = \frac{k h x_1 + (1-k) h x_2}{h} \quad (4)$$

由于 x_1 恒为零,故 x 方向上体系(水+瓶子)相对于瓶子的质心为

$$X_c = \frac{m x_c}{m_0 + m} \quad (5)$$

其中, m 为水的质量. 设水的密度为 ρ , 则

$$m = 4a^2 h \rho \quad (6)$$

同理,设 y 方向上水2质心轨迹为

$$y_2(\theta) = a_2\theta^2 + b_2\theta + c_2 \quad (7)$$

代入 $\theta = 0, \pi, 3\pi/2$ 处质心坐标,即

$$y_2 = \begin{cases} h_1 + \frac{h_2}{2}, & \theta = 0 \\ \frac{H}{2} + \frac{h_1}{2}, & \theta = \pi \\ H - \frac{h_2}{2}, & \theta = \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (8)$$

可以解得

$$y_2 = \begin{cases} \left(\frac{\theta^2}{3\pi^2} + \frac{\theta}{6\pi} \right) (H - h_1 - h_2) + h_1 + \frac{h_2}{2}, & \theta \leq \frac{3}{2}\pi \\ H - \frac{h_2}{2}, & \theta \geq \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad (9)$$

设 y_1 为水1沿 y 方向上的质心,则水在 y 方向上相对于瓶子的质心为

$$y_c = \frac{h_1 y_1 + h_2 y_2}{h_1 + h_2} = \frac{k h y_1 + (1-k) h y_2}{h} \quad (10)$$

而 $y_1 = h_1/2$, 故 y 方向上体系相对于瓶子的质心为

$$Y_c = \frac{m_0 \frac{H}{2} + m y_c}{m_0 + m} \quad (11)$$

综上,体系相对于瓶子的质心即为式(5)和式(11). 根据式(5)和式(11),可进一步求出体系对质心的转动惯量. 水的转动惯量为

$$I_m = 2a\rho \left(\int_0^{h_1} dy + \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2} + \frac{H}{2}} dy \right) \cdot \int_{-a}^a [(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2] dx \quad (12)$$

瓶子的转动惯量为

$$I_{m_0} = \int_0^H \int_{-a}^a [(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2] \sigma dS + \int_{-a}^a [2(x - X_c)^2 + Y_c^2 + (H - Y_c)^2] 2a\sigma dx + \int_0^H [(x_c + a)^2 + (x_c - a)^2 + 2(y - Y_c)^2] 2a\sigma dy \quad (13)$$

其中,面密度 $\sigma = m_0 / (8a^2 + 8aH)$. 故总转动惯量为

$$I = I_m + I_{m_0} \quad (14)$$

由于水瓶只受重力,对质心力矩为0,故体系相对于过质心的轴角动量守恒,即

$$L_0 = I_0 \omega_0 = I(\theta) \omega(\theta) \quad (15)$$

其中, I_0, ω_0 是 $\theta = 0$ 时体系的转动惯量和角速度.

$$\text{作出} \quad \frac{\omega(\theta)}{\omega_0} = \frac{I_0}{I(\theta)} \quad (16)$$

随角度 θ 变化的关系,如图5所示. 随着瓶子的转动,体系绕质心轴的转动惯量逐渐增大,从而角速度逐渐减小.

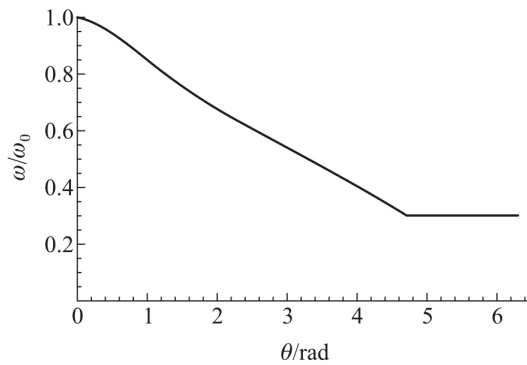


图5 角速度比值随角度变化关系

旋转一周后体系的角速度为

$$\omega(2\pi) = \frac{I_0\omega_0}{I(2\pi)} \quad (17)$$

上式与 h 、 k 和 ω_0 有关. h 、 k 和 ω_0 相互关联, 存在两个约束条件^[5].

水瓶在翻转过程中, 设竖直方向上初始速度为 v_0 , 瓶子下落高度为 l , 则

$$l = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad (18)$$

$$\text{又} \quad I_0\omega_0 = amv_0 \quad (19)$$

可以解得水瓶落地所需要的时间为

$$t = \frac{1}{g} \left\{ \frac{I_0\omega_0}{a(4a^2h\rho + m_0)} + \sqrt{\left[\frac{I_0\omega_0}{a(4a^2h\rho + m_0)} \right]^2 + 2gl} \right\} \quad (20)$$

而瓶子落地时 ($t = t_0$) 恰好旋转一周

$$\theta(t_0) - \theta(0) = 2\pi \quad (21)$$

$$\text{由角动量定理} \quad I(\theta) \frac{d\theta}{dt} = I_0\omega_0 \quad (22)$$

可解得 $\theta = \theta(t)$ 关系. 由于 $\theta(t)$ 中含 h 、 k 、 ω_0 , 故约束条件 1 为

$$F(h, k, \omega_0) = \theta(t_0) - 2\pi = 0 \quad (23)$$

考虑瓶子内水的分离, 当瓶子旋转角度为 π 时 (如图 6 所示), 水最易下落, 此时可确定 1、2 两部分水的比例, 对于 1 部分水的表面有临界条件

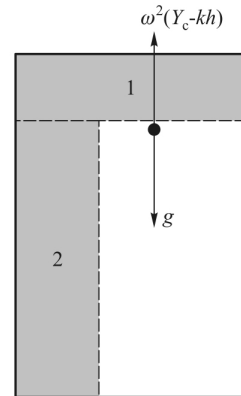
$$\omega^2(\pi)(Y_c(\pi) - kh) = g \quad (24)$$

当 $\theta = \pi$ 时, 将 $\omega(\pi)$ 和 $Y_c(\pi)$ 的具体表达式代入上式, 故得约束条件 2 为

$$G(h, k, \omega_0) = \omega^2(\pi)(Y_c(\pi) - kh) - g = 0 \quad (25)$$

利用拉格朗日乘数法求 $\omega(2\pi)$ 在 $F = 0$, $G = 0$ 条件下的极小值. 拉格朗日函数为

$$H(h, k, \omega_0) = \omega(2\pi) + \lambda F(h, k, \omega_0) + \mu G(h, k, \omega_0) \quad (26)$$

图6 $\theta = \pi$ 时水 1 表面受力

其中 λ 、 μ 为参数. 对各变量求一阶导, 有

$$\begin{cases} H_h(h, k, \omega_0) = \omega_h(2\pi) + \lambda F_h(h, k, \omega_0) + \mu G_h(h, k, \omega_0) = 0 \\ H_k(h, k, \omega_0) = \omega_k(2\pi) + \lambda F_k(h, k, \omega_0) + \mu G_k(h, k, \omega_0) = 0 \\ H_{\omega_0}(h, k, \omega_0) = \omega_{\omega_0}(2\pi) + \lambda F_{\omega_0}(h, k, \omega_0) + \mu G_{\omega_0}(h, k, \omega_0) = 0 \\ H_{\lambda}(h, k, \omega_0) = F(h, k, \omega_0) = 0 \\ H_{\mu}(h, k, \omega_0) = G(h, k, \omega_0) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

解上述方程组即得到使瓶子具有最小角速度的一组参数

$$(h, k, \omega_0) = (7.02 \text{ cm}, 0.5, 26.90 \text{ rad/s}) \quad (28)$$

联立两个约束条件, 消掉 ω_0 可得到 h 与 k 的约束关系

$$S(h, k) = 0 \quad (29)$$

又落地时角速度和初始角速度比值关系

$$\frac{\omega(2\pi)}{\omega_0} = \frac{I_0}{I(2\pi)} = f(h) \quad (30)$$

联立上述两式, 可得 $\omega(2\pi)/\omega_0$ 与 h 的关系如图 7 所示. 从图 7 中可以看出, 当瓶内不装水或满水时, 瓶子角速度均不会减小, 因为此时系统可视为刚体, 体系质心不变, 转动惯量及角速度也不发生变化.

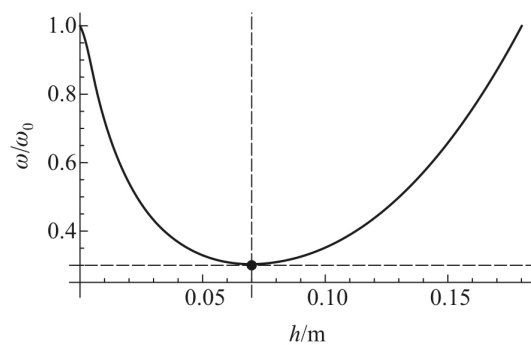


图7 角速度比值随水高度变化关系

当水瓶落地时,具有一定的水平速度,当地面较光滑时,水瓶向前滑动缓冲,此时水瓶一般不会倾倒;当地面较粗糙时,瓶子会发生绕瓶底边缘的转动,如图8所示.

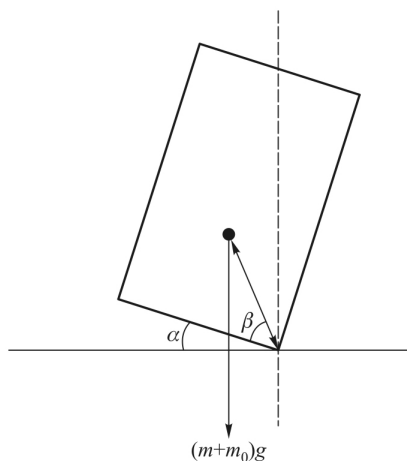


图8 水瓶接触地面时的受力分析示意图

对于地面上的转动接触点,由角动量定理

$$-r(m+m_0)g\cos(\alpha+\beta) = I(2\pi)\frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (31)$$

其中, $r = \sqrt{a^2 + Y_c^2(2\pi)}$, $\cos\beta = \alpha/r$.

由初始条件

$$\alpha|_{t=0} = 0, \quad \dot{\alpha}|_{t=0} = \frac{H - Y_c(2\pi)}{H}\omega(2\pi) \quad (32)$$

从而解出 $\alpha = \alpha(t)$ 关系.

当 $\alpha_{\max} \leq \pi/2 - \beta$ 时,瓶子将不会倾倒,此时

$$\omega(2\pi) \leq 8.54 \text{ rad/s} \quad (33)$$

2 实验研究

进行对照实验前,本文先对角速度变化规律进行了实验测量,从而验证理论分析所得的图5规律的正确性.实验结果如图9所示,其中实线表示理

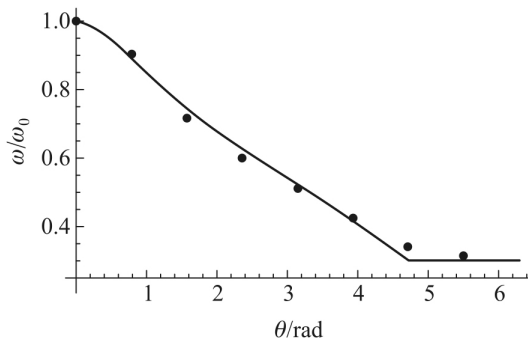


图9 角速度比值理论实验对比图

论所得角速度比值随角度的变化关系,点为实验测得的不同角度下的角速度比值.从图9中可以看出,理论和实验符合得较好.实验中的基本参数测值如下: $a = 30.0 \text{ mm}$, $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $H = 180.0 \text{ mm}$, $m_0 = 0.058 \text{ kg}$, $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

接下来,本文设置了多组对照实验,对初始角速度,加水量以及地面粗糙程度等因素对水瓶翻转成功率进行了探究.

2.1 初始角速度对翻转成功率的影响

通过改变初始角速度,保持加水量和水平面不变,从而给出成功率与初始角速度的关系,并对理论值进行验证,实验结果如表1所示.

表1 成功率与初始角速度的关系

加水量/ 占比	水平面 种类	初角速度/ (rad·s ⁻¹)	成功次数/ 总次数	成功率
7/18	木质板	13.4±1.5	0/100	0%
		20.9±1.5	7/100	7%
		26.9±1.5	19/100	19%
		29.4±1.5	11/100	11%
		35.1±1.5	6/100	6%

从表1可以看出,扔水瓶成功率与水瓶初始旋转角速度有关,当角速度接近理论值 26.9 rad/s 时,成功率最大.

2.2 加水量对翻转成功率的影响

通过改变加水量,保持初始角速度和水平面不变,从而给出成功率与加水量的关系,实验结果如表2所示.

表2 成功率与加水量的关系

加水量/ 占比	水平面 种类	初角速度/ (rad·s ⁻¹)	成功次数/ 总次数	成功率
5/18	木质板	26.9±1.5	7/100	7%
6/18			11/100	11%
7/18			19/100	19%
8/18			12/100	12%
9/18			9/100	9%

从表2可以看出,扔水瓶成功率与水瓶加水量有关,当加水量为 $7/18$ 时,成功率最大.

2.3 地面摩擦系数对翻转成功率的影响

通过改变水平面,保持初始角速度和加水量不变,从而给出成功率与地面粗糙程度的关系,实验结果如表3所示.

表 3 成功率与地面粗糙程度的关系

加水量/ 占比	水平面 种类	初角速度/ (rad · s ⁻¹)	成功次数/ 总次数	成功率
7/18	水泥地	26.9±1.5	10/100	10%
	木质板		18/100	18%
	瓷地板		19/100	19%

从表 3 可以看出, 扔水瓶成功率与地面粗糙有关, 地面较为光滑时, 成功率较高.

3 结论

本文采用理论和实验相结合的方法, 通过建立系统的运动方程对水瓶翻转过程进行了简化定量分析. 理论计算得到水瓶稳定落地的最佳条件, 并且通过对照实验验证了理论中分析的三种影响因素对水瓶落地成功率的可靠性. 得到主要结论如下: 1) 扔水瓶成功率主要由水瓶落地时角速度决定, 落地时的角速度越小, 成功率越高; 2) 水瓶落地时角速度由初始角速度和水量占瓶比决定, 综合调控

这两个因素可得到瓶子落地时的最小角速度, 从而可提高扔水瓶成功率; 3) 扔水瓶成功率与地面摩擦程度也有一定关系, 一般情况下, 地面较光滑时, 成功率较高; 4) 游戏建议: 若设计一个装置可提供较大向上扔的初速度, 使落地点高于抛出点, 可使得落地速度接近于 0, 扔水瓶可能具有更大的成功率.

参考文献:

[1] Wikipedia: Bottle flipping [EB/OL].https://en.wikipedia.org/wiki/Bottle_flipping.
[2] The complex physics of that viral water bottle trick , explained (vox.com , 2016) [EB/OL]. <https://www.vox.com/2016/5/26/11785562/water-bottle-flip-physics>.
[3] Dekker P J , Eek L A G , Flapper M M , et al. Water Bottle Flipping Physics [J]. American Journal of Physics , 2018 , 86(10) : 733-739.
[4] 张三慧. 大学物理学(力学、热学) [M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
[5] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2009.

Research on the phenomenon of water bottle flipping to the ground smoothly

XUN Zhi-peng , ZHANG Xiao-li , YU Zhe-wei

(School of Physics , China University of Mining and Technology , Xuzhou , Jiangsu 221116 , China)

Abstract: In this paper , the flipping of partially filled plastic bottle is investigated theoretically and experimentally. Through simplifying the distribution of the water in the flipping bottles , the movement of flipping bottle is analyzed theoretically by using the conservation of angular momentum. Then the effects of the initial angular velocity , the proportion of water in bottle and the ground roughness on the success rate of the bottle landing stably are investigated experimentally. Finally , a game advice is given.

Key words: partially filled plastic bottle; flipping; landing stably

《大学物理》第十届编委会名单

- 顾 问: 赵凯华 喀兴林 赵 峥
主 编: 田光善
副主编: 包景东 安 宇 宋 峰 高 建 周 静
编 委: (以汉语拼音为序)
白在桥 班士良 包 雷 陈 浩 陈 敏 沙依甫加马力·达吾来提
高 景 何 勤 鞠国兴 喀蔚波 刘建强 刘觉平 刘全慧 刘玉斌
卢荣德 陆建隆 马世红 穆良柱 宁长春 施大宁 田 强 田永红
王建波 王小力 王祖源 吴崇试 吴绍全 吴小山 解希顺 忻 蓓
杨永棚 杨丽佳 于凤军 张汉壮 钟建新 朱鹤年