

Tour de Murales

Integrantes:

Juan Camilo Falla & Nicolás Klopstock

Entrega 2: Implementación y resultados del Modelo Matemático Modelado, Simulación y Optimización

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación

Universidad de Los Andes

Bogotá, Colombia

Semestre 2023-10

1 Descripción del Problema

Una familia de turistas viaja a una ciudad que no conocen durante la época de vacaciones. Una específica tarde que no tienen planeado nada que hacer, deciden salir a ver los famosos murales de la ciudad. Estos son grandes pinturas en diferentes, valga la redundancia, muros de toda la ciudad. La familia quiere desea visitar murales en una tarde, sin alejarse mucho de su hotel para poder disfrutar de sus vacaciones sin que estas sean extenuantes (minimizar la distancia de recorrida desde hotel).

Adicionalmente, ellos desean descansar en algún momento de la tarde. Teniendo en cuenta lo anterior, se desea hacer una única parada en la cual la familia sea capaz de comprar refrescos y tomar su descanso. La familia conoce las distancias que hay entre cualquiera de los puntos de interés, motivo por el cual este valor será tomado como el costo del camino.

2 Descripción de limitaciones y maximización/minimización

La familia quiere visitar un cierto número de murales (nodos), minimizando la distancia (costo) de cada distancia entre murales (enlaces). Además, entre los puntos por los que quiere pasar, debe haber lugares de venta de refrescos, donde la familia pueda descansar antes de seguir su tour.

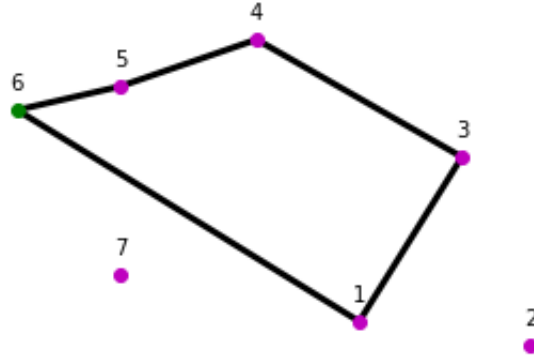


Fig. 1. Ejemplo de resultado del modelo con los valores que se verán en las restricciones. Nodos magenta: murales. Nodos verdes: refrescos.

3 Conjuntos, Parámetros y Variables

Table 1. Conjuntos, Parámetros y Variables de decisión.

Conjuntos y parámetros	Descripción
$i \in N$	Conjunto de nodos que se pueden visitar
$k \in M$	Conjunto de murales que se pueden visitar.
$l \in R$	Conjunto de lugares en donde pueden parar a descansar.
$f \in F$	Cantidad de enlaces parte del tour.
C_{ij}	Conjunto de distancias entre cualquier punto de interés (murales y sitios de refrescos).

Table 2. Variables de decisión

Variables	Descripción
X_{ij}^f	Variable binaria que determina la selección de un enlace.
W_i	Variable binaria que determina la selección de un nodo.

4 Función Objetivo y Restricciones

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{f \in F} C_{ij} * X_{ij}^f \quad (1)$$

4.1 Función Objetivo

La F.O hace referencia a que se quiere minimizar el costo de cada camino para ver un cierto número de murales y pasando por algunos lugares de descanso. Esta minimización logra encontrar el camino de menor peso (el camino más corto) entre algunos nodos de un mismo grafo.

4.2 Restricciones

La primera restricción hace referencia a no repetir enlaces:

$$x_{ij}^f + x_{ij}^f \leq 1 \quad \forall_{ij \in N, f \in F} \quad (2)$$

La segunda restricción hace referencia a que el siguiente enlace escogido no sea el mismo anterior en dirección contraria (ej. enlace 2-5 y 5-2):

$$x_{ij}^f + x_{ij}^g \leq 1 \quad \forall_{ij \in N, f, g \in F / f \neq g} \quad (3)$$

Notar que g es solo una copia de f , para diferenciar ambos enlaces.

La tercera restricción hace referencia a que, por cada enlace f , solo un par (i, j) debe ser escogido:

$$\sum_{ij \in N} x_{ij}^f = 1 \quad \forall_{f \in F} \quad (4)$$

La cuarta restricción hace referencia a que, para cada par (i, j) debe haber, a lo sumo, un enlace f activado:

$$\sum_{f \in F} x_{ij}^f \leq 1 \quad \forall_{ij \in N} \quad (5)$$

La quinta restricción hace referencia a que, para el nodo inicial, debe salir un enlace:

$$\sum_{j \in N} x_{ij}^f = 1 \quad \forall_{i \in N, f \in F / i = INICIAL \wedge f = 1} \quad (6)$$

La sexta restricción hace referencia a que, si a un nodo le entra un enlace f_x , le debe salir un enlace f_{x+1} :

$$\sum_{k \in M} x_{jk}^d \geq x_{ij}^f \quad \forall_{ij \in N, f, d \in F / d = f + 1 \wedge f < TOTAL_{VISITAR}} \quad (7)$$

Notar que $TOTAL_{VISITAR}$ es nodos mural + nodos descanso + nodo hotel.

La séptima restricción hace referencia a la condición de que, si se escoge un par de nodos (i, j) y su enlace f , se debe activar también la variable w :

$$w_i \geq x_{ij}^f \quad \forall_{ij \in N, f \in F} \quad (8)$$

La novena restricción hace referencia a que el total de murales visitados no se puede pasar del total de deseados:

$$\sum_{k \in M} w_k = DESEADOS \quad (9)$$

La décima restricción hace referencia a que el total de nodos seleccionados debe ser igual que los establecidos (nodo inicial + murales + un lugar de refresco):

$$\sum_{i \in N} w_i = MUST_{VISIT} \quad (10)$$

La decimoprimer restricción hace referencia a que el total de lugares de refresco visitados no se puede pasar del total de 1.

$$\sum_{l \in R} w_l = 1 \quad (11)$$

La decimosegunda restricción hace referencia a que el nodo origen no puede ser un nodo intermedio del camino. Además, ayuda a forzar que quede como nodo cierre del ciclo:

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^f = 1 \quad \forall_{j \in N, f \in F / j = INICIAL \wedge f = MUST_{VISIT}} \quad (12)$$

La decimotercera y última restricción hace referencia a que, los nodos activados, solo les salga un enlace:

$$\sum_{j \in N, f \in F} x_{ij}^f \leq 1 \quad \forall_{i \in N} \quad (13)$$

5 Implementación y resultados del Modelo Matemático

En esta sección se van a describir dos escenarios de prueba para demostrar el funcionamiento del modelo matemático. Importante notar que, para las representaciones gráficas, magenta es un nodo mural, verde es un nodo de lugar de refresco y azul es el hotel.

5.1 Escenario 1

El escenario 1 consta de una versión sencilla del problema en el cuál la familia desea visitar un único mural en un día dado de sus vacaciones. En el grafo se encuentra: el hotel, 3 murales y un punto de refrescos. La limitación de una sola parada por un refresco se mantiene y los parámetros que entrarán al problema son:

Table 3. Parámetros del modelo

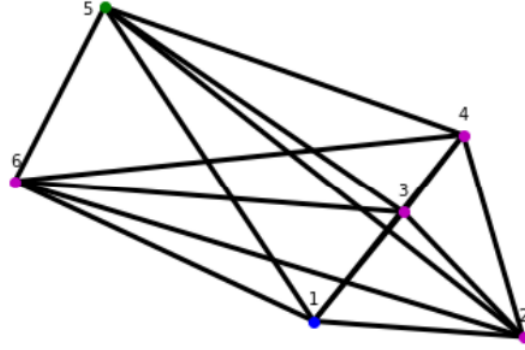
Parámetros	Valores
$\{n_1 * n_6\}$	Conjunto de nodos que se pueden visitar.
Ver Table. 4	Conjunto de distancias entre cualquier punto de interés (murales y sitios de refrescos)
$\{t_1 * t_3\}$	Conjunto de tipos de nodos. $t_1 := \text{hotel}, t_2 := \text{mural}, t_3 := \text{refresco}$
1	Cantidad de murales a visitar: DESIRED $\in \mathbb{N}$
n_1	Nodo origen (indica el nodo hotel)
Ver Table. 5	Conjunto que establece si hay un enlace entre un nodo y otro.

Table. 4. Conjunto de distancias.

	n1	n2	n3	n4	n5	n6
n1	999	2	5	5	2	9
n2	2	999	3	5	1	9
n3	5	3	999	2	3	11
n4	5	5	2	999	4	12
n5	2	2	3	4	999	4
n6	6	2	3	6	4	999

Table. 5. Conjunto de enlaces existentes.

	n1	n2	n3	n4	n5	n6
n1	0	1	1	1	1	1
n2	1	0	1	1	1	1
n3	1	1	0	1	1	1
n4	1	1	1	0	1	1
n5	1	1	1	1	0	1
n6	1	1	1	1	1	0

Table. 6. Representación gráfica del escenario.

5.2 Resultados Escenario 1

Se van a mostrar los resultados de este escenario:

Table. 7. Resultados Escenario 1

```

----  125 VARIABLE x.L  Indicates if the link i-j is selected or not.

              f1          f2          f3

n1.n2      1.000
n2.n5              1.000
n5.n1                      1.000

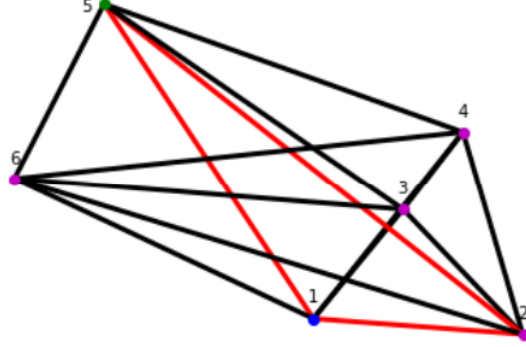
----  126 VARIABLE w.L  Lleva cuenta de los nodos visitados.

n1 1.000,   n2 1.000,   n5 1.000

----  127 VARIABLE z.L              =          5.000 Objective function.

```

Teniendo en cuenta los resultados del escenario 1 podemos ver que el modelo logra resolver un caso sencillo de manera correcta. Este elige todos los enlaces que le permiten cumplir con todas las restricciones de puntos a visitar deseados por la familia mientras que mantiene el camino de menor costo para que la familia se movilice la menor distancia posible. Esto se evidencia por distintos factores, en primer lugar, podemos ver que el enlace f_1 se origina en el nodo 1 el cuál es considerado como el hotel en el cual se aloja la familia. Adicionalmente se puede evidenciar una secuencia que se relaciona entre los f y los enlaces elegidos para cada f_x . Se puede observar que el nodo destino del primer enlace corresponde directamente con el nodo origen del segundo y este patrón se repite para los tres enlaces. Adicionalmente, la variable $W(i)$ nos permite validar que se cumplan con las restricciones de cantidad murales deseados y de la parada y también que estos están siendo visitados en la matriz de resultados mostrada anteriormente.

Table. 8. Representación gráfica de los resultados del escenario

5.3 Escenario 2

El escenario 2 consta de una versión más compleja del problema en el cuál la familia desea visitar 4 murales en un día dado de sus vacaciones. En el grafo se encuentra: el hotel, 6 murales y dos puntos de refrescos. La limitación de una sola parada por un refresco se mantiene y los parámetros que entrarán al problema son:

Table. 9. Parámetros del modelo

Parámetros	Valores
$\{n_1 * n_9\}$	Conjunto de nodos que se pueden visitar.
Ver <i>Table. 4</i>	Conjunto de distancias entre cualquier punto de interés (murales y sitios de refrescos)
$\{t_1 * t_3\}$	Conjunto de tipos de nodos. $t_1 := \text{hotel}, t_2 := \text{mural}, t_3 := \text{refresco}$
1	Cantidad de murales a visitar: DESIRED $\in \mathbb{N}$
n_1	Nodo origen (indica el nodo hotel)
Ver <i>Table. 5</i>	Conjunto que establece si hay un enlace entre un nodo y otro.

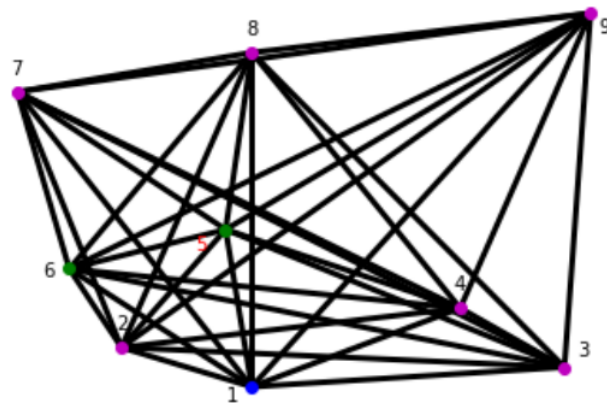
Table. 10. Conjunto de distancias.

	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9
n1	999	8	5	4	20	6	22	32	12
n2	8	999	4	10	13	10	23	42	22
n3	5	4	999	2	15	17	22	4	3
n4	4	10	2	999	4	14	6	30	11
n5	20	13	15	4	999	8	10	6	20
n6	6	10	17	14	8	999	10	8	10
n7	22	23	22	6	10	10	999	12	19
n8	32	42	4	30	6	8	12	999	8
n9	12	22	3	11	20	10	19	8	999

Table. 11. Conjunto de enlaces existentes.

	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9
n1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
n2	1	0	1	1	1	1	1	1	1
n3	1	1	0	1	1	1	1	1	1
n4	1	1	1	0	1	1	1	1	1
n5	1	1	1	1	0	1	1	1	1
n6	1	1	1	1	1	0	1	1	1
n7	1	1	1	1	1	1	0	1	1
n8	1	1	1	1	1	1	1	0	1
n9	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Table. 12. Representación gráfica del escenario.



5.4 Resultados Escenario 2

Table. 13. Resultados Escenario 1

```

---- 130 VARIABLE x.L Indicates if the link i-j is selected or not.

      f1      f2      f3      f4      f5      f6

n1.n3      1.000
n3.n9              1.000
n4.n1                      1.000
n5.n4                      1.000
n8.n5              1.000
n9.n8              1.000

---- 131 VARIABLE w.L Lleva cuenta de los nodos visitados.

n1 1.000,   n3 1.000,   n4 1.000,   n5 1.000,   n8 1.000,   n9 1.000

---- 132 VARIABLE z.L = 30.000 Objective function.

```

Teniendo en cuenta los resultados del escenario 2 podemos ver que el modelo logra resolver un caso más complejo y grande de manera correcta. Este elige todos los enlaces que le permiten cumplir con todas las restricciones de puntos a visitar deseados por la familia mientras que mantiene el camino de menor costo para que la familia se movilice la menor distancia posible. Esto se evidencia por distintos factores, en primer lugar, podemos ver que el enlace f_1 se origina en el nodo 1 el cuál es considerado como el hotel en el cual se aloja la familia. Adicionalmente se puede evidenciar una secuencia que se relaciona entre los f y los enlaces elegidos para cada f_x . Se puede observar que el nodo destino del primer enlace corresponde directamente con el nodo origen del segundo y este patrón se repite para los seis enlaces. Adicionalmente, la variable $W(i)$ nos permite validar que se cumplan con las restricciones de cantidad murales deseados y de la parada y, también, que estos están siendo visitados en la matriz de resultados mostrada anteriormente.

Table. 14. Representación gráfica de los resultados del escenario

