球座標の導出

よく知らている

2 次元極座標

$$x^2 + y^2 = r^2 \ (r \geq 0) \longleftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad , 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

がある. ここから導出することができる.

まず, 3 次元 (x, y, z) 座標の球の式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ (r \geq 0)$$

である.

ここで $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと $l^2 = x^2 + y^2$ である. これを上の式に当てはめると

$$l^2 + z^2 = r^2$$

である.

これはよくよくみてみると 2 次元と同じである.

ただし, $l \geq 0$ としているので

$$\begin{cases} l = r\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad , 0 \leq \theta \leq \pi$$

となる.

$l = r\sin\theta$ を $x^2 + y^2 = l^2$ に代入すると

$$x^2 + y^2 = (r\sin\theta)^2$$

となる. これは 2 次元そのものである ($x^2 + y^2 = r^2$ の r が $r\sin\theta$ になっただけである) から,

$$\begin{cases} x = (r\sin\theta)\cos\varphi \\ y = (r\sin\theta)\sin\varphi \end{cases} \quad , 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

となる.

よって 3 次元極座標 (球座標) は

球座標

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ (r \geq 0) \longleftrightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad , \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$