卒業論文「双対作用素のコンパクト性」【詳細版】

S17M066 中橋健太郎

概要

本文において, 可換体 $\mathbf{K}$ は実数全体 $\mathbf{R}$ または複素数全体 $\mathbf{C}$ であるとする.

1 基礎事項

1.1 Hahn-Banach の定理

線型空間における線型写像についての重要な結果として Hahn-Banach の定理がある.

1.1.1 順序関係，極大元

Hahn-Banach の定理を述べるまえに，集合論の復習をしておこう.

定義 1.1 (順序関係). 集合 A の二項関係 $\preceq$ が次を満たすとき，A は順序関係 $\preceq$ をもつという：

(反射律) 任意の $a \in A$ に対して，$a \preceq a$.
(推移律) 任意の $a, b, c \in A$ に対して，$a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ ならば $a \preceq c$.
(反対称律) 任意の $a, b \in A$ に対して，$a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ ならば $a = b$.

また，順序集合 $A = (A, \preceq)$ が比較可能性の法則を満たす，すなわち，

$$a, b \in A \qquad \Longrightarrow \qquad a \preceq b \quad \text{または} \quad b \preceq a$$

が成り立つとき，A は**全順序集合**という.

- $s \in A$ が $B \subseteq A$ の**上界**であるとは，任意の $x \in B$ に対して，$x \preceq s$ となることである.
- $m \in A$ が A の**極大元**であるとは，任意の $x \in A$ に対して，$m \preceq x$ ならば $x = m$ となることである.
- A が**帰納的**であるとは，A の任意の全順序部分集合が上界を持つことである.

事実 1.2 (Zorn の補題). 空でない任意の帰納的順序集合は極大元を持つ (証明には選択公理を使う).

1.1.2 Hahn-Banach の定理

実線型空間における Hahn-Banach の定理が次である.

定理 1.3 (Hahn-Banach の拡張定理 1). E を $\mathbf{R}$ 上の線型空間，$G \subseteq E$ を部分空間とする.
写像 $p : E \to \mathbf{R}$ と線型写像 $g : G \to \mathbf{R}$ が

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad (\forall x \in E,\ \forall \lambda \geqslant 0) \tag{1.1}$$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad (\forall x, \forall y \in E) \tag{1.2}$$

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.3}$$

を満たすとき，g を拡張する，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{R}$ (i.e., $\forall x \in G,\ f(x) = g(x)$) が存在して，

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.4}$$

を満たす.

定理 1.3 の証明.

次のような集合 P を考える．

$$P := \left\{ h \;\middle|\; \begin{array}{l} h : D(h) \to \mathbf{R},\ D(h) \text{ は } E \text{ の部分空間},\ h \text{ は線型写像}, \\ G \subseteq D(h),\ h \text{ は } g \text{ の拡張であり，任意の } x \in D(h) \text{ に対して } h(x) \leqslant p(x) \end{array} \right\}$$

P の二項関係を

$$h_1 \preceq h_2 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad D(h_1) \subseteq D(h_2) \text{ かつ } h_2 \text{は } h_1 \text{の拡張 (i.e., } h_2|_{D(h_1)} = h_1)$$

と定めれば，これは順序関係である．実際，$D(h_1) = D(h_1)$ かつ $h_1 = h_1$ により反射律がわかり，$h_1 \preceq h_2$ かつ h_2 かつ h_3 を仮定すれば $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_3)$ かつ任意の $x \in D(h_1)$ に対して，$h_1(x) = h_2(x) = h_3(x)$ より推移律もわかり，$h_1 \preceq h_2$ かつ $h_2 \preceq h_1$ を仮定すれば $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_1)$ より $D(h_1) = D(h_2)$ となり $h_1 = h_2$ が従い，反対称律も成り立つ．このことから $g \in P$ がわかるので $P \neq \varnothing$．また，P は帰納的である．実際，$Q \subseteq P$ を全順序部分集合とし $Q = \{h_i \,|\, i \in I\}$ とする．写像 $u : D(u) \to \mathbf{R}$ を次のように定義する：

$$D(u) := \bigcup_{i=1}^{n} D(h_i)\ ;\quad u|_{D(h_i)} = h_i.$$

すると，$u \in P$ かつ u は Q の上界である．実際，$D(u)$ が E の部分空間であることは Q が全順序部分集合であることから簡単にわかり[1)]，u の線型性も同様にわかり[2)]，$u \in P$ がわかる．また u が Q の上界であることは，任意の $h_i \in Q$ $(i \in I)$ に対して，$D(h_i) \subseteq D(u)$ かつ $u|_{D(h_i)} = h$ となることからわかる．よって，P は帰納的であることがわかった．Zorn の補題 (事実 1.2) より P の極大元 $f \in P$ が存在する．$D(f) = E$ が示せれば主張が従う．$D(f) \neq E$ を仮定し，$x_0 \in E \setminus D(f)$ を取る．任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して，

$$v_\xi : D(f) \oplus \mathbf{R}x_0 := \{x + \alpha x_0 \,|\, x \in D(f), \alpha \in \mathbf{R}\} \ni x + \alpha x_0 \mapsto f(x) + \alpha\xi \in \mathbf{R}$$

として，$D(v_\xi) = D(f) \oplus \mathbf{R}x_0$ 上の線型汎函数 v_ξ を定めると，v_ξ は f の拡張である．このとき，

$$v_{\xi_0}(x + \alpha x_0) \leqslant p(x_0 + \alpha x_0) \qquad (\forall x \in D(f), \forall \alpha \in \mathbf{R}) \tag{1.5}$$

を満たす $\xi_0 \in \mathbf{R}$ が存在することを示す．いま，任意の $x, y \in D(f)$ に対して，

$$\begin{aligned} \big(p(x + x_0) - f(x)\big) - \big(f(y) - p(y - x_0)\big) &= p(x + x_0) + p(y - x_0) - \big(f(x) + f(y)\big) \\ &= p(x + x_0) + p(y - x_0) - f(x + y) && \because\ f \text{ の線型性.} \\ &\geqslant p\big((x + x_0) + (y - x_0)\big) - f(x + y) && \because\ p \text{ の定義.} \\ &= p(x + y) - f(x + y) \ \geqslant\ 0 && \because\ f \in P. \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\beta_1 := \sup\{f(y) - p(y - x_0) \,|\, y \in D(f)\} \leqslant \inf\{p(x + x_0) - f(x) \,|\, x \in D(f)\} =: \beta_2$$

が成り立つから，実数の稠密性から $\beta_1 \leqslant \eta_0 \leqslant \beta_2$ なる $\eta_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．このような $\eta_0 \in \mathbf{R}$ は (1.5) を満たす．$\alpha = 0$ のときは人間ならわかるので，まず $\alpha > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} v_{\eta_0}(x + \alpha x_0) &= f(x) + \alpha\eta_0 \\ &\leqslant f(x) + \alpha\big(p(\alpha^{-1}x + x_0) - f(\alpha^{-1}x)\big) && \because\ \beta_2 \text{は下限より.} \\ &= p(x + \alpha x_0) && \because\ p \text{ の定義},\ f \text{ の線型性.} \end{aligned}$$

となるからよい．次に $\alpha < 0$ のとき，

$$\begin{aligned} v_{\eta_0}(x + \alpha x_0) &= f(x) + \alpha\eta_0 \\ &\leqslant f(x) + \alpha\big(f(-\alpha^{-1}x) - p(-\alpha^{-1}x - x_0)\big) && \because\ \alpha < 0,\ \beta_1 \text{は上限より.} \\ &= (-\alpha)p(-\alpha^{-1}x - x_0) \ =\ p(x + \alpha x_0) && \because\ -\alpha > 0,\ p \text{ の定義},\ f \text{ の線型性.} \end{aligned}$$

となる．よって，(1.5) を満たすような $\xi_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．すると，このとき，$f \preceq v_{\xi_0}$ であるが $f \neq v_{\xi_0}$ である．これは f を P の極大元としたことに矛盾．ゆえに，$D(f) = E$ である．□

---

1) $x, y \in D(u)$ とすると，ある $j, k \in I$ があって $x \in D(h_j)$，$y \in D(h_k)$ となる．Q が全順序集合であることから $h_j \preceq h_k$ または $h_k \preceq h_j$ が成り立つので $D(h_j) \subseteq D(h_k)$ または $D(h_k) \subseteq D(h_j)$ が成り立つ．$D(h_j) \subseteq D(h_k)$ としても一般性を失わないのでそうすると，$x, y \in D(h_k)$ となり $D(h_k)$ は E の部分空間なので $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して $\alpha x + \beta y \in D(h_k) \subseteq \bigcup D(h_i)$ が得られる．

2) 記号は↑と同じとする．$h_j \preceq h_k$ とすると $h_k|_{D(h_j)} = h_j$ なので $\alpha u(x) + \beta u(y) = \alpha h_j(x) + \beta h_k(y) = \alpha h_k(x) + \beta h_k(y) = h_k(\alpha x + \beta y) = u(\alpha x + \beta y)$.

定理 1.4 (Hahn-Banach の拡張定理２). E を $\mathbf{K}$ 上の線型空間，$G \subseteq E$ を部分空間とする．
写像 $p : E \to [0, \infty)$ と G 上の線型写像 $g : G \to \mathbf{K}$ は

$$p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x) \qquad (\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}) \tag{1.6}$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad (\forall x, y \in E) \tag{1.7}$$
$$|g(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.8}$$

を満たすとする．このとき，g を拡張する，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{K}$ (i.e., $f|_G = g$) が存在して，

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.9}$$

を満たす．

定理 1.4 の証明.

i. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ の場合：
p は (1.6) を満たすので当然 (1.1) も満たす．また，任意の $x \in G$ に対して，$g(x) \leqslant |g(x)| \leqslant p(x)$ となることから，定理 1.3 を適用すれば，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{R}$ が存在して

$$f(x) = g(x) \quad (\forall x \in G), \qquad f(x) \leqslant p(x) \quad (\forall x \in E)$$

を満たす．また，(1.6) より任意の $x \in E$ に対して，

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = |-1|\,p(x) = p(x)$$

が成り立つので，f は (1.9) を満たしている． //

ii. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ の場合：E, G のスカラー値を実数に制限したものをそれぞれ，$E_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}$ と表す．
写像 $\mathrm{Re} : G \ni x \mapsto \mathrm{Re}\big(g(x)\big) \in \mathbf{R},\ \mathrm{Im} : G \ni x \mapsto \mathrm{Im}\big(g(x)\big) \in \mathbf{R}$ は $G_{\mathbf{R}}$ 上の実線型汎函数であるから，前半の証明により $E_{\mathbf{R}}$ 上の実線型汎函数 $\widetilde{F}_1 : E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, \widetilde{F}_2 : E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ が存在して，

$$\widetilde{F}_1\Big|_{G_{\mathbf{R}}} = \mathrm{Re}\,g, \quad \widetilde{F}_2\Big|_{G_{\mathbf{R}}} = \mathrm{Im}\,g, \qquad \Big|\widetilde{F}_i(x)\Big| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in E_{\mathbf{R}},\ i = 1, 2)$$

を満たす．また，E 上の新たな写像 $\widetilde{f} : E \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{f}(a + ib) := \widetilde{F}_1(a) - \widetilde{F}_2(b) \qquad (\forall a, \forall b \in E_{\mathbf{R}})$$

で定めると，$\widetilde{f}$ は明らかに実線型であり，任意の $x \in G$ に対して，$\widetilde{f}(x) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big)$ である.[3] ここで $f : E \to \mathbf{C}$ を

$$f(x) := \widetilde{f}(x) - i\,\widetilde{f}(ix) \qquad (\forall x \in E)$$

により定めると，f は線型である．実際，任意の $x \in E$ に対して，

$$\begin{aligned}
f(ix) &= \widetilde{f}(ix) - i\,\widetilde{f}(i(ix)) && \because\ f \text{ の定義.} \\
&= \widetilde{f}(ix) - i\,\widetilde{f}(-x) && \because\ i^2 = -1. \\
&= \widetilde{f}(ix) + i\,\widetilde{f}(x) && \because\ f \text{ の実線型性} \\
&= -i^2\,\widetilde{f}(ix) + i\,\widetilde{f}(x) && \because\ 1 = -(-1) = -i^2. \\
&= i\big(\widetilde{f}(x) - i\widetilde{f}(ix)\big) \quad = \quad i\,f(x)
\end{aligned}$$

であることから，任意の $x, y \in E,\ \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbf{C}, \beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbf{C}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
f(\alpha x + \beta y) &= \alpha_1\,f(x) + \beta_1\,f(y) + i\,f(\alpha_2 x) + i\,f(\beta_2 y) \\
&= (\alpha_1 + i\alpha_2) f(x) + (\beta_1 + i\beta_2) f(y) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}$$

[3] 実際，$x = a + ib$ $(a, b \in G_{\mathbf{R}})$ とすると，$\widetilde{f}(x) = \widetilde{(f)}(a+ib) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) - \mathrm{Im}\big(g(b)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) + \mathrm{Re}\big(i\,g(b)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) + \mathrm{Re}\big(g(ib)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a+ib)\big) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big)$ となる．

となる．また，任意の $x \in G$ に対して

$$f(x) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big) - i\,\mathrm{Re}\big(g(ix)\big) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big) + i\,\mathrm{Im}\big(g(x)\big) = g(x)$$

であり，任意の $x \in E$ に対して，$|f(x)| = \alpha f(x)$ かつ $|\alpha| = 1$ なる $\alpha \in \mathbf{C}$ を選べば[4)]，

$$|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \mathrm{Re}\big(f(\alpha x)\big) = \widetilde{f}(\alpha x) \leqslant p(\alpha x) = |\alpha|\ p(x) = p(x)$$

となる．これが求めるものであった． □

1.2 線型作用素

定義 1.5 (線型作用素). X, Y をノルム空間とする．
写像 $T : X \to Y$ が次を満たすとき，T を**線型作用素 (linear operator)** と呼ぶ：

$$\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbf{K}, \quad \forall x, \forall y \in X, \qquad T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

定義 1.6. X, Y をノルム空間とする．
線型作用素 $T : X \to Y$ が**有界**であるとは，ある定数 $K \geqslant 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して，

$$\|Tx\|_Y \leqslant K\,\|x\|_X$$

が成り立つことである．また，線型作用素 T が点 $x \in X$ で**連続**であるとは，x に収束する X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\|Tx - Tx_n\|_Y \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立つことである．

定理 1.7. X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とする．このとき，以下は同値である．
(1) T は X 上で連続である． (2) T は原点で連続である． (3) T は有界である．

定理 1.7 の証明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 自明.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任意に $x \in X$ を固定する．x に収束する X 内の任意の点列を $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．まず，T の線型性から $\|Tx_n - Tx\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y$ であり，いま，T が有界なので，ある定数 $K \geqslant 0$ があって $\|T(x_n - x)\|_Y \leqslant K\,\|x_n - x\|_X$ となる．また，$\|x_n - x\|_X \to 0\ (n \to \infty)$ であるから，

$$\|Tx_n - Tx\|_Y \leqslant K\,\|x_n - x\|_X \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．よって，T は X 上で連続である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) 背理法で示す．T が有界でないとすると，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，ある単位ベクトル $x_n \in X$ が存在し，

$$\|Tx_n\|_Y > n\,\|x_n\|_X = n$$

が成り立つ．$y_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}x_n$ とおくと，

$$\|y_n - 0\|_X = \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}x_n\right\|_X = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\|x_n\|_X = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となるから $y_n \to 0\ (n \to \infty)$ である．一方，

$$\|Ty_n - T0\|_Y = \|Ty_n\|_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\|Tx_n\|_Y > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となることから，Ty_n が $T0$ に収束しないことがわかる．これは T が原点で連続であることに反する ($y_n \to 0\ (n \to \infty)$ にもかかわらず Ty_n は $T0$ に収束しない)．よって従う． □

---

4) $f(x)$ が実数の場合，$f(x) \geqslant 0$ なら $\alpha = 1$，$f(x) < 0$ なら $\alpha = -1$ とすればよい．また，$f(x)$ が実数でなかった場合，$\alpha = |f(x)|\,/\,\big(\mathrm{Re}\big(f(x)\big) + i\,\mathrm{Im}\big(f(x)\big)\big)$ とすればよい．

ノルム空間 X からノルム空間 Y への有界線型作用素全体を $\mathscr{B}(X,Y)$ で表す．すなわち，

$$\mathscr{B}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid \exists K \geqslant 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in X, \quad \|Tx\|_Y \leqslant K\|x\|_X\}$$

である．特に $Y = X$ のときは $\mathscr{B}(X)$ とかく．$\mathscr{B}(X,Y)$ は次の和・スカラー倍により線型空間をなす：

$$\forall x \in X, \qquad (T+S)x := Tx + Sx, \quad (\alpha T)x := \alpha Tx \qquad (T, S \in \mathscr{B}(X,Y),\ \alpha \in \mathbf{K}).$$

また，$\mathscr{B}(X,Y)$ は次で定めるノルムによって，ノルム空間となる：

$$\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} := \sup\left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \;\middle|\; x \in X,\ x \neq 0 \right\} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \qquad (T \in \mathscr{B}(X,Y)).$$

定理 1.8. X をノルム空間，Y を Banach 空間とする．このとき，$\mathscr{B}(X,Y)$ は Banach 空間である．

定理 1.8 の証明.

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{B}(X,Y)$ 内の任意の Cauchy 列とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，N 以上のすべての自然数 n, m に対して，$\|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \varepsilon$ が成り立つ．また，任意の $x \in X$ に対して，$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y = \|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X$ より，点列 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ は Y 内の Cauchy 列であることがわかる．いま，Y は完備であるから $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．その極限を Tx とかく．[5] このとき，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ であり $\|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \to 0$ $(n \to \infty)$ であることを示す．まず，T が線型作用素であることを示そう．任意の $x, y \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|T(x+y) - (Tx+Ty)\|_Y &\leqslant \|T(x+y) - T_n(x+y)\|_Y + \|T_n x + T_n y - (Tx+Ty)\|_Y && \because T_n\text{の線型性} \\
&\leqslant \|T(x+y) - T_n(x+y)\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y + \|T_n y - Ty\|_Y \\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty) && \because \|T_n z - Tz\|_Y \to 0
\end{aligned}$$

となるから，$\|T(x+y) - (Tx+Ty)\|_Y = 0$ より $T(x+y) = Tx + Ty$．同様に，任意の $\alpha \in \mathbf{K}$, $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|T(\alpha x) - \alpha Tx\|_Y &\leqslant \|T(\alpha x) - T_n(\alpha x)\|_Y + \|\alpha T_n x - \alpha Tx\|_Y \\
&= \|T(\alpha x) - T_n(\alpha x)\|_Y + |\alpha| \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となることから，$T(\alpha x) = \alpha Tx$ がわかる．よって，T は線型作用素である．次に，T が有界であることを示そう．$x \in X$ を任意の固定する．このとき，N 以上のすべての自然数 n, m に対して，

$$\begin{aligned}
\|T_n x - Tx\|_Y &\leqslant \|T_n x - T_m x\|_Y + \|T_m x - Tx\|_Y \\
&= \|(T_n - T_m)x\|_Y + \|T_m x - Tx\|_Y \\
&\leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X + \|T_m x - Tx\|_Y \\
&< \varepsilon \|x\|_X + \|T_m x - Tx\|_Y && \because T_n : \text{Cauchy 列}
\end{aligned}$$

右辺を $m \to \infty$ とすれば，

$$\|T_n x - Tx\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X \tag{1.10}$$

となる．$\|Tx\|_Y - \|T_n x\|_Y \leqslant \|T_n x - Tx\|_Y$ に注意すれば，

$$\|Tx\|_Y \leqslant \|T_n x\|_Y + \varepsilon \|x\| \leqslant \|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X + \varepsilon \|x\|_X = \left(\|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} + \varepsilon\right) \|x\|_X$$

が成り立つ．$T_n \in \mathscr{B}(X,Y)$ より $\|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ であり，ε は任意であるから $\varepsilon = 1$ とでもすれば T が有界であることがわかる．よって，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ である．最後に，T_n が T のノルム収束していることを示す．式 (1.10) より，$x \neq 0$ のとき，両辺を $\|x\|_X$ $(\neq 0)$ で割り，$x \neq 0$ における sup をとれば，

$$\|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \varepsilon$$

であることがわかる．いま，ε は任意であったから，これは T_n が T にノルム収束していることにほかならない．ゆえに，$\mathscr{B}(X,Y)$ は Banach 空間である． □

[5] ここで注意すべきなのが「何か写像 $T : X \to Y$ があって Tx とかける収束先がある」という解釈ではなく「x に依存する収束先 y があり，それを x に依存していることを強調して Tx と書きましょう」というものである．もちろん，$x \in X$ に対応する $y \in Y$ なので T は確かに X から Y への写像となっている．

1.3 双対空間

線型作用素 $T : X \to Y$ において, $Y = \mathbf{K}$ であるものを**線型汎函数**と呼ぶ. 有界線型汎函数全体のなす集合 $\mathscr{B}(X, \mathbf{K})$ を X' で表し, X の**双対空間**と呼ぶ. $\mathbf{K}$ は完備であるから, ノルム空間 X の双対空間 X' もまた Banach 空間となる. ノルム空間に関する重要な結果として, 次の定理がある. これもまた, Hahn-Banach の定理と呼ばれる.

定理 1.9 (Hahn-Banach の拡張定理 3). E を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間, $G \subseteq E$ を部分空間とする. このとき, 任意の $g \in G'$ に対して, 次を満たす $f \in E'$ が存在する：

$$f|_G = g \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}. \tag{1.11}$$

定理 1.9 の証明. $p : E \to [0, \infty)$ を $p(x) := \|g\|_{G'} \|x\|_E$ で定めると, 定理 1.3 の条件を満たすので, ある線型汎函数 $f : E \to \mathbf{K}$ が存在し,

$$f(x) = g(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.12}$$

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.13}$$

を満たす. (1.13) より $\|f\|_{E'} \leqslant \|g\|_{G'}$ を得る. よって $f \in E'$ である. また, (1.12) より, 任意の $x \in G$ に対して $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E$ となるので, $\|g\|_{G'} \leqslant \|f\|_{E'}$ を得る. ゆえに $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. □

系 1.10. E を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする. $x_0 \in E \setminus \{0\}$ に対して, 次を満たすような $f \in E'$ が存在する：

$$f(x_0) = \|x_0\|_E \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = 1. \tag{1.14}$$

系 1.10 の証明. $\mathbf{K}x_0 := \{\alpha x_0 \,|\, \alpha \in \mathbf{K}\}$ とおくと, $\mathbf{K}x_0$ は E の部分空間である. ここで, $G := \mathbf{K}x_0$ とおき G 上の写像 $g : G \to \mathbf{K}$ を $g(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|_E$ で定めると, g は明らかに線型であり, 任意の $\alpha x_0 \in \mathbf{K}x_0$ に対して $\|\alpha x_0\|_E = |\alpha| \|x_0\|_E = |\alpha \|x_0\|_E| = |g(\alpha x_0)|$ より $\|g\|_{G'} = 1$ を得るから $g \in G'$. よって, 定理 1.4 により, ある $f \in E'$ が存在して, $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|_E$ かつ $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1$ となる. □

系 1.11. E をノルム空間とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して, 次が成り立つ：

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} = 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leqslant 1}} |f(x)|. \tag{1.15}$$

系 1.11 の証明.
$x \in E$ とする. $x = 0$ のときは明らかであるから $x \neq 0$ とする. いま, 任意の $f \in E'$ に対して, $|f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E$ より

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \leqslant \|x\|_E$$

を得る. また, $x \neq 0$ なので, 系 1.10 により, ある $f \in E'$ が存在して, $f(x) = \|x\|_E$ かつ $\|f\|_{E'} = 1$ が成り立つから,

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} \geqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = |f(x)| = \|x\|_E$$

を得る. ゆえに等号が成り立つ. □

1.3.1 双対の記号

以後, ノルム空間 X の元 x とその双対空間 X' の元 f における記号として $f(x) = \langle f, x \rangle = {}_{X'}\langle f, x \rangle_X$ とかく. また, 双対空間 X' の元を一般に x' などとかく. 系 1.10 より, 任意の $x' \in X'$ に対して, ${}_{X'}\langle x', x \rangle_X = 0$ ならば $x = 0$ である.

注意 1.12. 上記の下線部の部分は, ノルム空間 X の双対空間 X' の元が豊富にあることを意味する.

1.3.2　二重双対空間

ノルム空間 X の双対空間 X' をノルム空間としての双対空間 $(X')' =: X''$ を X の**二重双対空間**と呼ぶ. X から X'' への写像 J_X を ${}_{X''}\langle J_X x, x'\rangle_{X'} := {}_{X'}\langle x', x\rangle_X$ により定めると, 系 1.11 から

$$\|J_X x\|_{X''} = \|x\|_X$$

を得る. よって, J_X は等長線型である. J_X を**標準的単射**あるいは**標準対応**と呼ぶ. また, J_X が全射であるとき, X は**回帰的**あるいは**反射的**であるという.

1.3.3　双対空間の例

双対空間の例を紹介する前に, Banach 空間の比較的わかりやすいと思われる例を紹介しておく. 微積分学・線型代数学の知識より, $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ は Banach 空間である. それを自然に拡張した空間がある. 数列空間と呼ばれるものである. 任意に $1 \leqslant p \leqslant \infty$ を固定し, 複素数列, あるいは実数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ で,

$$\|x\|_{\ell^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p\right)^{1/p} & (1 \leqslant p < \infty), \\ \sup\left\{|\xi_n| \;\middle|\; n \in \mathbf{N}\right\} & (p = \infty) \end{cases}$$

が有限であるもの全体のなす集合を $\ell^p(\mathbf{N})$ で表す. 演算を

$$(\xi_n)_{n=1}^\infty + (\eta_n)_{n=1}^\infty := (\xi_n + \eta_n)_{n=1}^\infty, \quad \alpha(\xi_n)_{n=1}^\infty := (\alpha\xi_n)_{n=1}^\infty \qquad \big(\alpha \in \mathbf{K}, (\xi_n)_{n=1}^\infty, (\eta_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p(\mathbf{N})\big)$$

により定める. ノルムは上述のとおりである. $\ell^p(\mathbf{N})$ は Banach 空間となる. 証明は, そもそもノルム空間となること自体そんなに自明でないので, ここでは省略する.

例 1.13 (数列空間の双対空間). $1 < p < \infty, q$ は $p^{-1} + q^{-1} = 1$ により定まる実数とする. このとき, $\ell^p(\mathbf{N})$ の双対空間は $\ell^q(\mathbf{N})$ と等長同型である. すなわち, $(\ell^p(\mathbf{N})) \overset{\mathrm{id}}{=} \ell^q(\mathbf{N})$ である.

2　双対作用素

以後, X, Y を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする. $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ に対して, その双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ を定義する.

2.1　双対作用素の定義

補題 2.1. $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ と $y' \in Y'$ に対して, 写像 $f : X \to \mathbf{K}$ を

$$f(x) := {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y \qquad (x \in X)$$

で定めると, $f \in X'$ である.

補題 2.1 の証明. まず, f は線型である. 実際, 任意の $x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して, $y' \in Y'$ と $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ の線型性より $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = {}_{Y'}\langle y', T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle_Y = \alpha\, {}_{Y'}\langle y', Tx_1\rangle_Y + \beta\, {}_{Y'}\langle y', Tx_2\rangle_Y = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ となる. また, 任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| = |{}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y| \leqslant \|y'\|_{Y'} \|Tx\|_Y \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X$ より $\|f\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る. $y' \in Y',\ T \in \mathscr{B}(X,Y)$ より $\|y'\|_{Y'} < \infty$ かつ $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ となるので $\|f\|_{X'} < \infty$ である. よって $f \in X'$. □

定義 2.2 (双対作用素). $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ に対して, その双対作用素 $T' : Y' \to X'$ を次で定める：

$${}_{X'}\langle T'y', x\rangle_X := {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y \qquad (y' \in Y',\ x \in X).$$

補題 2.1 より T' が well-defined であることがわかる.

定理 2.3. $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ に対して, 双対作用素 T' は $T' \in \mathscr{B}(Y',X')$ であって $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$.

定理 2.3 の証明. 補題 2.1 より, 任意の $y' \in Y'$ に対して $\|T'y'\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ なので, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る. よって $T' \in \mathscr{B}(Y',X')$. 逆向きは, T' の双対作用素 $T'' := (T')' : X'' \to Y''$ を考える. まず, 任意の $y' \in Y'$ に対して, ${}_{Y''}\langle J_Y(Tx), y'\rangle_{Y'} = {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y = {}_{X'}\langle T'y', x\rangle_X = {}_{X''}\langle J_X x, T'y'\rangle_{X'} = {}_{Y''}\langle T''(J_X x), y'\rangle_{Y'}$ であるから,

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X \tag{2.1}$$

を得る. 標準対応 J_X, J_Y の等長性より, 任意の $x \in X$ に対して

$$\|Tx\|_Y = \|J_Y(Tx)\|_{Y''} = \|T''(J_X x)\|_{Y''} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|J_X x\|_{X''} = \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|x\|_X$$

が成り立つので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')}$ を得る. また, 前半の証明により $\|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$ となるので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$. ゆえに, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$. □

2.2 Schauder の定理

以下, ノルム空間 E に対して, $B_E := \{x \in E \mid \|x\|_E \leqslant 1\}$ とする. また, K をコンパクト距離空間とし, K 上の複素数値連続函数全体のなす集合を $C(K)$ で表す.

2.2.1 コンパクト作用素

ノルム空間 X, Y に対し, 線型作用素 $T : X \to Y$ が**コンパクト**であるとは, $T(B_X)$ の閉包 $\overline{T(B_X)}$ が Y についてコンパクト集合であることをいう. X から Y へのコンパクト作用素全体のなす集合を $\mathscr{K}(X,Y)$ で表すと, コンパクト集合は有界なので, $\mathscr{K}(X,Y) \subset \mathscr{B}(X,Y)$ である. 線型作用素 $T : X \to Y$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X の任意の有界点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ に対し, Y の点列 $\{Tx_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が収束部分列をもつことである. これは距離空間におけるコンパクト集合の特徴づけ (距離空間におけるコンパクト性は点列コンパクトと同値) と対角線論法によって示される (入来さんの卒論あるいはゼミノート参照).

2.2.2 Ascoli-Arzelà の定理

$C(K)$ の部分集合 S が**同程度連続**であるとは, 任意の $y \in K, \varepsilon > 0$ に対して, y を含む開集合 U が存在して, 任意の $f \in S$ に対して, $x \in U$ のとき, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことである. また, S が**一様有界**であるとは, ある定数 $M > 0$ が存在し, 任意の $f \in S$ に対して, $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} \leqslant M$ が成り立つことである. $C(K)$ に関する重要な結果として次の定理が知られている.

事実 2.4 (Ascoli-Arzelà の定理). K をコンパクト距離空間とする. $C(K)$ の部分集合 S が一様有界かつ同程度連続ならば, S 内の任意の函数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は K 上で一様収束する部分列をもつ.

2.2.3 双対作用素のコンパクト性

$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ の双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y',X')$ のコンパクト性についての結果が次である.

定理 2.5 (Schauder の定理). X をノルム空間, Y を Banach 空間とする. このとき, 以下が成り立つ：

$$T \in \mathscr{K}(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad T' \in \mathscr{K}(Y',X').$$

定理 2.5 の証明.

($\Longrightarrow$) $K := \overline{T(B_X)}$ とおくと, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ より K はコンパクト集合である. また, $B_{Y'}$ の部分集合 $\left\{y'|_K \,\middle|\, y' \in B_{Y'}\right\}$ を $B_{K'}$ と表すと, $B_{K'}$ は $C(K)$ の部分集合である. このとき, $B_{K'}$ は一様有界である. 実際, 任意の $z' \in B_{K'}$, $z \in K$ に対して, $|{}_{Y'}\langle z', z\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'} \|z\|_Y \leqslant \|z\|_Y$ となる. いま, $z \in K = \overline{T(B_X)}$ より, B_X の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 n を十分大きくとれば $\|z\|_Y - \|Tx_n\|_Y \leqslant \|z - Tx_n\|_Y < \varepsilon$ が成り立つ. すなわち, $\|z\|_Y < \varepsilon + \|Tx_n\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} + \varepsilon$ が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意だったので $\|z\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となる. よって, $\|z'\|_{Y'} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となり, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ は z' に依らないので, $B_{K'}$ は一様有界であることがわかる. また, $B_{K'}$ は同

程度連続である. 実際, 任意の $z_1 \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して, K の開集合 $B(z_1;\varepsilon)$ を取ると, $z_1 \in B(z_1;\varepsilon)$ であり, 任意の $z' \in B_{K'}$ に対して, $z_2 \in B(z_1;\varepsilon)$ のとき, $|{}_{Y'}\langle z', z_1\rangle_Y - {}_{Y'}\langle z', z_2\rangle_Y| = |{}_{Y'}\langle z', z_1 - z_2\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'}\|z_1 - z_2\|_Y \leqslant \|z_1 - z_2\|_Y < \varepsilon$ となる. ここで, $B_{Y'}$ の任意の点列を $\{y'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると, $B_{K'}$ は一様有界かつ同程度連続であるから, Ascoli-Arzelà の定理 (事実 2.4) より, K 上で一様収束する部分列 $\left\{y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned}
\left\|T'y'_{n_j} - T'y'_{n_k}\right\|_{X'} &= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{X'}\left\langle T'\left(y'_{n_j} - y'_{n_k}\right), x\right\rangle_X\right| && \because T' \text{の線型性.}\\
&= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, Tx\right\rangle_Y\right| && \because T' \text{の定義.}\\
&\leqslant \sup_{y\in K}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, y\right\rangle_Y\right| && \because T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)} = K.\\
&\longrightarrow \quad 0 \quad (j,k\to\infty) && \because \left\{y_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}} \text{は } K \text{ 上の Cauchy 列.}
\end{aligned}$$

を得る. よって, $\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は X' の Cauchy 列である. X' は完備なので, $\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束する. ゆえに, T の双対作用素 T' はコンパクト作用素である. //

($\Longleftarrow$) X の任意の有界点列を $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると, 標準対応 J_X の等長性より, $\{J_X x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は有界点列となる. いま, T' の双対作用素 $T'' : X'' \to Y''$ を考えると, 前半の証明により, T'' はコンパクト作用素となるので, $\{T''J_X x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束部分列 $\left\{T''J_X x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ をもつ. 定理 2.3 の証明中の式 (2.1) により, $J_Y \circ T = T'' \circ J_X$ が成り立つので, $\left\{J_Y T x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束列であるから, Cauchy 列となる. 標準対応 J_Y の等長性から, $\left\{Tx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ も Cauchy 列となる. Y は完備であったから $\left\{Tx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束する. ゆえに, T はコンパクト作用素である. □

参考文献

[1] Haïm Brezis 著・藤田宏監訳・小西芳雄訳, 「関数解析 その理論と応用に向けて」 産業図書.

[2] 荷見守助・長宗雄・瀬戸道生共著, 「関数解析入門 線型作用素のスペクトル」 内田老鶴圃.

[3] 宮島静雄著, 「関数解析」 横浜図書.

[4] 内田伏一著, 「集合と位相」 裳華房.