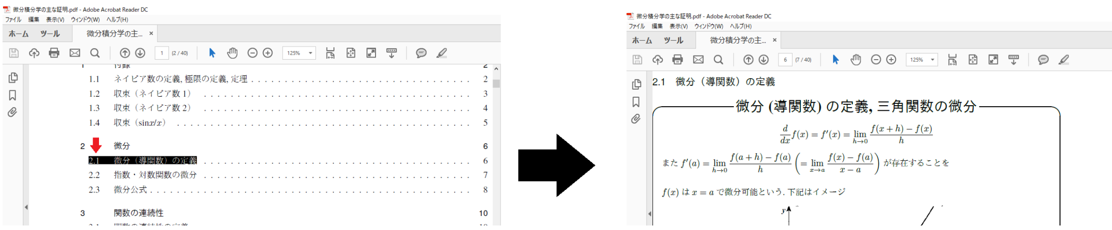
線型代数学の主な定義と定理, 公式の証明

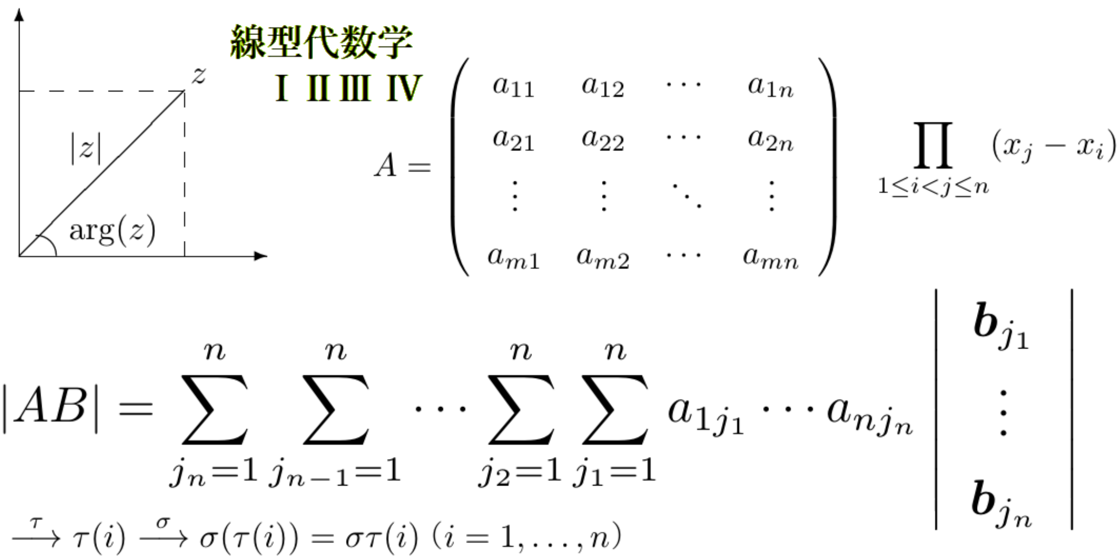
1. はじめに

これは大学 1 年次の線型代数学の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです. 多少タイプミス等があるかもしれませんが, ご了承ください. すべての内容が収録されているわけではありませんが, 復習などご自由に役立ててください. 目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照*) 微分積分学の主な定義定理の証明はこちら

内容に不備や落丁等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします.

*





*

* 画像は微分積分学

* 目次の使い方

* ベクトル表示については $\mathbf{a}$, a などと表記しているがどれも同じ意味である.

目次

1　集合

1.1　集合の基礎

定義

ある条件を満たすモノの集まりを**集合**という. 集合に含まれる1つ1つのモノを, その集合の**要素**または**元**という. 集合は $\{\ * \}$ で要素を囲んで表現する.
また, a が集合 A の要素であることを $a \in A$ や $A \ni a$ と表記する.

定義【集合の相等】

2つの集合 $A,\ B$ が**等しい**とは, 集合 A の要素は集合 B の要素でもあり, 集合 B の要素は集合 A の要素でもあるときをいう. 集合 A, B が等しいとき $A = B$ とかく.

記号

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$,
実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表記する.

定義【和集合】

和集合とは, 複数の集合の要素を合わせた要素全体の集合をいう. 集合 A, B の和集合を $A \cup B$ とかく

定義【差集合】

2つの集合 A と B の**差集合**とは, A の要素の中から B の要素全てを除いて得られる要素全体の集合のことをいう.A と B の差集合を $A \backslash B$ または $A - B$ とかく.

定義【積集合】

積集合とは, 複数の集合の中で, 全ての集合に含まれている要素全体の集合をいう.
集合 A, B の積集合を $A \cap B$ とかく.

定義【空集合】

空集合とは, 要素がない集合であり, $\varnothing$ とかく

定義【部分集合】

部分集合とは, ある要素の一部（もしくは全体）を取り出した集合であり,
A が B の部分集合であるとき $A \subset B$ または $B \supset A$ とかく

2　ベクトル

2.1　ベクトル

定義【ベクトル】

平面または空間において, A を始点, B を終点とする有向線分について,
その位置を問題にしないで, その大きさと向きだけを考えたとき, これをベクトルという.

定義【ベクトルの内積】

1. 2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して, 内積を

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 \text{ で定義する.}$$

2. 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}(\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o})$ のなす角を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \text{ で内積を定義する.}$$

すなわち $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ である.
また, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{o}$ のとき $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ と定義する.

さらに $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ より $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$

定理

2 次元ベクトルの内積は次の性質を満たす.

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (a_1 + c_1)b_1 + (a_2 + c_2)b_2 = a_1b_1 + a_2b_2 + c_1b_1 + c_2b_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b})$
3. $(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

*n 次元ベクトルでも同じことが言える.

2.2　行ベクトル, 列ベクトル, 数ベクトル, 長さ

定義

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \text{ を行ベクトルといい, } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ を列ベクトルという.}$$

また,$n = 1, 2, ...$ について n 個の数 $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ をまとめた

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \text{ や } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ を } n \text{ 項数ベクトルという.}$$

また, 各々の数 a_1 や $a_2, a_3, ...a_n$ をその**成分**という.

定義

n 項数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と表記し,n **項数ベクトル空間**という.

毎回すべての数を並べるのは大変なので $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ としたら $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ と表記する.

定義

2 つの n 項数ベクトル

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が等しい $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ とは

各成分が $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$（等しい）が成り立つときをいう.

定義

n 項数ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ について

$\mathbb{a}$ の**長さ** $\|\mathbb{a}\|$ とは

$$\|\mathbb{a}\| := \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}$$

2.3 ベクトルの演算, ゼロベクトル, 単位ベクトル

定義

1. ベクトルの和・差

n 項数ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して和・差 $\mathbb{a} \pm \mathbb{b}$ を次で定める.

$$\mathbb{a} \pm \mathbb{b} := \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

2. ベクトルのスカラー (定数) 倍

$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対し, スカラー倍 $k\mathbb{a}$ を次で定める.

$$k\mathbb{a} := \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

スカラー倍の性質

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$,$k, l \in \mathbb{R}$ に対して

・$k(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = k\mathbb{a} + k\mathbb{b}$（ベクトルの分配法則）

・$(k + l)\mathbb{a} = k\mathbb{a} + l\mathbb{a}$（スカラー倍の分配法則）

・$(kl)\mathbb{a} = k(l\mathbb{a})$

定義

1. 成分がすべて 0 のベクトルを $\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ と表記し, **ゼロベクトル**という.

2. $\mathbb{e} \in \mathbb{R}^n$ が**単位ベクトル**とは $\|\mathbb{e}\| = 1$

補足

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$ と表示することもある.

3　複素数

3.1　複素数

複素数

$i=\sqrt{-1}$: 虚数単位（$i^2=-1$）

2 つの実数 $a,b\in\mathbb{R}$ に対し,$a+bi$ を**複素数**という.

複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と表記する.

$a+bi, c+di\in\mathbb{C}$ に対して

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ が定まる.

定義

$z=a+bi\in\mathbb{C}$ について

$\mathrm{Re}(z):=a$: z の**実部**，$\mathrm{Im}(z):=b$: z の**虚部**，$\overline{z}:=a-bi$: z の**複素共役**

定理

$z,w\in\mathbb{C}$ に対して次が成立.

(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(2) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$

(3) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$

$\because$ まず,$z=a+bi, w=c+di$（$a,b,c,d\in\mathbb{R}$）

(1) $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

(2) $\overline{z+w}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z}+\overline{w}$

(3) $\overline{zw}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$
一方で $\overline{z}\,\overline{w}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)+(-ad-bc)i=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{zw}$　□

3.2 複素数の絶対値, 複素平面

定義

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ の絶対値を次で定める.

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

性質

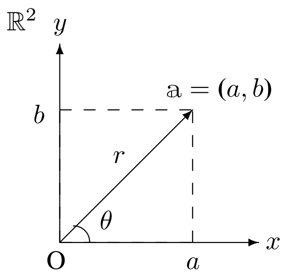
$z = 0 \iff |z| = 0$

$\because z = 0$ より $z = 0 + 0i$ と書ける. すると定義より $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

また $|z| = 0$ より $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ よって $a^2 + b^2 = 0, a, b \in \mathbb{R}$ より $a^2 = -b^2 \geq 0$

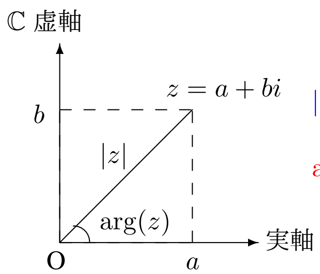
したがって $a = b = 0$ より $z = a + bi = 0$ $\square$

*この定義より $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視できる.



$r = \|\mathrm{a}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta : x$ 軸と a のなす角度
（$0 \leq \theta < 2\pi$）



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\arg(z) := \theta$

↑ z の偏角という.

a $= (a, b)$ は r と θ で表せる.$\longrightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

$\mathbb{C}$ で考えると

任意の $z \in \mathbb{C}$ は $r \geq 0$ と $0 \leq \theta < 2\pi$ で

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ と表示できる.}$$

これを z の**極形式**という. ※ $r = |z|, \theta = \arg(z)$

n 項数ベクトルの成分は $\mathbb{R}$ であったが,$\mathbb{C}$ が成分でも ok, このとき n **項複素ベクトル**という.

区別するときは $\mathbb{C}^n$ を n **次元複素ベクトル空間**,$\mathbb{R}^n$ を n **次元実ベクトル空間**という.

記号

$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し, $a \equiv b \pmod c$ とは

ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $a = b + kc$ と表記できるとき.

系

0 でない $z \in \mathbb{C}$ の逆数 $\dfrac{1}{z}$ もまた複素数である.

$\because z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

ここで $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ より逆数 $\dfrac{1}{z}$ もまた複素数である. $\square$

3.3　絶対値と偏角の性質

定理

$z, w \in \mathbb{C}$ に対して

1. $|zw| = |z||w|, \arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w)$（ $\mod 2\pi$）

2. $w \neq 0$ のとき
$\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w)$（ $\mod 2\pi$）

$\because$

極形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ と表示する．（$0 \leq r, s \quad 0 \leq \theta, \varphi < 2\pi$）

1. $zw = r(\cos\theta + i\sin\theta)s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$= rs\{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + (\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)i\}$$

$$= rs\{\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\}$$

よって $|zw| = rs = |z||w|$ また,$\arg(zw) = \theta + \varphi = \arg(z) + \arg(w)$　□

2. $s(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot \dfrac{1}{s}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$w \cdot \dfrac{1}{w} = 1$ なので

よって $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{s}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \dfrac{1}{s}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

上記より $\dfrac{1}{w}$ の極形式は $\dfrac{1}{s}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

すると $\dfrac{z}{w} = z \cdot \dfrac{1}{w}$

1. より $\left|\dfrac{z}{w}\right| = |z| \cdot \dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|z|}{|w|}$

また，$\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg\left(z \cdot \dfrac{1}{w}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{w}\right)$

ここで $\arg\left(\dfrac{1}{w}\right) = -\varphi = -\arg(w) \therefore \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) \equiv \arg(z) - \arg(w)$　□

系

任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, 等号 $z\overline{z} = |z|^2$ が成り立つ.

$\because z = a + bi$（$a, b \in \mathbb{R}$）とすると $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

ここで $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$ よって $z\overline{z} = |z|^2$　□

3.4 ド・モアブルの定理, シュワルツの不等式

定理【ド・モアブルの定理】

$n = 0, 1, 2, ...$ と $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$\because$

i) $n = 0$ のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1 = \cos(0\theta) + i\sin(0\theta) = \cos 0$ よって成り立つ.

ii) n のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ が成り立つと仮定する

iii) $n + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) + (\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta)i \\ &= (\cos(n\theta + \theta)) + (\sin(n\theta + \theta))i = \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta) \quad \Box\end{aligned}$$

定理【シュワルツの不等式】

$\forall s, t, u, v \in \mathbb{R}$ に対して

$(su + tv)^2 \leq (s^2 + t^2)(u^2 + v^2)$ が成り立つ. また等号成立条件は $sv = tu$

$\because$ $(s^2 + t^2)(u^2 + v^2) - (su + tv)^2 \geq 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}(s^2 + t^2)(u^2 + v^2) - (su + tv)^2 &= (s^2u^2 + s^2v^2 + t^2u^2 + t^2v^2) - (s^2u^2 + 2sutv + t^2v^2) \\ &= s^2v^2 + t^2u^2 - 2sutv = (sv - tu)^2 \geq 0\end{aligned}$$

また $(sv - tu)^2 = 0$ となるのは $sv = tu$ よって等号成立条件は $sv = tu$ $\quad \Box$

4　行列

4.1　行列の定義

定義

$m, n \in \mathbb{N}$

mn 個の実数 $a_{ij}(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ を並べた

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ を m 行 n 列の行列（$m \times n$ 行列,(m, n) 行列）という.

各 a_{ij} を A の (i, j) 成分という.

行ベクトル $(a_1, a_2, ..., a_n)$ は $1 \times n$ 行列と思える. 列ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ は $m \times 1$ 行列と思える.

A の (i, j) 成分 a_{ij} を $\underline{i \text{ 行 } j \text{ 列}}$の成分という.

m 個の行ベクトル

$$\mathbf{a}_i := (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})\ (1 \leq i \leq m) \text{ を用いて } A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \text{ と表せる.}$$

n 個の列ベクトル

$$\mathbf{b}_i := \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}\ (1 \leq i \leq n) \text{ を用いて } A = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n) \text{ と表せる.}$$

記号

毎回すべての成分を書くのは大変なので

$A = (a_{ij})_{ij}$ や (a_{ij}) などと表示する. このような表示のことを成分表示という.

定義

2 つの $m \times n$ 行列

$A = (a_{ij})_{ij}$ と $B = (b_{ij})_{ij}$ が等しい $A = B$ とは, 各 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対し, $a_{ij} = b_{ij}$

4.2 零行列, 正方行列, 対角行列, スカラー行列, 転置行列

定義【零行列】

各成分がすべて 0 の行列を零行列（またはゼロ行列）といい, $\underline{\mathbf{O}}$とかく.

定義【正方行列】

$n = m$ のとき, $m \times n$ 行列を正方行列という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ このとき $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ をその対角成分という.

定義【対角行列】

対角成分以外の成分がすべて 0 の正方行列を対角行列という.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1 & & & \text{\Large 0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & d_n \end{pmatrix}$$ と略記する.

定義【スカラー行列】

対角成分がすべて等しい対角行列をスカラー行列という.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & & & \text{\Large 0} \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a \end{pmatrix}$$ と略記する.

定義【転置行列】

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij} (= (a_{ij}))$ に対し,A の転置行列を次で定義する.

$$^tA := (a_{ij})_{ji} (= (a_{ji}))$$

※正方行列の場合は対角成分で折り返す,$m \times n$ 行列の転置行列は $n \times m$ 行列である.

命題 1

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) : m \times n$ 行列 $k \in \mathbb{R}$

1. $^t(^tA) = {}^t(a_{ji}) = (a_{ij}) = A$

2. $^t(A + B) = {}^t(a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = {}^tA +^t B$

3. $^t(kA) = {}^t(ka_{ij}) = (ka_{ji}) = k(a_{ji}) = k(^tA)$

4.3　行列の演算 1【和・差, スカラー倍】

定義【行列の和・差】

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ と $B = (b_{ij})_{ij}$ に対し, その和・差を次で定義する.

$$A \pm B := (a_{ij} \pm b_{ij})_{ij}$$

命題 2

$A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}, C = (c_{ij})_{ij}$: $m \times n$ 行列

1. $A + B = (a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} = (b_{ij} + a_{ij})_{ij} = B + A$

2. $(A+B)+C = (a_{ij}+b_{ij})_{ij}+(c_{ij})_{ij} = (a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})_{ij} = A+(B+C)$

3. $A + \mathbf{O} = (a_{ij} + 0_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij} = A$

4. $A - A = (a_{ij})_{ij} - (a_{ij})_{ij} = (a_{ij} - a_{ij})_{ij} = (0_{ij})_{ij} = \mathbf{O}$

定義【スカラー倍】

スカラー $k \in \mathbb{R}$ と $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ に対して

$kA := (ka_{ij})_{ij}$ を A の**スカラー k 倍**という.

命題 3

$A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}$: $m \times n$ 行列　$k, l \in \mathbb{R}$

1. $(kl)A = ((kl)a_{ij})_{ij} = (kla_{ij})_{ij} = k(la_{ij})_{ij} = k(lA)$

2. $(k+l)A = ((k+l)a_{ij})_{ij} = (ka_{ij} + la_{ij})_{ij} = (ka_{ij})_{ij} + (la_{ij})_{ij} = kA + lA$

3. $k(A+B) = k(a_{ij}+b_{ij})_{ij} = (k(a_{ij}+b_{ij}))_{ij} = (ka_{ij}+kb_{ij})_{ij} = (ka_{ij})_{ij} + (kb_{ij})_{ij} = kA + kB$

4. $0A = 0(a_{ij})_{ij} = (0a_{ij})_{ij} = (0_{ij})_{ij} = \mathbf{O}$

5. $1A = 1(a_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij} = A$

4.4　行列の演算 2【積】, 単位行列

定義【行列の積】

$A=(a_{ij})_{ij}: m\times n$ 行列 , $B=(b_{ij})_{ij}: n\times p$ 行列に対してその積を次で定める.

$$AB:=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} \quad (m\times p \text{ 行列})$$

注意

行列の積は数の積と性質が違う.

数の積の性質と同じものとして $A\mathbf{O}=\mathbf{O}A=\mathbf{O}$

数の積の性質と異なるものとして必ずしも $AB=BA$ ではない.

例 1）$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ よって $AB\neq BA$

また $AB=BA$ が成り立つとき A と B は**可換**という.

例 2）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\mathbf{O}$

ゼロ行列でない行列の積がゼロ行列になったこのような行列をゼロ因子という.

記号

$\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ クロネッカーのデルタといわれる.

定義【単位行列】

n 次正方行列 $E_n=(\delta_{ij})_{ij}$ を n **次単位行列**という.

（ここでは E_n としているが I_n と表記することもある.）

$$\text{一般に } E_n=\begin{pmatrix}1 & & & \text{\huge 0}\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & 1\end{pmatrix}$$

4.5　単位行列の性質, 行列の積の性質その 1【結合則】

命題

$A : m \times n$ 行列に対し,

$$AE_n = A\,,\ E_m A = A$$

$\because A = (a_{ij})_{ij}$ とする.

$AE_n = (A_{ij})_{ij}(\delta_{ij})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}\right)_{ij}$

ここで (i, j) 成分に着目すると

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{i1}\underbrace{\delta_{1j}}_{0} + a_{i2}\underbrace{\delta_{2j}}_{0} + \cdots + a_{ij}\underbrace{\delta_{jj}}_{1} + \cdots + a_{in}\underbrace{\delta_{nj}}_{0} = a_{ij}$

よって $AE_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}\right)_{ij} = (a_{ij})_{ij} = A$　□

$\because A = (a_{ij})_{ij}$ とする.

$E_m A = (\delta_{ij})_{ij}(a_{ij})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj}\right)_{ij}$

ここで (i, j) 成分に着目すると

$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = \underline{\delta_{i1}}a_{1j} + \cdots + \underline{\delta_{ii}}a_{ij} + \cdots + \underline{\delta_{in}}a_{nj} = a_{ij}$

よって $E_m A = A$　□

命題

$A : m \times n$ 行列, $B : n \times p$ 行列, $C : p \times q$ 行列　$r \in \mathbb{R}$（スカラー）

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $r(AB) = A(rB)$

$\because A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}, C = (c_{ij})_{ij}$ とする.

1. $(AB)C = ((a_{ij})_{ij}(b_{ij})_{ij})(c_{ij})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}(c_{ij})_{ij}$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\right)_{ij} = \left(\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)_{ij}$$

$$A(BC) = (a_{ij})_{ij}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lj}\right)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right)\right)_{ij}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)\quad \square$$

2. $r(AB) = r\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} ra_{ik}b_{kj}\right)_{ij}$

$$A(rB) = (a_{ij})_{ij}(rb_{ij})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(rb_{kj})\right)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} ra_{ik}b_{kj}\right)_{ij}\quad \square$$

4.6 行列の積の性質その 2【分配法則】, 転置行列の積の性質

命題

$A : m \times n$ 行列,$B : n \times p$ 行列,$C : n \times p$ 行列,$D : p \times q$ 行列

1. $A(B+C) = AB + AC$
2. $(B+C)D = BD + CD$

$\because A(a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}, C = (c_{ij})_{ij}, D = (d_{ij})_{ij}$ とする.

1. $A(B+C) = (a_{ij})_{ij}(b_{ij}+c_{ij})_{ij}$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)$$

$AB + AC = (a_{ij})_{ij}(b_{ij})_{ij} + (a_{ij})_{ij}(c_{ij})_{ij}$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right)_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}\right)_{ij} \quad \square$$

2. $(B+C)D = (b_{ij}+c_{ij})_{ij}(d_{ij})_{ij}$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p} (b_{il}+c_{il})d_{lj}\right)_{ij} = \left(\sum_{l=1}^{p} b_{il}d_{lj} + c_{il}d_{lj}\right)_{ij}$$

$BD + CD = (b_{ij})_{ij}(d_{ij})_{ij} + (c_{ij})_{ij}(d_{ij})_{ij}$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p} b_{il}d_{lj}\right)_{ij} + \left(\sum_{l=1}^{p} c_{il}d_{lj}\right)_{ij} = \left(\sum_{l=1}^{p} b_{il}d_{lj} + c_{il}d_{lj}\right)_{ij} \quad \square$$

命題

$A : m \times n$ 行列,$B : n \times p$ 行列

$${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$$

$\because A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}$ とする.

$${}^t(AB) = {}^t\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ji}$$

$${}^tB\ {}^tA = {}^t(b_{ij})_{ij}\ {}^t(a_{ij})_{ij} = (b_{ij})_{ji}(a_{ij})_{ji} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}\right)_{ji} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ji} \quad \square$$

4.7　正則行列, 逆行列

定義

n 次正方行列 A が**正則**とは, ある n 次正方行列 B が存在し

$$AB = E_n \text{ かつ } BA = E_n \text{ を満たすときをいう.}$$

記号

この B を A^{-1} と表記し,A の**逆行列**という.

定理

n 次正則行列 A に対し,$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ を満たす A^{-1} はただ一つ（唯一, 一意的に）存在する.

$\because$
A^{-1} のほかに別の $AB = E_n = BA$ を満たす n 次正方行列 B が存在したとする.

$B = E_nB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E_n = A^{-1}$　$\therefore B = A^{-1}$　□

命題 1

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad - bc \neq 0$ ならば正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\because$ 計算すると $AA^{-1} = E_2$,$A^{-1}A = E_2$ より A は正則.

また逆行列の唯一性から $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　□

命題 2

n 次対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n \end{pmatrix}$ は $d_1d_2\cdots d_n \neq 0$ ならば正則.$D^{-1} = \begin{pmatrix} (d_1)^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (d_n)^{-1} \end{pmatrix}$

証明は上記と同様.

4.8　正則性の判定その 1

定理

$A, B : n$ 次正則行列について AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\because$
A, B は正則行列より $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A, BB^{-1} = E_n = B^{-1}B$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(\underbrace{BB^{-1}}_{E_n})A^{-1} = AA^{-1} = E_n$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{E_n})B = B^{-1}B = E_n$　$\square$

定理

$A : n$ 次正則行列について A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$

$\because$
A は正則なので $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$
A^{-1} を基準にすると A^{-1} は正則.
また $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E_n = (A^{-1})^{-1}A^{-1}$ より $(A^{-1})^{-1} = A$　$\square$

定理

$A :$ 正則に対し,${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

$\because A :$ 正則より $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ この転置をとると

${}^t(AA^{-1}) = {}^tE_n = {}^t(A^{-1}A)$ また ${}^tE_n = E_n$

転置行列の積の性質【${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$】より ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA,\ {}^t(A^{-1}A) = {}^tA{}^t(A^{-1})$

よって ${}^tA$ も正則.$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$　$\square$

4.9　正則性の判定その 2

系

ゼロ行列は正則ではない

$\because$

ゼロ行列が正則だと仮定すると $B\boldsymbol{O} = E_n = \mathbf{O}B$ となる B が存在する.

しかし $B\boldsymbol{O} = \mathbf{O} \neq E_n$ よって矛盾. したがってゼロ行列は正則ではない.　□

命題

n 次正方行列 A について $A^m = \mathbf{O}$ ならば A は正則ではない.

$\because$

$\mathbf{O}$ は正則ではないので

$A \neq \mathbf{O}$ で正則であると仮定すると $AA^{-1} = E_n$ となる A^{-1} が存在する.

両辺を m 乗すると $A^m(A^{-1})^m = {E_n}^m \Leftrightarrow \mathbf{O} = E_n$ よって矛盾.
（正確には右辺に m 乗, 左辺には左から A^{m-1} を右から $(A^{-1})^{m-1}$ をかける.）

したがって n 次正方行列 A について $A^m = \mathbf{O}$ ならば A は正則ではない.　□

命題

A, B をともにゼロ行列でない n 次正方行列とする.
このとき $AB = \mathbf{O}$ ならば A, B ともに正則行列ではない.

$\because$

i) A が正則だと仮定すると $A^{-1}A = E_n$ となる A^{-1} が存在する.

ここで両辺に右から B をかけると

$A^{-1}AB = B$,$AB = \mathbf{O}$ より $B = \mathbf{O}$ よって矛盾. したがって A は正則ではない.

ii) B が正則だと仮定すると $BB^{-1} = E_n$ となる B^{-1} が存在する.

ここで両辺に右から A をかけると

$ABB^{-1} = A$,$AB = \mathbf{O}$ より $A = \mathbf{O}$ よって矛盾. したがって B は正則ではない.　□

4.10 行列の指数表記

記号

$A : n$ 次正則行列, $m \in \mathbb{Z}$

$$A^m = \begin{cases} \overbrace{AA\cdots A}^{m} & (m > 0) \\ E_n & (m = 0) \\ A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} & (m < 0) \end{cases}$$

命題

自然数 m に対して $A^m = \mathbf{O}$ ならば $A - E_n$, $A + E_n$ は正則である.

$\because$

$(A - E_n)(-E_n - A - A^2 - A^3 - \cdots - A^{m-1}) = E_n - A^m = E_n$

$(-E_n - A - A^2 - A^3 \cdots - A^{m-1})(A - E_n) = E_n - A^m = E_n \therefore A - E_n$ は正則.

$(A + E_n)(E_n - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^{m-1}A^{m-1}) = E_n + (-1)^{m-1}A^m = E_n$ 逆も同様.

よって $A + E_n$ も正則. $\square$

4.11　行列のブロック分割

行列のブロック分割

$A : m \times n$ 行列を区分けすることを考える.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)$$

ここで $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{is}$ を m_i, $A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{rj}$ を n_j とすると

A_{ij} は $m_i \times n_j$ 行列（A の小行列という.）$\longrightarrow$ 行列を成分とする行列を考える

$A = (A_{ij})_{ij} \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ これを A のブロック分割という.

定義【和・差, スカラー倍】

$A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}$ が同じブロック分割のとき

$$A \pm B = (A_{ij} \pm B_{ij})_{ij}$$

$r \in \mathbb{R}$: スカラー

$$rA = (rA_{ij})_{ij}$$

定義【積】

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)_{m \times n} \qquad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{array}\right)_{n \times p}$$

ここで $n_i : A_{1i}, ..., A_{ri}$ としたときに $B_{i1}, ..., B_{it}$ が n_i であれば掛け算が可能.

このとき積 AB は通常の行列の積と同様に

$$AB = (A_{ij})_{ij}(B_{ij})_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)_{ij} \text{ で与えられる.}$$

4.12　行ベクトル分割・列ベクトル分割, 内積

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{pmatrix}_{(m\times 1)} \longleftarrow \text{行ベクトル分割} \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{array} \right)_{(1\times p)} \longleftarrow \text{列ベクトル分割}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_p \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{a}_m\mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}_p \end{array} \right)$$

ここで $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$（スカラー）$\cdots$ 内積という.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{array} \right)_{(n\times 1)} \longleftarrow \text{列ベクトル分割} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}_n \end{pmatrix}_{(n\times 1)} \longleftarrow \text{行ベクトル分割}$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{d}_n \end{pmatrix} = \mathbf{c}_1\mathbf{d}_1 + \cdots + \mathbf{c}_n\mathbf{d}_n$$

ここで $\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1p} \end{pmatrix}$

4.13 ブロック分割した行列の性質その 1

命題 1

$A, C : m$ 次正方行列

$B, D : n$ 次正方行列

1. $\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & BD \end{array}\right)$
2. $\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{O} \\ \hline * & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & \mathbf{O} \\ \hline * & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & \mathbf{O} \\ \hline * & BD \end{array}\right)$
3. $\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline \mathbf{O} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & * \\ \hline \mathbf{O} & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & * \\ \hline \mathbf{O} & BD \end{array}\right)$

注意　*は「何か入る」という意味で*はみな同じという意味ではない.

命題 2

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \mathbf{O} & A_{22} \end{array}\right)$（$A_{11}$ は m 次正方行列，A_{22} は n 次正方行列，A_{12} は $m \times n$ 行列）

と与えられているとき A_{11}, A_{22} が正則 $\Longrightarrow$ A も正則

$\because$

仮定より A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1} が存在する.

ここで $B := \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline \mathbf{O} & A_{22}^{-1} \end{array}\right)$ とおくと

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \mathbf{O} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline \mathbf{O} & A_{22}^{-1} \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}A_{11}^{-1} & -A_{11}\left(A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\right) + A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline \mathbf{O} & A_{22}A_{22}^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) = E_{m+n}$$

同様に $BA = E_{n+m}$ よって A は正則　□

命題 3

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & \mathbf{O} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$（$A_{11}$ は m 次正方行列，A_{22} は n 次正方行列，A_{21} は $n \times m$ 行列）

と与えられているとき A_{11}, A_{22} が正則 $\Longrightarrow$ A も正則

$\because$

仮定より A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1} が存在する.

ここで $B := \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & \mathbf{O} \\ \hline -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{array}\right)$ とおき，計算すると $AB = E_{m+n}$，$BA = E_{n+m}$

よって A は正則　□

4.14　ブロック分割した行列の性質その 2

系

1. 任意の $m \times n$ 行列 X に対し,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E_m & X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \text{ とおくと } A \text{ は常に正則. また } k \in \mathbb{Z} \text{ に対して } A^k = \left(\begin{array}{c|c} E_m & kX \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right)$$

2. 任意の $n \times m$ 行列 Y に対し,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline Y & E_n \end{array}\right) \text{ とおくと } A \text{ は常に正則. また } k \in \mathbb{Z} \text{ に対して } A^k = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline kY & E_n \end{array}\right)$$

$\because$

1. $B := \left(\begin{array}{c|c} E_m & -X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{array}{c|c} E_m & X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & -X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} E_m & -E_mX + XE_n \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) = E_{m+n} \end{aligned}$$

同様に $BA = E_{n+m}$ よって A は正則.$\cdots$(i)

(i) より B は A の逆行列すなわち $B = A^{-1}$ よって $k = -1$ のとき成立.

$k = 1$ のとき

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 1X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \text{ よって成立.}$$

k のとき

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} E_m & kX \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \text{ が成り立つと仮定する.}$$

$k+1$ のとき

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^kA &= \left(\begin{array}{c|c} E_m & kX \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} E_m & E_mX + kXE_n \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & (k+1)X \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \text{ よって成り立つ.} \quad \square \end{aligned}$$

2. 同様.

4.15 ブロック分割した行列の性質その 3【正則であるための必要十分条件】

嬉しいかもしれない

$A : m$ 次正則行列, $B : m \times n$ 行列, $C : n \times m$ 行列, $D : n$ 次正方行列

$$P := \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

で与えられたとき P が正則であるための必要十分条件は $(-CA^{-1}B + D)$ が正則であることである.

また逆行列 $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ \hline -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right)$

$\because$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AX + BZ & AY + BW \\ \hline CX + DZ & CY + DW \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \cdots [1]$$

$$\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} XA + YC & XB + YD \\ \hline ZA + WC & ZB + WD \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & E_n \end{array}\right) \cdots [2]$$

[1],[2] を X, Y, Z, W について解けるような条件を考えると

(*解くときのポイントは A が仮定より正則なので A が入っている式に着目してやる.
また,$AA^{-1} = E_m = A^{-1}A$ をうまく利用して X, Y, Z, W について解く.
但し A^{-1} 掛ける順番（右からか左からか）に注意すること.)

$AX + BZ = E_m \Leftrightarrow AX = E_m - BZ \Leftrightarrow X = A^{-1}(E_m - BZ) = A^{-1} - A^{-1}BZ \cdots$ (i)

$AY + BW = \mathbf{O} \Leftrightarrow AY = -BW \Leftrightarrow Y = -A^{-1}BW \cdots$ (ii)

$XA + YC = E_m \Leftrightarrow XA = E_m - YC \Leftrightarrow X = (E_m - YC)A^{-1} = A^{-1} - YCA^{-1} \cdots$ (iii)

$ZA + WC = \mathbf{O} \Leftrightarrow ZA = -WC \Leftrightarrow Z = -WCA^{-1} \cdots$ (iv)

(i),(ii),(iii),(iv) より $X = A^{-1} + A^{-1}BWCA^{-1}, Y = -A^{-1}BW, Z = -WCA^{-1}$

ここで $CX + DZ = \mathbf{O} \Leftrightarrow C(A^{-1} + A^{-1}BWCA^{-1}) = D(WCA^{-1})$

$\Leftrightarrow CA^{-1} + CA^{-1}BWCA^{-1} = DWCA^{-1} \overset{*1}{\Leftrightarrow} C + CA^{-1}BWC = DWC$

$\overset{(ii)}{\Leftrightarrow} C - CYC = DWC \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} C - C(E_m - XA) = -DZA \overset{展開}{\Longleftrightarrow} CXA = DWC$

$\overset{X\text{を代入}}{\Longleftrightarrow} C(A^{-1} + A^{-1}BWCA^{-1})A = DWC \overset{展開}{\Longleftrightarrow} C + CA^{-1}BWC = DWC$

$\Leftrightarrow C = DWC - CA^{-1}BWC \Leftrightarrow C = (D - CA^{-1}B)WC$

$\overset{*2}{\Leftrightarrow} \mathbf{O} = (D - A^{-1}B)WC - C = \{(D - CA^{-1}B)W - E_n\}C$

ここで C はゼロ行列とは限らないので

$(D - CA^{-1}B)W - E_n = \mathbf{O} \Leftrightarrow E_n = (D - CA^{-1}B)W$

すなわちこれを満たすのは $W = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ である

よって $(-CA^{-1}B + D)$ が正則であればよいということがわかった.

また Z, Y, Z は A, B, C, D, W で表せるので

$W = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ をそれぞれに代入すると逆行列の形になる.

上の結果からするまでもないが計算すると $PP^{-1} = E_{m+n} = P^{-1}P$ より

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ \hline -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right) \quad \square$$

---

*1A を右からかける*2 両辺に $-C$ をする

*A が m 次正方行列,D が n 次正則行列でも同様の考え方.

4.16　複素行列, 随伴行列

定義【複素行列】

成分が<u>複素数</u>からなる行列のことを<u>複素行列</u>という.

※成分が実数の行列のことを<u>実行列</u>ということもある.

定義

複素行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ に対し,

$\overline{A} := (\overline{a}_{ij})_{ij}$ と定め,A の**複素共役行列**という.

定理

$A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij}$: 複素行列（適当なサイズ）, $\lambda \in \mathbb{C}$

1. $\overline{A+B} = \overline{(a_{ij}+b_{ij})_{ij}} = (\overline{a_{ij}+b_{ij}})_{ij} = (\overline{a}_{ij}+\overline{b}_{ij})_{ij} = (\overline{a}_{ij})_{ij} + (\overline{b}_{ij})_{ij} = \overline{A} + \overline{B}$

2. $\overline{\lambda A} = (\overline{\lambda a}_{ij})_{ij} = (\overline{\lambda}\ \overline{a}_{ij})_{ij} = \overline{\lambda}(\overline{a}_{ij})_{ij} = \overline{\lambda}\ \overline{A}$

3. $\overline{AB} = \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}b_{kj}}\right)_{ij} = (\overline{a}_{ij})_{ij}(\overline{b}_{ij})_{ij} = \overline{A}\ \overline{B}$

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{(\overline{a}_{ij})_{ij}} = (\overline{\overline{a}}_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij} = A$

定義【随伴行列】

複素行列 A に対し,

$A^* := {}^t\overline{A}$ とおく. これを A の**随伴行列**という.（*は指数ではない,A スタイルという）

定理

A, B : 複素行列（適当なサイズ）,$\lambda \in \mathbb{C}$: スカラー

1. $(A+B)^* = {}^t\overline{(a_{ij}+b_{ij})}_{ij} = (\overline{a_{ij}+b_{ij}})_{ji} = (\overline{a}_{ij})_{ji} + (\overline{b}_{ij})_{ji} = {}^t(\overline{a}_{ij})_{ij} + {}^t(\overline{b}_{ij})_{ij} = A^* + B^*$

2. $(AB)^* = {}^t\left(\overline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}\right)_{ij} = \left(\overline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}\right)_{ji} = \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{b_{kj}a_{ik}}\right)_{ji} = (\overline{b}_{ij})_{ji}(\overline{a}_{ij})_{ji} = B^*A^*$

3. $(\lambda A)^* = {}^t(\overline{\lambda a}_{ij})_{ij} = (\overline{\lambda}\ \overline{a}_{ij})_{ji} = \overline{\lambda}(\overline{a}_{ij})_{ji} = \overline{\lambda}{}^t(\overline{a}_{ij})_{ij} = \overline{\lambda}A^*$

4. $(A^*)^* = {}^t\overline{((\overline{a}_{ij})_{ji})} = (\overline{\overline{a}}_{ij})_{ij} = (a_{ij})_{ij} = A$

4.17　対称行列, 交代行列, エルミット行列とその性質

定義【対称行列, 交代行列, エルミット行列】

複素行列 A に対して

1. ${}^tA = A$ を満たす A を**対称行列**という.
2. ${}^tA = -A$ を満たす A を**交代行列**という.（歪対称行列という.）
3. $A^* = A$ を満たす A を**エルミット行列**という.

補題

A : 正方行列に対して

1. $A + {}^tA$ は対称行列
2. $A - {}^tA$ は交代行列
3. A が対称行列かつ交代行列ならば $A = \mathbf{O}$

$\because$

1. ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$
2. ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$
3. $A \overset{*1}{=} {}^tA \overset{*2}{=} -A \therefore 2A = \mathbf{O}$ よって $A = \mathbf{O}$　□

*1 対称行列より
*2 交代行列より

定理

任意の正方行列 A に対し,

ある対称行列 X と交代行列 Y が一意的に存在し $A = X + Y$

$\because$

（存在性）$X := \dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$, $Y := \dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ とおく
（補題より X は対称行列,Y は交代行列である）

$$X + Y = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) = A$$

（一意性）別の行列 X' : 対称行列,Y' : 交代行列が存在し,$A = X' + Y'$ と仮定する.

$A = X + Y$ より $X + Y = X' + Y' \Longleftrightarrow \underbrace{X - X'}_{\text{対称行列}} = \underbrace{Y' - Y}_{\text{交代行列}}$

よって補題より $X - X' = \mathbf{O} = Y' - Y \therefore X = X'$, $Y = Y'$　□

4.18　性質 2

命題

1. 交代行列の対角成分はすべて 0 である.

2. エルミット行列の対角成分はすべて実数である.

3. 任意の行列 A に対して,A^tA は常に対称行列になる.

4. 任意の行列 A に対して,AA^* は常にエルミット行列になる.

5. 正則行列 A に対して A^* も正則行列になる.

$\because$

1. $A=(a_{ij})_{ij}$ と表示したとき
A は正方行列なので ${}^tA=(a_{ij})_{ji}=(a_{ji})_{ij}$ と表示できる.
（正方行列でないとこれは言えない.）
すると仮定より交代行列なので ${}^tA=-A$ より $a_{ii}=-a_{ii}\therefore a_{ii}=0$　□

2. エルミット行列の定義より対角成分が複素共役と等しいから　□

$$\left(\begin{array}{l}\text{「}z\in\mathbb{C}\text{ に対して } z=\overline{z}\iff z\in\mathbb{R}\text{」}\\ \because z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\text{ と表示したとき}\\ (\Rightarrow)\ z=\overline{z}\text{ なので } a+bi=a-bi\text{ になるには } b=0\therefore z=a\in\mathbb{R}\\ (\Leftarrow)\ z\in\mathbb{R}\text{ より } b=0, b=0\text{ より } z=a+0i=a=a-0i=\overline{z}\quad\square\end{array}\right)$$

3. 転置をとると ${}^t(A^tA)={}^t({}^tA)^tA=A^tA$　□

4. 随伴をとると $(AA^*)^*=(A^*)^*A^*=AA^*$　□

5. 仮定より $AA^{-1}=E_n=A^{-1}A$
両辺の随伴をとると
$(AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^*=(E_n)^*=E_n=(A^{-1}A)^*=A^*(A^{-1})^*$ よって A^* は正則　□

4.19　直交行列, ユニタリー行列とその性質

定義【直交行列, ユニタリー行列】

$A : n$ 次正方行列

1. $A^tA = E_n = {}^tAA\ \ (A^{-1} = {}^tA)$ を満たす A を**直交行列**という.

2. $AA^* = E_n = A^*A\ \ (A^{-1} = A^*)$ を満たす A を**ユニタリー行列**という.

定理

1. 直交行列同士の積もまた直交行列になる.
2. 直交行列の逆行列もまた直交行列になる.
3. ユニタリー行列同士の積もまたユニタリー行列になる.
4. ユニタリー行列の逆行列もまたユニタリー行列になる.

$\because$

1. A, B を直交行列とすると ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$　□

2. A を直交行列とすると ${}^tA = A^{-1}$ を満たす.
ここで両辺の転置をとると $A = {}^t(A^{-1})$ である.
また $A = (A^{-1})^{-1}$ すなわち $(A^{-1})^{-1} = {}^t(A^{-1})$ よって A^{-1} は直交行列である　□

3. A, B をユニタリー行列とすると $(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$　□

4. A をユニタリー行列とすると $A^* = A^{-1}$ を満たす.
ここで両辺の随伴をとると $A = (A^{-1})^*$ である.
また $A = (A^{-1})^{-1}$ すなわち $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^*$
よって A^{-1} はユニタリー行列である.　□

定理

複素行列 A に対し

$A = X + iY$ を満たすエルミット行列 X, Y が一意的に存在する.

$\because$
（存在性）$X := \frac{1}{2}(A + A^*), Y := \frac{i}{2}(-A + A^*)$ とする
$X + iY = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*) = A$

（一意性）別の行列 X', Y' s.t. $A = X' + iY'$ が存在すると仮定すると

$A = X + iY$ より $X + iY = X' + iY' \Leftrightarrow X - X' = i(Y' - Y)$ この両辺の随伴をとると

$X - X' = -i(Y' - Y)$ となる. したがって $2i(Y' - Y) = \mathbf{O}$ より $Y = Y', X = X'$　□

5　写像

5.1　写像の定義, 全射・単射の定義, 恒等写像

定義【写像】

写像 $f : X \longrightarrow Y$ とは

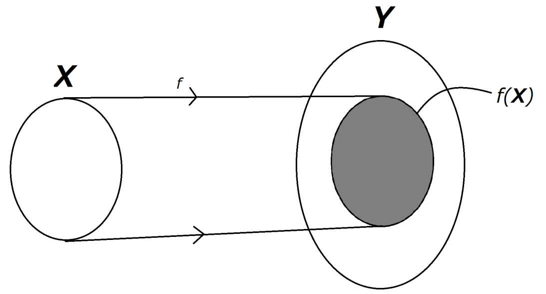
（行く前の元）$x \in X$ に対し（行き先の元）$f(x) \in Y$ が唯一定まるような対応のことをいう.

このときの X を**定義域**,Y を**値域**という.

f の像を $f(X)$ とかく（$\mathrm{Im} f$ と書くこともある）$f(X) := \{f(x) \in Y | x \in X\}$

$${}^{\forall}y \in f(X),\ {}^{\exists}x \in X \text{ s.t. } y = f(x)$$

写像のイメージ



定義【全射・単射】

写像 $f : X \longrightarrow Y$ について

f が**全射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}y \in Y, {}^{\exists}x \in X$ s.t. $f(x) = y$（任意の $y \in Y$ に対し, ある $x \in X$ が存在し,$f(x) = y$）
とくに f が全射 $\Leftrightarrow f(X) = Y$

f が**単射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$($\underset{\text{対偶}}{\Longleftrightarrow}$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

全射かつ単射のとき**全単射**という.

定義【恒等写像】

$f : X \longrightarrow X$ を**恒等写像**という. またこの f を id と表示する.

5.2 写像の簡単な性質

命題

写像 $f : X \longrightarrow Y$ と部分集合 $A,\ B \subset X$ に関して,
記号として $f(A) := \{f(a) \in Y | a \in A\}$ などと表記する.

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$\because$

1. 任意の $f(a) \in f(A)$ に対して, 仮定より $a \in A \subset B$ なので $f(a) \in f(B)$ $\square$

2.（まず $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ を示す.）
$^\forall y \in f(A \cup B), ^\exists x \in A \cup B$ s.t. $y = f(x)$
$^\exists x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A$ または $x \in B$ s.t. $y = f(x)$
$y = f(x) \in f(A)$ または $y = f(x) \in f(B) \Longleftrightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$
したがって $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ $\square$

（次に $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ を示す）
$^\forall y \in f(A) \cup f(B) \Longleftrightarrow y \in f(A)$ または $y \in f(B)$
(i) $y \in f(A),\ ^\exists x \in A$ s.t. $y = f(x)$
(ii) $y \in f(B),\ ^\exists x \in B$ s.t. $y = f(x)$
また (i), (ii) はそれぞれ $x \in A \subset A \cup B,\ x \in B \subset A \cup B$ と見れる.$\cdots$(iii)
(iii) より $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B),\ y = f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$
$\therefore y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$
したがって $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ $\square$

3. $^\forall y \in f(A \cap B), ^\exists x \in A \cap B$ s.t. $y = f(x)$
ここで $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B$
すなわち $y = f(x) \in f(A)$ かつ $y = f(x) \in f(B) \Longleftrightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$ $\square$

---

*$A, B \subset X$ であって必ずしも $A \cup B = X$ ではないことに注意.
**同じく $f(A),\ f(B) \subset Y$ であって必ずしも $A,\ B$ の行き先 $= Y$ でないことに注意.
3. の逆が成り立たない反例は $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$

5.3　合成写像とその性質

定義【合成写像】

2 つの写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に対し,

合成写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ が $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ で定まる.

図説

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

合成写像の性質

1. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ の 3 つの写像が与えられたとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. $\mathrm{id} \circ f = f$, $f \circ \mathrm{id} = f$

$\because x \in X$ とする.

1. $h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$
$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$　□

2. $(\mathrm{id} \circ f)(x) = \mathrm{id}(f(x)) = f(x)$, $(f \circ \mathrm{id})(x) = f(\mathrm{id}(x)) = f(x)$　□

図説

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \circ f"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f \circ \mathrm{id}"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

5.4　合成写像と全射・単射の関係性, 逆写像

定理 1

$f : X \longrightarrow Y$ が全単射 $\Longrightarrow$ ある $g : Y \longrightarrow X$ が存在し，$g \circ f = \mathrm{id}$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}$

$\because$

f が全射より $^\forall y \in Y,\ ^\exists x \in X$ s.t. $y = f(x)$ ここでこの x は y に対し, 唯一.

もうひとつ $x' \in X$ が存在し,$y = f(x')$ を満たすとすると

$f(x) = f(x')$ ここで f は単射より $x = x'$

そこで, この対応で写像 $\begin{array}{cccc} g & : & Y & \longrightarrow & X \\ & & y & \longmapsto & x \end{array}$ を考える.

すると $(g \circ f)(\underline{x}) = g(\underbrace{f(x)}_{y}) = \underline{x} = \mathrm{id}(x)$ ，$(f \circ g)(\underline{y}) = f(\underbrace{g(y)}_{x}) = \underline{y} = \mathrm{id}(y)$ 　□

記号

この g を f^{-1} と表示し,f の**逆写像**という.

定理 2

$f : X \longrightarrow Y$ について

1. ある $g : Y \longrightarrow X$ が存在し, $g \circ f = \mathrm{id} \Longrightarrow f$: 単射かつ g : 全射
2. ある $g : Y \longrightarrow X$ が存在し, $g \circ f = \mathrm{id}$ かつ $f \circ g = \mathrm{id} \Longrightarrow f$: 全単射

$\because$

1. （f : 単射）$f(x) = f(x')$ を仮定する
   この両辺に g を施すと $g(f(x)) = g(f(x'))$
   ここで $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \overset{*}{=} x$ ，$g(f(x')) = (g \circ f)(x') \overset{*}{=} x'$
   よって $x = x'$ また $f(x) = f(x')$ と仮定していたので単射の定義より f : 単射　□
   （g : 全射）g : 全射とは $^\forall x \in X, ^\exists y \in Y$ s.t. $x = g(y)$ なので
   $y = f(x)$ とおけば $x = \mathrm{id}(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$ よって g : 全射　□
2. **1.** より f : 単射　□
   また f : 全射とは $^\forall y \in Y, ^\exists x \in X$ s.t. $y = f(x)$ なので
   $x = g(y)$ とおけば $y = \mathrm{id}(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x)$ よって f:全射　□

---

*$g \circ f = \mathrm{id}$（定理の仮定）より

系

$f : X \longrightarrow Y$ が全単射 $\Longleftrightarrow$ ある $g : Y \longrightarrow X$ が存在し，$g \circ f = \mathrm{id}$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}$

（$\because$ 定理 1.2 より　□）

5.5 合成写像と全射・単射の性質その 1

定理

写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ に関して

1. f, g が全射 $\Longrightarrow g \circ f$ は全射
2. f, g が単射 $\Longrightarrow g \circ f$ は単射
3. $g \circ f$ が全射 $\Longrightarrow g$ は全射
4. $g \circ f$ が単射 $\Longrightarrow f$ は単射

$\because$

1. ${}^\forall z \in Z$ に対して
   g は全射より ${}^\exists y \in Y$ s.t. $z = g(y)$, また f は全射より ${}^\exists x \in X$ s.t. $y = f(x)$.
   したがって $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$
   よって写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ について
   ${}^\forall z \in Z, {}^\exists x \in X$ s.t. $z = (g \circ f)(x)$ が示された. $\therefore g \circ f$: 全射 $\square$

2. $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ を仮定する. とくに $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(g \circ f)(x') = g(f(x'))$
   ここで g は単射より $g(f(x)) = g(f(x')) \Longrightarrow f(x) = f(x')$
   また f は単射より $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$
   したがって写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ について
   $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Longrightarrow x = x'$ が示された. $\therefore g \circ f$: 単射 $\square$

3. ${}^\forall z \in Z$ に対して
   $g \circ f$ は全射より ${}^\exists x \in X$ s.t. $z = (g \circ f)(x)$
   ここで $y := f(x)$ とおくことにより $z = g(y)$ となる $y \in Y$ が存在する.
   よって $g : Y \longrightarrow Z$ について
   ${}^\forall z \in Z, {}^\exists y \in Y$ s.t. $z = g(y)$ が示された. $\therefore g$ は全射 $\square$

4. $f(x) = f(x')$ を仮定する.
   両辺に g を施すと $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ ここで $g \circ f$ は単射より $x = x'$
   よって $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ が示された. $\therefore f$ は単射 $\square$

5.6 合成写像と全射・単射の性質その 2

定理

写像 $f: X \longrightarrow Y$ に関して

1. f が全射ならば「写像 $g: Y \longrightarrow Z$ と $g': Y \longrightarrow Z$ に対して $g \circ f = g' \circ f \Longrightarrow g = g'$」
2. f が単射ならば「写像 $h: W \longrightarrow X$ と $h': W \longrightarrow X$ に対して $f \circ h = f \circ h' \Longrightarrow h = h'$」

$\because$

1. ${}^{\forall} y \in Y$ に対して $z = g(y) = g'(y)$ を示す.

まず f は全射より ${}^{\exists} x \in X$ s.t. $y = f(x)$

この両辺に g, g' をそれぞれ施すと $g(y) = (g \circ f)(x), g'(y) = (g' \circ f)(x)$

ここで仮定より $(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x)$ より $g(y) = g'(y)$ $\square$

2. ${}^{\forall} w \in W$ に対して $h(w) = h'(w)$ を示す.

まず仮定より $(f \circ h)(w) = (f \circ h')(w) \Longleftrightarrow f(h(w)) = f(h'(w))$

ここで f は単射より $h(w) = h'(w)$ $\square$

---

*1.2. の逆「」ならば f :(1. 全射,2. 単射) がいえるが証明は難解なの（とスペースの関係）で省略する.
**いずれの証明も対偶を使う.

上の命題の逆も含めた内容を図式化すると

$$f: \text{全射} \Longleftrightarrow \left[X \xrightarrow{f} Y \overset{g}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} Z \Longrightarrow g = g' \right] \quad f: \text{単射} \Longleftrightarrow \left[Z \overset{h}{\underset{h'}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \Longrightarrow h = h' \right]$$

定理

写像 $f: X \longrightarrow Y$ について

1. f : 単射 $\Longleftrightarrow$ ある $r: Y \longrightarrow X$ が存在して $r \circ f = \mathrm{id}$
2. f : 全射 $\Longleftrightarrow$ ある $s: Y \longrightarrow X$ が存在して $f \circ s = \mathrm{id}$
3. X から Y に単射が存在する $\Longleftrightarrow$ Y から X に全射が存在する.

---

*この証明はどれも難解なの（とスペースの関係）で省略する.

5.7　逆写像の性質

定理

1. 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, その逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ は一意的に存在する.
2. 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して, その逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ も全単射で $(f^{-1})^{-1} = f$
3. 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ と全単射 $g : Y \longrightarrow Z$ に対して, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$\because$

1. f^{-1} の他に $g : Y \longrightarrow X$ s.t. $f \circ g = \mathrm{id} = g \circ f$ が存在すると仮定すると
   ここで $g = g \circ \mathrm{id} = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id} \circ f^{-1} = f^{-1}$　□

2. f は全単射なので $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$
   f^{-1} を基準にすれば f^{-1} は全単射. また $(f^{-1})^{-1} = f$　□

3. $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (\underbrace{f \circ f^{-1}}_{\mathrm{id}}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}$

   また $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (\underline{g^{-1} \circ g}) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$

   したがって $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$　□

定義【線形写像】

写像 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像（**Linear Mapping**）とは

(LM1)　$f(\mathbb{x}+\mathbb{y}) = f(\mathbb{x}) + f(\mathbb{y})$　（和を保つ）
(LM2)　$f(k\mathbb{x}) = kf(\mathbb{x})$　　（スカラー倍を保つ）が成り立つことをいう.

※ $\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n \quad k \in \mathbb{R}$
特に $m = n$ のとき,線形写像 f を **1** 次変換または線形変換という.

命題 1

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; 線形写像について

$$f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$$

$\because$
$f(\mathbb{o}) = f(\mathbb{o}+\mathbb{o}) \overset{(\mathrm{LM1})}{=} f(\mathbb{o}) + f(\mathbb{o}) = \mathbb{o} \cdots\cdots ((\mathrm{ex})x = x + x \therefore x = 0)$

$f(\mathbb{o}) = f(0\mathbb{o}) \overset{(\mathrm{LM2})}{=} 0f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$　□

定理

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$

このとき $f,\ g$: 線形写像 $\Longrightarrow g\circ f$: 線形写像

$\because$
${}^\forall\mathbb{x}, \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n,\ {}^\forall k \in \mathbb{R}$ について

$(g\circ f)(\mathbb{x}+\mathbb{y}) = g(f(\mathbb{x}+\mathbb{y})) \overset{*1}{=} g(f(\mathbb{x}) + f(\mathbb{y}))$

$\overset{*2}{=} g(f(\mathbb{x})) + g(f(\mathbb{y})) = (g\circ f)(\mathbb{x}) + (g\circ f)(\mathbb{y})$ よって $g\circ f$ は (LM1) を満たす.$\cdots$[1]

$(g\circ f)(k\mathbb{x}) = g(f(k\mathbb{x})) \overset{*3}{=} g(kf(\mathbb{x})) \overset{*4}{=} kg(f(x)) = k(g\circ f)(\mathbb{x})$

よって $g\circ f$ は (LM2) を満たす.$\cdots$[2]

[1],[2] より $g\circ f$ は線形写像である.　□

---

*1 f:線形 (LM1) より
*2 g:線形 (LM1) より
*3 f:線形 (LM2) より
*4 g:線形 (LM2) より

命題 2

写像 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ について

$$f:\text{線形} \iff {}^{\exists}a\in\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ f(x)=ax \quad (x\in\mathbb{R})$$

$\because$

$(\Longrightarrow)$ ${}^{\forall}x,y\in\mathbb{R},\ {}^{\forall}k\in\mathbb{R}$

$f(x+y)=a(x+y)=ax+ay=f(x)+f(y)$ よって (LM1) が示された.

$f(kx)=a(kx)=k(ax)kf(x)$ よって (LM2) が示された. したがって f は線形

$(\Longleftarrow)$ f : 線形のとき

$a:=f(1)$ とおくと $f(x)=f(\underset{*1}{x}\cdot 1)\overset{*2}{=}xf(1)=xa=ax$　□

*1 スカラーとみれる　*2 (LM2)

$\boxed{1\text{ 次元から } n,m \text{ 次元への拡張（一般化）}}$

$m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ が与えられたとする.

$\mathbb{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ に対し,

$$A\mathbb{x}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

すなわち

$$\begin{array}{cccc} f_A & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & \mathbb{x} & \longmapsto & A\mathbb{x}\end{array}$$ が得られた.

命題 3

$$\begin{array}{cccc} f_A & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & \mathbb{x} & \longrightarrow & A\mathbb{x}\end{array}$$ は線形写像

$\because$

${}^{\forall}\mathbb{x},\mathbb{y}\in\mathbb{R}^n,\ {}^{\forall}k\in\mathbb{R}$

$f_A(\mathbb{x}+\mathbb{y})=A(\mathbb{x}+\mathbb{y})=A\mathbb{x}+A\mathbb{y}=f_A(\mathbb{x})+f_A(\mathbb{y})$ よって (LM1) を満たす.

$f_A(k\mathbb{x})=A(k\mathbb{x})=kA\mathbb{x}=kf_A(\mathbb{x})$ よって (LM2) を満たす. したがって f_A は線形写像　□

5.10　標準基底

定義【標準基底】

$\mathbb{R}^n$ の元 $\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \mathbb{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ 行目 $, ..., \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

この $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, ..., \mathbb{e}_i, ..., \mathbb{e}_n$ のことを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という.

補題

$$^\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n,\ ^\exists x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \mathbb{x} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n$$

$\because$

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R})$ とすると

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n \quad \square$

5.11　線形写像 $\leftrightarrow$ 行列

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の線形写像について

$\mathbb{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\mathbb{x})$ の値が知りたい.

まず補題より $\mathbb{x}$ は ${}^{\exists}x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{x} = x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2$ とかける.

すると $f(\mathbb{x}) = f(x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2) \overset{\text{(LM1)}}{=} f(x_1\mathbb{e}_1) + f(x_2\mathbb{e}_2) \overset{\text{(LM2)}}{=} x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2)$

つまり $f(\mathbb{e}_1), f(\mathbb{e}_2)$ の値さえ知れたら $f(\mathbb{x})$ はすぐ求まる.

$f(\mathbb{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $f(\mathbb{e}_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ と a, b, c, d で表示すると

$$f(\mathbb{x}) = x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) = x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a + x_2 c \\ x_1 b + x_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ここで $M_f := (f(\mathbb{e}_1), f(\mathbb{e}_2))$ とおくと $f(\mathbb{x}) = M_f \mathbb{x}$　$\therefore f = f_{M_f}$

$M_f : f$ で決まる行列

命題【一般化】

${}^{\forall} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$;線形写像, ${}^{\exists} M_f : m \times n$ 行列 s.t. $f = f_{M_f}$

$\because$

$M_f := (f(\mathbb{e}_1), f(\mathbb{e}_2), ..., f(\mathbb{e}_n))$ とおくと $m \times n$ 行列

$f(\mathbb{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $f(\mathbb{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, $f(\mathbb{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$　$(a_{11}, ..., a_{mn} \in \mathbb{R})$ とすると

$M_f := (a_{ij})_{ij}$

補題より ${}^{\forall}\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$, ${}^{\exists}x_1, ...x_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{x} = x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n$

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{x}) &= f(\underbrace{x_1\mathbb{e}_1 + x_2\mathbb{e}_2 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n}_{\text{線形結合}}) \\
&\overset{(*)}{=} x_1 f(\mathbb{e}_1) + x_2 f(\mathbb{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbb{e}_n) \quad \text{(*LM1.2 より)} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_f \mathbb{x} = f_{M_f}(\mathbb{x}) \quad \square
\end{aligned}$$

5.12 線形写像 = 行列

定理 1

$$\begin{array}{cccccc} \text{写像 } F & : & (m\times n \text{ 行列全体の集合}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\text{線形写像全体の集合}) \\ & & A & \longmapsto & f_A \end{array}$$

とおいたとき, この写像 F は全単射

$\because$ 命題より次の写像が考えられる.

$$\begin{array}{cccccc} G & : & (\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\text{線形写像}) & \longrightarrow & (m\times n \text{ 行列}) \\ & & f & \longmapsto & M_f \end{array}$$

6.8 の系より, もし $G\circ F = \mathrm{id} = F\circ G$ ならば F : 全単射 $\leftarrow$ これを示す.

i) $^\forall f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$;線形写像 に対し,
$(F\circ G)(f) = F(G(f)) = F(M_f) = f_{M_f} \overset{*1}{=} f = \mathrm{id}(f)$

ii) $^\forall A = (a_{ij})_{ij}; m\times n$ 行列に対して
$(G\circ F)(A) = G(F(A)) = G(f_A) = M_{f_A}$
ここで $M_{f_A} := (f_A(\mathbb{e}_1), ..., f_A(\mathbb{e}_n))$

$$f_A(\mathbb{e}_i) = A\mathbb{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行目} \quad = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \longleftarrow \quad A \text{ の第 } i \text{ 列}$$

目

よって $M_{f_A} = A \quad \therefore (G\circ F)(A) = A = \mathrm{id}(A)$ したがって F は全単射 □

*1 命題【一般化】より

5.13　行列の概念と写像の概念との対応

補題

$A: m \times n$ 行列, $B: n \times p$ 行列とする. また, $f_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ f_B: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ とすると, このとき

$$f_A \circ f_B: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ は } f_A \circ f_B = f_{AB}$$

$\because$
$^\forall \mathbb{x} \in \mathbb{R}^p$ に対し
$(f_A \circ f_B)(\mathbb{x}) = f_A(f_B(\mathbb{x})) = f_A(B\mathbb{x}) = A(B\mathbb{x}) = AB\mathbb{x} = AB(\mathbb{x}) = f_{AB}(\mathbb{x})$　□

定理

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ に対し, 対応する行列をそれぞれ A, B とおく. このとき

$$\text{合成写像 } g \circ f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l \text{ に対応する行列は } BA$$

$\because$
定理 1 より

$$\begin{array}{cccccc} F & : & (l \times n \text{ 行列}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l; \text{線形}) \\ & & X & \longmapsto & f_X \end{array}$$ となる全単射があった.

$F(\{g \circ f \text{ に対応する行列 }\}) = g \circ f \overset{*1}{=} f_B \circ f_A \overset{*2}{=} f_{BA} = F(BA)$

とくに F は単射なので $\{g \circ f$ に対応する行列 $\} = BA$　□

*1 $f = f_A,\ g = f_B$ なので　*2 補題より

1 次変換のとき f に対応する行列を**表現行列**という.

5.14　1 次変換の性質その 1【平面上（回転行列）】

定理

1. x 軸に関する折り返しの対応の 1 次変換は次で表される.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. y 軸に関する折り返しの対応の 1 次変換は次で表される.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3. x 軸方向に k 倍, y 軸方向に l 倍する 1 次変換は次で表される.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\because$

1. 平面上の点 (x, y) を x 軸に関する折り返すと $(x, -y)$ に移る. すなわち $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

この f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　□

2. 同様

3. 平面上の点 (x, y) は x 軸方向に k 倍, y 軸方向に l 倍すると (kx, ly) に移る. 以下同様.　□

定理【回転行列】

平面上の点 (x, y) を原点の周りに角 θ だけ反時計回りに回転し得られる (x', y') は次で表される.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\because$

$(1, 0)$, $(0, 1)$ はこの回転で $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-\sin\theta, \cos\theta)$ に移る.(単位円を考えるとわかる.)

すなわち $(x, 0)$, $(0, y)$ はこの回転で $(x\cos\theta, x\sin\theta)$, $(-y\sin\theta, y\cos\theta)$ に移る.

もっというと (x, y) をこの回転で移すと $(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

したがって $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ に対応する行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　□

5.15　1 次変換の性質その 2【原点を通る直線の折り返し】

定理

平面上の点 (x,y) を直線 $y=ax$ に関して対称に移動する 1 次変換は次で表される.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\because$

直線上の点 $(1,a)$ は変わらない. 仮に $(a,-1)$ を $y=ax$ について対称移動させると $(-a,1)$

そこで, 求める 1 次変換の表現行列を A とすると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり, まとめると

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. よって, 表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{-1-a^2}\begin{pmatrix} -1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.16 線形写像の和とスカラー倍

定義【和・スカラー倍】

1. 線形写像たち $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ についてその**和**を次で定義する.

$$\begin{array}{rccc} f+g & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & \mathrm{x} & \longmapsto & f(\mathrm{x})+g(\mathrm{x}) \end{array}$$

2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ とスカラー $k\in\mathbb{R}$ について, その**スカラー倍**を次で定義する.

$$\begin{array}{rccc} k.f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & \mathrm{x} & \longmapsto & kf(\mathrm{x}) \end{array}$$

命題

1. 線形写像たち $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ についてその和 $f+g$ は線形である.

2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m, k\in\mathbb{R}$ についてそのスカラー倍 $k.f$ は線形である.

$\because\ {}^\forall\mathrm{x},\ \mathrm{y}\in\mathbb{R}^n,\ k,l\in\mathbb{R}$

1.（LM1,2）を確かめる.

$(f+g)(\mathrm{x}+\mathrm{y})=f(\mathrm{x}+\mathrm{y})+g(\mathrm{x}+\mathrm{y})\overset{*1}{=}f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})+g(\mathrm{x})+g(\mathrm{y})$

$=f(\mathrm{x})+g(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})+g(\mathrm{y})=(f+g)(\mathrm{x})+(f+g)(\mathrm{y})$ よって (LM1) を満たす.

$(f+g)(k\mathrm{x})=f(k\mathrm{x})+g(k\mathrm{x})\overset{*1}{=}kf(\mathrm{x})+kg(\mathrm{x})k(f+g)(\mathrm{x})$ よって (LM2) を満たす.

したがって $f+g$ は線形　□

2.（同様に LM1,2 を確かめる）

$k.f(\mathrm{x}+\mathrm{y})=kf(\mathrm{x}+\mathrm{y})\overset{*1}{=}k(f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y}))=kf(\mathrm{x})+kf(\mathrm{y})=k.f(\mathrm{x})+k.f(\mathrm{y})$
よって (LM1) を満たす.

$k.f(l\mathrm{x})=kf(l\mathrm{x})\overset{*1}{=}k(lf(\mathrm{x}))=klf(\mathrm{x})=lkf(\mathrm{x})=l(k.f(\mathrm{x}))$
よって (LM2) を満たす.

したがって $k.f$ は線形　□

---

*1 f,g は線形より

**別証として $f,\ g$ に対応する行列をそれぞれ A,B とすることにより
$f+g,k.f$ に対応する行列を見つけられれば証明は容易である

1.$(f+g)(\mathrm{x})=f(\mathrm{x})+g(\mathrm{x})=A\mathrm{x}+B\mathrm{x}=(A+B)(\mathrm{x})$ よって $f+g$ に対応する行列は $A+B$. 対応する行列があったので $f+g$ は線形　□

2.$k.f(\mathrm{x})=kf(\mathrm{x})=kA\mathrm{x}$ よって $k.f$ に対応する行列は kA. 対応する行列があったので $k.f$ は線形　□

定義【内積・外積】

1. 2 つの n 項数ベクトル $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対してその**内積**を次で定義する.

$$(\mathbb{x}, \mathbb{y}) := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

2. 2 つの 3 項数ベクトル $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対してその**外積**を次で定義する.

$$\mathbb{x} \times \mathbb{y} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

命題

1. 固定された $\mathbb{x}$ に対して, 次は線形である.

$$\begin{array}{cccccc} f^{\mathbb{x}} & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbb{y} & \longmapsto & (\mathbb{x}, \mathbb{y}) \end{array}$$

2. 固定された $\mathbb{x}$ に対して, 次は線形である.

$$\begin{array}{cccccc} g^{\mathbb{x}} & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbb{y} & \longmapsto & \mathbb{x} \times \mathbb{y} \end{array}$$

$\because$

1. $f^{\mathbb{x}}(\mathbb{y}) = (\mathbb{x}, \mathbb{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

すなわち $f^{\mathbb{x}}$ に対応する（$1 \times n$）行列 $(x_1, \ldots, x_n)$ があったので $f^{\mathbb{x}}$ は線形　□

2. $g^{\mathbb{x}}(\mathbb{y}) = \mathbb{x} \times \mathbb{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

すなわち $g^{\mathbb{x}}$ に対応する行列 $\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$ があったので $g^{\mathbb{x}}$ は線形　□

5.18　同型写像

定義【同型写像】

写像 f が同型写像 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が線形写像かつ全単射

命題 1

同型写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に対し, 逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は線形（とくに同型）

$\because$

${}^\forall \mathbb{y}, \mathbb{y}' \in \mathbb{R}^m$ に対し, f は全単射なので ${}^\exists \mathbb{x}, \mathbb{x}' \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$, $\mathbb{y}' = f(\mathbb{x}')$

$f^{-1}(\mathbb{y} + \mathbb{y}') = f^{-1}(f(\mathbb{x}) + f(\mathbb{x}')) \overset{\text{(LM1)}}{=} f^{-1}(f(\mathbb{x} + \mathbb{x}'))$

$= (f^{-1} \circ f)(\mathbb{x} + \mathbb{x}') = \mathrm{id}(\mathbb{x} + \mathbb{x}') = \mathbb{x} + \mathbb{x}' \cdots (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$

$= f^{-1}(\mathbb{y}) + f^{-1}(\mathbb{y}')$ よって (LM1) を満たす.

${}^\forall k \in \mathbb{R}$, ${}^\forall \mathbb{y} \in \mathbb{R}^m$ に対し, f は全射より ${}^\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$

$f^{-1}(k\mathbb{y}) = f^{-1}(kf(\mathbb{x})) \overset{\text{(LM2)}}{=} f^{-1}(f(k\mathbb{x})) = (f^{-1} \circ f)(k\mathbb{x}) = \mathrm{id}(k\mathbb{x}) = k\mathbb{x} = kf^{-1}(\mathbb{y})$

よって (LM2) を満たす. したがって f^{-1} は線形　□

補題

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; 線形写像に対して

$$f : \text{単射} \Longleftrightarrow [f(\mathbb{x}) = \mathbb{o} \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}]$$

$\because$

$(\Longrightarrow)$

$f(\mathbb{x}) = \mathbb{o}$ とすると,

一般に $f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$

f は単射より $f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{o}) \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$

$(\Longleftarrow)$

$f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y})$ のとき $f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) = \mathbb{o}$

$f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) \overset{\text{(LM2)}}{=} f(\mathbb{x}) + f(-\mathbb{y}) \overset{\text{(LM1)}}{=} f(\mathbb{x} - \mathbb{y})$

よって仮定から $\mathbb{x} - \mathbb{y} = \mathbb{o}$ $\therefore$ $\mathbb{x} = \mathbb{y}$ よって f は単射　□

命題 2

同型写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 注) に対し, 対応する行列 A は正則. さらに f^{-1} に対応する行列は A^{-1}

$\because$
B を f^{-1} に対応する行列とする.

すると $f = f_A,\ f^{-1} = f_B$

$\mathrm{id} = f^{-1} \circ f = f_B \circ f_A = f_{BA}$ ここで $f_{E_n} = \mathrm{id}$ より $BA = E_n \cdots [1]$

$\mathrm{id} = f \circ f^{-1} = f_A \circ f_B = f_{AB}$ ここで $f_{E_n} = \mathrm{id}$ より $AB = E_n \cdots [2]$

[1],[2] より $AB = E_n = BA \ \therefore\ B = A^{-1}$　$\square$

注)$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について f : 同型 $\Longrightarrow m = n$ が知られている

系

$A : n$ 次正方行列について

$$A : \text{正則} \Longleftrightarrow f_A : \text{全単射. とくに } (f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$$

$\because$
A が正則より A^{-1} が存在する. つまり行列 A^{-1} に対応する写像 $f_{A^{-1}}$ が存在する.

$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_{E_n} = \mathrm{id}$

$f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1}A} = f_{E_n} = \mathrm{id}$

よって f_A は全単射. また $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$　$\square$

この表現行列が正則である線形変換を**正則変換**という.

5.20　線形写像・同型写像の性質 + まとめ

命題

1. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が, 自然数 m に対して $f^m = 0$ を満たすとき, f は同型でない.

2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が, 自然数 m に対して

$f^m = 0$ を満たすとき,$f - \mathrm{id}$, $f + \mathrm{id}$ は同型である.

3. 非ゼロ線形写像たち $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ について,

$f \circ g = 0$ ならば f, g はいずれも同型ではない.

$\because$

1. f に対応する行列を A とすると
「$A^m = \mathbf{O}$ を満たすとき A は正則でない」と言い換えることができる.
これは **4.9** の命題と同様.　$\square$

2. f に対応する行列を A とすると
「$A^m = \mathbf{O}$ ならば $A - E_n$, $A + E_n$ は正則である」と言い換えることができる.
これは **4.10** の命題と同様.　$\square$

3. f に対応する行列を A, g に対応する行列を B とすると
「$AB = \mathbf{O}$ ならば A,　B はいずれも正則ではない.」と言い換えることができる.
これは **4.9** の命題と同様　$\square$

まとめ

$$\boxed{\text{行列の世界}} \underset{\text{対応}}{\overset{1\text{ 対 }1\text{ に}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\text{線形写像の世界}}$$

$A \longmapsto f_A$（A をかける）

$E_n \longleftrightarrow \mathrm{id}$

$\mathbf{O} \longleftrightarrow 0$（ゼロ写像）

行列の積 $\Longleftrightarrow$ 写像の合成

正則 $\Longleftrightarrow$ 全単射

逆行列 $\Longleftrightarrow$ 逆写像

6　行列式

6.1　2 次 3 次の行列式

定義

1. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の行列式とは

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2. 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の行列式とは

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_1 c_2 b_3 + b_1 a_2 c_3 + c_1 b_2 a_3)$$

*サラスの方法は 3 次までしか使えない.

---

*A の列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示したとき $|A| = |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\, |$ ともかく.

補題 1

2 次の行列式は次を満たす.$\lambda \in \mathbb{R}$

(D-1)　2 つの列ベクトルが等しいと 0 すなわち $|\, \mathbf{a}\ \mathbf{a}\, | = 0$

(D-2)　$|\, \lambda\mathbf{a}\ \mathbf{b}\, | = \lambda |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\, |$

(D-3)　$|\, \mathbf{a} + \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\, | = |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\, | + |\, \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\, |$

(D-4)　$|E_2| = 1$

(D-1)　$|\, \mathbf{a}\ \mathbf{a}\, | = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0$　□

(D-2)　$|\, \lambda\mathbf{a}\ \mathbf{b}\, | = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda a_1 b_2 - \lambda a_2 b_1 = \lambda(a_1 b_2 - b_1 a_1) = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \lambda |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\, |$　□

(D-3)　$\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1{}' \\ a_2{}' \end{pmatrix}$ とする.

$|\, \mathbf{a} + \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\, | = \begin{vmatrix} a_1 a_1{}' & b_1 \\ a_2 a_2{}' & b_2 \end{vmatrix}$

$= (a_1 + a_1{}')b_2 - (a_2 + a_2{}')b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_1{}' b_2 - a_2{}' b_1 = |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\, | + |\, \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\, |$　□

(D-4)　$|E_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$　□

*3 次の場合も同様

(D-1)$|\, \mathbf{a}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}\, | = 0$, (D-2)$|\, \lambda\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\, | = \lambda |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\, |$, (D-3)$|\, \mathbf{a} + \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\, | = |\, \mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\, | + |\, \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\, |$, (D-4)$|E_3| = 1$

6.2　行列式の幾何的意味

定理

2 次（平面）ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対し,

$$|\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\,| = \pm(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ \text{の張る平行四辺形の面積})$$

$$\text{符号} + \Leftrightarrow \mathbf{a}\ \text{から}\ \mathbf{b}\ \text{が左（反時計）回り},\ \text{符号} - \Leftrightarrow \mathbf{a}\ \text{から}\ \mathbf{b}\ \text{が右（時計）回り}$$

$\because$

$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mathbf{a}'(\mathbf{a}' \perp \mathbf{b})$ と分解

$|\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\,| = |\,\lambda\mathbf{b} + \mathbf{a}'\ \mathbf{b}\,|$

$\overset{(\mathrm{D}-3)}{=} |\,\lambda\mathbf{b}\ \mathbf{b}\,| + |\,\mathbf{a}'\ \mathbf{b}\,| \overset{(\mathrm{D}-2)}{=} \lambda|\,\mathbf{b}\ \mathbf{b}\,| + |\,\mathbf{a}'\ \mathbf{b}\,| = |\,\mathbf{a}'\ \mathbf{b}|$

$\mathbf{a}' \perp \mathbf{b}$ より座標軸をうまくとれば $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ とできる.

$$\begin{aligned}|\,\mathbf{a}'\ \mathbf{b}\,| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab &= \pm(\mathbf{a}',\ \mathbf{b}\ \text{の張る平行四辺形の面積}) \\ &= \pm(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\ \text{の張る平行四辺形の面積})\end{aligned}$$

$|\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\,| = ab > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}'$から $\mathbf{b}$ が左回り $\Leftrightarrow \mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ が左回り　□

*図を描けばわかりやすい

定理

3 次（空間）ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ に対し,

$$|\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\,| = \pm(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ \text{の張る平行六面体の体積})$$

$$\text{符号} + \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ \text{が右手系},\ \text{符号} - \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ \text{が左手系}$$

証明は上記とほぼ同様.

*右手系とは向きが右手の親指・人差し指・中指と同じ

6.3　置換, 置換の積, 恒等置換, 逆置換

定義【置換】

$\{1,2,3,\ldots,n\}$ の並び替え $1 \to i_1$, $2 \to i_2$, $3 \to i_3$, ... , $n \to i_n$ を n 次の**置換**といい,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{とかく.}$$

S_n : n 次の置換すべての集合

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ としたとき $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \sigma(n) = i_n$ と表記する.

*並び替えとは「i_1 , i_2 , i_3 , ... , i_n は 1 , 2 , 3 , ... , n のいずれかで同じ文字は一つもない」の意

**固く言うと $\sigma : \{1,2,3,\ldots,n\} \longrightarrow \{i_1 , i_2 , i_3 , \ldots , i_n\}$ は全単射写像

定義【置換の積】

$\sigma, \tau \in S_n$ に対し, $\{1,\ldots,n\}$ をまず τ で写し, 次に σ で写す並び替えを $\sigma\tau$ と表す.

図説

$$i \xrightarrow{\tau} \tau(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma(\tau(i)) = \sigma\tau(i) \ (i = 1,\ldots,n)$$

定義

1. まったく何も動かさない $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を ϵ と表し, **恒等置換**という.

すなわち $\epsilon(i) = i \ (i = 1,2,\ldots,n)$

2. $\sigma \in S_n$ の逆の並び替えを σ^{-1} と表し, **逆置換**という.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{なら } \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

定理

n 次の置換は $n!$ 通りある

$\because$
異なる n 個のものから異なる k 個のものをとって並べる順列は ${}_n\mathrm{P}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ 通り.

n 次の置換とは $\{1,\ldots,n\}$ から n 個とって順に並べること ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 通り　$\square$

6.4 恒等置換, 逆置換の性質

命題

$\sigma, \tau, \rho \in S_n$ に対し

1. $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$
2. $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon$
3. $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$（結合則）

$\because$

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \epsilon(1) & \cdots & \epsilon(n) \end{pmatrix}$ とする

$$\sigma\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\epsilon(1)) & \cdots & \sigma(\epsilon(n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \sigma$$

$$\epsilon\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \epsilon(\sigma(1)) & \cdots & \epsilon(\sigma(n)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \sigma \quad \square$$

2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ とすると $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$$\sigma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \epsilon$$

$$\sigma^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \epsilon \quad \square$$

3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \rho(1) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix}$

$$(\sigma\tau)\rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \rho(1) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(\rho(1))) & \cdots & \sigma(\tau(\rho(n))) \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\tau\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(\rho(1)) & \cdots & \tau(\rho(n)) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\tau(\rho(1))) & \cdots & \sigma(\tau(\rho(n))) \end{pmatrix} \therefore (\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho) \quad \square$$

1. $\sigma\tau = \sigma\rho \Longrightarrow \tau = \rho$（$\because$ 左から σ^{-1} をかけると $\sigma^{-1}\sigma = \epsilon, \epsilon\tau = \tau, \epsilon\rho = \rho$ より $\tau = \rho \quad \square$）
2. $\tau\sigma = \rho\sigma \Longrightarrow \tau = \rho$（$\because$ 右から σ^{-1} をかけると $\sigma\sigma^{-1} = \epsilon, \tau\epsilon = \tau, \rho\epsilon = \rho$ より $\tau = \rho \quad \square$）

6.5　巡回置換

定義

1. $\{1,2,\ldots,n\}$ に属する相違なる文字 $i_1,\ldots,i_m$ を $i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_m \to i_1$ と動かし，

他は動かさない置換 $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & i_{m+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{m+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ を $(i_1\, i_2 \cdots i_m)$ と表し，
長さ m の**巡回置換**という．

2. 巡回置換 $(i_1 \cdots i_m), (j_1 \cdots j_k)$ が**互いに素** $\Longleftrightarrow$ 集合として $\{i_1,\ldots,i_m\} \cap \{j_1,\ldots,j_k\} = \phi$

定理

任意の置換は互いに素な巡回置換の積で表せる

$\because$
任意の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ が与えられたとき，まずなにか 1 つの文字

例えば 1 をとり，それが次々どう動いていくかを見ると

$$1 \to j_1 \to j_2 \to \cdots$$

するとこれは，集合 $M_n = \{1,2,\ldots,n\}$ のある部分集合をまわって 1 に戻ってくるはずである．
（置換は全単射，とくに単射だから）
M_n は有限集合なのでいつか今まで登場した数が再び登場するはずである．
同じ数が再び出る最初の数が 1 以外でその数を j_k と仮定すると，

$$1 \to j_1 \to \cdots \to j_{k-1} \to j_k \to \cdots \to j_m \to j_k \to \cdots$$

すなわち $j_{k-1} \to j_k$ かつ $j_m \to j_k$ であるのでこれは単射ではない．すなわち置換ではない．
よって戻ってくる最初の数は 1 以外はあり得ない．
このことから巡回置換 $(1\, j_1\, j_2 \cdots j_k)$ が 1 つ定まる．
残った文字も同様に考えれば，巡回置換が次々と得られる．
この操作は有限回で終わるので，σ は巡回置換の積で表せる　□

6.6　互換

定義【互換】

長さ 2 の巡回置換 $(a\,b)$ を互換という

命題

巡回置換 $(a_1\,a_2\,a_3\,\cdots\,a_{r-1}\,a_r) = (a_1\,a_r)(a_1\,a_{r-1})\cdots(a_1\,a_3)(a_1\,a_2)$

$\because\ {}^\forall i = 1,\ldots,n$ に対し $(a_1\cdots a_r)(i) = (a_1\,a_r)\cdots(a_1\,a_2)(i)$ を示せばよい.

$$(a_1\,a_r)\cdots(a_1\,a_3)(a_1\,a_2)(a_1) = (a_1\,a_r)\cdots(a_1\,a_3)(a_2)$$

$$= (a_1\,a_r)\cdots(a_1\,a_4)(a_2) = a_2 = (a_1\cdots a_r)(a_1) \quad \square$$

定理 1

任意の置換の積は互換の積で表せる

$\because$ 上の命題と **6.5** の定理より　$\square$

発展

定義【差積】

$$\Delta = \Delta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$$

$$= (x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\cdot(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdot\,\cdots\,\cdot(x_{n-1}-x_n)$$

補題

$\sigma \in S_n$ が互換ならば $\sigma\Delta = -\Delta$，証明は難解なので略.*教科書 (日本評論社) p.74 参照

定理

$\sigma \in S_n$ を互換の積で表すとき, 表示に現れる互換の数が偶数か奇数かは σ により一定

$\because$

与えられた置換 σ が $\sigma = \sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1 = \tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1$ と 2 つの互換の積で表せたとする.

このとき補題より

$$\sigma\Delta = (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1)\Delta = (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_2)(\sigma_1\Delta)$$

$$= (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_2)(-\Delta) = -(\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_2)\Delta = (-1)^r\Delta$$

同様に

$$\sigma\Delta = (\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1)\Delta = (-1)^s\Delta$$

よって $(-1)^r\Delta = (-1)^s\Delta$ すなわち $(-1)^r = (-1)^s$

したがって r と s の偶奇は一致する.　$\square$

6.7 偶置換・奇置換とその性質, 符号

定義

1. 置換を互換の積で表して互換が偶数個なら**偶置換**, 奇数個なら**奇置換**という.

2. σ の符号 $\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{が偶置換の場合}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換の場合}) \end{cases}$ また sgn をサインと読む.

命題

S_n において偶置換と奇置換の個数は同じである

$\because$
$A, B \subset S_n$ について,
偶置換全体の集合を A, 個数を A', 奇置換全体の集合を B, 個数を B' とする.

$\sigma \in S_n$ を偶置換としたとき

$$\text{写像 } f \quad : \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \sigma & \longmapsto & (1\,2)\sigma \end{array} \quad \text{を考える}$$

ここで $f(\sigma) = f(\sigma')$ を仮定する.
$(1\,2)\sigma = (1\,2)\sigma'$, 左から $(1\,2)$ をかけると $\epsilon\sigma = \epsilon\sigma' \Leftrightarrow \sigma = \sigma'$ よって f は単射である.
すなわち A と B は 1 対 1 の対応である.
よって σ が偶置換のとき
偶置換全体にそれぞれ対応する奇置換が 1 つ作れて,
それらはすべて異なるので $A' \leq B'$ となることがわかる $\cdots$[1]

$\tau \in S_n$ を奇置換としたとき

$$\text{写像 } g \quad : \quad \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ \tau & \longmapsto & (1\,2)\tau \end{array} \quad \text{を考える}$$

ここで $g(\tau) = g(\tau')$ を仮定する.
$(1\,2)\tau = (1\,2)\tau'$, 左から $(1\,2)$ をかけると $\epsilon\tau = \epsilon\tau' \Leftrightarrow \tau = \tau'$ よって g は単射である.
すなわち B と A は 1 対 1 の対応である.
よって τ が奇置換のとき
奇置換全体にそれぞれ対応する偶置換が 1 つ作れて,
それらはすべて異なるので $B' \leq A'$ となることがわかる $\cdots$[2]

[1],[2] より S_n において $A' = B'$ なので, 偶置換と奇置換の個数は同じである $\square$

6.8 sgn の性質

命題

$\sigma, \tau \in S_n$ について

1. $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$
2. $\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$
3. $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$
4. 巡回置換 $(a_1 \cdots a_r)$ の符号は $(-1)^{r-1}$

$\because$

1. **6.6** の定理 1 より σ, τ は互換の積で表せる.

$$\sigma = \sigma_r \sigma_{r-1} \cdots \sigma_1\,,\ \tau = \tau_s \tau_{s-1} \cdots \tau_1 \text{ とすると}$$

6.7 の定義より

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r\,,\ \mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^s \text{ であるので}$$

$$\sigma\tau = \sigma_r \cdots \sigma_1 \cdot \tau_s \cdots \tau_1 \text{ より}$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau) \quad \square$$

2. 恒等置換 ϵ は互換 0 個と考えられる.
また $\epsilon = (1\,2)(1\,2)$ などのように 2 つの互換の積として表すこともできる.
すなわち ϵ は偶置換である. したがって $\mathrm{agn}(\epsilon) = 1 \quad \square$

3. $\sigma^{-1}\sigma = \epsilon$ なので上の **1.** と **2.** より $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$,
さらに $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^r$ のかたちであるから $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \quad \square$

4. 巡回置換 $(a_1 \cdots a_r)$ は

$$(a_1 \cdots a_r) = (a_1\,a_r)(a_1\,a_{r-1}) \cdots (a_1\,a_2)$$

のように $(r-1)$ 個の互換の積で表せる. よって符号は $(-1)^{r-1}$ である. $\square$

6.9 置換と行列式【行列式の定義】, 転置行列の行列式の性質

定義【行列式】

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ の行列式 $|A|$ を次で定義する.

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

和は S_n の元, 全てにわたる. a_{ij} についての n 次多項式で項は $n!$ 個ある.

定理

n 次正方行列 A に対して行と列を入れかえても行列式は変わらない.

$$|{}^tA| = |A|$$

$\because$

$A = (a_{ij})$ の転置行列 ${}^tA$ の (i, j) 成分は a_{ji} であるから, 行列式の定義より

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \text{ となる.}$$

ここで $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ は集合として $\{1, 2, \ldots, n\}$ に一致するので,

順序を入れかえると

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

また **6.8** の命題より $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ なので

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \text{ と書きかえることができる.}$$

σ が S_n の元全てをうごくとき, σ^{-1} も S_n の元全てをうごく. よって

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

わかりやすく $\sigma^{-1} = \tau$ とでも書きかえれば

$$|{}^tA| = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

これは A の行列式 $|A|$ に他ならない. したがって $|{}^tA| = |A|$ $\square$

6.10 行の基本変形, 行列式の基本的性質【λ 倍, ベクトルの和は行列式の和（行 ver.)】

定義

次の 3 つを行の**基本変形**という.

1. ある行に 0 でない数をかける.（第 i 行に $\lambda(\neq 0)$ 倍する）
2. ある行に何倍かして別の行にたす.（第 i 行に第 j 行の λ 倍をたす）
3. 2 つの行を入れかえる.（第 i 行と第 j 行を入れかえる）

定理 1

ある行を λ 倍すると, 行列式も<u>λ 倍される</u>.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \quad (\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}) \ \ k = 1, 2, \ldots)$$

$\because$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺}) \quad \square\end{aligned}$$

定理 2

第 i 行が, 2 つの行ベクトルの和である行列の行列式は,
他は同じで第 i 行は各々のベクトルをとった行列の行列式の和になる.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

$\because$

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \{ b_{i\sigma(i)} (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}) + c_{i\sigma(i)} (a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}) \} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺}) \quad \square\end{aligned}$$

6.11　行列式の基本的性質【交換すると -1 倍,2 つの行が等しいと行列式は 0（行 ver.)】

定理 3

2 つの行を入れかえると行列式は -1 倍される.

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行目}\rightarrow \\ \\ j\text{ 行目}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行目} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\because$

n 文字の各置換 σ に対して,σ に右から $(i\,j)$ をかけた置換を τ とおく.($\Leftrightarrow \tau = \sigma(i\,j)$) このとき

$$\tau(i) = \sigma(j)\,,\ \ \tau(j) = \sigma(i)\,,\ \ \tau(k) = \sigma(k)\ \ (k \neq i, j)\ \text{となる}$$

$\sigma \longrightarrow \sigma(i\,j) = \tau$ は,S_n から S_n への全単射である.
つまり,σ が置換全体 S_n をうごくと,τ も置換全体 S_n をうごく. また符号は

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma(i\,j)) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(i\,j) = -\mathrm{sgn}(\sigma)\ \therefore\ \mathrm{sgn}(\sigma) = -\mathrm{sgn}(\tau)\ \text{である.}$$

以上より行列式の定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau\in S_n} (-\mathrm{sgn}(\tau)) a_{1\tau(1)}\cdots a_{i\tau(j)}\cdots a_{j\tau(i)}\cdots a_{n\tau(n)} \\ &= -\sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{j\tau(i)}\cdots a_{i\tau(j)}\cdots a_{n\tau(n)} = (\text{右辺}) \quad \square\end{aligned}$$

定理 4

2 つの行が等しい行列の行列式は 0 である

$\because$

行列 A の第 i 行と第 j 行が等しいとする.
この行列の第 i 行と第 j 行を交換しても同じ行列 A である.
一方, 上の**定理 3** より行を入れかえると行列式は -1 倍になる.
よって $|A| = -|A|\ \ \therefore\ 2|A| = 0$. すなわち $|A| = 0$　$\square$

定理 5

ある行を λ 倍して, 他の行にたしても行列式は変わらない.

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行目} \rightarrow \\ \\ j\text{ 行目} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行目} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\because$

6.10 の定理 **1** と定理 **2** より

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行目} \rightarrow \\ \\ j\text{ 行目} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行目} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array}$$

また λ 倍されている最後の行列式は i 行目と j 行目が等しいので **6.11** の定理 **4** より 0　□

定理

行列の行の順序を置換 τ によって変えると行列式は $\mathrm{sgn}(\tau)$ 倍になる.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \text{ としたとき } \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{k_1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{k_n} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

$\because$

6.6 の定理 **1** より任意の置換は互換の積で表せるので $\tau = \tau_m \cdots \tau_1$ をそのような互換の積とする. そのとき, 与えられた行列の行を置換 τ によって変えた結果は互換 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ によってこの順に行を変えた結果と同じ行列になる.**6.11** の定理 **3** を繰り返し用いると, 行の順序を τ で入れかえた行列の行列式は, もとの行列の行列式の $(-1)^m$ となり $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^m$ より成り立つ.　□

* 「行列の列の順序を置換 τ によって変えると行列式は $\mathrm{sgn}(\tau)$ 倍になる」も **6.9** より成り立つ.

6.13　列の基本変形, 行列式の基本的性質【列 ver.】

定義

次の 3 つを列の**基本変形**という.

1. ある列に 0 でない数をかける.（第 i 列に $\lambda(\neq 0)$ 倍する）
2. ある列に何倍かして別の列にたす.（第 i 列に第 j 列の λ 倍をたす）
3. 2 つの列を入れかえる.（第 i 列と第 j 列を入れかえる）

定理

6.9 の**定理**より列の基本変形においても前項までの**定理 1〜5** がいえる. 一応下記に性質をまとめておく.

1. ある列を λ 倍すると, 行列式も$\underline{\lambda\text{ 倍される}}$（**6.10**）

$$|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \lambda\mathbf{a}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| = \lambda|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,|$$

2. 第 i 列が, 2 つの行ベクトルの和である行列の行列式は,
他は同じで第 i 列は各々のベクトルをとった行列の行列式の和になる.（**6.10**）

$$|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_i+\mathbf{c}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| = |\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{b}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| + |\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{c}_i\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,|$$

3. 2 つの列を入れかえると$\underline{\text{行列式は }-1\text{ 倍される}}$（**6.11**）

$$|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_i(i\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_j(j\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| = -|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_j(i\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_i(j\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,|$$

4. 2 つの列が等しい行列の行列式は 0 である（**6.11**）

$$|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{b}\ \cdots\ \mathbf{b}\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| = 0$$

5. ある列を λ 倍して, 他の列にたしても$\underline{\text{行列式は変わらない}}$（**6.12**）

$$|\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j(i\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_j(j\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,| = |\,\mathbf{a}_1\ \cdots\ \mathbf{a}_i(i\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_j(j\text{ 列目})\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,|$$

*証明は **6.9** の定理と各番号に対応する定理と同様.

6.14 行列式の基本的性質【行数・列数を減らす】

定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列の $(1,1)$ 成分以外の第 1 列の成分がすべて 0 のときである

$\because$

$A = (a_{ij})_{ij}$ とおくと仮定より $a_{21} = a_{31} = a_{41} = \cdots = a_{n1} = 0$ である. また行列式の定義より

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\sigma(1) > 1$ である σ については, 置換であるから $\sigma(k) = 1$ となる $k > 1$ が存在する.

仮定より $a_{k\sigma(k)} = a_{k1} = 0$ であるので, すなわち $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \underbrace{a_{k\sigma(k)}}_{=0} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$ である.

つまり $\sigma(1) > 1$ となる項はすべて 0 になる.

したがって和は $\sigma(1) = 1$ となる置換 $\sigma \in S_n$ のみを考えればよい.

$$\text{すなわち } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{ となる置換に関する和である.}$$

このような置換全体は $n-1$ 個の文字 $\{2, 3, \ldots, n\}$ の置換全体 S_{n-1} と同一視することができる.

またここで置換 $\tau \in S_{n-1}(: \{2, 3, \ldots, n\} \longrightarrow \{i_2, i_3, \ldots, i_n\})$ を考える.

$$|A| = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \square$$

また **6.9** の定理より行と列を入れかえても行列式は変わらないので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ が成り立つ.}$$

6.15　三角行列の行列式

命題

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & * \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & & & \mathbf{0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

∵

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & * \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_n \end{vmatrix} \overset{*}{=} \begin{vmatrix} d_1 & & & * \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} \overset{*}{=} d_1 \begin{vmatrix} d_2 & & & * \\ 0 & d_3 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{*}{=} d_1 d_2 \begin{vmatrix} d_3 & & & * \\ 0 & d_4 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} = \cdots = d_1 d_2 \cdots d_n \quad \square$$

---

*__6.14__ よりこれを繰り返し使うと結論になる.

また **6.9 より $\begin{vmatrix} d_1 & & & \mathbf{0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & d_n \end{vmatrix}$ も同様

系

$$|E_n| = 1$$

∵

上記の命題の $d_1 = d_2 = d_3 = \cdots = d_n = 1$ バージョンである.

したがって $|E_n| = 1$　□

6.16 ブロック分割した行列の行列式

定理

$r+s$ 次正方行列 M に対して

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline \mathbf{O} & B \end{array}\right) \Longrightarrow |M| = |A| \cdot |B|$$

（$A : r$ 次正方行列, $B : s$ 次正方行列, $* : r \times s$ 行列, $\mathbf{O}$: 成分がすべて 0 からなる $s \times r$ 行列）

$\because$

$M = (a_{ij})_{ij}$, $n = r+s$ とおく. 行列式の定義より $|M| = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

仮定より $r+1 \le i \le n$, $1 \le j \le r$ のとき $a_{ij} = 0$ である.

ここで n 次の置換 σ が次の性質を満たすとする

$$「\{\sigma(r+1) \cdots \sigma(n)\} \text{ の中に } r \text{ 以下の数が存在する}」$$

すなわち $k \ge r+1$, $\sigma(k) \le r$ であるような k が存在する. 仮定より $a_{k\sigma(k)} = 0$ である.

これを因子にもつ項は $\mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma} \cdots \underbrace{a_{k\sigma(k)}}_{=0} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$ となる.

つまり M の行列式 $|M|$ を定義する σ のうち上の性質を満たす置換は考えなくてよい.

したがって, 集合として $\{\sigma(r+1), \ldots, \sigma(n)\} = \{r+1, \ldots, n\}$ を満たす置換だけを考えればよい. また同時に置換は全単射なので $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(r)\} = \{1, \ldots, r\}$ も満たす.

つまり置換 σ は $\{1, \ldots, r\}$ の置換と $\{r+1, \ldots, n\}$ の置換との 2 つに分かれる.

$\{1, \ldots, r\}$ の置換を $\tau \in S_r$, $\{r+1, \ldots, n\}$ の置換を $\rho \in {}^*{S_s}'$ とすると $\sigma = \rho\tau$ と表せる.

上の性質 σ を全てうごかすということは, τ, ρ をそれぞれ独立に S_r, ${S_s}'$ の元全てをうごかすのと同じことである.

また $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\rho\tau) = \mathrm{agn}(\rho)\mathrm{sgn}(\tau)$ より

$$\begin{aligned} |M| &= \sum_{\tau \in S_r,\, \rho \in {S_s}'} \mathrm{sgn}(\rho\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} a_{r+1\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \left(\sum_{\tau \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} \right) \left(\sum_{\rho \in {S_s}'} \mathrm{sgn}(\rho) a_{r+1\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \right) = |A| \cdot |B| \quad \square \end{aligned}$$

*S_s とせずに ${S_s}'$ と表示したのは S_s だと s 個の文字 $\{1, \ldots, s\}$ の置換全体という意味なってしまうため

**${S_s}'$ は s 個の文字 $\{r+1, \ldots, n\}$ の置換全体の意味.

また **6.9** より $M = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{O} \\ \hline * & B \end{array}\right) \Longrightarrow |M| = |A| \cdot |B|$ が成り立つ.

系

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right| \overset{*1}{=} \left|\begin{array}{c|c} A+B & B+A \\ \hline B & A \end{array}\right| \overset{*2}{=} \left|\begin{array}{c|c} A+B & 0 \\ \hline B & A-B \end{array}\right| \overset{*3}{=} |A+B| \cdot |A-B|$$

*1*2 **6.12** より　*3 上の定理より

定義

n 次正方行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ について

1. A から第 i 行, 第 j 行を除いてできる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と表示する.
2. $(-1)^{i+j}|A_{ij}|=\tilde{a}_{ij}$ を A の (i,j) 余因子という

定理【余因子展開】

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

これを第 i 行にそった**余因子展開**という.

$\because$

与えられた行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ の第 i 行は

$(a_{i1}\, a_{i2}\, \cdots\, a_{in})=(a_{i1}\, 0\cdots 0)+(0\, a_{i2}\, 0\cdots 0)+\cdots+(0\cdots 0\, a_{i2})$ のように

n 個の行ベクトルの和に書けるので, **6.10** の**定理 2** を繰り返し使うと

$$|A|=\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ a_{i1}\, 0\cdots 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ 0\, a_{i2}\, 0\cdots 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ 0\cdots 0\, a_{in} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$ と書ける,

そしてこの式の右辺の $\underline{j\text{ 番目}}$ の行列式を計算する.

まず, 第 i 行を順に 1 つ上の行と入れかえる操作で一番上の行に移動させる.$\cdots$[1]

このとき **6.11** の**定理 3** より, 1 つ上の行と入れかえる度に行列式は -1 倍されるので,

第 i 行は $(i-1)$ 回の入れかえ操作で一番上に移動するので, 行列式は $(-1)^{i-1}$ 倍される.

次に, 第 j 列を順に 1 つ左の列と入れかえる操作で一番左の列に移動させる.$\cdots$[2]

このとき, 行を移動させたときと同様に, 行列式は $(-1)^{j-1}$ 倍される.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ 0\cdots 0\, a_{ij}\, 0\cdots 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}\overset{[1],[2]}{=}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ここで **6.14** の**定理**より

$$={}^{*}(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|=a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|=a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

この等式は $j=1,2,\ldots,n$ に対して成立するので $|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij}$　$\square$

*$(-1)^{i+j-2}$ になるが 2 乗すると 1 になるので-2 を外しても問題はない

6.18　行列式の余因子展開 2

定理【余因子展開】

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

これを第 j 行にそった**余因子展開**という.

$\because$ 前のページの i を j, j を i,行を列に,列を行に変える. $\square$

6.19　余因子行列とその性質

定義

$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ji})_{ij}$: 余因子行列　$*(i,j)$ 成分が (j,i) 余因子

例）

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

命題

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n = \begin{pmatrix} |A| & & & \mathbf{0} \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & |A| \end{pmatrix}$$

$\because$

$\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ji}) = (x_{ij})$ とする.

$l = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$|A| \overset{*1}{=} \sum_{k=1}^{l} a_{kl}\tilde{a}_{kl} = \sum_{k=1}^{l} x_{lk}a_{kl} \overset{*2}{=} (\text{行列}\widetilde{A}A\text{ の } (l,l) \text{ 成分})$$

次に $l \neq m$ とする.

$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_l(l\text{ 列目}) \cdots \mathbf{a}_m(m\text{ 列目}) \cdots \mathbf{a}_n)$, $B = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_m(l\text{ 列目}) \cdots \mathbf{a}_m(m\text{ 列目}) \cdots \mathbf{a}_n)$

とおく. すると B は同じ列ベクトルを 2 つもつので $|B| = 0$

$$0 = |B| \overset{*3}{=} \sum_{k=1}^{n} b_{kl}(-1)^{k+l}|B_{kl}|$$

ここで B の作り方より $b_{kl} = a_{km}$, $B_{kl} = A_{kl}$ なので

$$0 = |B| = \sum_{k=1}^{n} a_{km}(-1)|A_{kl}| = \sum_{k=1}^{l} a_{km}\tilde{a}_{kl} = \sum_{k=1}^{n} x_{lk}a_{km} = (\widetilde{A}A\text{ の } (l,m) \text{ 成分})$$

以上より $l = m$ のとき $|A| = (\widetilde{A}A\text{ の } (l,m)\text{ 成分}) = (\widetilde{A}A\text{ の } (l,l)\text{ 成分})$

　　$l \neq m$ のとき $0 = (\widetilde{A}A\text{ の } (l,m)\text{ 成分})$

対角成分が $|A|$ であることが言えたので $\widetilde{A}A = |A|E_n$　□

$A\widetilde{A} = |A|E_n$ は $|A|$ を行にそって余因子展開するとあとは同様.

---

*1 $|A|$ の第 l 列にそって余因子展開　*2 積の定義

*3 第 l 列にそって余因子展開

6.20　行列式の積

定理

n 次正方行列 A, B について

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$\because$

行列 A, B をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と表示する.

さらに行列 B の行ベクトルを $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ とする.$\mathbf{b}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\mathbf{b}_j \end{pmatrix} \text{である.}$$

したがって **6.10** の定理 **2** と **6.11** の定理 **3** を繰り返し用いると

$$|AB| = \sum_{j_n=1}^{n} \sum_{j_{n-1}=1}^{n} \cdots \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{vmatrix}$$

ここで, 和は $j_1, j_2, \ldots, j_n$ がそれぞれ 1 から n までうごくので n^n 個の項にわたる.

しかし, **6.11** の定理 **4** より $\mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \mathbf{b}_{j_n}$ の中に同じものがあれば

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{vmatrix} = 0 \text{ となるので}$$

$j_1, \ldots, j_n$ がすべて異なる場合の和を考えればよい.

すなわち $j_1, \ldots, j_2$ がちょうど $1, \ldots, n$ の順列になるに他ならない.

また, 和はちょうどすべての順列をわたる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} \\ &\overset{*}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{vmatrix} \\ &= |A| \cdot |B| \quad \square \end{aligned}$$

***6.12** の定理より

6.21　正則行列と行列式

定理

n 次正方行列 A に対し

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \text{ また, このとき } A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

$\because$

$(\Rightarrow)$

A が正則であると仮定すると $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ を満たす A^{-1} が存在する.

6.20 の定理と **6.15** の系より $1 = |E_n| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ $\therefore$ $|A| \neq 0$

$(\Leftarrow)$

$|A| \neq 0$ とすると **6.19** の命題より $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n$ の各辺を $|A|$ で割ると

$$\frac{1}{|A|}A\widetilde{A}\left(= A\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\right) = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}A = E_n \ \therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} \quad \square$$

6.22　ファンデアモンデの行列式 (数学的帰納法を使った証明)

定理【ファンデアモンデの行列式】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

∵

i) $n=2$ のとき

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$ よって成り立つ.

ii) $n-1$ のとき $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-2} & {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n-1}(x_j - x_i)$$ が成り立つと仮定.

iii) n のとき

与えられた行列式に, 第 n 行 − 第 $(n-1)$ 行 $\times x_1$, 第 $(n-1)$ 行 − 第 $(n-2)$ 行 $\times x_1, \ldots,$

第 2 行 − 第 1 行 $\times x_1$ という操作を順に繰り返すと

(与式)$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{*} & \cdots & \frac{1}{**} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$ **6.14** の定理より

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix}$$ ii) の仮定より

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leq i<j\leq n}(x_j-x_i) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

よって n のとき成り立つ. したがって数学的帰納法より成り立つ.　□

$* = (x_2 - x_1)$, $** = (x_n - x_1)$

6.23 ファンデアモンデの行列式 (因数定理を使った証明)

定理【ファンデアモンデの行列式】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

$\because$

$x_j = x_i$ とおけば,行列の 2 つの列が等しく,左辺は 0 であるから,
x_j を変数とみた因数定理によって行列式は $x_j - x_i$ で割り切れる.

したがって (左辺) $= c\displaystyle\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ と表せる.

そして各 x_i を 1 次とみて両辺の次数を比較すると,いずれも $1+2+\cdots(n-1) \overset{*}{=} \dfrac{n(n-1)}{2}$
なので c は定数である.
左辺の行列式の対角成分の積 $x_2{x_3}^2{x_4}^3\cdots{x_n}^{n-1}$ に着目すると
この単項式が出るのは対角成分の積しかないことがわかる. また, この項の係数は 1 である.
他方,

$$\begin{array}{rccccc} \displaystyle\prod_{i<j}(x_j - x_i) & = & (x_n - x_{n-1}) & (x_n - x_{n-2}) & \cdots & (x_n - x_1) \\ & & & (x_{n-1} - x_{n-2}) & \cdots & (x_{n-1} - x_1) \\ & & & & \vdots & \\ & & & & (x_3 - x_2) & (x_3 - x_1) \\ & & & & & (x_2 - x_1) \end{array}$$

より単項式 $x_2{x_3}^2\cdots{x_{n-1}}^{n-2}{x_n}^{n-1}$ の係数は ${x_n}^{n-1}, {x_{n-1}}^{n-2}, \ldots, {x_3}^2, x_2$ の順に
着目することにより 1 であることがわかる.
したがって最初の等式の右辺の定数 c は 1 であることがわかるので, 求める等式が得られる. □

$^*\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

7　連立 1 次方程式

7.1　" 未知数なカズ=式のカズ" な連立 1 次方程式

連立 1 次方程式

解くとは？
・数のとき...「$ax = b$ を満たす x を求めよ」
・ベクトル（行列）のとき...
「$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}$ を求めよ」$\longleftarrow$ A が正則 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

応用として...

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \cdots (*) \text{ について } A = (a_{ij})_{ij},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

(*) を解く $\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解く $\longrightarrow$ 係数行列 A が正則か否かが大切.

命題

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \quad \text{は解け}, x = \frac{d\alpha - b\beta}{ad - bc},\ y = \frac{-c\alpha + a\beta}{ad - bc}$$

$\because$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと, 仮定より正則で

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d\alpha - b\beta \\ -c\alpha + a\beta \end{pmatrix} \quad \square$$

7.2　連立方程式と行列式【クラーメルの公式】

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad m \neq n \text{ でも可}$$

$$A = (a_{ij})_{ij} : m \times n \text{ 行列},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ とおくと次の問題と同じ}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}$ を求めよ.

定理【クラーメルの公式】

$m = n$ とする.$|A| \neq 0$ ならば $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x}$ はただひとつ解をもち $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) \text{ とすると } x_i = \frac{|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{a}_n|}{|A|} \longleftarrow A \text{ の } i \text{ 列目を } \mathbf{b} \text{ にした行列の行列式}$$

$\because$

(解の存在性)

6.21 の**定理**より $|A| \neq 0$ ならば A^{-1} が存在する.$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると
$A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$ 行列の積は結合法則を満たすので $(A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow E_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
$E_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ より $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$　□

(公式の証明)

$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ と表せる.
次に A の第 i 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列の行列式を考える.

$$|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{a}_n| = |\mathbf{a}_1 \cdots \overbrace{(x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n)}^{\text{第 } i \text{ 列}} \cdots \mathbf{a}_n|$$

ここで **6.13** の定理の **1.2.** より

$$= x_1|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{a}_1} \cdots \mathbf{a}_n| + x_2|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{a}_2} \cdots \mathbf{a}_n| + \cdots$$

$$+ x_i|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{a}_i} \cdots \mathbf{a}_n| + \cdots + x_n|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{a}_n} \cdots \mathbf{a}_n|$$

ここで i 番目以外は 2 つの列が等しい行列の行列式であるので 0 になる.
そして i 番目のみ $x_i|A|$ である. したがって等式 $|\mathbf{a}_1 \cdots \overset{\text{第 } i \text{ 列}}{\mathbf{b}} \cdots \mathbf{a}_n| = x_i|A|$
この両辺を仮定より $|A| \neq 0$ で割ると求める等式が得られる.　□

参考文献

[1] 川久保 勝夫　（2016）　『線形代数学 [新装版]』　日本評論社