形の数理 講義まとめ

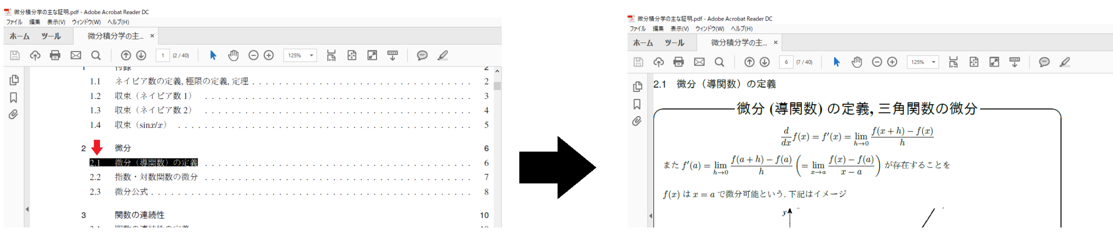
最終更新日：2019 年 3 月 26 日

はじめに

これは大学 2 年次の形の数理 I, II の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです． 多少タイプミス等があるかもしれませんが， ご了承ください．すべての内容が収録されているわけではありませんが，復習などご自由に役立ててください． 目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照.) また，例題などで解き方を詳細に書いてありますが，解法の 1 例に過ぎないのであくまで参考までにしてください，

本 PDF では，ベクトル表示は $\boldsymbol{a}$，実数，複素数，自然数全体の集合等を $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ 等で表記する．また，零ベクトルは $\mathbf{0}$，ゼロ行列は O と表記する．ただし，ギリシャ文字 (ξ など) のベクトル表示は，$\boldsymbol{\xi}$ などと表記する．単位行列は $\mathbf{E}$ とかく．(第一基本量で E, F, G，第一基本形式で I などを使うため.)

内容に不備や落丁等がありましたら　`<s17m066nk@ous.jp>` へ連絡をお願いします．



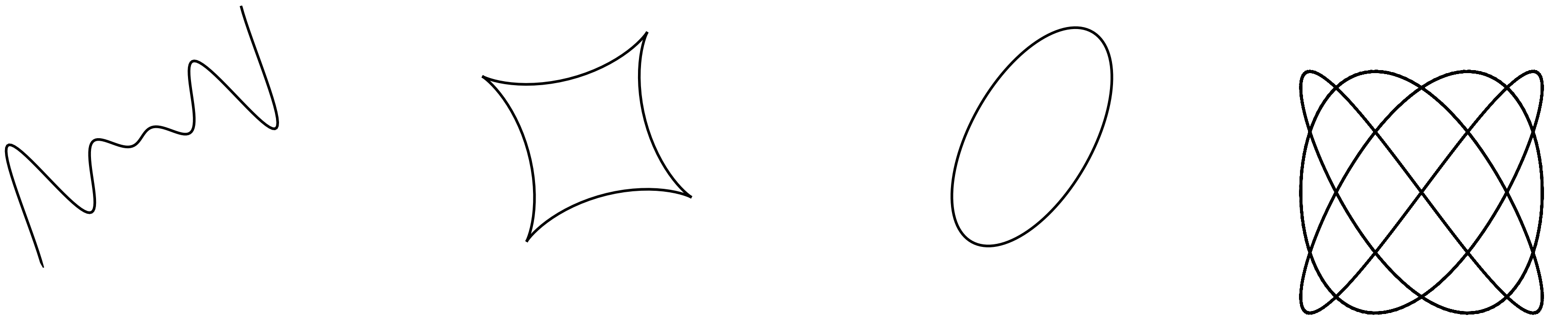
目次

第 I 部
曲線論

1　平面曲線

1.1　曲線の種類

曲線の例



（ｉ）滑らかな曲線　（ii）区分的に滑らかな曲線　（iii）閉曲線　（iv）自己交叉をもつ曲線

定義【曲線の種類】

（ｉ）**滑らかな曲線**の例である．滑らかとは厳密にいうと，**何回でも微分可能**という意味である．
（ii）**区分的に滑らかな曲線**の例である．
区分的に滑らかとは，ところどころに角があり，その点では滑らかでなく，その点を除き，部分的にみると滑らかな曲線のことをいう．
（iii）**閉曲線**の例である．閉曲線とは，滑らかな曲線で，端がなく，ひと回りして元に戻ってくる曲線のことをいう．
（iv）**自己交叉をもつ曲線**の例である．交差点がある閉曲線のことをいう．

平面 $\mathbb{R}^2$ 上で数式で表された曲線を考える．

定義【グラフ】

関数 $y=f(x)$（x 1 つに対して, y が 1 つ定まる）を**グラフ**という．

例 1
(1) $y=x^2$, $y=x^3$ はグラフである．
(2) $x^2+y^2=1$ はグラフではない．($\because x=0 \Rightarrow y=-1, 1$ となるから.) ただし，$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ とわけると，これらはグラフである．

定義【滑らか】

グラフ $y=f(x)$ が滑らか $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各点で何度でも微分可能 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)$ は C^∞ 級関数

1.2　曲線の陰関数表示

定義【陰関数表示】

陰関数表示 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F(x,y)=0$ で表すこと．

例 2
(1) $y=f(x)$ を陰関数表示すると，$\underbrace{y-f(x)}_{F(x,y)}=0$.
(2) $x^2+y^2=1$ を陰関数表示すると，$x^2+y^2-1=0$. $F(x,y)=x^2+y^2-1$.

例 3　a, b : 正の定数とする．

❶ 楕円 : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.　❷ 双曲線 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

❸ レムニスケート : $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$.　❹ アステロイド : $(a^2-x^2-y^2)^3-27a^2x^2y^2=0$.

❶ は閉曲線，❷ は滑らかな曲線，❸ は自己交叉をもつ曲線，❹ は区分的に滑らかな曲線である．

Next. 陰関数表示 $F(x,y)=0$ はいつ滑らかになるのか？

陰関数に関する次の定理が知られている：

陰関数定理

$F(x,\,y)=0$ に対して，

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,\,y_0)\fallingdotseq\!\!\!\!/\; 0 \quad\Longrightarrow\quad (x_0,\,y_0)\text{ の近傍で } C^\infty \text{ 級のグラフで } y=f(x) \text{ とかける．}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\,y_0)\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad (x_0,\,y_0)\text{ の近傍で } C^\infty \text{ 級のグラフで } x=g(y) \text{ とかける．}$$

例３の ③,④ は自己交叉や角の周り (近傍) ではグラフの形をしていない．つまり，$\begin{cases} y=f(x) \\ x=g(y) \end{cases}$ の形でかけない．

例４

$F(x,\,y):=x^2+y^2-1=0$ に対して，$\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\neq 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y\neq 0$ となるところではグラフは滑らかである．つまり，

$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ は，$-1<x<1$ では C^∞ 級である．同様に，$x=\sqrt{1-y^2}$, $x=-\sqrt{1-y^2}$ は，$-1<y<1$ では C^∞ 級である．

➡**注** $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ としてしまうと，$x=\pm 1$, $y=\pm 1$ で微分不可である．

1.2.1　陰関数表示の特異点

定義【陰関数表示の特異点】

陰関数表示 $F(x,\,y)=0$ の特異点 $(x_0,\,y_0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,\,y_0)=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\,y_0)=0$ となる点 $(x_0,\,y_0)$．

例５

レムニスケートの特異点を求める．レムニスケートの陰関数表示は $F(x,\,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0\quad(a>0)$ である．

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x^2+y^2)\cdot 2x-2a^2x=2x\Big\{2(x^2+y^2)-a^2\Big\}=0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2(x^2+y^2)\cdot 2y+2a^2y=2y\Big\{2(x^2+y^2)+a^2\Big\}=0 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①,② より，「$x=0$ または $2(x^2+y^2)-a^2=0$」かつ $y=0$．つまり，①,② を満たす点 $(x,\,y)$ は，$(0,\,0)$ または $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\,0\right)$ である．

しかし，$(x,\,y)=\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}},\,0\right)$ のとき，$F(x,\,y)\neq 0$ なので不適．よって，特異点は $(0,\,0)$．

演習 次の陰関数表示された曲線の特異点をすべて求めよ．

(1) $y^2-x^3=0$　　(2) $y^2-x^2(x+1)=0$　　(3) $(a^2-x^2-y^2)^3-27a^2x^2y^2=0\quad(a>0)$

解 (1) $(0,\,0)$　　(2) $(0,\,0)$　　(3) $(0,\,\pm a)$, $(\pm a,\,0)$

1.3　曲線のパラメータ表示

例 (復習)

$x^2+y^2=r^2$ をパラメータ表示すると，$(x,\,y)=(r\cos\theta,\,r\sin\theta)$．1 変数 (θ) で $x,\,y$ を表している．このような θ を**パラメータ**という．

定義【曲線のパラメータ表示】

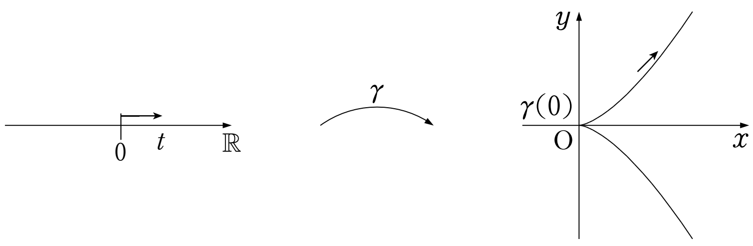
曲線が

$$\gamma(t)=(x(t),\,y(t))$$

で表せるとき，**パラメータ表示**という．(**助変数表示**，**媒介変数表示**ともいう.)

イメージ：

陰関数表示された曲線 $x^3-y^2=0$ とパラメータ表示された曲線 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を考える．



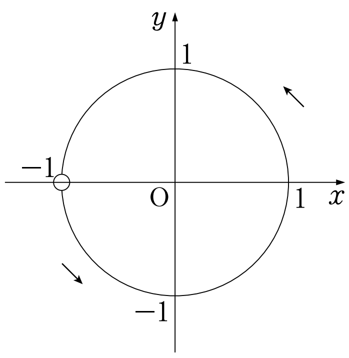
$\gamma(t)=(t^2,\,t^3)$

例 6

(1) $x^2+y^2-1=0$ のパラメータ表示は，$\gamma(\theta)=(x(\theta),\,y(\theta))=(\cos\theta,\,\sin\theta)$.

(2) $y=f(x)$ のパラメータ表示は，$\gamma(t)=(x(t),\,y(t))=(t,\,f(t))$.

(3) $\gamma(t)=(x(t),\,y(t))=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\,\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$　$(t\in\mathbb{R})$ とパラメータ表示された曲線は，$(-1,\,0)$ を除いた半径 1 の円である．



$$\because\ \left\{x(t)\right\}^2+\left\{y(t)\right\}^2=1\ \text{であり，}\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\pm\infty}x(t)=-1,\\ \lim\limits_{t\to\pm\infty}y(t)=0\end{array}\right\}\lim_{t\to\pm\infty}\gamma(t)=(-1,\,0).$$ ■

(1),(3) より，同じ曲線でもパラメータ表示の仕方はいくつもある. (1 つとは限らない.)

定義【双曲関数】

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad \sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\quad \tanh t=\frac{\sinh t}{\cosh t}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}.$$

双曲関数の簡単な性質

(1) $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1.$　　(2) $\dfrac{d}{dt}\cosh t=\sinh t,\quad \dfrac{d}{dt}\sinh t=\cosh t.$　　(3) $\begin{array}{l}\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y\\ \cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\end{array}$

<u>証明：</u>

(1) $\cosh^2 t-\sinh^2 t=\dfrac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\dfrac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}=1.$

(2) $\dfrac{d}{dt}\cosh t=\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right\}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=\sinh t,\quad \dfrac{d}{dt}\sinh t=\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right\}=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=\cosh t.$

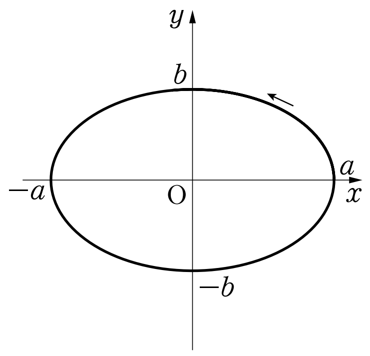
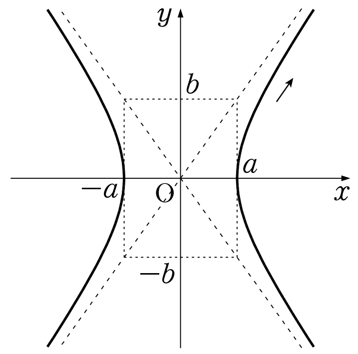
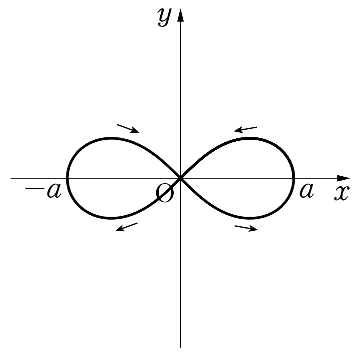
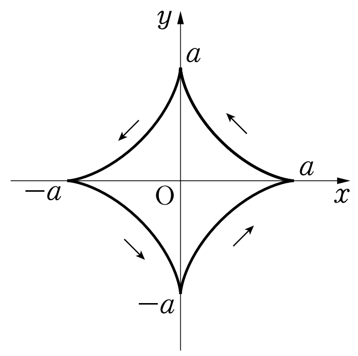
(3) (右辺) $=\dfrac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}+\dfrac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}=\dfrac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4}=\dfrac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y).$

(右辺) $=\dfrac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4}+\dfrac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4}=\dfrac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4}=\dfrac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}=\cosh(x+y).$ ■

この他にも，$\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,\ \sinh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh x$ 等がある．

1.3.1　代表的なパラメータ表示

例 3′ (*1.2*)

曲線の名称	陰関数表示	パラメータ表示	グラフの概形
❶ 楕円	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$(a\cos t,\, b\sin t)$ $(-\pi<t\leqslant\pi)$	
❷ 双曲線	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$	$(\pm a\cosh t,\, b\sinh t)$ $(t\in\mathbb{R})$	
❸ レムニスケート	$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$	$\left(\dfrac{a\cos t}{1+\sin^2 t},\, \dfrac{a\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right)$ $(-\pi<t\leqslant\pi)$	
❹ アステロイド	$(a^2-x^2-y^2)^3-27a^2x^2y^2=0$	$(a\cos^3 t,\, a\sin^3 t)$ $(-\pi<t\leqslant\pi)$	

1.3.2　パラメータ変換

定義【パラメータ変換】

一般に，パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)=(x(t),\,y(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ の t が $t=t(u)$ と書けるとき，

$$\gamma(t)=\gamma(t(u))=(x(t(u)),\,y(t(u)))=(\tilde{x}(u),\,\tilde{y}(u))=\tilde{\gamma}(u)$$

と表せる．このとき，$\tilde{\gamma}(u)$ を $\gamma(t)$ の**パラメータ変換**という．$(c\leqslant u\leqslant d,\ t(c)=a,\ t(d)=b.)$
特に誤解の恐れがない場合は，$\tilde{\gamma}(u)$ のことを $\gamma(u)$ とかく．

例 7 (パラメータ変換)

原点中心，半径 1 の円のパラメータ表示 $(x(t),\,y(t))=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\,\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ $(t\in\mathbb{R})$ は，
$t=\tan\dfrac{u}{2}$ により，$(\tilde{x}(u),\,\tilde{y}(u))=(\cos u,\,\sin u)$ $(-\pi<u<\pi)$ にパラメータ変換される．

1.3.3　パラメータ表示の特異点

定義【パラメータ表示の特異点】

パラメータ表示 $\gamma(t)=(x(t),\,y(t))$ の**特異点** $\gamma(c)=(x(c),\,y(c)) \overset{\text{def}}{\iff} \dot\gamma(c)=(\dot x(c),\,\dot y(c))=(0,\,0)$.

$\dot\gamma(c)\neq\mathbf{0}$ なる点 $\gamma(c)=(x(c),\,y(c))$ を**正則点**という．すべての点が正則点になる曲線 $\gamma(t)$ を**正則曲線**という．

➡**注** ① $\dot\gamma=\dfrac{d}{dt}\gamma$. ② *1.2.1* の陰関数表示の特異点と違うときがある．

例８
(1) $\gamma(t)=(t^2,\,t^3)$ のとき，$\dot\gamma(t)=(2t,\,3t^2)=(0,\,0)$ を満たすのは $t=0$ のときである．よって特異点は，$\gamma(0)=(0,\,0)$.
(2) $\gamma(t)=(t^2-1,\,t(t^2-1))$ のとき，$\dot\gamma(t)=(2t,\,3t^2-1)=(0,\,0)$ となる t はないので，正則曲線である．

1.4　曲線の長さ

パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)=(x(t),\,y(t))$　$(a\leqslant t\leqslant b)$ の**長さ** (**弧長**) $\mathscr{L}(\gamma)$ を求める公式として次が知られている：

公 式

$$\mathscr{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\dot x(t)^2+\dot y(t)^2}\,dt=\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt.$$

考え方
t から微小な量 Δt だけ変化したとき，対応する曲線の微小な部分の長さは $\gamma(t)$ と $\gamma(t+\Delta t)$ の距離 $\|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)\|$ にほぼ等しい．
ここで，$x(t),\,y(t)$ の変化量を，$\Delta x:=x(t+\Delta t)-x(t)$, $\Delta y:=y(t+\Delta t)-y(t)$ と定めると，三平方の定理より，

$$\|\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)\|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

となる．この区間全体で総和をとり，$\Delta t\to 0$ (または分割 $\to\infty$) にすると結論を得る．　■

➡**注** パラメータ変換しても曲線の長さは変わらない．(∵ 置換積分.)

系１

$y=f(x)$ はパラメータ表示で $\gamma(t)=(t,\,f(t))$ と表せるので，

$$\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

例９
(1) $\gamma(t)=(\cos t,\,\sin t)$ $(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2})$ の長さを求める．$\dot\gamma(t)=(-\sin t,\,\cos t)$ なので，

$$\mathscr{L}(\gamma)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\|\dot\gamma(t)\|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\gamma(t)=(\cosh t,\,t)$ $(-c\leqslant t\leqslant c)$ の長さを求める．$\dot\gamma(t)=(\sinh t,\,1)$ なので，

$$\mathscr{L}(\gamma)=\int_{-c}^{c}\sqrt{\sinh^2 t+1}\,dt=\int_{-c}^{c}\sqrt{\cosh^2-1+1}\,dt=\int_{-c}^{c}\cosh t\,dt=\Big[\sinh t\Big]_{-c}^{c}=\sinh c-\sinh(-c)=\sinh c+\sinh c=2\sinh c.$$

演習 次の曲線の長さを求めよ．
(1) $\gamma(t)=(2\cos t,\,2\sin t)$　　　(2)* $y=x^2$ $(-c\leqslant x\leqslant c)$

解　(1) π　　　(2) $c\sqrt{1+4c^2}+\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{c+\sqrt{\frac{1}{4}+c^2}}{-c+\sqrt{\frac{1}{4}+c^2}}\right|$

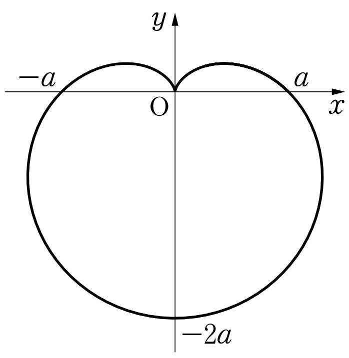
系 2

曲線 $\gamma(\theta)=(x(\theta),\,y(\theta))=(r(\theta)\cos\theta,\,r(\theta)\sin\theta)\quad(a\leqslant\theta\leqslant b)$ の長さは，

$$\mathscr{L}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{r(\theta)^2+\dot r(\theta)^2}\,d\theta.$$

証明：
$\dot x(\theta)^2=(\dot r(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta)^2=\dot r(\theta)^2\cos^2\theta-2\dot r(\theta)r(\theta)\sin\theta\cos\theta+r(\theta)^2\sin^2\theta.$
$\dot y(\theta)^2=(\dot r(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta)^2=\dot r(\theta)^2\sin^2\theta+2\dot r(\theta)r(\theta)\sin\theta\cos\theta+r(\theta)^2\cos^2\theta.$
よって，$\sqrt{\dot x(\theta)^2+\dot y(\theta)^2}=\sqrt{\dot r(\theta)^2+r(\theta)^2}.$ ■

例 10
カージオイドの周の長さを求める．カージオイドのパラメータ表示は $\gamma(\theta)=(a(1-\sin\theta)\cos\theta,\,a(1-\sin\theta)\sin\theta)\ (a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ である．



$r(\theta)=a(1-\sin\theta)$ である．

$r(\theta)^2=a^2(1-2\sin\theta+\sin^2\theta),\ \dot r(\theta)^2=(-a\cos\theta)^2=a^2\cos^2\theta$ なので，

$\mathscr{L}(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{r(\theta)^2+\dot r(\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta=\sqrt2\,a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta.$

$\sqrt{1-\sin x}=\sqrt{1-\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$ とできるので，

$\mathscr{L}(\gamma)=\sqrt2\,a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$ である．$t=\frac{\theta}{2}$ と置換すると，$\begin{array}{c||ccc}\theta&0&\cdots&2\pi\\\hline t&0&\cdots&\pi\end{array}$，$d\theta=2\,dt$ となるので，$\mathscr{L}(\gamma)=2\sqrt2\,a\int_0^{\pi}|\sin t-\cos t|\,dt.$

また，$\begin{array}{lcl}0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}&\Longrightarrow&\sin t-\cos t\leqslant0\\\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\pi&\Longrightarrow&\sin t-\cos t\geqslant0\end{array}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\gamma)&=2\sqrt2\,a\int_0^{\pi}|\sin t-\cos t|\,dt\\&=2\sqrt2\,a\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-\sin t+\cos t)\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin t-\cos t)\,dt\right\}\\&=2\sqrt2\,a\left\{\Big[\cos t+\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos t-\sin t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right\}\\&=2\sqrt2\,a\left\{\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}-\cos0-\sin0\right)+\left(-\cos\pi-\sin\pi+\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=2\sqrt2\,a\cdot\frac{4}{\sqrt2}\\&=8a.\end{aligned}$$

1.5　弧長パラメータ

この章以降は，特に断りがない限り $\gamma(t)$ は正則曲線とする．

$s=\displaystyle\int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\,du$ とするパラメータ s を導入したい．つまり，通常 $\gamma(t)$　$(a \leqslant t \leqslant b)$ (の長さを ℓ とする.) で表されているものを，$\tilde{\gamma}(s)$ にパラメータ変換したい．そのためには，$t=t(s)$ と書ける必要がある．実は，書くことができる．それを示そう．いま，s は $s=\displaystyle\int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\,du$ と表されているので，s は t の関数である．つまり，$s=s(t)$ と書ける．

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\,du=\|\dot{\gamma}(t)\|>0 \quad \therefore \frac{ds}{dt}>0$$

なので，$s=s(t)$ は単調増加である．よって，逆関数定理より，逆関数 $t=t(s)$ が存在する．$\therefore \gamma(t)=\gamma(t(s))=\tilde{\gamma}(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant \ell)$ となる．これからは，$\tilde{\gamma}(s)=\gamma(s)$ と書き，$\gamma(s)$ を曲線の**弧長パラメータ表示**といい，s を**弧長パラメータ**という．

➡注 通常のパラメータ表示と弧長パラメータ表示を区別するために，弧長パラメータ表示の微分には，$\gamma'(s)$ と書く．

$\gamma(s)$ の性質

$$\gamma'(s)=\frac{d\gamma}{ds}=\frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\dot{\gamma}(t)\cdot\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}=\dot{\gamma}(t)\cdot\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}=\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}. \quad \therefore \|\gamma'(s)\|=1\ ({}^\forall s).$$

逆に，$\|\dot{\gamma}(t)\|=1\ ({}^\forall t)$ とすると，

$$\dot{\gamma}(t)=\frac{d\gamma}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\gamma}{ds}\cdot\|\dot{\gamma}(t)\|=\frac{d\gamma}{ds}=\gamma'(s).$$

つまり，$\gamma(t)=\tilde{\gamma}(s)+C$ である．$\|\dot{\gamma}(t)\|=1$ なら $\gamma(t)$ と $\tilde{\gamma}(s)$ は本質的に同じである．

定義【弧長パラメータ】

$\gamma(t)$ が任意の t において $\|\dot{\gamma}(t)\|=1$ のとき，$t=s$ と書いて，**弧長パラメータ**という．$\gamma(t)=\gamma(s)$ を**弧長パラメータ表示**という．

弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma(s)$ に対して，$\gamma'(s)$ は **単位接ベクトル** になる．

まず，単位ベクトルであることは性質より明らかであり，x の増分を Δx，y の増分を Δy，s の増分を Δs と表すことにして平均変化率をみると，

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\ \frac{\Delta y}{\Delta s}\longrightarrow\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds}\ (\Delta s\longrightarrow 0)$$

となることから接ベクトルであることもわかる．単位接ベクトルを記号で，

$$\boxed{\gamma'(s)=\boldsymbol{e}(s)}$$

とかく．これに直交する **単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$** を

$$\boxed{\boldsymbol{n}(s)=(-y'(s),\,x'(s))}$$

と定める．

1.6　曲率

- $\gamma''(s)$ は何を表しているのか？

$\|\gamma'(s)\|=1$ より，$1^2=\|\gamma'(s)\|^2=\gamma'(s)\cdot\gamma'(s)$　$\therefore \gamma'(s)\cdot\gamma'(s)=1$ $\cdots$① である．("$\cdot$" は内積の記号.) ① の両辺を微分すると，

$$0=\frac{d}{ds}\Big\{\gamma'(s)\cdot\gamma'(s)\Big\}=\gamma''(s)\cdot\gamma'(s)+\gamma'(s)\cdot\gamma''(s)=2\gamma''(s)\cdot\gamma'(s) \quad \therefore \gamma''(s)\cdot\gamma'(s)=0.$$

すなわち，$\gamma''(s)$ と $\gamma'(s)\,(=\boldsymbol{e}(s))$ は直交する．つまり，$\gamma''(s)\,(=\boldsymbol{e}'(s))$ と $\boldsymbol{n}(s)$ は1次従属である．よって，

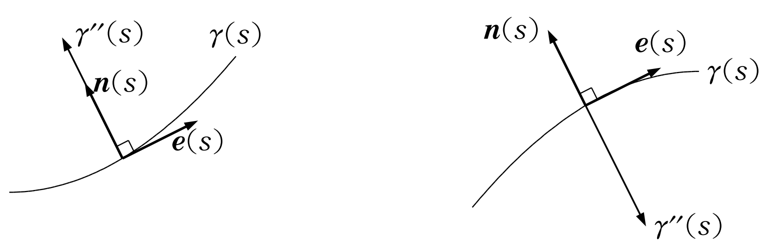
$$\gamma''(s)\,(=\boldsymbol{e}'(s))=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$$

と表せる.[1)]

定義【曲率】

$$\gamma(s)\text{ の曲率 }\kappa(s)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\gamma''(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\text{ なる }\kappa(s).$$

イメージ：



$\kappa(s)>0$　$(\kappa(s)>1)$　　　　$\kappa(s)<0$　$(\kappa(s)<-1)$

1) κ はカッパと読む．また，$\kappa(s)$ は実数である．

1.6.1　弧長パラメータの曲率 $\kappa(s)$ の計算

定理１

弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ は次のように計算できる：

$$\kappa(s) = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big) = \det\begin{bmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{bmatrix} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s).$$

証明：

$$\det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \boldsymbol{n}(s)\Big) = \det\Big(\gamma'(s),\, \boldsymbol{n}(s)\Big) = \det\begin{bmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = x'(s)^2 + y'(s)^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = 1.$$

また，曲率の定義より，$\gamma''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ なので,

$$\begin{aligned} \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big) &= \det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)\Big) \\ &= \kappa(s)\det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \boldsymbol{n}(s)\Big) \\ &= \kappa(s). \end{aligned}$$

■

例 11

- 原点中心，半径 a の円 $\gamma(t) = (a\cos t,\, a\sin t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ を弧長パラメータ表示する．

Step1. $s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du =: s(t)$ を求める．$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a$ なので，$s = s(t) = at$.

Step2. $t = t(s)$ なる逆関数を求める．$s = at \Longleftrightarrow t = \dfrac{s}{a} =: t(s)$.

Step3. $\gamma(t)$ に $t = t(s)$ を代入して，$\gamma(s)$ を求める. (正確には $\tilde{\gamma}(s)$.) $\gamma(t) = \gamma(t(s)) = (a\cos t(s),\, a\sin t(s)) = \Big(a\cos\dfrac{s}{a},\, a\sin\dfrac{s}{a}\Big) =: \gamma(s)$.

- 弧長パラメータ表示された円 $\gamma(s) = \Big(a\cos\dfrac{s}{a},\, a\sin\dfrac{s}{a}\Big)$ の曲率 $\kappa(s)$ を求める．$\kappa(s) = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big) = \begin{vmatrix} -\sin\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a} \\ \cos\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a}$.

1.6.2　一般パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ の計算

定理２

$\gamma(t)$：正則曲線とする. (弧長パラメータとは限らない.) このとき，$\gamma(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ は次のように計算できる：

$$\kappa(t) = \frac{\det\Big(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t)\Big)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

証明：

$$s = s(t) \rightsquigarrow \kappa(t) := \kappa(s(t)) = \kappa(s), \quad t = t(s) \rightsquigarrow \gamma(s) := \gamma(t(s)) = \gamma(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表す．ここで，$\gamma'(s), \gamma''(s)$ を求める．

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \dot{\gamma}(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dot{\gamma}(t)\cdot\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\gamma''(s) = \frac{d\gamma'}{ds} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right\}\frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{\gamma}(t)\|\dot{\gamma}(t)\| - \dot{\gamma}(t)x}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}\cdot\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2} - \frac{x\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}\|^3} \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

①,②,③ を $\kappa(s) = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big)$ に代入すると,

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \det\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|},\, \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2} - \frac{x\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}\|^3}\right) \\ &= \det\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|},\, \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}\right) - \det\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|},\, \frac{x\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}\right) \\ &= \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}\det\Big(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t)\Big) - \frac{x}{\|\dot{\gamma}(t)\|^4}\underbrace{\det\Big(\dot{\gamma}(t),\, \dot{\gamma}(t)\Big)}_{=0} = \frac{\det\Big(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t)\Big)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}. \end{aligned}$$

■

** $x = \dfrac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\|$.

系 3

$\gamma(t)$ の曲率 $\kappa(t)$ は，① 平行移動 ② 回転移動で変わらない.

証明：

① $\gamma(t)$ の平行移動

$\gamma(t)$ を平行移動させた曲線を $\overline{\gamma}(t)$ とすると，$\overline{\gamma}(t)=\gamma(t)+\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a}$：定ベクトル) と表せる. $\overline{\gamma}(t)$ の曲率を $\overline{\kappa}(t)$ とする.

いま，$\dot{\overline{\gamma}}(t)=\dfrac{d}{dt}\overline{\gamma}(t)=\dfrac{d}{dt}\Big\{\gamma(t)+\boldsymbol{a}\Big\}=\dot{\gamma}$. 同様にして，$\ddot{\overline{\gamma}}(t)=\ddot{\gamma}(t)$ なので,

$$\overline{\kappa}(t)=\frac{\det\Big(\dot{\overline{\gamma}}(t),\,\ddot{\overline{\gamma}}(t)\Big)}{\|\dot{\overline{\gamma}}(t)\|^3}=\frac{\det\Big(\dot{\gamma}(t),\,\ddot{\gamma}(t)\Big)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}=\kappa(t).\quad \therefore \overline{\kappa}(t)=\kappa(t).$$

② $\gamma(t)$ の回転移動 (θ 回転)

$\gamma(t)$ を θ 回転させた曲線を $\overline{\gamma}(t)$ とすると，回転行列 $R_\theta:=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ を用いて，$\overline{\gamma}=R_\theta\gamma(t)$ と表せる.

いま，$\dot{\overline{\gamma}}(t)=\dfrac{d}{dt}\Big\{R_\theta\gamma(t)\Big\}=R_\theta\dot{\gamma}(t)$. 同様にして，$\ddot{\overline{\gamma}}(t)=R_\theta\ddot{\gamma}(t)$ である. また，$\|R_\theta\dot{\gamma}(t)\|=\|\dot{\gamma}(t)\|$ なので,

$$\overline{\kappa}(t)=\frac{\det\Big(\dot{\overline{\gamma}}(t),\,\ddot{\overline{\gamma}}(t)\Big)}{\|\dot{\overline{\gamma}}(t)\|^3}=\frac{\det\Big(R_\theta\dot{\gamma}(t),\,R_\theta\ddot{\gamma}(t)\Big)}{\|R_\theta\dot{\gamma}(t)\|^3}=\frac{\overbrace{\det(R_\theta)}^{=1}\det\Big(\dot{\gamma}(t),\,\ddot{\gamma}(t)\Big)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}=\kappa(t).\quad \therefore \overline{\kappa}(t)=\kappa(t).$$

■

以上のことから，曲率は“形”で決まる！

例 12

$\gamma(t)=(t,\,t^2)$ の曲率 $\kappa(t)$ を求める.

$\dot{\gamma}(t)=(1,\,2t)$, $\|\dot{\gamma}(t)\|=\sqrt{1+4t^2}$, $\ddot{\gamma}(t)=(0,\,2)$ なので，$\kappa(t)=\dfrac{\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2t & 2\end{bmatrix}}{(1+4t^2)^{3/2}}=\dfrac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$.

1.7　フルネの公式

フルネの公式

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s), & \cdots ①\\ \boldsymbol{n}'(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) & \cdots ②\end{cases}$$

証明：

① は曲率の定義より，$\gamma''(s)=\boldsymbol{e}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$.

② ① より,

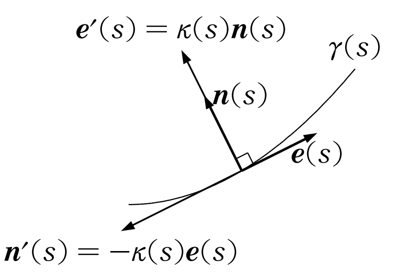
$$\boldsymbol{e}'(s)=\begin{bmatrix}x''(s)\\ y''(s)\end{bmatrix}=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)=\kappa(s)\begin{bmatrix}-y'(s)\\ x'(s)\end{bmatrix}$$

なので，$x''(s)=\kappa(s)y'(s)$, $y''(s)=\kappa(s)x'(s)$ である. これを $\boldsymbol{n}'(s)$ に代入すると,

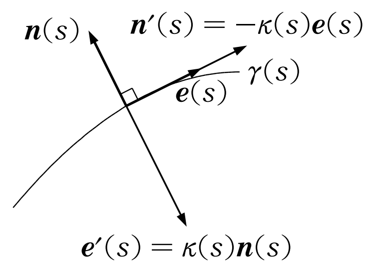
$$\boldsymbol{n}'(s)=\begin{bmatrix}-y''(s)\\ x''(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\kappa(s)x'(s)\\ -\kappa(s)y'(s)\end{bmatrix}=-\kappa(s)\begin{bmatrix}x'(s)\\ y'(s)\end{bmatrix}=-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s).$$

■

フルネの公式の幾何的イメージ：



$\kappa(s)>0$　($\kappa(s)>1$)



$\kappa(s)<0$　($\kappa(s)<-1$)

演習 次の曲線の曲率 $\kappa(t)$ を求めよ.

(1) $\gamma(t)=(t,\,\cosh t)$　　(2) $\gamma(t)=(a\cos t,\,b\sin t)$

解

(1) $\kappa(t)=\dfrac{1}{\cosh^2 t}$　　(2) $\kappa(t)=\dfrac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$

1.8　平面曲線の基本定理

平面曲線の基本定理

任意の C^∞ 級関数 $\kappa : [0,\,\ell] \to \mathbb{R}$ に対して，s を弧長パラメータとする曲線 $\gamma : [0,\,\ell] \to \mathbb{R}^2$ が存在し，$\gamma(s)$ の曲率は $\kappa(s)$ である．さらに，このような曲線 $\gamma(s)$ は回転・平行移動を除いて唯一である．

証明：

$\kappa(s)$ を $s \in [0,\,\ell]$ 上の C^∞ 級関数とする．

Step1. $\kappa(s)$ からフルネの公式を満たす $\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)$ を作る！

フルネの公式を満たす $\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)$ を用いて，2×2 行列 $\mathscr{F}(s)$ を $\mathscr{F}(s) := \Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)\Big)$ と定義する．すると，

$$\mathscr{F}'(s) = \Big(\boldsymbol{e}'(s),\,\boldsymbol{n}'(s)\Big) = \Big(\kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\,-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s)\Big) = \Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)\Big)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix}}_{=:\Omega(s)} = \mathscr{F}(s)\Omega(s). \quad \therefore \mathscr{F}'(s) = \mathscr{F}(s)\Omega(s).$$

これは線型微分方程式である．いま，初期値を

$$\mathscr{F}(0) = \Big(\boldsymbol{e}(0),\,\boldsymbol{n}(0)\Big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

とする．(回転と平行移動を除くため.) 線型微分方程式の解の一意性より，この方程式を満たす解 $\mathscr{F}(s) = \Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)\Big)$ が一意的に存在する．

$$\text{論理記号を用いて書くと，} {}^\forall\kappa(s),\ {}^{\exists !}\mathscr{F}(s) = \Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)\Big) \ \text{ s.t. } \begin{array}{ll} ① & \mathscr{F}'(s) = \mathscr{F}(s)\Omega(s), \\ ② & \mathscr{F}(0) = \mathbf{E}_2. \end{array}$$

このとき，$\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)$ は長さ 1 で直交している.[2)]

Step2. $\boldsymbol{e}(s)$ から曲率が $\kappa(s)$ となる曲線 $\gamma(s)$ を作る！ (**存在性**)

$\gamma(s) := \displaystyle\int_0^s \boldsymbol{e}(u)\,du$ とすると，$\gamma'(s) = \dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_0^s \boldsymbol{e}(u)\,du = \boldsymbol{e}(s)$ となる．$\cdots$③

また，Step1. より，$\boldsymbol{e}(s)$ はフルネの公式を満たすように作ったので，$\gamma''(s) = \boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \cdots$④ となる．

③,④ より，$\gamma(s)$ の曲率は $\kappa(s)$ である．

Step3. 一意性を示す．

$\overline{\gamma}(s)$ を $\gamma(s)$ と同じ曲率 $\kappa(s)$ をもつ曲線とする．これらの曲線を回転・平行移動によって，

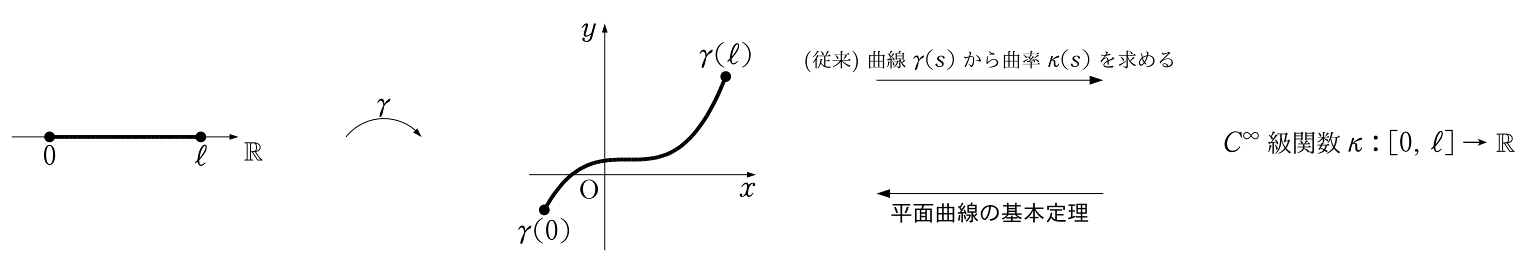
$$\gamma(0) = \overline{\gamma}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}(0) = \overline{\boldsymbol{e}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{n}(0) = \overline{\boldsymbol{n}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

としてもよい．ただし，$\overline{\boldsymbol{e}}(s),\,\overline{\boldsymbol{n}}(s)$ は $\overline{\gamma}(s)$ の単位接ベクトルと単位法ベクトルである．$\overline{\mathscr{F}} = \Big(\overline{\boldsymbol{e}}(s),\,\overline{\boldsymbol{n}}(s)\Big)$ とおくと，Step1. と同様に線型微分方程式となり，解の一意性より，$\overline{\mathscr{F}}(s) = \Big(\overline{\boldsymbol{e}}(s),\,\overline{\boldsymbol{n}}(s)\Big) = \Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s)\Big) = \mathscr{F}(s)$ (${}^\forall s$) となる．とくに，

$$\overline{\gamma}(s) = \int_0^s \overline{\boldsymbol{e}}(u)\,du = \int_0^s \boldsymbol{e}(u)\,du = \gamma(s)$$

となり，曲線は一致する．■

平面曲線の基本定理のイメージ：



注意

平面曲線の基本定理は，弧長パラメータ表示でしか意味を持たない！ということに注意！

[2)] $\theta(s) = \displaystyle\int_0^s \kappa(u)\,du$ とし，$\boldsymbol{e}(s) = \begin{bmatrix} \cos\theta(s) \\ \sin\theta(s) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{n}(s) = \begin{bmatrix} -\sin\theta(s) \\ \cos\theta(s) \end{bmatrix}$ とすると，①,② を満たす解になることがわかる．

系４

C^∞ 級関数 $\kappa(s)$ が定数関数のときは，次のいずれか．

(1) $\kappa(s) = 0 \Longrightarrow \gamma(s)$ は直線．　　(2) $\kappa(s) = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow \gamma(s)$ は半径 $|a|$ の円周である．($a \neq 0$)

証明：

(1) $\gamma(t) = (t,\, 0)$ とすると，$\gamma(t)$ は直線 ($y = 0$) である．

$\dot{\gamma}(t) = (1,\, 0)$ であり，$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ ($^\forall t$) なので，$\gamma(t)$ は弧長パラメータ表示である．つまり，$\gamma(t) = \gamma(s)$ と書ける．

$\gamma''(s) = (0,\, 0)$ より，$\kappa(s) = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ である．よって，平面曲線の基本定理より，

$\kappa(s) = 0$ になる曲線 $\gamma(s)$ は回転・平行移動を除いて一意なので，$\gamma(s)$ と同じ曲線，すなわち直線となる．

(2) $a > 0$ とする．

$\gamma(s) = \left(a\cos\dfrac{s}{a},\, a\sin\dfrac{s}{a}\right)$ とすると，$\gamma(s)$ は半径 a の円周である．

$\gamma'(s) = \left(-\sin\dfrac{s}{a},\, \cos\dfrac{s}{a}\right)$ より，$\|\gamma'(s)\| = 1$ ($^\forall s$) なので，$\gamma(s)$ は弧長パラメータ表示である．

$\kappa(s) = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s)\Big) = \det\begin{bmatrix} -\sin\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a} \\ \cos\frac{s}{a} & -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{a}$ である．よって，平面曲線の基本定理より，

$\kappa(s) = \dfrac{1}{a}$ になる曲線 $\gamma(s)$ は回転・平行移動を除いて一意なので，$\gamma(s)$ と同じ曲線，すなわち半径 a の円周となる．■

1.8.1　$\kappa(s)$ から $\gamma(s)$ を求める計算

$\kappa(s)$ から $\gamma(s)$ を求める計算法は次で与えられる：

$$\gamma(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right),\, \sin\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right)\right) dv \qquad (*)$$

証明：

$\gamma'(s) = \dfrac{d}{ds}\left\{\int_0^s \left(\cos\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right),\, \sin\left(\int_0^v \kappa(u)\,du\right)\right) dv\right\} = \left(\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right),\, \sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right)\right)$ より，$\|\gamma'(s)\| = 1$ ($^\forall s$)

なので，$\gamma(s)$ は弧長パラメータ表示である．また，

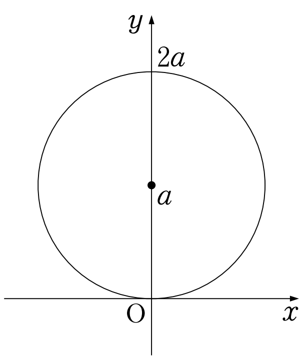
$$\begin{aligned} \gamma''(s) &= \left(-\kappa(s)\sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right),\, \kappa(s)\cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right)\right) \\ &= \kappa(s)\left(-\sin\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right),\, \cos\left(\int_0^s \kappa(u)\,du\right)\right) \\ &= \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \end{aligned}$$

$\therefore\ \gamma''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ なので，$\kappa(s)$ は曲率である．よって，平面曲線の基本定理より，$(*)$ は曲率 $\kappa(s)$ をもつ曲線である．■

例 13

(1) $\kappa(s) = 0$ のとき，$\gamma(s) = \gamma(s) = \int_0^s \left(\cos\left(\int_0^v 0\,du\right),\, \sin\left(\int_0^v 0\,du\right)\right) dv = \int_0^s (\cos 0,\, \sin 0)\, dv = (s,\, 0)$．

(2) $\kappa(s) = \dfrac{1}{a}$ ($a \neq 0$) のとき，$\gamma(s) = \cdots = \left(a\cos\dfrac{s}{a},\, a\sin\dfrac{s}{a}\right) + (0,\, a)$ となる．これは円を y 軸に a だけ平行移動したものである．



- $\kappa(s) = s$ のとき，$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\dfrac{u^2}{2}\,du,\, \int_0^s \sin\dfrac{u^2}{2}\,du\right)$ となる．

これは，**フレネル積分** (Fresnel integral) と呼ばれ，初等関数では書けない！ また，この曲線は**オイラーの螺旋**と呼ばれる．

まとめ

一般に，$\kappa(s)$ から具体的な $\gamma(s)$ を求めることは難しいが，$\kappa(s)$ は $\gamma(s)$ を決定する！

1.9　曲率円

今までは，曲線を“近似”するとき，直線 (接線) で近似していた．それを今回は“円”で近似しようとする．

イメージ：

1.8 の系 4 より，半径 a の円の曲率 $\kappa(s)$ は $\kappa(s) = \pm\dfrac{1}{a}$ となるので，$a = \pm\dfrac{1}{\kappa(s)} = \dfrac{1}{|\kappa(s)|}$ となる．これを，**曲率半径**という．

定義【曲率円】

$\kappa(s) \neq 0$ とする．

$$\gamma(s) \text{ の\textbf{曲率円}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \text{点 } \gamma(s) \text{ で曲線に接する半径 } \frac{1}{|\kappa(s)|} \text{ なる円}$$

（ i ）$\kappa(s) > 0 \Longrightarrow$ 進行方向左側の円

（ii）$\kappa(s) < 0 \Longrightarrow$ 進行方向右側の円

$\dfrac{1}{|\kappa(s)|}$：**曲率半径**．$\kappa(s) = 0$ の場合は，接線を曲率円とみなす．(接線は曲率半径 ∞ の円とみれる.)

$$\gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{n}(s) \text{ を\textbf{曲率中心}という．}$$

弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma(s)$ で曲率円を定義したが，一般のパラメータ表示 $\gamma(t)$ で言い換えることができる．$\gamma(t)$ での曲率円の曲率半径は,

$$\frac{1}{|\kappa(s)|} = \frac{1}{|\kappa(s(t))|} = \frac{1}{|\kappa(t)|} = \frac{1}{\left|\dfrac{\det\Bigl(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t)\Bigr)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}\right|} = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}{\left|\det\Bigl(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t)\Bigr)\right|}$$

となる．曲率中心を定義するには，一般のパラメータ表示 $\gamma(t)$ の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$, 単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(t)$ を定義しなければならない．$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ に対して，$\boldsymbol{e}(t)$, $\boldsymbol{n}(t)$ をそれぞれ次で定義する：

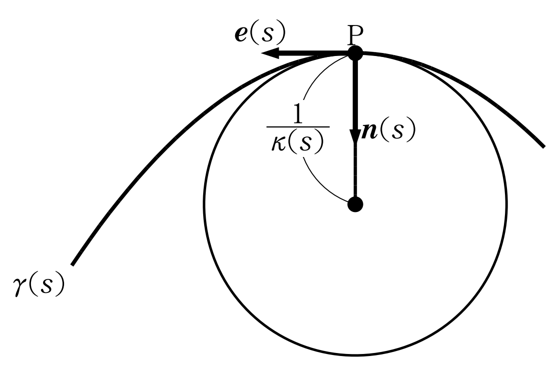
$$\boldsymbol{e}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}, \quad \boldsymbol{n}(t) := \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\begin{bmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}.$$

よって，$\gamma(t)$ の曲率中心は,

$$\gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\begin{bmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

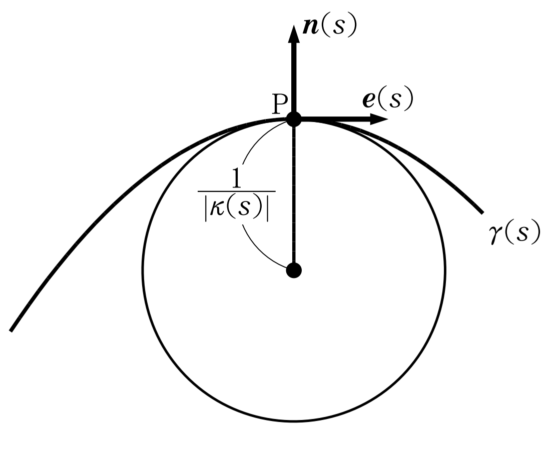
とできる．

曲率円のイメージ：



$\kappa(s) > 0$

進行方向・左側



$\kappa(s) < 0$

進行方向・右側

曲率円は $\gamma(s)$ の点 P と同じ曲率をもつ円となる．すなわち，点 P の周りを近似している！

1.9.1　曲率円の例

$\gamma(t) = \left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ の $t = -1,\ 0,\ 1$ における曲率円.

$\dot{\gamma}(t) = (1,\ t),\ \ddot{\gamma}(t) = (0,\ 1)$ より，$\kappa(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$, $\boldsymbol{n}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $t = -1$ のとき

  曲率半径 $= (1+(-1)^2)^{3/2} = 2\sqrt{2}$，曲率中心 $= \gamma(-1) + 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

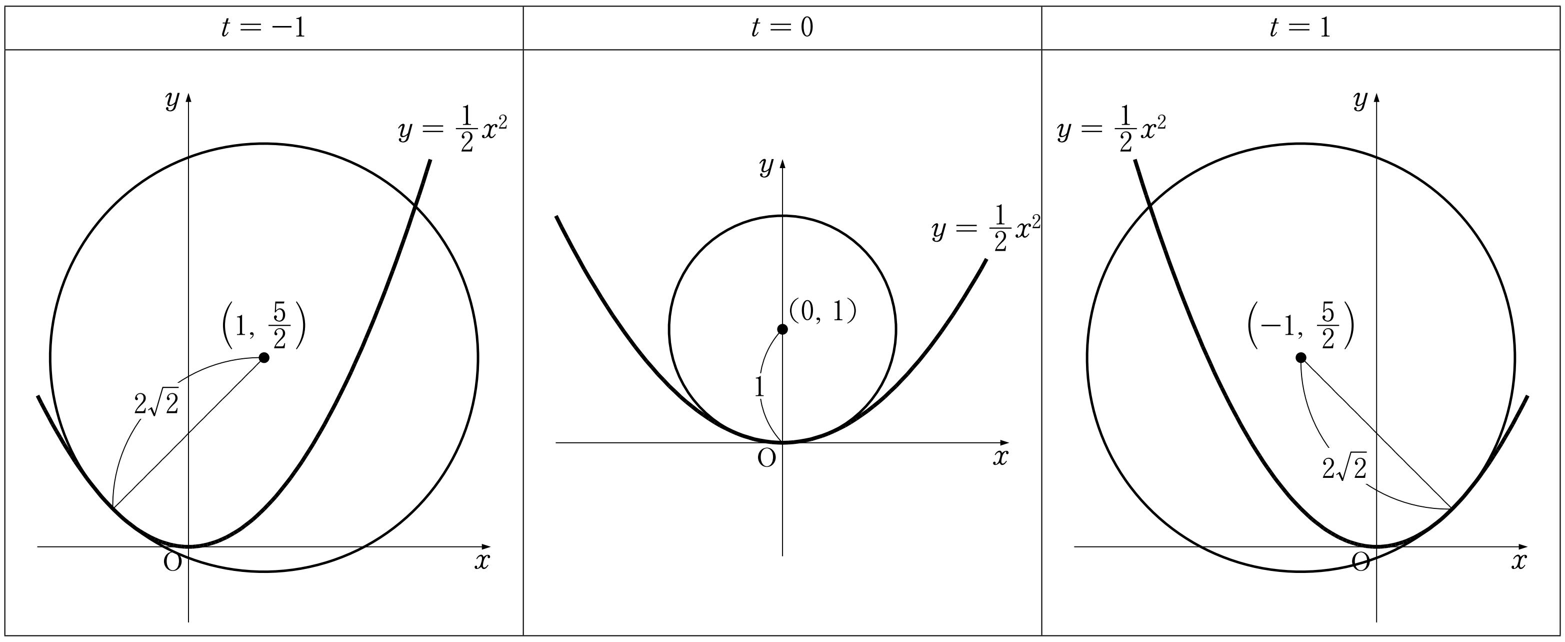
- $t = 0$ のとき

  曲率半径 $= (1+0^2)^{3/2} = 1$，曲率中心 $= \gamma(0) + \kappa(0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- $t = 1$ のとき

  曲率半径 $= 2\sqrt{2}$，曲率中心 $= \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

グラフはそれぞれ次のようになる.



この章では関係ないのだが，次の章から $\mathbb{R}^3$ で**外積**を使うので，外積の定義を書いておく.

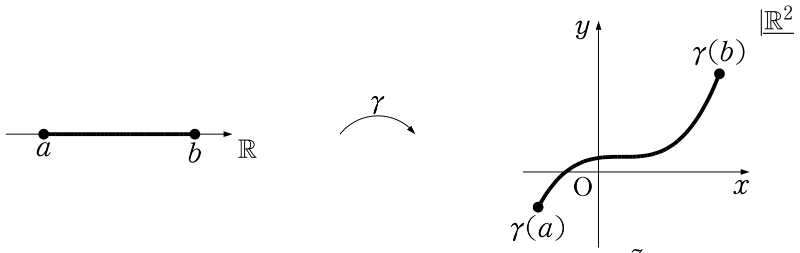
定義【$\mathbb{R}^3$ の外積】

$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3),\ \boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を次で定義する：

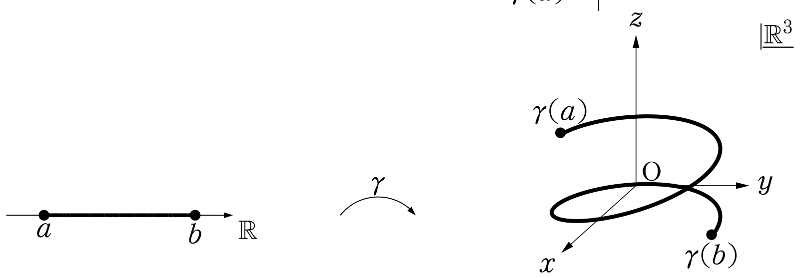
$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

2　空間曲線

平面曲線のイメージ：



空間曲線のイメージ：



空間曲線のパラメータ表示を $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と定め，$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \fallingdotseq \mathbf{0}$ を仮定する (正則曲線).

空間曲線に対して，**曲率**と **振率**(れいりつ) を定義したい！ 後々わかることだが，振率はねじれ具合である．また，２次元の場合と同様にして，弧長 $\mathscr{L}(\gamma)$ は,

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$$

により求まる.

2.1　曲率と振率

弧長パラメーター s を２次元の場合と同様に,

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\,du$$

とすると，逆関数定理より，逆関数 $t = t(s)$ が存在して，弧長パラメータ表示 $\gamma(t) = \gamma(t(s)) =: \gamma(s)$ がある．**単位接ベクトル** $\boldsymbol{e}(s)$ は,

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

と定めることができ，長さが１なので，２次元のときと同様に $\boldsymbol{e}'(s)$ と $\boldsymbol{e}(s)$ が直交していることがわかる．ここで，$\boldsymbol{e}(s)$ に直交する単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ を,

$$\boldsymbol{n}(s) := \frac{\boldsymbol{e}'(s)}{\|\boldsymbol{e}'(s)\|}$$

と定める.[3] この $\boldsymbol{n}(s)$ を**主法線ベクトル**という．すると,$\boldsymbol{e}'(s)(= \gamma''(s)) = \|\boldsymbol{e}'(s)\|\boldsymbol{n}(s)$ となる.

定義【空間曲線の曲率】

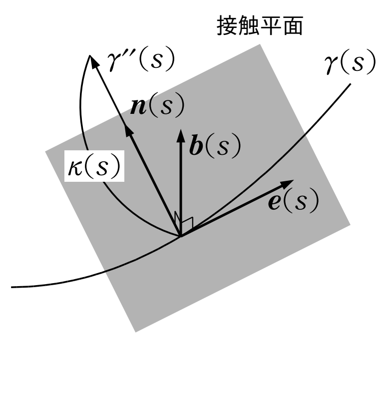
$\kappa(s) := \|\boldsymbol{e}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$ を空間曲線の**曲率**という.[4]

$\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ で張られる平面を**接触平面**という.[5] この平面上の垂直なベクトル $\boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$ (“$\times$” は外積の記号) を**従法線ベクトル**という.[6]

定義【振率】

$\tau(s) := -\boldsymbol{b}'(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ を曲線 $\gamma(s)$ の**振率**という. (“$\cdot$” は内積の記号.)

イメージ：



---

3) なぜこのように定めるのかというと，$\mathbb{R}^2$ では２方向しかないが，$\mathbb{R}^3$ は直交する方向が無限個あるため.

4) 平面曲線の曲率は正・負がありえるが，空間曲線の曲率は常に正であることに注意.

5) 接触平面上での曲線 $\gamma(s)$ の曲がり具合が $\kappa(s)$ である.

6) 外積の性質として，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して（ｉ）$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$,（ii）$\|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の張る平行四辺形の面積).（ii）より $\|\boldsymbol{b}(s)\| = 1$.

2.1.1　つるまき線 (常螺旋)

例 1

空間曲線 $\gamma(t)=(a\cos t,\,a\sin t,\,bt)$ $(a>0,\,b\geqslant 0$：定数$)$ の曲率 $\kappa(s)$ と $\tau(s)$ を求める．

まず，弧長パラメータ表示する．$\dot{\gamma}(t)=(-a\sin t,\,a\cos t,\,b)$ となるので，

$s=s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 u+a^2\cos^2 u+b^2}\,du=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,du=\sqrt{a^2+b^2}\,t\quad\therefore t=t(s)=\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$．よって，弧長パラメータ表示は，

$$\gamma(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\,a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\,b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

となる．便宜上，$c:=\sqrt{a^2+b^2}$ とおく．すると，

$$\boldsymbol{e}(s)=\gamma'(s)=\Bigl(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\,\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\,\frac{b}{c}\Bigr),\quad \boldsymbol{e}'(s)=\Bigl(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\,-\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\,0\Bigr)$$

となるので，曲率は，

$$\kappa(s)=\|\boldsymbol{e}'(s)\|=\sqrt{\frac{a^2}{c^2}}=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

次に従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$ を求める．そのために，主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ を求める．

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{\boldsymbol{e}'(s)}{\|\boldsymbol{e}'(s)\|}=\Bigl(-\cos\frac{a}{c},\,-\sin\frac{a}{c},\,0\Bigr).$$

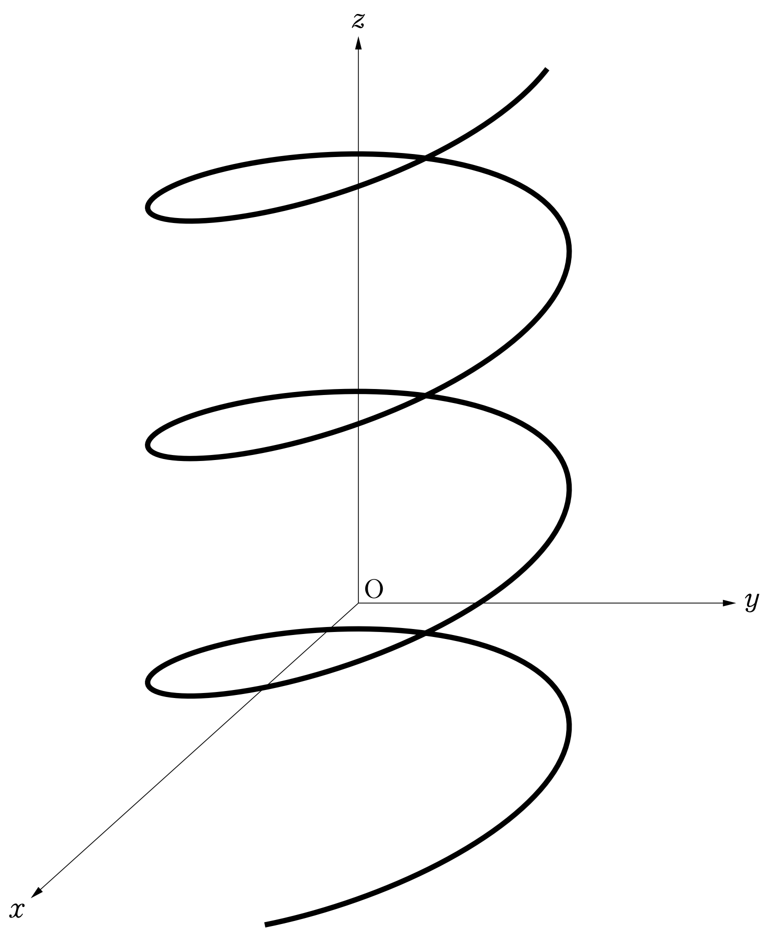
$$\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{e}(s)\times\boldsymbol{n}(s)=\frac{1}{c}\Bigl(b\sin\frac{s}{c},\,-b\cos\frac{s}{c},\,a\Bigr),\quad \boldsymbol{b}'(s)=\frac{1}{c}\Bigl(\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\,\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\,0\Bigr).$$

である．よって，捩率 $\tau(s)$ は，

$$\tau(s)=-\boldsymbol{b}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

このような空間曲線は**つるまき線**または**常螺旋**と呼ばれるものである．

つるまき線の概形：



➡注　$b=0$ のとき，$\kappa(s)=\dfrac{1}{a}$, $\tau(s)=0$ である．これは，平面上の円周を意味している．

2.2　フルネ - セレの公式

定理【フルネ - セレの公式】

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{e}'(s) & = & \qquad\qquad \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \\
\boldsymbol{n}'(s) & = & -\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) \qquad\qquad +\tau(s)\boldsymbol{b}(s) \\
\boldsymbol{b}'(s) & = & \qquad\qquad -\tau(s)\boldsymbol{n}(s)
\end{array}
$$

証明：

定義より，$\boldsymbol{e}'(s)=\gamma''(s)=\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ である．また，$\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ は長さ 1 で，それぞれ直交しているので $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．
よって，$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルは $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の 1 次結合で書けるので，(以下，簡略化のため (s) は省略する.)

$$
\begin{cases}\boldsymbol{n}'=\alpha_1\boldsymbol{e}+\alpha_2\boldsymbol{n}+\alpha_3\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}'=\beta_1\boldsymbol{e}+\beta_2\boldsymbol{n}+\beta_3\boldsymbol{b}\end{cases} \quad ,(\alpha_i,\ \beta_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ 2,\ 3)
$$

と書ける．$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}$ をそれぞれ

$$
\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e}=(\alpha_1\boldsymbol{e}+\alpha_2\boldsymbol{n}+\alpha_3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}=\alpha_1\underbrace{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}}_{=\|\boldsymbol{e}\|^2=1}+\alpha_2\underbrace{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}}_{=0}+\alpha_3\underbrace{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}}_{=0}=\alpha_1
$$

といったように計算すると，$\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}=\alpha_2$, $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}=\alpha_3$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{e}=\beta_1$, $\boxed{\underbrace{\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}}_{=-\tau(s)}=\beta_2}$, $\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}=\beta_3$ となる．

いま，$\|\boldsymbol{n}\|=1$ より，$(\|\boldsymbol{n}\|^2=)\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$ なので，この両辺を微分すると，$0=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'=2\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}=2\alpha_2 \quad \therefore \boxed{\alpha_2=0}$.

同様に，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$ の両辺を微分すると，$0=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'=2\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{b}=2\beta_3 \quad \therefore \boxed{\beta_3=0}$.

また，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}=0$ より，両辺を微分すると，$0=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}'=\alpha_1+\boldsymbol{n}\cdot(\kappa(s)\boldsymbol{n})=\alpha_1+\kappa(s)\underbrace{\|\boldsymbol{n}\|^2}_{=1} \quad \therefore \boxed{\alpha_1=-\kappa(s)}$.

同様にして，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=0$ の両辺を微分すると，$0=\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}'=\beta_1+\boldsymbol{b}\cdot(\kappa(s)\boldsymbol{n})=\beta_1+\kappa(s)\underbrace{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}}_{=0} \quad \therefore \boxed{\beta_1=0}$.

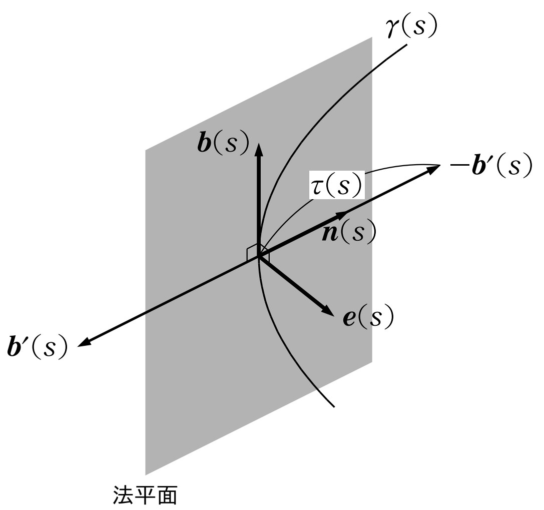
$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0$ の両辺を微分すると，$0=\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}'=\alpha_3+\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}=\alpha_3-\tau(s) \quad \therefore \boxed{\alpha_3=\tau(s)}$.

したがって，結論を得る．■

フルネ - セレの公式からわかること ①　～捩率 $\tau(s)$ は何を示しているのか～

主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$ と従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$ が張る平面のことを**法平面**という．
フルネ - セレの公式から捩率 $\tau(s)$ は法平面上での曲線 $\gamma(s)$ の曲がり具合を表していることがわかる．

イメージ：



フルネ - セレの公式からわかること ②

$\mathscr{F}:=\Big(\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)\Big)$ とおくと，

$$
\mathscr{F}'(s)=\mathscr{F}(s)\Omega(s),\quad \Omega(s):=\begin{bmatrix}0 & -\kappa(s) & 0\\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s)\\ 0 & \tau(s) & 0\end{bmatrix}
$$

と書ける．

2.3　空間曲線の基本定理

空間曲線の基本定理

任意の C^∞ 級関数 $\kappa:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, $\tau:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ に対して，
s を弧長パラメータとする曲線 $\gamma:[a,\,b]\to\mathbb{R}^3$ が存在し，$\gamma(s)$ の曲率は $\kappa(s)$，捩率は $\tau(s)$ となる．
また，このような曲線 $\gamma(s)$ は回転・平行移動を除いて一意である．

<u>証明：</u>

<u>Step1.</u> フルネ - セレの公式から $\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)$ を作り出す．

フルネ - セレの公式を満たす $\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)$ を用いて，3×3 行列 $\mathscr{F}(s):=\Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)\Big)$ とする．初期値を $\mathscr{F}(a)=\mathbf{E}_3$ とする．

すると，$\mathscr{F}'(s)=\mathscr{F}(s)\Omega(s),\,\mathscr{F}(a)=\mathbf{E}_3$ は線型微分方程式なので，解の一意性より $\mathscr{F}(s)=\Big(\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)\Big)$ は一意に定まる．

$\mathscr{F}(s)$ が直交行列 $(\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)=\mathbf{E}_3)$ であることを示せば，$\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることがわかる．[7]

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s))' &= \mathscr{F}'(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)+\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}'(s)\\
&= (\mathscr{F}(s)\Omega(s))\,{}^t\mathscr{F}(s)+\mathscr{F}(s)\,{}^t(\mathscr{F}(s)\Omega(s))\\
&= \mathscr{F}(s)\Omega(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)+\mathscr{F}(s)\,{}^t\Omega(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)
\end{aligned}
$$

いま，${}^t\Omega(s)=-\Omega(s)$ である (前頁 ② 参照) ので，$(\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s))'=O$ となる．つまり，$\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)$ は定数行列である．

いま，初期値が $\mathscr{F}(a)=\mathbf{E}_3$ なので，$\mathscr{F}(a)\,{}^t\mathscr{F}(a)=\mathbf{E}_3$．$\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)$ は s によらないので，$\mathbf{E}_3=\mathscr{F}(a)\,{}^t\mathscr{F}(a)=\mathscr{F}(s)\,{}^t\mathscr{F}(s)$．

よって，$\mathscr{F}(s)$ が直交行列であることを示せたので，$\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)$ は長さ 1 でそれぞれ直交している．

<u>Step2.</u> $\gamma(s)$ を作り出す．

$\gamma(s):=\displaystyle\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{e}(u)\,du$ とすると，$\gamma'(s)=\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{e}(u)\,du=\boldsymbol{e}(s)$ となる．

フルネ - セレの公式を満たすように $\boldsymbol{e}(s),\,\boldsymbol{n}(s),\,\boldsymbol{b}(s)$ を作ったので，$\kappa(s),\,\tau(s)$ はそれぞれ $\gamma(s)$ の曲率と捩率である．

<u>Step3.</u> 一意性を示す．

$\overline{\gamma}(s)$ を $\gamma(s)$ と同じ曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$ をもつ曲線とする．これらを回転・平行移動させて，

$$
\overline{\gamma}(a)=\gamma(a)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{e}}(a)=\boldsymbol{e}(a)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{n}}(a)=\boldsymbol{n}(a)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{b}}(a)=\boldsymbol{b}(a)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}
$$

とできる．ただし，$\overline{\boldsymbol{e}}(s),\,\overline{\boldsymbol{n}}(s),\,\overline{\boldsymbol{b}}(s)$ はそれぞれ $\overline{\gamma}(s)$ の単位接ベクトル，主法線ベクトル，従法線ベクトルである．

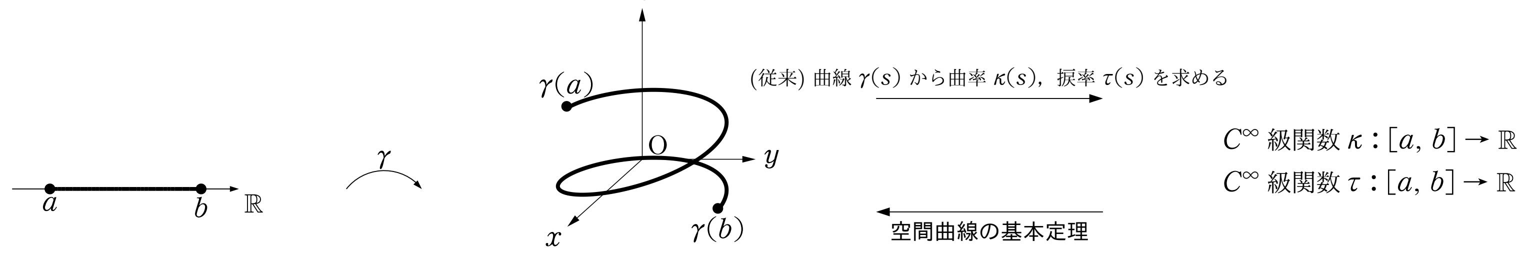
$\overline{\mathscr{F}}(s)=\Big(\overline{\boldsymbol{e}}(s),\,\overline{\boldsymbol{n}}(s),\,\overline{\boldsymbol{b}}(s)\Big)$ とおくと，Step1. と同様に線型微分方程式となり，解の一意性より，$\overline{\mathscr{F}}(s)=\mathscr{F}(s)\ ({}^\forall s)$ となる．とくに，

$$
\overline{\gamma}(s)=\int_{s_0}^{s}\overline{\boldsymbol{e}}(u)\,du=\int_{s_0}^{s}\boldsymbol{e}(u)\,du=\gamma(s)
$$

となり，曲線は一致する．■

空間曲線の形は曲率と捩率で完全に決まる！

空間曲線の基本定理のイメージ：



注意

空間曲線の基本定理は，<u>弧長パラメータ表示でしか意味を持たない！</u>ということに注意！

[7] 詳しくは線型代数学の知識であるが念のため，正規直交基底とは，互いに直交する長さ 1 のベクトルを意味する．

2.4 一般パラメータに対する曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$

補題

弧長パラメータ表示された空間曲線 $\gamma(s)$ とその曲率 $\kappa(s)$，捩率 $\tau(s)$ に対して，$\tau(s)\kappa(s)^2 = \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s),\, \gamma'''(s)\Big)$ が成り立つ．

証明：

定義より，$\gamma'(s) = \boldsymbol{e}(s)$, $\gamma''(s) = \boldsymbol{e}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ である．

フルネ - セレの公式より，$\gamma'''(s) = \boldsymbol{e}''(s) = \kappa'(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)\boldsymbol{n}'(s) = \kappa'(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s))$ である．

$$\begin{aligned}
\det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s),\, \gamma'''(s)\Big) &= \det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\, \kappa'(s)\boldsymbol{n}(s) + \kappa(s)(-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s))\Big)\\
&= \underbrace{\det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\, \kappa'(s)\boldsymbol{n}(s)\Big)}_{=0} + \det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\, \kappa(s)(-\kappa(s)\boldsymbol{e}(s) + \tau(s)\boldsymbol{b}(s))\Big)\\
&= \underbrace{\det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\, -\kappa(s)^2\boldsymbol{e}(s)\Big)}_{=0} + \det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \kappa(s)\boldsymbol{n}(s),\, \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{b}(s)\Big)\\
&= \kappa(s)^2\tau(s)\det\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \boldsymbol{n}(s),\, \boldsymbol{b}(s)\Big)\\
&= \kappa(s)^2\tau(s).
\end{aligned}$$

** $\Big(\boldsymbol{e}(s),\, \boldsymbol{n}(s),\, \boldsymbol{b}(s)\Big)$ は直交行列なので行列式の値は ± 1 である．また，$\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の作り方より，右手系になるので 1. ■

定理

一般のパラメータ表示された空間曲線 $\gamma(t)$ に対して，その曲率 $\kappa(t)$ と捩率 $\tau(t)$ は次で計算することができる：

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det\Big(\dot\gamma(t),\, \ddot\gamma(t),\, \dddot\gamma(t)\Big)}{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|^2}.$$

証明：

$\gamma(t) := \gamma(t(s)) = \gamma(s)$ とおく．$s = s(t) = \int_a^t \|\dot\gamma(u)\|\,du$ より，$\dfrac{ds}{dt} = \|\dot\gamma(t)\|$ であり，逆関数定理より $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\|\dot\gamma(t)\|}$.

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} \qquad ①$$

$$\gamma''(s) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\right\}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\ddot\gamma(t)\|\dot\gamma(t)\| - \dot\gamma(t)x_*}{\|\dot\gamma(t)\|^2}\cdot\frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|} = \frac{\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^2} - \frac{\dot\gamma(t)x_*}{\|\dot\gamma(t)\|^3} \qquad ②$$

いま，$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{e}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$ であり，$\boldsymbol{e}'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)$ なので，外積の性質より，(簡略化のため (t) は省略する.)

$$\kappa(s) = \|\gamma'(s)\times\gamma''(s)\| = \left\|\frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}\times\left(\frac{\ddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^2} - \frac{\dot\gamma x_*}{\|\dot\gamma\|^3}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}\times\frac{\ddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^2}\right) - \left(\frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}\times\dot\gamma x_*\right)\right\| = \frac{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3} = \kappa(t).$$

$$\gamma'''(s) = \frac{d}{dt}\Big\{②\Big\}\cdot\frac{dt}{ds} = \left\{\frac{\dddot\gamma\|\dot\gamma\|^2 - \ddot\gamma\left(\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2\right)}{\|\dot\gamma\|^4} - (\ddot\gamma x_* + \dot\gamma\dot x_*)\right\}\cdot\frac{1}{\|\dot\gamma\|} = \frac{\dddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^3} - \ddot\gamma y_* - \dot\gamma z_* \qquad ③$$

となる．(**x_*, y_*, z_* は何らかの数．パラメータ表示の成分ではない.) ここで補題より，

$$\begin{aligned}
\tau(s)\kappa(s)^2 &= \det\Big(\gamma'(s),\, \gamma''(s),\, \gamma'''(s)\Big)\\
&= \det\left(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|},\, \frac{\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^2} - \frac{\dot\gamma(t)x_*}{\|\dot\gamma(t)\|^3},\, \frac{\dddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^3} - \ddot\gamma y_* - \dot\gamma z_*\right)\\
&= \det\left(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|},\, \frac{\ddot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|^2},\, \frac{\dddot\gamma}{\|\dot\gamma\|^3}\right) + 0 + 0\\
&= \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|^6}\det\Big(\dot\gamma(t),\, \ddot\gamma(t),\, \dddot\gamma(t)\Big)
\end{aligned}$$

となる．よって，$\kappa(s) = \kappa(s(t)) =: \kappa(t) = \dfrac{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|}{\|\dot\gamma(t)\|^3}$ を代入して整理すると，

$$\tau(t) = \frac{\det\Big(\dot\gamma(t),\, \ddot\gamma(t),\, \dddot\gamma(t)\Big)}{\|\dot\gamma(t)\times\ddot\gamma(t)\|^2}.$$

■

例２
空間曲線 $\gamma(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, bt)$（$a > 0,\, b \geqslant 0$：定数）の曲率 $\kappa(s)$，捩率 $\tau(s)$ を求める．

$\dot{\gamma}(t) = (-a\sin t,\, a\cos t,\, b)$, $\ddot{\gamma}(t) = (-a\cos t,\, -a\sin t,\, 0)$, $\dddot{\gamma}(t) = (a\sin t,\, -a\cos t,\, 0)$, $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{bmatrix}$, $\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| = a\sqrt{a^2+b^2}$, $\det\Bigl(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t),\, \dddot{\gamma}(t)\Bigr) = a^2 b$.

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(s) = \frac{\det\Bigl(\dot{\gamma}(t),\, \ddot{\gamma}(t),\, \dddot{\gamma}(t)\Bigr)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

補足：
空間曲線では $\kappa(s) \fallingdotseq 0$ である必要がある．
$\kappa(s) = 0$ のとき，定義より，$\boldsymbol{e}'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) = 0 \cdot \boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{0}$ である．このとき，捩率 $\tau(s)$ はどうなるか？
捩率は $\tau(s) = -\boldsymbol{b}(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$ で定義される．とくに，$\boldsymbol{n}(s) = \dfrac{\boldsymbol{e}'(s)}{\|\boldsymbol{e}'(s)\|}$ であるが，$\kappa(s) = 0$ なので，$\|\boldsymbol{e}'(s)\| = 0$ となり，$\boldsymbol{n}(s)$ が定義できない！
つまり，$\kappa(s) = 0$ だと捩率が定義できない！ からである．

第 II 部
曲面論

3　曲面とは

曲面の取り扱い

$\mathbb{R}^3$ の曲面の表し方は主に 3 つ.

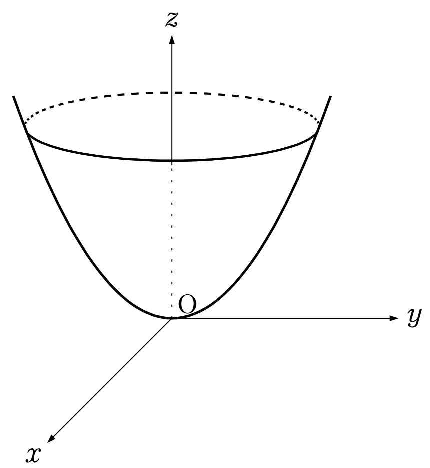
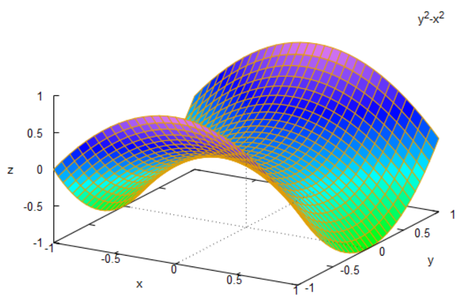
❶ $z = f(x,\, y)$ のグラフ　　❷ $F(x,\, y,\, z) = 0$ で表される曲面 (**陰関数表示**)

❸ パラメータ $u,\, v$ での表示 (**パラメータ表示**) 変数が 2 つあることに注意.

$$\begin{cases} x = x(u,\, v), \\ y = y(u,\, v), \\ z = z(u,\, v) \end{cases} \quad \text{または,} \quad \boldsymbol{p}(u,\, v) = (x(u,\, v),\, y(u,\, v),\, z(u,\, v))$$

と表す.

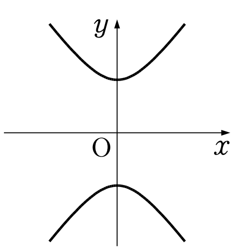
3.1　代表的な曲面

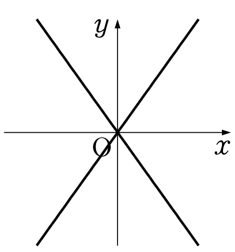
曲面の名称	陰関数表示	パラメータ表示	グラフの概形
$\boxed{1}$ 楕円放物面 $\boxed{2}$ 回転放物面 ($a = b$ のとき)	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$ $(a,\, b > 0)$	$\boxed{1}$ $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{cases}$ $\boxed{2}$ $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = \frac{u^2}{a^2} \end{cases}$	
$\boxed{3}$ 双曲放物面	$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$ $(a,\, b > 0)$	$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{cases}$	**[8] 

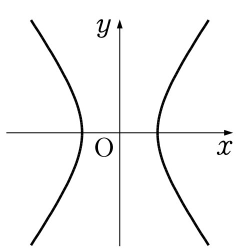
$\boxed{3}$ の補足：

- $x = 0,\, y = 0$ での切り口は，それぞれ，頂点 $(0,\, 0)$ の上に凸，下に凸の 2 次関数 (放物線) になる.
- $z = k$ (k：定数) (水平) で切ると，双曲線になる.
  k の符号による場合分け：

（ i ）$k > 0$　　（ ii ）$k = 0$　　（ iii ）$k < 0$

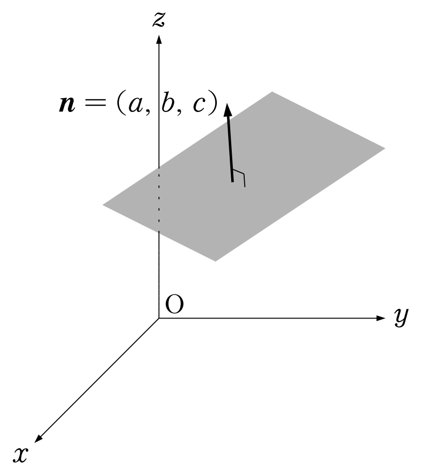
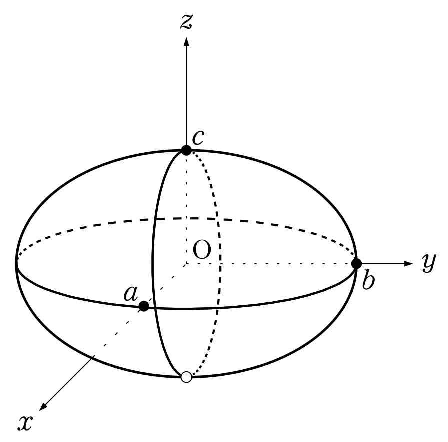
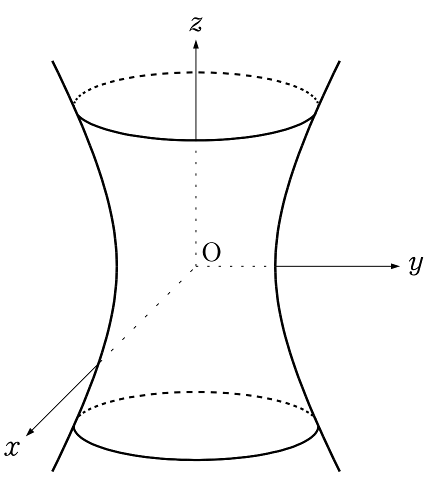
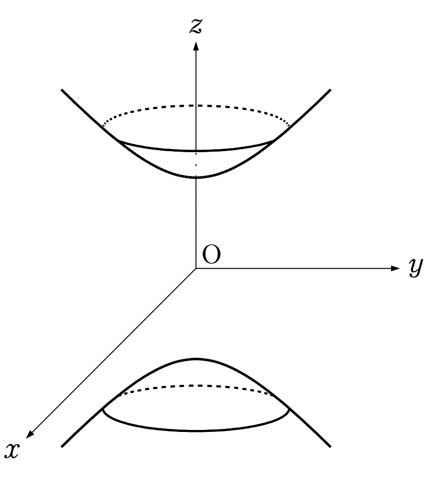






[8] Maxima によるグラフ描写.

続き：

曲面の名称	陰関数表示	パラメータ表示	グラフの概形
$\boxed{4}$ 平面 (1)	$ax+by+cz-d=0$ $(a,\,b,\,c \neq 0)$	$\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=\frac{1}{c}(d-au-bv) \end{cases}$	
$\boxed{5}$ 楕円面 ($a=b=c$ のとき球面)	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ $(a,\,b,\,c>0)$	$\begin{cases} x=a\cos u\cos v, \\ y=b\cos u\sin v, \\ z=c\sin u \end{cases}$ $D=\left\{(u,\,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle\|\; \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2} \\ 0\leqq v<2\pi \end{array}\right\}$	
$\boxed{6}$ 一葉双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ $(a,\,b,\,c>0)$	$\begin{cases} x=a\cosh u\cos v, \\ y=b\cosh u\sin v, \\ z=c\sinh u \end{cases}$ $D=\left\{(u,\,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle\|\; \begin{array}{l} u\in\mathbb{R} \\ 0\leqq v<2\pi \end{array}\right\}$	
$\boxed{7}$ 二葉双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}+1=0$ $(a,\,b,\,c>0)$	$\begin{cases} x=a\sinh u\cos v, \\ y=b\sinh u\sin v, \\ z=\pm c\cosh u \end{cases}$ $D=\left\{(u,\,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle\|\; \begin{array}{l} u>0 \\ 0\leqq v<2\pi \end{array}\right\}$	

注意！

D は定義域のことである．

$\boxed{4}$ 平面 (1) について，$a,\,b,\,c \neq 0$ としたが，“$=$” のときは注意．曲面にならないことがある．$\boldsymbol{n}$ は平面に対する**法線ベクトル**である．

$\boxed{5}$ 楕円面について，$-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ としたのは，“$=$” を含むと **“良い条件”** を満たさないから．

$\boxed{6}$ 一葉双曲面について，$x,\,y$ のパラメータ表示は “$+$” だけでよい．$\cos v,\,\sin v$ が符号を変えてくれるから．

続き：

$\boxed{8}$ **回転面**

xz 平面上の曲線

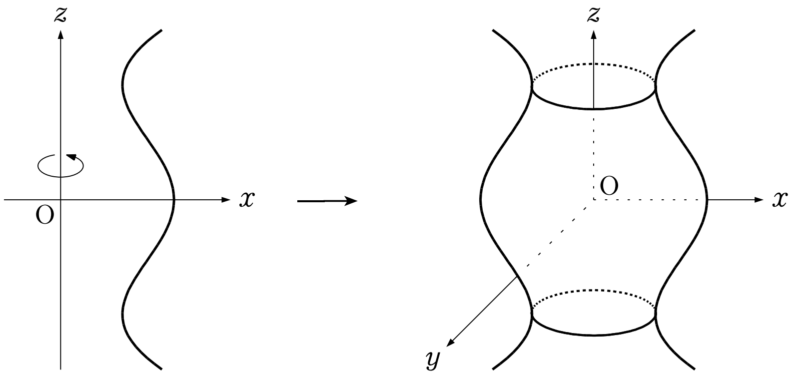
$$\begin{cases} x = x(u), & (> 0) \\ z = z(u) \end{cases}$$

を考える．これを z 軸を中心に回転した曲面のパラメータ表示は,

$$\begin{cases} x = x(u)\cos v, \\ y = x(u)\sin v, \\ z = z(u) \end{cases}$$

である.

イメージ：



$\boxed{9}$ **平面** (2)

- 点 $\mathrm{C}(x_0,\, y_0,\, z_0)$ を通る. (位置ベクトル)
- $\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ で張られる平面. ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立.)

平面上の点 P は,

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

と表せるので，点 P の位置ベクトルは

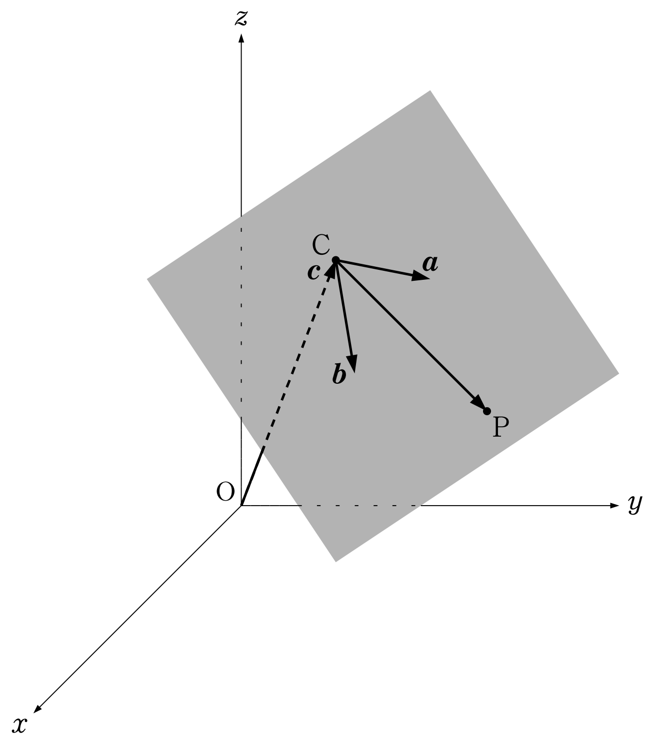
$$\boldsymbol{p}(u,\, v) := \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \boldsymbol{c} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

と表せる．この $\boldsymbol{p}(u,\, v)$ は**パラメータ表示**である．よって，このような平面のパラメータ表示は,

$$\boldsymbol{p}(u,\, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1,\, y_0 + ua_2 + vb_2,\, z_0 + ua_3 + vb_3)$$

と表せる.

イメージ：



3.2　曲面のパラメータ表示

定義？【曲面のパラメータ表示】

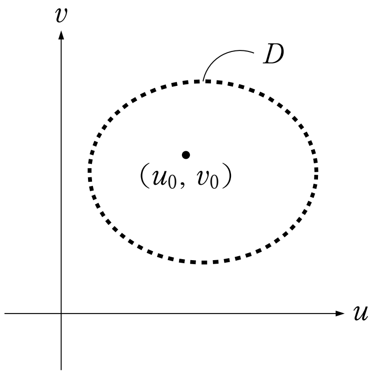
領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を連結な開集合とする．写像 $\boldsymbol{p}: D \to \mathbb{R}^3$ を考える．

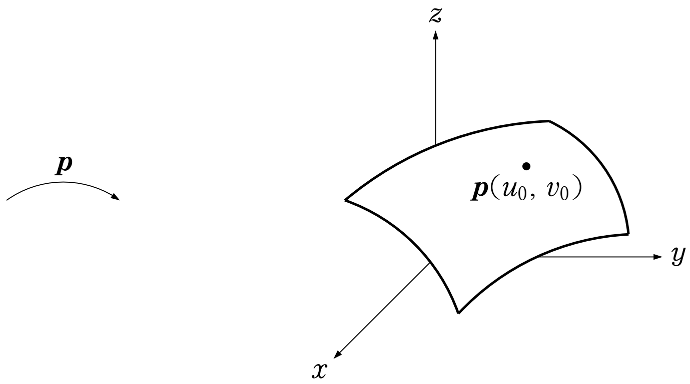
$$\text{曲面のパラメータ表示} \overset{\text{def}}{\iff} \text{曲面が } \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)) \text{ と表せること．}$$

ただし，$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ は C^∞ 級関数である．D のことを**定義域**という．

➡**注** $\boldsymbol{p}(u,v)$ は必ずしも曲面になるとは限らない．(例：$\boldsymbol{p}(u,v) = (0,0,0)$, $\boldsymbol{p}(u,v) = (u+v,\, 2u+2v,\, 0)$ などは曲線である．)

イメージ：





3.3　正則曲面

定義【正則曲面】

曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2)$ が**正則曲面** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}(u,v)$ が C^∞ 級関数で，D 上の任意の点 (u,v) に対して，u での偏微分 $\boldsymbol{p}_u(u,v)$ と v での偏微分 $\boldsymbol{p}_v(u,v)$ が **1 次独立**.

定義【接平面】

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に対して，点 $\boldsymbol{p}(u_0,v_0)$ における**接平面** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 点 $\boldsymbol{p}(u_0,v_0)$ を通り，$\boldsymbol{p}_u(u_0,v_0)$, $\boldsymbol{p}_v(u_0,v_0)$ で張られる平面.

定義【正則点・特異点】

点 $\boldsymbol{p}(u_0,v_0)$ が**正則点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}_u(u_0,v_0)$ と $\boldsymbol{p}_v(u_0,v_0)$ が 1 次独立.

点 $\boldsymbol{p}(u_0,v_0)$ が**特異点** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\boldsymbol{p}_u(u_0,v_0)$ と $\boldsymbol{p}_v(u_0,v_0)$ が 1 次従属.

任意の点が正則点なら正則曲面であるし，正則曲面ならば任意の点が正則点である.

今後は，特に断りがない限り，曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ は正則曲面とする.

命題 1

曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の点 $\boldsymbol{p}(u_0,v_0)$ における接平面 $\boldsymbol{q}(s,t)$ は次の式で与えられる：

$$\boldsymbol{q}(s,t) = \boldsymbol{p}(u_0,v_0) + s\boldsymbol{p}_u(u_0,v_0) + t\boldsymbol{p}_v(u_0,v_0).$$

証明：

接平面の定義と *3.1* の $\boxed{9}$ 平面 (2) より. ■

命題 2

曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v) \in D)$ に対して，次は同値である.

（ i ）$\boldsymbol{p}(u,v)$ が正則曲面.　　（ii）任意の $(u,v) \in D$ に対して，$\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v) \neq \boldsymbol{0}$.

（iii）任意の $(u,v) \in D$ に対して，ヤコビ行列 $J\boldsymbol{p}(u,v) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_u(u,v), & \boldsymbol{p}_v(u,v) \end{pmatrix}$ の階数が 2 $(\mathrm{rank}(J\boldsymbol{p}(u,v)) = 2)$.

考え方

「（ii）$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}_u$ と $\boldsymbol{p}_v$ が 1 次独立」であることを示せばよい．((ｉ）は正則曲面の定義から，（iii）は線型代数学の知識より.) 証明略.

3.3.1　$\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ の意味

定義【u 曲線・v 曲線】

$\mathbb{R}^3$ 内の点 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ に対して,

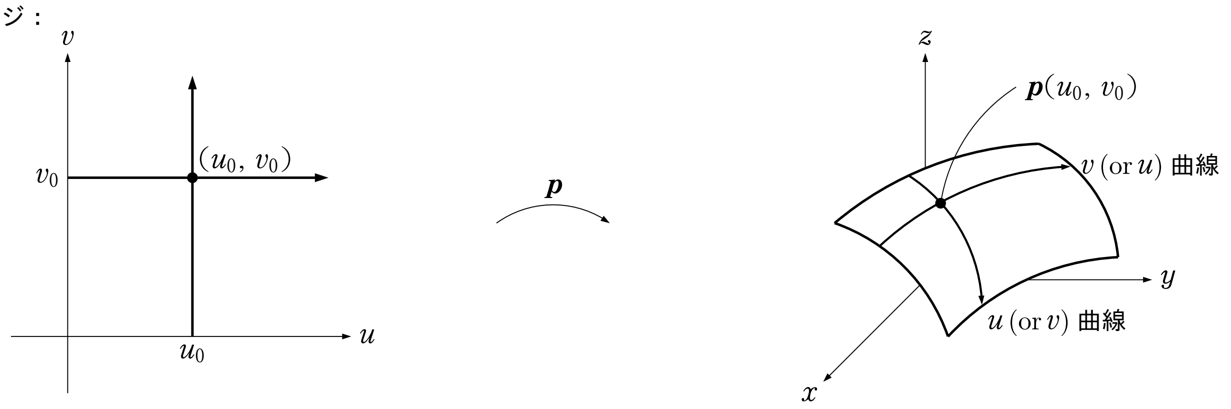
$v = v_0$ を固定し，u だけを動かして得られる曲線 $\boldsymbol{p}(u,\,v_0)$ を u 曲線という.

$u = u_0$ を固定し，v だけを動かして得られる曲線 $\boldsymbol{p}(u_0,\,v)$ を v 曲線という.

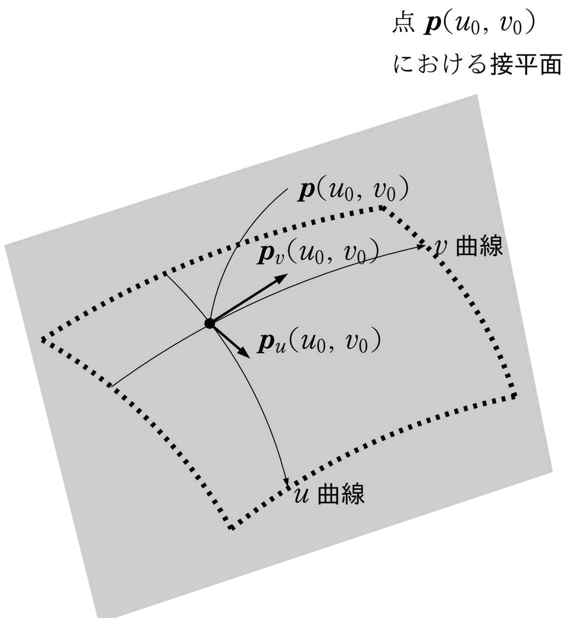
$\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ の意味

- $\boldsymbol{p}_u(u_0,\,v_0)$ は u 曲線の点 $\boldsymbol{p}(u_0,\,v_0)$ における**接ベクトル**.
- $\boldsymbol{p}_v(u_0,\,v_0)$ は v 曲線の点 $\boldsymbol{p}(u_0,\,v_0)$ における**接ベクトル**.

u 曲線・v 曲線のイメージ：



$\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ と接平面のイメージ：



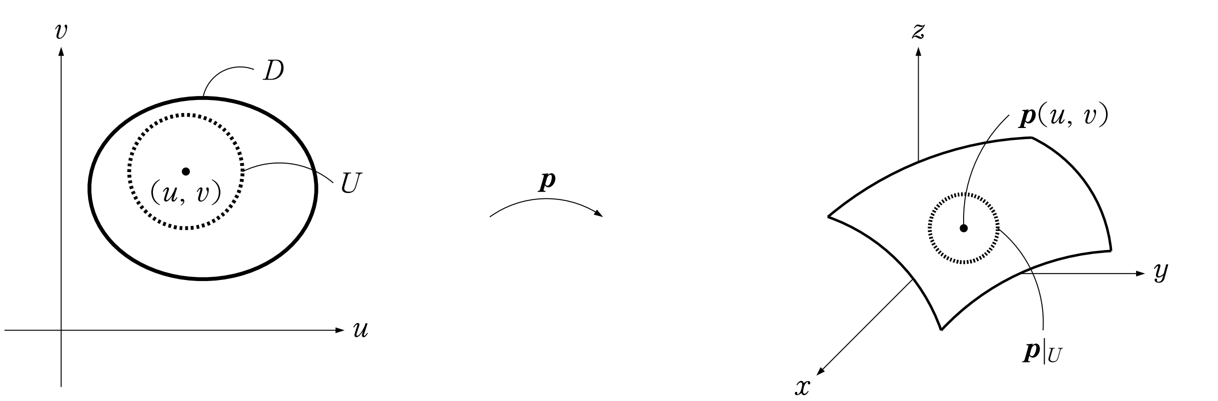
命題３

$\boldsymbol{p}(u,\,v)$ を正則曲面とする．このとき,

$\boldsymbol{p}: D \to \mathbb{R}^3$ は**局所的に単射** ($\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $(u,\,v) \in D$ に対して，$(u,\,v)$ の近傍 U が存在し，$\boldsymbol{p}$ の U への制限 $\boldsymbol{p}|_U: U \to \boldsymbol{p}(U)$ が単射.) である.

➡**注** D 全体ではどうかわからない．証明には逆関数定理と命題２の（iii）を使う．証明は難しいので略.

イメージ：



例１　楕円面 $\boldsymbol{p}(u,\,v) = (a\cos u\cos v,\,b\cos u\sin v,\,c\sin u)$ $(a,\,b,\,c > 0)$, $D_{\boldsymbol{p}} = \left\{(u,\,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ は単射ではない ($\because$ $\boldsymbol{p}(0,\,0) = \boldsymbol{p}(0,\,2\pi)$) が，$D_{\boldsymbol{p}} \supset U := \left\{(u,\,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2},\,-\pi < v < \pi\right\}$ に制限すると単射である.

参考 $\boldsymbol{q}(s,\,t) = (a\cos s\cos t,\,b\sin s,\,c\cos s\sin t)$, $D_{\boldsymbol{q}} = \{(s,\,t) | s < |\frac{\pi}{2}|\}$ も楕円面のパラメータ表示である．楕円面全体を考えるときには $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の２つを考える. (特異点の関係で.)

このように曲面は一般に複数のパラメータ表示が必要である. (詳しくは３年次の幾何学で扱う.)

3.4　座標変換 (パラメータ変換)

定義【パラメータ変換】

一般に，パラメータ表示された曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)=(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v))$ $((u,\,v)\in D)$ に対して，

C^∞ 級写像 $\varphi : \begin{cases} u=u(s,\,t), \\ v=v(s,\,t) \end{cases}$ を用いて，

$$\boldsymbol{p}(u,\,v)=\boldsymbol{p}(\varphi)=\boldsymbol{p}(u(s,\,t),\,v(s,\,t))=\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,\,t)$$

と表せるとき，$\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,\,t)$ を $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ の**パラメータ変換**という．$((u,\,v)\in D,\,(s,\,t)\in\widetilde{D}.)$

このとき，次の定理が知られている：

逆関数定理

$D : uv$ 平面内の領域，$\widetilde{D} : st$ 平面内の領域とし，C^∞ 級写像 $\varphi : \widetilde{D}\to D$ を $\varphi : \begin{cases} u=u(s,\,t), \\ v=v(s,\,t) \end{cases}$ で定義する．このとき，次が成り立つ．

(1) φ は全単射．

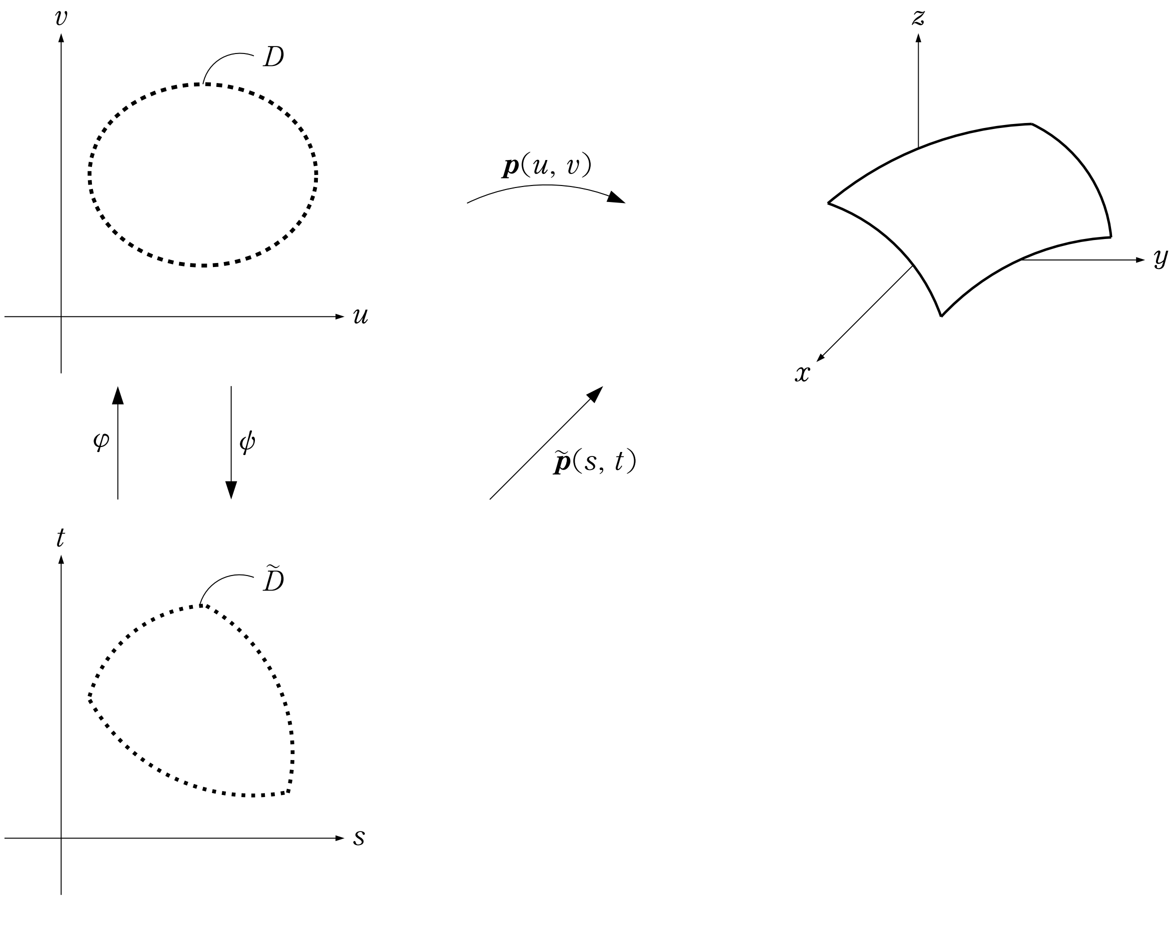
(2) 任意の $(s,\,t)\in\widetilde{D}$ に対して，φ のヤコビ行列式

$$\det(J\varphi)=\det\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s}(s,\,t) & \frac{\partial u}{\partial t}(s,\,t) \\ \frac{\partial v}{\partial s}(s,\,t) & \frac{\partial v}{\partial t}(s,\,t) \end{bmatrix} \fallingdotseq 0$$

を満たすとき，逆写像 $\phi : D\to\widetilde{D};\phi : \begin{cases} s=s(u,\,v), \\ t=t(u,\,v) \end{cases}$ が存在して，ϕ も C^∞ 級写像である．ϕ を φ^{-1} ともかく．

このとき，$\widetilde{D}\overset{\varphi}{\underset{\phi}{\rightleftarrows}}D$ を**座標変換**という．

イメージ：



定理 1

$\boldsymbol{p}(u,\,v),\,\boldsymbol{q}(s,\,t)$ を正則曲面とし，次を満たすと仮定する：

① $\boldsymbol{p} : D\to\mathbb{R}^3,\,\boldsymbol{q} : \widetilde{D}\to\mathbb{R}^3$が単射．　　② $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の像が等しい．(同じ曲面のパラメータ表示.)

このとき，座標変換 $\widetilde{D}\overset{\varphi}{\underset{\phi}{\rightleftarrows}}D$ が存在し，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}\circ\varphi,\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}\circ\phi$ が成り立つ．

証明は上の逆関数定理と命題 2 の（iii）を使う．証明略．

このように，曲面のパラメータ表示は無数にあるが，それによって変わらない“もの”，すなわち曲面の性質を考えたい．

3.5　曲面の面積

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に対して，$\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)$ は各 (u,v) での接平面の法線ベクトルである．

定義【単位法線ベクトル】

$$\boldsymbol{\nu}(u,v) := \frac{\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)}{\|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|}$$ を**単位法線ベクトル**という．(ν はニューと読む.)

曲面の面積 $\mathcal{S}(\boldsymbol{p})$ を求めたい．外積の性質に $\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\| = ($$\boldsymbol{p}_u$と $\boldsymbol{p}_v$の張る平行四辺形の面積$)$ というのがあるので，これを利用して求めたい．

まず，uv 平面において，u 方向，v 方向それぞれへの微小な変化量を Δu, Δv とし，uv 平面上の微小な長方形領域 $[u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta v]$ (この "$\times$" は直積) に対応する曲面上の像の面積を近似的に求める．2 変数関数のテイラーの定理より，近似式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{p}(u,v) &\fallingdotseq \boldsymbol{p}_u(u,v)\Delta u, \\
\boldsymbol{p}(u, v+\Delta v) - \boldsymbol{p}(u,v) &\fallingdotseq \boldsymbol{p}_v(u,v)\Delta v, \\
\boldsymbol{p}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{p}(u,v) &\fallingdotseq \boldsymbol{p}_u(u,v)\Delta u + \boldsymbol{p}_v(u,v)\Delta v
\end{aligned}$$

が成り立つので，領域 $[u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta v]$ に対応する曲面上の領域は,

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{p}(u,v), & \boldsymbol{p}(u,v) + \boldsymbol{p}_u(u,v)\Delta u, \\
\boldsymbol{p}(u,v) + \boldsymbol{p}_v(u,v)\Delta v, & \boldsymbol{p}(u,v) + \boldsymbol{p}_u(u,v)\Delta u + \boldsymbol{p}_v(u,v)\Delta v
\end{array}$$

を頂点とする平行四辺形で近似される．外積の性質より，この平行四辺形の面積は,

$$\|\boldsymbol{p}_u(u,v)\Delta u \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\Delta v\| = \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|\,\Delta u \Delta v$$

である．よって，曲面の面積は微小な平行四辺形をすべて足し合わせて Δu, $\Delta v \to 0$ にしたものなので,

$$\sum \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|\,\Delta u \Delta v \longrightarrow \iint_D \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|\,dudv \quad (\Delta u, \Delta v \to 0)$$

となる．よって次の定理を得る．

定理２

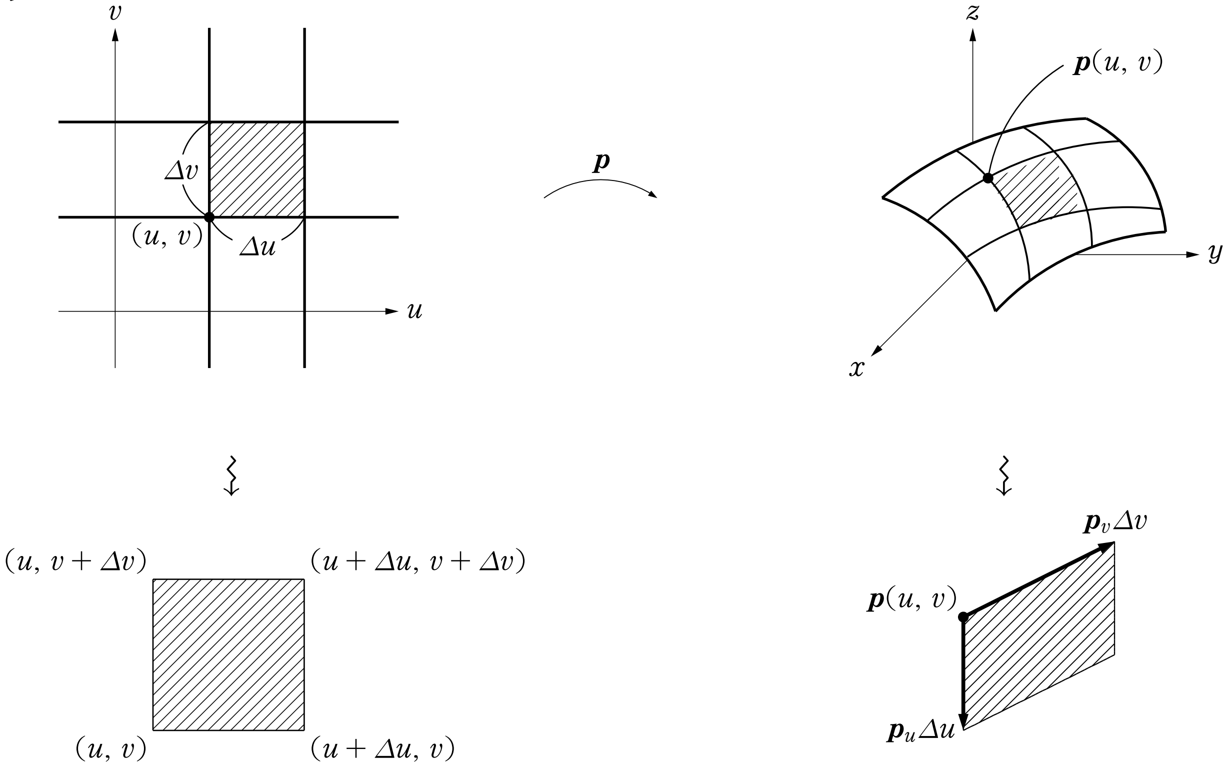
正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v) \in D)$, $\boldsymbol{p} : D \to \mathbb{R}^3$; 単射のとき，曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の面積 $\mathcal{S}(\boldsymbol{p})$ は

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{p}) = \iint_D \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|\,dudv$$

で与えられる．$dA = \|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)\|\,dudv$ を**面積要素**という．**➡注** $\boldsymbol{p}$ が単射でないとき，面積は重複して計算することになってしまう．

直観的にわかるかもしれないが曲面の面積はパラメータ変換によらない. (∵ 重積分の変数変換より.)

曲面の面積のイメージ：



3.5.1　$z = f(x,\,y)$ で表される曲面の面積

$z = f(x,\,y)$ $((x,\,y) \in D)$ で表される曲面のパラメータ表示は，$\boldsymbol{p}(u,\,v) = (u,\,v,\,f(u,\,v))$ $((u,\,v) \in D)$ となる．

$\boldsymbol{p}_u(u,\,v) = (1,\,0,\,f_u(u,\,v))$,　$\boldsymbol{p}_v(u,\,v) = (0,\,1,\,f_v(u,\,v))$.

$\boldsymbol{p}_u(u,\,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,\,v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u,\,v) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u,\,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_u(u,\,v) \\ -f_v(u,\,v) \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\| = \sqrt{{f_u}^2 + {f_v}^2 + 1}$. よって,

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{p}) = \iint_D \|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|\, dudv = \iint_D \sqrt{{f_u}^2 + {f_v}^2 + 1}\, dudv$$

となる．

したがって，u を x, v を y に変えても変わらないので $z = f(x,\,y)$ の曲面の面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\, dxdy$$

となる．

演習 半径 $a > 0$ の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の面積を求めよ．

ヒント：
球面のパラメータ表示は $\boldsymbol{p}(u,\,v) = (a\cos u\cos v,\, a\cos u\sin v,\, a\sin u)$, $D = \left\{(u,\,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\, 0 \leqslant v < 2\pi\right\}$ である．
**また，この範囲では $|\cos u| = \cos u$ である．

解 $4\pi a^2$

4　第一基本形式

4.1　関数の外微分

C^∞ 級関数 $f(x,\,y)$ を考える．このとき，点 $(x,\,y)$ が $(x+\Delta x,\,y+\Delta y)$ に動いたとき，f の変化 Δf は，

$$\Delta f = f(x+\Delta x,\,y+\Delta y) - f(x,\,y)$$

となる．$\Delta x,\,\Delta y$ を十分小さくとると，２変数関数のテイラーの定理より，

$$\Delta f \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\,\Delta y$$

となる．この式を形式的に，

$$df(x,\,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)\,dy$$

と表す．これを f の**外微分** (**全微分**) という．今後，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x$ などと略記する．

定理１

関数 $f(x,\,y)$ の外微分 df はパラメータの取り方によらない (座標変換で不変).

証明：

$\varphi : \begin{cases} x = x(\xi,\,\eta), \\ y = y(\xi,\,\eta) \end{cases}$; $(\xi,\,\eta) \mapsto (x,\,y)$ を座標変換とする．$f\circ\varphi = f(x(\xi,\,\eta),\,y(\xi,\,\eta)) =: \tilde{f}(\xi,\,\eta)$ とおく．$df = d\tilde{f}$ を示せばよい．

まず，φ の外微分は，$\begin{cases} dx = x_\xi\,d\xi + x_\eta\,d\eta, \\ dy = y_\xi\,d\xi + y_\eta\,d\eta \end{cases}$ $\cdots$① である．f の外微分は $df = f_x\,dx + f_y\,dy$ $\cdots$② である．

ここで，$\tilde{f}$ の外微分は $d\tilde{f} = \tilde{f}_\xi\,d\xi + \tilde{f}_\eta\,d\eta$ である．$\tilde{f}$ は合成関数なので，$\tilde{f}_\xi = f_x\,x_\xi + f_y\,y_\xi$, $\tilde{f}_\eta = f_x\,x_\eta + f_y\,y_\eta$ となる．よって，

$$\begin{aligned} d\tilde{f} &= \tilde{f}_\xi\,d\xi + \tilde{f}_\eta\,d\eta \\ &= (f_x\,x_\xi + f_y\,y_\xi)d\xi + (f_x\,x_\eta + f_y\,y_\eta)d\eta \\ &= f_x(x_\xi\,d\xi + x_\eta\,d\eta) + f_y(y_\xi\,d\xi + y_\eta\,d\eta) \\ &= f_x\,dx + f_y\,dy && \because ① \\ &= df && \because ② \end{aligned}$$

■

外微分の簡単な性質

$f(x,\,y),\,g(x,\,y),\,\varphi(t)$: C^∞ 級関数とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $d(f+g) = df + dg$.　(2) $d(fg) = df\cdot g + f\cdot dg$. ("$\cdot$" は乗法.)　(3) $d(\varphi(f)) = \dot{\varphi}(f)\,df$. ($\dot{\varphi}$ は微分.)

証明：

(1) $d(f+g) = (f+g)_x\,dx + (f+g)_y\,dy = (f_x+g_x)\,dx + (f_y+g_y)\,dy = (f_x\,dx + f_y\,dy) + (g_x\,dx + g_y\,dy) = df + dg$.

(2) $d(fg) = (fg)_x\,dx + (fg)_y\,dy = (f_x g + f g_x)\,dx + (f_y g + f g_y)dy = (f_x\,dx + f_y\,dy)g + f(g_x\,dx + g_y\,dy) = df\cdot g + f\cdot dg$.

(3) $d(\varphi(f)) = (\varphi(f))_x\,dx + (\varphi(f))_y\,dy = (\dot{\varphi}(f)\,f_x)dx + (\dot{\varphi}(f)\,f_y)dy = \dot{\varphi}(f)(f_x\,dx + f_y\,dy) = \dot{\varphi}(f)\,df$. ■

例２

(1) $f(x,\,y) = x^2 + y^2$ の外微分は $df = 2x\,dx + 2y\,dy$.　(2) $g(x,\,y) = \sin x + \cos y$ の外微分は $dg = \cos x\,dx - \sin y\,dy$.

演習 次の関数の外微分を求めよ．

(1) $f(x,\,y) = x^2 + xy^2 + y$　(2) $g(x,\,y) = \sqrt{x^2+y^2}$　(3) $h(x,\,y) = \sin(xy)$

解 (1) $df = (2x + y^2)\,dx + (2xy+1)\,dy$　(2) $dg = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$　(3) $dh = y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy$

4.2　第一基本形式

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ の 2 点 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ と $\boldsymbol{p}(u+\Delta u,\,v+\Delta v)$ の距離 Δs は，$\Delta u,\,\Delta v$ が十分小さいとき，

$$\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= \|\boldsymbol{p}(u+\Delta u,\,v+\Delta v)-\boldsymbol{p}(u,\,v)\|^2 \\
&\fallingdotseq \|(\boldsymbol{p}(u,\,v)+\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\,\Delta u+\boldsymbol{p}_v(u,\,v)\,\Delta v)-\boldsymbol{p}(u,\,v)\|^2 && \because \text{テイラーの定理} \\
&= \|\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\,\Delta u+\boldsymbol{p}_v(u,\,v)\,\Delta v\|^2 \\
&= (\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\,\Delta u+\boldsymbol{p}_v(u,\,v)\,\Delta v)\cdot(\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\,\Delta u+\boldsymbol{p}_v(u,\,v)\,\Delta v) && \because \text{内積 } \|\boldsymbol{a}\|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \\
&= (\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\cdot\boldsymbol{p}_u(u,\,v))\,(\Delta u)^2+2(\boldsymbol{p}_u(u,\,v)\cdot\boldsymbol{p}_v(u,\,v))\,\Delta u\,\Delta v+(\boldsymbol{p}_v(u,\,v)\cdot\boldsymbol{p}_v(u,\,v))\,(\Delta v)^2
\end{aligned}$$

ここで $E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u,\ F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v,\ G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v$ とおき，形式的に，

$$(ds)^2=E(du)^2+2F\,dudv+G(dv)^2 \qquad ❶$$

と表す．この式のことを**第一基本形式**といい，$E,\,F,\,G$ のことを**第一基本量**という．$(ds)^2$ のことを I と書くこともある．(“アイ”ではなく“イチ”と読む.) また，❶ の式を行列を用いて，

$$(ds)^2=\begin{bmatrix} du,\ dv \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

と表せる．行列 $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ を**第一基本行列**といい，$\widehat{\mathrm{I}}$ と書く．

4.3　第一基本形式の座標不変性

曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)=(x(u,\,v),\,y(u,\,v),\,z(u,\,v))$ の外微分を

$$d\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_u\,du+\boldsymbol{p}_v\,dv$$

と定義する．このとき，

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{p}_u\,du+\boldsymbol{p}_v\,dv)\cdot(\boldsymbol{p}_u\,du+\boldsymbol{p}_v\,dv) \\
&= E(du)^2+2F\,dudv+G(dv)^2 \\
&= (ds)^2
\end{aligned}$$

となるので，$(ds)^2=d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p}$ と表せる．したがって，次の定理を得る．

定理２

第一基本形式 $(ds)^2$ は，$\boldsymbol{p}(u,\,v)$ のパラメータの取り方によらない．

定義域 D の正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ と座標変換 $\varphi:\begin{cases} u=u(s,\,t), \\ v=v(s,\,t) \end{cases}:\widetilde{D}\to D$ によって違うパラメータ表示で表される曲面を $\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,\,t)$ とする．このとき，φ の外微分

$$\begin{cases} du=u_s\,ds+u_t\,dt, \\ dv=v_s\,ds+v_t\,dt \end{cases}$$

は φ ヤコビ行列 $J:=\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix}$ を用いて

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=J\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix} \qquad ❷$$

と表せる．これの転置行列をとると，$[du,\,dv]=[ds,\,dt]\,{}^tJ$ …❸ となる．

ここで，$E,\,F,\,G$ を $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ の第一基本量，$\widetilde{E},\,\widetilde{F},\,\widetilde{G}$ を $\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,\,t)$ の第一基本量とする．(一般的には $E,\,F,\,G$ と $\widetilde{E},\,\widetilde{F},\,\widetilde{G}$ は違うものが出てくる.)

定理３

$\widehat{\widetilde{\mathrm{I}}}={}^tJ\,\widehat{\mathrm{I}}\,J$ が成り立つ．

<u>証明：</u>

定理 2 より $(ds)^2$ はパラメータの取り方によらないので，$[du,\,dv]\,\widehat{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=[ds,\,dt]\,\widehat{\widetilde{\mathrm{I}}}\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$. これに ❷,❸ を代入すると，

$[ds,\,dt]\,{}^tJ\,\widehat{\mathrm{I}}\,J\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}=[ds,\,dt]\,\widehat{\widetilde{\mathrm{I}}}\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$. 対称行列になっているので，$\widehat{\widetilde{\mathrm{I}}}={}^tJ\,\widehat{\mathrm{I}}\,J$. ■

例３
半径 r の球面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)=(r\cos u\cos v,\,r\cos u\sin v,\,r\sin u)\ -\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$ の第一基本形式を考える．

$\boldsymbol{p}_u(u,\,v)=(-r\sin u\cos v,\,-r\sin u\sin v,\,r\cos u)$，$\boldsymbol{p}_v(u,\,v)=(-r\cos u\sin v,\,r\cos u\cos v,\,0)$ なので，第一基本量は，

$E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u=r^2,\,F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v=0,\,G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v=r^2\cos^2 u$ となる．

よって，第一基本形式は $(ds)^2=r^2(du)^2+0\cdot dudv+r^2\cos^2 u(dv)^2,\ \widehat{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2 u\end{bmatrix}$.

4.4　面積と第一基本形式

$\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積は，$\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，$\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,\sin\theta$ と表せる．また，外積の性質より

$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,\sin\theta$$

となる．この両辺を２乗すると，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\sin^2\theta \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,\cos\theta)^2 \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{aligned}$$

となる．

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ $((u,\,v)\in D)$ に対して，

$$\|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v\|^2=(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u)(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v)-(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v)^2=EG-F^2$$

となる．よって，曲面の面積の公式は，

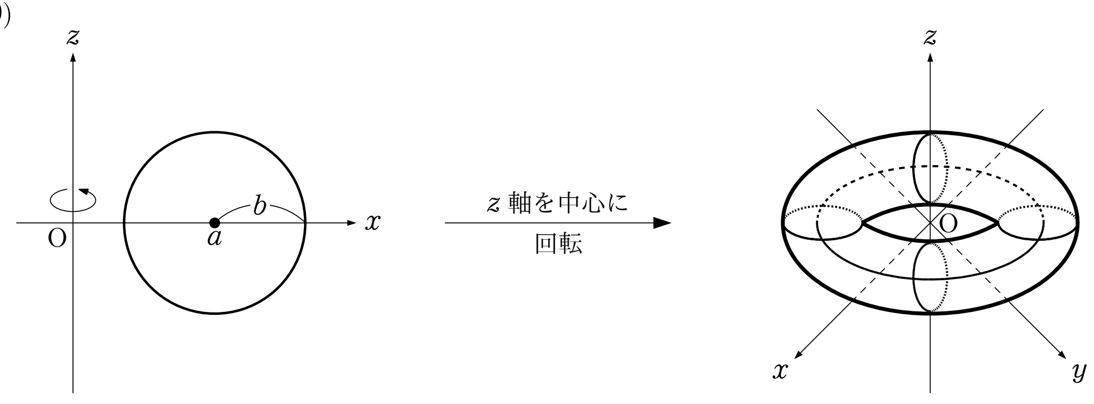
$$\mathcal{S}(\boldsymbol{p})=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

と表せる．いま，$\boldsymbol{p}(u,\,v)$ は正則曲面なので，$\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v\fallingdotseq\boldsymbol{0}$ であるから

$$0\fallingdotseq\|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v\|^2=EG-F^2=\det\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}$$

となる．すなわち，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}$ は**正則行列**である．(逆行列 $\widehat{\mathrm{I}}^{-1}$ が存在する.)

例４　トーラス $(a,\,b>0)$



トーラスのパラメータ表示は $\boldsymbol{p}(u,\,v)=((a+b\cos u)\cos v,\,(a+b\cos u)\sin v,\,b\sin u)$，$D=\left\{(u,\,v)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \begin{matrix}0\leqslant u<2\pi\\ 0\leqslant v<2\pi\end{matrix}\right\}$ である．

$\boldsymbol{p}_u(u,\,v)=(-b\sin u\cos v,\,-b\sin u\sin v,\,b\cos u)$，$\boldsymbol{p}_v(u,\,v)=(-(a+b\cos u)\sin v,\,(a+b\cos u)\cos v,\,0)$ なので，

$E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u=b^2,\,F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v=0,\,G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v=(a+b\cos u)^2$ となる．

よって，面積要素は $dA=\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\sqrt{b^2(a+b\cos u)^2}\,dudv=b(a+b\cos u)\,dudv$ となるので，トーラスの表面積は，

$$\iint_D b(a+b\cos u)\,dudv=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} b(a+b\cos u)\,dudv=\cdots=4\pi^2ab.$$

4.5　長さと角度

4.5.1　曲線の長さ

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v)\in D)$ に対して，D 内の曲線 $\gamma(t)=(u(t),v(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ と，それに対応する $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ 上の曲線 $\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)=\boldsymbol{p}(u(t),v(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ を考える．*1.4* より，D 内の曲線 $\gamma(t)$ の長さは，

$$\mathscr{L}(\gamma)=\int_a^b\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt=\int_a^b\sqrt{\dot{u}(t)^2+\dot{v}(t)^2}\,dt \tag{1}$$

である．また，合成関数の微分より，

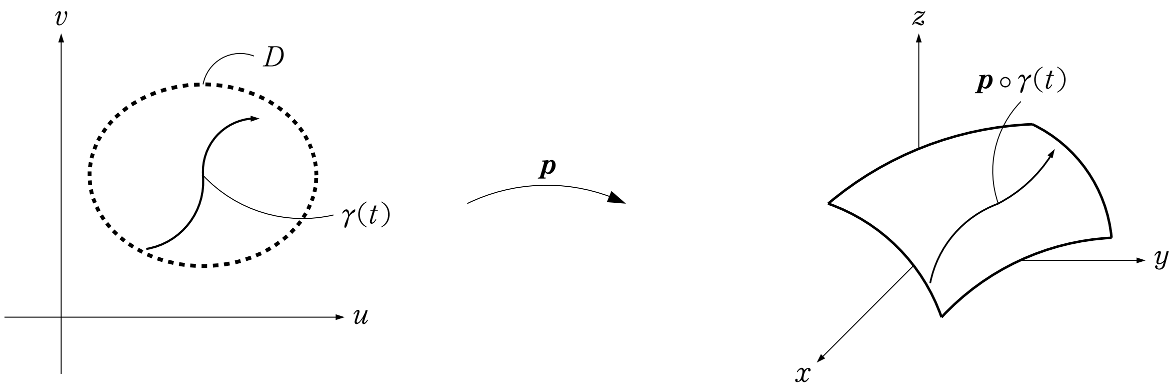
$$\frac{d}{dt}\Big\{\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)\Big\}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(u(t),v(t))=\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}=\boldsymbol{p}_u\dot{u}+\boldsymbol{p}_v\dot{v} \tag{2}$$

となるので，曲面上の曲線 $\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)$ の長さは,

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{p}\circ\gamma)=\int_a^b\left\|\frac{d}{dt}\Big\{\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)\Big\}\right\|dt=\int_a^b\sqrt{(\dot{u}\boldsymbol{p}_u+\dot{v}\boldsymbol{p}_v)\cdot(\dot{u}\boldsymbol{p}_u+\dot{v}\boldsymbol{p}_v)}\,dt=\int_a^b\sqrt{E\dot{u}(t)^2+2F\,\dot{u}(t)\dot{v}(t)+G\dot{v}(t)^2}\,dt$$

となる．**➡注** $E=E(u(t),v(t))$, $F=F(u(t),v(t))$, $G=G(u(t),v(t))$ である．

イメージ：



4.5.2　曲線の角度

曲線の角度を 2 つの曲線の交点での接ベクトルの角度と定義する．D 内の曲線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ と，それに対応する正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ $((u,v)\in D)$ 上の曲線 $\boldsymbol{p}\circ\gamma_1=:\widetilde{\gamma}_1$, $\boldsymbol{p}\circ\gamma_2=:\widetilde{\gamma}_2$ を考える．ただし，ある t_0 で $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$ であるとする．曲線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ の角度を θ とすると，内積の性質から

$$\dot{\gamma}_1\cdot\dot{\gamma}_2=\|\dot{\gamma}_1\|\,\|\dot{\gamma}_2\|\cos\theta\Longleftrightarrow\cos\theta=\frac{\dot{\gamma}_1\cdot\dot{\gamma}_2}{\|\dot{\gamma}_1\|\,\|\dot{\gamma}_2\|}$$

となる．同様に $\widetilde{\gamma}_1(t)$, $\widetilde{\gamma}_2(t)$ の角度を $\widetilde{\theta}$ とすると,

$$\cos\widetilde{\theta}=\frac{\dot{\widetilde{\gamma}}_1\cdot\dot{\widetilde{\gamma}}_2}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}_1\|\,\|\dot{\widetilde{\gamma}}_2\|}$$

である．ここで (2) より，$\dot{\widetilde{\gamma}}_1(t)=\boldsymbol{p}_u\dot{u}_1(t)+\boldsymbol{p}_v\dot{v}_1(t)$, $\dot{\widetilde{\gamma}}_2(t)=\boldsymbol{p}_u\dot{u}_2(t)+\boldsymbol{p}_v\dot{v}_2(t)$ なので,

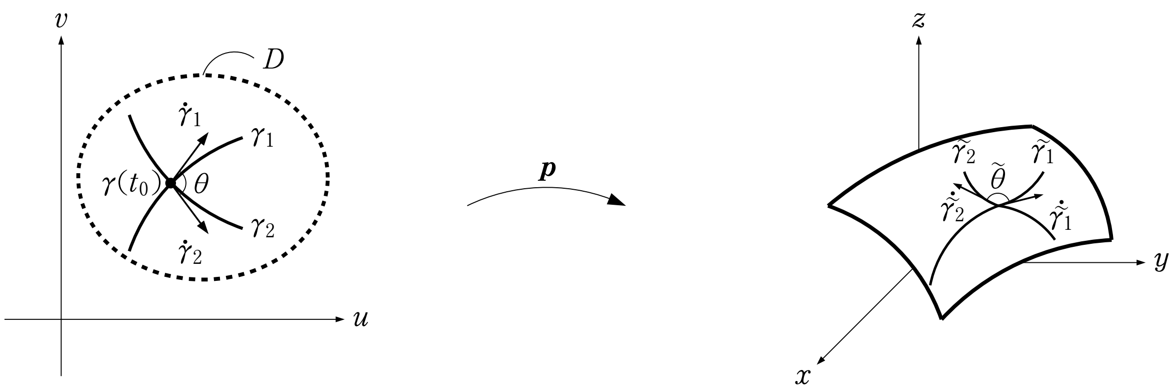
$$\cos\widetilde{\theta}=\frac{\dot{\widetilde{\gamma}}_1\cdot\dot{\widetilde{\gamma}}_2}{\|\dot{\widetilde{\gamma}}_1\|\,\|\dot{\widetilde{\gamma}}_2\|}=\frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2+F(\dot{u}_1\dot{v}_2+\dot{u}_2\dot{v}_1)+G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2+2F\dot{u}_1\dot{v}_1+G\dot{v}_1^2}\sqrt{E\dot{u}_2^2+2F\dot{u}_2\dot{v}_2+G\dot{v}_2^2}} \tag{3}$$

となる．$E=G$, $F=0$ のとき,

$$\cos\widetilde{\theta}=\cos\theta$$

となる．このような性質をもつパラメータを**等温パラメータ**という．

イメージ：



命題 1

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)$ $((u,\,v)\in D)$ と D 内の任意の曲線 $\gamma(t)=(u(t),\,v(t))$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ に対して,

$$\mathscr{L}(\gamma)=\mathscr{L}(\boldsymbol{p}\circ\gamma)\Longleftrightarrow \text{任意の}\,(u,\,v)\in D\,\text{で}\,E=G=1,\,F=0.$$

証明：

$(\Leftarrow)$ $E=G=1,\,F=0$ のとき,

$\mathscr{L}(\gamma)=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\dot u(t)^2+\dot v(t)^2}\,dt$ であり，$\mathscr{L}(\boldsymbol{p}\circ\gamma)=\displaystyle\int_a^b\sqrt{E\dot u(t)^2+2F\,\dot u(t)\dot v(t)+G\dot v(t)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\dot u(t)^2+\dot v(t)^2}\,dt$ となる.

よって，$\mathscr{L}(\gamma)=\mathscr{L}(\boldsymbol{p}\circ\gamma)$ である.

$(\Rightarrow)$

角度 θ を 1 つ固定し，D 上の任意の点 $(u_0,\,v_0)$ を通り u 軸方向と角度 θ をなす曲線 $\gamma(t)=(u_0+t\cos\theta,\,v_0+t\sin\theta)$ $(0\leqslant t\leqslant c)$ を考える.

この曲線 $\gamma(t)$ の uv 平面での長さは c の線分であるが，対応する曲面上の曲線 $\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant c)$ の長さが等しいと仮定すると,

$$c=\mathscr{L}(\boldsymbol{p}\circ\gamma)=\int_0^c\sqrt{E\cos^2\theta+2F\,\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta}\,dt$$

である．ただし，$E=E(u_0+t\cos\theta,\,v_0+t\sin\theta)$ である. (F, G も同様.) この両辺を c で微分すると,

$$1=\sqrt{E\cos^2\theta+2F\,\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta}$$

である．ここでは $E=E(u_0+c\cos\theta,\,v_0+c\sin\theta)$ である. (F, G も同様.) ここで $c\to 0$ とすれば，$(u_0,\,v_0)$ において,

$$E\cos^2\theta+2F\,\cos\theta\sin\theta+G\sin^2\theta=1$$

となる．ここでは $E=E(u_0,\,v_0)$ である. (F, G も同様.)

上の式は任意の θ について成り立つので，$\theta=0$ とすると $E=1$ となり，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ とすれば，$G=1,\,F=0$ が得られる. ■

例 5

半径 $r>0$ の球面 $\boldsymbol{p}(u,\,v)=(r\cos u\cos v,\,r\cos u\sin v,\,r\sin u);D=\left\{(u,\,v)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,u<\left|\dfrac{\pi}{2}\right|,\,0\leqslant v<2\pi\right\}$ に対して,

uv 平面上の曲線 $\gamma(t)=\left(\dfrac{\pi}{4},\,t\right)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ に対応する球面上の曲線 $\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)$ を求める.

$\boldsymbol{p}\circ\gamma(t)=\boldsymbol{p}(\gamma(t))=\boldsymbol{p}\left(\dfrac{\pi}{4},\,t\right)=\left(r\cos\dfrac{\pi}{4}\cos t,\,r\cos\dfrac{\pi}{4}\sin t,\,r\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{r}{\sqrt2}(\cos t,\,\sin t,\,1).$

例 6

$z=f(x,\,y)$ の形で表される第一基本形式を考える.

パラメータ表示は $\boldsymbol{p}(u,\,v)=(u,\,v,\,f(u,\,v))$ と表せ，$\boldsymbol{p}_u(u,\,v)=(1,\,0,\,f_u(u,\,v))$, $\boldsymbol{p}_v(u,\,v)=(0,\,1,\,f_v(u,\,v))$ となるので,

$E=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u=1+f_u(u,\,v)^2$, $F=\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v=f_u(u,\,v)f_v(u,\,v)$, $G=\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v=1+f_v(u,\,v)^2$ である．よって，第一基本形式は,

$$(ds)^2=(1+f_x(x,\,y)^2)(dx)^2+2(f_x(x,\,y)f_y(x,\,y))(dx)(dy)+(1+f_y(x,\,y)^2)(dy)^2.$$

5　第二基本形式

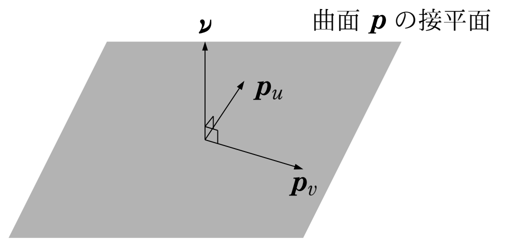
5.1　第二基本形式

3.5 で述べた**単位法線ベクトル** $\boldsymbol{\nu}(u,v) := \dfrac{\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)}{\|\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)\|}$ はパラメータによって逆向きになることがある．つまり，曲面の各点で，

$$\boldsymbol{\nu}(u,v) = \pm\boldsymbol{\nu}(s,t)$$

となることがある．

単位法線ベクトルのイメージ：



定義【第二基本形式】

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{II} &= -d\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{\nu} = -(\boldsymbol{p}_u du + \boldsymbol{p}_v dv)\cdot(\boldsymbol{\nu}_u du + \boldsymbol{\nu}_v dv) \\ &= (-\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u)(du)^2 + (-\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v + \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u)dudv + (-\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v)(dv)^2\end{aligned}$$

を**第二基本形式**という．

いま，$\boldsymbol{p}_u \perp \boldsymbol{\nu}$ かつ $\boldsymbol{p}_v \perp \boldsymbol{\nu}$ なので，$\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ かつ $\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu} = 0$ である．これらを微分すると，

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}\right\} = \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u \quad \therefore -\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u = \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}\right\} = \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v \quad \therefore -\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v = \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}\right\} = \boldsymbol{p}_{vu}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u \quad \therefore -\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u = \boldsymbol{p}_{vu}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}\left\{\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}\right\} = \boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v \quad \therefore -\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u = \boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu}$$

となる．

定義【第二基本量】

$L := \boldsymbol{p}_{uu}\cdot\boldsymbol{\nu},\ M := \boldsymbol{p}_{uv}\cdot\boldsymbol{\nu},\ N := \boldsymbol{p}_{vv}\cdot\boldsymbol{\nu}$ を**第二基本量**という．

よって，第二基本形式は

$$\mathrm{II} = L(du)^2 + 2M(du)(dv) + N(dv)^2$$

と表せる．行列を用いると，

$$\mathrm{II} = \begin{bmatrix} du, dv \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

と表せる．$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ を**第二基本行列**といい，$\widehat{\mathrm{II}}$ とかく．

➡**注** II は ± を除けばパラメータの取り方によらない．($\because$ $\boldsymbol{\nu}$ は ± が変わる可能性があるので，$\boldsymbol{\nu}$ の ± が変わると $d\boldsymbol{\nu}$ も ± が変わる．$d\boldsymbol{p}$ は不変.)

5.2　第二基本形式の座標変換の不変性 (± は除く)

定義【正・負の座標変換】

座標変換 $\varphi : \begin{cases} u = u(s,t), \\ v = v(s,t) \end{cases}$ と，φ のヤコビ行列 $J := \begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix}$ に対して，

$$\begin{matrix} \varphi \text{ が}\textbf{正の座標変換} \\ \varphi \text{ が}\textbf{負の座標変換} \end{matrix} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{matrix} \det(J) > 0 \\ \det(J) < 0 \end{matrix}$$

定理 1

$$\varphi \text{ が正の座標変換} \iff \boldsymbol{\nu}(u,v)=\widetilde{\boldsymbol{\nu}}(s,t) \iff \mathrm{I\!I} \text{ は不変}$$
$$\varphi \text{ が負の座標変換} \iff \boldsymbol{\nu}(u,v)=-\widetilde{\boldsymbol{\nu}}(s,t) \iff \mathrm{I\!I} \text{ の } \pm \text{ が変わる}$$

<u>証明：</u>

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{p}}_s\times\widetilde{\boldsymbol{p}}_t &= (\boldsymbol{p}_u u_s+\boldsymbol{p}_v v_s)\times(\boldsymbol{p}_u u_t+\boldsymbol{p}_v v_t) && \because \text{合成関数の微分}\\ &= \underbrace{(u_s v_t-u_t v_s)}_{=\det(J)}\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v && \because \text{外積の性質 } \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

よって，φ のヤコビ行列式によって，$\boldsymbol{\nu}(u,v)=\pm\widetilde{\boldsymbol{\nu}}(s,t)$.
また，$d\boldsymbol{\nu}(u,v)=\pm d\widetilde{\boldsymbol{\nu}}(s,t)$ であり，*4.3* の定理 2 より $d\boldsymbol{p}$ は φ により不変なので $\mathrm{I\!I}$ についても成り立つ. ■

$\varphi:\begin{cases}u=u(s,t),\\ v=v(s,t)\end{cases}$ を<u>正の座標変換</u>とする. • L,M,N を $\boldsymbol{p}(u,v)$ の第二基本量　• $\widetilde{L},\widetilde{M},\widetilde{N}$ を $\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,t)$ の第二基本量とする．このとき，

$$\mathrm{I\!I}=L(du)^2+2M(du)(dv)+N(dv)^2=\widetilde{L}(ds)^2+2\widetilde{M}(ds)(dt)+\widetilde{N}(dt)^2$$

となる．また，*4.3* の定理 3 と同様に次の定理が成り立つ.

定理 2

φ を正の座標変換，J を φ のヤコビ行列とする．このとき，

$$\widehat{\widetilde{\mathrm{I\!I}}}={}^tJ\,\widehat{\mathrm{I\!I}}\,J$$

が成り立つ. ➡**注** φ が負の座標変換のときは "−" がつく.

5.3　ガウス曲率・平均曲率

定義【ワインガルテン行列】

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ に対して，

$$W:=\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{I\!I}}=\begin{bmatrix}E&F\\F&G\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}L&M\\M&N\end{bmatrix}=\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix}GL-FM&GM-FN\\-FL+EM&-FM+EN\end{bmatrix}$$

を**ワインガルテン行列**という. ➡**注** *4.4* より well-defined である.

定義【曲率】

W：ワインガルテン行列とする.

(1) W の固有値 λ_1,λ_2 を**主曲率**という. (λ_1,λ_2 がともに実数になることが知られている.)

(2) $K:=\lambda_1\lambda_2=\det W=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ を**ガウス曲率**という．$H:=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,W=\dfrac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$ を**平均曲率**という. ➡**注** tr はトレース.

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を正の座標変換 $\varphi:\begin{cases}u=u(s,t),\\ v=v(s,t)\end{cases}$ によりパラメータ変換した曲面を $\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,t)(:=\boldsymbol{p}(u(s,t),v(s,t)))$ とする．また，$\boldsymbol{p}(u,v)$ の第一・第二基本量を E,F,G,L,M,N，ワインガルテン行列を W，$\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,t)$ の第一・第二基本量を $\widetilde{E},\widetilde{F},\widetilde{G},\widetilde{L},\widetilde{M},\widetilde{N}$，ワインガルテン行列を $\widetilde{W}$ とする.
さらに，φ のヤコビ行列を $J:=\begin{bmatrix}u_s&u_t\\v_s&v_t\end{bmatrix}$ とおくと，*4.3* の定理 3 と *5.2* の定理 2 より，

$$\widetilde{W}=\widehat{\widetilde{\mathrm{I}}}^{-1}\widehat{\widetilde{\mathrm{I\!I}}}=({}^tJ\,\widehat{\mathrm{I}}\,J)^{-1}({}^tJ\,\widehat{\mathrm{I\!I}}\,J)=J^{-1}\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\underbrace{({}^tJ)^{-1}({}^tJ)}_{=E_2}\widehat{\mathrm{I\!I}}\,J=J^{-1}\,\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{I\!I}}\,J=J^{-1}WJ$$

となるので，W と $\widetilde{W}$ は**相似な行列**である．よって，W と $\widetilde{W}$ の固有値は一致する. ➡**注** 負の座標変換の場合は $\widetilde{W}=-J^{-1}WJ$ となり，固有値の符号が変わる.

命題 1

ガウス曲率は座標変換では不変であり，平均曲率は正の座標変換では不変，負の座標変換では ± が変わる.

<u>証明：</u> $\boldsymbol{p}(u,v)$ の主曲率 (W の固有値)・ガウス曲率・平均曲率を λ_1,λ_2,K,H，$\widetilde{\boldsymbol{p}}(s,t)$ のガウス曲率・平均曲率を $\widetilde{K},\widetilde{H}$ とする.
φ が正の座標変換ならば，$\widetilde{W}$ の固有値は λ_1,λ_2. φ が負の座標変換ならば，$\widetilde{W}$ の固有値は $-\lambda_1,-\lambda_2$ である.
よって，$K=\lambda_1\lambda_2=(-\lambda_1)(-\lambda_2)=\widetilde{K}$, $H=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=-\left(\dfrac{(-\lambda_1)+(-\lambda_2)}{2}\right)=-\widetilde{H}$. ■

例 1　平面 (xy 平面) のガウス曲率・平均曲率を求める．
xy 平面のパラメータ表示は $\boldsymbol{p}(u, v) = (u, v, 0)$ ($(u, v) \in \mathbb{R}^2$) である．$\boldsymbol{p}_u(u, v) = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{p}_v(u, v) = (0, 1, 0)$ なので，第一基本量は,

$$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = 1,\ F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0,\ G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = 1$$

となる．また，$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = (0, 0, 1)$, $\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\| = 1$ なので，単位法線ベクトルは,

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{\|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v\|} = (0, 0, 1)$$

である．さらに，$\boldsymbol{p}_{uu}(u, v) = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{p}_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{p}_{vv}(u, v) = (0, 0, 0)$ なので，第二基本量は,

$$L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,\ M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0,\ N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$$

となる．したがって，ガウス曲率 K と平均曲率 H は,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0,\ H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = 0$$

となる．

参考 事実として次が知られている：
- $K = H = 0 \Longleftrightarrow$ 平面の一部.
- 任意の点で $K = 0$ のとき，局所的には正確な地図[9]を描くことができる.
- 任意の点で $H = 0$ となる曲面を**極小曲面**という. (**部分部分で面積が小さくなるような曲面.　ex. しゃぼん玉)

命題 2

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ と，そのガウス曲率 K，平均曲率 H に対して，次が成り立つ：
(1) K と H は回転・平行移動で不変である．このことを「**向きを保つ合同変換**」という.
(2) K は合同変換 (回転・平行移動，面対称) で不変である.

証明：
$\boldsymbol{p}(u, v)$ を合同変換した曲面は，3 次直交行列 T と定ベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を用いて,

$$\overline{\boldsymbol{p}}(u, v) = T\boldsymbol{p}(u, v) + \boldsymbol{c}$$

と表せる．(**$\boldsymbol{p}(u, v)$, $\boldsymbol{c}$ は縦ベクトルである.) ここで,

$$\overline{\boldsymbol{p}}_u = T\boldsymbol{p}_u,\ \overline{\boldsymbol{p}}_v = T\boldsymbol{p}_v,\ \overline{\boldsymbol{p}}_{uu} = T\boldsymbol{p}_{uu},\ \overline{\boldsymbol{p}}_{uv} = T\boldsymbol{p}_{uv},\ \overline{\boldsymbol{p}}_{vv} = T\boldsymbol{p}_{vv}$$

となるので，$\overline{\boldsymbol{p}}(u, v)$ の第一基本量 $\overline{E}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ は，内積の性質 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ を用いて計算すると,

$$\overline{E} = \overline{\boldsymbol{p}}_u \cdot \overline{\boldsymbol{p}}_u = (T\boldsymbol{p}_u) \cdot (T\boldsymbol{p}_u) = {}^t(T\boldsymbol{p}_u)(T\boldsymbol{p}_u) = {}^t\boldsymbol{p}_u \underbrace{{}^tTT}_{=\mathbf{E}_2} \boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = E.\ \text{同様に}\overline{F} = F,\ \overline{G} = G$$

となる．また，$\overline{\boldsymbol{p}}(u, v)$ の単位法線ベクトルは,

$$\overline{\boldsymbol{\nu}} = (\det(T))T\boldsymbol{\nu}$$

である．直交行列の行列式の値は ± 1 である．(1) の場合は 1 であり，(2) の場合は ± 1 である.
よって，(1) のとき $\overline{L} = L$, $\overline{M} = M$, $\overline{N} = N$ となり，(2) のとき $\overline{L} = \pm L$, $\overline{M} = \pm M$, $\overline{N} = \pm N$ となる.　■

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ に対して，ガウス曲率 K，平均曲率 H は，各点で決まる．$K = K(u, v)$, $H = H(u, v)$ と書くこともある.

[9] 4.5 の命題 1 のようにパラメータ $\gamma(t)$ と $\boldsymbol{p} \circ \gamma(t)$ の距離が一致するということ.

ワインガルテンの公式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\end{bmatrix} W$$

証明：

$\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$ より $\|\boldsymbol{\nu}\|^2 = 1$. 内積の定義より $\|\boldsymbol{\nu}\|^2 = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}$ なので

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

① を u で偏微分すると，積の微分より

$$\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}_u = 0 \quad \therefore \boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

同様に v で偏微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}_v = 0 \quad \therefore \boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

また $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{\nu}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であるから，$\boldsymbol{\nu}_u$, $\boldsymbol{\nu}_v$ はこれらの一次結合で表せるので，

$$\boldsymbol{\nu}_u = a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v + \alpha\boldsymbol{\nu} \qquad \cdots\cdots ④$$

$$\boldsymbol{\nu}_v = c\boldsymbol{p}_u + d\boldsymbol{p}_v + \beta\boldsymbol{\nu} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

②,③ と ④,⑤，$\boldsymbol{p}_u \perp \boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{p}_v \perp \boldsymbol{\nu}$，内積の線形性より，

$0 = \boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{\nu} = (a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v + \alpha\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu} = a(\underbrace{\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}}_{=0}) + b(\underbrace{\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}}_{=0}) + \alpha(\underbrace{\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}}_{=1}) = \alpha \quad \therefore \alpha = 0.$

$0 = \boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{\nu} = (c\boldsymbol{p}_u + d\boldsymbol{p}_v + \beta\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu} = c(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}) + d(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}) + \beta(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = \beta \quad \therefore \beta = 0.$

この結果より，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d\end{bmatrix}$$

の形で表せる．あとは $\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_v$, $\boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_v$ を計算する.[10)]

$$\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_u = (a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v)\cdot\boldsymbol{p}_u = a(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u) + b(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_u) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

$$\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_v = (a\boldsymbol{p}_u + b\boldsymbol{p}_v)\cdot\boldsymbol{p}_v = a(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v) + b(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v) \qquad \cdots\cdots ⑦$$

$$\boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_u = (c\boldsymbol{p}_u + d\boldsymbol{p}_v)\cdot\boldsymbol{p}_u = c(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u) + d(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_u) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$$\boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_v = (c\boldsymbol{p}_u + d\boldsymbol{p}_v)\cdot\boldsymbol{p}_v = c(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v) + d(\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑥,⑦,⑧,⑨ はそれぞれ次のように書き表せる.

$$Ea + Fb = -L \cdots ⑥,\ Fa + Gb = -M \cdots ⑦,\ Ec + Fd = -M \cdots ⑧,\ Fc + Gd = -N \cdots ⑨$$

⑥ と ⑦ の連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L \\ M\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix} = -\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\begin{bmatrix} L \\ M\end{bmatrix}$$

同様に ⑧ と ⑨ の連立方程式を行列で表すと，

$$\begin{bmatrix} c \\ d\end{bmatrix} = -\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\begin{bmatrix} M \\ N\end{bmatrix}$$

よって，

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d\end{bmatrix} = -\widehat{\mathrm{I}}^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix} L & M \\ M & N\end{bmatrix}}_{=\widehat{\mathrm{II}}} = -W.$$

したがって，

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v\end{bmatrix} W$$

■

とくに，「点 P で $\boldsymbol{\nu}_u$, $\boldsymbol{\nu}_v$ が 1 次従属 $\Longleftrightarrow$ 点 P で $K = 0$」.

10) $\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_u = -L$, $\boldsymbol{\nu}_u\cdot\boldsymbol{p}_v = \boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_u = -M$, $\boldsymbol{\nu}_v\cdot\boldsymbol{p}_v = -N$ である.

定義

$$\text{ガウス曲率}\begin{cases} K > 0 & \\ K = 0 & \text{の点を} \\ K < 0 & \end{cases}\quad \begin{matrix}\textbf{楕円点} \\ \textbf{放物点} \\ \textbf{双曲点}\end{matrix}\quad \text{という.}$$

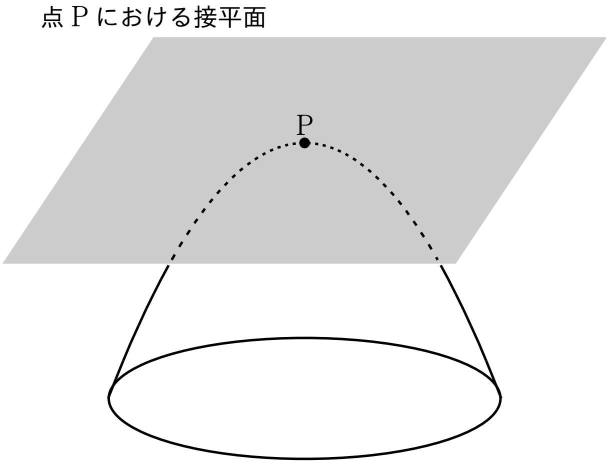
定理３

(1) 楕円点 (ガウス曲率が正になる点) の近くでは曲面は凸.
証明は難しいので略.

(2) 双曲点 (ガウス曲率が負になる点) の近くでは曲面は **鞍型**(くらがた).

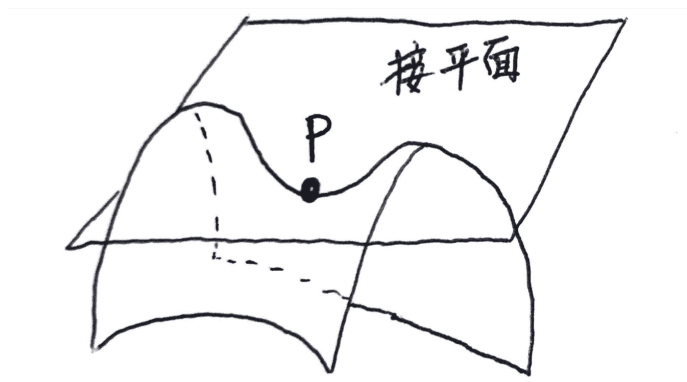
イメージ：

(1) **楕円点** (凸)



曲面が接平面と**同じ側** (**片側**) にある

(2) **双曲点** (**鞍型**)



曲面が接平面の**両側**にある

6　主方向・漸近方向

6.1　曲面上の曲線

正則曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ $((u, v) \in D)$ に対して，uv 平面上の曲線 $(u(s), v(s))$ (s を使っているが弧長パラメータではない.) と，それに対応する曲面上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(s) := \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ (この s は弧長パラメータ．つまり，$^\forall s$ で $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$.) を考える．

- $\boldsymbol{\gamma}(s)$ の速度ベクトル (接ベクトル)$\boldsymbol{\gamma}'(s)$ は合成関数の微分公式より，

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \boldsymbol{p}_u(u(s), v(s))u'(s) + \boldsymbol{p}_v(u(s), v(s))v'(s) \tag{1}$$

- s は弧長パラメータなので,
$1 = \|\boldsymbol{\gamma}'(s)\|^2 = \boldsymbol{\gamma}'(s)\cdot\boldsymbol{\gamma}'(s) = (\boldsymbol{p}_u u'(s) + \boldsymbol{p}_v v'(s))\cdot(\boldsymbol{p}_u u'(s) + \boldsymbol{p}_v v'(s)) = (\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_u)u'(s)^2 + 2(\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{p}_v)u'(s)v'(s) + (\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{p}_v)v'(s)^2$ より，

$$Eu'(s)^2 + 2Fu'(s)v'(s) + Gv'(s)^2 = 1 \tag{2}$$

- $\boldsymbol{\gamma}''(s)$ (加速度ベクトル) を 2 つの方向に分解する．

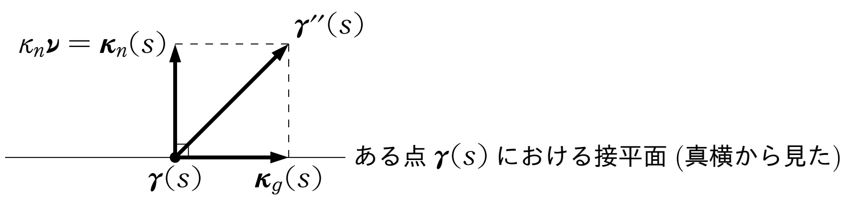
$$\begin{cases} \cdot\ \text{曲面に接するベクトル } \boldsymbol{\kappa}_g & \leftarrow \text{接平面上のベクトル} \\ \cdot\ \text{法線方向のベクトル } \boldsymbol{\kappa}_n & \leftarrow \text{接平面に直交するベクトル} \end{cases}$$

このとき，$\boldsymbol{\gamma}''(s) = \boldsymbol{\kappa}_g(s) + \boldsymbol{\kappa}_n(s)$ であり，また，$\boldsymbol{\kappa}_n$ はある実数 κ_n を用いて $\boldsymbol{\kappa}_n = \kappa_n\boldsymbol{\nu}$ と表せる．

定義【法曲率ベクトル・測地的曲率ベクトル】

$\boldsymbol{\kappa}_n$ を法曲率ベクトル，$\boldsymbol{\kappa}_g$ を測地的曲率ベクトルという．

イメージ：



6.2　法曲率

定義【法曲率】

$\boldsymbol{p}(u, v)$：正則曲面，$\boldsymbol{\nu}$：単位法線ベクトル，$\boldsymbol{\gamma}(s)$：曲面 $\boldsymbol{p}(u, v)$ 上の弧長パラメータ表示された曲線とする．

$$\boldsymbol{\gamma}(s) \text{ の法曲率 } \kappa_n \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{\kappa}_n = \kappa_n\boldsymbol{\nu} \text{ なる } \kappa_n.$$

補題 1

法曲率 κ_n は $\kappa_n = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu}$ により計算できる．

<u>証明：</u> $\boldsymbol{\kappa}_n = (\boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}$ であることを示せばよい．

$\boldsymbol{\kappa}_n = \kappa_n\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\gamma}'' = \boldsymbol{\kappa}_g + \boldsymbol{\kappa}_n$ より，$\boldsymbol{\kappa}_g = \boldsymbol{\gamma}'' - \boldsymbol{\kappa}_n = \boldsymbol{\gamma}'' - \kappa_n\boldsymbol{\nu}$ である．$\boldsymbol{\kappa}_g \perp \boldsymbol{\nu}$ なので，$\boldsymbol{\kappa}_g$ と $\boldsymbol{\nu}$ の内積をとると，

$$0 = \boldsymbol{\kappa}_g\cdot\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\gamma}'' - \kappa_n\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu} - \kappa_n(\underbrace{\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}}_{=\|\boldsymbol{\nu}\|^2=1})$$

よって，$\kappa_n = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu}$. ■

曲面上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(s) := \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ に対して，$\boldsymbol{\gamma}'(s)\cdot\boldsymbol{\nu}(u(s), v(s)) = 0$ である．($\because$ $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ は接平面上にあるので.) この両辺を微分すると，

$$0 = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\nu}' \qquad \therefore \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\nu}'$$

である．また，$\kappa_n = \boldsymbol{\gamma}''\cdot\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\gamma}'\cdot\boldsymbol{\nu}' = -(\boldsymbol{p}_u u' + \boldsymbol{p}_v v')\cdot(\boldsymbol{\nu}_u u' + \boldsymbol{\nu}_v v') = (-\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_u)u'(s)^2 + (-\boldsymbol{p}_u\cdot\boldsymbol{\nu}_v - \boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_u)u'(s)v'(s) + (-\boldsymbol{p}_v\cdot\boldsymbol{\nu}_v)v'(s)^2$ より，

$$\kappa_n = Lu'(s)^2 + 2Mu'(s)v'(s) + Nv'(s)^2 \tag{3}$$

となる．

(2),(3) の式を見てみると，第一基本形式，第二基本形式の形をしていることがわかる．

系 1

曲面上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ の法曲率 κ_n は曲線の接ベクトルの方向のみで決まる．

証明：
6.2 の (3) より，

$$\kappa_n = L(u')^2 + 2M(u')(v') + N(v')^2$$

なので，u', v' により決まる．また，*6.1* の (2) より，接ベクトルの向きと u', v' が $1:1$ 対応していることがわかる．■

➡**注**
- 曲面上の曲線 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ は，曲面は $\mathbb{R}^3$ 上にあるので $\boldsymbol{\gamma}(s)$ は空間曲線である．
- $\boldsymbol{\gamma}(s)$ の曲線としての曲率 κ と法曲率 κ_n は違う！ κ は $\boldsymbol{\gamma}''(s)$ の大きさ，κ_n は $\boldsymbol{\kappa}_n$ の向きと大きさを表している．
- (点 P を固定して) 法曲率 κ_n は接ベクトルの方向によって変わる．κ_n は，その向きに進んだときの曲がり具合を示す．

6.3　直截口

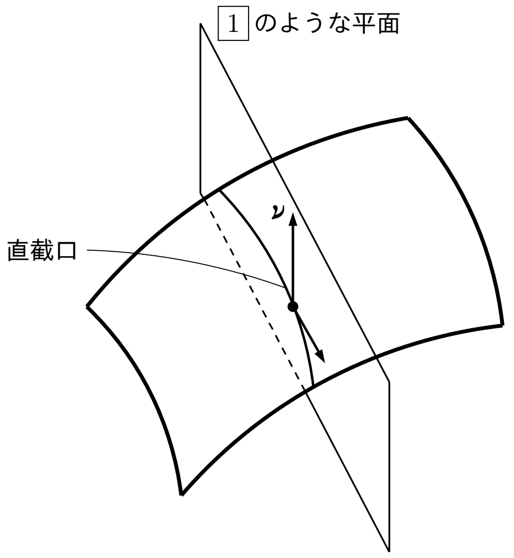
定義【直截口】

$\boxed{1}$ 曲面上の点を固定し，法線ベクトルを含む平面を考える．　$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ の平面で曲面を切断すると平面上の曲線になる．

このような曲線を **直截口**（ちょくさいこう）という．

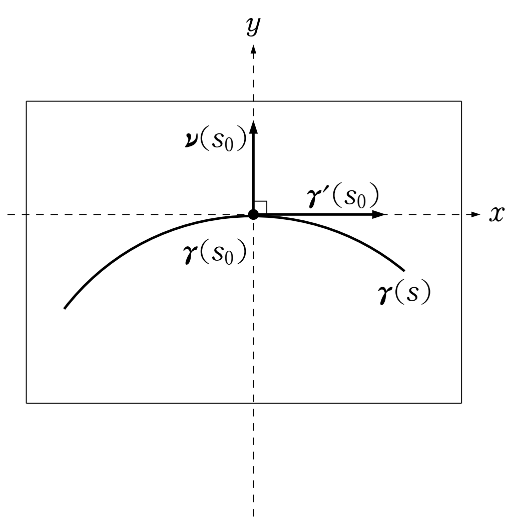
イメージ：

直截口のイメージ



$\boxed{1}$ の平面を正面から見た ⟶

定理 1 のイメージ



例 1
球面の直截口は**大円**である．(**大円 …… 中心を通る平面での断面.)　接ベクトルの方向によって無数にある．

定理 1

$\boldsymbol{\gamma}(s)$：点 $\boldsymbol{\gamma}(s_0)$ での直截口 (s は弧長パラメータ.) とする．このとき，$\boldsymbol{\gamma}(s)$ の平面曲線としての曲率 κ と法曲率 κ_n は等しい．ただし，$\boldsymbol{\gamma}(s)$ には $\boldsymbol{\gamma}'(s_0)$：$x$ 軸, $\boldsymbol{\nu}(s_0)$：y 軸とする向きが入っている．イメージは上記参照．

証明：
s は弧長パラメータより，$\boldsymbol{\gamma}'(s_0) \perp \boldsymbol{\gamma}''(s_0)$ である．$\boldsymbol{\nu}(s_0)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s_0)$, $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ は同じ平面上にある[11]ので，$\boldsymbol{\nu}(s_0)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s_0)$ は 1 次従属である．
よって，$\boldsymbol{\gamma}''(s_0) = \kappa_n \boldsymbol{\nu}(s_0)$ であり，平面曲線の曲率の定義より $\boldsymbol{\gamma}''(s_0) = \kappa \boldsymbol{\nu}(s_0)$ である．したがって，$\kappa = \kappa_n$. ■

定理 2

曲面上の点 P を通る曲線 $\boldsymbol{\gamma}(s)$ の法曲率 κ_n は同じ接ベクトルをもつ直截口の平面曲線としての曲率を考えれば十分である．(証明：系 1 と定理 1 より.)
意味： 1 つの向きに対して 1 つの曲線を考えればいい．つまり，**直截口**を考えればよい．

[11] 厳密には捩率を使う．

6.4 主曲率・ガウス曲率・平均曲率の意味

命題 1

uv 平面の u 軸から角度 θ をなす方向 $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \fallingdotseq \mathbf{0}$ に対する曲面上の法曲率 κ_n は次の式で与えられる：

$$\kappa_n = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \frac{L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta}.$$

証明：

6.1 の (2) より，単位ベクトル $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{p}_u + \beta\boldsymbol{p}_v$ としたとき，$1 = \|\boldsymbol{w}\|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2$ であるので，*6.2* の (3) と同様に,

$$\kappa_n = L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2$$

となる．$\boldsymbol{w}$ が単位ベクトルでない場合も

$$\kappa_n = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

とすれば，$\|\boldsymbol{w}\| \fallingdotseq 1$ のときに拡張できる．(つまり，同じ方向からの κ_n は等しい.)

２つ目の等式は $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ を代入すると得られる． ■

定理３

曲面上の点 P における法曲率 κ_n の最大値・最小値は主曲率 ($W = \widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{II}}$ の固有値) と一致する．

証明：

命題 1 より，$(\alpha, \beta) \fallingdotseq (0, 0)$ での法曲率は,

$$\kappa_n =: \lambda(\alpha, \beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} \tag{*}$$

の最大値・最小値を求めればよい．(閉区間 $[0, 2\pi]$ かつ連続なので最大値・最小値をもつ.)

$\lambda(\alpha, \beta)$ が (α_0, β_0) で最大値または最小値をもつとき，$\lambda_\alpha(\alpha_0, \beta_0) = \lambda_\beta(\alpha_0, \beta_0) = 0$ となる．(*) を式変形すると,

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 - (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)\lambda(\alpha, \beta) = 0$$

α, β それぞれの偏微分をして，$\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$ を代入すると,

$$\begin{cases}(L - \lambda E)\alpha + (M - \lambda F)\beta = 0,\\ (M - \lambda F)\alpha + (N - \lambda G)\beta = 0\end{cases}$$

となる．この連立方程式が $(\alpha, \beta) \fallingdotseq (0, 0)$ で解をもつのは，$\det\begin{bmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{bmatrix} = 0$ のときである．実際に計算して整理すると,

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + (LN - M^2) = 0$$

である．この解を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ とすると，λ_1, λ_2 が法曲率 κ_n の最大値・最小値である．よって２次方程式の解と係数の関係より,

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2} = 2H,\\[2ex] \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = K\end{cases} \tag{*1}$$

となる．よって，λ_1, λ_2 は主曲率である． ■

定義【臍点】

主曲率 λ_1, λ_2 が $\lambda_1 = \lambda_2$ となるような点を **臍点**（せいてん）という．

➡**注**
- 臍点ではすべての方向の法曲率が等しい．
- 臍点でないとき，主曲率 λ_1, λ_2 の与える向き $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を**主方向**という．

命題２

曲面上の点 P が臍点 $\Longleftrightarrow$ 点 P で $H^2 - K = 0$.

証明：

臍点の定義より，$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$. また，定理 3 の証明の中の (*1) より，

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = 4(H^2 - K)$$

である．よって，$H^2 - K = 0$. ■

例２

半径 a の球面は $K = \dfrac{1}{a^2}$, $H = \pm\dfrac{1}{a}$ なので，$H^2 = K$. よって，球面のすべての点は臍点である．

命題３

すべての点が臍点 $\Longrightarrow$ 球面か平面 (の 1 部)．証明略.

命題４

(1) $K > 0$ となる点の近くでは凸になる．

(2) $K < 0$ となる点の近くでは鞍型になる．

証明：

(1) $K > 0 \iff$ 「$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 > 0$」または「$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 < 0$」

$\iff$ すべての直截口は同じ方向に曲がる．

(2) $K < 0 \iff$ 「$\lambda_1 < 0$ かつ $\lambda_2 > 0$」または「$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_2 < 0$」

$\iff$ 直截口は逆向きのものがある．

■

定理【オイラーの公式】

P：曲面上の臍点でない点とする．次の座標をとる．(回転・平行移動で K, H は不変.)

(1)
- P を原点
- xy 平面が P の接平面
- x 軸を 1 つの主方向 $\boldsymbol{e}_1$ とする

このとき，y 軸がもう 1 つの主方向 $\boldsymbol{e}_2$ となる．特に，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は直交する．

(2) $\boldsymbol{e}_1$ に対応する主曲率を λ_1，$\boldsymbol{e}_2$ に対応する主曲率を λ_2 とする．このとき，x 軸からのなす角 ϑ 方向の法曲率 κ_n は,

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2\vartheta + \lambda_2 \sin^2\vartheta.$$

証明：

(1) のような座標をとると，点 P の近くで曲面は $z = f(x, y)$ と表せ，$\begin{cases} 0 = f(0, 0), \\ f_1(0, 0) = f_y(0, 0) = 0 \end{cases}$ を満たす．このとき，第一基本行列は,

$$\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$ となる. (∵*4.5.2* の例 6 .) よってワインガルテン行列は $W = \hat{\mathrm{I}}^{-1}\hat{\mathrm{II}} = \mathbf{E}_2\hat{\mathrm{II}} = \hat{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ となる.

x 軸が主方向 $\boldsymbol{e}_1$ なので W の固有値 λ_1 に対する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $W\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. つまり，$W = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$.

W のもう 1 つの固有値を λ_2 とすると，$N = \lambda_2$ であるから $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. いま，$z = f(x, y)$ で表せているので，命題 1 の θ と ϑ は一致する．

したがって，$\theta = \vartheta$, $E = G = 1$, $F = 0$, $L = \lambda_1$, $N = \lambda_2$, $M = 0$ を κ_n に代入すると,

$$\kappa_n = \lambda_1 \cos^2\vartheta + \lambda_2 \sin^2\vartheta.$$ ■

参考文献

[1] 梅原 雅顕　山田 光太郎　（2018）『曲線と曲面 - 微分幾何的アプローチ - 改訂版』　裳華房