微分積分学の主な定義と定理, 公式の証明

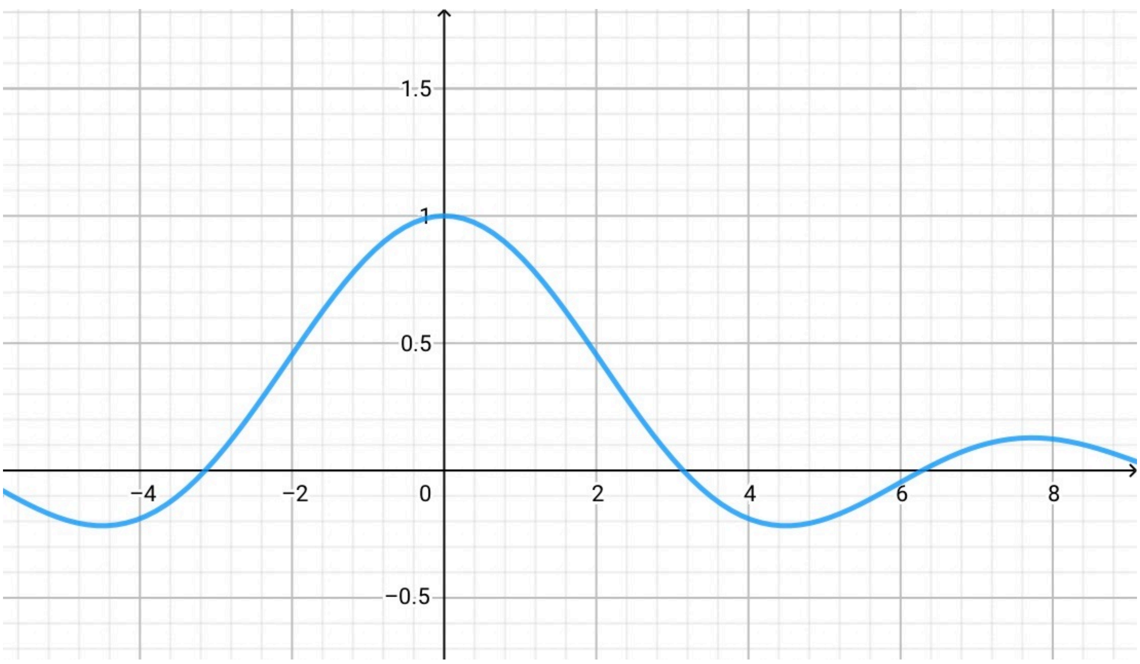
1. はじめに

これは大学 1 年次の微分積分学の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです．最初に来年度習うであろう事柄の一部と既知として扱っているものを付録として付けました. 多少タイプミス等があるかもしれませんが, ご了承ください. すべての内容が収録されているわけではありませんが, 復習などご自由に役立ててください．目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照) **線型代数学の主な定義・定理の証明はこちら**

内容に不備や落丁等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします.

*

*



---

* 目次の使い方

* 画像は $y = \dfrac{\sin x}{x}$ を GeoGebra で描いたもの

目次

1　付録

1.1　ネイピア数の定義, 極限の定義, 定理, 中間値の定理

ネイピア数 $e = 2.71828\ldots$ の定義

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$ となる a を e と定義する.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$

数列の極限の定義 ($\varepsilon - N$ 論法)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0,{}^{\exists}N\in\mathbb{N}\text{ s.t. }\forall n\geq N\Rightarrow|a_n-\alpha|<\varepsilon$$

関数の極限の定義 ($\varepsilon - \delta$ 論法)

$$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0,{}^{\exists}\delta>0\text{ s.t. }\forall x\in\mathbb{R},0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

定理

収束列ならば有界列

(証明)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると $|a_n-\alpha|<\varepsilon$

ここで $\varepsilon=1$ とすると $|a_n-\alpha|<1\Longleftrightarrow\alpha-1<a_n<\alpha+1$

$M:=\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,...,|a_N|,|\alpha-1|,|\alpha+1|\}$

$n<N$ のとき $|a_n|<\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,...,|a_N|\}=M$
$n\geq N$ のとき仮定より $|a_n|<\max\{|\alpha-1|,|\alpha+1|\}=M$

$$\therefore|a_n|<M$$

したがって a_n は有界　□

定理

単調増加（減少）で上（下）に有界な数列は収束する.

中間値の定理

$f(x)\in C[a,b]$ で $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 k に対して

$$f(c)=k \text{ となる } c\ (a\leq c\leq b) \text{ が存在する.}$$

数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $k \in \mathbb{R}$ とする.

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim_{n\to\infty}(ka_n) = k\alpha = k\lim_{n\to\infty} a_n$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

4. $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

5. $a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta$

6. $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ (はさみうちの原理という)

関数の極限の性質

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$, $k \in \mathbb{R}$ とする.

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a}(kf(x)) = k\alpha = k\lim_{x\to a} f(x)$

3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

4. $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$ のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

5. x が a に近いとき常に $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$

6. x が a に近いとき常に $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ かつ $\alpha = \beta \Longrightarrow \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ (はさみうちの原理)

1.3 無限等比級数

定理

無限等比級数 $\{r^n\}$ の極限

1. $r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

2. $r = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

3. $|r| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

4. $r \leq -1$ のとき $\{r^n\}$ は振動し, $\lim_{n\to\infty} r^n$ は存在しない

$$\text{数列 } \{r^n\} \text{ が収束} \iff -1 < r \leq 1$$

定理

無限等比級数の和 $a \neq 0$, $|r| < 1$ とする

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

(証明)

$r \neq 1$ のとき,無限等比級数の第 n 項目までの和を S_n とおく.

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ これは等比級数の和の公式より $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

求める無限等比級数の値は $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

$\{r^n\}$ は $|r| < 1$ のとき 0 に収束するので $\dfrac{a}{1-r}$ に収束. □

$*|r| \geq 1$ のとき発散する ($\because$ $r = 1$ のとき $a + a + a + \cdots$ となり発散 □)

1.4 収束（ネイピア数 1）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が収束する証明

$\because$

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ としたとき a_n が単調数列で有界列であることを示せばよい.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}\\
&< 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!}\\
&< 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!}\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\\
&= a_{n+1}
\end{aligned}
$$

$\therefore a_n<a_{n+1}$ したがって a_n は単調増加数列.$\cdots$[1]

また

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\
&< 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\
&= 2+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&= 2+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\\
&< 2+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\right\}\\
&= 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 3
\end{aligned}
$$

$\therefore a_n<3$ したがって a_n は上に有界.$\cdots$[2]

[1][2] より a_n は収束する. □

1.5　収束（ネイピア数 2）

$\lim_{n \to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ になる証明

$\because$

$n = \frac{1}{m}$ とすると $\frac{1}{n} = m$,$n \to 0$ のとき $m \to \infty$

$\lim_{n \to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \quad \square$

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ となる証明

$\because$

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $n \leq x < n+1$ となる自然数 n をとる.$x \to \infty$ のとき $n \to \infty$

ここで $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 1 < 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$ を与え

さらに $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ を与える

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e$

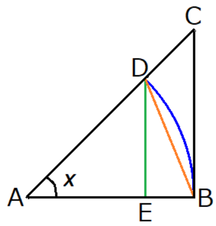
$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 = e \cdot 1 = e$

$\therefore$ はさみうちの原理より $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \square$

（上記は自然数のみが対象であったがこの証明により実数においても成り立つことがわかる）

1.6 収束（sinx/x）

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ になる証明



$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする. 上の図において $AD = AB = 1$ であり,D から AB に下した垂線のあしを E とする. また AD の延長線上に $CB \perp AB$ となる点 C をとる. このときの面積を比較すると

$\triangle ADB <$ 扇形 $ADB < \triangle ACB$

$\triangle ADB = \dfrac{1}{2}DE\cdot AB = \dfrac{1}{2}\sin x$, 扇形 $ADB = \pi r^2\cdot\dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$,$\triangle ACB = \dfrac{1}{2}DB\cdot AB\dfrac{1}{2}\tan x$

よって $\sin x < x < \tan x$

各辺を $\sin x$ で割ると $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ 逆数をとると $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1\cdots[1]$

また,$\cos(-x) = \cos x, \dfrac{\sin(-x)}{(-x)} = \dfrac{\sin x}{x}$ より [1] は $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のときも成り立つ.

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \lim_{x\to 0} 1 = 1$ だから, はさみうちの原理より $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ $\square$

2　微分

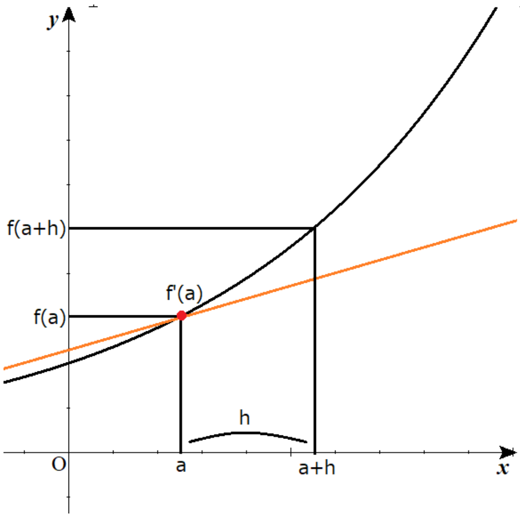
2.1　微分（導関数）の定義, 接線の方程式

微分 (導関数) の定義

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$ が存在することを

$f(x)$ は $x = a$ で微分可能という. 下記はイメージ



定理【接線の方程式】

$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ での接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

(証明)

導関数の定義より $f'(a)$ は $x = a$ での接線の傾き

方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$, 法線ベクトルは $\begin{pmatrix} f'(a) \\ -1 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix}$

まとめると $x = a$ の接線は通る点 $(a, f(a))$, 法線ベクトル $\begin{pmatrix} f'(a) \\ -1 \end{pmatrix}$

すなわち $f'(a)(x - a) + (-1)(y - f(a)) = 0$

$$\therefore y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \square$$

2.2　様々な関数の微分

よく知られている関数の微分

1. $$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n + nhx^{n-1} + \cdots + h^n) - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1} + \cdots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$$

2. $(k)' = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$ (k:定数)

三角関数の微分

1. $$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x\sin h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} = \cos x$$

2. $$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x\sin h) - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h} = -\sin x$$

3. $$(\tan x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{\cos(x+h)\cos x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h\cos(x+h)\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

指数・対数関数の微分

1. $(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h - 1)}{h}$, ここで $e^h - 1 = t$ とおくと $h = \log(1+t)$

また $h \to 0$ のとき $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^x t}{\log(1+t)} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log(1+t)} = e^x\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^x\cdot\log e = e^x$$

2. $(a^x)' = a^x\cdot\log a = a^x\log a$

3. $$(\log x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)\cdot\frac{x}{x} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\log e = \frac{1}{x}$$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{x\log a}$

2.3 微分公式

2.3.1 和・差・積, スカラー倍の微分公式

和・差の微分公式

$$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$$

(証明)

$$\begin{aligned}\{f(x) \pm g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} \pm \{g(x+h) - g(x)\}}{h} = f'(x) \pm g'(x) \quad \square\end{aligned}$$

スカラー（定数）倍の微分公式

$$\{kf(x)\}' = kf'(x)$$

(証明)

$$\{kf(x)\}' = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\{f(x+h) - f(x)\}}{h} = kf'(x) \quad \square$$

積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(証明)

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\{f(x+h) - f(x)\} + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \square\end{aligned}$$

2.3.2　商の微分公式

商の微分公式その１

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h) - f(x)\} + f(x)\{g(x) - g(x+h)\}}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\{f(x+h) - f(x)\} - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \square
\end{aligned}$$

商の微分公式その２

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)} \\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \square
\end{aligned}$$

2.4　合成関数の微分公式, 対数微分法

合成関数の微分公式

$$\{f\,(g(x))\}' = f'\,(g(x)) \cdot g'(x)$$

(証明)

$$\{f\,(g(x))\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ここで $t=g(x), s=g(x+h)-g(x)$ とすると, このとき $g(x+h)=s+g(x)=s+t$

また,$h\to 0$ のとき $s\to 0$

$$\{f\,(g(x))\}' = \lim_{s\to 0}\frac{f(s+t)-f(t)}{s}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(t)\cdot g'(x) = f'\,(g(x))\cdot g'(x) \quad \square$$

対数微分法

両辺の対数を取ってから微分する方法

step1. 両辺の符号が正であることを確認して対数を取る（正でないときは絶対値をとる）

step2. 両辺を x で微分する

step3. y' について解く

例）

$y=x^x$ 両辺の対数を取ると $\log y = \log x^x \overset{*1}{=} x\log x$

両辺を x で微分すると $^{(*2)}\dfrac{y'}{y} =^{(*3)} \log x + 1$

y' について解くと $y' = y(\log x + 1)$

y を元に戻す $y' = x^x(\log x + 1)$

---

*1 対数の性質より

*2 合成関数の微分より

*3 積の微分より

3　関数の連続性

3.1　関数の連続性の定義

関数の連続性の定義

1. ある関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続とは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. 区間 I において連続とは $\forall a \in I$(区間 I 内の任意の点 a) に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

また上記を満たすような関数 $f(x)$ を区間 I において連続関数という.

定理

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能 $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で連続

(証明)

仮定より $f(a)$ は定義されているので $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ を示す.

まず $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ここで $x = a + h$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a) + f(a)) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) + \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\{f(x) - f(a)\}(x-a)}{x-a} + f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a) \quad \square$$

ただし逆は言えない.

(例)$f(x) = |x|$ とすると

$f(0)$ で連続だが,$f'(0)$ が存在しない.($\Longleftrightarrow$ $x=0$ で連続だが,$x=0$ で微分不可能)

$$\because f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$\lim\limits_{h \to -0} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$ となり右側極限と左側極限が異なるため.

4　逆関数

4.1　逆関数の定義, 定理

逆関数の定義

1. 関数 f が定義域 I 上で 1 対 1(単射)$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in I$ s.t. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2. $f(x) = y$ を x について解き $x = g(y)$ となったとき,$y = g(x)$ を $f(x)$ の逆関数という.
またこのときの $g(x)$ を $f^{-1}(x)$ とかく.

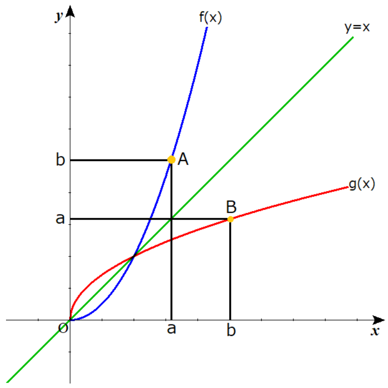
3. $y = x$ に対称なグラフを逆関数という.

逆関数の微分定理その 1

$y = f(x)$ が I 上で微分可能 $b = f(a), a \in I, f'(a) \neq 0$ とする. このとき

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

下記はイメージ
$g(x) = f^{-1}(x)$, 点 A における接線の傾きは $f'(a)$, 点 B における接線の傾きは $\dfrac{1}{f'(a)} = (f^{-1})'(b)$



逆関数の微分定理その 2

$y = f(x)$: 単調関数,$x = g(y)$:f の逆関数とする.

$g(y)$ が微分可能で $g'(y) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ が微分可能で $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} \left(\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} \right)$

(証明)
$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, また $y + t = f(x + h) \Leftrightarrow x + h = g(y + t) \cdots$[1]
[1] より $t = f(x + h) - y = f(x + h) - f(x) \Leftrightarrow h = g(y + h) - x = g(y + h) - g(y)$ で
また f は連続より $h \to 0$ のとき $t \to 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{g(y + h) - g(y)} = \frac{1}{g'(y)} \quad \square$$

4.2 逆関数の微分公式

逆関数の微分公式

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

(証明)

逆関数の性質より $f(f^{-1}(x)) = x$, また $f^{-1}(x) = g(x)$ とおくと $f(g(x)) = x$

このとき両辺を微分すると合成関数の微分より

$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$

$g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

$g(x) = f^{-1}(x)$ だったので $\therefore (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $\Box$

逆三角関数の定義

1. $y = \sin x \ \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x \ \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とかく.

2. $y = \cos x \ (0 \leq x \leq \pi)$ の逆関数を $y = \sin^{-1} x \ (0 \leq y \leq \pi)$ とかく.

3. $y = \tan x \ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y = \tan^{-1} x \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ とかく.

逆三角関数の微分公式

1. $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin(\sin^{-1} x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (-1 < x < 1)$

2. $(\cos^{-1} x)' = \dfrac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos(\cos^{-1} x)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (-1 < x < 1)$

3. $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(\tan^{-1} x)}} = \dfrac{1}{1 + \tan(\tan^{-1} x)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

4.3 逆三角関数の特殊な公式

逆三角関数の特殊な公式

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\ (-1 \leq x \leq 1)$$

(証明)

$y = \cos^{-1} x$ とおくと $x = \cos y\ \ (0 \leq y \leq \pi) \Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ このとき $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - y = \sin^{-1} x$ すなわち $\sin^{-1} x + y = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\ (-1 \leq x \leq 1) \quad \square$$

5　高次導関数

5.1　高次導関数の性質, ライプニッツの公式

高次導関数

1 回微分した関数を導関数, 2 回微分した関数を 2 次導関数,n 回微分した関数を n 次導関数という.
表記の仕方はいろいろある. 例えば $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ など

$f(x), g(x)$:n 回微分可能としたとき

1. $\{kf(x)\}^{(n)} = kf^{(n)}(x)$ (k : 定数)
2. $\{f(x) \pm g(x)\}^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

積の n 回微分公式【ライプニッツの公式】

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

(証明)
i)$n = 1$ のとき

$\{f(x)g(x)\}' = \dbinom{1}{0} f'(x)g(x) + \dbinom{1}{1} f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ よって成り立つ.

ii)$n = k$ のとき

$\{f(x)g(x)\}^{(k)} = \displaystyle\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} f^{(k-r)}(x)g^{(r)}(x)$ が成り立つと仮定する.

iii)$n = k + 1$ のとき (ii) の両辺を微分したとき)

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}^{(k+1)} &= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} f^{(k-r+1)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x) \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k}{r-1} f^{(k-r+1)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

$$= \binom{k}{0} f^{(k+1)}(x)g(x) + \sum_{r=1}^{k} \left(\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} \right) f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) + \binom{k}{k} f(x)g^{(k+1)}$$

ここで　$\dbinom{k}{0} = 1 = \dbinom{k+1}{0}$, $\dbinom{k}{k} = 1 = \dbinom{k+1}{k+1}$ また,$^*\dbinom{k}{r} + \dbinom{k}{r-1} = \dbinom{k+1}{r}$ より

$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x) \text{ よって成り立つ.} \quad \square$$

$$^*\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1} = \frac{k!}{r!(k-r)!} + \frac{k!}{(r-1)!(k-(r-1))!} = \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k-(r-1)} \right)$$

$$= \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!} = \frac{(k+1)!}{r!(k-(r-1))!} = \binom{k+1}{r} \quad \square$$

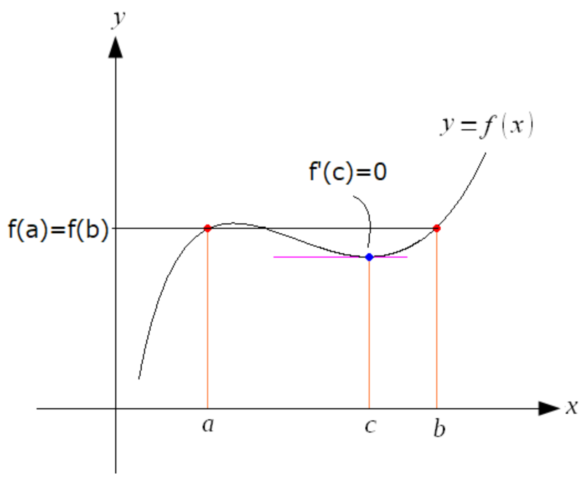
6　定理

6.1　ロルの定理

ロルの定理

$f(x)$: $[a,b]$ で連続,(a,b) で微分可能な関数

$f(a)=f(b) \Longleftrightarrow$ ある $c\,(a<c<b)$ が存在して $f'(c)=0$ を満たす.



(証明)

i) $f(x)$ が定数関数のとき $f(x)=k$ なので $f'(x)=0$ すなわち $f'(c)=0$

ii) $f(x)$ が定数関数でないとき

$f(x)$ は $c\,(a<c<b)$ で最大値（または最小値）$f(c)$ をとる.
ここでは最大値の場合のみを考える.

$f(c)$ は最大値より $f(c+h) \leq f(c)$ ($\Leftrightarrow f(c+h)-f(c) \leq 0$) となる.

$f'(c)$ は存在する.($f(x)$ は (a,b) で微分可能なので)

$$f'(c)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

· $h>0$ のとき

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \longrightarrow f'(c)=\lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \cdots [1]$$

· $h<0$ のとき

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \longrightarrow f'(c)=\lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \cdots [2]$$

[1][2] より $0 \leq f'(c) \leq 0$ よって $f'(c)=0$　□

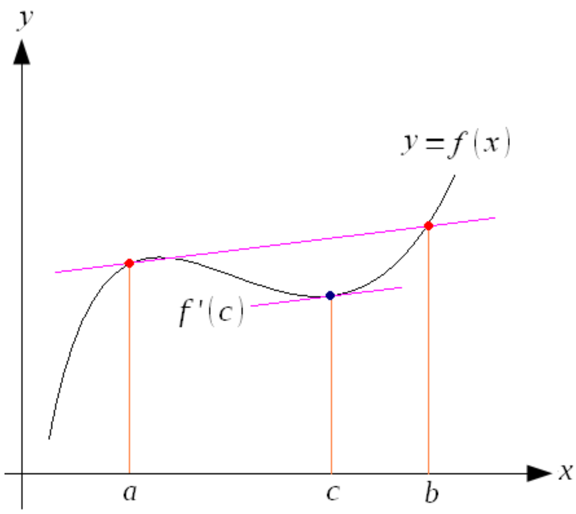
（ここでは最大値の場合のみを考えたが最小値の場合で考えても不等号が反対になるだけのことである）

6.2　平均値の定理（ラグランジュ）

(ラグランジュの) 平均値の定理

$f(x)$: $[a, b]$ で連続,(a, b) で微分可能な関数

ある $c\,(a < c < b)$ が存在して $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ が成り立つ.



(証明)

$k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $(a, b$: 定数$)$ とする.

$F(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$ とおく. このとき $F(a) = F(b) = 0$

$F'(x) = f'(x) - k \cdots [1]$

ロルの定理より,$F'(c) = 0$ となる $c\,(a < c < b)$ が存在する.$\cdots [2]$

[1][2] より $F'(c) = f'(c) - k = 0$

$\therefore f'(c) = k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$　□

6.3 コーシーの平均値の定理, ロピタルの定理

コーシーの平均値の定理

$f(x), g(x) : [a, b]$ で連続,(a, b) で微分可能な関数

(a, b) において $g'(x) \neq 0$ のとき, ある $c\,(a < c < b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ が成り立つ.}$$

(証明)

ロルの定理の対偶より $g'(x) \neq 0\,(a < x < b) \Rightarrow g(a) \neq g(b)$

$k = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ とする.

$F(x) = f(x) - f(b) + k(g(b) - g(x))$ とおくと,$F(a) = F(b) = 0$,$F'(x) = f'(x) - kg'(x)$ なので

ロルの定理より $F'(c) = 0$ となる $c\,(a < c < b)$ が存在する.

$F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$ すなわち $k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \square$$

ロピタルの定理

$f(x), g(x) : x = a$ の近くで連続,$x \neq 0$ で微分可能, また $g'(x) \neq 0$, $f(a) = g(a) = 0$ とする.

$$\text{このとき,}\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が成り立つ.}$$

(証明)

コーシーの平均値の定理よりある $c\,(a < c < x) \cdots [1]$ が存在し,$\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$f(a) = f(b) = 0$ より $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

$[1]$ より $x \to a$ のとき $c \to a$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square$$

【補足】

$x \to a \pm 0, x \to \pm\infty$ でも同様のことが成り立つ. また $\dfrac{0}{0}$ 形以外に $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$(順不同) 形でも成り立つ.
この証明はかなり難解なので省略する.

6.4 テイラーの定理

テイラーの定理

$f(x)$: 区間 $I(\supset [a,b])$ で $(n+1)$ 回微分可能である $c\,(a<c<b)$ が存在して次が成り立つ.

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+R_{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+R_{n+1}\qquad R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

(証明)

$F(x)=f(b)-f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-l(b-x)^{n+1}$ とする.

また l は $F(a)=0$ となる定数とする.

$$F(b)=f(b)-f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-b)^k-l(b-b)^{n+1}=0$$

ロルの定理より $F'(c)=0$ となる $c\,(a<c<b)$ が存在する.

ここで

$$F'(x)=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^{k-1}\cdot k\cdot(-1)-(-1)(n+1)\cdot l(b-x)^n$$

$$=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}k\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^{k-1}+l(n+1)(b-x)^n$$

$$=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+l(n+1)(b-x)^n$$

$m=k-1$ と置き換える.

$$=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m+1)}(x)}{m!}(b-x)^m+l(n+1)(b-x)^n$$

$$=-f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+f'(x)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{f^{(m+1)}(x)}{m!}(b-x)^m+l(n+1)(b-x)^n$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{f^{(m+1)}(x)}{m!}(b-x)^m+l(n+1)(b-x)^n$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+l(n+1)(b-x)^n$$

$F'(c)=0$ より

$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-c)^n+l(n+1)(b-c)^n=0\Leftrightarrow(b-c)^n\{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}+l(n+1)\}=0$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}+l(n+1)=0\Leftrightarrow l(n+1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\ \therefore l=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$F(a)=0$ より $f(b)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}=0$

$$\therefore f(b)=f(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\quad\square$$

テイラー展開【剰余項, 積分 ver.】

I を開区間, f を I における C^{n+1} 級関数, a を I 上の点とする. このとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_{n+1}(x;a)\ ,\ R_{n+1}(x;a)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt$$（：剰余項）

$\because$

$n=0$ のとき微分積分学の基本定理より

$$R_1(x;a)=\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)\ \therefore\ f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$$ よって成り立つ.

$n=1$ のとき

$$f(x)-f(a)=\int_a^x\{-(x-t)'\}f'(t)dt$$ 部分積分すると

$$=[-(x-t)f'(t)]_a^x+\int_a^x(x-t)f''(t)dt=(x-a)f'(a)+\int_a^x(x-t)f''(t)dt$$

$$\therefore\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x(x-t)f''(t)dt$$ よって成り立つ,

$n-1$ のとき

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt$$ が成り立つと仮定する

$n-1$ の時の剰余項を部分積分すると

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\left\{\left[\frac{-1}{n}(x-t)^nf^{(n)}(t)\right]_a^x+\int_a^x\frac{1}{n}(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a)+\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt$$ よって n のときも成り立つ.

数学的帰納法により成り立つ　□

定理

ある定数 $M>0$ が存在し,$|x|<a$ となる任意の x とすべての $n\in\mathbb{N}$ について $|f^{(n)}(x)|\leq M$ が成り立つならば $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0\ (|x|<a)$ が成り立つ.

(証明)

$k>r$ となる k を固定する.

このとき $n>k$ に対して

$$0\leq \frac{r^n}{n!}=\frac{r}{n}\cdot\frac{r}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{r}{k}\cdot\frac{r}{(k-1)!}<\frac{r}{n}\cdot\frac{r^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}\cdot\frac{r^{k-1}}{(k-1)!}=0$ はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0, r\geq 0$ を定数とすると $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0\cdots[1]$

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{{}^{*}M}{(n+1)!}a^{n+1}$$

$(*|x|<a$ のとき $|\theta x|<a$ となる $|f^{(n+1)}(\theta x)|\leq M)$

[1] より $\lim_{n\to\infty}\frac{M}{(n+1)!}a^{n+1}=0$ なので

はさみうちの原理より $|x|<a$ で $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ □

6.6 マクローリン展開

定義【マクローリン展開】

$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ のとき $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, 展開すると

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ となる.

これを $f(x)$ のマクローリン展開という.

マクローリン展開の主な例

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ $(x \in \mathbb{R})$ $\left[\{e^x\}^{(n)} = e^x\right]$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ $(x \in \mathbb{R})$ $\left[\{\sin x\}^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)\right]$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $(x \in \mathbb{R})$ $\left[\{\cos x\}^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)\right]$

4. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$ $(x \in (-1, 1])$ $\left[\{\log x\}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right]$

5. $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \cdots$

$(x \in (-1, 1))$ $\left[\{(1+x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\right]$

二項係数の定義

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

ただし $\binom{n}{0} = 1$ と定める. また $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$

マクローリン展開の性質

$f(x), g(x)$ のマクローリン展開が

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ $(|x| < r)$

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$ $(|x| < r)$, このとき

(1) $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ も $|x| < r$ でマクローリン展開でき,

i). $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots$

ii). $f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)x^n + \cdots$

が成り立つ.

(2) $|x| < r$ における微分・積分は各項で微分・積分したもの

i). $f'(x) = (a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2)' + \cdots + (a_nx^n)' + \cdots$

ii). $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x a_0dt + \int_0^x a_1tdt + \int_0^x a_2t^2dt + \cdots + \int_0^x a_nt^ndt + \cdots$

7 関数の増減凹凸と極値

7.1 関数の増減凹凸の定義

関数の増減凹凸の定義

$f(x)$: 区間 I で定義された関数

1. $f(x)$ が I で単調増加とは $x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) < f(x_2)$ となること.
同じく単調減少とは $x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) > f(x_2)$ となること.

2. $f(x)$ が I で広義単調増加とは $x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) \leq f(x_2)$ となること.
同じく広義単調減少とは $x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) \geq f(x_2)$ となること

3. f が I で微分可能とする.
上に凸とは I の各点における接線が $y = f(x)$ より上にある. すなわち

$$^{*1}f'(a)(x-a) + f(a) > f(x) \text{ ただし } x \neq a; x, a \in I \cdots \text{[A]}$$

下に凸とは I の各点における接線が $y = f(x)$ より下にある. すなわち

$$^{*1}f'(a)(x-a) + f(a) < f(x) \text{ ただし } x \neq a; x, a \in I \cdots \text{[B]}$$

$f(x)$ が区間 I で上に凸とは $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ なら必ず

$$^{*2}f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ となること.} \cdots \text{[A']}$$

$f(x)$ が区間 I で下に凸とは $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ なら必ず

$$^{*2}f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ となること.} \cdots \text{[B']}$$

---

*1 は $x = a$ における接線
*2 は $x = x_1, x = x_2$ で $f(x)$ を交わす直線

7.2 定理【単調】

定理 1

区間 (a,b) において常に $f'(x)>0 \Longrightarrow [a,b]$ 上で $f(x)$ は単調増加

同じく $f'(x)<0 \Longrightarrow [a,b]$ 上で $f(x)$ は単調減少

$f'(x)=0 \Longrightarrow [a,b]$ 上で $f(x)$ は定数関数

(証明)

（単調増加の場合のみを考える.）

平均値の定理より

$\forall x_1, x_2 \in [a,b](x_1<x_2)$ に対して $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ となる c $(x_1<c<x_2)$ が存在する.

仮定より $f'(c)>0$ なので

$f(x_2)-f(x_1)>0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$ よって $f(x)$ は単調増加　□

(単調減少の場合は不等号が逆になる.)

$f'(c)=0$ より $f(x_1)=f(x_2)$ よって $f(x)$ は定数　□

7.3 関数の極値の定義, 定理

関数の極値の定義

1. $f(x)$ が $x=a$ で極大とは $x=a$ の近くに限ると $x=a$ でのみ最大
$f(x)$ が $x=a$ で極小とは $x=a$ の近くに限ると $x=a$ でのみ最小
またこのときの $f(a)$ を極値という.

2. 上（下）に凸から下（上）に凸に変わる点を変曲点という.

定理

$$f(x) \text{ が } x=a \text{ で極値をとる} \Longrightarrow f'(a)=0$$

証明はロルの定理の証明と同様のため省略.

定理 2

$f(x): x=a$ の近くで微分可能,$f'(a)=0$ を満たす.

1. $x<a$ のとき $f'(x)>0, x>a$ のとき $f'(x)<0 \Longrightarrow f(x)$ は $x=a$ で極大.
2. $x<a$ のとき $f'(x)<0, x>a$ のとき $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は $x=a$ で極小

(証明)

1. 定理 1 より $x<a$ で $f(x)$ は単調増加,$x>a$ で $f(x)$ は単調減少.
したがって $f(x)$ は $x=a$ で極大　□
2. 定理 1 より $x<a$ で $f(x)$ は単調減少,$x>a$ で $f(x)$ は単調増加.
したがって $f(x)$ は $x=a$ で極小　□

定理

$f(x): x=a$ の近くで 2 回微分可能,$f'(a)=0$

1. $f''(a)<0 \Longrightarrow x=a$ で極大.
2. $f''(a)>0 \Longrightarrow x=a$ で極小.

(証明)

1. $f''(a)<0$ だから定理 1 より $f'(x)$ は $x=a$ において減少の状態である.
すなわち x を a の近くの点とするとき,
$x<a$ ならば $f'(x)>f'(a)=0$,$x>a$ ならば $f'(x)<f'(a)=0$
よって定理 2 より $f(x)$ は極大.　□

2. $f''(a)<0$ だから定理 1 より $f'(x)$ は $x=a$ において増加の状態である.
すなわち x を a の近くの点とするとき,
$x<a$ ならば $f'(x)<f'(a)=0$,$x>a$ ならば $f'(x)>f'(a)=0$
よって定理 2 より $f(x)$ は極小.　□

7.4 定理【同値】

定理 3

$f(x)$: $[a,b]$ で連続,(a,b) で微分可能, このとき次のことは同値

i). $f(x)$ は $[a,b]$ で [A'] ([B'])

ii). $f'(x)$ は (a,b) で単調増加 (減少)

iii). $f(x)$ は $[a,b]$ で [A] ([B])
すなわち $f(x) > (<) f(c) + f'(c)(x-c)$,（$a<c<b, a<x<b, x \neq c$）$f(x)$ が接線より上（下）

(証明)

i)⇒iii)

$x_1 < x_3 < x_2$ とすると $\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} < \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ が成り立つ.$\cdots$ [1]

ここで任意の点 $c \in [a,b]$ をとる

また,$c<x$ として $c<x_1<x_2<x$ となるような x_1, x_2 をとる.

このとき [1] を $c<x_1<x_2, c<x_2<x$ にそれぞれ使うと

$$\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} < \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ となる.}$$

ここで $x_1 \to c$ とすると

$$f'(c) \leq \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \therefore f'(c) < \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

整理すると iii) の式になる.$x<c$ も同様.

iii)⇒ii)

$a<x_1<x_2<b$ とすると iii) より $f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$
$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1-x_2)$

整理すると $f'(x_1) < \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < f'(x_2) \therefore f'(x)$ は単調増加.

ii)⇒i)

$x_1, x_2 \in [a,b]$ をとり,$x_1<x<x_2$ とする.

平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$$

となる $c_1, c_2 (x_1<c_1<x.x<c_2<x_2)$ が存在する.$\cdots$ [2]

ii) の仮定より,$c_1<c_2$ なので $f'(c_1) < f'(c_2)$

[2] より $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ 整理すると iii) が成り立つ. □

7.5　定理【凹凸増減表】

定理

$f(x)$: $[a,b]$ で連続,(a,b) で 2 回微分可能

i). (a,b) で $f''(x) > 0 \Rightarrow [a,b]$ で下に凸

ii). (a,b) で $f''(x) < 0 \Rightarrow [a,b]$ で上に凸

(証明)

i) について

定理 1 より $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ が単調増加

また, 定理 3 の同値関係より $f'(x)$ が単調増加 $\Longleftrightarrow f(x)$ が下に凸（ ii) も同様） □

8　積分法

8.1　不定積分

不定積分の定義

関数 $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**または**不定積分**という.

また
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
(C は積分定数) とかく.

定理

$F(x), G(x) : f(x)$ の原始関数

このとき $G(x) = F(x) + C$ となる定数 C が存在する.

(証明)
$\{G(x) - F(x)\}' = 0$ を示せばよい. 微分して 0 になるのは定数のみ
$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$　□

不定積分の性質

微分の線形性より次が成り立つ.

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

定理

1. $\displaystyle\int \{f(x)\}^{\alpha} f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C \ \ (\alpha \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$
3. $F(x) : f(x)$ の原始関数,$a \neq 0$ のとき

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

1. $\displaystyle\left[\frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C\right]' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha} f'(x) = \{f(x)\}^{\alpha} f'(x)$　□
2. $\displaystyle\{\log|f(x)| + C\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$　□
3. $\displaystyle\left\{\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right\}' = \frac{1}{a}f(ax+b)(ax+b)' = f(ax+b)$　□

8.2　置換積分法, 部分積分法

定理【置換積分法】

単調な * C^1 級関数 $g(x)$ により $t = g(x)$ と変数変換を行うと

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \text{ が成り立つ.}$$

*$f(x)$ が C^1 級 (連続微分可能) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f(x)$ が 1 回微分可能かつ $f'(x)$ が連続.

(証明)
$F(t) : f(t)$ の原始関数

合成関数の微分より

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = \frac{d}{dt}F(t)\frac{dt}{dx} = f(t)\frac{dt}{dx} = f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

よって $\displaystyle\int f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)dx = \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx = F(g(x)) + C = F(t) + C = \int f(t)dt \quad \square$

定理【部分積分法】

$f(x)$: 連続,$g(x)$: C^1 級

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき

$\displaystyle\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$ が成り立つ.

(証明)
積の微分公式より
$\{F(x)g(x)\}' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$
$\therefore f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x) \cdots [1]$

[1] の両辺を積分すると

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)dx &= \int[\{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)]dx \\ &= \int\{F(x)g(x)\}'dx - \int F(x)g'(x)dx \\ &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

定積分の定義

${}^{\exists}M, m > 0; m \leq f(x) \leq M \ \ (a \leq x \leq b)$ を仮定する.

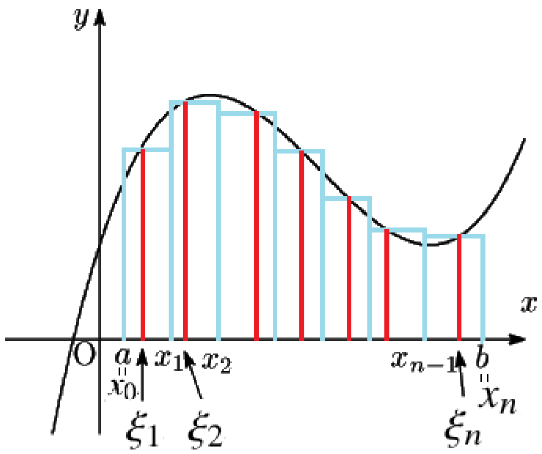
分割 Δ を $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ とする.

小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots [x_{n-1}, x_n]$ の中にそれぞれ任意に $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ をとる.

このとき $S(\Delta) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \longleftarrow \text{リーマン和という.}$$

イメージ



$|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ とする.

$|\Delta| \to 0$ のとき, すなわち, 分割 Δ の幅を限りなく小さくするとき,
分割の仕方及び ξ_i の選び方に依存することなく $S(\Delta)$ が一定の値 α に近づく.

$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$ が成り立つならば

この極限値 α を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における**定積分**といい

$\int_a^b f(x)dx$ とあらわす. またこのとき $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において**積分可能**であるという.

定積分の定義をまとめると

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

定理

$f(x) : [a, b]$ 上で連続 $\Longrightarrow f(x) : [a, b]$ 上で積分可能

8.4　区分求積法

区分求積法

$f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能

$[a,b]$ を n 等分すると, 各小区間の幅は $\dfrac{b-a}{n}$ である.

よって各分点は $x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i \ \ (i = 1, 2, ..., n)$ と表される.

小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において $\xi_i = x_{i-1}$ or $\xi_i = x_i$ のどちらかを ξ_i とすることにより

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n}(i-1)) & (\xi_i = x_{i-1}) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n}i) & (\xi_i = x_i) \end{cases}$$

定積分の性質その 1【線形性】

$f(x), g(x) : [a, b]$ において積分可能

1. $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(証明)

$$\begin{aligned}
\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \{f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\} \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\} \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad \square
\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(証明)

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf(x)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n \{kf(\xi_i)\}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= k \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b f(x)dx \quad \square
\end{aligned}$$

定積分の性質その 2【加法性】

$a < c < b$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(証明)

$a < c < b$ のとき

$\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = c, \Delta_2 : c = x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < ... < x_{2n} = b$ とすると

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{|\Delta_1|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|\Delta_2|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n+i})(x_{n+i} - x_{n+i-1})$$

$\Delta : x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < ... < x_{2n}$, $|\Delta| := \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ とすると

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n+i})(x_{n+i} - x_{n+i-1}) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + f(\xi_{n+i})(x_{n+i} - x_{n+i-1}) \right) \right\} \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx \quad \square
\end{aligned}$$

定積分の性質その 3【大小関係保存性】

$f(x) \leq g(x)$ $(a \leq x \leq b)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(証明)

仮定より $f(x) \leq g(x)$, また $x_i - x_{i-1} \geq 0$ より $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

$1 \leq i \leq n$ より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g(x)dx \quad \square$

定積分の性質その 3

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(証明)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \overset{*}{\leq} \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|dx \quad \square$$

$*\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ の証明

i) $n = 1$ のとき

$\left|\sum_{i=1}^{1} a_i\right| = |a_1|, \sum_{i=1}^{1} |a_i| = |a_1|$ よって成立.

ii)　$n = k$ のとき

$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$ が成り立つと仮定する.

iii) $n = k + 1$ のとき

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right| \overset{(|A+B|\leq|A|+|B|)}{\leq} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| + |a_{k+1}|$$

$$\overset{\text{ii}}{\leq} \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |a_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|$$

$$\therefore \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad \square$$

(別証明)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \Leftrightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ここで $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

よって定積分の性質その 2 より

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad \square$$

8.8 積分の平均値の定理

定理【積分の平均値の定理】

$f(x) \in \mathrm{C}\,[a,b]$ ($[a,b]$ で連続) のとき

$$^{\exists}\xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

(証明)

i)$f(x) \equiv k$: 定数のとき　($f(x) \equiv k \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$)

$a \leq \forall\xi \leq b$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = k(b-a) = f(\xi)(b-a)$

ii)$f(x) \neq k$ のとき

$f(x) \in C[a,b]$ より $^{\exists}m = \displaystyle\min_{a \leq x \leq b} f(x), ^{\exists}M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ よって $m \leq f(x) \leq M$ $(m < M)$

このとき

$^{\exists}C_m : m = f(C_m), ^{\exists}C_M : M = f(C_M)$ を選べる. ただし $C_m, C_M \in [a,b], C_m \neq C_M$

したがって

$m(b-a) \overset{*1}{=} \displaystyle\int_a^b mdx \overset{*2}{\leq} \int_a^b f(x)dx \overset{*2}{\leq} \int_a^b Mdx \overset{*1}{=} M(b-a)$

(*1 定数の積分の公式)

(*2 定積分の大小関係保存の法則)

すべての辺を $b-a$ で割ると $m = f(C_m), M = f(C_M)$ だったので

$$f(C_m) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(C_M)$$

$C_m < C_M$ の場合 ($C_m > C_M$ も同様)

$f(C_m) < f(C_M)$ より中間値の定理（1.1）を用いると

$$^{\exists}\xi \in [C_m, C_M] \subset [a,b] : \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad \square$$

微分積分学の基本定理

$f(x) : [a, b]$ で連続

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

(証明)

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とすると $F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right\} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right\} = \frac{1}{h}\left\{\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt\right\} \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\end{aligned}$$

ここで積分の平均値の定理を用いると

i) $h > 0$ のとき

$^{\exists}\xi \in [x, x+h] : \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)\{(x+h)-x\} = f(\xi)h$

ii) $h < 0$ のとき $^{\exists}\xi \in [x+h, x] : \displaystyle\int_{x+h}^x f(t)dt = f(\xi)\{x-(x+h)\} = -f(\xi)h$

i),ii) より $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)h$

ここで ξ は x と $x+h$ の間にあるので,$h \to 0$ のとき $\xi \to x$ である. したがって

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x) \quad \square$$

8.10　定積分の基本公式

定理【定積分の基本公式】

$f(x):[a,b]$ 上で連続,$G(x):f(x)$ の原始関数

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(証明)

$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とすれば, 微分積分学の基本定理より $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である.
よって

$G(x) = F(x) + C$

$G(b) - G(a) = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\}$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx \quad \square$$

定理【置換積分法（定積分 ver.)】

$f(x)$: 区間 $[a,b]$ で連続　$g(t)$: 区間 $[\alpha,\beta]$ で微分可能
また $g(\alpha)=a, g(\beta)=b, g'(x):[\alpha,\beta]$ で連続とする.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

(証明)

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ とすると微分積分学の基本定理より $F'(x)=f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt &= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}\left(F(g(t))\right)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))\\ &= F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

定理【部分積分法（定積分 ver.)】

$f(x), g(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(証明)

積の微分法より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を $[a,b]$ で積分すると

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx\\ [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx\\ \therefore \int_a^b f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

定理【不定積分を求める最終手段】

$R(z,w)$ が 2 つの文字 z,w が有理式であるとき $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおけば

$$\int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \text{ が成り立つ.}$$

(証明)

$$\frac{dt}{dx}=\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)=\frac{t^2+1}{2}\therefore\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}$$

加法定理より

$$\tan x=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\cos x\cdot\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2t}{1+t^2}\quad\square$$

定義【偶関数, 奇関数】

$$f(x):\text{偶関数}\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}f(-x)=f(x)$$
$$f(x):\text{奇関数}\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}f(-x)=-f(x)$$

定積分の性質その 4【覚えておくと便利かも!?】

1. $f(x)$ が偶関数ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

2. $f(x)$ が奇関数ならば $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

(証明)

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a dx$$

1. $\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)dx\overset{*1}{=}-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt\overset{*2}{=}\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx\quad\square$

(*1 $x=-t$ に置換,*2 偶関数なので)

2. $\displaystyle\int_{-a}^{0}f(x)dx\overset{*1}{=}-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt\overset{*2}{=}-\int_0^a f(t)dt=-\int_0^a f(x)dx\quad\square$

(*1 $x=-t$ に置換,*2 奇関数なので)

8.13 便利かもしれない $\sin x, \cos x$ の定積分公式

公式

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

(証明)

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ より $\frac{\pi}{2} - x = t$ とおくと $dx = -dt$

また x の被積分区間が $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ のとき t の被積分区間は $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad \square$$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$ について $\sin x = \sin(\pi - x)$ より $\pi - x = t$ とおくと $dx = -dt$

また x の被積分区間が $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ のとき t の被積分区間は $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin(\pi - x))dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad \square$$

3. $\displaystyle I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ とする.$\pi - x = t \Leftrightarrow x = \pi - t$ とおくと $dx = -dt$

また x の被積分区間が $[0, \pi]$ のとき t の被積分区間は $[\pi, 0]$

$$I = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)dt = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t) - tf(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - t\int_0^{\pi} f(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - t\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \qquad \therefore I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

また 2. より $\displaystyle\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \quad \square$

8.14 $\sin^n x$ の積分【ウォリスの公式】

ウォリスの公式

$$2 \leq n \in \mathbb{Z} \text{ のとき } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} (n = 2k\ (k \in \mathbb{Z})) \\ \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} (n = 2k+1\ (k \in \mathbb{Z})) \end{cases}$$

(証明)

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$$= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \therefore I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

よって

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} (n = 2k\ (k \in \mathbb{Z})) \\ \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} (n = 2k+1\ (k \in \mathbb{Z})) \quad \square \end{cases}$$

【補足】二重階乗

$n!! = n(n-2)(n-4) \cdots 1$

8.15　有界性の定義, 広義積分

定義【有界性】

$I \subset \mathbb{R}$: 区間,$f : I$ で有界 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}M > 0$ s.t.$\forall x \in I, |f(x)| \leq M$

(ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in I$ について $|f(x)| \leq M$)

$*f : I$ で有界でない $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M > 0, {}^{\exists}x \in I$ s.t.$|f(x)| > M$

定義【広義積分】

1. $f(x)$ は $[a, b)$ で連続であるが, 有界でない. または $x = b$ で $f(x)$ が定義されないとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \left(= \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x)dx \right)$$

2. $f(x)$ は $(a, b]$ で連続であるが, 有界でない. または $x = a$ で $f(x)$ が定義されないとき

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \left(= \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx \right)$$

3. $f(x)$ は $[a, +\infty)$ で連続とする.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

4. $f(x)$ は $(-\infty, b]$ で連続とする.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

これら右辺の極限値が存在すれば左辺の広義積分は収束するといい,
存在しなければ発散するという.

比較定理

1. $(a,b]$ において $f(x)$ は連続だが, 有界でないとする.
ある $\alpha \in (0,1)$ に対して $(x-a)^\alpha|f(x)|$ が有界ならば $\left(\displaystyle\lim_{x\to a+0}(x-a)^\alpha|f(x)| =^\exists l\right)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ は絶対収束する.}\left(\int_a^b |f(x)|dx\right) \text{ が収束する.}$$

2. $[a,b)$ において $f(x)$ は連続だが, 有界でないとする.
ある $\alpha \in (0,1)$ に対して $(b-x)^\alpha|f(x)|$ が有界ならば $\left(\displaystyle\lim_{x\to b-0}(b-x)^\alpha|f(x)| =^\exists l\right)$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ は絶対収束する.}$$

3. $[a,+\infty)$ において $f(x)$ は連続とする.
ある $\alpha > 1$ に対して,$x^\alpha|f(x)|$ が有界ならば $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha|f(x)| =^\exists l\right)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ は絶対収束する.}$$

4. $(-\infty,b]$ において $f(x)$ は連続とする.
ある $\alpha > 1$ に対して,$x^\alpha|f(x)|$ が有界ならば $\left(\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^\alpha|f(x)| =^\exists l\right)$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \text{ は絶対収束する.}$$

(証明)

1. 仮定より, ある定数 $M>0$ が存在して $(x-a)^\alpha|f(x)| < M \Leftrightarrow |f(x)| < \dfrac{M}{(x-a)^\alpha}$ が成り立つ.

$$\int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|dx < \int_{a+\varepsilon}^b \frac{M}{(x-a)^\alpha}dx = M\left[\frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^b$$
$$= \frac{M}{1-\alpha}\left\{(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right\}$$

仮定より $1-\alpha>0$ $\quad \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b |f(x)|dx < \frac{M}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}$

$|f(x)| \geq 0$ なので左辺は ε が小さくなると単調に増大し,
それが有界なので $\varepsilon \to +0$ のとき収束する. □

2. 同様

3. 仮定より, ある定数 $M>0$ が存在して $x^\alpha|f(x)| < M \Leftrightarrow |f(x)| < \dfrac{M}{x^\alpha}$ が成り立つ.

$$\int_a^t |f(x)|dx < \int_a^t \frac{M}{x^\alpha}dx = M\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_a^t = \frac{M}{1-\alpha}\left\{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right\}$$

仮定より $\alpha-1>0$ $\quad \displaystyle\int_a^t |f(x)|dx = \frac{M}{\alpha-1}(a^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}) < \frac{M}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$

左辺は t に関して単調増加で上に有界. したがって収束する. □

4. 同様

8.17 面積, 体積, 回転体, 曲線の長さ

面積

$f(x), g(x) : [a,b]$ で連続, また $x \in [a,b]$ で $g(x) \leq f(x)$ とすると,$y = f(x), y = g(x)$ および $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

体積

$S(x) \in \mathrm{C}[a,b] : x$ 軸に垂直な平面による立体の断面積
このとき $a \leq x \leq b$ における立体の体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

(証明)
区間 $[a,b]$ の分割を $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$,$|\Delta| := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$

$\forall c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ に対して $x = c_i$ での断面積は $S(c_i)$ である.
$S(c_i)(x_i - x_{i-1})$ は V の微小部分の体積の近似となる.

$V(\Delta) = \displaystyle\sum_{i=1}^n S(c_i)\Delta x_i$ が $[a,b]$ での V の近似になる.

$V(\Delta)$ は $S(x)$ が連続関数なので $|\Delta| \to 0$ としたときある一定の値に近づく.

$$V = \lim_{|\Delta| \to 0} V(\Delta) = \int_a^b S(x)dx \quad \square$$

回転体の体積

$f(x) : [a,b]$ で連続関数としたとき $y = f(x), y = 0(x$ 軸$)$,$x = a, x = b$ で囲まれた図形にを x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

(証明)
円の面積は半径を r としたとき $\pi \cdot r^2$ ここでは $r = f(x)$ である.
よって断面積は $\pi \cdot \{f(x)\}^2$

$$\therefore V = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \quad \square$$

曲線の長さ

$f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ としたときの $y=f(x)$,$(a \leq x \leq b)$ の長さ ℓ は

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

(証明)

区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ とする,

ここで $p_i = (x_i, f(x_i))$ とする.

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ の範囲にある部分の長さ ℓ_i を p_{i-1} と p_i を結ぶ直線で近似する.

三平方（ピタゴラス）の定理より

${\ell_i}^2 = (x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2$ *

$$\therefore \ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n$ を結ぶ折れ線の長さ $\ell(\Delta)$ は

$$\ell(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

ここで平均値の定理より

ある $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ が存在して

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) \quad \therefore f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \{f'(c_i)(x_i - x_{i-1})\}^2}$

$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \{f'(c_i)\}^2\{(x_i - x_{i-1})\}^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2[1+\{f'(c_i)\}^2]}$

$= \sqrt{1+\{f'(c_i)\}^2}(x_i - x_{i-1})$

$$\ell(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\{f'(c_i)\}^2}(x_i - x_{i-1})$$

$|\Delta| := \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ とすると

$|\Delta| \to 0$ の極限をとれば

$$\ell = \lim_{|\Delta| \to 0} \ell(\Delta) = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx \quad \square$$

*2 乗するので $f(x_i), f(x_{i-1})$ の大小関係はどうでもよい.

8.18　シュワルツの不等式

シュワルツの不等式

$f(x), g(x) : [a, b]$ で連続

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

等号成立条件はある t_0 に対して $t_0 f(x) + g(x) \equiv 0$ となるとき.

(証明)

任意の定数 t について $(tf(x) + g(x))^2 \geq 0$ が成り立つ.

積分の大小関係保存性と線形性より

$$0 \leq \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx = \int_a^b \left[t^2\{f(x)\}^2 + 2tf(x)g(x) + \{g(x)\}^2\right] dx$$

$$= t^2 \underbrace{\int_a^b \{f(x)\}^2 dx}_{A\ とする} + 2t \underbrace{\int_a^b f(x)g(x)dx}_{B\ とする} + \underbrace{\int_a^b \{g(x)\}^2 dx}_{C\ とする}$$

$A \geq 0$ であるが $A = 0$ ならば $[a, b]$ で $f(x) \equiv 0$ であり不等式は成立.

$A > 0$ として考える. 任意の t に対して $At^2 + 2Bt + C \geq 0$ が成り立つので, 平方完成すると

$$At^2 + 2Bt + C = A\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A} + C \geq 0 \text{ なので}$$

$$-\frac{B^2}{A} + C \geq 0 \iff B^2 \leq AC \text{ でなければならない}^*$$

$$\therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx$$

等号成立条件について

任意の t に対して $At^2 + 2Bt + C > 0$ ならば $B^2 < AC$ になるので $B^2 = AC$ となるのは

ある t_0 に対して $A{t_0}^2 + 2Bt_0 + C = 0 \iff \displaystyle\int_a^b (t_0 f(x) + g(x))^2\, dx = 0$

$$\therefore t_0 f(x) + g(x) \equiv 0 \quad \square$$

---

*係数が A>0 で 2 乗してあるから

(別証明)

$$F(b) = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \int_a^b \{g(x)\}^2 dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \text{ とする.}$$

$$F'(b) = \{f(b)\}^2 \int_a^b \{g(x)\}^2 dx + \{g(b)\}^2 \int_a^b \{f(x)\}^2 dx - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right) f(b)g(b)$$

$$= \int_a^b [\{f(x)g(b)\} - \{f(b)g(x)\}]^2 dx \geq 0$$

$$F'(b) \geq 0 \text{ より } F(b) \geq 0 \quad \square$$

8.19 積分の平均値の定理の拡張

定理【積分の平均値の定理の拡張】

$f(x), g(x) : [a,b]$ で連続

1. $[a,b]$ で $g(x) \geq 0$（または $g(x) \leq 0$）とすれば

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \text{ を満たす } \xi \in (a,b) \text{ が存在する.}$$

2. $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ で $f'(x) \geq 0$（または $f'(x) \leq 0$）とすれば

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \text{ を満たす } \xi \in (a,b) \text{ が存在する.}$$

(証明)

1. $g(x) \geq 0, g(x) \neq 0$ を考える.$M := \max_{a \leq x \leq b} f(x), m := \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ とする.
$^{*1} mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ なので $[a,b]$ で積分すると

$m\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)g(x)dx < M\int_a^b g(x)dx$ が成り立つ.

$\int_a^b f(x)g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx$ とおくと,$\int_a^b g(x)dx > 0$ である.

^{*1} より $m < k < M$
よって連続関数の中間値の定理（1.1）より $k = f(\xi)$ となる $\xi \in (a,b)$ が存在する.

$$\therefore \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad \square$$

2. $f'(x) \geq 0$ の場合を考える.
$G(x) = \int_a^x g(t)dt$ とすると $G'(x) = g(x)$

$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)G'(x)dx = [G(x)f(x)]_a^b - \int_a^b G(x)f'(x)dx$

$[G(x)f(x)]_a^b = G(b)f(b) - \underbrace{G(a)}_{=0}f(a) = f(b)G(b)$

また 1 を用いると $\int_a^b G(x)f'(x)dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)dx = G(\xi)(f(b) - f(a))$

$= (f(b) - f(a))\int_a^\xi g(x)dx$ を満たす $\xi \in (a,b)$ が存在する.

以上をまとめると

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)\int_a^b g(x)dx - (f(b) - f(a))\int_a^\xi g(x)dx \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

参考文献

[1] 大原 一孝　（1999）『実例で学ぶ 微分積分』　学術図書出版社

[2] 田島一郎 （1981）　『解析入門』　岩波書店