線型代数学 問題集解答

詳細な解答を付けたつもりですが, ところどころ省略している箇所もあります. ご了承ください.
内容に不備や落丁, 質問等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします.
まぁ質問は担当の先生に聞くのが一番かもしれません.

目次

1 線型 I（森先生）

1.1 集合の基礎

$\boxed{1}$ 以下の集合 A, B, C に対して, 以下の問いに答えよ.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2n | n \text{ は整数かつ奇数 }\}$

$C = \{k \in \mathbb{R} | k \notin \mathbb{N}\}$

(1) 素数の中で, A に含まれる要素を答えよ.

$2, 3, 5$

(2) B にも C にも含まれる要素を 1 つ答えよ.

$-6, -2$ など

(3) B に含まれず, A に含まれる要素を答えよ.

$1, 3, 4, 5$

$\boxed{2}$ 次の集合を区間, またはいくつかの区間の和集合で表せ.

(1) $\{x | -6 \leq x \leq 5\}$

$[-6, 5]$

(2) $\{x | -1 < x \leq 6\}$

$(-1, 6]$

(3) $\{x | -6 \leq x \leq 5\} \cup \{x | -1 < x \leq 6\}$

$[-6, 6]$

(4) $\{x | -6 \leq x \leq 5\} \cap \{x | -1 < x \leq 6\}$

$(-1, 5]$

(5) $\{x | x^2 - 2x - 15 < 0\}$

$x^2 - 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 5$

したがって $(-3, 5)$

(6) $\{x | x^2 + 2x + 3 > 0\}$

$x^2 + 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 > 0$ したがって $(-\infty, \infty)$

(7) $\{x | x^2 - 2x + 1 > 0\}$

$x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0$ したがって $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(8) $\{x | (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0\}$

$[1, 2] \cup [3, \infty)$

1.2　写像

$\boxed{3}$ 2 つの集合 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ と, 写像 $f : X \to Y$, $f : x \mapsto |x|$ と定める. このとき, X のすべての要素に対して, $f(x)$ を求めよ.

$$\begin{cases} f : -1 \mapsto 1 \\ f : 0 \mapsto 0 \\ f : 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ 以下の集合 X_i と写像 $f_i : X_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ に対して, $f_i(X_i)$ を区間または区間の和で表せ.

例) $X_0 = (-3, 2]$, $f_0 : x \mapsto x^2 - 1$ のとき $f_0(X_0) = [-1, 8)$

(1) $X_1 = [-6, 5]$, $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$

$f_1(X_1) = [1, 35]$

(2) $X_2 = [-3, 3]$, $f_2 : x \mapsto x^3 + 1$

$f_2(X_2) = [-26, 28]$

(3) $X_3 = (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$, $f_3 : x \mapsto x^2 - 1$

$f_6(X_6) = [8, \infty)$

(4) $X_4 = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $f_4 : x \mapsto x^3 - x$

$f_4(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$

$f_4(X_4) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\boxed{5}$ 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x - 1$, 写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2 + 3x - 4$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 写像 f は全射か否か, また単射か否か答えよ.

全射であり単射である（全単射である）.

(2) 合成写像 $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$ を求めよ.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 4) = 2x^2 + 6x - 9$

$g \circ f(x) = 4x^2 + 2x - 6$

(3) 合成写像 $f \circ g$, $g \circ f$ は全射か否か, また単射か否か答えよ.

(2) よりともに全射でない. また単射でない.

$\boxed{6}$ 集合 X, Y を $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ とし, 写像 f, g を次のように定める.

$f : X \to Y$, $f(0) = 7,\ f(1) = 4,\ f(2) = 5,\ f(3) = 6$

$g : Y \to X$, $g(x) = |x - 6|$

このとき次の問いに答えよ.

(1) 写像 f, g について, 全射と単射の判定をせよ.

f は全単射, g は全射でも単射でもない.

(2) $g \circ f(1)$, $f \circ g(7)$ を求めよ.

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(4) = |4 - 6| = |-2| = 2$

$f \circ g(7) = f(g(7)) = f(|7 - 6|) = f(1) = 4$

(3) 合成写像 $g \circ f(x)$ に対して , $g \circ f(X)$ を求め, 全射・単射の判定をせよ.

$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(7) = 1$

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(4) = 2$

$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(5) = 1$

$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(6) = 0$ したがって $g \circ f(X) = \{0, 1, 2\}$

$g \circ f(0) = g \circ f(2)$ だが $f(0) \neq f(2)$ より単射でない.

また $g \circ f(x) = 3$ となる x が存在しないので全射でない.

1.3　行列の演算 1（和・スカラー・積）

$\boxed{7}$ 以下の行列を計算せよ.

(1) $3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-2\left\{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -19 & 6 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+0\cdot 2 & 3\cdot 2+0\cdot(-2) \\ 1\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 2+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4　行列の演算 2（逆行列含む）

$\boxed{8}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ のとき, $3X-2A=B$ を満たす 2 次正方行列 X を求めよ.

$3X-2A=B \Leftrightarrow 3X=2A+B \Leftrightarrow X=\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B$

$\frac{2}{3}A=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}B=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 2 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ 以下の行列に対して, 逆行列が存在するか調べ, 存在する場合は逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

存在する.

また逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

存在する.

また逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

存在する.

また逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

存在しない.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

存在しない.

1.5　ベクトルの演算

$\boxed{10}$ ベクトル $(s,-2s)$ が単位ベクトルであるとき, s の値を求めよ.

$\mathbf{a}=(s,-2s)$ としたき $|\mathbf{a}|=1$ となる s を求めればいいので

$\sqrt{s^2+4s^2}=1 \Leftrightarrow s^2+4s^2=1 \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{5}\quad \therefore\ s=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\boxed{11}$ 2 つのベクトル $\mathbf{a}=(-3,4)$, $\mathbf{b}=(2,s)$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ となる s の値を求めよ.

平行なので $(-3,4)=k(2,s)$ となる k が存在する.

$2k=-3 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{2}$ より $4=ks \therefore s=\frac{4}{k}=-\frac{8}{3}$

(2) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ となる s を求めよ.

垂直であるということは内積 $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ であることなので

$-3\cdot 2+4s=0 \Leftrightarrow 4s=6\quad \therefore\ s=\frac{3}{2}$

$\boxed{12}$ ベクトル $\mathbf{a}=(-3,7)$, $\mathbf{b}=(5,-2)$ に対して, 以下を計算せよ.

(1) 大きさ $|\mathbf{a}|$

$|\mathbf{a}|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{58}$

(2) 大きさ $|\mathbf{b}|$

$|\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

(3) 内積 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$

$(\mathbf{a},\mathbf{b})=-3\cdot 5+7\cdot(-2)=-29$

(4) ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 θ $(0\le\theta\le\pi)$

$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{-29}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{58}}=\frac{-29}{29\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \therefore\ \theta=\frac{3}{4}\pi$

$\boxed{13}$ 平面上の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が $|\mathbf{a}+3\mathbf{b}|=1$, $|3\mathbf{a}-\mathbf{b}|=1$ を満たすように動く. このとき $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ の最大値と最小値を求めよ.

$\mathbf{x}=\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{y}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ とおく.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & \mathbf{a} & + & 3 & \mathbf{b} & = & \mathbf{x} & \\ +) & 9 & \mathbf{a} & - & 3 & \mathbf{b} & = & 3 & \mathbf{y} \\ \hline & 10 & \mathbf{a} & & & & = & \mathbf{x} & +\ 3\ \mathbf{y} \end{array}$$

$\therefore \mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{x}+\frac{3}{10}\mathbf{y}$, $\mathbf{b}=\frac{3}{10}\mathbf{x}-\frac{1}{10}\mathbf{y}$

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\left|\frac{1}{10}\mathbf{x}+\frac{3}{10}\mathbf{y}+\frac{3}{10}\mathbf{x}-\frac{1}{10}\mathbf{y}\right|=\left|\frac{2}{5}\mathbf{x}+\frac{1}{5}\mathbf{y}\right|$

$=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\mathbf{x}+\frac{1}{5}\mathbf{y}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}|\mathbf{x}|^2+\frac{4}{25}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\frac{1}{25}|\mathbf{y}|^2}$

ここで仮定より $|\mathbf{x}|=1$, $|\mathbf{y}|=1$ なので $|\mathbf{x}|^2=1=|\mathbf{y}|^2$

$=\sqrt{\frac{5}{25}+\frac{4}{25}(\mathbf{x},\mathbf{y})}=\sqrt{\frac{5}{25}+\frac{4}{25}\cos\theta}$

また $|\cos\theta|\le 1$ より

$$\frac{1}{25}\le\frac{5}{25}+\frac{4}{25}\cos\theta\le\frac{9}{25}$$

よって $\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}\le|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\le\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

したがって最大値 $\frac{3}{5}$ 最小値 $\frac{1}{5}$　□

別解)

$\mathbf{x}=\mathbf{a}+3\mathbf{b}$, $\mathbf{y}=3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ とすると $\mathbf{a}=\frac{1}{10}\mathbf{x}+\frac{3}{10}\mathbf{y}$, $\mathbf{b}=\frac{3}{10}\mathbf{x}-\frac{1}{10}\mathbf{y}$ となる.

$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\left|\frac{2}{5}\mathbf{x}+\frac{1}{5}\mathbf{y}\right|$

(ここから下が別解)

$\mathbf{x}=\mathbf{y}$ のとき $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ は最大値をとり,

$\mathbf{x}=-\mathbf{y}(\Leftrightarrow -\mathbf{x}=\mathbf{y})$ のとき最小値をとる.

$\mathbf{x}=\mathbf{y}$ のとき $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\left|\frac{2}{5}\mathbf{x}+\frac{1}{5}\underline{\mathbf{x}}\right|=\left|\frac{3}{5}\mathbf{x}\right|=\frac{3}{5}$

$\mathbf{x}=-\mathbf{y}$ のとき $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\left|\frac{2}{5}\mathbf{x}+\frac{1}{5}\underline{(-\mathbf{x})}\right|=\left|\frac{1}{5}\mathbf{x}\right|=\frac{1}{5}$

よって最大値は $\frac{3}{5}$ 最小値は $\frac{1}{5}$　□

1.6　直線の方程式

$\boxed{14}$ 以下の平面上の直線の方程式と, 直線のベクトル方程式を求めよ.

(1) 点 $(0,3)$ を通り, 方向ベクトルが $(1,2)$ の直線

ベクトル方程式 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　$(t \in \mathbb{R})$

$(x,y) = (0,3) + t(1,2)$　$(t \in \mathbb{R})$ のように行ベクトル表示でも可.

ベクトル方程式より $x = t,\ y = 3 + 2t$ この式の t を消すと

$$\begin{array}{rcccccc} & 2 & x & = & 2 & t & \\ -) & & y & = & 2 & t & + \ 3 \\ \hline 2x & - & y & = & - & 3 & \end{array}$$

したがって平面上の直線の方程式 : $2x - y = -3$

(2) 2 点 $(-2,3)$, $(3,-2)$ を通る直線

方向ベクトルは x 軸方向に $3-(-2)=5$, y 軸方向に $-2-3=-5$ 進んでいるので $(5,-5)$

ベクトル方程式 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$　$(t \in \mathbb{R})$

直線の方程式 : $x + y = 1$

(3) 直線 $x + 2y = 1$ と方向ベクトルが同じで, 点 $(2,1)$ を通る直線

$x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

この式に適当に 2 つの数 (例えば 1 と -1 など) を x に代入すると

$(1,0)$, $(-1,1)$ を通る直線であることがわかる.

よって方向ベクトルは $(2,-1)$

したがってベクトル方程式 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　$(t \in \mathbb{R})$

直線の方程式 : $x + 2y = 4$

(4) 直線 $x + 2y = 1$ と直交し, 点 $(2,1)$ を通る直線

(3) より $x + 2y = 1$ 方向ベクトルは $(2,-1)$ なので

これに垂直なベクトルは x 座標, y 座標を逆にして

どちらか一方に -1 倍すればいいので

求める直線の方向ベクトルは $(1,2)$

ベクトル方程式 : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

直線の方程式 : $2x - y = 3$

1.7　内分点・外分点

$\boxed{15}$ 平面上の点 $A(1,2)$, $B(5,-1)$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点 P_1 の座標を求めよ.

点 $P_1(x,y)$ とすると

$x = \dfrac{1\cdot 1 + 2\cdot 5}{2+1} = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1)}{2+1} = \dfrac{0}{3} = 0$

よって求める点 $P_1\left(\dfrac{11}{3}, 0\right)$

(2) 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を $2:3$ に外分する点 P_2 の座標を求めよ.

点 $P_2(x,y)$ とすると

$x = \dfrac{(-3)\cdot 1 + 2\cdot 5}{2-3} = \dfrac{7}{-1} = -7$

$y = \dfrac{(-3)\cdot 2 + 2\cdot(-1)}{2-3} = \dfrac{-8}{-1} = 8$

よって求める点 $P_2(-7,8)$

1.8　1 次変換 I

$\boxed{16}$ 平面上の点 $A(2,1)$, $B(0,-2)$, $C(3,-1)$, $D(-2,1)$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 点 A を x 軸に関して折り返して得られる点 A' を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ よって } A'(2,-1)$$

(2) 点 B を y 軸に関して折り返して得られる点 B' を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ よって } B'(0,-2)$$

(3) 点 C を原点中心に反時計回りで $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる点 C' を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

よって $C'(2\sqrt{2},\sqrt{2})$

(4) 点 D を x 軸方向に 5 倍, y 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍して得られる点 D' を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ よって } D'\left(-10,\frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{17}$ 平面上の直線 $l : y = 2x-3$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 直線 l を x 軸に関して折り返して得られる直線 l_1 を求めよ.

直線 $y = 2x-3 = \{(t,2t-3)|t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t+3 \end{pmatrix}$$

直線 $l_1 = \{(t,-2t+3)|t \in \mathbb{R}\}$ であることがわかったので

$y = -2x+3$

(2) 直線 l を原点中心に反時計回りで $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる直線 l_2 を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-t+3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3t-3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

直線 $l_2 = \left\{ \left(\frac{-t+3}{\sqrt{2}}, \frac{3t-3}{\sqrt{2}} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

よって $x = \frac{-t+3}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{3t-3}{\sqrt{2}}$, この式から t を消すと

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 3\sqrt{2} & x & = & -3 & t & + & 9 \\ +) & & \sqrt{2} & y & = & 3 & t & - & 3 \\ \hline 3\sqrt{2} & x & + & \sqrt{2} & y & = & & & 6 \end{array}$$

$\sqrt{2}y = -3\sqrt{2}x + 6 \Leftrightarrow y = -3x + \frac{6}{\sqrt{2}} = -3x + 3\sqrt{2}$

1.9　表現行列

$\boxed{18}$ 次の写像 $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ は 1 次変換か否か答え, 1 次変換の場合は表現行列を求めよ.

(1) $f_1(x,y) = (x+y, x-y)$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって 1 次変換である. また表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $f_2(x,y) = (1,1)$

1 次変換でない.

(3) $f_3(x,y) = (2x,2y)$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって 1 次変換である. また表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.10 1 次変換 II

$\boxed{19}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $y=3x$ に関して点 $(2,1)$ を対称に移動して得られる点の座標を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2+1}\begin{pmatrix} -3^2+1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 & 3^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって答えは $(-1,2)$

(2) 直線 $y=ax$ に関して点 $(7,1)$ を対称に移動して得られる点が $(5,5)$ であった. このときの a の値を答えよ.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -7a^2+2a+7 \\ a^2+14a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a^2+1\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7a^2+2a+7 \\ a^2+14a-1 \end{pmatrix}$$

よって

$$-7a^2+2a+7 = 5a^2+5 \Leftrightarrow 12a^2-2a-2=0 \therefore a=\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\cdots[1]$$

$$a^2+14a-1 = 5a^2+5 \Leftrightarrow 4a^2-14a+6=0 \therefore a=3,\frac{1}{2}\cdots[2]$$

したがって [1][2] を共に満たすのは $a=\dfrac{1}{2}$ である.

1.11 図形

$\boxed{20}$ 平面上の 4 点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ に対して, 四角形 $ABCD$ を考える. 次の 1 次変換でこの四角形はどのような図形に移るか答えよ.

(1) $f_1(x,y)=(x+y,x-y)$

この 1 次変換 f_1 は

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表せる. 次に各点 A,B,C,D がこの 1 次変換でどのように移るかを考える

$$A:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D:\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって点 A,B,C,D はそれぞれ $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,-1)$
この 4 点を結ぶと**正方形**である.

(2) $f_2(x,y)=(2x+y,-2x-y)$

(1) と同様に考えると

$$A:\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B:\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C:\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad D:\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって点 A,B,C,D はそれぞれ $(0,0)$, $(2,-2)$, $(3,-3)$, $(1,-1)$
この 4 点を結ぶと**線分**になる.

$\boxed{21}$ 平面上の 3 点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ に対して, 三角形 ABC を考える. 次の 1 次変換でこの三角形を移し, 得られる図形の面積を求めよ.

(1) $f_1(x,y)=(x+y,x-y)$

三角形 ABC の面積は $1\times 1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ である.

この 1 次変換 f_1 の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である.

1 次変換で移した図形の面積は表現行列を M とすると $|\det M|$ 倍されるので

$|\det M| = |-1-1| = |-2| = 2$ よって求める面積は $\dfrac{1}{2}\times 2=1$

(2) $f_2(x,y)=(x-y,-x+y)$

f_2 の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ($=M$ とする.)

$|\det M| = |1-1| = 0$ よって求める面積は $\dfrac{1}{2}\times 0=0$

1.12 1 次変換 III（2 次曲線）

$\boxed{22}$ 1 次変換 f を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) 直線 $y = 2x - 1$ を f で変換して得られる図形の方程式を求めよ.

直線 $y = 2x - 1 = \{(t, 2t-1) | t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

求める図形の方程式 $= \{(1, t-1) | t \in \mathbb{R}\}$

よって求める図形の方程式は $x = 1$

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を f で変換して得られる図形の方程式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ まず x, y を求めたいので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'+2y' \end{pmatrix}$$

よって $x = x' + y'$, $y = x' + 2y'$

さらにこの式を $x^2 - y^2 = 2$ に代入すると

$(x'+y')^2 - (x'+2y')^2 = 2 \Leftrightarrow -2x'y' - 3(y')^2 = 2$

よって求める図形の方程式は $-2xy - 3y^2 = 2$

(きれいに整理すると $2xy + 3y^2 + 2 = 0$)

$\boxed{23}$ 以下の 2 次曲線を原点の周りに角 $\frac{\pi}{3}$ だけ反時計回りに回転して得られる曲線の方程式を求めよ.

(1) 放物線 $y = 2x^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{pmatrix}$$

ここで

$x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$ を $y = 2x^2$ に代入すると

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}x' = 2\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2$$

整理すると $(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2 + \sqrt{3}x' - y' = 0$

よって求める曲線の方程式は $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y = 0$

(2) 楕円 $4x^2 + 9y^2 = 16$

(1) より $x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$ を

$4x^2 + 9y^2 = 16$ に代入してまとめると

求める曲線の方程式は $31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 64$

(3) 双曲線 $4x^2 - 9y^2 = 16$

同様に考えると

求める曲線の方程式は $-23x^2 + 26\sqrt{3}xy + 3y^2 = 64$

1.13 合成変換

$\boxed{24}$ 以下の 1 次変換の表現行列を求めよ.

(1) $f_1(x,y)=(x,x+3y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より表現行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $f_2(x,y)=(x-y,x+y)$

$$\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ より表現行列は } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $f_3(x,y,z)=(z,x,y)$

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ より表現行列は } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $f_4(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$

$$\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ より表現行列は } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) $f_1\circ f_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) $f_2\circ f_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(7) $f_3\circ f_4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8) $f_4\circ f_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{25}$ 平面において, 1 次変換 f を y 軸に関する折り返しとし,
g を原点を中心に角 $\frac{3}{4}\pi$ だけ反時計回りに回転させる 1 次変換とする.
このとき次の問いに答えよ.

(1) 合成変換 $f\circ g$ と $g\circ f$ を求めよ.

f,g の行列表現はそれぞれ次のようになる.

$$f:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi \\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} f\circ g:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $f\circ g\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $g\circ f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

$$f\circ g\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$g\circ f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(3) 1 次変換 g によって直線 l は $y=2x$ となった. l の方程式を求めよ.

g によって変換された直線 $y=2x=\{(t,2t)|t\in\mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$x=\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ y=-\dfrac{3t}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}x=t,\ \sqrt{2}y=-3t \leftarrow$ そして t を消去

$$\begin{array}{rcccccc} & 3\sqrt{2} & x & & & = & 3t \\ +) & & & & \sqrt{2}\ y & = & -3t \\ \hline & 3\sqrt{2} & x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \end{array}$$

$\sqrt{2}(3x+y)=0 \Leftrightarrow 3x+y=0 \Leftrightarrow y=-3x$

よって求める直線 $l: y=-3x$

1.14　正則変換・逆変換

$\boxed{26}$ 平面において, 1 次変換 $f,\, g$ を

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f,\, g$ は, 正則変換か否か答えよ. また正則変換なら逆変換を求めよ.

f は正則変換でない.g は正則変換である.

また逆変換 g^{-1} は $g^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) f で $(1, 2)$ に移る点を求めよ.

1 次変換 f で $(1, 2)$ に移るので

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}$$

$2x - y = 1\,,\ 4x - 2y = 2 \Leftrightarrow 2x - y = 1$

よって $(1, 2)$ に移る点は $2x - y = 1$ 上の点すべて.

(3) (2) で求めた点を (s, t) とする. g で (s, t) に移る点を求めよ.

(2) で求めた点は $2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$ 上の点なので

$y = 2x - 1 = \{(k, 2k - 1) | k \in \mathbb{R}\}$ と表せる.

したがって (s, t) は $(k, 2k - 1)$ と表せる.

よって $\begin{pmatrix} k \\ 2k - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

すなわち $y = k\,,\ -x = 2k - 1$ ここから k を消去すると

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & 2 & y & = & & 2 & k & & \\ +) & & x & = & - & 2 & k & + & 1 \\ \hline 2 & y & + & x & = & & & & 1 \end{array}$$

したがって (s, t) に移る点は $x + 2y = 1$ 上の点.

2　線型 II（柴田先生）

2.1　ベクトル

$\boxed{1}$ ベクトル $\mathbb{a},\, \mathbb{b},\, \mathbb{c},\, \mathbb{d}$ が

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \mathbb{b} = (\sqrt{2}, -5, 4, 3)\,,\ \mathbb{c} = (2, -1, 4)\,,\ \mathbb{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表されるとき次の問いに答えよ.

(1) このベクトルたちははそれぞれ「行ベクトル」か「列ベクトル」か答えよ.

$\mathbb{a}$: 列ベクトル, $\mathbb{b}$: 行ベクトル, $\mathbb{c}$: 行ベクトル, $\mathbb{d}$: 列ベクトル

(2) このベクトルたちを $* \in \mathbb{R}^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ の形で答えよ.

$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2\,,\ \mathbb{b} \in \mathbb{R}^4\,,\ \mathbb{c} \in \mathbb{R}^3\,,\ \mathbb{d} \in \mathbb{R}^3$

(3) このベクトルたちの長さを求め $\| * \| = **$ の形でかけ.

$\|\mathbb{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

$\|\mathbb{b}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-5)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{52}$

$\|\mathbb{c}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

$\|\mathbb{d}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$

2.2　論証（ベクトル）

$\boxed{2}$ スカラー $k \in \mathbb{R}$ と,

$$n \text{ 項数ベクトル } \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

に関して以下を示せ.

(1) 和の交換法則 $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$

$\because$

$$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix},\ \mathbb{b} + \mathbb{a} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ \vdots \\ b_n + a_n \end{pmatrix}$$

ここで成分は $\mathbb{R}$ なので

$a_i + b_i = b_i + a_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ が成り立つ.

よって各成分が等しいので $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$　□

(2) 分配法則 $k(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = k\mathbb{a} + k\mathbb{b}$

$\because$

$$k(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = k \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_1 + b_1) \\ k(a_2 + b_2) \\ \vdots \\ k(a_n + b_n) \end{pmatrix}$$

$$k\mathbb{a} + k\mathbb{b} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_1 \\ kb_2 \\ \vdots \\ kb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + kb_1 \\ ka_2 + kb_2 \\ \vdots \\ ka_n + kb_n \end{pmatrix}$$

ここで成分は $\mathbb{R}$ なので

$k(a_i + b_i) = ka_i + kb_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ が成立.

よって各成分が等しいので $k(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = k\mathbb{a} + k\mathbb{b}$　□

(3) 長さに関する等式 $\|k\mathbb{a}\| = |k|\,\|\mathbb{a}\|$

$\because$

$$\|k\mathbb{a}\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + \cdots + (ka_n)^2}$$

$$= \sqrt{k^2{a_1}^2 + k^2{a_2}^2 + \cdots + k^2{a_n}^2} = \sqrt{k^2({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)}$$

$$= |k|\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2} = |k|\,\|\mathbb{a}\| \quad \square$$

(4) ゼロでない任意の n 項数ベクトル $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{v} = \dfrac{1}{\|\mathbb{a}\|}\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ と同じ向きの単位ベクトルであることを示せ.

$\because$

$\mathbb{v}$ について

$\mathbb{a}$ は非ゼロな正のスカラー倍なので同じ向きのベクトルである.

また (3) より $\|\mathbb{v}\| = \left|\dfrac{1}{\|\mathbb{a}\|}\right| \|\mathbb{a}\| = \dfrac{1}{\|\mathbb{a}\|}\|\mathbb{a}\| = 1$

よって単位ベクトルである.　□

2.3　複素数（基礎）

$\boxed{3}$ 次の数

$$\text{(i) } 0,\ \text{(ii) } -3,\ \text{(iii) } \frac{1}{2},\ \text{(iv) } -\sqrt{5},\ \text{(v) } 4i,\ \text{(vi) } 1 + 2i$$

について以下の問いに答えよ.

(1) このうち複素数であるものを答えよ.

(i),(ii),(iii),(iv),(v),(vi)　（すべて）

(2) (1) の実部と虚部をそれぞれ答えよ.

実部：(i) 0, (ii) -3, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $-\sqrt{5}$, (v) 0, (vi) 1

虚部：(i) 0, (ii) 0, (iii) 0, (iv) 0, (v) 4, (vi) 2

(3) (1) の複素共役を答えよ.

(i) 0, (ii) -3, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $-\sqrt{5}$, (v) $-4i$, (vi) $1 - 2i$

(4) そのうちの絶対値を答えよ.

(i) 0, (ii) 3, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\sqrt{5}$

(v) $\sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4 = \sqrt{0^2 + 4^2}$

(vi) $\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$

2.4 複素数（極形式, 偏角）

$\boxed{4}$ 複素数 z_1 , z_2 , z_3 , z_4 を

$$z_1 = 3\,,\ z_2 = -i\,,\ z_3 = \sqrt{3} + i\,,\ z_4 = -1 - i$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $|z_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ と $\arg(z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めよ.

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3\,,\ |z_2| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2\,,\ |z_4| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

複素平面 $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ と同一視できるので

$z = a + bi$ とすると $\cos(\arg(z)) = \dfrac{a}{|z|}$ である.

$\cos(\arg(z_1)) = \dfrac{3}{3} = 1$ より $\arg(z) = 0$

$\cos(\arg(z_2)) = \dfrac{0}{1} = 0$ より $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ であるが

$\mathbb{R}^2$ で考えると第 3・4 象限の間にあるので $\arg(z_2) = \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos(\arg(z_3)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\arg(z_3) = \dfrac{\pi}{6}\,, \frac{5}{6}\pi \leftarrow (z_2)$ と同様の理由

$\cos(\arg(z_4)) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\arg(z_4) = \dfrac{5}{4}\pi \leftarrow$ 同様

(2) それぞれを極形式で表せ.

$z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)\,,\ z_2 = \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$z_3 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)\,,\ z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) + i \sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)\right)$

[*極形式表示なのであえて $\cos 0$ などと書かなければいけない.]

2.5 n 乗根

$\boxed{5}$ 1 の n 乗根を $\mathbb{C}$ の範囲で求めよ.

$z \in \mathbb{C}$ が $z^n = 1$ を満たすときを考える.

z は極形式表示で $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と表せる.

ド・モアブルの定理から $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ と表せる.

ここで $z^n = 1$ より $r = 1$ かつ $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ である.

そこである整数 $k \in \mathbb{Z}$ で $n\theta = 2k\pi$ と表示するとき $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ となる.

よって 1 の n 乗根は

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$\boxed{6}$ 1 の 6 乗根を求めよ.

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ をそれぞれ代入すると

$z_0 = 0\,,\ z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\,,\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = -1\,,\ z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\,,\ z_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2.6 行列（基礎）

$\boxed{7}$ 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix}1&55&6&4\\-4&-6&-7&3\\-2&8&-11&7\end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) A は何行何列の行列か答えよ.

3 行 4 列

(2) A の $(1,2)$ 成分と, 3 行 2 列の成分を答えよ.

$(1,2)$ 成分は 55 , 3 行 2 列の成分は 8

(3) A の転置行列 ${}^tA$ を求めよ.

$${}^tA=\begin{pmatrix}1&-4&-2\\55&-6&8\\6&-7&-11\\4&3&7\end{pmatrix}$$

(4) 行ベクトルを使って A を表せ.

$\mathbb{a}_1=(1,55,6,4)$, $\mathbb{a}_2=(-4,-6,-7,3)$, $\mathbb{a}_3=(-2,8,-11,7)$

とすると $A=\begin{pmatrix}\mathbb{a}_1\\\mathbb{a}_2\\\mathbb{a}_3\end{pmatrix}$

もしくはダイレクトに $A=\begin{pmatrix}(1,55,6,4)\\(-4,-6,-7,3)\\(-2,8,-11,7)\end{pmatrix}$

(5) 列ベクトルを使って A を表せ.

$\mathbb{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbb{b}_2=\begin{pmatrix}55\\-6\\8\end{pmatrix}$, $\mathbb{b}_3=\begin{pmatrix}6\\-7\\-11\end{pmatrix}$, $\mathbb{b}_4=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}$

とすると $A=(\mathbb{b}_1,\mathbb{b}_2,\mathbb{b}_3,\mathbb{b}_4)$

もしくはダイレクトに $A=\left(\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}55\\-6\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-7\\-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}\right)$

2.7 行列の演算

$\boxed{8}$ 行列 A,B,C を

$$A=\begin{pmatrix}4&-3\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1\\-3&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&2\\2&5\end{pmatrix}$$

とする. 次の式を計算せよ.

(1) $3A+B+2C+2(B-2C-2A)$

$=3A+B+2C+2B-4C-4A$

$=-A+3B-2C$

$=\begin{pmatrix}-4&3\\-1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\-9&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4\\-4&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-14&0\end{pmatrix}$

(2) $2A+C-2(A+{}^tC)$

$=2A+C-2A-2({}^tC)$

ここで ${}^tC=\begin{pmatrix}-1&2\\2&5\end{pmatrix}=C$

$=\boldsymbol{O}-C=-\begin{pmatrix}-1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&-5\end{pmatrix}$

$\boxed{9}$ 次の等式が成り立つような $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix}x&8\\5&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2z\\w+1&2y-6\end{pmatrix}$

$x=-2$, $8=2z\Leftrightarrow z=4$

$5=w+1\Leftrightarrow w=4$, $-y=2y-6\Leftrightarrow 3y=-6\Leftrightarrow y=-2$

$\therefore\ x=-2$, $y=2$, $z=4$, $w=4$

(2) $\begin{pmatrix}x+y&2y-3w\\x-z&y+2w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\7&4\end{pmatrix}$

$x+y=-1\cdots[1]$, $x-z=7\cdots[2]$

$2y-3w=1\cdots[3]$, $y+2w=4\cdots[4]$

まず [3],[4] を連立して y,w の値を求める.

$$\begin{array}{rcccccc} & 2y & - & 3w & = & 1\\ -) & 2y & + & 4w & = & 8\\ \hline & & - & 7w & = & -7\end{array}$$

よって $w=1$, $y=2$

$y=2$ を [1] に代入すると $x=-3$

$x=-3$ を [2] に代入すると $z=-10$

$\therefore\ x=-3$, $y=2$, $z=-10$, $w=1$

2.8　行列の成分表示

$\boxed{10}$ 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ が

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 9\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられるとき, a_{11} , a_{13} , a_{22} を求めよ.

$a_{11}=-1$, $a_{13}=9$, $a_{22}=-3$

(2) $a_{ij}=3^i+2j$ で与えられたとき, 3×2 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ を求めよ.

3×2 行列なので $1\le i\le 3$, $1\le j\le 2$

$a_{11}=3^1+2=5$, $a_{12}=3^1+2\cdot 2=7$

$a_{21}=3^2+2=11$, $a_{22}=3^2+4=13$

$a_{31}=3^3+2=29$, $a_{32}=27+4=31$

よって $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 11 & 13\\ 29 & 31\end{pmatrix}$

(3) $b_{ij}=\sqrt{i}+j^2$ で与えられたとき, 3×4 行列 $B=(b_{ij})_{ij}$ を求めよ.

$b_{11}=2$, $b_{12}=5$, $b_{13}=\sqrt{1}+3^2=10$, $b_{14}=\sqrt{1}+16=17$

$b_{21}=\sqrt{2}+1, b_{22}=\sqrt{2}+4, b_{23}=\sqrt{2}+9, b_{24}=\sqrt{2}+16$

$b_{31}=\sqrt{3}+1, b_{32}=\sqrt{3}+4, b_{33}=\sqrt{3}+9, b_{34}=\sqrt{3}+16$

よって $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 10 & 17\\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+4 & \sqrt{2}+9 & \sqrt{2}+16\\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+4 & \sqrt{3}+9 & \sqrt{3}+16\end{pmatrix}$

2.9　論証（行列の和）

$\boxed{11}$ $m\times n$ 行列 A,B,C とスカラー $k,\ell\in\mathbb{R}$ について次を示せ.

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

$\because$

$A=(a_{ij})_{ij}$, $B=(b_{ij})_{ij}$, $C=(c_{ij})_{ij}$ とする.

$(A+B)+C=(a_{ij}+b_{ij})_{ij}+(c_{ij})_{ij}=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{ij}$

$A+(B+C)=(a_{ij})_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})_{ij}=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{ij}$

ここで (i,j) 成分は $\mathbb{R}$ なので
$(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ が成り立つ.

よって成分が等しいので $(A+B)+C=A+(B+C)$　□

(2) $(k\ell)A=k(\ell A)$

$\because$

$A=(a_{ij})_{ij}$ とする.

$(k\ell)A=k\ell(a_{ij})_{ij}=(k\ell a_{ij})_{ij}$

$k(\ell A)=k(\ell a_{ij})_{ij}=(k(\ell a_{ij}))_{ij}$

ここで (i,j) 成分は $\mathbb{R}$ なので $k\ell a_{ij}=k(\ell a_{ij})$ が成り立つ.

よって成分が等しいので $(k\ell)A=k(\ell A)$　□

(3) $k(A+B)=kA+kB$

$\because$

$A=(a_{ij})_{ij}$, $B=(b_{ij})_{ij}$ とする.

$k(A+B)=k(a_{ij}+b_{ij})_{ij}=(k(a_{ij}+b_{ij}))_{ij}$

$kA+kB=(ka_{ij})_{ij}+(kb_{ij})_{ij}=(ka_{ij}+kb_{ij})_{ij}$

ここで (i,j) 成分は $\mathbb{R}$ なので
$k(a_{ij}+b_{ij})=ka_{ij}+kb_{ij}$ が成り立つ.

よって成分が等しいので $k(A+B)=kA+kB$　□

2.10　行列の積

$\boxed{12}$ $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ と, $n\times p$ 行列 $B=(b_{ij})_{ij}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 積 AB は何行何列の行列か答えよ.

$m\times p$ 行列

(2) 積 AB を成分表示を用いてかけ.

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}$$ *添え字に注意

$\boxed{13}$ $A,\ B:n$ 次正方行列とする. 次の問いに答えよ.

(1) $(A+E_n)(A-E_n)$ を簡単にせよ.

$$(A+E_n)(A-E_n)=A^2-AE_n+E_nA-(E_n)^2$$

$$=A^2-A+A-E_n=A^2-E_n$$

(2) $(A+B)(A-B)$

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

*行列は常に $AB=BA$(可換) ではないことに注意.

(3) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
が成立するための必要十分条件を答えよ.

左辺は $A^2+AB+BA+B^2$ なので条件は $AB=BA$(可換)

2.11　論証（行列の積）

$\boxed{14}$ $m\times n$ 行列 A, $n\times p$ 行列 B, $n\times p$ 行列 C, $p\times q$ 行列 D, スカラー $r\in\mathbb{R}$ について以下を示せ.

(1) $E_mA=A$

$\because$

$A=(a_{ij})_{ij}$ とする

$$E_mA=\left(\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}a_{kj}\right)_{ij}$$

$$=(\underbrace{\delta_{i1}}_{=0}a_{1j}+\underbrace{\delta_{i2}}_{=0}a_{2j}+\cdots+\underbrace{\delta_{ii}}_{=1}a_{ij}+\cdots+\underbrace{\delta_{im}}_{=0}a_{mj})_{ij}=(a_{ij})_{ij}=A \quad \square$$

(2) $r(AB)=A(rB)$

$\because$

$A=(a_{ij})_{ij}$, $B=(b_{ij})_{ij}$ とする.

$$r(AB)=r\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}=\left(r\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}$$

$$A(rB)=(a_{ij})_{ij}(rb_{ij})_{ij}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(rb_{kj})\right)_{ij}\overset{*}{=}\left(r\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{ij}$$

(*$\sum$ の性質より)

よって $r(AB)=A(rB)$ $\square$

(3) $(B+C)D=BD+CD$

$\because$

$B=(b_{ij})_{ij}$, $C=(c_{ij})_{ij}$, $D=(d_{ij})_{ij}$ とする.

$$(B+C)D=(b_{ij}+c_{ij})_{ij}(d_{ij})_{ij}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{p}(b_{ik}+c_{ik})d_{kj}\right)_{ij}=\left(\sum_{k=1}^{p}b_{ik}d_{kj}+c_{ik}d_{kj}\right)_{ij}$$

$$BD+CD=\left(\sum_{k=1}^{p}b_{ik}d_{kj}\right)_{ij}+\left(\sum_{k=1}^{p}c_{ik}d_{kj}\right)_{ij}$$

$\sum$ はまとめられるので $=\left(\sum_{k=1}^{p}b_{ik}d_{kj}+c_{ik}d_{kj}\right)_{ij}$

よって $(B+C)D=BD+CD$ $\square$

2.12 行列（正則・逆行列）

$\boxed{15}$ 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件を述べよ.

正則であるためには行列式が 0 でなければいいので

$4x+4+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で与えられているとき a, b, c, d の値を求めよ.

逆行列は $\dfrac{1}{a-9}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-9} & \frac{-3}{a-9} \\ \frac{-3}{a-9} & \frac{a}{a-9} \end{pmatrix}$ である.

すなわち $\begin{pmatrix} \frac{1}{a-9} & \frac{-3}{a-9} \\ \frac{-3}{a-9} & \frac{a}{a-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\dfrac{1}{a-9} = 1 \Leftrightarrow 1 = a-9 \quad \therefore a = 10$ よって $a-9=1$

$b=-3\,,\ c=-3\,,\ d=10$

$\therefore a=10\,,\ b=-3\,,\ c=-3\,,\ d=10$

$\boxed{16}$ A を n 次正方行列について $m \in \mathbb{N}$ とする.
$A^m = \mathbf{O}$ ならば $A-E_n\,,\ A+E_n$ は正則であることを示せ.

$(A-E_n)(-E_n-A-A^2-A^3-\cdots-A^{m-1}) = E_n - A^m = E_n$

$(-E_n-A-A^2-A^3-\cdots-A^{m-1})(A-E_n) = E_n - A^m = E_n$

よって $A-E_n$ は正則.

$(A+E_n)(E_n-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{m-1}A^{m-1}) = E_n+(-1)^{m-1}A^m$

$(E_n-A+A^2-A^3+\cdots+(-1)^{m-1}A^{m-1})(A+E_n) = E_n+(-1)^{m-1}A^m$

よって両方とも $=E_n$ となるので $A+E_n$ は正則. $\square$

2.13 論証（正則）

$\boxed{17}$ 以下の主張を示せ.

(1) ゼロ行列は正則ではない.

$\because$

$\mathbf{O}$ が正則であると仮定すると

$\mathbf{O}B = E_n = B\mathbf{O}$ を満たす B が存在する.

しかし $\mathbf{O}B = \mathbf{O} = B\mathbf{O} \neq E_n$ より矛盾.

したがって $\mathbf{O}$ は正則でない. $\square$

(2) n 次正方行列 A について自然数 m に対し,
$A^m = \mathbf{O}$ ならば A は正則でない.

$\because$

A が正則であると仮定すると,

$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ を満たす A^{-1} が存在する.

$A^m(A^{-1})^m = E_n = (A^{-1})^m A^m\ ,\mathbf{O} = E_n = \mathbf{O}$ よって矛盾.

したがって A は正則でない. $\square$

(3) n 次正方行列 A, B について
$AB = \mathbf{O}$ ならば A, B はともに正則でない.

$\because$

A が正則である $\Leftrightarrow AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$ となる A^{-1} が存在すると仮定する.

$AB = \mathbf{O}$ に右から A^{-1} をかけると

$A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{O} \Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{E_n}B = \mathbf{O} \ \therefore B = \mathbf{O}$ となり

B は正則でなくなるので矛盾. よって A は正則でない. $\square_1$

B が正則である $\Leftrightarrow BB^{-1} = E_n = B^{-1}B$ となる B^{-1} が存在すると仮定する.

$AB = \mathbf{O}$ に左から B^{-1} にかけると

$A(BB^{-1}) = \mathbf{O}B^{-1} \quad \therefore A = \mathbf{O}$

よって A が正則でなくなるので矛盾. よって B は正則でない. $\square_2$

したがって $AB = \mathbf{O}$ ならば A, B はともに正則でない. $\square$

2.14　ブロック分割

$\boxed{18}$ 次の行列の積をブロック分割の考え方を用いて計算せよ.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ \hline -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_2 & E_2 \\ \hline E_2 & E_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_2 & 7E_2 \\ \hline -5E_2 & 2E_2 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_2 - 5E_2 & 7E_2 + 2E_2 \\ \hline -4E_2 & 9E_2 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 9 \\ -4 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 2 & \sqrt{3} & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} -1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 5 & \sqrt{3}+8 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & \sqrt{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{1000}$$

ここで $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = X$ とおけば

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_2 & X \\ \hline \mathbf{O} & E_2 \end{array}\right)^{1000}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_2 & 1000X \\ \hline \mathbf{O} & E_2 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1000\sqrt{2} & \frac{1000}{2} \\ 0 & 1 & 1000\cdot 5 & 1000\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1000\sqrt{2} & 500 \\ 0 & 1 & 5000 & 1000\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{19}$ 次の逆行列を求めよ.

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$ これは特殊な形である.

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 2^{-1} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 9 & 6 \\ \hline 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} -3 & 9 & 6 \\ \hline 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{3} & -\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.15 複素行列

$\boxed{20}$ 次を満たすときの定数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ を決定せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -5 \\ 9 & \sqrt{2} & b \\ c & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ は対称行列.

対称行列とは ${}^tA = A$ のときをいうので

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & c \\ a & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -5 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -5 \\ 9 & \sqrt{2} & b \\ c & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

よって $a = 9\,,\, b = \dfrac{1}{2}\,,\, c = -5$

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\sqrt{5} & c \end{pmatrix}$ は交代行列.

交代行列とは ${}^tB = -B$ のときをいうので

$$\begin{pmatrix} a & -\sqrt{5} \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ \sqrt{5} & -c \end{pmatrix}$$

よって $a = 0\,,\, b = \sqrt{5}\,,\, c = 0$

(3) 行列 $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & -a \\ \frac{3}{\sqrt{10}}i & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ はユニタリー行列.

ユニタリー行列とは $A^{-1} = A^*$

（正確には $AA^* = E = A^*A$ を満たす A）のときをいう.

計算すると $a = \dfrac{3}{\sqrt{10}}i$

2.16 論証（複素行列）

$\boxed{21}$ 次の主張を示せ.

(1) 直交行列同士の積もまた直交行列になる.

$\because$

A, B を直交行列とすると

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ $\square$

(2) 直交行列の逆行列もまた直交行列になる.

$\because$

A を直交行列とすると ${}^tA = A^{-1}$ を満たす.

ここで両辺の転置をとると $A = {}^t(A^{-1})$ である.

また $A = (A^{-1})^{-1}$ すなわち $(A^{-1})^{-1} = {}^t(A^{-1})$

よって A^{-1} は直交行列である $\square$

(3) ユニタリー行列同士の積もまたユニタリー行列になる.

$\because$

A, B をユニタリー行列とすると

$(AB)^* = B^*A^* = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ $\square$

(4) ユニタリー行列の逆行列もまたユニタリー行列になる.

$\because$

A をユニタリー行列とすると $A^* = A^{-1}$ を満たす.

ここで両辺の随伴をとると $A = (A^{-1})^*$ である.

また $A = (A^{-1})^{-1}$ すなわち $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^*$

よって A^{-1} はユニタリー行列である. $\square$

(5) 正則行列 A に対して A^* も正則行列になる.

$\because$

仮定より $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$

両辺の随伴をとると

$(AA^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = (E_n)^* = E_n = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^*$

よって A^* は正則 $\square$

2.17　まとめ（小テスト風）

$\boxed{22}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 複素数 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ について

(a) $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$ を答えよ．

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \overline{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

(b) z を極形式で表せ．

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

(2) 数ベクトル $\mathbb{v} := \left(-\sqrt{10}, \frac{1}{2}, 2\sqrt{5}\right)$ について

(a) $\mathbb{v}$ の名称は行ベクトル, 列ベクトルのいずれか答えよ．

行ベクトル

(b) $\mathbb{v}$ の長さを求めよ．

$$\frac{11}{2}$$

(c) $\mathbb{x} := -\frac{1}{11}\mathbb{v}$ に対して $\|\mathbb{x}\|$ を求めよ．

$$\frac{1}{2}$$

(3) 成分が $a_{xy} = \sqrt{y-x}$ で与えられる 3×2 行列 $A = (a_{xy})_{xy}$ に関して（$\sqrt{-1}$ は虚数単位 i のこと.）

(a) A と ${}^tA$ を具体的にかけ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \\ \sqrt{2}\,i & i \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & i & \sqrt{2}\,i \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

(b) A の 2 行 1 列の成分を答えよ．

$$i$$

(c) A の複素共役行列を求めよ．

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -i & 0 \\ -\sqrt{2}\,i & -i \end{pmatrix}$$

(4) 複素行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1-3i}{2} \\ \frac{1+3i}{2} & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 4 \\ -i & i \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & i \\ -4 & 1-i \end{pmatrix}$ に対して次の計算をせよ．

$$A^tB + A^*C - A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{23}$ 次の値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 264 & 0 & 0 \\ 12 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^{1000}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & -3000 \\ 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.18　回転系

$\boxed{24}$ 実数 θ に対して

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくとき以下を示せ.

(1) $A_0 = E_3\,,\ A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & 0 & \sin 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 0 & 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$A_\theta A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & 0 & \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\theta & 0 & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & 0 & \sin(\theta+\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta+\varphi) & 0 & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = A_{\theta+\varphi} \quad \square$$

(2) A_θ は常に正則である.

$\because$

(1) より $A_0 = E_3\,,\ A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$ なので

$\varphi = -\theta$ のとき

$A_\theta A_{(-\theta)} = A_{\theta+(-\theta)} = A_0 = E_3$

$A_{(-\theta)} A_\theta = A_{-\theta+\theta} = A_0 = E_3$ よって A_θ は常に正則.　$\square$

(3) A_θ は常に直交行列である.

$\because$

$A_\theta {}^t\!A_\theta = E_3 = {}^t\!A_\theta A_\theta$ を示せばよい.

$${}^t\!A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = A_{(-\theta)}$$

(2) より $A_{(-\theta)}A_\theta = E_3 = A_\theta A_{(-\theta)}$ なので

$A_\theta {}^t\!A_\theta = E_3 = {}^t\!A_\theta A_\theta$　$\square$

(4) 任意の 3 項列ベクトル a に対して $\|A_\theta\,\mathrm{a}\| = \|\mathrm{a}\|$

$\because$

$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると $\|\mathrm{a}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$A_\theta\,\mathrm{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + c\sin\theta \\ b \\ -a\sin\theta + c\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\|A_\theta\,\mathrm{a}\| = \sqrt{(a\cos\theta + c\sin\theta)^2 + b^2 + (c\cos\theta - a\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 + c^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|\mathrm{a}\| \quad \square$$

3　線型 III（柴田先生）

3.1　全射・単射

$\boxed{1}$　次の写像 $(a, b \in \mathbb{R})$ について, これが全単射になる必要十分条件をかけ. またそのときの逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求めよ.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

まず $a = 0$ とすると

$f(x) = b$ (定数関数) となるので全射でも単射でもない.

次に $a \neq 0$ とすると, $^\forall y \in \mathbb{R}$ に対し, 具体的に $x = \dfrac{y-b}{a}$ で与えられ, $f(x) = y$ を満たすので全射.

また $f(x_1) = f(x_2)$ とすると $ax_1 + b = ax_2 + b \leftarrow$ 式変形していくと $ax_1 = ax_2$, ここで $a \neq 0$ なので a で割ると $x_1 = x_2$ よって単射.

したがって全単射となるための必要十分条件は $a \neq 0$.

また逆写像は $f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$.

$\boxed{2}$ 次の写像たち f, g の合成写像 $g \circ f\,,\ f \circ g$ をそれぞれ求めよ.

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^3+1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^3+1) - 3 = 2x^3 - 1$

$(f \circ g)(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 26$

$\boxed{3}$ 次の写像が, (i) 全射ならば証明を, 違えば反例をかけ. また (ii) 単射も同様に議論せよ.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ; f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -e^{3x_2} \end{pmatrix}$$

(i) 全射でない.

反例 : $^\forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $(\in \mathbb{R}^2 \leftarrow$ 行った先$) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -e^{3x_2} \end{pmatrix}$ としたとき

$y_2 = 0$ となる x_2 が存在しない. 具体的な反例は $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots$ など.

(ii) 単射である.

$\because$

$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix})$ と仮定する.

$\begin{pmatrix} 6x_1 \\ -e^{3x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1' \\ -e^{3x_2'} \end{pmatrix}$ 各成分を比較すると

$6x_1 = 6x_1'$ 両辺を 6 で割ると $x_1 = x_1'$

$-e^{3x_2} = -e^{3x_2'} \Leftrightarrow e^{3x_2} = e^{3x_2'}$ 両辺の対数をとり変形すると

$\log e^{3x_2} = \log e^{3x_2'} \Leftrightarrow 3x_2 \log e = 3x_2' \log e \Leftrightarrow 3x_2 = 3x_2' \ \therefore\ x_2 = x_2'$

すなわち $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ がいえた.

よって単射である.　$\square$

3.2　論証（写像, 全射・単射, 逆写像）

$\boxed{4}$ 写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A, B \subset X$ について次の主張を示せ.

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$\because$

（まず $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ を示す.）

${}^{\forall}y \in f(A \cup B), {}^{\exists}x \in A \cup B$ s.t. $y = f(x)$

${}^{\exists}x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ または $x \in B$ s.t. $y = f(x)$

$y = f(x) \in f(A)$ または $y = f(x) \in f(B)$

$\Leftrightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

したがって $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ □

（次に $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ を示す）

${}^{\forall}y \in f(A) \cup f(B) \Leftrightarrow y \in f(A)$ または $y \in f(B)$

(i) $y \in f(A)$, ${}^{\exists}x \in A$ s.t. $y = f(x)$

(ii) $y \in f(B)$, ${}^{\exists}x \in B$ s.t. $y = f(x)$

また (i), (ii) はそれぞれ

$x \in A \subset A \cup B$, $x \in B \subset A \cup B$ と見れる.$\cdots$(iii)

(iii) より $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$,

$y = f(x) \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$

$\therefore y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

したがって $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ □

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$\because$

${}^{\forall}y \in f(A \cap B), {}^{\exists}x \in A \cap B$ s.t. $y = f(x)$

ここで $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B$

すなわち $y = f(x) \in f(A)$ かつ $y = f(x) \in f(B)$

$\Leftrightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$ □

$\boxed{5}$ 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に関して以下の主張を示せ.

(1) f, g が全射 $\Longrightarrow g \circ f$ は全射

$\because$

${}^{\forall}z \in Z$ に対して

g は全射より ${}^{\exists}y \in Y$ s.t. $z = g(y)$,

また f は全射より ${}^{\exists}x \in X$ s.t. $y = f(x)$.

したがって $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$

よって写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ について

${}^{\forall}z \in Z, {}^{\exists}x \in X$ s.t. $z = (g \circ f)(x)$ が示された. $\therefore g \circ f$: 全射 □

(2) f, g が単射 $\Longrightarrow g \circ f$ は単射

$\because$

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ を仮定する.

とくに $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(g \circ f)(x') = g(f(x'))$

ここで g は単射より $g(f(x)) = g(f(x')) \Longrightarrow f(x) = f(x')$

また f は単射より $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

したがって写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ について

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Longrightarrow x = x'$ が示された. $\therefore g \circ f$: 単射 □

(3) $g \circ f$ が全射 $\Longrightarrow g$ は全射

$\because$

${}^{\forall}z \in Z$ に対して

$g \circ f$ は全射より ${}^{\exists}x \in X$ s.t. $z = (g \circ f)(x)$

ここで $y := f(x)$ とおくことにより

$z = g(y)$ となる $y \in Y$ が存在する.

よって $g : Y \longrightarrow Z$ について

${}^{\forall}z \in Z, {}^{\exists}y \in Y$ s.t. $z = g(y)$ が示された. $\therefore g$ は全射 □

(4) $g \circ f$ が単射 $\Longrightarrow f$ は単射

$\because$

$f(x) = f(x')$ を仮定する.

両辺に g を施すと $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

ここで $g \circ f$ は単射より $x = x'$

よって $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ が示された. $\therefore f$ は単射 □

$\boxed{6}$ 以下の主張を示せ.

(1) 全単射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して,
その逆写像 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ は一意的に存在する.
$\because$
f^{-1} の他に
$g: Y \longrightarrow X$ s.t. $f \circ g = \mathrm{id} = g \circ f$ が存在すると仮定すると
ここで $g = g \circ \mathrm{id} = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id} \circ f^{-1} = f^{-1}$ □

(2) 全単射 $f: X \longrightarrow Y$ に対して,
その逆写像 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ も全単射で $(f^{-1})^{-1} = f$
$\because$
f は全単射なので $f \circ f^{-1} = \mathrm{id} = f^{-1} \circ f$
f^{-1} を基準にすれば f^{-1} は全単射. また $(f^{-1})^{-1} = f$ □

(3) 全単射 $f: X \longrightarrow Y$ と全単射 $g: Y \longrightarrow Z$ に対して,
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
$\because$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \underbrace{(f \circ f^{-1})}_{\mathrm{id}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}$$

また $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (\underline{g^{-1} \circ g}) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$

したがって $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ □

3.3 線形写像

$\boxed{7}$ 以下の写像について, 線形ならば対応する行列を, 違えばその理由を（反例をあげて）かけ.

(1) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{2}\,x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

線形, 対応する行列は $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = -2x_2 + \dfrac{3}{5}x_1 + \sqrt{7}\,x_3$

線形, 対応する行列は $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -2 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$

(3) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + \pi x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - \sqrt{3}\,x_3 \end{pmatrix}$

線形, 対応する行列は $\begin{pmatrix} 1 & \pi & -2 \\ 5 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(4) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \end{pmatrix}$

線形でない.
$k = 2$ のとき (LM2) を満たさない.

$$f\left(k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (kx_1)^2 \\ (kx_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2{x_1}^2 \\ k^2{x_2}^2 \end{pmatrix} = k^2\begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \end{pmatrix}$$

$kf\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \end{pmatrix}$ よって $f\left(k\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \neq kf\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

(5) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1\left(\sin^2(-x_2) + \sin^2\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$

まず $\sin^2(-x_2) + \sin^2\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right)$ に着目すると

$\sin(-x_2) = -\sin x_2$ すなわち $\sin^2(-x_2) = (-\sin x_2)^2 = \sin^2 x_2$

$\sin\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x_2$ すなわち $\sin^2\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x_2$

よって $\sin^2(-x_2) + \sin^2\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 x_2 + \cos^2 x_2 = 1$

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と書き換えられる.

よって f は線形, 対応する行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.4　線形写像 f の計算

$\boxed{8}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a{x_1}^2 + b{x_2}^4 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ が線形になる a, b, c, d の条件を求めよ.

$a = b = 0$

(2) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \pi x_2 \end{pmatrix}$ の f^{500} はどうなるか.

f に対応する行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi^3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi^{500} \end{pmatrix}$$

よって $f^{500}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \pi^{500} x_2 \end{pmatrix}$

(3) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_3 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の f^{1000} はどうなるか.

f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

これは $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ と分割すると嬉しい.

よって $f^{1000}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5000 \\ 0 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$ の f^{-1} はどうなるか.

f に対応する行列は $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

この逆行列を求めると $-2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -14 \end{pmatrix}$

よって $f^{-1}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - 6x_2 \\ 2x_1 - 14x_2 \end{pmatrix}$

(5) 線形写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f(3) = \cos(5)$ を満たすとき, $f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.

f は線形写像なので $f(3) = f(3 \cdot 1) = 3f(1) = \cos(5)$ である.

すなわち $f(1) = \dfrac{\cos(5)}{3}$

ここで $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = x \cdot \dfrac{\cos(5)}{3}$

よって $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{\cos(5)}{3} = \dfrac{\pi\cos(5)}{6}$

3.5　回転系

$\boxed{9}$ 実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, 写像 $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$f_\theta(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta - x_1\sin\theta \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f_θ は常に線形であることを示せ.

f_θ に対応する行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ があったので f_θ は線形. $\square$

(2) 任意の $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して, $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$ を示せ.

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする.

$$f_\theta \circ f_\varphi(\mathbb{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\mathbb{x}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix}\mathbb{x}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}\mathbb{x} = f_{\theta+\varphi}(\mathbb{x}) \quad \square$$

(3) f_θ は常に同型であることを示し, その逆写像を答えよ.

f_θ が同型であることを示すには対応する行列が正則であることを示せばよい.

(1) より対応する行列の行列式は $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$ より正則.
よって f_θ は同型. $\square$

また逆写像は対応する行列の逆行列なので

$$(f_\theta)^{-1}(\mathbb{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

(4) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ と $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\|f_\theta(\mathrm{a})\| = \|\mathrm{a}\|$ を示せ.

$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする.

$\|\mathrm{a}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$f_\theta(\mathrm{a}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta \\ b\cos\theta - a\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\|f_\theta(\mathrm{a})\| = \sqrt{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (b\cos\theta - a\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathrm{a}\| \quad \square$$

3.6　論証（線形写像・同型写像）

$\boxed{10}$ 次の主張を示せ.

(1) 線形写像 f に対して, f : 単射 $\iff [f(\mathbb{x}) = \mathbb{o} \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}]$

$\because$

$(\Longrightarrow)$

$f(\mathbb{x}) = \mathbb{o}$ とすると, 一般に $f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$

f は単射より $f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{o}) \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}$

$(\Longleftarrow)$

$f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y})$ のとき $f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) = \mathbb{o}$

$f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) \overset{\text{(LM2)}}{=} f(\mathbb{x}) + f(-\mathbb{y}) \overset{\text{(LM1)}}{=} f(\mathbb{x} - \mathbb{y})$

よって仮定から $\mathbb{x} - \mathbb{y} = \mathbb{o}$ $\therefore$ $\mathbb{x} = \mathbb{y}$ よって f は単射　$\square$

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ は $^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $f^n = 0$ なら非同型.

$\because$

f に対応する行列を A とする.A が正則であると仮定すると

$AA^{-1} = E_\ell = A^{-1}A$ を満たすので

$A^n(A^{-1})^n = E_\ell = (A^{-1})^n A^n$ が成り立つはずであるが,

$A^n = \mathbf{O}$ なので $\mathbf{O} = E_\ell = \mathbf{O}$ となってしまう.

これは矛盾するので A は正則でない. よって f は非同型.　$\square$

(3) 正則行列に対応する線形写像は同型である.

$\because$

ある線形写像 f に対応する行列を A とする.

A は正則なので $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ となる A^{-1} が存在する.

$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_E = \mathrm{id}$, $f_{A^{-1}} \circ f_A = f_E = \mathrm{id}$

よって f は全単射である.

したがって正則行列に対応する線形写像は同型である.　$\square$

(4) 同型写像の逆写像は（LM1）を満たす.

$\because$

ある同型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする.

$^\forall \mathbb{y}_1, \mathbb{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, $^\exists \mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\mathbb{y}_1 = f(\mathbb{x}_1), \mathbb{y}_2 = f(\mathbb{x}_2)$

$f^{-1}(\mathbb{y}_1 + \mathbb{y}_2) = f^{-1}(f(\mathbb{x}_1) + f(\mathbb{x}_2))$

f は線形なので (LM1) より

$= f^{-1}(f(\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2)) = (f^{-1} \circ f)(\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2)$

$= \mathrm{id}(\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2) = \mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2 = f^{-1}(\mathbb{y}_1) + f^{-1}(\mathbb{y}_2)$

よって同型写像の逆写像は（LM1）を満たす.　$\square$

(5) 同型写像の逆写像は（LM2）を満たす.

$\because$

ある同型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする.

$^\forall k \in \mathbb{R}$ と $^\forall \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$, $^\exists \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\mathbb{y} = f(\mathbb{x})$

$f^{-1}(k\mathbb{y}) = f^{-1}(kf(\mathbb{x})) = f^{-1}(f(k\mathbb{x})) = (f^{-1} \circ f)(k\mathbb{x})$

$= \mathrm{id}(k\mathbb{x}) = k\mathbb{x} = kf^{-1}(\mathbb{y})$

よって同型写像の逆写像は（LM2）を満たす.　$\square$

4　線型 IV（山田先生）

4.1　2 次 3 次の行列式

$\boxed{1}$ 以下の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= -8 - 15 = -23$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

$= y - x$

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 60 + 20 + 0 - (0 - 25 - 16) = 121$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -15 - 24 - 2 - (3 - 40 + 6) = -10$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\{(-1 + 2 + 24) - (24 - 2 + 1)\} = 1$

4.2　面積・体積

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 平面ベクトル $\mathbf{a} = (-3, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 5)$ の張る平行四辺形の面積 S を求めよ. また $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ は「左回り」か「右回り」か答えよ.

$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19$

よって $S = 19$ また $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ は右回り.

(2) 3 点 $A = (1, 2)$, $B = (-1, 2)$, $C = (2, 3)$ を頂点とする三角形の面積 S を求めよ.

$\overrightarrow{AB} = (-1 - 1, 2 - 2) = (-2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2 - 1, 3 - 2) = (1, 1)$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$ よって $S = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

(3) 空間ベクトル $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1)$ でできる平行六面体の体積 V を求めよ. また「右手系」か「左手系」か答えよ.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - (4 - 1) = -5$

よって $V = 5$ また左手系である.

(4) 4 点 $A = (2, 1, -2)$, $B = (4, 2, 1)$, $C = (1, 3, -1)$, $D = (2, 3, -1)$ の 4 つを頂点とする平行六面体の体積を求めよ.

$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 1)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - (4 - 1) = -5$ よって $V = 5$

4.3　置換

$\boxed{3}$ S_3 の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次を求めよ.

(1) $\sigma(1)$

$= 2$

(2) $\tau(2)$

$= 2$

(3) $\tau\sigma(3)$

$= \tau(\sigma(3)) = \tau(1) = 3$

(4) $\sigma^{-1}(1)$

$= 3$

(5) $\tau\sigma$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(6) $\sigma\tau$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(7) σ^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(8) $(\tau\sigma)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(9) $\tau^{-1}\sigma^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(10) σ^{-1}

$= \sigma^{-1}\sigma^{-1}\sigma^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (= \epsilon)$$

4.4　巡回置換

$\boxed{4}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ とする.
以下の置換を互いに素な巡回置換の積で表せ.

(1) σ

$= (1\,2)(4\,5)$

(2) τ

$= (1\,6\,5\,3\,2)$

(3) τ^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$= (1\,2\,3\,5\,6)$

(4) $\sigma^{-1}\tau\sigma$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{=\tau\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$= (1\,2\,6\,4\,3)$

(5) $\tau^{-1}\sigma\tau$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$= (2\,3)(4\,6)$

$\boxed{5}$ 次の元を互いに素な巡回置換の積で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\,4\,3\,5)(2\,6)$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 8 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$= (1\,6\,3)(2\,5)(4\,8\,7)$

(3) $(1\,2\,3\,5)(4\,1\,3)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= (1\,5)(2\,3\,4)$

(4) $(1\,3\,2\,5\,6)(2\,3)(4\,6\,5\,1\,2)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= (1\,2\,4)(3\,5)$

4.5 行列式の符号

$\boxed{6}$ $A = (a_{ij})$ が 4 次正方行列のとき,行列式 $|A|$ において次の項の係数を求めよ.

(1) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$

$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4)$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ よって係数は 1

(2) $a_{13}a_{34}a_{21}a_{42}$

$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,4\,2) = (1\,3)(1\,4)(1\,2)$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ よって係数は -1

(3) $a_{12}a_{44}a_{23}a_{34}$

$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

置換になっていない. よって係数は 0

(4) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \epsilon$

$\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$ よって係数は 1

$\boxed{7}$ 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

4.6　行列式の基本的性質 1

$\boxed{8}$ 行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式の値が 8 のとき, 以下の行列式を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 10a & 10b & 10c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10 \cdot 8 = 80$

(2) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

$= -8$

(3) $\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$

$= -8$

(4) $\begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$= 8$

(5) $\begin{vmatrix} a-c & b & c \\ d-f & e & f \\ g-i & h & i \end{vmatrix}$

$= 8$

(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

$= 0$

$\boxed{9}$ 次の行列式の値を求めよ. ただし a, b は定数とする.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = -21 - (-24) = 3$

(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{100} & 2 & \frac{1}{100} \\ 1 & 200 & 0 \\ 1 & 100 & -1 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{100}\begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 1 & 200 & 0 \\ 1 & 100 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{100}{100}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

(3) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$

$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & 0 & b \\ a & a & 0 \\ 2a & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ab & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 2b & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a^2b & -a \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & -ab & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^2 & ab^2 & -ab \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -b & 1 \end{vmatrix}$

$= a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 1 & a & 0 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 1 & a & 0 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b & ab & -a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -b & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & ab & -a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -b & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b)\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 1 & a & 0 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} + (a+b)\begin{vmatrix} b & ab & -a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -b & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b)(a^2+b^2-2ab) + (a+b)(ab+ab+a^2+b^2)$

$= 2(a+b)(a^2+b^2)$

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a+b & a+b & a+b & a+b \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$

$= (a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & -b & a-b & -b \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ -b & a-b & -b \\ b & 0 & a \end{vmatrix}$

$= (a+b)\begin{vmatrix} a+b & 0 & a+b \\ -b & a-b & -b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-b & -b \\ b & 0 & a \end{vmatrix}$

$= (a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^2\begin{vmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{vmatrix}$

$= (a+b)^2(a-b)^2 = \{(a+b)(a-b)\}^2 = (a^2-b^2)^2$

4.7　次数の多い行列式の計算

$\boxed{10}$ 以下の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 13 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 13 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 11 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & -7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 37 & -4 \\ 7 & 28 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 37 & -4 \\ 28 & -3 \end{vmatrix} = -111 + 112 = 1$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

$$= \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right|$$

とブロック分割すると計算しやすい．

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) = -7$$

4.8　行列式の性質（余因子展開を含む）

$\boxed{11}$ 以下の (1) から (12) について, 正しかったら〇を, そうでなければ × をかけ.

(1) $\tilde{a}_{ij}$ を行列 $A=(a_{ij})$ の (i,j) 余因子と定義する. $i+j$ が奇数であるとき $\tilde{a}_{ij}$ と $|A_{ij}|$ は符号が異なり, 偶数のとき同じ値となる. 例えば $\tilde{a}_{12}=-|A_{12}|$, $\tilde{a}_{24}=|A_{24}|$
〇

(2) ある行列 A が列ベクトルを用いて $(k\mathbf{a}_1\ k\mathbf{a}_2\ k\mathbf{a}_3\ k\mathbf{a}_4)$ と表されるとき, 行列式の値は $|A|=k|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4|$ である.
× : 正しくは $|A|=k^4|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4|$

(3) ある行列 A の第 i 列と第 j 列（$i\neq j$）を入れ替える行列式の値は -1 倍される.
〇:行の場合も成り立つ.

(4) 行列 A の第 i 列と第 j 列（$i\neq j$）が一致しているならば, 行列式 $|A|$ の値は 0 である.
〇:行の場合も成り立つ.

(5) 行列式 $|A|=0$ ならば, いずれかの第 i 列と第 j 列（$i\neq j$）が一致している.
× : 反例はいくらでもある. 例えば $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

(6) 行列式の値を求める場合, サラスの方法はいくらでも使える.
× : 3 次までしか使えない. 4 次以降は使えない.

(7) n 次正方行列 A,B に対して,
$|A+B|=|A|+|B|$, $|A-B|=|A|-|B|$ が成り立つ.
× : ただし $|AB|=|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|=|BA|$ は成り立つ.

4.9　余因子展開

$\boxed{12}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 2\\ 5 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -5\\ 0 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 小行列式 $|A_{23}|$, $|A_{42}|$ の値を求めよ.

$$|A_{23}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=21,\ |A_{42}|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -5\end{vmatrix}=-52$$

(2) 余因子 $\tilde{a}_{23}$, $\tilde{a}_{42}$ を求めよ.

$$\tilde{a}_{23}=(-1)^{2+3}|A_{23}|=-21,\ \tilde{a}_{42}=(-1)^{4+2}|A_{42}|=-52$$

(3) 第 2 行に注目することにより, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

$$|A|=a_{21}\tilde{a}_{21}+a_{22}\tilde{a}_{22}+a_{23}\tilde{a}_{23}+a_{24}\tilde{a}_{24}=100$$

(4) 第 4 列に注目することにより, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

$$|A|=a_{14}\tilde{a}_{14}+a_{24}\tilde{a}_{24}+a_{34}\tilde{a}_{34}+a_{44}\tilde{a}_{44}=100$$

4.10 行列式と逆行列, ファンデアモンデの行列式, クラーメルの公式

$\boxed{13}$ 次の行列式が逆行列を持たないための条件を求めよ.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ 0 & a & b \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列式が 0 だと逆行列は存在しないので

この行列を A とすると $|A| = 0$ となればいいので

$|A| = 2ab - (b^2 - a^2) = 2ab + b^2 + a^2 = (a+b)^2 = 0 \quad \therefore a = -b$

$\boxed{14}$ 次の行列式の値を求めよ.
(ファンデアモンデの行列式の結果を使うと簡単.)

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 2a & a+b \\ a^2 & b^2 & 4a^2 & (a+b)^2 \\ a^3 & b^3 & 8a^3 & (a+b)^3 \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(2a-a)((a+b)-a)(2a-b)((a+b)-a)((a+b)-2a)$

$= a^2b(2a-b)(a-b)^2$

$\boxed{15}$ クラーメルの公式を用いて次の連立一次方程式を解け.

$$(1)\quad \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \\ -2x - 2y = -1 \end{cases}$$

$$|A| := \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{2} = -3$$

$\therefore x = \frac{9}{2}, y = -4, z = -3$

4.11 論証

$\boxed{16}$ $A, B : n$ 次正方行列とする. 行列式を用いて次を証明せよ.
A と B が正則であることと AB が正則であることは同値である.

$\because$

(「A と B が正則ならば AB は正則」を示す.)

行列式の性質より $|A| \cdot |B| = |AB|$

ここで仮定より A が正則なので $|A| \neq 0$, また B も正則なので $|B| \neq 0$

よって $|AB| \neq 0$.

したがって A と B が正則ならば AB は正則.

(「AB が正則ならば A と B は正則」を示す.)

行列式の性質より $|AB| = |A| \cdot |B|$

また仮定より AB は正則なので $|AB| \neq 0$

よって $|AB| \neq 0$ より $|A| \neq 0$ かつ $|B| \neq 0$ でなければならない.

したがって AB が正則ならば A と B は正則. $\square$