双対作用素と Schauder の定理

中橋健太郎 *

概要

これは卒業論文で, 紹介しきれなかった定義や命題の証明の付け加えたものである. 随時, 加筆修正を行う予定である. また, これとは別に, 1 年間ゼミで勉強したことをまとめたものを作ろうと思っている (予定は未定).

本文では, “双対” という概念に着目した. 有限次元空間における “双対” については次元が等しいことや二重双対 (双対の双対) と同型であることなどよく知られている. その事実を用いれば, 有限次元の線型写像で成り立つ多くの結果は, 無限次元空間における有限次元クラスの線型写像の自然な一般化であるコンパクト作用素についても同様のことが成り立つことが容易に想像できる. しかし, 無限次元空間においてその事実を証明するのは, 有限次元空間のときと同じように, というわけにはいかない. そこで活躍するのが “同一視” というものである. 数学では, 抽象的な概念を扱うとき, 議論を簡単にするため, しばしば同一視を行う. しかし, “何”によって同一視されているかを記述しているものは多くない. 本文では, “何” によって同一視されているかを証明中で明確にするよう努めた.

最終更新日：2021 年 2 月 14 日

目次

* 岡山理科大学理学部応用数学科 (2020 年度所属)

1　基礎事項

1.1　線型空間

定義 1.1 (線型空間). $\mathbf{K}$ を可換体とする．空でない集合 V が次の性質を満たすとき, V は $\mathbf{K}$ 上の**線型空間** (**linear space**) あるいは**ベクトル空間** (**vector space**) という：

(V$_1$) 任意の $x, y \in V$ に対して, 和 $x + y \in V$ が一意に定まる．また, 任意の $\alpha \in \mathbf{K}$ と任意の $x \in V$ に対して, スカラー倍 $\alpha x \in V$ が一意に定まる．

(V$_2$) 任意の $x, y, z \in V$, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して, 以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= x+(y+z) && \text{(和の結合律)}\\
x+y &= y+x && \text{(和の可換律)}\\
\alpha(x+y) &= \alpha x+\alpha y && \text{(和に関するスカラー倍の分配律)}\\
(\alpha+\beta)x &= \alpha x+\beta x && \text{($\mathbf{K}$ の和に関するスカラー倍の分配律)}\\
(\alpha\beta)x &= \alpha(\beta x)
\end{aligned}$$

(V$_3$) ある $0 \in X$ があって, 任意の $x \in V$ に対して, $x + 0 = x = 0 + x$.

(V$_4$) 任意の $x \in V$ に対して, ある $x' \in V$ が存在し, $x + x' = 0 = x' + x$.

(V$_5$) $\mathbf{K}$ の積における単位元 $1 \in \mathbf{K}$ と任意の $x \in V$ に対して, $1x = x$.

また, 線型空間 V の部分集合 $W \subseteq V$ が**部分空間 (部分線型空間, 部分ベクトル空間**ともいう**)** であるとは,

$$(\mathrm{S}_1)\ W \neq \varnothing, \qquad (\mathrm{S}_2)\ x, y \in W \ \Rightarrow\ x+y \in W, \qquad (\mathrm{S}_3)\ \alpha \in \mathbf{K}, x \in W \ \Rightarrow\ \alpha x \in W$$

を満たすことをいう．

注意 1.2.
(V$_3$), (V$_4$) における $0 \in V$, $x' \in X$ は一意的に存在する．実際, $0 \in V$ の他に $0' \in V$ があったとすると, $0 = 0 + 0' = 0'$ となる．同様に $x' \in V$ の他に $x'' \in V$ があったとすると, $x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$ となる．よって, $0 \in V$ のことを線型空間 V の**零元**あるいは**和に関する単位元**という．$x' \in V$ を $x \in V$ の**マイナス元**あるいは**和に関する逆元**といい, $-x := x'$ と表す．任意の $x, y \in V$ に対して, $x + (-y) =: x - y$ とかく．
また, V の部分空間 W は $0 \in W$ である．実際, $W \neq \varnothing$ より, ある元 $x \in W$ が取れ, (S$_3$) から $-x \in W$ がわかり, (S$_2$) により $W \ni x + (-x) = 0$ がわかる．このことから W もまた線型空間であることがわかる．

例 1.3.　(a) $\mathbf{K} = \mathbf{R}, V = \mathbf{R}^n$ のとき, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_i)_{i=1}^n, \boldsymbol{y} = (\eta_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n$ に対して, 演算を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} := (x_i + y_i)_{i=1}^n, \qquad \alpha\boldsymbol{x} := (\alpha\xi_i)_{i=1}^n$$

と定めれば, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}$ 上の線型空間である．

(b) $\mathbf{K} = \mathbf{R}, V = \mathsf{Mat}(n; \mathbf{R}) := \{A \,|\, A : n \text{ 次正方行列}\}$ のとき, $\alpha \in \mathbf{R}$, $X = (\xi_{ij})_{i,j}, Y = (\eta_{ij})_{i,j} \in \mathsf{Mat}(n; \mathbf{R})$ に対して, 演算を

$$X + Y := (\xi_{ij} + \eta_{ij})_{i,j}, \qquad \alpha X := (\alpha\xi_{ij})_{i,j}$$

と定めれば, Mat$(n;\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の線型空間である.

(c) $\mathbf{K}=\mathbf{R}, V=C([0,1],\mathbf{R}):=\{f:[0,1]\to\mathbf{R}\mid f \text{ は連続}\}$ のとき, $\alpha\in\mathbf{R},\ f,g\in C([0,1],\mathbf{R})$ に対して, 演算を

$$f+g:[0,1]\ni x\longmapsto f(x)+g(x)\in\mathbf{R},\qquad \alpha f:[0,1]\ni x\longmapsto \alpha f(x)\in\mathbf{R}$$

と定めれば, $C([0,1],\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の線型空間である.

以後, 可換体 $\mathbf{K}$ は実数全体 $\mathbf{R}$ あるいは複素数全体 $\mathbf{C}$ であるとする.

定義 1.4 (距離空間). X を空でない集合とする. 写像 $d:X\times X\longrightarrow\mathbf{R}$ が次を満たすとき, d は X 上の**距離**という：

(M_1) $d(x,y)\geqslant 0.$ **[非負値性 (正値性)]**

(M_2) $d(x,y)=0 \iff x=y.$ **[等号成立条件]**

(M_3) $d(x,y)=d(y,x).$ **[対称性]**

(M_4) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$ **[三角不等式]**

距離 d が定まっている集合 X を**距離空間 (metric space)** といい, $X=(X,d)$ とかく.

1.1.1 **点列の収束**, Cauchy 列

定義 1.5 (点列の収束, Cauchy 列). 距離空間 $X=(X,d)$ 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x\in X$ に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して, N 以上のすべての自然数 n に対して, $d(x_n,x)<\varepsilon$ が成り立つことをいう. また, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy 列**であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して, N 以上の自然数 n,m に対して, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ が成り立つことである.

注意 1.6. 収束列ならば Cauchy 列である. 実際, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を収束列としその極限を $x\in X$ とすると, $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}:\forall n\in\mathbf{N},n\geqslant N\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon/2$ である. 距離の三角不等式, 対称性を用いれば, N 以上の任意の自然数 n,m に対して, $d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x)+d(x,x_m)<\varepsilon$ となる. ただし, 逆は成り立つとは限らない. 距離空間 X 内の任意の Cauchy 列が X 内の点に収束するとき, X は**完備 (complete)** であるという. また, X の部分集合 A 内の任意の Cauchy 列が A 内で収束するとき, A は完備であるという.

定理 1.7. 完備距離空間 $X=(X,d)$ と, その部分集合 A について以下が成り立つ：

$$A:\text{完備}\qquad\iff\qquad A:\text{閉集合}.$$

定理 1.7 の証明.

$(\Longleftarrow)$ A を閉集合であるとすると, $A=\overline{A}$ である. A 内の任意の Cauchy 列を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすると, X が完備であるから, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内に極限を持つ. その極限を a とする. また, 閉包の定義から $a\in\overline{A}=A$ となる. よって, A は完備. //

$(\Longrightarrow)$ 対偶を示す. A が閉集合でないとすると, $A\subsetneq\overline{A}$ ということなので, A 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $a\in X$ に収束するが $a\notin A$ なるものが存在する. いま, 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A 内の Cauchy 列であるが, A 内に極限を持たない. ゆえに A は完備でない. □

定義 1.8 (ノルム空間). 集合 X を $\mathbf{K}$ 上の線型空間とする.
写像 $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbf{R}$ が次を満たすとき, $\|\cdot\|$ は X の**ノルム**であるという：

(N_1) $\|x\| \geqslant 0.$ **[非負値性 (正値性)]**
(N_2) $\|x\| = 0 \iff x = 0.$ **[等号成立条件]**
(N_3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\| \quad (\alpha \in \mathbf{K}).$
(N_4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$ **[三角不等式]**

ノルム $\|\cdot\|$ が定まっている線型空間 X を**ノルム空間 (norm space)** といい, $X = (X, \|\cdot\|)$ とかく. また, X のノルムであることを強調するために, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$ と書くこともある.

注意 1.9. ノルム空間 X の元 x, y に対して, $\big|\|x\|_X - \|y\|_X\big| \leqslant \|x - y\|_X$ が成り立つ. 実際, $\|x\|_X \leqslant \|x - y\|_X + \|y\|_X$, $\|y\| \leqslant \|x - y\|_X + \|x\|$ からわかる. また, $d(x, y) := \|x - y\|_X$ によって距離空間となる.

命題 1.10. X をノルム空間とする. X が完備であるための必要十分条件は, X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_X < \infty$ ならば $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 内で収束する.

命題 1.10 の証明.

$(\Longrightarrow)$ X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について,

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_X < \infty$$

と仮定する. また,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \|x_{k+1} - x_k\|_X$$

とおくと, 実数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S に収束する. つまり, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して, 自然数 $n \geqslant N$ について,

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_X = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって, X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となり, X の完備性から X 内に収束する.

$(\Longleftarrow)$ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 内の Cauchy 列とすると, 各 $j \in \mathbf{N}$ に対して, $2^{-j} > 0$ であるから, ある $N_j \in \mathbf{N}$ が存在して, 自然数 $\ell, k \geqslant N_j$ について $\|y_\ell - y_k\|_X < 2^{-j}$. ここで, n_j を $n_j > N_j$ かつ $n_j < n_{j+1}$ となるように定めれば, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が作れる. 便宜上, $y_{n_j} =: x_j$ とおく. すると,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{j+1} - x_j\|_X \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 < \infty$$

となる. よって, 点列 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ は X 内に収束する. その収束先を x とおく. $x_j = y_{n_j}$ だったので, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が x に収束するということである. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列だから, $\forall\varepsilon > 0$ に対して, ある $N' \in \mathbf{N}$ があって自然数 $n, m \geqslant N'$ に対して, $\|y_n - y_m\|_X < \varepsilon/2$ であり, また, 部分列 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ は x に収束するので, $J \in \mathbf{N}$ があって, 自然数 $j \geqslant J$ に対して, $\|y_{n_j} - x\|_X < \varepsilon/2$ となる. ここで, $N := \max(N', n_J)$ とすれば, 自然数 $n \geqslant N$ に対して,

$$\|y_n - x\|_X \leqslant \|y_n - y_{n_j}\|_X + \|y_{n_j} - x\|_X < \varepsilon$$

が成り立つ. よって, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束する. ゆえに, X は完備である. $\square$

定義 1.11 (内積空間). 集合 X を $\mathbf{K}$ 上の線型空間とする.
写像 $(\cdot\,|\,\cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbf{K}$ が次を満たすとき, $(\cdot\,|\,\cdot)$ は X 上の**内積**であるという：

(I_1) $(x\,|\,x) \geqslant 0$. **[非負値性 (正値性)]**
(I_2) $(x\,|\,x) = 0 \iff x = 0$. **[等号成立条件]**
(I_3) $(x\,|\,y) = \overline{(y\,|\,x)}$ ($\overline{\cdot}$ は複素共軛). **[共軛対称性]**
(I_4) $(x+y\,|\,z) = (x\,|\,z) + (y\,|\,z)$, $(\alpha x\,|\,y) = \alpha\,(x\,|\,y)$ $(\alpha \in \mathbf{K})$. **[第 1 引数の線型性]**

内積 $(\cdot\,|\,\cdot)$ が定まっている空間 X を**内積空間 (inner product space)** という.

注意 1.12. 内積空間 X の元 x, y, z と $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して, $(x\,|\,y+z) = (x\,|\,y) + (x\,|\,z)$, $(x\,|\,\alpha y) = \overline{\alpha}\,(x\,|\,y)$ が成り立つ.

注意 1.13. 内積空間 X は, $\|x\|_X := \sqrt{(x\,|\,x)}$ と定めることによりノルム空間となる. これを示すには次の補題 (Schwarz の不等式) が必要である.

補題 1.14 (Schwarz の不等式). 内積空間 X の任意の元 x, y に対して, 次が成り立つ：

$$|(x\,|\,y)| \leqslant \|x\|_X\,\|y\|_X\,. \tag{1.1}$$

補題 1.14 の証明. $t \in \mathbf{R}$ とする. 任意の $x, y \in X$ に対して,

$$0 \leqslant \|x+ty\|_X^2 = \|x\|_X^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x\,|\,y) + t^2\,\|y\|_X^2 \leqslant \|y\|_X^2\,t^2 + 2\,|(x\,|\,y)|\,t + \|x\|_X^2$$

が成り立つ. これは t についての 2 次不等式とみれるので,

$$|(x\,|\,y)|^2 - \|x\|_X^2\,\|y\|_X^2 \leqslant 0 \qquad \iff \qquad |(x\,|\,y)|^2 \leqslant (\|x\|_X\,\|y\|_X)^2$$

となる. $|(x\,|\,y)| \geqslant 0, \|x\|_X\,\|y\|_X \geqslant 0$ より, (1.1) が成り立つ. □

命題 1.15. 内積空間 X は, $\|x\|_X := \sqrt{(x\,|\,x)}$ と定めることによりノルム空間となる.

命題 1.15 の証明. $(\mathrm{N}_1), (\mathrm{N}_2), (\mathrm{N}_3)$ は明らかであるから, (N_4) は $\mathrm{Re}(x\,|\,y) \leqslant |(x\,|\,y)|$ と Schwarz の不等式よりわかる. □

注意 1.9, 命題 1.15 により, 内積空間はノルム空間となり, ノルム空間は距離空間となることがわかる. つまり,

$$\text{内積空間} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{ノルム空間} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{距離空間}$$

である.

1.1.2 Banach 空間, Hilbert 空間

定義 1.16 (Banach 空間, Hilbert 空間). ノルム空間 X が距離 $d(x,y) = \|x-y\|_X$ により完備な空間となるとき, X を **Banach 空間**と呼ぶ. また, 内積空間 X がノルム $\|x\|_X = \sqrt{(x\,|\,x)}$ により Banach 空間となるとき, X を **Hilbert 空間**と呼ぶ.

1.2　Hahn-Banach の定理

1.2.1　順序関係，極大元

Hahn-Banach の定理を述べるまえに，集合論の復習をしておこう．

定義 1.17 (順序関係). 集合 A の二項関係 $\preceq$ が次を満たすとき，A は順序関係 $\preceq$ をもつという：

(反射律)　任意の $a \in A$ に対して，$a \preceq a$.
(推移律)　任意の $a, b, c \in A$ に対して，$a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ ならば $a \preceq c$.
(反対称律)　任意の $a, b \in A$ に対して，$a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ ならば $a = b$.

また，順序集合 $A = (A, \preceq)$ が比較可能性の法則を満たす，すなわち，

$$a, b \in A \qquad \Longrightarrow \qquad a \preceq b \quad \text{または} \quad b \preceq a$$

が成り立つとき，A は**全順序集合**という．

- $s \in A$ が $B \subseteq A$ の**上界**であるとは，任意の $x \in B$ に対して，$x \preceq s$ となることである．
- $m \in A$ が A の**極大元**であるとは，任意の $x \in A$ に対して，$m \preceq x$ ならば $x = m$ となることである．
- A が**帰納的**であるとは，A の任意の全順序部分集合が上界を持つことである．

事実 1.18 (Zorn の補題). 空でない任意の帰納的順序集合は極大元を持つ．

Zorn の補題は選択公理 [1)] と同値な命題として知られている．

1.2.2　Hahn-Banach の定理

実線型空間における Hahn-Banach の定理が次である．

定理 1.19 (Hahn-Banach の拡張定理１). E を $\mathbf{R}$ 上の線型空間，$G \subseteq E$ を部分空間とする．
写像 $p : E \to \mathbf{R}$ と線型写像 $g : G \to \mathbf{R}$ が

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad (\forall x \in E,\ \forall \lambda \geqslant 0) \tag{1.2}$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad (\forall x, \forall y \in E) \tag{1.3}$$
$$g(x) \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.4}$$

を満たすとき，g を拡張する，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{R}$ (i.e., $\forall x \in G,\ f(x) = g(x)$) が存在して，

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.5}$$

を満たす．

定理 1.19 の証明.

次のような集合 P を考える．

$$P := \left\{ h \;\middle|\; \begin{array}{l} h : D(h) \to \mathbf{R},\ D(h) \text{ は } E \text{ の部分空間},\ h \text{ は線型写像}, \\ G \subseteq D(h),\ h \text{ は } g \text{ の拡張であり，任意の } x \in D(h) \text{ に対して } h(x) \leqslant p(x) \end{array} \right\}.$$

---

1) 選択公理とは，集合の列 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (Λ : 無限集合) に対して，$A_\lambda \neq \varnothing\ (\forall \lambda \in \Lambda) \implies \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$ という主張のことである．ここで，$\prod$ は直積集合を意味し，$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) \in A_\lambda \right\}$ である．日本語でわかりやすく言えば，空でない無限個の集合の直積集合は空集合でないということである．

P の二項関係を

$$h_1 \preceq h_2 \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad D(h_1) \subseteq D(h_2) \ \text{かつ} \ h_2 \text{は} \, h_1 \text{の拡張 (i.e.,} \ h_2|_{D(h_1)} = h_1)$$

と定めれば，これは順序関係である．実際，$D(h_1) = D(h_1)$ かつ $h_1 = h_1$ により反射律がわかり，$h_1 \preceq h_2$ かつ h_2 かつ h_3 を仮定すれば $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_3)$ かつ任意の $x \in D(h_1)$ に対して，$h_1(x) = h_2(x) = h_3(x)$ より推移律もわかり，$h_1 \preceq h_2$ かつ $h_2 \preceq h_1$ を仮定すれば $D(h_1) \subseteq D(h_2) \subseteq D(h_1)$ より $D(h_1) = D(h_2)$ となり $h_1 = h_2$ が従い，反対称律も成り立つ．このことから $g \in P$ がわかるので $P \neq \varnothing$．また，P は帰納的である．実際，$Q \subseteq P$ を全順序部分集合とし $Q = \{h_i \,|\, i \in I\}$ とする．写像 $u : D(u) \to \mathbf{R}$ を次のように定義する：

$$D(u) := \bigcup_{i=1}^{n} D(h_i)\ ; \quad u|_{D(h_i)} = h_i.$$

すると，$u \in P$ かつ u は Q の上界である．実際，$D(u)$ が E の部分空間であることは Q が全順序部分集合であることから簡単にわかり [2)]，u の線型性も同様にわかり [3)]，$u \in P$ がわかる．また u が Q の上界であることは，任意の $h_i \in Q$ $(i \in I)$ に対して，$D(h_i) \subseteq D(u)$ かつ $u|_{D(h_i)} = h$ となることからわかる．よって，P は帰納的であることがわかった．Zorn の補題 (事実 1.18) より P の極大元 $f \in P$ が存在する．$D(f) = E$ が示せれば主張が従う．$D(f) \neq E$ を仮定し，$x_0 \in E \setminus D(f)$ を取る．任意の $\xi \in \mathbf{R}$ に対して，

$$v_\xi : D(f) \oplus \mathbf{R}x_0 := \{x + \alpha x_0 \,|\, x \in D(f), \alpha \in \mathbf{R}\} \ni x + \alpha x_0 \mapsto f(x) + \alpha\xi \in \mathbf{R}$$

として，$D(v_\xi) = D(f) \oplus \mathbf{R}x_0$ 上の線型汎函数 v_ξ を定めると，v_ξ は f の拡張である．このとき，

$$v_{\xi_0}(x + \alpha x_0) \leqslant p(x_0 + \alpha x_0) \qquad (\forall x \in D(f), \forall \alpha \in \mathbf{R}) \tag{1.6}$$

を満たす $\xi_0 \in \mathbf{R}$ が存在することを示す．いま，任意の $x, y \in D(f)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\big(p(x + x_0) - f(x)\big) - \big(f(y) - p(y - x_0)\big) &= p(x + x_0) + p(y - x_0) - \big(f(x) + f(y)\big) \\
&= p(x + x_0) + p(y - x_0) - f(x + y) && \because\ f \text{ の線型性.} \\
&\geqslant p\big((x + x_0) + (y - x_0)\big) - f(x + y) && \because\ p \text{ の定義.} \\
&= p(x + y) - f(x + y) \ \geqslant\ 0 && \because\ f \in P.
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\beta_1 := \sup\{f(y) - p(y - x_0) \,|\, y \in D(f)\} \leqslant \inf\{p(x + x_0) - f(x) \,|\, x \in D(f)\} =: \beta_2$$

が成り立つから，実数の稠密性から $\beta_1 \leqslant \eta_0 \leqslant \beta_2$ なる $\eta_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．このような $\eta_0 \in \mathbf{R}$ は (1.6) を満たす．$\alpha = 0$ のときは人間ならわかるので，まず $\alpha > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
v_{\eta_0}(x + \alpha x_0) &= f(x) + \alpha\eta_0 \\
&\leqslant f(x) + \alpha\big(p(\alpha^{-1}x + x_0) - f(\alpha^{-1}x)\big) && \because\ \beta_2 \text{は下限より.} \\
&= p(x + \alpha x_0) && \because\ p \text{ の定義, } f \text{ の線型性.}
\end{aligned}$$

となるからよい．次に $\alpha < 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
v_{\eta_0}(x + \alpha x_0) &= f(x) + \alpha\eta_0 \\
&\leqslant f(x) + \alpha\big(f(-\alpha^{-1}x) - p(-\alpha^{-1}x - x_0)\big) && \because\ \alpha < 0,\ \beta_1 \text{は上限より.} \\
&= (-\alpha)p(-\alpha^{-1}x - x_0) \ = \ p(x + \alpha x_0) && \because\ -\alpha > 0,\ p \text{ の定義, } f \text{ の線型性.}
\end{aligned}$$

となる．よって，(1.6) を満たすような $\xi_0 \in \mathbf{R}$ が存在する．すると，このとき，$f \preceq v_{\xi_0}$ であるが $f \neq v_{\xi_0}$ である．これは f を P の極大元としたことに矛盾．ゆえに，$D(f) = E$ である． □

[2)] $x, y \in D(u)$ とすると，ある $j, k \in I$ があって $x \in D(h_j)$，$y \in D(h_k)$ となる．Q が全順序集合であることから $h_j \preceq h_k$ または $h_k \preceq h_j$ が成り立つので $D(h_j) \subseteq D(h_k)$ または $D(h_k) \subseteq D(h_j)$ が成り立つ．$D(h_j) \subseteq D(h_k)$ としても一般性を失わないのでそうすると，$x, y \in D(h_k)$ となり $D(h_k)$ は E の部分空間なので $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して $\alpha x + \beta y \in D(h_k) \subseteq \bigcup D(h_i)$ が得られる．

[3)] 記号は ↑ と同じとする．$h_j \preceq h_k$ とすると $h_k|_{D(h_j)} = h_j$ なので $\alpha u(x) + \beta u(y) = \alpha h_j(x) + \beta h_k(y) = \alpha h_k(x) + \beta h_k(y) = h_k(\alpha x + \beta y) = u(\alpha x + \beta y)$.

定理 1.20 (Hahn-Banach の拡張定理２). E を $\mathbf{K}$ 上の線型空間，$G \subseteq E$ を部分空間とする．
写像 $p : E \to [0, \infty)$ と G 上の線型写像 $g : G \to \mathbf{K}$ は

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \qquad (\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}) \tag{1.7}$$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad (\forall x, y \in E) \tag{1.8}$$

$$|g(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.9}$$

を満たすとする．このとき，g を拡張する，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{K}$ (i.e., $f|_G = g$) が存在して，

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.10}$$

を満たす．

定理 1.20 の証明.

i. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ の場合：
p は (1.7) を満たすので当然 (1.2) も満たす．また，任意の $x \in G$ に対して，$g(x) \leqslant |g(x)| \leqslant p(x)$ となることから，定理 1.19 を適用すれば，E 上の線型汎函数 $f : E \to \mathbf{R}$ が存在して

$$f(x) = g(x) \quad (\forall x \in G), \qquad f(x) \leqslant p(x) \quad (\forall x \in E)$$

を満たす．また，(1.7) より任意の $x \in E$ に対して，

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = |-1|\, p(x) = p(x)$$

が成り立つので，f は (1.10) を満たしている． //

ii. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ の場合：E, G のスカラー値を実数に制限したものをそれぞれ，$E_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}}$ と表す．
写像 $\mathrm{Re} : G \ni x \mapsto \mathrm{Re}\big(g(x)\big) \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Im} : G \ni x \mapsto \mathrm{Im}\big(g(x)\big) \in \mathbf{R}$ は $G_{\mathbf{R}}$ 上の実線型汎函数であるから，前半の証明により $E_{\mathbf{R}}$ 上の実線型汎函数 $\widetilde{F}_1 : E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, \widetilde{F}_2 : E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ が存在して，

$$\widetilde{F}_1\Big|_{G_{\mathbf{R}}} = \mathrm{Re}\, g, \quad \widetilde{F}_2\Big|_{G_{\mathbf{R}}} = \mathrm{Im}\, g, \qquad \Big|\widetilde{F}_i(x)\Big| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in E_{\mathbf{R}},\ i = 1, 2)$$

を満たす．また，E 上の新たな写像 $\widetilde{f} : E \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{f}(a + ib) := \widetilde{F}_1(a) - \widetilde{F}_2(b) \qquad (\forall a, \forall b \in E_{\mathbf{R}})$$

で定めると，$\widetilde{f}$ は明らかに実線型であり，任意の $x \in G$ に対して，$\widetilde{f}(x) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big)$ である.[4] ここで $f : E \to \mathbf{C}$ を

$$f(x) := \widetilde{f}(x) - i\, \widetilde{f}(ix) \qquad (\forall x \in E)$$

により定めると，f は線型である．実際，任意の $x \in E$ に対して，

$$\begin{aligned}
f(ix) &= \widetilde{f}(ix) - i\, \widetilde{f}(i(ix)) && \because\ f\ \text{の定義.} \\
&= \widetilde{f}(ix) - i\, \widetilde{f}(-x) && \because\ i^2 = -1. \\
&= \widetilde{f}(ix) + i\, \widetilde{f}(x) && \because\ f\ \text{の実線型性} \\
&= -i^2\, \widetilde{f}(ix) + i\, \widetilde{f}(x) && \because\ 1 = -(-1) = -i^2. \\
&= i\big(\widetilde{f}(x) - i\widetilde{f}(ix)\big) \quad = \quad i\, f(x)
\end{aligned}$$

であることから，任意の $x, y \in E$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbf{C}, \beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbf{C}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R})$ に対して，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha_1\, f(x) + \beta_1\, f(y) + i\, f(\alpha_2 x) + i\, f(\beta_2 y)$$

---

[4] 実際, $x = a + ib$ $(a, b \in G_{\mathbf{R}})$ とすると, $\widetilde{f}(x) = \widetilde{(f)}(a+ib) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) - \mathrm{Im}\big(g(b)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) + \mathrm{Re}\big(i\, g(b)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a)\big) + \mathrm{Re}\big(g(ib)\big) = \mathrm{Re}\big(g(a + ib)\big) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big)$ となる．

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha_1 + i\alpha_2) f(x) + (\beta_1 + i\beta_2) f(y) \\
&= \alpha f(x) + \beta f(y)
\end{aligned}
$$

となる．また，任意の $x \in G$ に対して

$$f(x) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big) - i\,\mathrm{Re}\big(g(ix)\big) = \mathrm{Re}\big(g(x)\big) + i\,\mathrm{Im}\big(g(x)\big) = g(x)$$

であり，任意の $x \in E$ に対して，$|f(x)| = \alpha\, f(x)$ かつ $|\alpha| = 1$ なる $\alpha \in \mathbf{C}$ を選べば [5)]，

$$|f(x)| = \alpha\, f(x) = f(\alpha x) = \mathrm{Re}\big(f(\alpha x)\big) = \widetilde{f}(\alpha x) \leqslant p(\alpha x) = |\alpha|\; p(x) = p(x)$$

となる．これが求めるものであった． □

1.3 線型作用素

定義 1.21 (線型作用素). X, Y をノルム空間とする．
写像 $T : X \to Y$ が次を満たすとき，T を**線型作用素 (linear operator)** と呼ぶ：

$$\forall\alpha, \forall\beta \in \mathbf{K}, \quad \forall x, \forall y \in X, \qquad T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty.$$

定義 1.22. X, Y をノルム空間とする．
線型作用素 $T : X \to Y$ が**有界**であるとは，ある定数 $K \geqslant 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して，

$$\|Tx\|_Y \leqslant K\,\|x\|_X$$

が成り立つことである．また，線型作用素 T が点 $x \in X$ で**連続**であるとは，x に収束する X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\|Tx - Tx_n\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことである．

定理 1.23. X, Y をノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とする．このとき，以下は同値である．
(1) T は X 上で連続である． (2) T は原点で連続である． (3) T は有界である．

定理 1.23 の証明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 自明．

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任意に $x \in X$ を固定する．x に収束する X 内の任意の点列を $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．まず，T の線型性から $\|Tx_n - Tx\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y$ であり，いま，T が有界なので，ある定数 $K \geqslant 0$ があって $\|T(x_n - x)\|_Y \leqslant K\,\|x_n - x\|_X$ となる．また，$\|x_n - x\|_X \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，

$$\|Tx_n - Tx\|_Y \leqslant K\,\|x_n - x\|_X \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．よって，T は X 上で連続である．

(2) $\Longrightarrow$ (3) 背理法で示す．T が有界でないとすると，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，ある単位ベクトル $x_n \in X$ が存在し，

$$\|Tx_n\|_Y > n\,\|x_n\|_X = n$$

が成り立つ．$y_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} x_n$ とおくと，

$$\|y_n - 0\|_X = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} x_n \right\|_X = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\|x_n\|_X = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

[5)] $f(x)$ が実数の場合，$f(x) \geqslant 0$ なら $\alpha = 1$，$f(x) < 0$ なら $\alpha = -1$ とすればよい．また，$f(x)$ が実数でなかった場合，$\alpha = |f(x)| \,/\, \big(\mathrm{Re}(f(x)) + i\,\mathrm{Im}(f(x))\big)$ とすればよい．

となるから $y_n \to 0\ (n\to\infty)$ である．一方，

$$\|Ty_n - T0\|_Y = \|Ty_n\|_Y = \frac{1}{\sqrt{n}}\|Tx_n\|_Y > \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot n = \sqrt{n} \to \infty \quad (n\to\infty)$$

となることから，Ty_n が $T0$ に収束しないことがわかる．これは T が原点で連続であることに反する ($y_n \to 0\ (n\to\infty)$ にもかかわらず Ty_n は $T0$ に収束しない)．よって従う． □

ノルム空間 X からノルム空間 Y への有界線型作用素全体を $\mathscr{B}(X,Y)$ で表す．すなわち，

$$\mathscr{B}(X,Y) := \{T : X\to Y \mid \exists K \geqslant 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x\in X,\quad \|Tx\|_Y \leqslant K\|x\|_X\}$$

である．特に $Y = X$ のときは $\mathscr{B}(X)$ とかく．$\mathscr{B}(X,Y)$ は次の和・スカラー倍により線型空間をなす：

$$\forall x\in X, \qquad (T+S)x := Tx + Sx, \quad (\alpha T)x := \alpha Tx \qquad\qquad (T,S\in\mathscr{B}(X,Y),\ \alpha\in\mathbf{K}).$$

また，$\mathscr{B}(X,Y)$ は次で定めるノルムによって，ノルム空間となる：

$$\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} := \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\ \middle|\ x\in X,\ x\neq 0\right\} = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \qquad\qquad (T\in\mathscr{B}(X,Y)).$$

定理 1.24. X をノルム空間，Y を Banach 空間とする．このとき，$\mathscr{B}(X,Y)$ は Banach 空間である．

定理 1.24 の証明.

$\{T_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{B}(X,Y)$ 内の任意の Cauchy 列とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N\in\mathbf{N}$ が存在して，N 以上のすべての自然数 n,m に対して，$\|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \varepsilon$ が成り立つ．また，任意の $x\in X$ に対して，$\|T_nx - T_mx\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y = \|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)}\|x\|_X < \varepsilon\|x\|_X$ より，点列 $\{T_nx\}_{n=1}^\infty$ は Y 内の Cauchy 列であることがわかる．いま，Y は完備であるから $\{T_nx\}_{n=1}^\infty$ は収束する．その極限を Tx とかく.[6] このとき，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ であり $\|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \to 0\ (n\to\infty)$ であることを示す．まず，T が線型作用素であることを示そう．任意の $x,y\in X$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|T(x+y) - (Tx+Ty)\|_Y &\leqslant \|T(x+y) - T_n(x+y)\|_Y + \|T_nx + T_ny - (Tx+Ty)\|_Y && \because T_n\text{の線型性}\\
&\leqslant \|T(x+y) - T_n(x+y)\|_Y + \|T_nx - Tx\|_Y + \|T_ny - Ty\|_Y\\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad (n\to\infty) && \because \|T_nz - Tz\|_Y \to 0
\end{aligned}$$

となるから，$\|T(x+y) - (Tx+Ty)\|_Y = 0$ より $T(x+y) = Tx + Ty$．同様に，任意の $\alpha\in\mathbf{K}$，$x\in X$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|T(\alpha x) - \alpha Tx\|_Y &\leqslant \|T(\alpha x) - T_n(\alpha x)\|_Y + \|\alpha T_nx - \alpha Tx\|_Y\\
&= \|T(\alpha x) - T_n(\alpha x)\|_Y + |\alpha|\,\|T_nx - Tx\|_Y\\
&\longrightarrow \quad 0 \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

となることから，$T(\alpha x) = \alpha Tx$ がわかる．よって，T は線型作用素である．次に，T が有界であることを示そう．$x\in X$ を任意に固定する．このとき，N 以上のすべての自然数 n,m に対して，

$$\begin{aligned}
\|T_nx - Tx\|_Y &\leqslant \|T_nx - T_mx\|_Y + \|T_mx - Tx\|_Y\\
&= \|(T_n - T_m)x\|_Y + \|T_mx - Tx\|_Y\\
&\leqslant \|T_n - T_m\|_{\mathscr{B}(X,Y)}\|x\|_X + \|T_mx - Tx\|_Y\\
&< \varepsilon\|x\|_X + \|T_mx - Tx\|_Y && \because T_n : \text{Cauchy 列}
\end{aligned}$$

[6] ここで注意すべきなのが「何か写像 $T : X\to Y$ があって Tx とかける収束先がある」という解釈ではなく「x に依存する収束先 y があり，それを x に依存していることを強調して Tx と書きましょう」というものである．もちろん，$x\in X$ に対応する $y\in Y$ なので T は確かに X から Y への写像となっている．

右辺を $m \to \infty$ とすれば,

$$\|T_n x - Tx\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X \tag{1.11}$$

となる．$\|Tx\|_Y - \|T_n x\|_Y \leqslant \|T_n x - Tx\|_Y$ に注意すれば,

$$\|Tx\|_Y \leqslant \|T_n x\|_Y + \varepsilon \|x\| \leqslant \|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X + \varepsilon \|x\|_X = \left(\|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} + \varepsilon\right) \|x\|_X$$

が成り立つ．$T_n \in \mathscr{B}(X,Y)$ より $\|T_n\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ であり，ε は任意であるから $\varepsilon = 1$ とでもすれば T が有界であることがわかる．よって，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ である．最後に，T_n が T のノルム収束していることを示す．式 (1.11) より，$x \neq 0$ のとき，両辺を $\|x\|_X$ $(\neq 0)$ で割り，$x \neq 0$ における sup をとれば,

$$\|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \varepsilon$$

であることがわかる．いま，ε は任意であったから，これは T_n が T にノルム収束していることにほかならない．ゆえに，$\mathscr{B}(X,Y)$ は Banach 空間である． □

1.4 双対空間

線型作用素 $T : X \to Y$ において, $Y = \mathbf{K}$ であるものを**線型汎函数**と呼ぶ．有界線型汎函数全体のなす集合 $\mathscr{B}(X,\mathbf{K})$ を X' で表し, X の**双対空間**と呼ぶ．$\mathbf{K}$ は完備であるから, ノルム空間 X の双対空間 X' もまた Banach 空間となる．ノルム空間に関する重要な結果として, 次の定理がある．これもまた, Hahn-Banach の定理と呼ばれる．

定理 1.25 (Hahn-Banach の拡張定理 3). E を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間, $G \subseteq E$ を部分空間とする．このとき, 任意の $g \in G'$ に対して, 次を満たす $f \in E'$ が存在する：

$$f|_G = g \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}\,. \tag{1.12}$$

定理 1.25 の証明. $p : E \to [0,\infty)$ を $p(x) := \|g\|_{G'} \|x\|_E$ で定めると, 定理 1.19 の条件を満たすので, ある線型汎函数 $f : E \to \mathbf{K}$ が存在し,

$$f(x) = g(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.13}$$
$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.14}$$

を満たす．(1.14) より $\|f\|_{E'} \leqslant \|g\|_{G'}$ を得る．よって $f \in E'$ である．また, (1.13) より, 任意の $x \in G$ に対して $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E$ となるので, $\|g\|_{G'} \leqslant \|f\|_{E'}$ を得る．ゆえに $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$． □

系 1.26. E を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする．$x_0 \in E \setminus \{0\}$ に対して, 次を満たすような $f \in E'$ が存在する：

$$f(x_0) = \|x_0\|_E \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = 1. \tag{1.15}$$

系 1.26 の証明. $\mathbf{K}x_0 := \{\alpha x_0 \,|\, \alpha \in \mathbf{K}\}$ とおくと, $\mathbf{K}x_0$ は E の部分空間である．ここで, $G := \mathbf{K}x_0$ とおき G 上の写像 $g : G \to \mathbf{K}$ を $g(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|_E$ で定めると, g は明らかに線型であり, 任意の $\alpha x_0 \in \mathbf{K}x_0$ に対して $\|\alpha x_0\|_E = |\alpha| \|x_0\|_E = |\alpha \|x_0\|_E| = |g(\alpha x_0)|$ より $\|g\|_{G'} = 1$ を得るから $g \in G'$. よって, 定理 1.20 により, ある $f \in E'$ が存在して, $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|_E$ かつ $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1$ となる． □

系 1.27. $M \subseteq E$ を部分空間とする．このとき, 次を満たすような $f \in E'$ が存在する：

$$f(m) = 0 \ (\forall m \in M) \qquad \text{かつ} \qquad f(x_0) = 1 \ (\forall x_0 \in E \setminus \overline{M}). \tag{1.16}$$

系 1.27 の証明. $x_0 \in E \setminus \overline{M}$ とする．$G := M \oplus \mathbf{K}x_0$ とし, $g : G \to \mathbf{K}$ を

$$g : M \oplus \mathbf{K}x_0 \ni m + \alpha x_0 \longmapsto \alpha \in \mathbf{K} \qquad (m \in M, \alpha \in \mathbf{K})$$

と定めると, $g(m)=0$ かつ $g(x_0)=1$ である. $g\in G'$ を示す. 線型性は明らかなので有界性を示す. $x_0\in E\setminus\overline{M}$ から

$$\mathrm{dist}(x_0,M):=\inf\{\|x_0-m\|_E \mid m\in M\}>0$$

がわかる. 実際, 当たり前に $\overline{M}$ は閉集合なので $E\setminus\overline{M}$ は開集合となる. つまり, ある $\varepsilon_0>0$ が存在して $E\setminus\overline{M}\supseteq B(x_0;\varepsilon_0)=\{y\in E\mid \|x_0-y\|_E<\varepsilon_0\}$ であるから, 両辺の補集合を取れば, 任意の $m\in\overline{M}$ に対して, $0<\varepsilon_0\leqslant\|x_0-m\|_E$ となる. また, $x=m+\alpha x_0\in G$ に対して, $\alpha=0$ のときは明らかだから, $\alpha\neq 0$ を仮定すると,

$$\|x\|_E=\|m+\alpha x_0\|_E=|\alpha|\left\|x_0+\alpha^{-1}m\right\|_E\geqslant|\alpha|\,\mathrm{dist}(x_0,M)$$

であるから,

$$|g(x)|=|\alpha|\leqslant\frac{\|x\|_E}{\mathrm{dist}(x_0,M)}$$

を得る. よって g は有界. ゆえに, 定理 1.20 により $g\in G'$ を拡張した $f\in E'$ が得られる. □

系 1.28. E をノルム空間とする. このとき, 任意の $x\in E$ に対して, 次が成り立つ：

$$\|x\|_E=\sup_{\substack{f\in E'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}=\sup_{\substack{f\in E'\\ \|f\|_{E'}=1}}|f(x)|=\sup_{\substack{f\in E'\\ \|f\|_{E'}\leqslant 1}}|f(x)|\,. \tag{1.17}$$

系 1.28 の証明.

$x\in E$ とする. $x=0$ のときは明らかであるから $x\neq 0$ とする. いま, 任意の $f\in E'$ に対して, $|f(x)|\leqslant\|f\|_{E'}\|x\|_E$ より

$$\sup_{\substack{f\in E'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}\leqslant\|x\|_E$$

を得る. また, $x\neq 0$ なので, 系 1.26 により, ある $f\in E'$ が存在して, $f(x)=\|x\|_E$ かつ $\|f\|_{E'}=1$ が成り立つから,

$$\sup_{\substack{f\in E'\\ f\neq 0}}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}\geqslant\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}=|f(x)|=\|x\|_E$$

を得る. ゆえに等号が成り立つ. □

1.4.1 双対の記号

以後, ノルム空間 X の元 x とその双対空間 X' の元 f における記号として $f(x)=\langle f,x\rangle={}_{X'}\langle f,x\rangle_X$ とかく. また, 双対空間 X' の元を一般に x' などとかく. 系 1.26 より, 任意の $x'\in X'$ に対して, ${}_{X'}\langle x',x\rangle_X=0$ ならば $x=0$ である.

注意 1.29. 上記の下線部の部分は, ノルム空間 X の双対空間 X' の元が豊富にあることを意味する.

1.4.2 二重双対空間

ノルム空間 X に対して, X' の双対空間 $(X')'=:X''$ を X の**二重双対空間**と呼ぶ. X から X'' への写像 J_X を ${}_{X''}\langle J_Xx,x'\rangle_{X'}:={}_{X'}\langle x',x\rangle_X$ により定めると, 系 1.28 から

$$\|J_Xx\|_{X''}=\|x\|_X$$

を得る. よって, J_X は等長線型である. J_X を**標準的単射**あるいは**標準対応**と呼ぶ. また, J_X が全射であるとき, X は**回帰的**あるいは**反射的**であるという.

1.4.3　双対空間の例

双対空間の例を紹介する前に, Banach 空間の比較的わかりやすいと思われる例を紹介しておく．微積分学・線型代数学の知識より, $\mathbf{R}^n$ や $\mathbf{C}^n$ は Banach 空間である．それを自然に拡張した空間がある．数列空間と呼ばれるものである．任意に $1 \leqslant p \leqslant \infty$ を固定し, 複素数列, あるいは実数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ で,

$$\|x\|_{\ell^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p} & (1 \leqslant p < \infty), \\ \sup \left\{ |\xi_n| \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\} & (p = \infty) \end{cases}$$

が有限であるもの全体のなす集合を $\ell^p(\mathbf{N})$ で表す．演算を

$$(\xi_n)_{n=1}^{\infty} + (\eta_n)_{n=1}^{\infty} := (\xi_n + \eta_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha(\xi_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha\xi_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \big(\alpha \in \mathbf{K}, (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbf{N})\big)$$

により定める．ノルムは上述のとおりである．$\ell^p(\mathbf{N})$ は Banach 空間となる．証明は, そもそもノルム空間となること自体そんなに自明でないので, ここでは省略する (が, いつかは加筆しようと思っている).

例 1.30 (数列空間の双対空間). $1 < p < \infty, q$ は $p^{-1} + q^{-1} = 1$ により定まる実数とする．このとき, $\ell^p(\mathbf{N})$ の双対空間は $\ell^q(\mathbf{N})$ と等長同型である．すなわち, $(\ell^p(\mathbf{N}))' \overset{\mathrm{id}}{=} \ell^q(\mathbf{N})$ である．

2　双対作用素

以後, X, Y を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする．$T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, その双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ を定義する．

2.1　双対作用素の定義

補題 2.1. $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ と $y' \in Y'$ に対して, 写像 $f : X \to \mathbf{K}$ を

$$f(x) := {}_{Y'}\langle y', Tx \rangle_Y \qquad (x \in X)$$

で定めると, $f \in X'$ である．

補題 2.1 の証明. まず, f は線型である．実際, 任意の $x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して, $y' \in Y'$ と $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ の線型性より $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = {}_{Y'}\langle y', T(\alpha x_1 + \beta x_2) \rangle_Y = \alpha\, {}_{Y'}\langle y', Tx_1 \rangle_Y + \beta\, {}_{Y'}\langle y', Tx_2 \rangle_Y = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ となる．また, 任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| = |{}_{Y'}\langle y', Tx \rangle_Y| \leqslant \|y'\|_{Y'} \|Tx\|_Y \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X$ より $\|f\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る．$y' \in Y'$, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ より $\|y'\|_{Y'} < \infty$ かつ $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ となるので $\|f\|_{X'} < \infty$ である．よって $f \in X'$. □

定義 2.2 (双対作用素). $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, その双対作用素 $T' : Y' \to X'$ を次で定める：

$${}_{X'}\langle T'y', x \rangle_X := {}_{Y'}\langle y', Tx \rangle_Y \qquad (y' \in Y',\ x \in X).$$

補題 2.1 より T' が well-defined であることがわかる．

定理 2.3. $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, 双対作用素 T' は $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ であって $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$.

定理 2.3 の証明. 補題 2.1 より, 任意の $y' \in Y'$ に対して $\|T'y'\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ なので, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る．よって $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$. 逆向きは, T' の双対作用素 $T'' := (T')' : X'' \to Y''$ を考える．まず, 任意

の $y' \in Y'$ に対して，${}_{Y''}\langle J_Y(Tx), y'\rangle_{Y'} = {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y = {}_{X'}\langle T'y', x\rangle_X = {}_{X''}\langle J_X x, T'y'\rangle_{X'} = {}_{Y''}\langle T''(J_X x), y'\rangle_{Y'}$ であるから，

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X \tag{2.1}$$

を得る．標準対応 J_X, J_Y の等長性より, 任意の $x \in X$ に対して

$$\|Tx\|_Y = \|J_Y(Tx)\|_{Y''} = \|T''(J_X x)\|_{Y''} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|J_X x\|_{X''} = \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|x\|_X$$

が成り立つので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')}$ を得る．また, 前半の証明により $\|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$ となるので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$．ゆえに, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$． □

2.2 Schauder の定理

以下，ノルム空間 E に対して, $B_E := \{x \in E \mid \|x\|_E \leqslant 1\}$ とする．また，K をコンパクト距離空間とし，K 上の複素数値連続函数全体のなす集合を $C(K)$ で表す．

2.2.1 コンパクト作用素

ノルム空間 X, Y に対し, 線型作用素 $T : X \to Y$ が**コンパクト**であるとは, $T(B_X)$ の閉包 $\overline{T(B_X)}$ が Y についてコンパクト集合であることをいう．X から Y へのコンパクト作用素全体のなす集合を $\mathscr{K}(X,Y)$ で表すと, コンパクト集合は有界なので, $\mathscr{K}(X,Y) \subset \mathscr{B}(X,Y)$ である．線型作用素 $T : X \to Y$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X の任意の有界点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し, Y の点列 $\{Tx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束部分列をもつことである．これは距離空間におけるコンパクト集合の特徴づけ (距離空間におけるコンパクト性は点列コンパクトと同値) と対角線論法によって示される (入来さんの卒論あるいはゼミノート参照).

2.2.2 Ascoli-Arzelà の定理

$C(K)$ の部分集合 S が**同程度連続**であるとは, 任意の $y \in K, \varepsilon > 0$ に対して, y を含む開集合 U が存在して, 任意の $f \in S$ に対して, $x \in U$ のとき, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことである．また, S が**一様有界**であるとは, ある定数 $M > 0$ が存在し, 任意の $f \in S$ に対して, $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} \leqslant M$ が成り立つことである．$C(K)$ に関する重要な結果として次の定理が知られている．

事実 2.4 (Ascoli-Arzelà の定理). K をコンパクト距離空間とする．$C(K)$ の部分集合 S が一様有界かつ同程度連続ならば, S 内の任意の函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は K 上で一様収束する部分列をもつ．

2.2.3 双対作用素のコンパクト性

$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ の双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y',X')$ についての結果として, 定理 2.3 よりノルムが等しいこと, すなわち, 長さが双対においても引き継がれることがわかった．では, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ のとき, その双対作用素 T' にもコンパクト性が引き継がれるのかどうかが気になる．それついての結果が次である．

定理 2.5 (Schauder の定理). X をノルム空間, Y を Banach 空間とする．このとき, 以下が成り立つ：

$$T \in \mathscr{K}(X,Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T' \in \mathscr{K}(Y',X').$$

定理 2.5 の証明.

($\Longrightarrow$) $K := \overline{T(B_X)}$ とおくと, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ より K はコンパクト集合である．また, 集合 $\left\{y'|_K \,\middle|\, y' \in B_{Y'}\right\}$ を $B_{K'}$ と表すと, $B_{K'}$ は $C(K)$ の部分集合である．このとき, $B_{K'}$ は一様有界である．実際, 任意の $z' \in B_{K'}$, $z \in K$ に対して, $|{}_{Y'}\langle z', z\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'} \|z\|_Y \leqslant \|z\|_Y$ となる．いま, $z \in K = \overline{T(B_X)}$ より, B_X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 n を十分大きくとれば $\|z\|_Y - \|Tx_n\|_Y \leqslant \|z - Tx_n\|_Y < \varepsilon$

が成り立つ．すなわち，$\|z\|_Y < \varepsilon + \|Tx_n\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} + \varepsilon$ が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だったので $\|z\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となる．よって，$\|z'\|_{Y'} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となり，$\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ は z' に依らないので，$B_{K'}$ は一様有界であることがわかる．また，$B_{K'}$ は同程度連続である．実際，任意の $z_1 \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して，K の開集合 $B(z_1;\varepsilon)$ を取ると，$z_1 \in B(z_1;\varepsilon)$ であり，任意の $z' \in B_{K'}$ に対して，$z_2 \in B(z_1;\varepsilon)$ のとき，$|{}_{Y'}\langle z', z_1\rangle_Y - {}_{Y'}\langle z', z_2\rangle_Y| = |{}_{Y'}\langle z', z_1 - z_2\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'}\|z_1 - z_2\|_Y \leqslant \|z_1 - z_2\|_Y < \varepsilon$ となる．ここで，$B_{Y'}$ の任意の点列を $\{y'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると，$B_{K'}$ は一様有界かつ同程度連続であるから，Ascoli-Arzelà の定理 (事実 2.4) より，K 上で一様収束する部分列 $\left\{y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ が存在する．よって，

$$
\begin{aligned}
\left\|T'y'_{n_j} - T'y'_{n_k}\right\|_{X'} &= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{X'}\left\langle T'\left(y'_{n_j} - y'_{n_k}\right), x\right\rangle_X\right| && \because T'\text{の線型性.}\\
&= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, Tx\right\rangle_Y\right| && \because T'\text{の定義.}\\
&\leqslant \sup_{y\in K}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, y\right\rangle_Y\right| && \because T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)} = K.\\
&\longrightarrow \quad 0 \quad (j,k\to\infty) && \because \left\{y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}\ \text{は}\ C(K)\ \text{上の Cauchy 列.}
\end{aligned}
$$

を得る．したがって，$\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は X' の Cauchy 列である．また，X' の完備性より，$\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束列となる．ゆえに，T の双対作用素 T' はコンパクト作用素である． //

($\Longleftarrow$) X の任意の有界点列を $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると，標準対応 J_X の等長性より，$\{J_Xx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は有界点列となる．いま，T' の双対作用素 $T'' : X'' \to Y''$ を考えると，前半の証明により，T'' はコンパクト作用素となるので，$\{T''J_Xx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束部分列 $\left\{T''J_Xx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ をもつ．また，定理 2.3 の証明中の式 (2.1) により，$\left\{J_YTx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束列であるから，Cauchy 列となる．さらに，標準対応 J_Y の等長性から，$\left\{Tx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ も Cauchy 列となる．仮定より Y は完備であったから $\left\{Tx_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束する．ゆえに，T はコンパクト作用素である． □

参考文献

[1] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

[2] 荷見守助・長宗雄・瀬戸道生，「関数解析入門 線型作用素のスペクトル」，内田老鶴圃.

[3] 宮島静雄，「関数解析」，横浜図書.

[4] 内田伏一，「集合と位相」，裳華房.