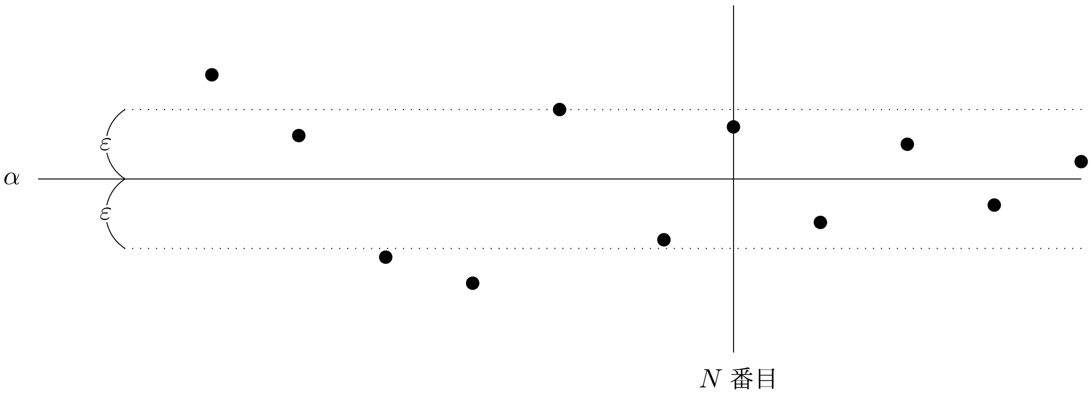
微分積分学 ε - δ 論法 まとめ

1. はじめに

これは大学 2 年次の微分積分学の講義で学習した ε-δ 論法による極限の定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです. 多少タイプミス等があるかもしれませんが, ご了承ください. すべての内容が収録されているわけではありませんが, 復習などご自由に役立ててください. 目次の行きたい単元をクリックするとそのページへ行けます. (下記画像参照) 最終ページに参考文献として本講義で教科書として使用したものを記載しています. リンクを埋め込んでいるので是非ご活用ください.
内容に不備や落丁等がありましたら `<s17m066nk@ous.jp>` へ連絡をお願いします.



目次の使い方

目次

1 数について

1.1 数とは, 四則演算, 極限操作, 記号の意味

- 自然数 $\{1,2,3,\ldots\}=\mathbb{N}$ は $+,\times$ では閉じている. $-,\div$ では閉じていない.

$\boxed{\text{例}}$ $1-2$ は自然数の中で考えると解なし. また同様に $1\div 2$ も解なし.

- 整数 $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}=\mathbb{Z}$ は $+,\times,-$ で閉じている. $\div$ では閉じていない.

- 有理数 $\left\{\dfrac{n}{m}\,\middle|\, m,n\in\mathbb{Z},\, m\neq 0\right\}=\mathbb{Q}$ は $+,\times,-,\div$ で閉じている.

実数への拡張

- 実数 $\to +,\times,-,\div$ で閉じている. 有理数と無理数の集合である.

無理数とは有理数でない数である. $\rightsquigarrow$ 無理数は存在する. これは正しいか？

宇宙人とは地球人でない人である. $\rightsquigarrow$ 宇宙人は存在する. $\leftarrow$ 怪しい.

$\boxed{\text{例}}$

$x^2=2$ の解は $\mathbb{Q}$ にはない. $\sqrt{2}=1.41421356\ldots$

$q_1=1, q_2=1.4, q_3=1.41, q_4=1.414, q_5=1.4142, q_6=1.41421,\cdots,q_n\in\mathbb{Q}$

$|\sqrt{2}-q_n|\leqq\dfrac{1}{10^{n-1}}$, 有理数数列 $\{q_n\}$ の収束先を $\sqrt{2}$ と定義する.

直観的な定義

実数とは有理数数列の極限である. $\Leftrightarrow {}^{\forall}\gamma\in\mathbb{R}, {}^{\exists}\{q_n\}\subset\mathbb{Q}, \lim_{n\to\infty}q_n=\gamma$

まとめ

	四則演算	極限操作
有理数	閉じている	閉じてない
実数	閉じている	閉じている

記号

$\forall$: 任意の, すべての

$\exists$: 存在する.

$\max\{a,b\}:=\begin{cases}a, & a\geqq b\\ b, & b\geqq a\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a と b の大きい方をとる.

$\min\{a,b\}:=\begin{cases}a, & a\leqq b\\ b, & b\leqq a\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ a と b の小さい方をとる.

s.t. : such that の略, 次を満たす〜. 例 : ${}^{\exists}a$ s.t. 命題 A $\Leftrightarrow$ 命題 A を満たす a が存在する.

$[\ ],\lfloor\ \rfloor,\lceil\ \rceil$: ガウス記号 $\cdots$ 小数点を消す.

$A\Leftrightarrow B$ は A と B は同値, A と B は同じ意味である. ということ.

$a:=b$ は a は b で定義されるや $a=b$ とおくという意味である.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ は定義.

2　数列の極限

2.1　収束・発散の定義

定義 1

数列 $\{x_n\}$ が収束する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists a \in \mathbb{R}, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

定義 1′

数列 $\{x_n\}$ が $a(\in \mathbb{R})$ に収束する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

定義 1 の否定

数列 $\{x_n\}$ が収束しない $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall a \in \mathbb{R}, {}^\exists \varepsilon > 0, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geqq N$ s.t. $|x_n - a| \geqq \varepsilon$

定義 1′ の否定

数列 $\{x_n\}$ が $a(\in \mathbb{R})$ に収束しない $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists \varepsilon > 0, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \geqq N$ s.t. $|x_n - a| \geqq \varepsilon$

定義 2

数列 $\{x_n\}$ が正の無限大に発散する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall M > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow x_n > M$

定義 2′

数列 $\{x_n\}$ が負の無限大に発散する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall M < 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow x_n < M$

<u>例題</u>

(1) $x_n = \dfrac{1}{n}$ の収束・発散を定義に基づき判定せよ.

解答 : ${}^\exists \alpha = 0, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow |x_n - 0| = \dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{N} < \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$

(2) $x_n = 1$ は 2 に収束しないことを示せ.

解答 : ${}^\exists \varepsilon = \dfrac{1}{2}, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n = N + 1$ s.t. $|x_n - 2| = |1 - 2| = 1 > \dfrac{1}{2} = \varepsilon$

(3) $x_n = n$ の収束・発散を定義に基づき判定せよ.

解答 : ${}^\forall M > 0, {}^\exists N = [M] + 1$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow x_n = n \geqq N = [M] + 1 > M$

(4) $x_n = -n$ の収束・発散を定義に基づき判定せよ.

解答 : ${}^\forall M < 0, {}^\exists N = -[M] + 1$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow x_n = -n < -N = -(-[M] + 1) < M - 1 < M$

2.2 有界, 絶対値の性質

定義 3

1. 数列 $\{x_n\}$ が上に有界 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists K \in \mathbb{R}, {}^\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq K$
2. 数列 $\{x_n\}$ が下に有界 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists K \in \mathbb{R}, {}^\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqq K$
3. 数列 $\{x_n\}$ が (上下に) 有界 $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists K > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq K$

絶対値 (ノルム) の性質

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geqq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(N1) $|x| \geqq 0$, 等号成立条件は $x = 0$

(N2) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x| \quad ({}^\forall \lambda, x \in \mathbb{R})$

(N3) $\Big||x| - |y|\Big| \leqq |x + y| \leqq |x| + |y|$

定理

収束する数列は有界である

証明 :
収束する数列を $\{x_n\}$ とすると, 仮定より

${}^\exists \alpha \in \mathbb{R}, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$

ここで $\varepsilon = 1$ とすると $(|x_n| - |\alpha| \leqq)|x_n - \alpha| < 1 \Leftrightarrow |x_n| < |\alpha| + 1$

また, $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$ とおくと

${}^\forall n < N$ のとき $|x_n| \leqq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\} \cdots [1]$

${}^\forall n \geqq N$ のとき仮定より $|x_n| < |\alpha| + 1 \cdots [2]$

[1],[2] より ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| \leqq M$. よって有界. □

2.3　極限値の唯一性, 部分列

定理

収束する数列はただ一つの極限を持つ

証明：
極限が 2 つあったとする.

収束する数列 $\{x_n\}$ の相異なる極限を a, b $(a \neq b)$ とする.

$$^\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して } \begin{cases} ^\exists N_a \in \mathbb{N}, ^\forall n \geqq N_a \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \\ ^\exists N_b \in \mathbb{N}, ^\forall n \geqq N_b \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon \end{cases}$$

ここで $\pm(x_n - a) \leqq |x_n - a| < \varepsilon \cdots [1], \pm(b - x_n) \leqq |x_n - b| < \varepsilon \cdots [2]$

また $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{4}$ とおいて [1], [2] を足し合わせると

$$\pm(b-a) < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|b-a|}{4} = \frac{|b-a|}{2} \Longleftrightarrow |b-a| < \frac{|b-a|}{2}$$

これは矛盾. よって極限はただ一つ.　□

定義

数列 $\{x_n\}$ と $1 \leqq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_j < n_{j+1} < \cdots \to +\infty$,
$\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{n\} = \mathbb{N}$ に対し, $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ を $\{x_n\}$ の部分列という.

定理

収束する数列の任意の部分列は同じ極限を持つ

証明：
収束する数列を $\{x_n\}$ とする.
仮定より $^\exists\alpha \in \mathbb{R}, ^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geqq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
一方, 部分列の定義より $^\exists J \in \mathbb{N}, ^\forall j > J, n_j \geqq N$
以上より $^\forall\varepsilon > 0, ^\exists J \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall j \geqq J \Rightarrow |x_{n_j} - a| < \varepsilon$　□

例題

(1) $x_n = (-1)^n$ に対して, $n_j = 2j, n'_j = 2j+1$ $(j \in \mathbb{N})$ とすると
部分列 $\{x_{n_j}\}$ は $x_{n_j} = (-1)^{2j} = 1$, $\{x_{n'_j}\}$ は $x_{n'_j} = (-1)^{2j+1} = -1$ と表せる.

2.4 極限の四則演算, スカラー倍

定理

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が収束するとき, 以下が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ (2) $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n$

(3) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$ (4) $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty} x_n}$

証明：

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は収束するので

$^\exists a \in \mathbb{R}, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N_a \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geqq N_a \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$^\exists b \in \mathbb{R}, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N_b \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geqq N_b \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$

(1) $^\exists (a+b) \in \mathbb{R}, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N_{a+b} := \max\{N_a, N_b\}$ s.t. $^\forall n \geqq N_{a+b}$

$\Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ □

(2) $^\exists \lambda a \in \mathbb{R}, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N_a \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geqq N_a$

$\Rightarrow |\lambda x_n - \lambda a| = |\lambda(x_n - a)| = |\lambda|\,|x_n - a| < |\lambda|\varepsilon$ □

(3) $^\exists ab \in \mathbb{R}, ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N_{ab} := \max\{N_a, N_b\}$ s.t. $^\forall n \geqq N_{ab} \Rightarrow |x_n y_n - ab|$

$= |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leqq |(x_n - a)y_n| + |a(y_n - b)|$

$= |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < \varepsilon|y_n| + |a|\varepsilon$

ここで三角不等式 $\varepsilon > |y_n - b| \geqq |y_n| - |b| \Leftrightarrow |y_n| < |b| + \varepsilon$ より

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon(|b| + \varepsilon) + |a|\varepsilon = (|a| + |b| + \varepsilon)\varepsilon$ □

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$ を示す.

仮定より $^\forall \varepsilon > 0$ に対して $^\forall n \geqq N_a \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ を満たす N_a が存在するので

$^\forall n \geqq N_{\frac{1}{a}} \Rightarrow (|x_n| - |a| \leqq)|x_n - a| < \frac{|a|}{2} (\Longleftrightarrow \frac{|a|}{2} < |x_n|)$ を満たす $N_{\frac{1}{a}}$ が存在する.

ここで $N := \max\{N_a, N_{\frac{1}{a}}\}$ とすると $^\forall n \geqq N \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{a x_n}\right| = \frac{|x_n - a|}{|a||x_n|} = \frac{|x_n - a|}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} < \frac{\varepsilon}{|a|} \cdot \frac{1}{\frac{|a|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{|a|^2}$$

よって (3) より $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$ となる. □

2.5　はさみうちの原理

はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ であるとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$$

証明：

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$ より

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N_a \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N_a \Rightarrow |a_n - \gamma| < \varepsilon\,(\Leftrightarrow \gamma - \varepsilon < a_n < \gamma + \varepsilon)\cdots[1]$

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N_b \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n \geqq N_b \Rightarrow |b_n - \gamma| < \varepsilon\,(\Leftrightarrow \gamma - \varepsilon < b_n < \gamma + \varepsilon)\cdots[2]$

また, ${}^\exists N := \max\{N_a, N_b\}, {}^\forall n \geqq N$ で

[1],[2] より $\gamma - \varepsilon < a_n$ かつ $b_n < \gamma + \varepsilon$

仮定より $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ なので

$\gamma-\varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < \gamma+\varepsilon$ すなわち $\gamma-\varepsilon < c_n < \gamma+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < c_n-\gamma < \varepsilon \Leftrightarrow |c_n-\gamma| < \varepsilon$

よって $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$　□

例題

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ を示せ.

解答：$-1 \leqq \sin n \leqq 1$ より全辺を n で割ると $\displaystyle -\frac{1}{n} \leqq \frac{\sin n}{n} \leqq \frac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$. よって, はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$　□

3 実数 $\mathbb{R}$

3.1 実数 $\mathbb{R}$ の公理

実数 $\mathbb{R}$ の公理

1. 四則演算について閉じている.

2. 全順序構造（大小関係）
   $^\forall a, b \in \mathbb{R}$ なら $a < b, a = b, a > b$ のいずれかである.
   (1) $a \leqq a$
   (2) $a \geqq b, b \geqq a \Rightarrow a = b$
   (3) $a \leqq b, b \leqq c \Rightarrow a \leqq c$

3. 連続の公理（デデキントの切断）
   $\mathbb{R} = A \cup B\,; A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ (実数を A と B に分ける.)
   $^\forall p \in A, {}^\forall q \in B, p < q \Longrightarrow \max A, \min B$ のいずれか一方のみ存在する.

比較

$\mathbb{N} = \underbrace{\{1,2,3,4\}}_{=A\neq\varnothing} \cup \underbrace{\{5,6,7,\ldots\}}_{=B\neq\varnothing}$ と分けると $\max A = 4, \min B = 5$ と両方存在してしまう.

$\mathbb{Q} = \underbrace{\{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leqq 0 \text{ または } x^2 \leqq 2 \,\}}_{=A\neq\varnothing} \cup \underbrace{\{\, x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geqq 0 \text{ かつ } x^2 \geqq 2 \,\}}_{=B\neq\varnothing}$ と分けると

$\sqrt{2}$ は有理数でないので $\max A, \min B$ は共に存在しない.

3.2　上界集合・下界集合, 最大値・最小値, 上限・下限

定義【上界集合・下界集合】

部分集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して

1. E が上に有界とは $^{\exists}M \in \mathbb{R}, {}^{\forall}x \in E, x \leqq M$　この M を**上界**という.
   また, E の上界全体をなす集合を**上界集合**という.

2. E が下に有界とは $^{\exists}M \in \mathbb{R}, {}^{\forall}x \in E, x \geqq M$　この M を**下界**という.
   また, E の下界全体をなす集合を**下界集合**という.

定義【最大値・最小値】

部分集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して

1. E の最大値とは E の元であって任意の E の元以上の数

$$M := \max E : M \in E, {}^{\forall}x \in E, x \leqq M$$

2. E の最小値とは E の元であって任意の E の元以下の数

$$m := \min E : m \in E, {}^{\forall}x \in E, x \geqq m$$

定義【上限・下限】

部分集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対して

1. E が上に有界なとき, その上界集合 B の最小値 $\min B$ を E の上限といい, $\sup E$ とかく.
2. E が下に有界なとき, その下界集合 B の最大値 $\max B$ を E の下限といい, $\inf E$ とかく.

定理

($\mathbb{R}$ 内の) 空でない上に有界な集合には集合には上限 (sup) が存在する.
($\mathbb{R}$ 内の) 空でない下に有界な集合には集合には下限 (inf) が存在する.

証明：

集合を E とする. $E \subset \mathbb{R}$ の上界集合を B とする. (E は上に有界なので $B \neq \varnothing$)
また, A を $\mathbb{R}$ 内での B の補集合とする. ($E \subset A$ より $A \neq \varnothing$), さらに $\mathbb{R} = A \cup B$
$B = \left\{ M \in \mathbb{R} \,\middle|\, {}^{\forall}x \in E, x \leqq M \right\}$,　$A = \left\{ M \in \mathbb{R} \,\middle|\, {}^{\exists}x \in E, x > M \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} {}^{\forall}p \in A \text{ に対して} {}^{\exists}x \in E, x > p \\ {}^{\forall}q \in B \text{ に対して } x \leqq q \text{ を満たす} \end{array}\right\} \Longrightarrow [p < x \leqq q \Rightarrow p < q]$$

ここで連続の公理より $\max A$ または $\min B$ のいずれか一方だけ存在する.
$\alpha := \max A$ が存在したとする.
最大値の定義より $\alpha \in A$ かつ $^{\forall}y \in A$ に対し $y \leqq \alpha$
しかし A の作り方より $^{\exists}x \in E, \alpha < x \Rightarrow \alpha < \alpha' < x$ ($\alpha' \in A$). これは矛盾.
よって $\min B$ が存在する.　□

3.3　単調で有界な数列, 区間縮小法

定理

【1】上に有界な単調増大数列は収束する

【2】下に有界な単調減少数列は収束する

証明：

【1】$\{x_n\}$: 上に有界な単調増大数列

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ は上に有界なので, 上限 $a := \sup\{x_n\}$ が存在する.

すなわち

(1) ${}^\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq a$

(2) ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, x_N > a - \varepsilon$ が ${}^\forall n \geqq N$ で成立. $\therefore\ 0 \leqq a - x_n \underset{\text{単調性}}{\leqq} a - x_N < \varepsilon$

すなわち ${}^\forall n \geqq N$ で $|x_n - a| < \varepsilon$　□

【2】$\{y_n\}$: 下に有界な単調減少数列

$\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ は下に有界なので, 下限 $b := \inf\{y_n\}$ が存在する.

すなわち

(1) ${}^\forall n \in \mathbb{N}, y_n \geqq b$

(2) ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, y_N < b + \varepsilon$ が ${}^\forall n \geqq N$ で成立. $\therefore\ 0 \leqq y_n - b \underset{\text{単調性}}{\leqq} y_N - b < \varepsilon$

すなわち ${}^\forall n \geqq N$ で $|y_n - b| < \varepsilon$　□

定理【区間縮小法】

閉区間列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ が "I_n の長さ" $\to 0\ (n \to \infty)$ のとき

任意の I_n に含まれるただ一つの実数が存在する.

証明：

$I_n = [a_n, b_n]$ とおく. $(a_n < b_n)$

仮定より $\{a_n\}$: 単調増大, $\{b_n\}$: 単調減少

また ${}^\forall n \in \mathbb{N}, a_1 \leqq a_n < b_n \leqq b_1$ すなわち $a_n < b_1, b_n > a_1$ なので

$\{a_n\}$: 上に有界, $\{b_n\}$: 下に有界

単調増大 (減少) で上に (下に) 有界な数列は収束するので, ${}^\exists \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, ${}^\exists \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$

${}^\forall n \in \mathbb{N}, I_n \ni a_m, b_m\ \ ({}^\forall m \geqq n)$

$a_m \to \alpha\,(m \to \infty),\ b_m \to \beta\,(m \to \infty)$. よって $\alpha, \beta \in I_n\ ({}^\forall n \in \mathbb{N})$

$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$

ここで $b_n - a_n$ は I_n の作り方より "I_n の長さ" である. 仮定より $\lim_{n\to\infty}(I_n\text{の長さ}) = 0$ なので

$\beta - \alpha = 0\ \ \therefore \alpha = \beta$　□

3.4　区間縮小法 $\Rightarrow$ デデキントの切断

区間縮小法 $\Rightarrow$ デデキントの切断

<u>証明：</u>

$\mathbb{R} = A \cup B,\ \ A, B \neq \varnothing,\ \ {}^{\forall}p \in A, {}^{\forall}q \in B,\ p < q\,(\Rightarrow A \cap B = \varnothing)$

$a_0 \in A, b_0 \in B$ を 1 つとる.

$$\frac{a_0 + b_0}{2} \in A \longrightarrow a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}\,(\in A), b_1 = b_0 \in B$$

$$\frac{a_0 + b_0}{2} \in B \longrightarrow b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}\,(\in B), a_1 = a_0 \in A$$

以下帰納的に

$$\frac{a_n + b_n}{2} \in A \longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,(\in A), b_{n+1} = b_n \in B$$

$$\frac{a_n + b_n}{2} \in B \longrightarrow b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,(\in B), a_{n+1} = a_n \in A$$

$I_n = [a_n, b_n]$ とすると, $I_0 > I_1 > I_2 > \cdots > I_n > \cdots$

$$''I_n\text{の長さ}'' = \frac{1}{2}\,''I_{n-1}\text{の長さ}'' = \cdots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0\,(n \to \infty)$$

区間縮小法より ${}^{\exists}\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,\ \alpha \in A$ か $\alpha \in B$ のいずれかしかない.

(i) $\alpha \in A$ のとき

${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}, n = N$ とおくと, $B \ni b_N < \alpha + \varepsilon$.

$\alpha + \varepsilon \notin A \Rightarrow \alpha = \max A$.

(ii) $\alpha \in B$ のとき

${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N}, n = N$ とおくと, $\alpha - \varepsilon < a_N \in A$

$\alpha - \varepsilon \notin B \Rightarrow \alpha = \min B$　□

3.5　ボルツァーノ=ワイエルシュトラスの定理

Bolzano-Weierstrass の定理

任意の有界列に対して, ある部分列が存在して, その部分列は収束する.

証明:

有界列を $\{x_n\}$ とすると $^\exists M > 0, {}^\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq M$

$I_0 = [-M, M]$ とおく. $[-M, 0]$ または $[0, M]$ のいずれかに $\{x_n\}$ の元は無限個含まれている.
その閉区間を I_1 とおく.
閉区間 I_j $(j \geqq 1)$ を左右 2 つの閉区間に等分割したとき, そのいずれかには $\{x_n\}$ の元が無限個含まれている. その区間を I_{j+1} とおく.

1. $''I_j\text{の長さ}'' = \dfrac{2M}{2^j} = \dfrac{M}{2^{j-1}} \to 0 \ (j \to \infty)$

2. $I_0 > I_1 > I_2 > \cdots$
区間縮小法より $^\exists \alpha \in \mathbb{R}, {}^\forall j \in \mathbb{N}, \alpha \in I_j$

$x_{n_j} \in I_j$ を I_j に含まれる $\{x_n\}$ の勝手な元とする.

I_{j+1} は $\{x_n\}$ の元を無限個含んでいるので, そのうち $n > n_j$ なるものを 1 つ選び
$x_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$ と表記する.

$^\forall j \in \mathbb{N}, x_{n_j}, \alpha \in I_j$ より $|x_{n_j} - \alpha| \leqq \dfrac{M}{2^{j-1}}$

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{M}{2^{j-1}} < \varepsilon$ が成立するような J を十分大きくとれば $|x_{n_j} - \alpha| < \varepsilon$ $({}^\forall j \geqq J)$

よって部分列 $\{x_{n_j}\}$ は収束する.　□

3.6 コーシー列

定義【Cauchy 列】

$$\text{数列 } \{x_n\} \text{ がコーシー列} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^\forall n, {}^\forall m \geqq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

定理

ℝ 内で

$$\text{収束列} \Longleftrightarrow \text{コーシー列}$$

証明 : 数列を $\{x_n\}$ とする.

$(\Rightarrow)$

仮定より ${}^\exists a \in \mathbb{R}, {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. ${}^\forall n, {}^\forall m \geqq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ および $|x_m - a| < \varepsilon$

よって $|x_n - x_m| \leqq |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ □

$(\Leftarrow)$

まず, コーシー列が有界であることを示す. $\varepsilon = 1$ とする.

$K := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |x_N| + 2\}$

${}^\forall n \leqq N$ に対し $|x_n| \leqq K$

${}^\forall n \geqq N + 1$ に対し $m = N$ とおけば $|x_n - x_N| < 1 \Rightarrow |x_n| \leqq |x_N| + 1 \leqq K$

よってコーシー列は有界.

コーシー列 $\{x_n\}$ は有界なので B.W. の定理より

ある適当な部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して, $x_{n_j} \to \alpha \ (j \to \infty)$

$${}^\forall\varepsilon > 0, \begin{cases} {}^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^\forall n, {}^\forall m \geqq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \\ {}^\exists J \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^\forall j \geqq J \Rightarrow |x_{n_j} - \alpha| < \varepsilon \end{cases}$$

必要ならば $n_J \geqq N$ が成立するように大きくとりなおす.

ここで $m = n_J$ を適用すると ${}^\forall n \geqq N$ で $|x_n - \alpha| \leqq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ □

一般に「コーシー列は収束する」という性質を**完備性**という.

4　関数の極限

4.1　$x \to a$ のときの収束・発散

$D \subset \mathbb{R}$: 部分集合

$\overline{D}$: D の閉包といい, $\overline{D} := \left\{ a \in \mathbb{R} \,\middle|\, {}^{\exists}x_n \in D, \lim_{n\to\infty} x_n = a \right\}$

$\overline{D} \backslash D$: ″境界″ のようなもの (詳しくは 3 年次の集合と位相で習う.)

<u>例</u>

$D = (0, 1)$ に対し $\overline{D} = [0, 1]$

$\because$

${}^{\forall}a \in (0, 1) = D, x_n = a \in D$ とすれば $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in (0, 1) \subset [0, 1] = \overline{D}$

$a = 0$ のとき $x_n = \dfrac{1}{n+1} \in D, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \in [0, 1] = \overline{D}$

$a = 1$ のとき $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \in D, \lim_{n\to\infty} x_n = 1 \in [0, 1] = \overline{D}$

${}^{\forall}x_n \in (0, 1)$: 収束列 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \in [0, 1]$ となり $1 < a, a < 0$ は $\overline{D}$ の元でない.　□

定義【収束】

$f : D \to \mathbb{R}$ と $a \in \overline{D}$ に対して $\lim_{x\to a} f(x) = A$ とは以下を意味する.

$$ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon $$

定義【発散】

1. $f : D \to \mathbb{R}$ と $a \in \overline{D}$ に対して $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ とは以下を意味する.

$$ {}^{\forall}R > 0, {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R $$

2. $f : D \to \mathbb{R}$ と $a \in \overline{D}$ に対して $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ とは以下を意味する.

$$ {}^{\forall}R < 0, {}^{\exists}\delta > 0 \text{ s.t. } {}^{\forall}x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < R $$

数列と関数の極限の関係

$f : D \to \mathbb{R}$ に対して $\lim_{x\to a} f(x) = A$ とは

定義域 D 内の a に収束する任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(x_n \neq a)$ に対して,

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ が成り立つことである. 論理式でかくと

$$ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^{\forall}n \geqq N \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon $$

4.2　極限の四則演算, スカラー倍

定理

$a \in \overline{D_f} \cap \overline{D_g}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき, 以下が成り立つ. (4) は $B \neq 0$ のときのみ成立.

(1) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} = A+B$　(2) $\lim_{x\to a} kf(x) = kA$　(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$　(4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

証明 :

仮定より

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_f > 0$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_g > 0$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$

(1) ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_{f+g} := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_{f+g}$

$\Rightarrow |f(x)+g(x)-(A+B)| = |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \leqq |f(x)-A|+|g(x)-B| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$　□

(2) ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_f > 0$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_f$

$\Rightarrow |(kf(x)) - kA| = |k(f(x)-A)| = |k||f(x)-A| < |k|\varepsilon$　□

(3) ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta_{fg} := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_{fg}$

$\Rightarrow |f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| = |(f(x)-A)g(x) + A(g(x)-B)|$

$\leqq |(f(x)-A)g(x)| + |A(g(x)-B)| = |f(x)-A||g(x)| + |A||g(x)-B|$

ここで三角不等式 $|g(x)| - |B| \leqq |g(x) - B| < \varepsilon \quad \therefore |g(x)| < |B| + \varepsilon$ より

$|f(x)g(x) - AB| < \varepsilon(|B|+\varepsilon) + |A|\varepsilon = (|A|+|B|+\varepsilon)\varepsilon$　□

(4) $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ を示す.

${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$ となる δ_g が存在するので

${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta_{\frac{1}{g}} \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$ となる $\delta_{\frac{1}{g}}$ が存在する.

$|g(x)| - |B| \leqq |g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \Leftrightarrow \frac{|B|}{2} < |g(x)|$

${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta := \min\{\delta_g, \delta_{\frac{1}{g}}\}$ s.t. ${}^\forall x : 0 < |x-a| < \delta$

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{g(x)B}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|B||g(x)|} = \frac{|g(x)-B|}{|B|}\cdot\frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{|B|}\cdot\frac{1}{\frac{|B|}{2}} = \frac{2}{|B|^2}\varepsilon \quad \square$$

4.3　関数の連続

定義【連続性】

1. $f : D \to \mathbb{R}$ が $x = a(\in D)$ で連続とは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ となること. 論理式でかくと
$$^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0 \text{ s.t. } {}^\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
2. $f : D \to \mathbb{R}$ が $E(\subset D)$ 上の任意の点 a で連続なとき f は E 上で連続という. 論理式でかくと
$$^\forall a \in E, {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta > 0 \text{ s.t. } {}^\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

<u>例題</u>

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < \frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2} < x \leqq 1) \end{cases}$, $D = \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$ この関数 f は D 上で連続.

(2) $g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & (x = \frac{1}{2}) \\ 0 & (\frac{1}{2} < x \leqq 1) \end{cases}$, $D = [0, 1]$ この関数 g は D 上で不連続.

連続の性質

4.1 の数列と関数の極限の関係より, 次のことが成り立つ.
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$$

$\because$

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成立することであった.
また, 数列と関数の極限の関係より $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ と同値である.
さらに, この数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 内で a に収束する数列なので $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ である.
したがって $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$　$\therefore \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n)$　□

定理

関数 $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ が区間 I 上で連続なとき, 次の関数も区間 I 上で連続である.
ただし (2) の k はスカラー, (4) は区間 I で $g \neq 0$ とする.

(1) $f + g$　(2) kf　(3) fg　(4) $\dfrac{f}{g}$

$\because$

区間 I 上で連続なので $^\forall x \in D$, $^\forall a \in I$ とする. $^*D$ はそれぞれの適当な定義域とする.
あとは前頁の A を $f(a)$, B を $g(a)$ に置き換えたものと同様.　□

4.4　中間値の定理 (区間縮小法を用いた証明)

中間値の定理

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$; 連続

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \,(\Leftrightarrow f(a) \text{ と } f(b) \text{ の符号が逆}) \Longrightarrow {}^{\exists}c \in (a, b)\,,\, f(c) = 0$$

証明：

$f(a) < 0 < f(b)$ のときを考える.

(i) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \longrightarrow a_1 = \dfrac{a+b}{2}, b_1 = b$

(ii) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \longrightarrow b_1 = \dfrac{a+b}{2}, a_1 = a.$ $\left[\text{(iii) } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{a+b}{2} \text{となれば議論終了.}\right]$

$f(a_n) < 0 < f(b_n)$ に対し

$$(*) \begin{cases} f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \longrightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n \\ f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \longrightarrow b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, a_{n+1} = a_n \end{cases}$$

$\Longrightarrow f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1}) \cdots (**),$ $\left[f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] *_1$

$(*)$ が無限に続く場合のみ考えればよい. ($*_1$ のように $= 0$ となればそこで議論終了.)

$I_n := [a_n, b_n] \supset I_{n+1}$ $({}^{\forall}n \geqq N)$, "I_nの長さ" $= \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \to 0$ $(n \to \infty)$

区間縮小法より ${}^{\exists}c \in \mathbb{R}, {}^{\forall}n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c \in I_n$

$(**)$ の極限をとると

$$f(\lim_{n\to\infty} a_n) \underset{\text{連続性}}{=} \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq 0 \leqq \lim_{n\to\infty} f(b_n) \underset{\text{連続性}}{=} f(\lim_{n\to\infty} b_n) \;\therefore f(c) = 0 \quad \square$$

注意：極限をとると不等号に $=$ が含まれる.

4.5 中間値の定理 (上限の存在性を用いた証明), 関数の最大値・最小値

中間値の定理

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$; 連続

$$f(a)\cdot f(b)<0\,(\Leftrightarrow f(a) \text{ と } f(b) \text{ の符号が逆}) \Longrightarrow {}^{\exists}c\in(a,b)\,,\ f(c)=0$$

証明：

$f(a)<0<f(b)$ で考える.

$A=\{\,x\in[a,b]\mid f(x)<0\,\}$ とすると,

A は $\mathbb{R}$ 上で上に有界なので $\sup A$ が存在する. $\sup A=c$ とする.

(i) $f(c)>0$ の場合

c の定義より ${}^{\forall}\varepsilon>0, {}^{\exists}x_0\in[c-\varepsilon,c], f(x_0)<0$

一方, f の連続性より ${}^{\exists}\varepsilon>0$ を十分小さくとれば ${}^{\forall}x\in[c-\varepsilon,c]$ 上で $f(x)>0$ となり矛盾.

(ii) $f(c)<0$ の場合

f の連続性より ${}^{\exists}\varepsilon>0, {}^{\forall}x\in[c,c+\varepsilon], f(x)<0$

すなわち $c+\varepsilon\in A\Rightarrow c+\varepsilon\leqq c$ となり, これは c の定義 (または ε が負になる) より矛盾.

(i), (ii) より $f(c)=0$ でなければならない. □

本当の中間値の定理とは「$g:[a,b]\to\mathbb{R}$; 連続で $g(a)\neq g(b)$ ならば $g(a)$ と $g(b)$ の間にある任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して $g(c)=k$ となる $c\in(a,b)$ が存在する.」であるが, $f(x)=g(x)-k$ とおくと上記の定理と同じである.

定義【関数の最大値・最小値】

関数 $f:D\to\mathbb{R}$ の最大値 M, 最小値 m とは

$M=\max\{\,f(x)\mid x\in D\,\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (M1) ${}^{\exists}x_{\max}\in D, M=f(x_{\max}) \longleftarrow$ 達成されるという.
(M2) ${}^{\forall}x\in D, f(x)\leqq M \longleftarrow$ 上に有界という.

$m=\min\{\,f(x)\mid x\in D\,\} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (m1) ${}^{\exists}x_{\min}\in D, m=f(x_{\min}) \longleftarrow$ 達成されるという.
(m2) ${}^{\forall}x\in D, f(x)\geqq m \longleftarrow$ 下に有界という.

4.6 最大値・最小値の存在定理

最大値・最小値の存在定理

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$; 連続関数は最大 (小) 値を達成する.

<u>証明 :</u>

まず, 集合 $\{\,f(x)\mid a\leqq x\leqq b\,\}$ が上に有界 (下も同様) を示す. [背理法で示す.]

上に有界 : ${}^{\exists}K\in\mathbb{R},{}^{\forall}x\in[a,b],f(x)\leqq K$

上に非有界 : ${}^{\forall}K\in\mathbb{R},{}^{\exists}x_K\in[a,b],f(x_K)>K\Rightarrow{}^{\forall}n\in\mathbb{N},{}^{\exists}x_n\in[a,b],f(x_n)>n$

数列 $\{x_n\}$ は実区間で上に有界なので B.W. の定理より, ある収束部分列 $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在する.

$x_\infty:=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}\underset{\text{(i)}}{\in}[a,b].$

$+\infty=\lim_{j\to\infty}n_j\leqq\lim_{j\to\infty}f(x_{n_j})\underset{\text{(ii)}}{=}f(\lim_{j\to\infty}x_{n_j})=f(x_\infty)\leftarrow$ 有限確定. よって矛盾.

以上より f の値域は有界なので上限の存在が保証される. ${}^{\exists}M:=\sup\{f(x)|a\leqq x\leqq b\}$

すなわち

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ {}^{\forall}x\in[a,b],f(x)\leqq M\\(2)\ {}^{\forall}\varepsilon>0,{}^{\exists}x_\varepsilon\in[a,b],M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\end{array}\right.\quad(\longleftarrow\text{ 上限の言いかえ})$$

(2) より ${}^{\forall}n\in\mathbb{N},{}^{\exists}\widetilde{x_n}\in[a,b],M-\dfrac{1}{n}<f(\widetilde{x_n})\cdots(2)'$

B.W. の定理より有界列 $\{\widetilde{x_n}\}$ に対して収束部分列 $\{\widetilde{x_{n_j}}\},\widetilde{x_\infty}:=\lim_{j\to\infty}\widetilde{x_{n_j}}$ なるものが存在.

$(2)'$ の極限をとると

$$M=\lim_{j\to\infty}(M-\frac{1}{n_j})\leqq\lim_{j\to\infty}f(\widetilde{x_{n_j}})=f(\lim_{j\to\infty}\widetilde{x_{n_j}})\quad\therefore M\leqq f(\widetilde{x_\infty})$$

ここで (1) より $M\leqq f(\widetilde{x_\infty})\underset{(1)}{\leqq}M\quad\therefore f(\widetilde{x_\infty})=M$

よって最大値の存在が示せた. 最小値の存在は $-f$ の最大値の存在より. □

補足 (i) 閉区間性 , (ii) 連続性をそれぞれ用いた.

4.7　最大値・最小値の存在定理 (多変数版)

定理

$D \subset \mathbb{R}^n$: 有界閉集合 , $f : D \to \mathbb{R}$; 連続関数は最大値・最小値を達成する.

ここで閉集合とは点列の極限に対して閉じた集合.
証明は前頁の x_n をベクトルに変えたものと同じ.

閉集合の例

例 1.

$B_1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1 \,\}$ は閉集合.

$\because$

B_1 の任意の収束点列 $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)\ \ (n \to \infty)$

${x_n}^2 + {y_n}^2 \leqq 1 \Rightarrow {x_\infty}^2 + {y_\infty}^2 \leqq 1.\quad \therefore (x_\infty, y_\infty) \in B_1$. よって B_1 は閉集合.　□

例 2.

$S^1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ は閉集合.

$\because$

S^1 の任意の収束点列 $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)\ \ (n \to \infty)$

${x_n}^2 + {y_n}^2 = 1 \Rightarrow {x_\infty}^2 + {y_\infty}^2 = 1.\quad \therefore (x_\infty, y_\infty) \in S^1$. よって S^1 は閉集合.　□

例 3.

1 点集合も閉集合.

4.8 おまけ $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ のときの極限, 右側極限・左側極限

定義

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\widetilde{x} > 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \geqq \widetilde{x} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall R > 0, {}^\exists\widetilde{x} > 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \geqq \widetilde{x} \Rightarrow f(x) > R$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall R < 0, {}^\exists\widetilde{x} > 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \geqq \widetilde{x} \Rightarrow f(x) < R$

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\widetilde{x} < 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \leqq \widetilde{x} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall R > 0, {}^\exists\widetilde{x} < 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \leqq \widetilde{x} \Rightarrow f(x) > R$

6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall R < 0, {}^\exists\widetilde{x} < 0 \text{ s.t. } {}^\forall x \leqq \widetilde{x} \Rightarrow f(x) < R$

定義

1. x が a に減少しながら近づくとき右側極限といい

$$\lim_{x\to a+0} f(x)$$

と表す.

2. x が a に増加しながら近づくとき左側極限といい

$$\lim_{x\to a-0} f(x)$$

と表す.

ε-δ 論法でかくと

$$\text{右側極限} : 0 < |x - a| < \delta \text{ のところが } 0 < x - a < \delta$$
$$\text{左側極限} : 0 < |x - a| < \delta \text{ のところが } 0 < a - x < \delta$$

にかわるだけである.

<u>例題</u>

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の $x \to +0$, $x \to -0$ を調べよ.

解答 : $x \to +0$ のとき

${}^\forall R_1 > 0, {}^\exists\delta = \dfrac{1}{R_1}$ s.t. ${}^\forall x : 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1}} = R_1$. よって $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty$

$x \to -0$ の場合

${}^\forall R_2 < 0, {}^\exists\delta = -\dfrac{1}{R_2}$ s.t. ${}^\forall x : -\delta < x < 0 (\Leftrightarrow 0 < -x < \delta) \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{-\delta} = \dfrac{1}{\frac{1}{R_2}} = R_2$.

よって $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = -\infty$

参考文献

[1] 田島一郎（1978）『数学ワンポイント双書 イプシロン-デルタ』 共立出版

[2] 田島一郎（1981）『解析入門』 岩波書店