2020 年 10 月 12 日　ゼミノート【第 4 章 コンパクト作用素（p.48,49)】

S17M066 中橋健太郎

4　コンパクト作用素

前回までの復習 (入来さん担当)

4.1　コンパクト作用素の基礎性質

4.1.1　定義と判定法

定義 4.1. 距離空間 X の部分集合 A が**相対コンパクト** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A の閉包 $\overline{A}$ がコンパクト.

定義 4.2. 距離空間 X の部分集合を A とする.

$$A \text{ が前コンパクトあるいは全有界} \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall i\ (1 \leqslant i \leqslant N),\ x_i \in A\ \wedge\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i;\varepsilon).$$

ただし，$B(x;r) = \{y \in X \mid \|x-y\|_X < r\}$ である．すなわち，中心 x，半径 r の開球である.

定理 4.3. 距離空間 X の部分集合 A については以下はすべて同値である.

(a) A はコンパクトである.
(b) A の任意の点列は A の中で収束する部分列を持つ.
(c) A は X の部分空間として完備かつ前コンパクトである.

$\leftarrow$ 謎の空白...

本時 (中橋担当)

定義 4.4. X, Y : ノルム空間，$T : X \to Y$ を線型作用素とする.

T が**コンパクト作用素**である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\quad {}^{\forall}B \subseteq X,\ B$: 有界集合 $\implies$ $T(B)$ が Y で相対コンパクト (i.e., $\overline{T(B)}$がコンパクト) である.

X から Y へのコンパクト作用素全体を $\mathscr{K}(X,Y)$ とかく．$X = Y$ のときは $\mathscr{K}(X)$ とかく.

定理 4.5. X, Y : ノルム空間とする．$T : X \to Y$ 線型作用素とする．このとき，以下が成り立つ：

$$T \in \mathscr{K}(X,Y) \quad \iff \quad X \text{ 内の任意の有界点列 } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ に対して，} \{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が収束部分列を持つ.}$$

定理 4.5 の証明：

$(\implies)$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 内の任意の有界点列とし，$B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと B は有界集合である．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$Tx_n \in T(B) \subseteq \overline{T(B)}$ である．いま，T はコンパクト作用素なので，$\overline{T(B)}$ はコンパクト集合である．点列 $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコンパクト集合 $\overline{T(B)}$ に含まれているので，定理 4.3-(b) により収束部分列を持つ.

$(\impliedby)$ X の有界集合 B を任意に取る．ここで，$\overline{T(B)}$ の任意の点列を $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とすれば，閉包の定義より，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ を適当に取れば

$$\|y_n - Tx_n\|_Y \leqslant \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

が成り立つようにできる (細かい説明は付録参照)．このとき，仮定により $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．(4.1) により，$\{y_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ も $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ と同じ極限に収束する．よって，$\overline{T(B)}$ の任意の点列が収束部分列を持ったので，定理 4.3-(b) により $\overline{T(B)}$ はコンパクト集合である．ゆえに，T はコンパクト作用素である. □

4.1.2 コンパクト作用素の演算

定理 4.6. X, Y, Z : ノルム空間とする．

(a) 任意のコンパクト作用素は有界である．
(b) コンパクト作用素の和及びスカラー倍はコンパクトである．したがって，コンパクト作用素の 1 次結合もコンパクトである．
(c) $S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ の少なくとも一方がコンパクトならば，合成 TS もコンパクトである．

定理 4.6 の証明：

(a) $T : X \to Y$ をコンパクト作用素とする．このとき，

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y$$

であった．集合 $\{x \in X \mid \|x\|_X \leqslant 1\} =: B_X$ は当たり前に有界集合である．いま，T はコンパクトなので $\overline{T(B_X)}$ はコンパクト集合となる．集合論の知識よりコンパクト集合は有界集合なので，

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y = \sup_{y \in T(B_X)} \|y\|_Y \leqslant \sup_{y \in \overline{T(B_X)}} \|y\|_Y < \infty.$$

ゆえに，T は有界である．

(b) $T : X \to Y$, $S : X \to Y$ をコンパクト作用素，α, $\beta \in \mathbb{K}$ とする．このとき，$\alpha T + \beta S$ がコンパクト作用素であることを示す．X 内の任意の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して点列 $\{(\alpha T + \beta S)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つことを示せば良い ($\because$ 定理 4.5).
T, S がコンパクト作用素より，定理 4.5 を適用させれば，X 内の任意の有界点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はそれぞれ収束部分列 $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$，$\{Sx_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．その極限をそれぞれ y_T，y_S とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\exists J_T \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall j \in \mathbb{N},\ j > J_T \Rightarrow \left\|Tx_{n_j} - y_T\right\|_Y < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$$

$$\exists J_S \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall j \in \mathbb{N},\ j > J_S \Rightarrow \left\|Sx_{m_j} - y_S\right\|_Y < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$$

が成り立つ．このとき，$J := \max\{J_T, J_S\}$ とすれば，任意の自然数 $j > J$ に対して，$\ell_j = \max\{n_j, m_j\}$ とすると

$$\begin{aligned} \left\|(\alpha T + \beta S)x_{\ell_j} - (\alpha y_T + \beta y_S)\right\|_Y &\leqslant \left\|\alpha Tx_{\ell_j} - \alpha y_T\right\|_Y + \left\|\beta Sx_{\ell_j} - \beta y_S\right\|_Y \\ &= |\alpha| \left\|Tx_{\ell_j} - y_T\right\|_Y + |\beta| \left\|Sx_{\ell_j} - y_S\right\|_Y \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

よって，点列 $\{(\alpha T + \beta S)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{(\alpha T + \beta S)x_{\ell_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．ゆえに，$\alpha T + \beta S$ はコンパクト作用素である．

(c) X 内の任意の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\{(TS)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つことを示せば良い．
まず，S がコンパクトである場合を考える．このとき，$\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{Sx_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．その極限を y とする．すなわち，$Sx_{n_j} \to y$ $(j \to \infty)$．いま，$T \in \mathscr{B}(Y,Z)$ なので，T の連続性より $T(Sx_{n_j}) \to Ty$ $(j \to \infty)$．よって，$\{(TS)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{(TS)x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．
次に，T がコンパクトである場合を考える．いま，$S \in \mathscr{B}(X,Y)$ であるので，S の有界性より点列 $\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である．よって，T のコンパクト性から $\{T(Sx_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(TS)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列を持つ． □

補足（コンパクト集合は有界集合）

集合論の知識よりコンパクト集合は有界集合であるとしたが，そこの説明をしておく．まず，距離空間 X の部分集合 A がコンパクト集合であるとする．ここで，X の点 x を固定し，部分集合族 $\mathcal{O}_x := \{B(x;n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(X)$ を考える．$\mathcal{O}_x$ は X の任意の部分集合の開被覆となっていることがアルキメデスの公理から簡単にわかる.[1] X の任意の部分集合の開被覆になっているということは，もちろん A の開被覆にもなっているということである．いま，A はコンパクト集合であるとしていたので，任意の開被覆の中から有限個の開集合で A を覆うことができる．つまり，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$A \subseteq B(x;n_0)$ というふうにできる．$B(x;n_0) = \{y \in X \mid d(x,y) < n_0\} \subset \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant n_0\}$ となることから A が有界集合であることがわかる．

[1] "簡単に"と書いてしまったがこれは人によるので一応きちんと説明しておくと，$\mathcal{O}_x$ が開集合であることは明らかである．そこで被覆になっていることを示そう．$\bigcup \mathcal{O}_x \subseteq X$ は自明であるから $X \subseteq \bigcup \mathcal{O}_x$ を示す．まず，$x' \in X$ を任意の取ってくる．$x = x'$ の場合は自明であるから $x \neq x'$ のときを考える．$d(x,x') =: d$ とすれば $d > 0$ であるからアルキメデスの公理より $n > d$ なる自然数 n が存在する．よって，$x' \in B(x;d) \subset B(x;n)$ となるから示せた．

定理 4.7. X : ノルム空間，Y : バナッハ空間とする．
X から Y へのコンパクト作用素の列 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $T : X \to Y$ にノルム収束 (一様収束) するならば，T はコンパクトである．

定理 4.7 の証明：
X 内の任意の有界列を $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とする．このとき，$\{Tx_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が収束部分列を持つことを示す．まず，T_n のコンパクト性から，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，点列 $\{T_nx_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\left\{T_nx_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ をもつ．ここで，$\sup\{\|x_m\|_X \mid m\in\mathbb{N}\} \leqslant K$ なる $K>0$ を選ぶ ($\because$ $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は有界)．また，$\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は T にノルム収束するので，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\exists N\in\mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ n>N \Rightarrow \|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \frac{\varepsilon}{3K}$$

が成り立つ．さらに，$\left\{T_nx_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は収束列なのでコーシー列となるから，ある $J\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の自然数 $j,k>J$ に対して，

$$\left\|T_nx_{m_j} - T_nx_{m_k}\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

が成り立つ．よって，任意の自然数 $n,j,k>\max\{N,J\}$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\|Tx_{m_j} - Tx_{m_k}\right\|_Y &\leqslant \left\|(T-T_n)x_{m_j}\right\|_Y + \left\|T_nx_{m_j} - T_nx_{m_k}\right\|_Y + \left\|(T_n-T)x_{m_k}\right\|_Y \\ &\leqslant 2\|T_n - T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}\sup\{\|x_m\|_X \mid m\in\mathbb{N}\} + \left\|T_nx_{m_j} - T_nx_{m_k}\right\|_Y \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，$\left\{Tx_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることがわかる．Y はバナッハ空間なので完備であるから $\left\{Tx_{m_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は収束する．ゆえに，定理 4.5 により T はコンパクト作用素である． □

付録 A　定理 4.5 の証明の補足

定理 4.5 の証明の「$\overline{T(B)}$ の任意の点列を $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とすれば，閉包の定義より，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ を適当に取れば $\|y_n - Tx_n\|_Y \leqslant n^{-1}$ が成り立つようにできる」の部分であるが，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をどのように適当に取るかについて説明しておく．

各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$y_n\in\overline{T(B)}$ であるから，閉包の定義より，ある $T(B)$ 内の点列 $\left\{z_m^{(n)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ があって，$z_m^{(n)} \to y_n$ $(m\to\infty)$ となる．また，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して，$z_m^{(n)}\in T(B)$ より，ある $x_m^{(n)}\in B$ が存在し，$Tx_m^{(n)} = z_m^{(n)}$ となる．

【$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のとり方】

i. $n=1$ のとき：$1>0$ より，ある $M_1\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の自然数 $m>M_1$ に対して，$\left\|y_1 - Tx_m^{(1)}\right\|_Y < 1$ とできる．
ii. $n=2$ のとき：$2^{-1}>0$ より，ある $M_2\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の自然数 $m>M_2$ に対して，$\left\|y_2 - Tx_m^{(2)}\right\|_Y < 2^{-1}$ とできる．

といったようにすれば，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$n^{-1}>0$ より，ある $M_n\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の自然数 $m>M_n$ に対して，

$$\left\|y_n - Tx_m^{(n)}\right\|_Y < \frac{1}{n}$$

が成り立つようにできる．ここで，$m_{M_n}>M_n$ を満たす自然数 m_{M_n} を固定する．その固定したものは当然 $n\in\mathbb{N}$ に依存しているので，それを $x_n := x_{m_{M_n}}^{(n)}$ としてやれば良い．これは所謂対角線論法である (必ずしも対角線になるとは限らないが)．イメージを下記にかいておく (あくまでイメージである)．

$$\begin{array}{ccccccc||c}
\boxed{Tx_1^{(1)}} & Tx_2^{(1)} & Tx_3^{(1)} & Tx_4^{(1)} & \cdots & Tx_k^{(1)} & \cdots & x_1 := x_1^{(1)} \\
Tx_1^{(2)} & Tx_2^{(2)} & \boxed{Tx_3^{(2)}} & Tx_4^{(2)} & \cdots & Tx_k^{(2)} & \cdots & x_2 := x_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Tx_1^{(n)} & Tx_2^{(n)} & Tx_3^{(n)} & Tx_4^{(n)} & \cdots & \boxed{Tx_k^{(n)}} & \cdots & x_n := x_k^{(n)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

S17M066 中橋健太郎

4.1.3　有限階作用素

$X,\ Y$ をノルム空間とするとき，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ の値域 $\mathcal{R}(T)$ が Y の有限次元部分空間であるとき，T を**有限階作用素**と呼ぶ．

定理 4.8. $X,\ Y$: ノルム空間とする．$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ について以下が成り立つ：

T が有限階作用素 $\iff$ ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$\{x'_i\}_{i=1}^n \subset X,\ \{y_i\}_{i=1}^n \subset Y$ で，任意の $x \in X$ に対して，$Tx = \sum_{k=1}^{n} {}_{X'}\langle x'_k, x\rangle_X\, y_k$

定理 4.8 の証明：

$(\Longrightarrow)$　$Y_0 := \mathcal{R}(T)$ とおくと，Y_0 は有限次元部分空間なのでその次元を n とする．ここで Y_0 の基底を $\{y_1,\dots,y_n\}$ とし，$Y'_0 \ni y'_1,\dots,y'_n$ を

$${}_{Y'_0}\langle y'_i, y_j\rangle_{Y_0} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

となるように選ぶ (詳しくは付録参照)．このとき，任意の $y \in Y_0$ に対して，

$$y = \sum_{k=1}^{n} {}_{Y'_0}\langle y'_k, y\rangle_{Y_0}\, y_k \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

$\Bigl($ $\because$ y_i たちは Y_0 の基底なので Y_0 の任意の元 y は $y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_i y_i + \cdots + \alpha_n y_n$ とかける．この両辺を y'_i で写してやると右辺は y'_i の線型性から $y'_i(y) = y'_i(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_i y_i + \cdots + \alpha_n y_n) = \alpha_1 y'_i(y_1) + \cdots + \alpha_i y'_i(y_i) + \cdots + \alpha_n y'_i(y_n) = \alpha_i$．$y'_i(y) = {}_{Y'_0}\langle y'_i, y\rangle_{Y_0}$ と表記しているのだったから ${}_{Y'_0}\langle y'_i, y\rangle_{Y_0} = \alpha_i$ となる．$\Bigr)$

T は X を Y_0 に写すので，各 $k = 1,\dots,n$ に対して，$y'_k \circ T \in X'$ である．

$\Bigl($ $\because$ 線型性は明らか，有界性は $\|y'_k \circ T\|_{X'} = \sup_{x \in B_X} |(y'_k \circ T)(x)| = \sup_{x \in B_X} |y'_k(Tx)| \leqslant \sup_{x \in B_X} \left| {}_{Y'_0}\langle y'_k, Tx\rangle_{Y_0} \right| \leqslant \sup_{x \in B_X} \|y'_k\|_{Y'_0} \|Tx\|_{Y_0} \leqslant \sup_{x \in B_X} \|y'_k\|_{Y'_0} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X \leqslant \|y'_k\|_{Y'_0} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ となる．$\Bigr)$

よって，$x'_k := y'_k \circ T$ と定める．すると，任意の $x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^{n} {}_{Y'_0}\langle y'_k, Tx\rangle_{Y_0}\, y_k && (\because\ Tx \in Y_0 \text{ より ① を適用}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_{X'}\langle y'_k \circ T, x\rangle_X\, y_k && (\because\ \text{合成写像の定義}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_{X'}\langle x'_k, x\rangle_X\, y_k \end{aligned}$$

よって従う．

$(\Longleftarrow)$　仮定より，n 個の Y の元の 1 次結合で $\mathcal{R}(T)$ の任意の元をかけているので，$\mathcal{R}(T)$ は高々 n 次元であることがわかる．$\square$

定理 4.9. $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ が有限階作用素ならば，T はコンパクトである．

定理 4.9 の証明：

$B \subseteq X$ を任意の有界集合とする．T は有限階なので $T(B)$ は有限次元部分空間である．また，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ より $T(B)$ は有界集合である．よって，$\overline{T(B)}$ は有限次元有界閉集合となるからコンパクト集合である．$\square$

定理 4.10. ヒルベルト空間 H 上のコンパクト作用素は有限階作用素のノルム収束したものの極限である．

定理 4.10 の証明：

$B_H := \{x \in H \mid \|x\|_H \leqslant 1\}$ とする．T のコンパクト性から $\overline{T(B_H)}$ はコンパクト集合なので，定理 4.3 より，$\overline{T(B_H)}$ は全有界 (かつ完備) となるので，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$1/2n > 0$ より，

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \{z_i\}_{i=1}^N \subset \overline{T(B_H)} \ \wedge \ \overline{T(B_H)} \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(z_i; 1/2n).$$

各 $z_i \in \overline{T(B_H)}$ $(i = 1, \ldots, N)$ に対して，ある $T(B_H)$ 内の点列 $\left\{y_m^{(i)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ が存在して，$y_m^{(i)} \to z_i$ $(m \to \infty)$ が成り立つ．対角線論法により，$\left\|y_m^{(i)} - z_i\right\|_H < 1/2n$ となる m を一つ固定し，m_{M_i} と表すことにし，$y_i := y_{m_{M_i}}^{(i)}$ とする．いま，任意に $z \in \bigcup_{i=1}^N B(z_i; 1/2n)$ を取ってくると，ある i $(i = 1, \ldots, n)$ で，$z \in B(z_i; 1/2n)$．すなわち，$\|z_i - z\|_H < 1/2n$ である．$\|y_i - z\|_H = \|y_i - z + z_i - z_i\|_H \leqslant \|z_i - z\|_H + \|z_i - y_i\|_H < (1/2n) + (1/2n) = 1/n$ となるから $z \in B(y_i; 1/n)$．よって，以上のことをまとめると，

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad \{y_i\}_{i=1}^N \subseteq T(B_H) \ \wedge \ T(B_H) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(y_i; 1/n) \qquad (*1)$$

が成り立つ．$\{y_1, \ldots, y_N\}$ から生成された有限次元部分空間を F_n とし，H から F_n への射影 (p.17 参照) を P_n とすると，任意の $x \in H$ と任意の $y \in F_n$ に対して，$\|P_n x - y\|_H \leqslant \|x - y\|_H$ ……(∗2) が成り立つ ($y \in F_n$ より $P_n y = y$)．

(∵ 一般に，$u \in M \subseteq H$ に対して，$u = P_n u + \tilde{u}$ $(\tilde{u} \in M^\perp)$ と直和分解できるのであった．内積 $(P_n u \mid \tilde{u}) = 0$ であることに注意すると $\|u\|_H^2 = \|P_n u\|_H^2 + \|\tilde{u}\|_H^2$ が成り立つ．)

ここで，$T_n := P_n T$ と定めれば，T_n は有限階作用素である．すると，

$$\begin{aligned}
\|T_n x - y_i\|_H &= \|P_n T x - y_i\|_H && (\because T_n \text{の定義}) \\
&= \|P_n(Tx) - y_i\|_H \\
&\leqslant \|Tx - y_i\|_H && (\because (*2),\ y_i \in F_n \text{より } P_n y_i = y_i) \\
&< \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

となる．ここで，任意に $x \in B_H$ をとると，(∗1) から $\|Tx - y_i\|_H < 1/n$ なる y_i を選ぶことができる．よって，

$$\|(T_n - T)x\|_H = \|T_n x - Tx\|_H \leqslant \|T_n x - y_i\|_H + \|y_i - Tx\|_H < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$x \in B_H$ は任意であったから，これは T_n が T にノルム収束することを意味している． □

付録 A　定理 4.8 の証明 補足

「Y_0 の基底を $\{y_1, \ldots, y_n\}$ とし，$Y_0' \ni y_1', \ldots, y_n'$ を ${}_{Y_0'}\langle y_i', y_j\rangle_{Y_0} = \delta_{ij}$ となるように選ぶ」との記述があるが，具体的にどう選ぶのかと言うと，Y_0 の任意の元 y は

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_i y_i + \cdots + \alpha_n y_n \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K})$$

というように書くことができる．ここで，線型汎関数 $y_i' : Y_0 \to \mathbb{K}$ を

$$y_i' : y \longmapsto \alpha_i$$

と定めればよい．すると，$y_i'(y_j) = \delta_{ij}$ となっているし，線型性も明らかである．あとは連続性 (あるいは有界性) を示せばこの y_i' が Y_0' の元であるといえる．なので，Y_0 内の点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が z に収束したとしよう (便宜上，$z_n = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_n y_n$，$z = \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_n y_n$ と表すことにする)．つまり，$\|z_n - z\|_{Y_0} \to 0$ $(n \to \infty)$ を仮定する．Y_0 は有限次元であるから，有限次元ノルム空間の任意のノルムはすべて同値なので，

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |y_i'(z_n) - y_i'(z)| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\beta_i - \gamma_i| \leqslant M \|z_n - z\|_Y \to 0 \ (n \to \infty).$$

よって，y_i' は連続.

S17M066 中橋健太郎

有限次元ノルム空間の任意のノルムは同値

本発表は，教科書に載っていないものですが，暗に認めている事実です．箸休めにどうぞ．

定義 1 (ノルムの同値性). ノルム空間 X のノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ が**同値**であるとは，任意の $x \in X$ に対して，

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

を満たすような定数 $0 < m, M < \infty$ が存在することである．このとき，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ と書く．

命題 2. $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ は同値関係である．

証明. X のノルムを $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$ とする．
(反射律) 明らかに，任意の $x \in X$ に対して，

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_1$$

なので，$m = 1 > 0, M = 1 > 0$ と思えばよい．よって，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_1$.
(対称律) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ と仮定すると，ある有限な $m, M > 0$ があって，任意の $x \in X$ に対して，

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2$$

が成り立つ．よって，$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \Leftrightarrow \|x\|_2 \leq (1/m)\|x\|_1$ かつ $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2 \Leftrightarrow (1/M)\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ が成り立つ．ゆえに，

$$\frac{1}{M}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{1}{m}\|x\|_1.$$

$1/M > 0, 1/m > 0$ なので，$\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$.
(推移律) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ かつ $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$ であると仮定すると，任意の $x \in X$ に対して，

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|_2 \quad \text{かつ} \quad m'\|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq M'\|x\|_3 \tag{$*1$}$$

を満たす有限な $m, m', M, M' > 0$ が存在する．($*1$) より，

$$mm'\|x\|_3 \leq \|x\|_1 \leq MM'\|x\|_3$$

が成り立つ．$mm' > 0, MM' > 0$ より，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$. □

例 1 (同値なノルムの例). $\mathbb{R}^2$ 上の次のノルムは同値である：

$$\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_1 := |x| + |y|, \quad \left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$\because$
$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ より，$|x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$.
また，明らかに，$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ が成り立つ．
($\because$ 両辺とも正の数なので 2 乗したものを示せばよい．そこから (右辺)$-$(左辺)≥ 0 がわかる.) ゆえに，

$$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{a}\|_2 \leq \|\boldsymbol{a}\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{a}\|_2.$$

X を有限次元ノルム空間とする．
X の基底を $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とする (すなわち，$\dim X = n < \infty$)．このとき，X の任意の元 x は

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (\alpha_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{$*$}$$

と書ける．以下，この表記を用いる．

補題 3. X を有限次元ノルム空間とする．X の任意の元 x が $(*)$ の形でかけるとする．このとき，

$$\|x\|_\infty := \max\{|\alpha_i|\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i|$$

と定めると，これはノルムとなる．

証明. $x, y \in X,\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\ (\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n)$ とする．

(N_1) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$|\alpha_i| \ge 0$ より，$0 \le \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i| = \|x\|_\infty$．

(N_2) 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ と各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$|\lambda \alpha_i| = |\lambda|\ |\alpha_i|$ が成り立つので，

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\lambda \alpha_i| = \max_{1 \le i \le n} (|\lambda|\ |\alpha_i|) = |\lambda| \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i| = |\lambda|\ \|x\|_\infty.$$

(N_3) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$|\alpha_i + \beta_i| \le |\alpha_i| + |\beta_i|$ であるから，

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i + \beta_i| \le \max_{1 \le i \le n} (|\alpha_i| + |\beta_i|) \le \max_{1 \le i \le n} |\alpha_i| + \max_{1 \le i \le n} |\beta_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

□

補題 4. 有限次元ノルム空間 $X \ne \{0\}$ の基底を $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とすると，X の任意のノルム $\|\cdot\|$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| > 0.$$

証明. 背理法で示す．
ノルムの性質より，明らかに $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \ge 0$ であるから，$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| = 0$ と仮定する．$n = 1$ のとき，$\|x_1\| = 0$.
$n = 2$ のとき $\|x_1\| + \|x_2\| = 0$ とすると，$0 \le \|x_1\| = -\|x_2\| \le 0$ となるので，$\|x_1\| = \|x_2\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$.
$n = k - 1$ のとき，$\sum_{i=1}^{k-1} \|x_i\| = 0$ のとき，$x_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, k-1)$ とすると，$n = k$ のとき，$\sum_{i=1}^{k} \|x_i\| = 0$ とすると，$\left(\sum_{i=1}^{k-1} \|x_i\|\right) = -\|x_n\|$ となる．左辺は 0 以上，右辺は 0 以下より，$\|x_n\| = 0$ を得る．
帰納法の仮定より，$\|x_i\| = 0\ (i = 1, 2, \ldots, k-1)$ であるから，$x_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ となる．これは x_i たちを，
$X \ne \{0\}$ の基底としたことに矛盾．ゆえに，$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| > 0$. □

定理 5. 有限次元ノルム空間 $X \neq \{0\}$ において，X の任意のノルム $\|\cdot\|$ は，補題 1 で定めた $\|\cdot\|_\infty$ と同値である．

証明. $x \in X$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| && \because (*) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|\alpha_i| \, \|x_i\|) && \because \text{ノルムの性質} \\
&\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \right) \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \\
&= \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \quad = \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \right) \|x\|_\infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$m = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \right)^{-1}$ (補題 4 よりそうできる) とすれば，$m \|x\| \leq \|x\|_\infty$ となる．

逆向きの不等号を背理法を用いて示す．すなわち，任意の $M > 0$ に対して，ある $x \in X$ があって，$\|x\|_\infty > M \|x\|$ が成り立つとする．すると，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$k > 0$ より $\|y_k\|_\infty > k \|y_k\|$ なる $y_k \in X$ が存在する．ここで，$z_k \in X$ を $z_k := y_k / \|y_k\|_\infty$ とおけば，$\|z_k\|_\infty = 1$ であり，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\|z_k\| = \|y_k\| / \|y_k\|_\infty < 1/k \cdots\cdots (*1)$ となる．このような z_k を基底を用いて，

$$
z_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(k)} x_i
$$

と表すことにすると，$1 = \|z_k\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \beta_i^{(k)} \right|$ より，任意の $k \in \mathbb{N}$ と各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\left| \beta_i^{(k)} \right| \leq 1$ であり，各 $k = 1, 2, \ldots$ に対して，ある i $(1 \leq i \leq n)$ があって，$\left| \beta_i^{(k)} \right| = 1$ となる．そこで，適当に番号を付けかえて，X 内の点列 $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が，任意の $k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ に対して，

$$
\left| \beta_1^{(k)} \right| = 1, \quad \left| \beta_i^{(k)} \right| \leq 1 \tag{$*2$}
$$

を満たすようにできる．ここで，$\beta^{(k)} := (\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)})$ を $\mathbb{C}^n$ 上の点列とみれば，これは明らかに有界列であるから，ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より，収束部分列をもつ．この部分列を $\{\beta^{(k_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ とし，その極限を $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$，さらに，$z \in X$ を

$$
z := \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i
$$

とおけば，

$$
\|z_{k_j} - z\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \beta_i^{(k_j)} - \beta_i \right| \|x_i\|_\infty \to 0 \quad (j \to \infty)
$$

であり，前半の証明より，$\|z_{k_j} - z\| \leq m^{-1} \|z_{k_j} - z\|_\infty \to 0$ $(j \to \infty)$ がわかる．よって，

$$
\|z\| = \|(z + -z_{k_j}) + z_{k_j}\| \leq \|z_{k_j} - z\| + \|z_{k_j}\| < \|z_{k_j} - z\| + \frac{1}{k_j} \to 0 \quad (j \to \infty)
$$

となる．ゆえに，$\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ となる．しかしこれは，$|\beta_1| = 1$ ($\because$ $(*2)$) であることに矛盾．したがって，ある定数 $M > 0$ があって，任意の $x \in X$ に対して，$\|x\|_\infty \leq M \|x\|$ が成り立つ． □

系 6. 有限次元ノルム空間の任意のノルムは同値.

証明.
有限次元ノルム空間 X の任意のノルムを $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ とすると，定理より，$\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$ かつ $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_2$ が成り立つ．また，命題より，$\sim$ は同値関係なので，$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$． □

ゼミノート Stone-Weierstrass の定理【卒論風】

S17M066 中橋健太郎 *

2020 年 10 月 26 日

1 Weierstrass の多項式近似定理

集合 K に対して，K 上の複素数値連続函数全体を $\mathsf{C}(K)$，複素数値連続函数の像が実数全体 $\mathbf{R}$ に制限された $\mathsf{C}(K)$ の部分集合を $\mathsf{C}(K, \mathbf{R}) := \{f \in \mathsf{C}(K) \mid f(K) \subseteq \mathbf{R}\}$ とかく．また，恒等的に 1 である函数を $\mathbf{1}$，0 である函数を $\mathbf{0}$ とかく．

定理 1.1 (Weierstrass の多項式近似定理). 多項式函数全体は Banach 空間 $\mathsf{C}([0,1])$ において稠密である．

定義 1.2 (Bernstein 多項式). 函数 $f \in \mathsf{C}([0,1])$ に対して，**Bernstein 多項式** $(\mathsf{B}_n f)(t)$ を

$$(\mathsf{B}_n f)(t) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k} \qquad (t \in [0,1],\ n = 1, 2, \ldots)$$

により定義する．

Bernstein 多項式は明らかに，$\mathsf{B}_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathsf{B}_n(f) + \beta \mathsf{B}_n(g)$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{C})$ が成り立つ．

命題 1.3. $m_1(t) := t$ $(t \in [0,1])$, $m_2(t) := t^2$ $(t \in [0,1])$ とする．このとき，以下が成り立つ：
(1) $\mathsf{B}_n \mathbf{1} = \mathbf{1}$. (2) $\mathsf{B}_n m_1 = m_1$. (3) $(\mathsf{B}_n m_2)(t) = (n-1)t^2/n + t/n$. 証明略 (付録 A.1 参照).

補題 1.4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k - nt)^2 t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t)$.

補題 1.4 の証明.

$$(\text{左辺}) = n^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2\frac{k}{n}t + t^2\right) t^k (1-t)^k = n^2\big((\mathsf{B}_n m_2)(t) - 2(\mathsf{B}_n m_1)(t) + t^2\big) = nt(1-t). \qquad \square$$

定理 1.5. $f \in \mathsf{C}([0,1])$ とする．このとき，$\mathsf{C}([0,1])$ において $\mathsf{B}_n f \to f$ $(n \to \infty)$．すなわち，$\mathsf{B}_n f$ は f に一様収束する．

定理 1.5 の証明.
$f \in \mathsf{C}([0,1])$ より，有界閉区間上の連続函数は一様連続 (付録 A.2) なので，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in [0,1], \forall y \in [0,1],\ |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

命題 1.3 より $f(t) = (\mathsf{B}_n \mathbf{1})(t) f(t)$ であるから，

$$f(t) - (\mathsf{B}_n f)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

三角不等式により，次を得る．

$$|f(t) - (\mathsf{B}_n f)(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| t^k (1-t)^{n-k}.$$

* https://sites.google.com/view/kentaronakahashihomepage

ここで，$\sum_{k=0}^{n} = \sum_{|k-nt|<n\delta} + \sum_{|k-nt|\geqslant n\delta}$ とわける．$S_1 := \sum_{|k-nt|<n\delta}$，$S_2 := \sum_{|k-nt|\geqslant n\delta}$ とおく．

まず，S_1 において，$|k-nt|<n\delta \Leftrightarrow |t-k/n|<\delta$ なので一様連続性から，$|f(t)-f(k/n)|<\varepsilon/2$ となるので，

$$S_1 = \sum_{|k-nt|<n\delta} \binom{n}{k} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| t^k(1-t)^{n-k} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{|k-nt|<n\delta} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

次に，S_2 において，$M := \max\{|f(t)| \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ とおく ($\because$ 有界閉区間上の連続函数は最大値を持つ) と

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{|k-nt|\geqslant n\delta} \binom{n}{k} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| t^k(1-t)^{n-k} \\
&\leqslant 2M \sum_{|k-nt|\geqslant n\delta} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} && (\because\ |f(t)+f(k/n)| \leqslant |f(t)|+|f(k/n)| \leqslant M+M=2M) \\
&\leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nt)^2 t^k(1-t)^{n-k} && (\because\ |k-nt| \geqslant n\delta \Rightarrow \frac{(k-nt)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1) \\
&= \frac{2M}{n^2\delta^2} nt(1-t) = \frac{2M}{n\delta^2} t(1-t) < \frac{2M}{n\delta^2} && (\because\ \text{補題 1.4 と } \max\{t(1-t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} = 1/4 < 1)
\end{aligned}$$

を得る．よって，自然数 n が，$n > 4M/\delta^2\varepsilon$ のとき，$S_2 < \varepsilon/2$ となる．ゆえに，任意の自然数 $n > 4M/\delta^2\varepsilon$ に対して，

$$|f(t) - (\mathsf{B}_n f)(t)| \leqslant S_1 + S_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

いま，δ は t に無関係であるから，これは $\mathsf{B}_n f$ が f に一様収束していることを意味する． □

例 1.1. $f \in \mathsf{C}(\mathbf{R})$ とする．ある多項式の列 $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ があって，それが f に一様収束するならば f は多項式である．

$\because$

$\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は f に一様収束するので，コーシー列でもあるから，

$$1>0,\ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ n > N \quad \Rightarrow \quad \|P_n - P_{N+1}\| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P_n(x) - P_{N+1}(x)| < 1.$$

$P_n(x) - P_{N+1}(x)$ は定数函数となる[a]から，$P_n(x) = P_{N+1}(x) + k(n)$ とでも表すことにすると，いま，$P_n \to f$ だったので，ある定数 k があって，$k(n) \to k$ $(n\to\infty)$ となる．よって，$f = P_{N+1} + k\mathbf{1}$ である． □

[a] もし，1 次以上の多項式であればノルムは無限となる．

2 道具の準備

V をベクトル空間とする．積と呼ぶ双線型写像 $V \times V \ni (v_1, v_2) \mapsto v_1 v_2 \in V$ が定義され，その積について結合法則が満たされるとき，V を**代数 (algebra)** という.[1] 代数 V の部分空間 W で積に関して閉じているものを V の**部分代数**という．

さて，K をコンパクト Hausdorff 空間とし，K 上の複素数値連続函数全体がなす Banach 空間を $\mathsf{C}(K)$ とする．$\mathsf{C}(K)$ には，各点ごとの積によって代数の構造が入る．$f, g \in \mathsf{C}(K)$ に対して，積 fg を次で定める：

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in K).$$

定義 2.1. $\mathsf{C}(K)$ の部分集合 Λ が ***K* の点を分離する**とは，次が成り立つことをいう：

$$\forall x \in K,\ \forall y \in K, \quad x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad \exists f \in \Gamma \quad \text{s.t.} \quad f(x) \neq f(y).$$

以下しばらくは，K 上の実数値連続函数がなす実 Banach 空間 $\mathsf{C}(K, \mathbf{R})$ において議論する．$f, g \in \mathsf{C}(K, \mathbf{R})$ に対して，

$$\max(f,g) := \frac{(f+g)+|f-g|}{2}, \qquad \min(f,g) := \frac{(f+g)-|f-g|}{2}$$

と定める．

[1] 多元環，あるいは線型環とも呼ばれる．

定義 2.2. $\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ の部分集合 Λ が**束 (lattice)** であるとは，$f,g\in\Lambda$ のとき，$\max(f,g),\min(f,g)\in\Lambda$ が成り立つことをいう．

$\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ の部分代数が $\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ において閉集合であるとき，その部分代数を**閉部分代数**という．

補題 2.3. Γ を $\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ の閉部分代数とする．$\mathbf{1}\in\Gamma$ ならば Γ は束である．

補題 2.3 の証明.
Claim. $f\in\Gamma$ に対して，$|f|\in\Gamma$ なら Γ は束である．ただし，$|f|(x):=|f(x)|$.
$\because$ $f,g\in\Gamma$ とすると，Γ は部分代数 (とくに，部分空間) であるから，$f+g$, $f-g\in\Gamma$．いま，仮定より $|f-g|\in\Gamma$ であるから，結局その和・スカラーで閉じているので明らかに，Γ は束である． $\square_{\mathrm{Claim}}$

Claim より，$f\in\Gamma$ に対して，$|f|\in\Gamma$ を示せば良い．$f=\mathbf{0}$ の場合は明らかなので，$f\neq\mathbf{0}$ を仮定する．$h:=\left(\|f\|_{\sup}\right)^{-1}f$ とおく[2)]と，$h\in\Gamma$ であり，$h(K)\subseteq[-1,1]$ が成り立つ．

定理 1.5(の $f(t)$) を $|t|$ に適用させれば，ある多項式 $P(t)$ があって，

$$\big||t|-P(t)\big|<\varepsilon \qquad (\forall t\in[-1,1])$$

が成立．ここで，$t=h(x)$ とすれば

$$\big||h(x)|-P(h(x))\big|<\varepsilon \qquad (\forall x\in K)$$

が成立する．すなわち，$\||h|-P\circ h\|_{\sup}<\varepsilon$．$(P\circ h)(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\big(h(x)\big)^k$ とかけるので，$k\geqslant 1$ のときは Γ の部分代数性から，$k=0$ の部分については $\mathbf{1}\in\Gamma$ であることから，$P\circ h\in\Gamma$ がわかる．ゆえに，$|h|\in\overline{\Gamma}$．Γ はいま閉集合だったので $|h|\in\Gamma$. よって，$|f|=\|f\|_{\sup}|h|\in\Gamma$. $\square$

補題 2.4. $\Lambda\subseteq\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ は束でありかつ閉集合であるとする．このとき，$f\in\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ に対して，任意の $x,y\in K$ に対して，ある $g_{x,y}\in\Lambda$ が存在して，$g_{x,y}(x)=f(x)$, $g_{x,y}(y)=f(y)$ が成り立つならば，$f\in\Lambda$ である．

補題 2.4 の証明.
$\varepsilon>0$ を任意に固定する．

Claim1 各 $x,y\in K$ に対して，K の部分集合 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ を

$$U_{x,y}:=\{z\in K\mid f(z)<g_{x,y}(z)+\varepsilon\},\qquad V_{x,y}:=\{z\in K\mid f(z)>g_{x,y}(z)-\varepsilon\}$$

で定めると，これらは K の開集合であり，$x,y\in U_{x,y}\cap V_{x,y}$.
$\because$ $f,g_{x,y}\in\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ より，$f-g_{x,y}\in\mathsf{C}(K,\mathbf{R})$ である．$\mathbf{R}$ の開集合 $(-\infty,\varepsilon)$, $(-\varepsilon,\infty)$ を考え，$f-g_{x,y}$ の連続性から，これらの逆像 $(f-g_{x,y})^{-1}\big((-\infty,\varepsilon)\big)$, $(f-g_{x,y})^{-1}\big((-\varepsilon,\infty)\big)$ は K の開集合である．

$$(f-g_{x,y})^{-1}\big((-\infty,\varepsilon)\big)=\{z\in K\mid f(z)-g_{x,y}(z)<\varepsilon\}=U_{x,y},$$
$$(f-g_{x,y})^{-1}\big((-\varepsilon,\infty)\big)=\{z\in K\mid -\varepsilon<f(z)-g_{x,y}(z)\}=V_{x,y}.$$

故に従う．また，$f(x)=g_{x,y}(x)$ より $g_{x,y}(x)-\varepsilon<f(x)<g_{x,y}(x)+\varepsilon$ より $x\in U_{x,y}\cap V_{x,y}$. y も同様である． $\square_{\mathrm{Claim1}}$

Claim2 y を固定する．このとき，$\displaystyle\bigcup_{x\in K}U_{x,y}=K$ である．
$\because$ $\displaystyle\bigcup_{x\in K}U_{x,y}\subseteq K$ は明らかであるから，$K\subseteq\displaystyle\bigcup_{x\in K}U_{x,y}$ を示す．任意に $z\in K$ を取ってくると，条件から $g_{z,y}(z)=f(z)$ を満たすような $g_{y,z}$ があるので $z\in U_{z,y}$ となるからよい． $\square_{\mathrm{Claim2}}$

Claim2 から $\{U_{x,y}\mid x\in K\}$ が K の開被覆であることがわかる．K はいまコンパクトなので，有限個の $x_1,\dots,x_n\in K$ があって，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i,y}=K$ となる．ここで，$g_y:=\max(g_{x_1,y},\dots,g_{x_n,y})$ とおけば Λ は束なので $g_y\in\Lambda$ となる．また，$V_y:=\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i,y}$ は y を含む開集合である ($\because$ 開集合の有限個の共通部分は開集合である)．このとき，次が成り立つ．

$$f(z)<g_y(z)+\varepsilon\quad(\forall z\in K)\qquad f(z)>g_y(z)-\varepsilon\quad(\forall z\in V_y).$$

右側の式については付録 A.3 参照.

[2)] $\|f\|_{\sup}:=\sup\{|f(x)|\mid x\in K\}$.

Claim3 $\bigcup_{y\in K} V_y = K$ である．

$\because$ $\forall z \in K$ とすると，仮定より，$\forall i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ に対して，$z \in V_{x_i,z}$. $\square_{\text{Claim3}}$

Claim3 より $\{V_y \mid y \in K\}$ が K の開被覆であることが分かり，K のコンパクト性から有限個の $y_1, \ldots, y_m \in K$ がとれて $\bigcup_{j=1}^{m} V_{y_j} = K$ となる．ここで，$g := \min(g_{y_1}, \ldots, g_{y_m})$ とおくと，Λ は束なので $g \in \Lambda$ であり，さらに，任意の $z \in K$ に対して，$g(z) - \varepsilon < f(z) < g(z) + \varepsilon$ が成り立つから，$\sup_{z\in K} |f(z) - g(z)| < \varepsilon$ となる．これは $\|f - g\|_{\sup} < \varepsilon$ を意味し，$\varepsilon > 0$ は任意なので $f \in \overline{\Lambda} = \Lambda$. $\square$

3 Stone-Weierstrass の定理

定理 3.1 (実 Banach 空間における Stone-Weierstrass の定理). Γ は $\mathsf{C}(K, \mathbf{R})$ の閉部分代数で，K の点を分離し，なおかつ $\mathbf{1} \in \Gamma$ とする．このとき，$\Gamma = \mathsf{C}(K, \mathbf{R})$.

定理 3.1 の証明.

補題 2.3 より Γ は束である．$\mathsf{C}(K, \mathbf{R}) \subseteq \Gamma$ を示す．$f \in \mathsf{C}(K, \mathbf{R})$，$x, y \in K$ を任意に取る．$x = y$ のときは $g_{x,y}$ を $\mathbf{1}$ の定数倍にとれば補題 2.4 を適用できる．よって，$x \neq y$ の場合を考える．まず，Γ は K の点を分離するので，ある $h \in \Gamma$ があって，$h(x) \neq h(y)$．いま，

$$\begin{cases} \alpha h(x) + \beta = f(x), \\ \alpha h(y) + \beta = f(y) \end{cases}$$

を満たすような $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が存在する．実際，この連立方程式の係数行列の行列式は $h(x) - h(y) \neq 0$ となる．したがって，$g_{x,y} := \alpha h + \beta \mathbf{1}$ とおけば補題 2.4 によって，$f \in \Gamma$. $\square$

$\mathsf{C}(K, \mathbf{R})$ のときと同様に，$\mathsf{C}(K)$ においても，閉集合である部分代数を閉部分代数という．複素数値連続函数がなす代数 $\mathsf{C}(K)$ については，定理 3.1 の条件だけでは不十分なことが次の例からわかる．

例 3.1. $K := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ とし，Γ は複素係数多項式全体がなす部分代数の $\mathsf{C}(K)$ における閉包とする．このとき，明らかに Γ は K の点を分離し，$\mathbf{1} \in \Gamma$ であるが，Γ の元は多項式列 (正則関数列) の広義一様収束極限なので必ず $|z| < 1$ において正則となるが，$\overline{z} \in \mathsf{C}(K)$ は正則でないので矛盾.

複素数値函数 f に対して，$\overline{f}$ を $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$ により定める．

定理 3.2 (Stone-Weierstrass の定理). Γ は $\mathsf{C}(K)$ の閉部分代数で，K の点を分離し，$\mathbf{1} \in \Gamma$ であり，さらに $f \in \Gamma \Rightarrow \overline{f} \in \Gamma$ を満たすとする．このとき，$\Gamma = \mathsf{C}(K)$.

定理 3.2 の証明.

$\Gamma_{\mathbf{R}} := \{f \in \Gamma \mid f(K) \subseteq \mathbf{R}\}$ とする．明らかに，$\Gamma_{\mathbf{R}}$ は $\mathsf{C}(K, \mathbf{R})$ の閉部分代数である．$f \in \Gamma$ が $x, y \in K$ に対して，$f(x) \neq f(y)$ のとき，$\mathrm{Re}\big(f(x)\big) \neq \mathrm{Re}\big(f(y)\big)$ または $\mathrm{Im}\big(f(x)\big) \neq \mathrm{Im}\big(f(y)\big)$ である．いま，$f \in \Gamma$ のとき，$\overline{f} \in \Gamma$ なので，$\mathrm{Re}\, f = f + \overline{f}/2 \in \Gamma_{\mathbf{R}}$, $\quad \mathrm{Im}\, f = f - \overline{f}/2i \in \Gamma_{\mathbf{R}}$．このことから，$\Gamma_{\mathbf{R}}$ も K の点を分離していることがわかる．実際，仮定より Γ は K を分離するので，相異なる $x, y \in K$ に対して，ある $f \in \Gamma$ があって，$f(x) \neq f(y)$ を満たす．このとき，実部か虚部のどちらかが等しくないということなので，$\Gamma_{\mathbf{R}} \ni \tilde{f}$ を $\tilde{f} := \mathrm{Re}\, f$ または $\tilde{f} := \mathrm{Im}\, f$ とすればよい．また，$\mathbf{1} \in \Gamma_{\mathbf{R}}$ であるから，定理 3.1 を適用すれば $\Gamma_{\mathbf{R}} = \mathsf{C}(K, \mathbf{R})$．よって，各 $g \in \mathsf{C}(K)$ に対して，$g = \mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g$ と表すことにより，$\mathrm{Re}\, g \in \mathsf{C}(K, \mathbf{R}) = \Gamma_{\mathbf{R}}$，$\mathrm{Im}\, g \in \mathsf{C}(K, \mathbf{R}) = \Gamma_{\mathbf{R}}$ となり，$\mathrm{Re}\, g + i\, \mathrm{Im}\, g \in \Gamma$ がわかる.[3) $\square$

参考文献

[1] 野村隆昭著 「球面調和関数と群の表現」 日本評論社

[2] 内田伏一著 「集合と位相」 裳華房

---

3) $\mathsf{C}(K) = \mathsf{C}(K, \mathbf{R}) + i\mathsf{C}(K, \mathbf{R}) = \Gamma_{\mathbf{R}} + i\Gamma_{\mathbf{R}} = \Gamma$ ということか??

付録 A　補足

A.1　命題 1.3 の証明

命題 1.3 の証明：　(1) $(\mathsf{B}_n\mathbf{1})(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{1}\left(\frac{k}{n}\right)t^k(1-t)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}=(t+1-t)^n=1.$

Claim.

(a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kt^k(1-t)^{n-k}=nt.$　　(b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2t^k(1-t)^{n-k}=n(n-1)t^2+nt.$

$\because$ $x\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\bigl(te^x+(1-t)\bigr)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{kx}t^k(1-t)^{n-k}$$

を考える．この両辺を x で微分すると，

$$n\bigl(te^x+(1-t)\bigr)^{n-1}te^x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ke^{kx}t^k(1-t)^{n-k}$$

である．再び，両辺 x で微分すると，

$$n(n-1)\bigl(te^x+(1-t)\bigr)^{n-2}te^x+te^xn\bigl(te^x+(1-t)\bigr)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2e^{kx}t^k(1-t)^{n-k}$$

となる．これに $x=0$ を代入することにより (a),(b) がわかる．　$\square_{\mathrm{Claim}}$

Claim により，(2),(3) がわかる．

$\square$

A.2　有界閉区間上の連続函数は一様連続

$I\subset\mathbf{R}$ を有界閉区間，$f:I\to\mathbf{R}$ を連続函数とする．このとき，f は I 上で一様連続である．

証明.

背理法で示す．f が I 上で一様連続でないとすると，

$$\exists\varepsilon_0>0:\forall n\in\mathbf{N},\ \exists x_n\in I,\ \exists y_n\in I\quad\text{s.t.}\quad |x_n-y_n|<\frac{1}{n}\ \wedge\ |f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

f は I 上で連続だから，当然 $x=a\in I$ で連続なので，

$$\frac{\varepsilon_0}{2}>0,\ \exists\delta_0>0\quad\text{s.t.}\quad\forall x\in I,\ |x-a|<\delta_0\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

が成り立つ．I は有界なので，I 内の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ も有界列である．よって，Bolzano-Weierstrass の定理より，それぞれ収束部分列 $\left\{x_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$，$\left\{y_{m_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ が存在する．仮定より，収束先が一致することがわかるので，

$$I\ni\alpha:=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}=\lim_{j\to\infty}y_{m_j}$$

とする．これは

$$\delta_0>0,\ \exists J\in\mathbf{N}\quad\text{s.t.}\quad j\geqslant J\Rightarrow\left|x_{n_j}-\alpha\right|<\delta_0\ \wedge\ \left|y_{m_j}-\alpha\right|<\delta_0$$

を意味する．よって，

$$\varepsilon_0\leqslant\left|f(x_{n_j})-f(y_{m_j})\right|\leqslant\left|f(x_{n_j})-f(\alpha)\right|+\left|f(\alpha)-f(y_{m_j})\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{\varepsilon_0}{2}=\varepsilon_0.$$

これは矛盾.　$\square$

A.3　補題 2.4 の証明の補足

$\forall z\in V_y$ とすると，$\forall i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ に対して，$z\in V_{x_i,y}$ なので，$g_{x_i,y}(z)-\varepsilon<f(z)$ がわかることより従う．