# 線型代数学 問題集

これは大学 1 年次の線型代数学の講義で学習した定義・定理を用いて解くことのできる問題（主に演習でやったプリントの問題）などを簡単にまとめたものです. 多少タイプミス等があるかもしれませんが, ご了承ください. すべての内容が収録されているわけではありませんが, 復習などご自由に役立ててください. 目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます. 復習に役立てる方々は**こちらの線型代数学の主な定義・定理, 公式の証明**を見ながらやるといいと思います. また**解答はこちら**のフォルダーにあります. 勉強の仕方ですが, 意外とわかっているつもりでも表記の仕方がまずかったり, 本当の意味をきちんと理解していないことが多いので人に説明などをしてみるといいと思います. 説明することによって理解がより深まると思います. また難易度の高い問題では「そんな解き方思いつかねーよ!」みたいな問題があると思います. そんな問題に出会ったときは与えられた問題から何がとりあえず求まるかということやなぜそのような解法が思いつくのかということを考えたり SA の人たちや先生に聞いたりするといいと思います. あとそれと一番の基本なのですが多くの人が忘れがちなのが, 定義をきちんと覚えるということです. これができていないとどうにもなりません. これができてかつ定理の意味などを理解する（その定理の何がうれしいのか?を考える.）. 問題が解けるというのは, その副産物のようなものです. 最後に, 線型代数学 II , III は論証がかなりあります. 意味をきちんと理解することがかなり重要になってくるのでしっかり勉強しましょう.

内容に不備や落丁, 質問等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします.

## 目次



# 1 線型 I（森先生）

## 1.1 集合の基礎

$\boxed{1}$ 以下の集合 $A, B, C$ に対して, 以下の問いに答えよ.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2n | n$ は整数かつ奇数 $\}$

$C = \{k \in \mathbb{R} | k \notin \mathbb{N}\}$

(1) 素数の中で, $A$ に含まれる要素を答えよ.

(2) $B$ にも $C$ にも含まれる要素を 1 つ答えよ.

(3) $B$ に含まれず, $A$ に含まれる要素を答えよ.

$\boxed{2}$ 次の集合を区間, またはいくつかの区間の和集合で表せ.

(1) $\{x | -6 \leq x \leq 5\}$

(2) $\{x | -1 < x \leq 6\}$

(3) $\{x | -6 \leq x \leq 5\} \cup \{x | -1 < x \leq 6\}$

(4) $\{x | -6 \leq x \leq 5\} \cap \{x | -1 < x \leq 6\}$

(5) $\{x | x^2 - 2x - 15 < 0\}$

(6) $\{x | x^2 + 2x + 3 > 0\}$

(7) $\{x | x^2 - 2x + 1 > 0\}$

(8) $\{x | (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0\}$

## 1.2　写像

$\boxed{3}$ 2 つの集合 $X=\{-1,0,1\}$ , $Y=\{-1,0,1,2\}$ と, 写像 $f:X\to Y$ , $f: x\mapsto |x|$ と定める. このとき, $X$ のすべての要素に対して, $f(x)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の集合 $X_i$ と写像 $f_i:X_i\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots)$ に対して, $f_i(X_i)$ を区間または区間の和で表せ.

例) $X_0=(-3,2]$, $f_0:x\mapsto x^2-1$ のとき $f_0(X_0)=[-1,8)$

(1) $X_1=[-6,5]$, $f_1:x\mapsto x^2-1$

(2) $X_2=[-3,3]$ , $f_2:x\mapsto x^3+1$

(3) $X_3=(-\infty,-3]\cup[5,\infty)$ , $f_3:x\mapsto x^2-1$

(4) $X_4=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ , $f_4:x\mapsto x^3-x$

$\boxed{5}$ 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=2x-1$ , 写像 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x)=x^2+3x-4$ で定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 写像 $f$ は全射か否か, また単射か否か答えよ.

(2) 合成写像 $f\circ g(x)$ , $g\circ f(x)$ を求めよ.

(3) 合成写像 $f\circ g$ , $g\circ f$ は全射か否か, また単射か否か答えよ.

$\boxed{6}$ 集合 $X, Y$ を $X=\{0,1,2,3\}$ , $Y=\{4,5,6,7\}$ とし, 写像 $f, g$ を次のように定める.

$f:X\to Y$ , $f(0)=7,\ f(1)=4,\ f(2)=5,\ f(3)=6$

$g:Y\to X$ , $g(x)=|x-6|$

このとき次の問いに答えよ.

(1) 写像 $f, g$ について, 全射と単射の判定をせよ.

(2) $g\circ f(1)$ , $f\circ g(7)$ を求めよ.

(3) 合成写像 $g\circ f(x)$ に対して , $g\circ f(X)$ を求め, 全射・単射の判定をせよ.

### 1.3　行列の演算 1（和・スカラー・積）

$\boxed{7}$ 以下の行列を計算せよ.

(1) $3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$

### 1.4　行列の演算 2（逆行列含む）

$\boxed{8}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ のとき, $3X - 2A = B$ を満たす 2 次正方行列 $X$ を求めよ.

$\boxed{9}$ 以下の行列に対して, 逆行列が存在するか調べ, 存在する場合は逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.5　ベクトルの演算

$\boxed{10}$ ベクトル $(s, -2s)$ が単位ベクトルであるとき, $s$ の値を求めよ.

$\boxed{11}$ 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (-3, 4)$ , $\mathbf{b} = (2, s)$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ となる $s$ の値を求めよ.

(2) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ となる $s$ を求めよ.

$\boxed{12}$ ベクトル $\mathbf{a} = (-3, 7)$ , $\mathbf{b} = (5, -2)$ に対して, 以下を計算せよ.

(1) 大きさ $|\mathbf{a}|$

(2) 大きさ $|\mathbf{b}|$

(3) 内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

(4) ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 $\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$\boxed{13}$ 平面上の 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = 1$ , $|3\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ を満たすように動く. このとき $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ の最大値と最小値を求めよ.

### 1.6 直線の方程式

$\boxed{14}$ 以下の平面上の直線の方程式と,直線のベクトル方程式を求めよ.

(1) 点 $(0,3)$ を通り,方向ベクトルが $(1,2)$ の直線

(2) 2 点 $(-2,3)$ , $(3,-2)$ を通る直線

(3) 直線 $x+2y=1$ と方向ベクトルが同じで,点 $(2,1)$ を通る直線

(4) 直線 $x+2y=1$ と直交し,点 $(2,1)$ を通る直線

### 1.7 内分点・外分点

$\boxed{15}$ 平面上の点 $A(1,2)$ , $B(5,-1)$ に対して,以下の問いに答えよ.

(1) 2 点 $A$, $B$ を結ぶ線分 $AB$ を $2:1$ に内分する点 $P_1$ の座標を求めよ.

(2) 2 点 $A$, $B$ を結ぶ線分 $AB$ を $2:3$ に外分する点 $P_2$ の座標を求めよ.

### 1.8　1 次変換 I

$\boxed{16}$ 平面上の点 $A(2,1)$ , $B(0,-2)$ , $C(3,-1)$ , $D(-2,1)$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 点 $A$ を $x$ 軸に関して折り返して得られる点 $A'$ を求めよ.

(2) 点 $B$ を $y$ 軸に関して折り返して得られる点 $B'$ を求めよ.

(3) 点 $C$ を原点中心に反時計回りで $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる点 $C'$ を求めよ.

(4) 点 $D$ を $x$ 軸方向に 5 倍 , $y$ 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍して得られる点 $D'$ を求めよ.

$\boxed{17}$ 平面上の直線 $l : y = 2x - 3$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $l$ を $x$ 軸に関して折り返して得られる直線 $l_1$ を求めよ.

(2) 直線 $l$ を原点中心に反時計回りで $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる直線 $l_2$ を求めよ.

### 1.9　表現行列

$\boxed{18}$ 次の写像 $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ は 1 次変換か否か答え, 1 次変換の場合は表現行列を求めよ.

(1) $f_1(x,y) = (x+y, x-y)$

(2) $f_2(x,y) = (1,1)$

(3) $f_3(x,y) = (2x, 2y)$

### 1.10　1 次変換 II

$\boxed{19}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 直線 $y = 3x$ に関して点 $(2, 1)$ を対称に移動して得られる点の座標を求めよ.

(2) 直線 $y = ax$ に関して点 $(7, 1)$ を対称に移動して得られる点が $(5, 5)$ であった. このときの $a$ の値を答えよ.

### 1.11　図形

$\boxed{20}$ 平面上の 4 点 $A(0, 0)$ , $B(1, 0)$ , $C(1, 1)$ , $D(0, 1)$ に対して,四角形 $ABCD$ を考える. 次の 1 次変換でこの四角形はどのような図形に移るか答えよ.

(1) $f_1(x, y) = (x + y, x - y)$

(2) $f_2(x, y) = (2x + y, -2x - y)$

$\boxed{21}$ 平面上の 3 点 $A(0, 0)$ , $B(1, 0)$ , $C(1, 1)$ に対して, 三角形 $ABC$ を考える. 次の 1 次変換でこの三角形を移し, 得られる図形の面積を求めよ.

(1) $f_1(x, y) = (x + y, x - y)$

(2) $f_2(x, y) = (x - y, -x + y)$

### 1.12　1 次変換 III（2 次曲線）

$\boxed{22}$ 1 次変換 $f$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) 直線 $y = 2x - 1$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ.

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ.

$\boxed{23}$ 以下の 2 次曲線を原点の周りに角 $\dfrac{\pi}{3}$ だけ反時計回りに回転して得られる曲線の方程式を求めよ.

(1) 放物線 $y = 2x^2$

(2) 楕円 $4x^2 + 9y^2 = 16$

(3) 双曲線 $4x^2 - 9y^2 = 16$

### 1.13　合成変換

$\boxed{24}$ 以下の 1 次変換の表現行列を求めよ.

(1) $f_1(x,y)=(x,x+3y)$

(2) $f_2(x,y)=(x-y,x+y)$

(3) $f_3(x,y,z)=(z,x,y)$

(4) $f_4(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$

(5) $f_1\circ f_2$

(6) $f_2\circ f_1$

(7) $f_3\circ f_4$

(8) $f_4\circ f_3$

$\boxed{25}$ 平面において, 1 次変換 $f$ を $y$ 軸に関する折り返しとし, $g$ を原点を中心に角 $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ反時計回りに回転させる 1 次変換とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 合成変換 $f\circ g$ と $g\circ f$ を求めよ.

(2) $f\circ g\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ と $g\circ f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ を求めよ.

(3) 1 次変換 $g$ によって直線 $l$ は $y=2x$ となった. $l$ の方程式を求めよ.

### 1.14　正則変換・逆変換

$\boxed{26}$ 平面において, 1 次変換 $f, g$ を

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f, g$ は, 正則変換か否か答えよ. また正則変換なら逆変換を求めよ.

(2) $f$ で $(1, 2)$ に移る点を求めよ.

(3) (2) で求めた点を $(s, t)$ とする. $g$ で $(s, t)$ に移る点を求めよ.

## 2　線型 II（柴田先生）

### 2.1　ベクトル

$\boxed{1}$ ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}$ が

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \mathbb{b} = (\sqrt{2}, -5, 4, 3), \ \mathbb{c} = (2, -1, 4), \ \mathbb{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で表されるとき次の問いに答えよ.

(1) このベクトルたちははそれぞれ「行ベクトル」か「列ベクトル」か答えよ.

(2) このベクトルたちを $* \in \mathbb{R}^n \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ の形で答えよ.

(3) このベクトルたちの長さを求め $\| * \| = **$ の形でかけ.

2.2　論証（ベクトル）

$\boxed{2}$ スカラー $k \in \mathbb{R}$ と，

$$n\text{ 項数ベクトル } \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

に関して以下を示せ．

(1) 和の交換法則 $\mathbb{a} + \mathbb{b} = \mathbb{b} + \mathbb{a}$

(2) 分配法則 $k(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = k\mathbb{a} + k\mathbb{b}$

(3) 長さに関する等式 $\|k\mathbb{a}\| = |k|\,\|\mathbb{a}\|$

(4) ゼロでない任意の $n$ 項数ベクトル $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\mathbb{v} = \dfrac{1}{\|\mathbb{a}\|}\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}$ と同じ向きの単位ベクトルであることを示せ．

2.3　複素数（基礎）

$\boxed{3}$ 次の数

$$\text{(i) } 0,\ \ \text{(ii) } -3,\ \ \text{(iii) } \frac{1}{2},\ \ \text{(iv) } -\sqrt{5},\ \ \text{(v) } 4i,\ \ \text{(vi) } 1+2i$$

について以下の問いに答えよ．

(1) このうち複素数であるものを答えよ．

(2) (1) の実部と虚部をそれぞれ答えよ．

(3) (1) の複素共役を答えよ．

(4) そのうちの絶対値を答えよ．

### 2.4 複素数（極形式, 偏角）

$\boxed{4}$ 複素数 $z_1$ , $z_2$ , $z_3$ , $z_4$ を

$$z_1 = 3\,,\ z_2 = -i\,,\ z_3 = \sqrt{3} + i\,,\ z_4 = -1 - i$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $|z_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ と $\arg(z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を求めよ.

(2) それぞれを極形式で表せ.

### 2.5 $n$ 乗根

$\boxed{5}$ 1 の $n$ 乗根を $\mathbb{C}$ の範囲で求めよ.

$\boxed{6}$ 1 の 6 乗根を求めよ.

### 2.6　行列（基礎）

$\boxed{7}$ 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 55 & 6 & 4 \\ -4 & -6 & -7 & 3 \\ -2 & 8 & -11 & 7 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $A$ は何行何列の行列か答えよ.

(2) $A$ の $(1,2)$ 成分と, 3 行 2 列の成分を答えよ.

(3) $A$ の転置行列 ${}^tA$ を求めよ.

(4) 行ベクトルを使って $A$ を表せ.

(5) 列ベクトルを使って $A$ を表せ.

### 2.7　行列の演算

$\boxed{8}$ 行列 $A, B, C$ を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

とする. 次の式を計算せよ.

(1) $3A + B + 2C + 2(B - 2C - 2A)$

(2) $2A + C - 2(A + {}^tC)$

$\boxed{9}$ 次の等式が成り立つような $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} x & 8 \\ 5 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2z \\ w+1 & 2y-6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x+y & 2y-3w \\ x-z & y+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

### 2.8　行列の成分表示

$\boxed{10}$ 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ が

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 9\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられるとき, $a_{11}$ , $a_{13}$ , $a_{22}$ を求めよ.

(2) $a_{ij}=3^i+2j$ で与えられたとき, $3\times 2$ 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ を求めよ.

(3) $b_{ij}=\sqrt{i}+j^2$ で与えられたとき, $3\times 4$ 行列 $B=(b_{ij})_{ij}$ を求めよ.

### 2.9　論証（行列の和）

$\boxed{11}$ $m\times n$ 行列 $A,B,C$ とスカラー $k,\ell\in\mathbb{R}$ について次を示せ.

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) $(k\ell)A=k(\ell A)$

(3) $k(A+B)=kA+kB$

### 2.10　行列の積

$\boxed{12}$ $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ と, $n \times p$ 行列 $B = (b_{ij})_{ij}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 積 $AB$ は何行何列の行列か答えよ.

(2) 積 $AB$ を成分表示を用いてかけ.

$\boxed{13}$ $A,\, B : n$ 次正方行列とする. 次の問いに答えよ.

(1) $(A + E_n)(A - E_n)$ を簡単にせよ.

(2) $(A + B)(A - B)$

(3) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
が成立するための必要十分条件を答えよ.

### 2.11　論証（行列の積）

$\boxed{14}$ $m \times n$ 行列 $A$, $n \times p$ 行列 $B$, $n \times p$ 行列 $C$, $p \times q$ 行列 $D$, スカラー $r \in \mathbb{R}$ について以下を示せ.

(1) $E_m A = A$

(2) $r(AB) = A(rB)$

(3) $(B + C)D = BD + CD$

## 2.12　行列（正則・逆行列）

$\boxed{15}$ 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件を述べよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で与えられているとき $a,b,c,d$ の値を求めよ．

$\boxed{16}$ $A$ を $n$ 次正方行列について $m \in \mathbb{N}$ とする．
$A^m = \mathbf{O}$ ならば $A - E_n$ , $A + E_n$ は正則であることを示せ．

## 2.13　論証（正則）

$\boxed{17}$ 以下の主張を示せ．

(1) ゼロ行列は正則ではない．

(2) $n$ 次正方行列 $A$ について自然数 $m$ に対し，
$A^m = \mathbf{O}$ ならば $A$ は正則でない．

(3) $n$ 次正方行列 $A,B$ について
$AB = \mathbf{O}$ ならば $A,B$ はともに正則でない．

### 2.14 ブロック分割

$\boxed{18}$ 次の行列の積をブロック分割の考え方を用いて計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$

$\boxed{19}$ 次の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### 2.15　複素行列

$\boxed{20}$ 次を満たすときの定数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ を決定せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -5 \\ 9 & \sqrt{2} & b \\ c & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ は対称行列.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\sqrt{5} & c \end{pmatrix}$ は交代行列.

(3) 行列 $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & -a \\ \frac{3}{\sqrt{10}}i & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ はユニタリー行列.

### 2.16　論証（複素行列）

$\boxed{21}$ 次の主張を示せ.

(1) 直交行列同士の積もまた直交行列になる.

(2) 直交行列の逆行列もまた直交行列になる.

(3) ユニタリー行列同士の積もまたユニタリー行列になる.

(4) ユニタリー行列の逆行列もまたユニタリー行列になる.

(5) 正則行列 $A$ に対して $A^*$ も正則行列になる.

### 2.17 まとめ（小テスト風）

$\boxed{22}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 複素数 $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ について

(a) $\mathrm{Re}(z)$ , $\mathrm{Im}(z)$ , $\overline{z}$ を答えよ.

$\mathrm{Re}(z) =$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) =$ $\quad$ $\overline{z} =$

(b) $z$ を極形式で表せ.

$z =$

(2) 数ベクトル $\mathbb{v} := \left(-\sqrt{10}, \dfrac{1}{2}, 2\sqrt{5}\right)$ について

(a) $\mathbb{v}$ の名称は行ベクトル, 列ベクトルのいずれか答えよ.

(b) $\mathbb{v}$ の長さを求めよ.

(c) $\mathbb{x} := -\dfrac{1}{11}\mathbb{v}$ に対して $\|\mathbb{x}\|$ を求めよ.

(3) 成分が $a_{xy} = \sqrt{y-x}$ で与えられる $3 \times 2$ 行列 $A = (a_{xy})_{xy}$ に関して（$\sqrt{-1}$ は虚数単位 $i$ のこと.）

(a) $A$ と ${}^tA$ を具体的にかけ.

$A =$ $\qquad\qquad$ ${}^tA =$

(b) $A$ の 2 行 1 列の成分を答えよ.

(c) $A$ の複素共役行列を求めよ.

(4) 複素行列 $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1-3i}{2} \\ \frac{1+3i}{2} & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 4 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & i \\ -4 & 1-i \end{pmatrix}$ に対して次の計算をせよ.

$A^tB + A^*C - A^* =$

$\boxed{23}$ 次の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 264 & 0 & 0 \\ 12 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^{1000}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

### 2.18　回転系

$\boxed{24}$ 実数 $\theta$ に対して

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくとき以下を示せ.

(1) $A_0 = E_3$ , $A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$

(2) $A_\theta$ は常に正則である.

(3) $A_\theta$ は常に直交行列である.

(4) 任意の 3 項列ベクトル a に対して $\|A_\theta\,\mathrm{a}\| = \|\mathrm{a}\|$

## 3　線型 III（柴田先生）

### 3.1　全射・単射

$\boxed{1}$　次の写像 $(a, b \in \mathbb{R})$ について, これが全単射になる必要十分条件をかけ. またそのときの逆写像 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求めよ.

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

$\boxed{2}$ 次の写像たち $f, g$ の合成写像 $g \circ f$ , $f \circ g$ をそれぞれ求めよ.

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^3+1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}$$

$\boxed{3}$ 次の写像が, (i) 全射ならば証明を, 違えば反例をかけ. また (ii) 単射も同様に議論せよ.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -e^{3x_2} \end{pmatrix}$$

### 3.2　論証（写像, 全射・単射, 逆写像）

$\boxed{4}$ 写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $A,\ B \subset X$ について次の主張を示せ.

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

$\boxed{5}$ 写像 $f : X \to Y$ , $g : Y \to Z$ に関して以下の主張を示せ.

(1) $f,\ g$ が全射 $\Longrightarrow g \circ f$ は全射

(2) $f,\ g$ が単射 $\Longrightarrow g \circ f$ は単射

(3) $g \circ f$ が全射 $\Longrightarrow g$ は全射

(4) $g \circ f$ が単射 $\Longrightarrow f$ は単射

$\boxed{6}$ 以下の主張を示せ.

(1) 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して,
その逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ は一意的に存在する.

(2) 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ に対して,
その逆写像 $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ も全単射で $(f^{-1})^{-1} = f$

(3) 全単射 $f : X \longrightarrow Y$ と全単射 $g : Y \longrightarrow Z$ に対して,
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

### 3.3 線形写像

$\boxed{7}$ 以下の写像について,線形ならば対応する行列を,違えばその理由を（反例をあげて）かけ.

(1) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{2}\, x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

(2) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = -2x_2 + \dfrac{3}{5}x_1 + \sqrt{7}\, x_3$

(3) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + \pi x_2 - 2x_3 \\ 5x_1 - \sqrt{3}\, x_3 \end{pmatrix}$

(4) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \end{pmatrix}$

(5) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \left(\sin^2(-x_2) + \sin^2\left(x_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$

### 3.4　線形写像 $f$ の計算

$\boxed{8}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a{x_1}^2 + b{x_2}^4 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$ が線形になる $a, b, c, d$ の条件を求めよ.

(2) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \pi x_2 \end{pmatrix}$ の $f^{500}$ はどうなるか.

(3) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_3 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の $f^{1000}$ はどうなるか.

(4) $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_2 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$ の $f^{-1}$ はどうなるか.

(5) 線形写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f(3) = \cos(5)$ を満たすとき, $f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.

### 3.5　回転系

$\boxed{9}$ 実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, 写像 $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$f_\theta(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ x_2 \cos\theta - x_1 \sin\theta \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $f_\theta$ は常に線形であることを示せ.

(2) 任意の $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ に対して, $f_\theta \circ f_\varphi = f_{\theta+\varphi}$ を示せ.

(3) $f_\theta$ は常に同型であることを示し, その逆写像を答えよ.

(4) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ と $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^2$ に対し, $\|f_\theta(\mathrm{a})\| = \|\mathrm{a}\|$ を示せ.

### 3.6　論証（線形写像・同型写像）

$\boxed{10}$ 次の主張を示せ.

(1) 線形写像 $f$ に対して, $f$ : 単射 $\Longleftrightarrow [f(\mathbb{x}) = \mathbb{o} \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{o}]$

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$ は ${}^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $f^n = 0$ なら非同型.

(3) 正則行列に対応する線形写像は同型である.

(4) 同型写像の逆写像は（LM1）を満たす.

(5) 同型写像の逆写像は（LM2）を満たす.

## 4　線型 IV（山田先生）

### 4.1　2 次 3 次の行列式

$\boxed{1}$ 以下の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 12 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$

### 4.2　面積・体積

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 平面ベクトル $\mathbf{a} = (-3, 1)$ , $\mathbf{b} = (4, 5)$ の張る平行四辺形の面積 $S$ を求めよ. また $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ は「左回り」か「右回り」か答えよ.

(2) 3 点 $A = (1, 2)$ , $B = (-1, 2)$ , $C = (2, 3)$ を頂点とする三角形の面積 $S$ を求めよ.

(3) 空間ベクトル $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$ , $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)$ , $\mathbf{c} = (0, 2, 1)$ でできる平行六面体の体積 $V$ を求めよ. また「右手系」か「左手系」か答えよ.

(4) 4 点 $A = (2, 1, -2)$ , $B = (4, 2, 1)$ , $C = (1, 3, -1)$ , $D = (2, 3, -1)$ の 4 つを頂点とする平行六面体の体積を求めよ.

### 4.3 置換

$\boxed{3}$ $S_3$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次を求めよ.

(1) $\sigma(1)$

(2) $\tau(2)$

(3) $\tau\sigma(3)$

(4) $\sigma^{-1}(1)$

(5) $\tau\sigma$

(6) $\sigma\tau$

(7) $\sigma^{-1}$

(8) $(\tau\sigma)^{-1}$

(9) $\tau^{-1}\sigma^{-1}$

(10) $\sigma^{-1}$

### 4.4 巡回置換

$\boxed{4}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ , $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ とする.
以下の置換を互いに素な巡回置換の積で表せ.

(1) $\sigma$

(2) $\tau$

(3) $\tau^{-1}$

(4) $\sigma^{-1}\tau\sigma$

(5) $\tau^{-1}\sigma\tau$

$\boxed{5}$ 次の元を互いに素な巡回置換の積で表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 8 & 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

(3) $(1\,2\,3\,5)(4\,1\,3)$

(4) $(1\,3\,2\,5\,6)(2\,3)(4\,6\,5\,1\,2)$

### 4.5 行列式の符号

$\boxed{6}$ $A = (a_{ij})$ が 4 次正方行列のとき,行列式 $|A|$ において次の項の係数を求めよ.

(1) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$

(2) $a_{13}a_{34}a_{21}a_{42}$

(3) $a_{12}a_{44}a_{23}a_{34}$

(4) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

$\boxed{7}$ 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4.6　行列式の基本的性質 1

$\boxed{8}$ 行列 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式の値が 8 のとき, 以下の行列式を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 10a & 10b & 10c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a-g & b-h & c-i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a-c & b & c \\ d-f & e & f \\ g-i & h & i \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

$\boxed{9}$ 次の行列式の値を求めよ. ただし $a, b$ は定数とする.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & -7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{100} & 2 & \frac{1}{100} \\ 1 & 200 & 0 \\ 1 & 100 & -1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & 0 & b \\ a & a & 0 \\ 2a & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ab & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 2b & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a^2b & -a \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & -ab & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^2 & ab^2 & -ab \\ 0 & a & 1 \\ 1 & -b & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$

4.7　次数の多い行列式の計算

$\boxed{10}$ 以下の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 2 & 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

### 4.8　行列式の性質（余因子展開を含む）

$\boxed{11}$ 以下の (1) から (12) について, 正しかったら○を, そうでなければ $\times$ をかけ.

(1) $\tilde{a}_{ij}$ を行列 $A=(a_{ij})$ の $(i,j)$ 余因子と定義する. $i+j$ が奇数であるとき $\tilde{a}_{ij}$ と $|A_{ij}|$ は符号が異なり, 偶数のとき同じ値となる. 例えば $\tilde{a}_{12}=-|A_{12}|$ , $\tilde{a}_{24}=|A_{24}|$

(2) ある行列 $A$ が列ベクトルを用いて $(k\mathbf{a}_1\ k\mathbf{a}_2\ k\mathbf{a}_3\ k\mathbf{a}_4)$ と表されるとき, 行列式の値は $|A|=k|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4|$ である.

(3) ある行列 $A$ の第 $i$ 列と第 $j$ 列（$i\neq j$）を入れ替える行列式の値は $-1$ 倍される.

(4) 行列 $A$ の第 $i$ 列と第 $j$ 列（$i\neq j$）が一致しているならば, 行列式 $|A|$ の値は 0 である.

(5) 行列式 $|A|=0$ ならば, いずれかの第 $i$ 列と第 $j$ 列（$i\neq j$）が一致している.

(6) 行列式の値を求める場合, サラスの方法はいくらでも使える.

(7) $n$ 次正方行列 $A,B$ に対して,
$|A+B|=|A|+|B|$ , $|A-B|=|A|-|B|$ が成り立つ.

### 4.9　余因子展開

$\boxed{12}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&2\\5&-2&1&0\\1&0&3&-5\\0&3&-4&0\end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 小行列式 $|A_{23}|$ , $|A_{42}|$ の値を求めよ.

(2) 余因子 $\tilde{a}_{23}$ , $\tilde{a}_{42}$ を求めよ.

(3) 第 2 行に注目することにより, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(4) 第 4 列に注目することにより, 行列式 $|A|$ の値を求めよ.

### 4.10　行列式と逆行列, ファンデアモンデの行列式, クラーメルの公式

$\boxed{13}$ 次の行列式が逆行列を持たないための条件を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} b & 0 & -1 \\ 0 & a & b \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{14}$ 次の行列式の値を求めよ.

（ファンデアモンデの行列式の結果を使うと簡単.）

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & 2a & a+b \\ a^2 & b^2 & 4a^2 & (a+b)^2 \\ a^3 & b^3 & 8a^3 & (a+b)^3 \end{vmatrix}$

$\boxed{15}$ クラーメルの公式を用いて次の連立一次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 4x+2y+3z=1 \\ -2x-2y=-1 \end{cases}$

### 4.11　論証

$\boxed{16}$ $A, B : n$ 次正方行列とする. 行列式を用いて次を証明せよ.

$A$ と $B$ が正則であることと $AB$ が正則であることは同値である.