線型代数学の主な定義と定理, 公式の証明

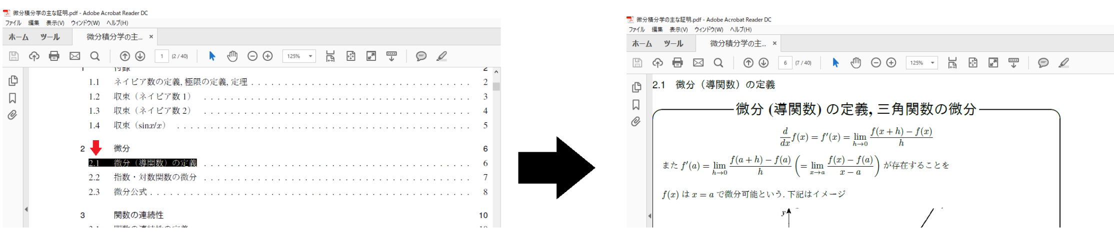
はじめに

これは大学 2 年次の線型代数学の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです．多少タイプミス等があるかもしれませんが，ご了承ください．すべての内容が収録されているわけではありません (などと書いてありますが，授業で扱ってない内容も証明などで使う関係で入っています．授業で扱ったのに収録されていない内容は高校や大学 1 年次に学んだもの，もしくは私個人の独断と偏見で必要ない，面白くないと判断したもののいずれかであります) が，復習などご自由に役立ててください．授業よりもわかりやすく細かな説明などを入れたつもりではありますが，スペースの関係でやむをえず省略したり，細かな説明を入れたばかりにかえってわかりにくくなっているかもしれませんが，その所はご了承ください．目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照)

本 PDF では，ベクトル表示は $\mathbb{a}$，実数，複素数，自然数全体の集合等を $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{N}$ 等いわゆる白抜き文字で表記する．また，零ベクトルは $\mathbb{o}$，ゼロ行列は O と表記する．
講義プリント等ではベクトルは $\boldsymbol{a},\mathbf{a},\mathbf{0}$，集合では $\mathbf{R}$ と表記されていることもあったが同じ意味である．

内容に不備や落丁等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします．

[1)]



---

1) 目次の使い方

目次

1　連立 1 次方程式

1.1　係数行列，拡大係数行列，連立 1 次方程式の基本変形・行列の行の基本変形

定義

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする．連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

は，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくことにより，$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ と書き表される．
このとき A を連立 1 次方程式の 係数行列 といい，$m \times (n+1)$ 行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を連立 1 次方程式の 拡大係数行列 といい，$(A \ \mathbb{b})$ と書く．

定義【連立 1 次方程式の基本変形】

次の 3 つの操作を連立 1 次方程式の基本変形という．
(1) 1 つの式に 0 でない数をかける．
(2) 1 つの式にある数をかけたものを他の式に加える．
(3) 2 つの式を入れかえる．

定義【行列の行の基本変形】

次の 3 つの操作を行列の行の基本変形という．
(1) 1 つの行に 0 でない数をかける．
(2) 1 つの行にある数をかけたものを他の行に加える．
(3) 2 つの行を入れかえる．

連立 1 次方程式の基本変形と行列の行の基本変形はそれぞれ対応している．この操作をして，簡単な連立 1 次方程式に変形することを消去法または掃き出し法という．

1.2 基本行列

定義【基本行列】

次の正方行列を $\boxed{\text{基本行列}}$ という.

(1) $$P(i\,;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

$\iff$ (i,i) 成分のみが c でその他の対角成分が 1, 他の成分はすべて 0 からなる行列.

(2) $Q(i,j\,;c) = ((i,j)$ 成分のみが c で対角成分はすべて 1, その他の成分はすべて 0 の行列$)$ $(i \neq j)$

(3) $$R(i,j) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad i\text{ 列目} \qquad\quad j\text{ 列目} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{ 行目} \\ \\ \leftarrow j\text{ 行目} \\ \\ \\ \end{array}$$

定理 1

基本行列は正則であり, 行列の行の基本変形はこれらの基本行列を左からかけることによって得られる. したがって, 基本変形は正則行列を左からかけることによって得られる.

証明：

(1) の行列式は $c \neq 0$ であり, (2) の行列式は $1 \neq 0$ であり, (3) の行列式は i 行 (列) 目と j 行 (列) 目をいれかえることにより $-1 \neq 0$ であるから正則.

また, 行列 A の左から (1),(2),(3) の基本行列をかけることはそれぞれ

(1) A の第 i 行を $c\,(\neq 0)$ 倍する.

(2) A の第 i 行を c 倍したものを第 j 行に加える.

(3) A の第 i 行と第 j 行をいれかえる.

ことにあたる. よって, 基本変形はある正則行列を左からかけることによって得られる. □

1.3 簡約な行列

定義

行列の零ベクトルでない行ベクトルの 0 でない最初の成分を，その行の $\boxed{\text{主成分}}$ という．

定義【簡約な行列】

次の (1)〜(4) を満たす行列を，$\boxed{\text{簡約な行列}}$ という．

(1) 行ベクトルのうちで零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないものよりも下にある．

(2) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分はの主成分は 1 である．

(3) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると，$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる．すなわち，各行の成分は，下に行くほど右にある．

(4) 各行の主成分を含む列のほかの成分はすべて 0 である．

行列 A に行の基本変形を繰り返して，簡約な行列 B を得ることを，A を**簡約化する**といい，B を A の**簡約化**という．

定理

任意の行列は簡約化できる．

証明：

簡約な行列の形は，1 列が 0 であるか，1 行の成分が 1 で残りが 0 になっているかのどちらかである．

すなわち $\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \cdots [1]$, $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \cdots [2]$ のどちらかである．

任意の行列 A の 1 列目に 0 でない成分がある場合，行の入れかえによって 0 でない成分を 1 行目に持っていき，その後，その成分で 1 行目を割ってやれば [2] の形となる．また，A の 1 列目の成分がすべて 0 の場合は，常に [1] の状態であるから簡約化できている．

次に行列 A が行の基本変形によって 1 列目から k 列目までにおいては簡約な行列になっているとする．また，k 列目までに主成分が ℓ 個あるとする．ここで k 列目までの $\ell+1$ 行目以降の成分はすべて 0 である．そこで $k+1$ 列目に着目し，$\ell+1$ 行目以降に 0 でない成分があるとする．その行を m 行とし，成分を a とすると，行の基本変形により $\ell+1$ 行目と m 行目を入れ替えることにより，a は $\ell+1$ 行目に移動される．このとき，1〜k 列までの成分はすべて 0 であるから，移動後の $\ell+1$ 行目の 1〜k 列までの成分はすべて 0 となる．そして $\ell+1$ 行目に $\dfrac{1}{a}$ をかけることにより，$\ell+1$ 行目の主成分は 1 になる．ここから $k+1$ 列の $\ell+1$ 行を除く他の行に 0 でない数があるとすれば $\ell+1$ 行目の (その 0 でない) 定数倍をその行に加えることによって，その成分を 0 にすることができる．以後，同様の作業を繰り返すことにより帰納的に簡約化できる． □

参考サイト : https://risalc.info/src/reduced-row-echelon-form-properties.html

1.4　行列のランク (階数)

定義【行列の rank】

行列 A の簡約化を B としたとき

$$\mathrm{rank}\, A = (B \text{ の零ベクトルでない行の個数})$$

とおく.

系

$\mathrm{rank}\, A = (B$ の行に主成分を含む列の個数)

$\because$
簡約な行列の零ベクトルでない行の主成分はすべて異なる列に属するから.　□

例 1（簡約な行列）

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2（ランク）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \text{ の簡約化は } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ であるから } \mathrm{rank}\, A = 2$$

問. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の簡約化とランクを求めよ.

解答：

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ よって簡約化は } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

また $\mathrm{rank}\, A = 3$

解説：
行の並び替え → 第 3 行目を 2 で割る → 第 2 行目から第 3 行目の 2 倍をひく.
コツ：左下の方から 0 を作っていく.
この方法はあくまで 1 例であり簡約化の方法は何通りもある.

1.5　連立 1 次方程式が解を持つための条件，一般解・特殊解・基本解

定理【解を持つための条件】

連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ が解を持つための条件は

$$\operatorname{rank}(A\ \mathbb{b}) = \operatorname{rank} A$$

証明：
未知数が n 個の連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ($A : m \times n$ 行列) を考える．拡大係数行列 $(A\ \mathbb{b})$ の列の個数は，(A の列の個数)+1 である．行列のランクは **1.4** の系よりその簡約化の行を含む列の個数であり，A の簡約化は $(A\ \mathbb{b})$ の簡約化の 1 部であるから

$$\operatorname{rank}(A\ \mathbb{b}) = \begin{cases} \operatorname{rank} A \\ (\operatorname{rank} A) + 1 \end{cases}$$

である．
$\operatorname{rank}(A\ \mathbb{b}) = \operatorname{rank} A$ のとき，主成分を含まない列に対応する未知数に値を定めると，主成分を含む列に対応する未知数の値は決まるので $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は解を持つ．
$\operatorname{rank}(A\ \mathbb{b}) = (\operatorname{rank} A) + 1$ のとき，簡約化の行 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する方程式は

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$

となり $x_1, x_2, \ldots, x_n$ にどんな数を当てはめても成り立たない．
よって $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は解を持たない．　□

定義

行列 A のランクが r のとき，連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の解は，$(n-r)$ 個のベクトル $\mathbb{s}_1, \cdots, \mathbb{s}_{n-r}$ を用いて

$$\mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + k_1\mathbb{s}_1 + \cdots + k_{n-r}\mathbb{s}_{n-r} \quad (k_1, \cdots, k_{n-r} \text{は任意の数})$$

と表す．このとき $\mathbb{x}$ を $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の $\boxed{\text{一般解}}$，$\mathbb{x}_0$ を $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の $\boxed{\text{特殊解}}$，
$\mathbb{s}_1, \cdots, \mathbb{s}_{n-r}$ を $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の $\boxed{\text{基本解}}$ という．

例 **3**

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ \quad\ \ y &= 1 \end{cases}$$ はただ一つ解を持つ．

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ 2x - 2y &= 2 \end{cases}$$ は無数に解を持つ．

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{cases}$$ は解なし．

2 逆行列の計算

2.1 正則行列であるための必要十分条件

定理

A を n 次正方行列とするとき，次の (1)〜(5) は同値である．

(1) $\operatorname{rank} A = n$

(2) A の簡約化は E_n

(3) 任意の n 次列ベクトル $\mathbb{b}$ に対し，連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ はただ一つの解を持つ．

(4) 連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ はただ一つの解 $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ を持つ．

(5) A は正則である．

証明：

(1)⇒(2)

A のランクが n より A のすべての行は零ベクトルでない．よって A の簡約化は E_n である．

(2)⇒(3)

$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ の拡大係数行列 $(A\ \mathbb{b})$ の簡約化は $(E_n\ \mathbb{b}')$ という形になるから $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ は解をもち，その解は $\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ のみである．

(3)⇒(4)

(3) の特別な場合が (4) である．すなわち $(A\ \mathbb{o}) \to (E_n\ \mathbb{o})$ である．

(4)⇒(1)

$A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の一般解の形より $\operatorname{rank} A = n$.

(3)⇒(5)

n 次列ベクトル $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \cdots, \mathbb{e}_n$ を

$$\mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A\mathbb{x} = \mathbb{e}_1, A\mathbb{x} = \mathbb{e}_2, \cdots, A\mathbb{x} = \mathbb{e}_n$ はそれぞれただ一つの解を持ち，その解をそれぞれ $\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \cdots, \mathbb{c}_n$ とし，$C = (\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \cdots, \mathbb{c}_n)$ とおくと

$$AC = A(\mathbb{c}_1, \mathbb{c}_2, \cdots, \mathbb{c}_n) = (A\mathbb{c}_1, A\mathbb{c}_2, \cdots, A\mathbb{c}_n) = (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \cdots, \mathbb{e}_n) = E_n$$

となるので A は正則．

(5)⇒(4)

A は正則なので $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると $\mathbb{x} = \mathbb{o}$. □

2.2　行の基本変形を用いた逆行列の計算

定理

A を n 次正方行列とする．$n \times 2n$ 行列を簡約化して

$$(A\ E_n) \longrightarrow (E_n\ B)$$

となるとき，$B = A^{-1}$ である．

証明：
$(A\ E_n) \to (E_n\ B)$ ということは **1.2** の定理より，$P(A\ E_n) = (E_n\ B)$ を満たす正則行列 P が存在する．$P(A\ E_n) = (PA\ PE_n) = (PA\ P) = (E_n\ B)$ であるから $PA = E_n, P = B$.
したがって $B = A^{-1}$.　□

問. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ に逆行列があるなら求めよ．

解答：

$$(A\ E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

よって $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

解説：

行の並び替え $\to$ 1行目，2行目，3行目をそれぞれ3，2，5で割った．

3　ベクトル空間

3.1　ベクトル空間の定義

定義【ベクトル空間】

集合 V に次のような 2 つの演算が定義されているとする.

(ベクトルの和)　$\mathbb{a}+\mathbb{b}\in V$ $(\mathbb{a},\mathbb{b}\in V)$

(ベクトルのスカラー倍)　$\lambda\mathbb{a}\in V$ $(\mathbb{a}\in V,\lambda\in\mathbb{R})$

この 2 つの演算に関して，次の (1)〜(8) の性質[0]が成り立つとき，V を $\mathbb{R}$ 上の **ベクトル空間** といい，V の元を**ベクトル**という.

$\mathbb{a},\mathbb{b},\mathbb{c}\in V,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ とする.

(1) $\mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a}$

(2) $(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}=\mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c})$

(3) $\mathbb{a}+\mathbb{o}=\mathbb{a}$ を満たす $\mathbb{o}\in V$ が存在する.

(4) V の任意の元 $\mathbb{a}$ に対して，$\mathbb{a}+\mathbb{a}'=\mathbb{o}$ を満たすベクトル $\mathbb{a}'$ が存在する.[4]

(5) $(\lambda\mu)\mathbb{a}=\lambda(\mu\mathbb{a})$

(6) $(\lambda+\mu)\mathbb{a}=\lambda\mathbb{a}+\mu\mathbb{a}$

(7) $\lambda(\mathbb{a}+\mathbb{b})=\lambda\mathbb{a}+\lambda\mathbb{b}$

(8) $1\mathbb{a}=\mathbb{a}$

例 (ベクトル空間)

(i)

$$\mathbb{a}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\mathbb{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}\text{ に対して,}$$

(ベクトルの和)　$\mathbb{a}+\mathbb{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}$,　(ベクトルのスカラー倍)　$\lambda\mathbb{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$

が定義され，上記の (1)〜(8) が成り立つ.

(ii)

実数を成分とする $m\times n$ 行列全体の集合を V とする．$A=(a_{ij})_{ij},B=(b_{ij})_{ij}\in V,\ \lambda\in\mathbb{R}$ に対して，

(行列の和)　$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{ij}$,　(行列のスカラー倍)　$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{ij}$

が定義され，上記の (1)〜(8) が成り立つ.

[0] (1)〜(8) の性質のことを**ベクトル空間の公理**という.

[4] ベクトル $\mathbb{a}'$ は $\mathbb{a}$ に対してただ一つ決まる．この $\mathbb{a}'$ を $\mathbb{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\mathbb{a}$ と表す.

3.2 1 次結合，部分空間

定義【1 次結合】

ベクトル空間 V のベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ とスカラー (実数) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$$

を $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \cdots, \mathbb{a}_n$ の $\boxed{\text{1 次結合}}$ という.

定義【部分空間】

ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が，V の和とスカラー倍の演算によってベクトル空間になるとき，W を V の $\boxed{\text{部分空間}}$ という.

定理

ベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件は，次の 3 つの条件が成り立つことである.

(1) $W \neq \varnothing$ $(\mathbb{o} \in W)$

(2) $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in W \Rightarrow \mathbb{a} + \mathbb{b} \in W$

(3) $\mathbb{a} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\mathbb{a} \in W$

証明：

W が部分空間ならば (1),(2),(3) は，部分空間・ベクトル空間の定義から成り立つ.

一方で，(1),(2),(3) が成り立つとき，

W 内でベクトル空間の公理 (1),(2),(3),(5),(6),(7),(8) は成り立つ.

(4) については $-\mathbb{a} = (-1)\,\mathbb{a} \in W$ より成り立つ. □

3.3 部分空間の例，生成される部分空間 $S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$，解空間

定義

ベクトル空間 V のベクトルを $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n$ とする．

$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n$ の 1 次結合全体の集合を $S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$ と表す．すなわち

$$S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n] := \{c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

系

V : ベクトル空間，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n \in V$ に対して，

$S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$ は V の部分空間である．

また，$S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$ を $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n$ によって **生成される** 部分空間という．

証明：

$^\forall\mathbb{x}, ^\forall\mathbb{y} \in S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$, $^\forall\lambda \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $0\mathbb{a}_i = \mathbb{o} \in S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$.

(2) $\mathbb{x} = x_1\mathbb{a}_1 + x_2\mathbb{a}_2 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n$, $\mathbb{y} = y_1\mathbb{a}_1 + y_2\mathbb{a}_2 + \cdots + y_n\mathbb{a}_n$ と表せる．

よって $\mathbb{x} + \mathbb{y} = (x_1 + y_1)\mathbb{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathbb{a}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbb{a}_n \in S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$.

(3) $\lambda\mathbb{x} = \lambda(x_1\mathbb{a}_1 + x_2\mathbb{a}_2 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n)$

$\qquad = (\lambda x_1)\mathbb{a}_1 + (\lambda x_2)\mathbb{a}_2 + \cdots + (\lambda x_n)\mathbb{a}_n \in S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$.

よって部分空間であることの 3 条件を満たしているので

$S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \dots, \mathbb{a}_n]$ は V の部分空間である． □

定義

$A : m \times n$ 行列とする．

$$W = \{\, \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o} \,\}$$

を連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の **解空間** という．

系

$\mathbb{R}^n \supset W = \{\, \mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{o} \,\}$: 解空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

証明：

$^\forall\mathbb{x}, ^\forall\mathbb{y} \in W$, $^\forall\lambda \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $A\mathbb{o} = \mathbb{o}$ より $\mathbb{o} \in W$.

(2) $A(\mathbb{x} + \mathbb{y}) = A\mathbb{x} + A\mathbb{y} = \mathbb{o} + \mathbb{o} = \mathbb{o}$ より $\mathbb{x} + \mathbb{y} \in W$.

(3) $A(\lambda\mathbb{x}) = \lambda A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{o} = \mathbb{o}$ より $\lambda\mathbb{x} \in W$.

よって解空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である． □

3.4　1 次関係，1 次独立と 1 次従属

定義【1 次関係】

ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ が

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

を満たすとき，この式をベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ の $\boxed{\text{1 次関係}}$ という．特に

$$0\mathbb{a}_1 + 0\mathbb{a}_2 + \cdots + 0\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

を自明な 1 次関係という．

定義【1 次独立】

ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は，次の条件を満たすとき，$\boxed{\text{1 次独立}}$ [1] という．

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

が成り立つのは，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のときのみである．

定義【1 次従属】

ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ が 1 次独立でないとき，$\boxed{\text{1 次従属}}$ であるという．すなわち，

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_n$ のなかで少なくとも 1 つは 0 でないものがあるときのことをいう．

例（1 次独立・1 次従属）

(i) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ について，$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3 = \mathbb{o}$ とすると，

$\begin{pmatrix} 3c_1 \\ 7c_2 \\ 4c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ であるから，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ は 1 次独立．

(ii) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2 + \mathbb{a}_3 = \mathbb{o}$ となるから，
$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ は 1 次従属．

---

[1] 1 次独立とは言い換えるとベクトルがすべて異なる方向に向いているということである．

3.5 連立 1 次方程式と 1 次関係

定理

m 項数ベクトル $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は,

$$\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1, & \mathrm{a}_2, & \cdots, & \mathrm{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \text{ の解が, } \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \text{ のみであることである.}$$

証明：

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{a}_1, & \mathrm{a}_2, & \cdots, & \mathrm{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=c_1\mathrm{a}_1+c_2\mathrm{a}_2+\cdots+c_n\mathrm{a}_n \text{ であるから.} \quad \square$$

系

(1) ベクトル $\mathbb{o}$ は 1 次従属.

$\because$

$1\mathbb{o}=\mathbb{o}$ $\square$

(2) ベクトル $\mathrm{a} \neq \mathbb{o}$ は 1 次独立.

$\because$

$c\mathrm{a}=\mathbb{o}$ で $c \neq 0$ と仮定すると, $\mathrm{a}=\dfrac{1}{c}\cdot c\mathrm{a}=\mathbb{o}$ となり矛盾する.

よって $\mathrm{a} \neq \mathbb{o}$ は 1 次独立. $\square$

3.6　1 次独立・1 次従属の基本的性質 (1)

定理 1

ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ のうち，1 つのベクトルが残りのベクトルの 1 次結合として書ける.
$\Longleftrightarrow$ ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次従属.

証明：
($\Rightarrow$)
ある $\mathbb{a}_i$ $(i \in (1, n) \subset \mathbb{N})$ が残りのベクトルの 1 次結合で，

$$\mathbb{a}_i = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$$

とかけたとする．すると，

$$1\mathbb{a}_i + (-c_1)\mathbb{a}_1 + \cdots + (-c_n)\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

であるから $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次従属．$i = 1, n$ の場合も同様の議論より o.k.

($\Leftarrow$)
$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ が 1 次従属ならば，1 次関係

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$$

の中に少なくとも 1 つ 0 でない c_i $(i \in (1, n) \subset \mathbb{N})$ がある．よって，

$$\mathbb{a}_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right)\mathbb{a}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_i}\right)\mathbb{a}_n$$

と 1 次結合の式で書ける．$i = 1, n$ の場合も同様の議論より o.k.　□

定理 2

ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_s$ について
(1) $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r$ $(r < s)$ が 1 次従属 $\Rightarrow$ $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_s$ は 1 次従属.
(2) $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_s$ が 1 次独立 $\Rightarrow$ $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r$ $(r < s)$ は 1 次独立.

証明：(2) は (1) の対偶であるから (1) を示す.
仮定より，

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_r\mathbb{a}_r = \mathbb{o}\ (\text{ある } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \text{ で } c_i \neq 0)$$

となるから，

$$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_r\mathbb{a}_r + 0\mathbb{a}_{r+1} + \cdots + 0\mathbb{a}_s = \mathbb{o}\ (\text{ある } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \text{ で } c_i \neq 0)$$

よって，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_s$ は 1 次従属である.　□

3.7　1次独立・1次従属の基本的性質 (2)【重要】

定理 1

ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ に対して，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が1次独立で，$\mathbb{a}, \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が1次従属ならば，
$\mathbb{a}$ は $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ の1次結合として書ける．

証明：
仮定より, $\mathbb{a}, \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は1次従属なので

$$c\mathbb{a} + c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o} \text{ (ある } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \text{ で } c_i \neq 0 \text{ または } c \neq 0)$$

ここで $c = 0$ とすると

$$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o} \text{ (ある } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \text{ で } c_i \neq 0)$$

となり，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ が1次独立であることに矛盾.
よって $c \neq 0$ のとき

$$\mathbb{a} = \left(-\frac{c_1}{c}\right)\mathbb{a}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c}\right)\mathbb{a}_n$$

と表せる．□

定理 2[1)]

n 次正方行列 A の列ベクトルを $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ とする．

$$A : \text{正則} \iff \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n \text{は1次独立}$$

証明：
$(\Rightarrow)$ A が正則ならば，$A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=\mathbb{x}} = \mathbb{o}$ は自明な解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{x} = \mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を持つ．

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$ と表せるから，$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は1次独立.

$(\Leftarrow)$ 対偶「A が正則でない $\Rightarrow \mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は1次従属.」を示す.
A が正則でないので $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は自明でない解を持つ．すなわち，$A\mathbb{x} = x_1\mathbb{a}_1 + \cdots + x_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$
のうちで少なくとも一つは0でない x_i がある．よって $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は1次従属．　□

---

1) 主張は **3.5** の定理と同じである．

3.8 1 次独立なベクトルたちと行列の関係

定理

$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は 1 次独立なベクトル, A は $m \times n$ 行列とする.

$$\begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}\mathbb{o}, & \cdots & , \mathbb{o}\end{pmatrix} \Longrightarrow A = O \text{（ゼロ行列）}$$

証明：

$A = (a_{ij})_{ij}$ とすると,

$$\begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{o}, & \cdots & , \mathbb{o}\end{pmatrix}$$

両辺の第 j 列目を比較すると,

$$a_{1j}\mathbb{u}_1 + \cdots + a_{mj}\mathbb{u}_m = \mathbb{o}$$

仮定より, $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は 1 次独立であるから, $a_{1j} = \cdots = a_{mj} = 0$.

これはすべての j について成り立つので, すべての $a_{ij} = 0$. □

系

$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は 1 次独立なベクトル, A, B は $m \times n$ 行列とする.

$$\begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} B \Longrightarrow A = B$$

$\because$

$$\begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} B$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} A - \begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} B &= \begin{pmatrix}\mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m\end{pmatrix} (A - B) \\ &= \begin{pmatrix}\mathbb{o}, & \cdots & , \mathbb{o}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

上記の定理より $A - B = O$. よって $A = B$. □

3.9 ベクトル空間の基底 (ベース), 標準基底

定義【基底】

ベクトル空間 V のベクトル $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は次の 2 条件を満たすとき, V の $\boxed{\text{基底 (ベース)}}$ [1]という.

(1) $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次独立である.

(2) V の任意のベクトル $\mathbb{x}$ は, $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ の 1 次結合で表せる.

このことを, $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ は V を**生成する**という.

定義【標準基底】

$$\mathbb{R}^n \text{ の元 } \mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行目 } ,..., \mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に対して}$$

この $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \ldots, \mathbb{e}_i, \ldots, \mathbb{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の $\boxed{\text{標準基底}}$ [2]という.

---

[1] 注意 : ベクトル空間の基底はたくさんある.

[2] 1 年生の内容でもでてきた. 復習しておこう.

3.10　基底であるための必要十分条件

定理

$\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ に対して，$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1, & \mathbb{a}_2, & \cdots & , \mathbb{a}_n \end{pmatrix}$ とする．

$$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n \text{が } \mathbb{R}^n \text{の基底} \iff A : \text{正則} \ (\Leftrightarrow A \text{ の簡約化が } E_n)$$

証明：

$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n = \mathbb{o}$ とする．

$(\Rightarrow)$

対偶「A が正則でない $\Rightarrow \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底でない.」を示す.

A は正則でないから，**2.1** の定理より，$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつ.

よって $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次従属となり，基底でない.

$(\Leftarrow)$

A は正則より，

$A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，

$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ となるので $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次独立.

次に，$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル $\mathbb{x}$ に対して，$\mathbb{x} = d_1\mathbb{a}_1 + d_2\mathbb{a}_2 + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ とすると，

$A\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \mathbb{x}$ と書ける．両辺の左から A^{-1} をかけると，$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbb{x}$ となり，

$\mathbb{x} = d_1\mathbb{a}_1 + d_2\mathbb{a}_2 + \cdots + d_n\mathbb{a}_n$ を満たす $d_1, d_2, \ldots, d_n$ がある.

したがって $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である.　□

3.11 基底に含まれるベクトルの個数

定理 1

ベクトル空間 V の 2 つの組 $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ と $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_m$ が，次の条件を満たすとき，
$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は 1 次従属である．
条件 (1) $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ の各ベクトルは $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_m$ の 1 次結合で表せる．
条件 (2) $n > m$

証明：
条件 (1) より，

$$\begin{pmatrix}\mathbb{b}_1, & \cdots & ,\mathbb{b}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{a}_1, & \cdots & ,\mathbb{a}_m\end{pmatrix}$$

を満たす $m \times n$ 行列 A が存在．
また，条件 (2) より $\operatorname{rank} A \leqq m < n$ であるから，連立 1 次方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{o}$ は $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ でない解をもつ．その解を，

$$\mathbb{x} = \mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad ({}^\exists i \in [1, n] \subset \mathbb{N}, c_i \neq 0)$$

とおくと，

$$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_n\mathbb{b}_n = \begin{pmatrix}\mathbb{b}_1, & \cdots & ,\mathbb{b}_n\end{pmatrix}\mathbb{c} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}\mathbb{a}_1, & \cdots & ,\mathbb{a}_m\end{pmatrix}\underbrace{A\mathbb{c}}_{=\mathbb{o}} = \mathbb{o}$$

となるので，$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は 1 次従属である． □

定理 2

ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数は基底の取り方によらず一定である．

証明：
$\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_m$ と $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ がともに V の基底であるとする．
$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は V のベクトルであるから $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_m$ の 1 次結合で表せる．
$n > m$ の場合，上記の定理より $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ は 1 次従属となるので基底であることに矛盾する．すなわち $n \leqq m$ でなければならない．
また，逆に $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_m$ と $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ をとりかえて同様の議論を行うと $m \leqq n$ を得る．
したがって $m = n$ であるから，ベクトル空間 V の基底に含まれるベクトルの個数は基底の取り方によらず一定である． □

3.12　ベクトル空間の次元

定義

ベクトル空間 V の基底を $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ とするとき，V の $\boxed{\text{次元}}$[1]は n であるといい，

$$\dim V = n$$

で表す．$\dim\{\mathbb{o}\} = 0$ と定める．

定理

V をベクトル空間とするとき，

$$\dim V = (V \text{ のベクトルの 1 次独立な最大個数})$$

<u>証明：</u>

$\dim V = n$ とすると，V には基底 $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ がある．V の $n+1$ 個以上のベクトルは $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ の 1 次結合でかけるから，**3.11** の定理 1 より 1 次従属である．
よって V の 1 次独立な最大個数は n である．
一方で，V のベクトルの 1 次独立な最大個数が n で，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ が 1 次独立であるとする．
V の任意のベクトル $\mathbb{x}$ に対して，$\mathbb{x}, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は 1 次従属なので **3.7** の定理より，
$\mathbb{x}$ は $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ の 1 次結合で表せる．よって $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_n$ は基底となり，$\dim V = n$　□

系

$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r \in V$ に対して，
$W = S[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r]$ の次元は，$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r$ のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数である．

$\because$
3.3 の系より W は V の部分空間である．また上記の定理より．　□

この証明は上記の定理とほぼ同じであるため，**読者の演習問題**とする．

[1] 次元は英語で dimension (ディメンション) という．

3.13 部分空間と次元の関係，次元 (dim) と階数 (rank)

定理 1

W をベクトル空間 V の部分空間とする．このとき，

$$\dim W \leqq \dim V$$

また，

$$W = V \Longleftrightarrow \dim W = \dim V$$

<u>証明：</u>
W の基底 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は V の 1 次独立なベクトルの 1 部であるから，$m = \dim W \leqq \dim V$.
$(\Rightarrow)$ $W = V$ より，W の基底の個数を m 個とすると，V の基底の個数も m 個である．
よって $\dim W = \dim V$.
$(\Leftarrow)$ W の基底を $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ とすると，$\dim W = \dim V$ と **3.11** の定理 2 より，
$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は V の基底である．よって，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_m$ は V を生成するから $W = V$. □

定理 2

V をベクトル空間，$\mathbb{u}_1, , \ldots, \mathbb{u}_m$ をその基底とする．ここで $W = S[\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n]$ $(\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n \in V)$ とすると，$m \times n$ 行列 A を用いて $\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m \end{pmatrix} A$ と表す．このとき，

$$\dim\ W = \operatorname{rank} A$$

<u>証明：</u>
$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1, & \cdots & , \mathbb{a}_n \end{pmatrix}$，$A$ の簡約化 B を $B = \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1, & \cdots & , \mathbb{b}_n \end{pmatrix}$ とする．

$$c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1, & \cdots & , \mathbb{u}_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

なので，**3.8** の定理より，

$$c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + b_n\mathbb{b}_n = \mathbb{o}$$

となるから，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ の 1 次独立，1 次従属の関係は $\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ の 1 次独立，1 次従属の関係と対応する．
$\mathbb{b}_1, \ldots, \mathbb{b}_n$ のうちで 1 次独立なベクトルの最大個数は **1.4**の系より $\operatorname{rank} A$ であるから，
$\dim\ V = \operatorname{rank} A$. □

3.14　線形写像

定義【線形写像】

V, W をベクトル空間とする．写像 $f : V \to W$ が **線形写像（Linear Mapping）** とは

(LM1)　$f(\mathbb{x}+\mathbb{y}) = f(\mathbb{x}) + f(\mathbb{y})$ $(\mathbb{x}, \mathbb{y} \in V)$

(LM2)　$f(k\mathbb{x}) = kf(\mathbb{x})$　　（$\mathbb{x} \in V$, $k \in \mathbb{R}$）が成り立つことをいう．

定理

$f : V \to W$; 線形写像について

$$f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$$

証明：

$f(\mathbb{o}) = f(\mathbb{o}+\mathbb{o}) \overset{\text{(LM1)}}{=} f(\mathbb{o}) + f(\mathbb{o}) = \mathbb{o} \cdots\cdots ((\mathrm{ex})x = x + x \therefore x = 0)$

$f(\mathbb{o}) = f(0\mathbb{o}) \overset{\text{(LM2)}}{=} 0f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$　□

定理

$f : V \to W,\ g : W \to X$; 線形写像とするとき，合成写像

$$g \circ f : V \to X,\ (g \circ f)(\mathbb{x}) = g(f(\mathbb{x}))\ (\mathbb{x} \in V)$$

は線形写像である．

証明：

${}^{\forall}\mathbb{x}, \mathbb{y} \in V,\ {}^{\forall}k \in \mathbb{R}$ について

$(g \circ f)(\mathbb{x}+\mathbb{y}) = g(f(\mathbb{x}+\mathbb{y})) \overset{*1}{=} g(f(\mathbb{x}) + f(\mathbb{y}))$

$\overset{*2}{=} g(f(\mathbb{x})) + g(f(\mathbb{y})) = (g \circ f)(\mathbb{x}) + (g \circ f)(\mathbb{y})$ よって $g \circ f$ は (LM1) を満たす.$\cdots$[1]

$(g \circ f)(k\mathbb{x}) = g(f(k\mathbb{x})) \overset{*3}{=} g(kf(\mathbb{x})) \overset{*4}{=} kg(f(x)) = k(g \circ f)(\mathbb{x})$

よって $g \circ f$ は (LM2) を満たす.$\cdots$[2]

[1],[2] より $g \circ f$ は線形写像である．□

*1 f:線形 (LM1) より
*2 g:線形 (LM1) より
*3 f:線形 (LM2) より
*4 g:線形 (LM2) より

3.15　線形写像の像空間 (Im) と核空間 (Ker)

定義【像空間・核空間】[1)]

線形写像 $f : V \to W$ に対し，

$$\mathrm{Im}\, f := \{\, f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V \,\}$$

を f の $\boxed{\text{像空間}}$ という．$\mathrm{Im}\, f = f(V)$ と書くこともある．また，

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\, \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \}$$

を f の $\boxed{\text{核空間 (カーネル)}}$ という．

定理

$f : V \to W$ を線形写像とするとき，次が成り立つ．
(1) $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．
(2) $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．

<u>証明：</u>
(1)
i) $\mathbf{o} = f(\mathbf{o}) \in \mathrm{Im}\, f$.
ii) ${}^\forall f(\mathbf{x}), {}^\forall f(\mathbf{y}) \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \mathrm{Im}\, f$.
iii) ${}^\forall f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}\, f, {}^\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f(\mathbf{x}) = f(\lambda \mathbf{x}) \in \mathrm{Im}\, f$.
よって，i),ii),iii) より $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．
(2)
i) $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ より，$\mathbf{o} \in \mathrm{Ker}\, f$.
ii) ${}^\forall \mathbf{x}, {}^\forall \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると，$f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ かつ $f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$.
$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ より，$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f$.
iii) ${}^\forall \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f, {}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ とすると，$f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$. $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda\, \mathbf{o} = \mathbf{o}$. $\therefore \lambda \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f$.
よって，i),ii),iii) より $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．　□

[1)] 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対応する行列を A とすると，
$\mathrm{Im} A = \{\, A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$, $\mathrm{Ker} A = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{o} \,\}$ と表すこともある．

3.16 線形写像の基本定理 (次元定理)

線形写像の基本定理 (次元定理)

線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

証明：

$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = s, \dim(\mathrm{Im}\, f) = r$ とする.
また, $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底を $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_r$ とする.
各 $\mathbb{w}_i$ に対して, $f(\mathbb{u}_i) = \mathbb{w}_i$ を満たす $\mathbb{u}_i \in V$ $(i = 1, \ldots, r)$ が存在する. このとき,
$s + r$ 個のベクトル $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ が V の基底になることを示せばよい.
まず, 基底の定義の 1 つ目の条件, すなわち $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ が V を生成する
($\Leftrightarrow$ V の任意のベクトル $\mathbb{x}$ が $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ の 1 次結合で表せる) ことを示す.
${}^\forall\mathbb{x} \in V$ とすると, $f(\mathbb{x}) \in \mathrm{Im}\, f$ で, $f(\mathbb{x})$ は $\mathrm{Im}\, f$ の基底の 1 次結合で表せるので,
$f(\mathbb{x}) = b_1\mathbb{w}_1 + \cdots + b_r\mathbb{w}_r$ $(b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R})$ とかける.

$$\begin{aligned} f(\mathbb{x} - b_1\mathbb{u}_1 - \cdots - b_r\mathbb{u}_r) &= f(\mathbb{x}) - b_1 f(\mathbb{u}_1) - \cdots - b_r f(\mathbb{u}_r) \\ &= f(\mathbb{x}) - b_1\mathbb{w}_1 - \cdots - b_r\mathbb{w}_r \\ &= f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{x}) \ = \ \mathbb{o} \end{aligned}$$

より, $\mathbb{x} - b_1\mathbb{u}_1 - \cdots - b_r\mathbb{u}_r \in \mathrm{Ker}\, f$ となる.
ゆえに $\mathbb{x} - b_1\mathbb{u}_1 - \cdots - b_r\mathbb{u}_r$ は $\mathrm{Ker}\, f$ の基底の 1 次結合で表せるから,

$$\mathbb{x} - b_1\mathbb{u}_1 - \cdots - b_r\mathbb{u}_r = a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_s\mathbb{v}_s \qquad (a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R})$$

すなわち, $\mathbb{x} = a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_s\mathbb{v}_s + b_1\mathbb{u}_1 + \cdots + b_r\mathbb{u}_r$
よって, V の任意のベクトル $\mathbb{x}$ は $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ の 1 次結合で表せる.
次に, 基底の定義の 2 つ目の条件, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ が 1 次独立であることを示す.

$$a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_s\mathbb{v}_s + b_1\mathbb{u}_1 + \cdots + b_r\mathbb{u}_r = \mathbb{o} \qquad (a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}) \cdots [1]$$

とする. 両辺を f でうつすと,[1] $f(a_j\mathbb{v}_j) = a_j f(\mathbb{v}_j) = \mathbb{o}, f(b_i\mathbb{u}_i) = b_i f(\mathbb{u}_i) = b_i\mathbb{w}_i$ となるので,

$$b_1\mathbb{w}_1 + \cdots + b_r\mathbb{w}_r = \mathbb{o}$$

$\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_r$ は基底より 1 次独立だから, $b_1 = \cdots = b_r = 0$. これを [1] に代入すると,

$$a_1\mathbb{v}_1 + \cdots + a_s\mathbb{v}_s = \mathbb{o}$$

$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s$ は基底より 1 次独立だから, $a_1 = \cdots = a_s = 0$.
したがって, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ は 1 次独立.
よって $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_s, \mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_r$ は V の基底である. □

---

[1] $j = 1, \ldots, s$

3.17　線形写像の表現行列

定義【線形写像の表現行列】

V, W : ベクトル空間, V の基底を $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_n$, W の基底を $\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \ldots, \mathbb{w}_m$ とする.
また, $f : V \to W$ を線形写像とする.
$f(\mathbb{v}_1), f(\mathbb{v}_2), \ldots, f(\mathbb{v}_n)$ は W のベクトルなので, $\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \ldots, \mathbb{w}_m$ の 1 次結合で表せる.

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbb{v}_1) & = & a_{11}\mathbb{w}_1 + a_{21}\mathbb{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbb{w}_m \\ f(\mathbb{v}_2) & = & a_{12}\mathbb{w}_1 + a_{22}\mathbb{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbb{w}_m \\ & \vdots & \\ f(\mathbb{v}_n) & = & a_{1n}\mathbb{w}_1 + a_{2n}\mathbb{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbb{w}_m \end{array}$$

と表したとき,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\big(f(\mathbb{v}_1), \quad f(\mathbb{v}_2), \quad \cdots \quad , f(\mathbb{v}_n)\big) = \big(\mathbb{w}_1, \quad \mathbb{w}_2, \quad \cdots \quad , \mathbb{w}_m\big)\, A$$

と表せる. この $m \times n$ 行列 A を, $\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{w}_1, \mathbb{w}_2, \ldots, \mathbb{w}_m$ に関する f の $\boxed{\text{表現行列}}$[1]という.

[1] 1 年生で学んだ表現行列は厳密に言うと標準基底に関する表現行列である.

3.18　表現行列の意味

定理

V, W : ベクトル空間, V の基底を $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$, W の基底を $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m$ とする.
また, $f : V \to W$ を線形写像とする.
また, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m$ に関する表現行列を $A = (a_{ij})_{ij} : m \times n$ 行列とする.
V の任意のベクトル $\mathbb{x} = x_1\mathbb{v}_1 + \cdots + x_n\mathbb{v}_n$ を f でうつすと,

$$f(\mathbb{x}) = f(\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\mathbb{w}_1, & \cdots & , \mathbb{w}_m\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

<u>証明 :</u>

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{x}) &= f(x_1\mathbb{v}_1 + \cdots + x_n\mathbb{v}_n) \\
&= x_1 f(\mathbb{v}_1) + \cdots + x_n f(\mathbb{v}_n) \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbb{v}_j)\right) \\
&= x_1(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\mathbb{w}_i) + \cdots + x_n(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\mathbb{w}_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbb{w}_i \;=\; \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\mathbb{w}_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{w}_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \\
&= \mathbb{w}_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + \mathbb{w}_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \\
&= \begin{pmatrix}\mathbb{w}_1, & \cdots & , \mathbb{w}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathbb{w}_1, & \cdots & , \mathbb{w}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\mathbb{w}_1, & \cdots & , \mathbb{w}_m\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \qquad \square
\end{aligned}$$

3.19 基底変換の行列

定理 1

ベクトル空間 V の 2 組の基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n$ をとる．このとき，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}'_1, & \cdots & , \mathbb{v}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} P$$

を満たす n 次正則行列が存在する．
また，この P を $\boxed{\text{基底変換 } \{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \to \{\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n\} \text{ の行列}}$ という．

証明：
仮定より，
各[1]$\mathbb{v}'_i$ は $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ の 1 次結合で表せ，各[1]$\mathbb{v}_i$ は，$\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n$ の 1 次結合で表せるので，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}'_1, & \cdots & , \mathbb{v}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} P \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{v}'_1, & \cdots & , \mathbb{v}'_n \end{pmatrix} Q \tag{2}$$

となる n 次正方行列 P, Q が存在する．(1) の式を (2) の式に代入すると，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} PQ$$

また，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots, \mathbb{v}_n \end{pmatrix} E_n = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots, \mathbb{v}_n \end{pmatrix} E_n = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \cdots & , \mathbb{v}_n \end{pmatrix} PQ$$

よって，**3.8** の系より $E_n = PQ$ となるので，P は正則． □

[1] $i = 1, \ldots, n$

3.20 基底変換の表現行列

定理

ベクトル空間 V の 2 組の基底 $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n$ をとる.
ベクトル空間 W の 2 組の基底 $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m$ と $\mathbb{w}'_1, \ldots, \mathbb{w}'_m$ をとる.
基底変換 $\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\} \to \{\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n\}$ の行列を P,
基底変換 $\{\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m\} \to \{\mathbb{w}'_1, \ldots, \mathbb{w}'_m\}$ の行列を Q とする.
また, $f : V \to W$ を線形写像, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ と $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_m$ に関する f の表現行列を A, $\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n$ と $\mathbb{w}'_1, \ldots, \mathbb{w}'_m$ に関する f の表現行列を B とする. このとき, $B = Q^{-1}AP$.

証明 :
仮定と上記の定理 1 より, P, Q は,

$$\left(\mathbb{v}'_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{v}'_n\right) = \left(\mathbb{v}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{v}_n\right) P \cdots [1]$$

$$\left(\mathbb{w}'_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}'_m\right) = \left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) Q \cdots [2]$$

を満たす正則行列である. また表現行列の定義より,

$$\left(f(\mathbb{v}_1), \quad \cdots \quad, f(\mathbb{v}_n)\right) = \left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) A \cdots [3]$$

$$\left(f(\mathbb{v}'_1), \quad \cdots \quad, f(\mathbb{v}'_n)\right) = \left(\mathbb{w}'_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}'_m\right) B \cdots [4]$$

である. 便宜上 $P = (p_{ij})_{ij}$ とする. ここで [4], [2] より,

$$\left(f(\mathbb{v}'_1), \quad \cdots \quad, f(\mathbb{v}'_n)\right) \underset{[4]}{=} \left(\mathbb{w}'_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}'_m\right) B \underset{[2]}{=} \left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) QB \cdots (*1)$$

一方, 線形写像の定義と [1], [3] より,

$$\begin{array}{rcl} \left(f(\mathbb{v}'_1), \quad \cdots \quad, f(\mathbb{v}'_n)\right) & \overset{[1]}{=} & \left(f(p_{11}\mathbb{v}_1 + \cdots + p_{n1}\mathbb{v}_n), \quad \cdots \quad, f(p_{1n}\mathbb{v}_1 + \cdots + p_{nn}\mathbb{v}_n)\right) \\ & = & \left(p_{11}f(\mathbb{v}_1) + \cdots + p_{n1}f(\mathbb{v}_n), \quad \cdots \quad, p_{1n}f(\mathbb{v}_1) + \cdots + p_{nn}f(\mathbb{v}_n)\right) \\ & = & \left(f(\mathbb{v}_1), \quad \cdots \quad, f(\mathbb{v}_n)\right) P \\ & \overset{[3]}{=} & \left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) AP \cdots (*2) \end{array}$$

よって $(*1) = (*2)$ であるから,

$$\left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) QB = \left(\mathbb{w}_1, \quad \cdots \quad, \mathbb{w}_m\right) AP$$

なので, **3.8** の系より, $QB = AP$.
Q は正則なので, 両辺の左から Q^{-1} をかけると, $B = Q^{-1}AP$. □

系[1]

$f : V \to V$ を線形写像とする.
$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ に関する f の表現行列を A, $\mathbb{v}'_1, \ldots, \mathbb{v}'_n$ に関する f の表現行列を B とすると, $B = P^{-1}AP$.

[1] 証明は上記の定理より得られる.

3.21 同型写像の定義・性質

定義【同型写像】

V, W : ベクトル空間とする.
線形写像 $f : V \to W$ が**全単射**であるとき, f を V から W への $\boxed{\text{同型写像}}$ という.
また, 同型写像 $f : V \to W$ が存在するとき, V は W に**同型である**といい, $V \cong W$ と書く.

定理

V, W : ベクトル空間とする. 同型写像 $f : V \to W$ は, 1 次独立, 1 次従属, 基底といった性質を保つ.

証明 :
V の 1 次独立なベクトルを $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ とすると,

$$c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o} \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0 \cdots [1]$$

である. ここで $c_1 f(\mathbb{v}_1) + \cdots + c_n f(\mathbb{v}_n) = \mathbb{o}$ を仮定する. f は同型写像 (線形) であるから,

$$c_1 f(\mathbb{v}_1) + \cdots + c_n f(\mathbb{v}_n) = f(c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n)\,,\ \mathbb{o} = f(\mathbb{o})$$

すなわち,

$$f(c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n) = f(\mathbb{o})$$

である. また, f は全単射であるから, 特に単射であるから,

$$c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n = \mathbb{o}$$

したがって [1] より, $c_1 = \cdots = c_n = 0$ となり, $f(\mathbb{v}_1), \ldots, f(\mathbb{v}_n)$ は 1 次独立.
1 次従属性については,
同型写像に限らず, 一般の線形写像で成り立つことが上の証明からわかる.
また, $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ を V の基底とすると, V の任意のベクトル $\mathbb{v}$ は, $\mathbb{v} = d_1\mathbb{v}_1 + \cdots + d_n\mathbb{v}_n$
と表せる. また, f は全単射であるから, 特に全射であるから, ${}^\forall\mathbb{w} \in W, {}^\exists\mathbb{v} \in V$ s.t. $\mathbb{w} = f(\mathbb{v})$.
$\mathbb{v}$ は任意のベクトルであるから, 当然, あるベクトルでも成り立つ. すなわち,

$$\mathbb{w} = f(\mathbb{v}) = f(d_1\mathbb{v}_1 + \cdots + d_n\mathbb{v}_n) = d_1 f(\mathbb{v}_1) + \cdots + d_n f(\mathbb{v}_n)$$

よって, W の任意のベクトルが $f(\mathbb{v}_1), \ldots, f(\mathbb{v}_n)$ の 1 次結合で表せる.
また, 1 次独立性は前半の証明より. よって $f(\mathbb{v}_1), \ldots, f(\mathbb{v}_n)$ は基底である. □

3.22　同型写像であるための必要十分条件

定理

V, W : ベクトル空間とする．このとき，

$$f : V \to W \text{ が同型写像} \iff \dim V = \dim W$$

証明：

$(\Rightarrow)$

$f : V \to W$ が同型写像ならば，**3.21** の定理より基底を保つので，$\dim V = \dim W$.

$(\Leftarrow)$

$\dim V = \dim W = n$ とする．

ここで V の基底を，$\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$，$W$ の基底を，$\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_n$ とする．

V の任意のベクトル $\mathbb{x}$ は，$\mathbb{x} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$ と表せる．そこで，$f(\mathbb{x}) := c_1\mathbb{w}_1 + \cdots + c_n\mathbb{w}_n$ とし，写像 $f : V \to W$ を定義する．そして，V の任意のベクトル $\mathbb{x}, \mathbb{y}$ を用いて，

$$\mathbb{x} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n,\ \ \mathbb{y} = d_1\mathbb{v}_1 + \cdots + d_n\mathbb{v}_n$$

と表すと，$f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y})$ を仮定すると，

$$c_1\mathbb{w}_1 + \cdots + c_n\mathbb{w}_n = d_1\mathbb{w}_1 + \cdots + d_n\mathbb{w}_n$$

である．右辺を左辺に移行すると，

$$(c_1 - d_1)\mathbb{w}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbb{w}_n = \mathbb{o}$$

となる．仮定より，$\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_n$ は基底であるから 1 次独立より，$c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$ となる．

すなわち，$\mathbb{x} = \mathbb{y}$ となり，$f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y}) \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{y}$ が示せたので，f は単射．

また，W の任意のベクトル $\mathbb{w}$ は $\mathbb{w} = c_1\mathbb{w}_1 + \cdots + c_n\mathbb{w}_n$ と表せる．

ここで V のあるベクトル $\mathbb{x}$ を，

$$\mathbb{x} = c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n$$

とすれば，仮定より，

$$f(\mathbb{x}) = c_1\mathbb{w}_1 + \cdots + c_n\mathbb{w}_n$$

となるので，${}^\forall\mathbb{w} \in W, {}^\exists\mathbb{x} \in V$ s.t. $\mathbb{w} = f(\mathbb{x})$ が示せたので，f は全射である．

よって f は全単射である．

また，${}^\forall\mathbb{x}, {}^\forall\mathbb{y} \in V, {}^\forall\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$f(\mathbb{x}+\mathbb{y}) = (c_1+d_1)\mathbb{v}_1+\cdots+(c_n+d_n)\mathbb{v}_n = c_1\mathbb{v}_1+\cdots+c_n\mathbb{v}_n+d_1\mathbb{v}_1+\cdots+d_n\mathbb{v}_n = f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y})$

$f(\lambda\mathbb{x}) = \lambda c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + \lambda c_n\mathbb{v}_n = \lambda(c_1\mathbb{v}_1 + \cdots + c_n\mathbb{v}_n) = \lambda f(\mathbb{x})$

であるから，f は線形写像である．

したがって f は線形写像かつ全単射であるので同型写像である．　$\square$

3.23　線形写像が単射であるための必要十分条件

定理 1

$$\text{線形写像 } f : V \to W \text{ が単射} \iff \mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$$

証明：

(⇒)

f が単射であるから，V の $\mathbb{o}$ でない任意のベクトル $\mathbb{v}$ に対して，$\mathbb{v} \neq \mathbb{o} \Rightarrow f(\mathbb{v}) \neq f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$

よって $\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$ である．

(⇐)

$\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$ とする．ここで，$\mathbb{x}, \mathbb{y} \in V, f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y}) \Leftrightarrow f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) = \mathbb{o}$ を仮定する．

f は線形であるから，$f(\mathbb{x} - \mathbb{y}) = f(\mathbb{x}) - f(\mathbb{y}) = \mathbb{o}$

すなわち，$\mathbb{x} - \mathbb{y} \in \mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$．ゆえに，$\mathbb{x} - \mathbb{y} = \mathbb{o} \Leftrightarrow \mathbb{x} = \mathbb{y}$

したがって，$f(\mathbb{x}) = f(\mathbb{y}) \Rightarrow \mathbb{x} = \mathbb{y}$ が示せたので，f は単射．　□

定理 2

$f : V \to W$ を線形写像とするとき，

(1) f が単射 $\iff \dim(\mathrm{Im} f) = \dim V$

(2) f が全射 $\iff \dim(\mathrm{Im} f) = \dim W$

証明：

(1) 上記の定理 1 と次元の定義より，

$$f \text{ が単射} \overset{\text{定理 1}}{\iff} \mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\} \overset{\text{定義}}{\iff} \dim(\mathrm{Ker} f) = 0$$

また，**3.16** の線形写像の基本定理より，

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = 0 + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathrm{Im} f) \quad \square$$

(2) **3.15** の定理より $\mathrm{Im} f$ は W の部分空間であるから，**3.13** の定理 1 より，

$$\mathrm{Im} f = W (\text{全射の定義}) \iff \dim(\mathrm{Im} f) = \dim W \quad \square$$

3.24　同型写像の特徴づけ (1)

定理

V, W : ベクトル空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．$\dim V = \dim W$ のとき，次の 3 つは同値である．

(1) f は同型写像　　(2) $\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$　　(3) $\mathrm{Im} f = W$

<u>証明 :</u>

(1)⇒(2)

f は同型写像とする．ここで ${}^\forall \mathbb{v} \in \mathrm{Ker} f$ とすると，$f(\mathbb{v}) = \mathbb{o} = f(\mathbb{o})$.

ここで f は同型写像より全単射であるから，特に単射であるから，$f(\mathbb{v}) = f(\mathbb{o}) \Rightarrow \mathbb{v} = \mathbb{o}$.

よって，$\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$.

(1)⇒(3)

f は同型写像より全単射であるから，特に全射であるから，全射の定義より，$\mathrm{Im} f = W$.

(2)⇒(1)

$\mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$ とすると，**3.23** の定理 1 より，f は単射.

また，**3.16** の線形写像の基本定理より，$\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathrm{Im} f)$.

仮定より，$\dim V = \dim W$ なので，$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim W$. さらに，**3.13** の定理 1 より，

$\mathrm{Im} f = W$ となり，f は全射である．よって f は同型写像である．

(3)⇒(1)

$\mathrm{Im} f = W$ であるから，f は全射．**3.13** の定理 1 と仮定より，$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim W = \dim V$.

また，**3.16** の線形写像の基本定理より，$\dim V = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f) = \dim(\mathrm{Im} f)$

であるから $\dim(\mathrm{Ker} f) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\mathbb{o}\}$.

したがって，**3.23** の定理 1 より f は単射．　□

3.25 同型写像の特徴づけ (2) まとめ

定理 (同型写像の特徴づけ)

A : n 次正方行列とする．また，A に対応する線形写像を $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする．
このとき，次の 5 つは同値である．
(1) A が正則． (2) f_A は同型写像． (3) $\mathrm{Ker} f_A = \{\mathbf{o}\}$． (4) $\mathrm{Im} f_A = \mathbb{R}^n$． (5) $\mathrm{rank} A = n$．

証明：
(1)⇒(2)
A が正則より，$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$. すなわち A に対応する線形写像 f_A に対して，
A^{-1} に対応する線形写像 $f_{A^{-1}}$ がある．

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_{E_n} = \mathrm{id} = f_{E_n} = f_{A^{-1}A} = f_{A^{-1}} \circ f_A$$

であるから，逆写像 $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ が存在したので，f_A は全単射．よって f_A は同型写像．
(2)⇒(1)
f_A は同型写像であるから，全単射なので，
$f_A \circ (f_A)^{-1} = \mathrm{id} = (f_A)^{-1} \circ f_A$ となる逆写像 $(f_A)^{-1}$ が存在．
$(f_A)^{-1}$ に対応する行列を B とすると，$(f_A)^{-1} = f_B$ と表せる．
すると，$f_A \circ f_B = f_{AB} = f_{E_n} = \mathrm{id} = f_{E_n} = f_{BA} = f_B \circ f_A$.
すなわち $AB = E_n = BA$ となり，$A^{-1} = B$ となるので A は正則．
(2),(3),(4) の同値性は **3.24** の定理より．
(1)⇔(5) は **2.1** の定理より． □

4 固有値・固有ベクトル・対角化

4.1 固有値と固有ベクトル

定義 1【固有値・固有ベクトル】

n 次正方行列 A に対して,

$$A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v} \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{C}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{v} \neq \mathbb{o}$$

を満たす λ を A の $\boxed{\text{固有値}}$, $\mathbb{v}(\neq \mathbb{o})$ を A の[1]固有値 λ に属する $\boxed{\text{固有ベクトル}}$ という.

定義 1′【固有値・固有ベクトル】

線形変換 $f : V \to V$ に対して,

$$f(\mathbb{v}) = \lambda\mathbb{v} \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{C}, \mathbb{v} \in V, \mathbb{v} \neq \mathbb{o}$$

を満たす λ を f の $\boxed{\text{固有値}}$, $\mathbb{v}(\neq \mathbb{o})$ を f の固有値 λ に属する $\boxed{\text{固有ベクトル}}$ という.

命題

n 次正方行列 A に対して,

(1) $\mathbb{v}(\neq \mathbb{o})$ が A の固有値 λ に属する固有ベクトル

$\Longleftrightarrow \mathbb{v} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) := \{\, \mathbb{w} : n \text{ 次ベクトル} \mid (A - \lambda E_n)\mathbb{w} = \mathbb{o} \,\}$

(2) λ が A の固有値 $\Longleftrightarrow$[2] $\det(A - \lambda E_n) = 0$

証明 :

(1) $\mathbb{v}$ が λ に属すル固有ベクトル $\overset{\text{定義より}}{\Longleftrightarrow} A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v} \Leftrightarrow A\mathbb{v} - \lambda\mathbb{v} = \mathbb{o}$

$\Leftrightarrow A\mathbb{v} - \lambda E_n\mathbb{v} = (A - \lambda E_n)\mathbb{v} = \mathbb{o} \overset{\mathbf{3.15}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{v} \in \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$

(2) λ が A の固有値であるから, (1) より,

$\mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$ に $\mathbb{o}$ でない元がある. **3.25** の定理より, $(A - \lambda E_n)$ が正則でない.

したがって, $\det(A - \lambda E_n) = 0$. $\square$

---

[1] 固有値は一般に λ で表すことが多い. 今後は, λ としか書かないが暗に固有値 λ の意であるとする.

[2] 今後は, 行列式 $\det(A - \lambda E)$ を $|A - \lambda E|$ と表すことにする

4.2 固有多項式・固有方程式・固有空間

定義

(1) n 次正方行列 A に対し，

$$\varphi_A(t) := |A - tE_n|$$

を A の $\boxed{\text{固有多項式}}$，または**特性多項式**という．

(2) 方程式 $\varphi_A(t) = 0$ を $\boxed{\text{固有方程式}}$ という．

(3) 固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$V(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$$

を A の λ に関する $\boxed{\text{固有空間}}$ [1]という．

系

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \Longleftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$$

$\because$ **4.1** の命題 (2) より． □

定理

A : n 次正方行列とする．A の固有値を λ とする．このとき，$V(\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

<u>証明 :</u>

A に対応する線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする．すると，($A\mathbb{v} = \lambda\mathbb{v} \Leftrightarrow f(\mathbb{v}) = \lambda\mathbb{v}$ より,)

$(A - \lambda E_n)\mathbb{v} = A\mathbb{v} - \lambda E_n\mathbb{v} = f(\mathbb{v}) - \lambda\,\mathrm{id}(\mathbb{v}) = \mathbb{o} \Leftrightarrow f(\mathbb{v}) = \lambda\mathrm{id}(\mathbb{v}) \Leftrightarrow f(\mathbb{v}) = \lambda\mathbb{v}$ より，

$$V(\lambda) = \{\, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbb{v}) = \lambda\mathbb{v} \,\}$$

と表せる．

(i) $f(\mathbb{o}) = \mathbb{o}, \lambda\mathbb{o} = \mathbb{o}$ より $f(\mathbb{o}) = \lambda\mathbb{o}$ を満たすので $\mathbb{o} \in V(\lambda)$

(ii) ${}^\forall\mathbb{v}_1, {}^\forall\mathbb{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ とすると，

$$f(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) = f(\mathbb{v}_1) + f(\mathbb{v}_2) = \lambda\mathbb{v}_1 + \lambda\mathbb{v}_2 = \lambda(\mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2) \qquad \therefore\ \mathbb{v}_1 + \mathbb{v}_2 \in V(\lambda)$$

(iii) ${}^\forall\mathbb{v}_1 \in \mathbb{R}^n, {}^\forall k \in \mathbb{R}$ とすると，

$$f(k\mathbb{v}) = kf(\mathbb{v}) = k\lambda\mathbb{v} = \lambda k\mathbb{v} = \lambda(k\mathbb{v}) \qquad \therefore\ k\mathbb{v} \in V(\lambda)$$

となり，(i),(ii),(iii) より $V(\lambda)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である． □

---

[1] <u>注意</u> : 固有空間は λ に属する<u>固有ベクトルすべてと $\mathbb{o}$</u> からなるベクトル空間である．
また，A に対応する線形写像 $f : V \to V$ を用いて，$V(\lambda) := \{\, \mathbb{v} \in V \mid f(\mathbb{v}) = \lambda\mathbb{v} \,\}$ と表せる．

4.3 行列の対角化, 相異なる固有値の固有ベクトルは 1 次独立

定義【対角化】

n 次正方行列 A が $\boxed{\text{対角化可能}}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \text{ を満たす } n \text{ 次正則行列 } P \text{ が存在.}$$

定理 1

正方行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r$ に属する固有ベクトル $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r$ は 1 次独立.

<u>証明 :</u>

(i) $r = 2$ のとき

$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 = \mathbb{o} \cdots (^*1)$ とおく. この式に左から A をかけると

$A\mathbb{o} = \mathbb{o}$ より $\mathbb{o} = A(c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2) = c_1A\mathbb{a}_1 + c_2A\mathbb{a}_2 = c_1\lambda_1\mathbb{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbb{a}_2 \cdots (^*2)$

($\because \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$は A の固有ベクトルより)

$(^*2) - \lambda_2(^*1) = \mathbb{o} = c_1\lambda_1\mathbb{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbb{a}_2 - c_1\lambda_2\mathbb{a}_1 - c_2\lambda_2\mathbb{a}_2 = c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbb{a}_1$

$\mathbb{a}_1$ は固有ベクトルより $\mathbb{a}_1 \neq \mathbb{o}$, また仮定より $\lambda_1 \neq \lambda_2$ よって $c_1 = 0$

また同様にして $(^*2) - \lambda_1(^*1) = \mathbb{o} = c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbb{a}_2 \quad \therefore c_2 = 0$ 　よって $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2$ は 1 次独立.

(ii) $r - 1$ のとき

固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ が相異なるとき

$c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + \cdots + c_{r-1}\mathbb{a}_{r-1} = \mathbb{o} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-1} = 0$ と仮定する.

(iii) r のとき

$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\mathbb{a}_{r-1} + c_r\mathbb{a}_r = \mathbb{o} \cdots (^*1')$

$A\mathbb{o} = \mathbb{o} = c_1A\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}A\mathbb{a}_{r-1} + c_rA\mathbb{a}_r = c_1\lambda_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\lambda_{r-1}\mathbb{a}_{r-1} + c_r\lambda_r\mathbb{a}_r \cdots (^*2')$

$(^*2') - \lambda_r(^*1')$

$= \mathbb{o} = c_1\lambda_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\lambda_{r-1}\mathbb{a}_{r-1} + c_r\lambda_r\mathbb{a}_r - (c_1\lambda_r\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\lambda_r\mathbb{a}_{r-1} + c_r\lambda_r\mathbb{a}_r)$

$= c_1(\lambda_1 - \lambda_r)\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\mathbb{a}_{r-1}$

ここで (ii) の仮定より $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_{r-1}$ は 1 次独立なので $c_1(\lambda_1 - \lambda_r) = \cdots = c_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$

仮定より $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なるので $c_1 = c_2 = \cdots = c_{r-1} = 0$

よって $(^*1')$ より $c_r\mathbb{a}_r = \mathbb{o}$. ここで固有ベクトルより $\mathbb{a}_r \neq \mathbb{o}$ なので $c_r = 0$

したがって $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_{r-1}\mathbb{a}_{r-1} + c_r\mathbb{a}_r = \mathbb{o} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_{r-1} = c_r = 0$ であるから

$\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \ldots, \mathbb{a}_r$ は 1 次独立.

よって (i),(ii),(iii) より (数学的帰納法より) 成り立つ. 　□

定理 2

n 次正方行列 A の固有方程式 $\varphi_A(t)=0$ が n 個の相異なる解を持つなら，A は対角化可能.

証明：

仮定と **4.2** の系より，n 次正方行列 A は相異なる固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ をもつ.

$\mathbb{v}_i$ を λ_i に属する固有ベクトルとする.（$i=1,\ldots,n$）

4.3 の定理より，$\mathbb{v}_1,\ldots,\mathbb{v}_n$ は 1 次独立で，$P=\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1, & \cdots & ,\mathbb{v}_n\end{pmatrix}$ とおくと，

3.7 の定理 2 より，P は正則である.

よって，$AP=A\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1, & \cdots & ,\mathbb{v}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\mathbb{v}_1, & \cdots & ,A\mathbb{v}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbb{v}_1, & \cdots & ,\lambda_n\mathbb{v}_n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1, & \cdots & ,\mathbb{v}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\quad\therefore\ AP=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$

P は正則なので，両辺の左から P^{-1} をかけると，

$P^{-1}AP=P^{-1}P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=E_n\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\quad\square$

4.4 固有値の重複度

定義

$A : n$ 次正方行列とする．$\varphi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdots (\lambda_s - t)^{k_s}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ は相異なるとする．

また，$k_1, \ldots, k_s \geqq 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} k_i = k_1 + \cdots + k_s = n$ とする．このとき，

k_i を固有値 λ_i の $\boxed{\text{重複度}}$ という．

補題

V を n 次元ベクトル空間とする．V の 1 次独立なベクトルの組 $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r$ $(r < n)$ をとると，$n - r$ 個のベクトル $\mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ を選んで，$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ が V の基底となるようにできる．

証明：

V の基底を $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ とする．

$r + n$ 個のベクトル $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ の中から，この順番に 1 次独立なベクトルを選ぶ．

その結果を，

$$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{v}_{i_1}, \ldots, \mathbb{v}_{i_s}$$

とする．すると，これらのベクトルは 1 次独立であるから，残りの任意のベクトル $\mathbb{v}_j$ は **3.7** の定理 1 より $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{v}_{i_1}, \ldots, \mathbb{v}_{i_s}$ の 1 次結合で表せる．

よって，$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{v}_{i_1}, \ldots, \mathbb{v}_{i_s}$ は V の基底となる．また，**3.11** の定理 2 より，$r + s = n$ であるから $s = n - r$ となる．したがって，$\mathbb{v}_{i_1}, \ldots, \mathbb{v}_{i_s}$ を $\mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ とおけばよい． □

4.5　行列の相似

定義【行列の相似】

n 次正方行列 A, B に対して,

$$B = P^{-1}AP$$

となる正則行列 P が存在するとき, A と B は $\boxed{\text{相似である}}$ という.

定理

(1) 三角行列の固有値は重複度も込めてその対角成分と一致する.

(2) $B = P^{-1}AP$ (P : 正則) $\Rightarrow \varphi_B(t) = \varphi_A(t)$

証明 :

(1) 三角行列の行列式は対角成分の積であるから.

(2) n 次正方行列 C, D に対して, 行列式 $|CD| = |C| \cdot |D|$ である.

$$\begin{aligned}\varphi_B(t) &= |B - tE_n| = |P^{-1}AP - tE_n| = |P^{-1}AP - tP^{-1}E_nP| = |P^{-1}(A - tE_n)P| \\ &= |P^{-1}| \cdot |A - tE_n| \cdot |P| = |P^{-1}| \cdot |P| \cdot |A - tE_n| = |P^{-1}P| \cdot |A - tE_n| \\ &= |E_n| \cdot |A - tE_n| = |A - tE_n| = \varphi_A(t) \quad \square\end{aligned}$$

4.6 重複度と固有空間の関係

命題

A : n 次正方行列，A の固有値の 1 つを λ_1 とする．このとき，

$$(\lambda\text{の重複度}) \geqq \dim V(\lambda_1).\ \text{特に，}(\lambda_1\text{の重複度}) = 1 \Rightarrow \dim V(\lambda_1) = 1$$

証明：

$\dim V(\lambda_1) = r, (\lambda_1\text{の重複度}) = k_1$ とする．$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r$ を
連立 1 次方程式 $(A - \lambda_1 E_n)\mathbb{x} = \mathbb{o}$ の 1 組の基本解とする．
これに $n-r$ 個のベクトル $\mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ を補充して，$\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r, \mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となるようにする.(**4.4** の補題より)
そこで，n 次正方行列 P を $P = \begin{pmatrix} \mathbb{x}_1, & \cdots & , \mathbb{x}_r, & \mathbb{x}_{r+1}, & \cdots & , \mathbb{x}_n \end{pmatrix}$ とおくと，
3.7 の定理 2 より，P は正則で，$AP = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{x}_1, & \cdots & , \lambda_1\mathbb{x}_r, & A\mathbb{x}_{r+1}, & \cdots & , A\mathbb{x}_n \end{pmatrix}$
$\mathbb{x}_{r+1}, \ldots, \mathbb{x}_n$ は $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r$ の 1 次結合で表せるので，当然，$A\mathbb{x}_{r+1}, \ldots, A\mathbb{x}_n$ も $\mathbb{x}_1, \ldots, \mathbb{x}_r$ の 1 次結合で表せるから，

$$AP = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{x}_1, & \cdots & , \mathbb{x}_r, \mathbb{x}_{r+1}, & \cdots & , \mathbb{x}_n \end{pmatrix}}_{P} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & O & \\ & \ddots & & B \\ O & & \lambda_1 & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) \text{と表される．}$$

ゆえに，P は正則なので，両辺の左から P^{-1} をかけると，

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & O & \\ & \ddots & & B \\ O & & \lambda_1 & \\ \hline & O & & C \end{array}\right)$$

となり，行列式の性質より，$\varphi_{P^{-1}AP}(t) = \varphi_{\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_1)}(t) \cdot \varphi_C(t) = (\lambda_1 - t)^r\,|C - tE_{n-r}|$.
また，**4.5** の定理 (2) より，$\varphi_{P^{-1}AP}(t) = \varphi_A(t)$ なので，

$$\varphi_A(t) = (\lambda_1 - t)^r\,|C - tE_{n-r}|$$

λ は $\varphi_A(t)$ の k_1 重解であったから，[1] $k_1 \geqq r$ が成り立つ．　□

B, C は適当な行列

[1] 補足：$\varphi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}\cdots(\lambda_s - t)^{k_s} = (\lambda_1 - t)^r\,|C - tE_{n-r}|$ なので，$(\lambda_1 - t)$ の項を比較すると，$k_1 \geqq r$ であることがわかるのは，$|C - tE_{n-r}|$ の中に $(\lambda_1 - t)$ の項が含まれている可能性があるため.

4.7　各固有空間の基底は 1 次独立

命題

A の各固有値を λ_i $(i=1,\ldots,m)$ とする.

各 $V(\lambda_i)$ の基底をすべて並べた $\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_1}^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_1^{(m)},\ldots,\mathbb{v}_{k_m}^{(m)}$ は 1 次独立.

証明：

(i) $m=2$ のとき

スカラー c_{ij} が $\{\underbrace{c_{11}\mathbb{v}_1^{(1)}+c_{12}\mathbb{v}_2^{(1)}+\cdots+c_{1k_1}\mathbb{v}_{k_1}^{(1)}}_{=\mathbb{w}_1}\}+\{\underbrace{c_{21}\mathbb{v}_1^{(2)}+c_{22}\mathbb{v}_2^{(2)}+\cdots+c_{2k_2}\mathbb{v}_{k_2}^{(2)}}_{=\mathbb{w}_2}\}=\mathbb{o}$

を満たすとする．すなわち $\mathbb{w}_1\in V(\lambda_1),\mathbb{w}_2\in V(\lambda_2),\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2=\mathbb{o}\cdots[1]$ が成立すると仮定.

$\mathbb{o}=A\mathbb{o}=A(\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2)=A\mathbb{w}_1+A\mathbb{w}_2=\lambda_1\mathbb{w}_1+\lambda_2\mathbb{w}_2\quad\therefore\ \lambda_1\mathbb{w}_1+\lambda_2\mathbb{w}_2=\mathbb{o}\cdots[2].$

$[2]-\lambda_2[1]=\mathbb{o}=\lambda_1\mathbb{w}_1+\lambda_2\mathbb{w}_2-(\lambda_2\mathbb{w}_1+\lambda_2\mathbb{w}_2)=(\lambda_1-\lambda_2)\mathbb{w}_1$

$\lambda_1\neq\lambda_2\Leftrightarrow\lambda_1-\lambda_2\neq0$ より $\mathbb{w}_1=\mathbb{o}$, また [1] より $\mathbb{w}_2=\mathbb{o}\quad\therefore\ \mathbb{w}_1=\mathbb{w}_2=\mathbb{o}\cdots[3]$

$\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_i}^{(1)},\mathbb{v}_1^{(2)},\ldots,\mathbb{v}_{k_2}^{(2)}$ はそれぞれ $V(\lambda_1),V(\lambda_2)$ の基底であるからそれぞれ 1 次独立.

よって，[3] より[1] $c_{1j}=c_{2j'}=0$ であるから $\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_i}^{(1)},\mathbb{v}_1^{(2)},\ldots,\mathbb{v}_{k_2}^{(2)}$ は 1 次独立.

(ii) $m-1$ のとき

各 $V(\lambda_i)$ の基底をすべて並べた $\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_1}^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_1^{(m-1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_{m-1}}^{(m-1)}$ は 1 次独立と仮定.

(iii) m のとき

$\mathbb{w}_\ell=c_{\ell1}\mathbb{v}_1^{(\ell)}+\cdots+c_{\ell k_\ell}\mathbb{v}_{k_\ell}^{(\ell)}$ とする．すなわち $\mathbb{w}_\ell\in V(\lambda_\ell)$ である.

$\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2+\cdots+\mathbb{w}_m=\mathbb{o}\cdots[1']$ と仮定する.

$\mathbb{o}=A\mathbb{o}=A(\mathbb{w}_1+\mathbb{w}_2+\cdots+\mathbb{w}_m)=\lambda_1\mathbb{w}_1+\lambda_2\mathbb{w}_2+\cdots+\lambda_m\mathbb{w}_m\cdots[2']$

$[2']-\lambda_m[1']=\mathbb{o}=(\lambda_1-\lambda_m)\mathbb{w}_1+(\lambda_2-\lambda_m)\mathbb{w}_2+\cdots+(\lambda_{m-1}-\lambda_m)\mathbb{w}_{m-1}$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}\neq\lambda_m$ より $\mathbb{w}_1=\mathbb{w}_2=\cdots=\mathbb{w}_{m-1}=\mathbb{o}$ となるから $\mathbb{w}_m=\mathbb{o}\cdots[3']$

(ii) の仮定より $\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_1}^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_1^{(m-1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_{m-1}}^{(m-1)}$ は 1 次独立より $\mathbb{w}_1=\cdots=\mathbb{w}_{m-1}=\mathbb{o}$

なので $\mathbb{w}_1,\ldots,\mathbb{w}_{m-1}$ までの c_{ij} はすべて 0.

また $\mathbb{v}_1^{(m)},\ldots,\mathbb{v}_{k_m}^{(m)}$ は $V(\lambda_m)$ の基底より 1 次独立なので，$[3']$ より $c_{m1}=\cdots=c_{mk_m}=0.$

よって (i),(ii),(iii) より（数学的帰納法より）

各 $V(\lambda_i)$ の基底をすべて並べた $\mathbb{v}_1^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_{k_1}^{(1)},\ldots,\mathbb{v}_1^{(m)},\ldots,\mathbb{v}_{k_m}^{(m)}$ は 1 次独立.　□

[1] $j=1,\ldots,k_1,j'=1,\ldots,k_2$

4.8 対角化の主定理 (実数範囲)

定理【対角化の主定理】

n 次正方行列 A に対して,
A は対角化可能 $\Longleftrightarrow$ A の固有方程式は重複も込めて n 個の解をもち，かつ，固有値の重複度はその固有値の属する固有空間の次元に一致する．

証明：
A の相異なる固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ とし，[1] λ_i の重複度を k_i，固有空間を $V(\lambda_i)$ とする．
$(\Rightarrow)$
A は対角化可能より，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ と表せる．
ここで **4.5** の定理より，$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ は A の固有値である．したがって順番を並び替えてまとめると，「λ_1 の集まり」，「λ_2 の集まり」$,\ldots,$「λ_s の集まり」という風にできる．
すなわち，順番は P の列ベクトルをいれかえてできるから，いれかえた P があって，
$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\underbrace{\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{k_1\text{個}},\underbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}_{k_2\text{個}},\ldots,\underbrace{\lambda_s,\ldots,\lambda_s}_{k_s\text{個}}}_{n\text{ 個}})$ とできる．ここで k_i は λ_i の重複度であるから，$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}k_i=n$ を満たしているから，A の固有方程式は重複も込めて n 個の解をもつ．

$$\begin{aligned}\mathbb{v}\in V(\lambda_i)\ \Leftrightarrow\ (A-\lambda_iE_n)\mathbb{v}=\mathbb{o}\ \Leftrightarrow\ \mathbb{o}&=P^{-1}(A-\lambda_iE_n)PP^{-1}\mathbb{v}\\&=(P^{-1}AP-\lambda_iE_n)P^{-1}\mathbb{v}\\&=\mathrm{diag}(\underbrace{*,\ldots,*}_{0\text{ でない何か}},\underbrace{0,\ldots,0}_{k_i\text{個}},\underbrace{*,\ldots,*}_{\text{同}})P^{-1}\mathbb{v}\end{aligned}$$

[2]$\Leftrightarrow P^{-1}\mathbb{v}\in S[\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_{k_i}]\Leftrightarrow \mathbb{v}\in S[P\mathbb{e}_1,\ldots,P\mathbb{e}_{k_i}]\quad\therefore\ V(\lambda_i)=S[P\mathbb{e}_1,\ldots,P\mathbb{e}_{k_i}]$[3]
$\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_{k_i}$ は 1 次独立で，P は正則であるから，**3.7** の定理 2 より P の列ベクトルたちは 1 次独立．すなわち $P\mathbb{e}_1,\ldots,P\mathbb{e}_{k_i}$ も 1 次独立である．[4]
よって **3.13** の定理 1 より $V(\lambda_i)=S[\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_{k_i}]\Leftrightarrow \dim V(\lambda_i)=\dim S[\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_{k_i}]=k_i$
$(\Leftarrow)$
$k_i=\dim V(\lambda_i)$ とする．固有空間 $V(\lambda_i)$ の基底を $\mathbb{v}_1^{(i)},\ldots,\mathbb{v}_{k_i}^{(i)}$ とする．仮定より $\displaystyle\sum_{i=1}^{s}k_i=n$ であるから，$P=\begin{pmatrix}\mathbb{v}_1^{(1)}, & \cdots & ,\mathbb{v}_{k_1}^{(1)}, & \cdots & ,\mathbb{v}_1^{(s)}, & \cdots & ,\mathbb{v}_{k_s}^{(s)}\end{pmatrix}$ は n 次正方行列．
また，**4.7** の命題と **3.7** の定理 2 より P は正則行列．
よって **4.3** の定理 2 と同様にして $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{k_1\text{個}},\underbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}_{k_2\text{個}},\ldots,\underbrace{\lambda_s,\ldots,\lambda_s}_{k_s\text{個}})$
とできる．よって A は対角化可能．　□

---

[1] $i=1,\ldots,s$
[2] $\mathrm{diag}(*,\ldots,*,0,\ldots,0,*,\ldots,*)$ を簡約化することによって未知数が k_i 個あることがわかるため．
[3] 本来ならば集合 X,Y に対して，$X=Y$ を示すのであれば，$(X\subset Y)^{\forall}x\in X\Rightarrow x\in Y,(X\supset Y)^{\forall}y\in Y\Rightarrow y\in X$ の両方を示さなければならないが，上の証明では，「$\Leftrightarrow$」でつないでいるため，$V(\lambda_i)=S[\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_{k_i}]$ が示せている．
[4] $P\mathbb{e}_1,\ldots,P\mathbb{e}_{k_i}$ はそれぞれ P の 1 列目の列ベクトル $,\ldots,P$ の $k_i(<n)$ 列目の列ベクトルであることがわかるため．

4.9 対角化可能性 (実数範囲)

定理

n 次正方行列 A に対して，次の 4 条件は同値である．

(1) A は対角化可能.

(2) A の固有方程式は重複も込めて n 個の解をもち，(固有値 λ の重複度)= (λ に属する固有空間の次元).

(3) A の各固有値に属する固有空間の次元の和は n となる．

(4) n 個の 1 次独立な A の固有ベクトルが存在する．

証明： A の各固有値を λ_i $(i = 1, \ldots, s)$，重複度を k_i とする．

(1)⇒(2) **4.8** の定理より．

(2)⇒(3)

仮定より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{s} k_i = n \cdots [1]$, $k_i = \dim V(\lambda_i) \cdots [2]$ である．[2] の 1〜s までの総和をとれば

[1] より $\displaystyle n = \sum_{i=1}^{s} k_i = \sum_{i=1}^{s} \dim V(\lambda_i)$．よって固有空間の次元の和は n.

(3)⇒(4)

仮定より，固有空間の次元の和が n であるので，各固有値のそれぞれの固有ベクトルが存在して，その固有ベクトルたちの合計は n 個となる．

よって **4.7** の命題よりその固有ベクトルたちは 1 次独立である．

(4)⇒(1)

$A\mathbb{w}_i = \lambda_i \mathbb{w}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ かつ $\mathbb{w}_1, \ldots, \mathbb{w}_n$ は 1 次独立とする．

ここで n 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbb{w}_1, & \cdots & , \mathbb{w}_n \end{pmatrix}$ とすると，**3.7** の定理 2 より P は正則.

$$AP = \begin{pmatrix} A\mathbb{w}_1, & \cdots & , A\mathbb{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{w}_1, & \cdots & , \lambda_n \mathbb{w}_n \end{pmatrix} = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

よって

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

を得る．したがって，A は対角化可能．　□

4.10 対角化の主定理 (実数範囲)【強化版】

定理[1)]

n 次正方行列 A が対角化可能 $\Longleftrightarrow$ A の固有値 λ に対し，重複度 k が 2 以上ならば $\dim V(\lambda)$ に等しい.

証明：
($\Rightarrow$) **4.8** の定理より.
($\Leftarrow$)
A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ とし，各固有値の重複度を k_i $(i = 1, \ldots, m)$ とする.
$k_1, \ldots, k_L \geqq 2, k_{L+1} = \cdots = k_m = 1$ であると仮定する.
仮定より，

$$\dim V(\lambda_i) = k_i \qquad (1 \leqq i \leqq L) \cdots [1]$$

また，λ が固有値ならば $V(\lambda) \neq \{\mathbf{o}\}$ であるから，

$$\dim V(\lambda_i) \geqq 1 = k_i \qquad (L + 1 \leqq i \leqq m) \cdots [2]$$

[1], [2] より，

$$\sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} k_i = n$$

4.7 の命題と **4.9** の定理より，各固有空間の基底を並べると n 個の 1 次独立なベクトルが取れる.
あとは **4.8** の定理と同様にして，P は正則で $P^{-1}AP$ は対角行列とできる. □

系

正方行列 A の固有値が相異なる $\Longrightarrow$ A は対角化可能

$\because$
固有値が相異なる $\Leftrightarrow$ 各固有値の重複度が 1，すなわち **4.8** の定理より. □

[1)] **4.8** の定理の強化版である．この定理より A の固有値を求めた際，重複度が 2 以上の固有値のみの固有空間の次元を求めることにより，対角化可能か否かを判断できるという大変嬉しい定理である.
対角化可能な場合はどのみち，重複度が 1 の固有値の固有空間も求めなければならないが，不可能な場合は重複度が 2 以上の固有値の固有空間の次元が重複度と異なるのでそれ以上何もしなくていい，すなわちわざわざ重複度が 1 でその固有空間の次元も 1 になる紛らわしいものを求めなくていいというわけである.

4.11 行列の三角化

定義

対角 (成分) 線より左下がすべて 0 の正方行列を $\boxed{\text{上三角行列}}$ という.

定義

正方行列 A に対して,
$B = P^{-1}AP$ が三角行列となるような正則行列 P と三角行列 B を求めることを A の $\boxed{\text{三角化}}$ という.
また，このような P, B が存在するとき，A は $\boxed{\text{三角化可能}}$ という.

例（三角化）

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $\varphi_A(t) = (2-t)^3$，すなわち固有値 2，重複度 3.

$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，すなわち $V(2) = \mathrm{Ker}(A - 2E_3) = S[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

$\dim V(2) = 1 \neq 3 = (2$ の重複度$)$ より，対角化不可. $\mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に $\mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を補う.

$P_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \mathbb{v}_2, & \mathbb{v}_3 \end{pmatrix}$ とおくと，P_1 は正則. すると $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 2 & * & * \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & * & * \\ \hline 0 & & \\ 0 & & A_1 \end{array}\right)$ となる.

$(2-t)^3 = \varphi_A(t) = \varphi_{P_1^{-1}AP_1}(t) = \left|\begin{array}{c|c} 2-t & * \\ \hline O & A_1 - tE_2 \end{array}\right| = (2-t)\varphi_{A_1}(t) \quad \therefore \varphi_{A_1}(t) = (2-t)^2$
よって A_1 の固有値は 2 で重複度は 2,
計算すると $V(2) = S[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}], \dim V(2) = 1 \neq 2 = (2$ の重複度$)$ より対角化不可.

固有ベクトル $\mathbb{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 1 列目にもつ正則行列 $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ をとると,

$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \leftarrow$ 上三角行列になった. $P_{2'} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & P_2 \end{array}\right)$, $P = P_1P_{2'}$ とおくと,

$P^{-1}AP = (P_1P_{2'})^{-1}AP_1P_{2'} = P_{2'}^{-1}P_1^{-1}AP_1P_{2'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longleftarrow$ 上三角行列なので三角化できた.

4.12 三角化可能な証明

定理

n 次正方行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるような正則行列 P が存在する．

証明：

(i) $n=2$ のとき

A の固有値をの 1 つを λ，固有ベクトルを $\mathbb{x}$ とする．$\mathbb{x}$ と 1 次独立となるようなベクトル $\mathbb{x}'$ を補完して，

$P=\begin{pmatrix}\mathbb{x}, & \mathbb{x}'\end{pmatrix}$ とおくと，P は正則．

$$AP=A\begin{pmatrix}\mathbb{x}, & \mathbb{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\mathbb{x}, & A\mathbb{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\mathbb{x}, & A\mathbb{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{x}, & \mathbb{x}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & *\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$$

となるので，$P^{-1}AP$ は上三角行列となるので三角化可能．

(ii) $n-1$ のとき，$P^{-1}AP$ が上三角行列となるような正則行列 P が存在すると仮定する．

(iii) n のとき

A の固有値の 1 つを λ_1，固有ベクトルを $\mathbb{x}_1$ とする．

ここで $\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 個のベクトル $\mathbb{x}_1,\ldots,\mathbb{x}_n$ を選んで，$\mathbb{x}_1,\mathbb{x}_2,\ldots,\mathbb{x}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底[1]となるようにする．

このとき $P_1=\begin{pmatrix}\mathbb{x}_1, & \mathbb{x}_2, & \cdots & ,\mathbb{x}_n\end{pmatrix}$ は正則で，

$$AP_1=P_1\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)\iff P_1^{-1}AP_1=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

ここで **4.5** の定理 (2) より，A と $P_1^{-1}AP_1$ の固有値は一致する．また行列式の性質より，A_1 の固有値全体は[2]$\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ とできる．よって，A_1 は (ii) の仮定より適当な $n-1$ 次正則行列 P_2 により三角化され，

$$P_2^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ となる．ここで $$P=P_1\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とおくと P は正則で，

$$P^{-1}AP=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1}P_1^{-1}AP_1\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_2^{-1}A_1P_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}\lambda_1 & & * & \\ \hline 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ となる．よって三角化できた．

したがって (i),(ii),(iii) より（数学的帰納法より）

n 次正方行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるような正則行列 P が存在する． □

---

[1] 基底となるようにしたのは任意のベクトルが 1 次結合で表せることを利用して行列 A_1 を作りたかったから．

[2] ここで $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ は相異なることを前提としない．

4.13 対角化の応用

系[1])

A を対角化可能な正方行列，正則行列を P，A を対角化した行列を D とするとき，

$$A^n = PD^nP^{-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$\because$
仮定より，$P^{-1}AP = D$．両辺を n 乗すると，

$$\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^n &= D^n \\
(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) &= D^n \\
P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP &= D^n \\
P^{-1}AEAE\cdots EAP &= D^n \\
P^{-1}AA\cdots AP &= D^n \\
P^{-1}A^nP &= D^n \quad \cdots[1]
\end{aligned}$$

[1] の両辺に左から P，右から P^{-1} をかけると，$A^n = PD^nP^{-1}$． □

例 (対角化の応用)[2])

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が
$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n\,, a_1 = 1, a_2 = 1$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．
これは行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表せる．ここで $\mathbb{x}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\mathbb{x}_{n+1} = A\mathbb{x}_n$$

と表せる．$\mathbb{x}_n = A\mathbb{x}_{n-1}, \mathbb{x}_{n-1} = A\mathbb{x}_{n-2}, \ldots$ となるので，

$$\mathbb{x}_n = A\mathbb{x}_{n-1} = AA\mathbb{x}_{n-2} = \cdots = A^{n-1}\mathbb{x}_1$$

となる．ここで上記の系を用いて A^{n-1} を計算して，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この式を計算して，$a_n = 2^n - 3^{n-1}$ が求まる．

1) この主張の嬉しいポイントは対角行列の n 乗は対角成分の n 乗になるので，普通に計算しても法則を見つけにくい行列の n 乗に値が簡単にわかるということである．
2) 参考サイト : https://mathtrain.jp/sankoukan

4.14 ハミルトン・ケーリーの定理

Hamilton-Cayley の定理

n 次正方行列 A を固有多項式 $\varphi_A(t) = |A - tE|$ に代入[1]して得られる行列は O (ゼロ行列), すなわち

$$\varphi_A(A) = O$$

証明 :

4.12 の定理より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: B$ となる正則行列 P が存在.

$\Longrightarrow \varphi_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\cdots(\lambda_n - t) \Leftrightarrow \varphi_A(A) = (\lambda_1 E_n - A)(\lambda_2 E_n - A)\cdots(\lambda_n E_n - A)$

$P^{-1}\varphi_A(A)P = P^{-1}\{(\lambda_1 E_n - A)(\lambda_2 E_n - A)\cdots(\lambda_n E_n - A)\}P$

$= P^{-1}(\lambda_1 E_n - A)\underbrace{PP^{-1}}_{(=E_n)}(\lambda_2 E_n - A)P\cdots P^{-1}(\lambda_n E_n - A)P$

$= (\lambda_1 E_n - P^{-1}AP)(\lambda_2 E_n - P^{-1}AP)\cdots(\lambda_n - P^{-1}AP) = \varphi_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP) = \varphi_B(B)$

$B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の場合, $\varphi_B(B) = \mathrm{diag}(\varphi_B(\lambda_1), \dots, \varphi_B(\lambda_n)) = \mathrm{diag}(0, \dots, 0) = O$.

$(\lambda_1 E_n - B)(\lambda_2 E_n - B)\cdots(\lambda_k E_n - B) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{ 列目} & & k\text{ 列目} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right) \end{array}$ であることを k についての帰納法で示す.

(i) $k = 1$ のとき

$\lambda_1 - B = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 - \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 - \lambda_n \end{pmatrix}$ より成り立つ.

(ii) k のとき成り立つと仮定する.

(iii) $k + 1$ のとき (ii) の仮定より,

$\{(\lambda_1 E_n - B)(\lambda_2 E_n - B)\cdots(\lambda_k E_n - B)\}(\lambda_{k+1} E_n - B)$

$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{ 列目} & & k\text{ 列目} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} (k+1)\text{ 列目} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{k+1} - \lambda_1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & \lambda_{k+1} - \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$

$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{ 列目} & & (k+1)\text{ 列目} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right) \end{array}$ となるので (i),(ii),(iii) より成り立つ. よって $k = n$ とすれば,

$P^{-1}\varphi_A(A)P = \varphi_B(B) = (\lambda_1 E_n - B)(\lambda_2 E_n - B)\cdots(\lambda_n E_n - B) = O$.

したがって $\varphi_A(A) = P\varphi_B(B)P^{-1} = POP^{-1} = O$. □

---

[1] 多項式 $g(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ に対し,
$g(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$ と定義する.

5 内積

5.1 内積の定義

定義【内積】

ベクトル空間 V において，$^\forall \mathbb{a}, ^\forall \mathbb{b} \in V$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \in \mathbb{R}$ が定まり，次の (1)〜(4) を満たすとき，
$(\ ,\ )$ は $\boxed{\text{内積}}$ という．また内積の定義されたベクトル空間を $\boxed{\text{内積空間}}$ または**計量ベクトル空間**という．
(1) $(\mathbb{a}+\mathbb{c}, \mathbb{b}) = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{c}, \mathbb{b}) \quad (\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in V)$
(2) $(k\mathbb{a}, \mathbb{b}) = k(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \quad (k \in \mathbb{R})$
(3) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\mathbb{b}, \mathbb{a})$
(4) $(\mathbb{a}, \mathbb{a}) \geqq 0$　等号成立は $\mathbb{a} = \mathbb{o}$ の場合のみ

例 (内積)
(i) $\mathbb{R}^n \ni \mathbb{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbb{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ に対し，
$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ とすると，$(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ は内積[1)].

(ii) $d_1, d_2, \ldots, d_n$ を正の実数とする．$\mathbb{R}^n \ni \mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_ia_ib_i$ とおくと $(\mathbb{a}, \mathbb{b})$ は内積.

(iii) $P_n : n$ 次以下の 1 変数多項式全体からなるベクトル空間

$f(x), g(x) \in P_n$ に対し，$(f, g) := \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ とおくと (f, g) は内積.

$\because k \in \mathbb{R}, f, g, h \in P_n$ とする.

(1) $(f+g, h) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)+g(x)\}h(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx = (f, h) + (g, h).$

(2) $(kf, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (kf(x))g(x)\,dx = k\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = k(f, g).$

(3) $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx = (g, f).$

(4) $(f, f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx \geqq 0$, 等号成立は $f(x) = 0$ のみ.　□

要するに**内積**はたくさんあり，唯一ではない.

1) この内積のことを**標準内積**や**自然な内積**という.

5.2　ベクトルの長さと内積

定義

$(\ ,\ )$ はベクトル空間 V の内積とする.

(1) $V \ni \mathbb{a}$ の長さを $\|\mathbb{a}\| := \sqrt{(\mathbb{a},\mathbb{a})}$ と定める.

(2) $\mathbb{a},\mathbb{b} \in V$ に対し，$(\mathbb{a},\mathbb{b}) = 0$ のとき，$\mathbb{a},\mathbb{b}$ は直交するといい，$\mathbb{a} \perp \mathbb{b}$ とかく.

定理

$(\ ,\ )$ をベクトル空間 V の内積，$\mathbb{a},\mathbb{b} \in V, k \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $\|\mathbb{a}\| \geqq 0$,　　等号成立は $\mathbb{a} = \mathbb{o}$.　　　(2) $\|k\mathbb{a}\| = |k|\,\|\mathbb{a}\|$

(3) [3]$(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \dfrac{1}{2}\left\{\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 - \|\mathbb{a}\|^2 - \|\mathbb{b}\|^2\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{\|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - \|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2\right\}$

(4) [4]$\mathbb{a} \perp \mathbb{b} \Longrightarrow \|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 = \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2$

証明：

(1) $\|\mathbb{a}\| = \sqrt{(\mathbb{a},\mathbb{a})} \geqq 0$，内積の定義より等号成立は $\mathbb{a} = \mathbb{o}$.

(2) $\|k\mathbb{a}\| = \sqrt{(k\mathbb{a},k\mathbb{a})} = \sqrt{k^2(\mathbb{a},\mathbb{a})} = |k|\sqrt{(\mathbb{a},\mathbb{a})} = |k|\,\|\mathbb{a}\|$.

(3) $\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 = (\sqrt{(\mathbb{a}+\mathbb{b},\mathbb{a}+\mathbb{b})})^2 = (\mathbb{a}+\mathbb{b},\mathbb{a}+\mathbb{b}) = (\mathbb{a},\mathbb{a}) + (\mathbb{a},\mathbb{b}) + (\mathbb{b},\mathbb{a}) + (\mathbb{b},\mathbb{b})$

$(\mathbb{a},\mathbb{b}) = (\mathbb{b},\mathbb{a})$ より

$\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 = (\mathbb{a},\mathbb{a}) + 2(\mathbb{a},\mathbb{b}) + (\mathbb{b},\mathbb{b}) = \|\mathbb{a}\|^2 + 2(\mathbb{a},\mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2$

したがって $(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \dfrac{1}{2}\left\{\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 - \|\mathbb{a}\|^2 - \|\mathbb{b}\|^2\right\}$

また同様にして,

$\|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2 = (\mathbb{a}-\mathbb{b},\mathbb{a}-\mathbb{b}) = (\mathbb{a},\mathbb{a}) + (\mathbb{a},-\mathbb{b}) + (-\mathbb{b},\mathbb{a}) + (-\mathbb{b},-\mathbb{b})$

$(\mathbb{a},-\mathbb{b}) = -(\mathbb{a},\mathbb{b}), (-\mathbb{b},\mathbb{a}) = -(\mathbb{b},\mathbb{a}) = -(\mathbb{a},\mathbb{b})$ より,

$\|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2 = (\mathbb{a},\mathbb{a}) - (\mathbb{a},\mathbb{b}) - (\mathbb{b},\mathbb{a}) + (\mathbb{b},\mathbb{b}) = \|\mathbb{a}\|^2 - 2(\mathbb{a},\mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2$

したがって $(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \dfrac{1}{2}\left\{\|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - \|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2\right\}$

(4) $\mathbb{a} \perp \mathbb{b} \Longleftrightarrow (\mathbb{a},\mathbb{b}) = 0$. よって (3) より成り立つ.　$\square$

(3) の証明中の $\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2, \|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2$ から

中線定理

$$\|\mathbb{a}+\mathbb{b}\|^2 + \|\mathbb{a}-\mathbb{b}\|^2 = 2\big(\|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2\big)$$

が成り立つ.

[3] 余弦定理と同じ意味.

[4] ピタゴラス (三平方) の定理と同じ意味.

5.3 シュワルツの不等式・三角不等式

定理【Schwarz の不等式】

任意の 2 つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して,

$$|(\mathbb{a}, \mathbb{b})| \leqq \|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\|$$

等号成立は $\mathbb{a} = k\mathbb{b}$ または $\mathbb{b} = \ell\mathbb{a}$ となる場合に限る，ただし $k, \ell \in \mathbb{R}$.

証明：

$\mathbb{b} = \mathbb{o}$ の場合，両辺とも 0 となるので等号が成り立つ．$\mathbb{b} = 0\mathbb{a}$ とかける．

$\mathbb{b} \neq \mathbb{o}$ の場合，

$$\begin{aligned}\|\mathbb{a} - k\mathbb{b}\|^2 &= (\mathbb{a} - k\mathbb{b}, \mathbb{a} - k\mathbb{b}) &&= (\mathbb{a}, \mathbb{a}) + (\mathbb{a}, -k\mathbb{b}) + (-k\mathbb{b}, \mathbb{a}) + (\mathbb{b}, \mathbb{b}) \\ &= \|\mathbb{a}\|^2 - k(\mathbb{a}, \mathbb{b}) - k(\mathbb{b}, \mathbb{a}) + \|\mathbb{b}\|^2 &&= \|\mathbb{a}\|^2 - 2k(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2\end{aligned}$$

ここで $k = \dfrac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\mathbb{b}\|^2}$ とおくと，$\|\mathbb{a} - k\mathbb{b}\|^2 = \|\mathbb{a}\|^2 - \dfrac{\{(\mathbb{a}, \mathbb{b})\}^2}{\|\mathbb{b}\|^2}$

$\|\mathbb{a} - k\mathbb{b}\|^2 \geqq 0$ より $\|\mathbb{a}\|^2 - \dfrac{\{(\mathbb{a}, \mathbb{b})\}^2}{\|\mathbb{b}\|^2} \geqq 0 \Leftrightarrow \|\mathbb{a}\|^2\|\mathbb{b}\|^2 \geqq \{(\mathbb{a}, \mathbb{b})\}^2$

ここで両辺の平方根をとると，$\|\mathbb{a}\|, \|\mathbb{b}\| \geqq 0$ なので，$\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\| \geqq \pm(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = |(\mathbb{a}, \mathbb{b})|$.

また等号成立条件は $\|\mathbb{a} - k\mathbb{b}\| = 0$ の場合である．$\|\mathbb{o}\| = 0$ であるから，$\mathbb{a} = k\mathbb{b}$.

逆に，$\mathbb{a} = k\mathbb{b}$ と仮定すると，

$\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\| = \|k\mathbb{b}\|\,\|\mathbb{b}\| = |k|\,\|\mathbb{b}\|\,\|\mathbb{b}\| = |k|\,\|\mathbb{b}\|^2, |(\mathbb{a}, \mathbb{b})| = |(k\mathbb{b}, \mathbb{b})| = \left|k\|\mathbb{b}\|^2\right| = |k|\,\|\mathbb{b}\|^2$

よって等号は成立している．

$\mathbb{b} = \ell\mathbb{a}$ の場合は，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\mathbb{b}, \mathbb{a}), \|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\| = \|\mathbb{b}\|\|\mathbb{a}\|$ であるから，

上の証明の $\mathbb{a}$ を $\mathbb{b}$, $\mathbb{b}$ を $\mathbb{a}$ と考えれば同じことである． □

定理【三角不等式】

任意の 2 つのベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して,

$$\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\| \leqq \|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|$$

等号成立は $\mathbb{a} = k\mathbb{b}$ または $\mathbb{b} = \ell\mathbb{a}$ の場合に限る，ただし $k, \ell \geqq 0$.

証明：

$\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\|, \|\mathbb{a}\|, \|\mathbb{b}\| \geqq 0$ であるから，$\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\|^2 \leqq (\|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|)^2$ を示しても問題ない．

$\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\|^2 = (\mathbb{a} + \mathbb{b}, \mathbb{a} + \mathbb{b}) = (\mathbb{a}, \mathbb{a}) + (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{b}, \mathbb{a}) + (\mathbb{b}, \mathbb{b}) = \|\mathbb{a}\|^2 + 2(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2$

ここでシュワルツの不等式より，[1] $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \leqq \|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\|$ なので，

$\|\mathbb{a} + \mathbb{b}\|^2 = \|\mathbb{a}\|^2 + 2(\mathbb{a}, \mathbb{b}) + \|\mathbb{b}\|^2 \leqq \|\mathbb{a}\|^2 + 2\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\| + \|\mathbb{b}\|^2 = (\|\mathbb{a}\| + \|\mathbb{b}\|)^2$.

等号成立もシュワルツの不等式かつ $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) \geqq 0$ より $\mathbb{a} = k\mathbb{b}, \mathbb{b} = \ell\mathbb{a}$ $(k, \ell \geqq 0)$ で成立． □

[1] $|(\mathbb{a}, \mathbb{b})| \geqq 0$ であるから $-$ がついても当然不等号は成立する．

5.4　ベクトルのなす角

定理

$\mathbb{o}$ でない n 次ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}(\in \mathbb{R}^n)$ のなす角 θ に対して,

$$\cos\theta = \frac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\|} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

証明：

$\mathbb{b}$ から $\mathbb{a}$ に下した垂線の足 H に対し，ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\mathbb{b}$ から $\mathbb{a}$ への**正射影**という. (O は始点)
$\overrightarrow{OH}$ の満たすべき性質は,

- $\overrightarrow{OH} /\!/ \mathbb{a}$ すなわち $\overrightarrow{OH} = k\mathbb{a}$ $(k \in \mathbb{R})$
- $\mathbb{b} - k\mathbb{a} \perp \mathbb{a}$ すなわち $(\mathbb{b} - k\mathbb{a}, \mathbb{a}) = 0$

$$0 = (\mathbb{b} - k\mathbb{a}, \mathbb{a}) = (\mathbb{b}, \mathbb{a}) - k(\mathbb{a}, \mathbb{a}) = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) - k\|\mathbb{a}\|^2 \quad \therefore\ k = \frac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\mathbb{a}\|^2}$$

$$\cos\theta \overset{1)}{=} \frac{k\|\mathbb{a}\|}{\|\mathbb{b}\|} = \frac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\mathbb{a}\|^2} \cdot \frac{\|\mathbb{a}\|}{\|\mathbb{b}\|} = \frac{(\mathbb{a}, \mathbb{b})}{\|\mathbb{a}\|\,\|\mathbb{b}\|}. \qquad \square$$

[1] 幾何的に考えるとわかりやすい.

5.5 直交射影・鏡映変換

定義

$V=\mathbb{R}^3$ の標準内積を $(\ ,\ )$ とする．$\mathbb{a}$ を $\mathbb{o}$ でない V のベクトルとし，$\mathbb{a}$ を法線ベクトルとする平面を，

$$H_{\mathbb{a}}=\{\,\mathbb{x}\in V\mid(\mathbb{a},\mathbb{x})=0\,\}$$

とおく．$\mathbb{v}\in V$ に対して，

$$(1)\ p(\mathbb{v})-\mathbb{v}\in\mathbb{R}_{\mathbb{a}}{}^{1)}\qquad (2)\ p(\mathbb{v})\in H_{\mathbb{a}}$$

により定まる $p(\mathbb{v})$ を $\mathbb{v}\in V$ の $H_{\mathbb{a}}$ 上への **直交射影** という．また，

$$\frac{1}{2}\big(r(\mathbb{v})+\mathbb{v}\big)=p(\mathbb{v})$$

により定まる $r:V\to V$ を $H_{\mathbb{a}}$ に関する **鏡映変換** という．

命題

$\mathbb{a}\in\mathbb{R}^3=V$ を $\mathbb{o}$ でないベクトルとし，$\mathbb{a}$ を法線ベクトルとする平面を $H_{\mathbb{a}}$ とする．$\mathbb{v}\in V$ に対して $p(\mathbb{v})$ を $\mathbb{v}$ の $H_{\mathbb{a}}$ 上への直交射影，$H_{\mathbb{a}}$ に関する鏡映変換を $r:V\to V$ とする．次が成り立つ．

(1) $p(\mathbb{v})=\mathbb{v}-\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a}$ (2) $r(\mathbb{v})=\mathbb{v}-2\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a}$ (3) $\|r(\mathbb{v})\|=\|\mathbb{v}\|$

証明：

(1) $p(\mathbb{v})-\mathbb{v}\in\mathbb{R}_{\mathbb{a}}$ より $p(\mathbb{v})-\mathbb{v}=c\mathbb{a}\ (c\in\mathbb{R})\Leftrightarrow p(\mathbb{v})=\mathbb{v}+c\mathbb{a}$.

また，$p(\mathbb{v})\in H_{\mathbb{a}}$ より $p(\mathbb{v})$ と $\mathbb{a}$ は直交しているので $(p(\mathbb{v}),\mathbb{a})=0$.

$0=(p(\mathbb{v}),\mathbb{a})=(\mathbb{v}+c\mathbb{a},\mathbb{a})=(\mathbb{v},\mathbb{a})+c(\mathbb{a},\mathbb{a})\quad\therefore\ c=-\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}$. よって $p(\mathbb{v})=\mathbb{v}-\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a}$.

(2) r は鏡映変換であるから $r(\mathbb{v})-\mathbb{v}=2\big(p(\mathbb{v})-\mathbb{v}\big)$ と表せる．よって (1) より

$r(\mathbb{v})-\mathbb{v}=2\big(p(\mathbb{v})-\mathbb{v}\big)=2\left(-\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a}\right)=-2\dfrac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a}$.

(3) $\|r(\mathbb{v})\|,\|\mathbb{v}\|\geqq 0$ なので $\|r(\mathbb{v})\|^2=\|\mathbb{v}\|^2$ を示しても問題はない．(2) より

$$\|r(\mathbb{v})\|^2=(r(\mathbb{v}),r(\mathbb{v}))=(\mathbb{v}-2\frac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a},\mathbb{v}-2\frac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\mathbb{a})$$

$$=(\mathbb{v},\mathbb{v})-4\frac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}(\mathbb{v},\mathbb{a})+\left(-2\frac{(\mathbb{v},\mathbb{a})}{(\mathbb{a},\mathbb{a})}\right)^2(\mathbb{a},\mathbb{a})=(\mathbb{v},\mathbb{v})=\|\mathbb{v}\|^2.\qquad\square$$

1) $\mathbb{R}_{\mathbb{a}}$ は $\mathbb{a}$ を延長した直線である．

5.6 正規直交系

定義【正規直交系・基底】

(1) [1]内積空間 V の元 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ が長さ 1で互いに直交している，すなわち，

$$(\mathbb{u}_i, \mathbb{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるとき，$\boxed{\text{正規直交系}}$ という．

(2) V の正規直交系 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ が $n = \dim V$ を満たすとき，$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ は V の基底となる．
これを $\boxed{\text{正規直交基底}}$ という．すなわち正規直交系である基底のことを正規直交基底という．

例

$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ は正規直交基底である．

命題

(1) 正規直交系は 1 次独立．

(2) 正規直交基底は V の基底．

証明：

正規直交系を $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_n$ とする．

(1) $c_1\mathbb{u}_1 + c_2\mathbb{u}_2 + \cdots + c_n\mathbb{u}_n = \mathbb{o} \cdots (*)$ とする．$(*)$ と $\mathbb{u}_1$ の内積をとると，

$0 = (\mathbb{o}, \mathbb{u}_1) = (c_1\mathbb{u}_1 + c_2\mathbb{u}_2 + \cdots + c_n\mathbb{u}_n, \mathbb{u}_1) = c_1(\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1) + c_2(\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_1) + \cdots + c_n(\mathbb{u}_n, \mathbb{u}_1)$

$(\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_1) = \cdots = (\mathbb{u}_n, \mathbb{u}_1) = 0, (\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1) = 1$ より $c_1 = 0$.

同様にして $(*)$ と $\mathbb{u}_2, (*)$ と $\mathbb{u}_3, \ldots, (*)$ と $\mathbb{u}_n$ の内積をとると，$c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ である．

よって正規直交系は 1 次独立．

(2) (1) より正規直交基底が 1 次独立である．また **3.7** の定理 2 と **3.10** の定理より． □

[1] 正規直交基底は一般に $\mathbb{u}$ で表すことが多い．Unit が長さ 1 の意味を示している．
また，正規直交基底は CONS(コンス) と略すことがある．正規直交基底の英名 complete orthonormal system の略．
さらに，δ_{ij} をクロネッカーのデルタという．(1 年次の単位行列の定義にも出てきた)

5.7　座標の定義

定義

$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ は V の基底とする．$\mathbb{v} \in V$ に対し，
$\mathbb{v} = s_1\mathbb{u}_1 + \cdots + s_n\mathbb{u}_n$ となるスカラー s_i $(i = 1, \ldots, n)$ がただ 1 組存在する．
$(s_1, \ldots, s_n)$ を $\mathbb{v}$ の $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ に関する **成分 (座標)** という．

定理

$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ を V の正規直交基底とする．$\mathbb{v} \in V$ の $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ に関する成分 $(s_1, \ldots, s_n)$ は内積でわかる．

$$s_i = (\mathbb{v}, \mathbb{u}_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

証明：
$\mathbb{v} = s_1\mathbb{u}_1 + \cdots + s_n\mathbb{u}_n$ と $\mathbb{u}_i$ $(i \in (1, n) \subset \mathbb{N})$ の内積をとると，
$(\mathbb{v}, \mathbb{u}_i) = (s_1\mathbb{u}_1 + \cdots + s_n\mathbb{u}_n, \mathbb{u}_i) = s_1 \underbrace{(\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_i)}_{=0} + \cdots + s_i \underbrace{(\mathbb{u}_i, \mathbb{u}_i)}_{=1} + \cdots + s_n \underbrace{(\mathbb{u}_n, \mathbb{u}_i)}_{=0} = s_i$
$i = 1, n$ の場合も同様．　□

例

$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を $\mathbb{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbb{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{u}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する成分 (s_1, s_2, s_3) を求める．

$s_1 = (\mathbb{v}, \mathbb{u}_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{2}, s_2 = (\mathbb{v}, \mathbb{u}_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot 6 = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, s_3 = (\mathbb{v}, \mathbb{u}_3) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot 0 = 0.$

よって $(s_1, s_2, s_3) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 0)$.

5.8　グラム・シュミットの正規直交化法

定理【Gram-Schmidt の正規直交化法】

内積空間 V の基底 $\mathbb{a}_1, \ldots, \mathbb{a}_n$ から正規直交基底 $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ を次のように作れる.

$\mathbb{u}'_1 = \mathbb{a}_1 \to \mathbb{u}_1 = \dfrac{\mathbb{u}'_1}{\|\mathbb{u}'_1\|},$

$\mathbb{u}'_2 = \mathbb{a}_2 - (\mathbb{a}_2, \mathbb{u}_1)\mathbb{u}_1 \to \mathbb{u}_2 = \dfrac{\mathbb{u}'_2}{\|\mathbb{u}'_2\|}, \mathbb{u}'_3 = \mathbb{a}_3 - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_1)\mathbb{u}_1 - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_2)\mathbb{u}_2 \to \mathbb{u}_3 = \dfrac{\mathbb{u}'_3}{\|\mathbb{u}'_3\|}, \cdots$

$$\mathbb{u}'_k = \mathbb{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\mathbb{a}_k, \mathbb{u}_i)\mathbb{u}_i \to \mathbb{u}_k = \frac{\mathbb{u}'_k}{\|\mathbb{u}'_k\|}$$

証明：

$\mathbb{u}_1 = \dfrac{\mathbb{u}'_1}{\|\mathbb{u}'_1\|}$ とすると，$\|\mathbb{u}_1\|^2 = (\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1) = \dfrac{\|\mathbb{u}'_1\|^2}{\|\mathbb{u}'_1\|^2} = 1, \|\mathbb{u}_1\| \geqq 0$ より $\|\mathbb{u}_1\| = 1$.

$(\mathbb{u}'_2, \mathbb{u}_1) = (\mathbb{a}_2 - (\mathbb{a}_2, \mathbb{u}_1)\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1) = (\mathbb{a}_2, \mathbb{u}_1) - (\mathbb{a}_2, \mathbb{u}_1)\underbrace{(\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1)}_{=1} = 0.$

$\mathbb{u}'_2$ は $\mathbb{u}_2$ のスカラー倍であるから $(\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_1) = 0$, また $\|\mathbb{u}_2\| = 1$ であることが上よりわかる.

$(\mathbb{u}'_3, \mathbb{u}_1) = (\mathbb{a}_3 - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_1)\mathbb{u}_1 - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_2)\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_1)$

$= (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_1) - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_1)\underbrace{(\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_1)}_{=1} - (\mathbb{a}_3, \mathbb{u}_2)\underbrace{(\mathbb{u}_2, \mathbb{u}_1)}_{=0} = 0 \quad \therefore (\mathbb{u}_3, \mathbb{u}_1) = 0, \|\mathbb{u}_3\| = 1.$

同様に $(\mathbb{u}_3, \mathbb{u}_2) = 0$ であることもわかる.

ここで $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_{k-1}$ がすべて直交しているとする.

$\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_k$ までがすべて直交していることを示す．仮定より $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_{k-1}$ はすべて直交しているので，$\mathbb{u}_i, \mathbb{u}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ が直交していることを示す.

$(\mathbb{u}'_k, \mathbb{u}_i) = (\mathbb{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1}(\mathbb{a}_k, \mathbb{u}_j)\mathbb{u}_j, \mathbb{u}_i) = (\mathbb{a}_k, \mathbb{u}_i) - (\mathbb{a}_k, \mathbb{u}_i)(\mathbb{u}_i, \mathbb{u}_i) = 0.$

よって $\mathbb{u}_i$ と $\mathbb{u}_k$ は直交している.　□

5.9 内積 (計量) を保つ・長さを保つ

定義

2 つの内積空間 V, V' の間の線形写像 $f : V \to V'$ とする.

(1) f が $\boxed{\text{内積 (計量) を保つ}}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) = (\mathbb{x}, \mathbb{y}) \qquad ({}^\forall\mathbb{x}, {}^\forall\mathbb{y} \in V)$

(2) n 次正方行列 A が**内積 (計量) を保つ** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A\mathbb{v}, A\mathbb{w}) = (\mathbb{v}, \mathbb{w}) \quad ({}^\forall\mathbb{v}, \mathbb{w} \in \mathbb{R}^n)$

(3) f が $\boxed{\text{長さを保つ}}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|f(\mathbb{x})\| = \|\mathbb{x}\| \qquad ({}^\forall\mathbb{x} \in V)$

(4) n 次正方行列 A が**長さを保つ** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|A\mathbb{v}\| = \|\mathbb{v}\| \quad ({}^\forall\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n)$

定理

$f : V \to V'$ を線形写像とする.

$$f \text{ が内積を保つ} \Longleftrightarrow f \text{ が長さを保つ}$$

証明 :

${}^\forall\mathbb{x}, {}^\forall\mathbb{y} \in V$ とする.

$(\Rightarrow)$

f が内積を保つので $\big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) = (\mathbb{x}, \mathbb{y})$ である. $\mathbb{y} = \mathbb{x}$ とすると,

$\|f(\mathbb{x})\|^2 = \big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{x})\big) = (\mathbb{x}, \mathbb{x}) = \|\mathbb{x}\|^2$ となる. $\therefore \|f(\mathbb{x})\|^2 = \|\mathbb{x}\|^2$

$\|f(\mathbb{x})\|, \|\mathbb{x}\| \geqq 0$ より $\|f(\mathbb{x})\| = \|\mathbb{x}\|$. よって f は長さを保つ.

$(\Leftarrow)$

f は長さを保つので $\|f(\mathbb{x}+\mathbb{y})\| = \|\mathbb{x}+\mathbb{y}\|$. 両辺を 2 乗して内積で表すと,

$$\big(f(\mathbb{x}+\mathbb{y}), f(\mathbb{x}+\mathbb{y})\big) = (\mathbb{x}+\mathbb{y}, \mathbb{x}+\mathbb{y})$$

f は線形写像より,

$$\big(f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y}), f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y})\big) = (\mathbb{x}+\mathbb{y}, \mathbb{x}+\mathbb{y})$$

$$\begin{aligned}\big(f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y}), f(\mathbb{x})+f(\mathbb{y})\big) &= \big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{x})\big) + 2\big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) + \big(f(\mathbb{y}), f(\mathbb{y})\big) \\ &= \|f(\mathbb{x})\|^2 + 2\big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) + \|f(\mathbb{y})\|^2,\end{aligned}$$

$(\mathbb{x}+\mathbb{y}, \mathbb{x}+\mathbb{y}) = (\mathbb{x}, \mathbb{x}) + 2(\mathbb{x}, \mathbb{y}) + (\mathbb{y}, \mathbb{y}) = \|\mathbb{x}\|^2 + 2(\mathbb{x}, \mathbb{y}) + \|\mathbb{y}\|^2$ であるから,

$$\|f(\mathbb{x})\|^2 + 2\big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) + \|f(\mathbb{y})\|^2 = \|\mathbb{x}\|^2 + 2(\mathbb{x}, \mathbb{y}) + \|\mathbb{y}\|^2$$

仮定より f は長さを保つので,

$$\|f(\mathbb{x})\| = \|\mathbb{x}\|, \|f(\mathbb{y})\| = \|\mathbb{y}\| \Rightarrow \|f(\mathbb{x})\|^2 = \|\mathbb{x}\|^2, \|f(\mathbb{y})\|^2 = \|\mathbb{y}\|^2$$

であるから,

$$\big(f(\mathbb{x}), f(\mathbb{y})\big) = (\mathbb{x}, \mathbb{y})$$

となる. よって f は内積を保つ. $\square$

5.10 直交行列

定義【直交行列】

$$\text{正方行列 } A \text{ が直交行列} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^tAA = E = A\,{}^tA \Leftrightarrow A^{-1} = {}^tA$$

補題

n 次正方行列 A に対し,

$$(A\mathbb{v}, \mathbb{w}) = (\mathbb{v}, {}^tA\mathbb{w}) \qquad (\mathbb{v}, \mathbb{w} \in \mathbb{R}^n)$$

証明:

$\mathbb{R}^n \ni \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して,

$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \begin{pmatrix} a_1, & \cdots & , a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}^t\mathbb{a}\,\mathbb{b}$ と表せるので,

$(A\mathbb{v}, \mathbb{w}) = {}^t(A\mathbb{v})\,\mathbb{w} = ({}^t\mathbb{v}\,{}^tA)\,\mathbb{w} = {}^t\mathbb{v}\,({}^tA\mathbb{w}) = (\mathbb{v}, {}^tA\mathbb{w}) \quad \square$

5.11 長さ・内積・正規直交基底・直交行列の関係

定理

n 次正方行列 A に対し, 次の (1)〜(4) は同値.

(1) A は長さを保つ. (2) A は内積を保つ.

(3) A の列ベクトルたちは正規直交基底である. (4) A は直交行列である.

証明 :

(1)⇒(2) **5.9** の定理より.

(2)⇒(3)

$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1, & \cdots & ,\mathbb{a}_n \end{pmatrix}$ とすると, $A\mathbb{e}_k = \mathbb{a}_k$ である. 仮定より A は内積を保つので,

$$(\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) = (A\mathbb{e}_i, A\mathbb{e}_j) = (\mathbb{e}_i, \mathbb{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \therefore (\mathbb{a}_i, \mathbb{a}_j) = \delta_{ij}$$

となるので A の列ベクトルたちは正規直交基底である.

(3)⇒(4)

正規直交基底を $\mathbb{u}_1, \ldots, \mathbb{u}_n$ とし, $A = \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1, & \cdots & ,\mathbb{u}_n \end{pmatrix}$ とすると,

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\mathbb{u}_1 \\ \vdots \\ {}^t\mathbb{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{u}_1, & \cdots & ,\mathbb{u}_n \end{pmatrix} = ({}^t\mathbb{u}_i\,\mathbb{u}_j)_{ij} = \big((\mathbb{u}_i, \mathbb{u}_j)\big)_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = E_n.$$

(4)⇒(1)

5.10 の補題より $(A\mathbb{a}, A\mathbb{a}) = (\mathbb{a}, {}^tAA\mathbb{a}) = (\mathbb{a}, E_n\mathbb{a}) = (\mathbb{a}, \mathbb{a}) \quad \therefore (A\mathbb{a}, A\mathbb{a}) = (\mathbb{a}, \mathbb{a})$.

よって A は内積を保つ. □

6　複素数の場合

6.1　代数学の基本定理，対角化の主定理 (複素数範囲)

n 次正方行列 A は，重複度を含めると，$\mathbb{C}$ の範囲でちょうど n 個の固有値を持つ．

定理【代数学の基本定理】[1)]

複素数係数の多項式 $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C})$ は，
$\mathbb{C}$ の範囲で 1 次式の積に分解できる．すなわち，
$g(x) = a_n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{n-1})(x-\lambda_n) \ \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n \in \mathbb{C})$

定理[2)]

n 次複素正方行列 A に対して，
A が $\mathbb{C}$ の範囲で対角化可能
$\Longleftrightarrow$ A の各固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，λ の $\varphi_A(t)$ での重複度は $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}(\lambda)$ に等しい．

例

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は $\pm i$，A は $\mathbb{R}$ 上で対角化不可能だが $\mathbb{C}$ 上では対角化できる．

$V_{\mathbb{C}}(i) = \left\{ k\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{C} \right\}$，$V_{\mathbb{C}}(-i) = \left\{ k\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{C} \right\}, \mathbb{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \mathbb{v}_2 \end{pmatrix} \text{とすると，} AP = A\begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \mathbb{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbb{v}_1, & A\mathbb{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mathbb{v}_1, & -i\mathbb{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{v}_1, & \mathbb{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$= P\,\mathrm{diag}(i, -i) \quad \therefore\ P^{-1}AP = \mathrm{diag}(i, -i).$$

[1)] 代数学の基本定理は簡単に言うと，n 次方程式の解が複素数範囲で n 個あるということである．
証明は解析学の複素関数論を使うため，ここでは証明しないことにする．

[2)] **4.8,4.9** の定理と同じことである．証明は代数学の基本定理から n 個の解をもつということがいえる．他はまったく同様であるから該当ページを見られたい．また，$\dim_{\mathbb{C}}$ とは $\mathbb{C}$ ベクトル空間の $\mathbb{C}$ 上の次元，$V_{\mathbb{C}}(\lambda) := \{\, \mathbb{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda E_n)\mathbb{v} = \mathbb{o} \,\}$．

6.2 エルミット内積, 随伴行列, 随伴公式

定義【エルミット内積】

(1) $\mathbb{C}^n \ni \mathbb{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,\ \mathbb{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\ (a_i, b_i \in \mathbb{C})$ に対し,

$$\mathbb{C} \ni (\mathbb{a}, \mathbb{b}) := a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

を $\boxed{\text{エルミット内積}}$ という. $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in \mathbb{C}^n, k \in \mathbb{C}$ に対して次が成立する.

(i) $(\mathbb{a}+\mathbb{b}, \mathbb{c}) = (a_1+b_1)\overline{c_1} + \cdots + (a_n+b_n)\overline{c_n} = a_1\overline{c_1} + \cdots + a_n\overline{c_n} + b_1\overline{c_1} + \cdots + b_n\overline{c_n} = (\mathbb{a}, \mathbb{c}) + (\mathbb{b}, \mathbb{c})$

(ii) $(k\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (ka_1)\overline{b_1} + \cdots + (ka_n)\overline{b_n} = k(a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}) = k(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

(iii) $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n} = \overline{b_1\overline{a_1}} + \cdots + \overline{b_n\overline{a_n}} = \overline{b_1\overline{a_1} + \cdots + b_n\overline{a_n}} = \overline{(\mathbb{b}, \mathbb{a})}$

(iv) $\mathbb{R} \ni (\mathbb{a}, \mathbb{a}) = a_1\overline{a_1} + \cdots + a_n\overline{a_n} = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \geqq 0$, 等号成立は $\mathbb{a} = \mathbb{o}$ のみ.

また, $\mathbb{a}$ の長さを $\|\mathbb{a}\| := \sqrt{(\mathbb{a}, \mathbb{a})}$ で定義する.

(2) (,) を使い $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底が定まる. **(5.6)**

$\mathbb{C}^n$ の基底からシュミットの直交化法で正規直交基底が作れる. **(5.8)**

定義【随伴行列】

複素行列 A に対し,

$$A^* := {}^t\overline{A}$$

補題【随伴公式】

$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{C}^n$, n 次複素正方行列 A に対し,

$$(A\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\mathbb{a}, A^*\mathbb{b})$$

証明 :

5.10 の補題と同様にして,

$(A\mathbb{a}, \mathbb{b}) = {}^t(A\mathbb{a})\,\overline{\mathbb{b}} = {}^t\mathbb{a}\,{}^tA\,\overline{\mathbb{b}} = {}^t\mathbb{a}\,\overline{{}^t\overline{A}}\,\overline{\mathbb{b}} = {}^t\mathbb{a}\,\overline{A^*}\,\overline{\mathbb{b}} = {}^t\mathbb{a}\,\overline{A^*\mathbb{b}} = (\mathbb{a}, A^*\mathbb{b})$ □

6.3　エルミット行列・実対称行列の固有値と固有ベクトル

定義

実対称行列 $A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 実正方行列 A が対称行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^t A = A \Leftrightarrow A^* = {}^t\overline{A} = {}^t A = A$

複素正方行列 A がエルミット行列 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A^* = A$

定理

A をエルミット行列または実対称行列とする.

(1) A の固有値はすべて実数.

(2) $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{C}^n$ が A の固有ベクトルであって, 固有値がそれぞれ λ, μ とする.
$\lambda \neq \mu$ ならば $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ が直交する.

証明 :

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値, $\mathbb{w}$ を λ に属する固有ベクトルとする.

$(A\mathbb{w}, \mathbb{w}) = (\lambda\mathbb{w}, \mathbb{w}) = \lambda(\mathbb{w}, \mathbb{w}) \cdots [1]$

一方, 随伴公式より $(A\mathbb{w}, \mathbb{w}) = (\mathbb{w}, A^*\mathbb{w})$ また, 仮定より A は $A^* = A$ を満たすので

$(A\mathbb{w}, \mathbb{w}) = (\mathbb{w}, A^*\mathbb{w}) = (\mathbb{w}, A\mathbb{w}) = (\mathbb{w}, \lambda\mathbb{w}) = \overline{(\lambda\mathbb{w}, \mathbb{w})} = \overline{\lambda}\,(\mathbb{w}, \mathbb{w}) \cdots [2]$

$\mathbb{w} \neq \mathbb{o}$ より $(\mathbb{w}, \mathbb{w})$ は正の実数なので [1]=[2] より $\lambda = \overline{\lambda}$. よって λ は実数.

(2) 仮定より $A^* = A$, $A\mathbb{u} = \lambda\mathbb{u}$, $A\mathbb{v} = \mu\mathbb{v}$

$\lambda(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = (\lambda\mathbb{u}, \mathbb{v}) = (A\mathbb{u}, \mathbb{v}) \underset{(1)}{=} (\mathbb{u}, A^*\mathbb{v}) = (\mathbb{u}, A\mathbb{v}) = (\mathbb{u}, \mu\mathbb{v}) = \overline{(\mu\mathbb{u}, \mathbb{v})} = \overline{\mu}(\mathbb{u}, \mathbb{v})$

ここで (1) より固有値はすべて実数となるので $\overline{\mu} = \mu$.　$\therefore \lambda(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \mu(\mathbb{u}, \mathbb{v})$

$\lambda(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \mu(\mathbb{u}, \mathbb{v}) \Leftrightarrow 0 = \lambda(\mathbb{u}, \mathbb{v}) - \mu(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = (\lambda - \mu)(\mathbb{u}, \mathbb{v})$

また, 仮定より $\lambda \neq \mu \Leftrightarrow \lambda - \mu \neq 0$ なので $(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = 0$.

よって $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ の内積が 0 なので $\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ は直交している.　□

系[1)]

n 次実対称行列 A に対し, 各固有空間の正規直交基底を並べると $\mathbb{R}^n$ の正直交基底を得る.

$\because$

6.4 の定理より A は対角化可能であるから, 固有空間の基底を並べると $\mathbb{R}^n$ の基底となる. あとは固有空間の基底を正規直交基底にしているので当然 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる.　□

[1)] 本当は次のページの最後に入れたかったが, スペースの関係でこちらに書いた.

6.4 実対称行列の直交行列による対角化

命題

A : 正方行列とする.
$P^{-1}AP$ が上三角行列になるような正則行列 P が存在する. (**4.12**)
このとき A が実行列で固有値がすべて実数ならば P は直交行列とできる.

証明 :
P の列ベクトルは A の固有ベクトルと, それらと基底になるようなベクトルを補ったものである. シュミットの直交化法 (**5.8**) によりそれらの基底は正規直交基底にすることができる.
すなわち P の列ベクトルを正規直交基底とできる.
よって **5.11** の定理より P は直交行列とできる. □

定理

n 次正方行列 A に対して,

A は実対称行列 $\Longleftrightarrow$ A は適当な直交行列 U によって対角化可能, すなわち ${}^tUAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

証明 :
$(\Rightarrow)$
A を n 次実対称行列とすると, 複素数範囲では重複も込めて n 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ をもつ.
6.3 の定理 (1) よりこれらはすべて実数である. したがって命題より直交行列 U が存在して,

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と三角化できる. 仮定より $U^{-1} = {}^tU, A = {}^tA$ であるから,
${}^t(U^{-1}AU) = {}^t({}^tU{}^tAU) = {}^tU{}^t({}^tA){}^t({}^tU) = {}^tUAU = U^{-1}AU$. よって $U^{-1}AU$ は対称行列.

$${}^t(U^{-1}AU) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} = U^{-1}AU$$

となるから $* = O$ であるので $U^{-1}AU$ は対角行列となる. したがって A は対角化可能.
$(\Leftarrow)$
A は直交行列 U によって $U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と対角化できるとする.
対角行列であるから当然 ${}^t(U^{-1}AU) = U^{-1}AU \cdots [1]$ を満たす.
一方, ${}^tU = U^{-1}$ であるから, ${}^t(U^{-1}AU) = {}^t({}^tUAU) = {}^tU{}^tAU = U^{-1}{}^tAU \cdots [2]$ となる.
$[1] = [2]$ であるから $U^{-1}AU = U^{-1}{}^tAU$. この両辺に左から U, 右から U^{-1} をかけると,
$A = {}^tA$ となるので, A は実対称行列. □

7　2 次形式

7.1　2 次曲線

定義【2 次曲線】

$f(x,y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(b_1x + b_2y) + c$ (2 次式) に対して，
方程式 $f(x,y) = 0$ で定まる $\mathbb{R}^2$ 内の曲線（点の集まり）を $\boxed{\text{2 次曲線}}$ という．

例（2 次曲線）

(1) $f(x,y) = y - x^2$: 放物線　(2) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$: 円　(3) $f(x,y) = xy - 1$: 双曲線

(4) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - 1$ について，変数変換 $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$ とする．

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 1 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - 1 = \frac{1}{2}(x-y)(x+y) - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) - 1 = uv - 1 = f(u,v)$$

$(x,y) = (\sqrt{2}, 0) \leftrightarrow (u,v) = (1,1)$

uv 座標で見ると $v = \dfrac{1}{u}$. すなわち (3) の xy 座標での概形と同じである． $\therefore$ uv 座標は xy 座標を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転

行列を用いると，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

円

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r > 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \qquad (a, b > 0, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \ ^{1)} \begin{cases} x = a\cosh\theta \\ y = b\sinh\theta \end{cases} \qquad (a, b > 0,)$$

放物線

$$y^2 = 4px \qquad (p > 0)$$

これらの曲線を**円錐曲線**という．

[1] $\cosh\theta := \dfrac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \sinh\theta := \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$

7.2　実 2 次形式

定義【実 2 次形式】

$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ について，2 次の項だけからなる実係数の多項式

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

を $\boxed{\text{実 2 次形式}}$ という．また，$i > j$ のとき $a_{ij} = a_{ji}$ とおくと $A = (a_{ij})_{ij}$ は対称行列．

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1, & \cdots & , x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t\mathbb{x} A \mathbb{x}$$

と表せる．この A を f の**表現行列**という．

定義

2 次形式 f, g の表現行列を A, B とする．

2 次形式 f, g が同値 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 表現行列 A, B に対し，ある直交行列 P が存在して $B = {}^tPAP$

命題

実 2 次形式は次の $F_{a,b}$ と同値．

$$F_{a,b} = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_b^2$$

ただし，$0 \leqq a \leqq b \leqq n$, $b = \mathrm{rank} A$.　(n は変数の数，A は表現行列)

証明：
6.4 の定理より，実対称行列 A に対し，${}^tUAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となる直交行列 U が存在する．また **6.3** の定理より固有値はすべて実数となるので，
$\lambda_1, \ldots, \lambda_a > 0, \lambda_{a+1}, \ldots, \lambda_b < 0, \lambda_{b+1}, \ldots, \lambda_n = 0$ とする．ここで，

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_a}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{a+1}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_b}}, 1, \ldots, 1 \right) \text{ とおくと，}$$

$${}^t(UP)A(UP) = {}^tP({}^tUAU)P = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{a \text{ 個}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{(b-a) \text{ 個}}, 0, \ldots, 0).$$

よって $b = \mathrm{rank}\big({}^t(UP)A(UP)\big) =$ [1]$\mathrm{rank}A$ となる．　□

[1] rank の性質として，$A : m \times n$ 行列，$B : m$ 次正則行列，$C : n$ 次正則行列とするとき，
$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(B^{-1}B)A(CC^{-1}) = \mathrm{rank}B^{-1}(BAC)C^{-1} \leqq \mathrm{rank}(BAC)C^{-1} \leqq \mathrm{rank}BAC \cdots [1]$
$\mathrm{rank}BAC \leqq \mathrm{rank}BA \leqq \mathrm{rank}A, \mathrm{rank}BAC \leqq \mathrm{rank}AC \leqq \mathrm{rank}A \cdots [2]$
[1], [2] により $\mathrm{rank}BAC = \mathrm{rank}BA = \mathrm{rank}AC = \mathrm{rank}A$ であることがわかる．

7.3　2 次曲面

3 変数 $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ についての 2 次方程式は

$$0 = f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = {}^t\mathbb{x}A\mathbb{x} + 2{}^t\mathbb{b}\mathbb{x} + c \qquad (A : \text{対称行列}) \cdots [1]$$

定義

$\mathbb{d}$ が 2 次曲面の中心 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A\mathbb{d} + \mathbb{b} = \mathbb{o}$

2 次曲面を簡単にする手順

(i) 新たな座標 $\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ を $\mathbb{x} = \mathbb{x}' + \mathbb{d}$ で定義する.

(ii) 座標変換 $\mathbb{x} = U\mathbb{x}'$ (U : 直交行列) を行う.
[1] に代入すると $0 = {}^t\mathbb{x}A\mathbb{x} + c' = {}^t\mathbb{x}'({}^tUAU)\mathbb{x}' + c'$
A は対称行列より ${}^tUAU$ が対角行列となるような直交行列 U が存在. すなわち ${}^tUAU = \mathrm{diag}(a,b,c)$

2 次曲面の**標準形**は次のようになる.

$$0 = \begin{pmatrix} x, & y, & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d = ax^2 + by^2 + cz^2 + d \qquad (\det A \neq 0)$$

$d \neq 0$ のとき $d = -1$ とする.

(I) $a,b,c > 0$ なら「**楕円面**」　(II) $a,b > 0, c < 0$ なら「**一葉双曲面**」

(III) $a > 0, b,c < 0$ なら「**二葉双曲面**」　(IV) $a,b,c < 0$ なら「**空集合**」

参考文献

[1] 川久保 勝夫　（1999）　『線形代数学 [新装版]』　日本評論社