双対作用素と Schauder の定理

S17M066 中橋健太郎 *

概要

数学では, しばしば "同一視" を行うことにより議論を簡単な場合に帰着させることが多い. しかし, "何" によって同一視されているかを記述しているものは多くない. 本論文では, "何" によって同一視されているかを明確にした上で, 証明を与えた. 頁数の関係で, 触れられなかった定義や命題の証明, 例など (加筆・修正含む) については, 脚注のリンク先に掲載予定であるので, そちらを参照されたい. 本文において, 可換体 $\mathbf{K}$ は実数全体 $\mathbf{R}$ または複素数全体 $\mathbf{C}$ であるとする.

1 基礎事項

1.1 Hahn-Banach の定理

線型空間における線型写像についての重要な結果として次の定理が知られている.[1)]

事実 1.1 (Hahn-Banach の拡張定理 1). E を $\mathbf{K}$ 上の線型空間, $G \subseteq E$ を部分空間とする. 写像 $p : E \to [0, \infty)$ と線型写像 $g : G \to \mathbf{K}$ が, 任意の $x, y \in E, z \in G, \lambda \in \mathbf{K}$ に対して

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \qquad |g(z)| \leqslant p(z) \tag{1.1}$$

を満たすとき, E 上の線型写像 $f : E \to \mathbf{K}$ が存在し, 任意の $x \in E, z \in G$ に対して

$$f(z) = g(z) \quad \text{かつ} \quad |f(x)| \leqslant p(x) \tag{1.2}$$

が成り立つ.

1.2 線型作用素

$\mathbf{K}$ 上のノルム空間 X, Y に対して, 写像 $T : X \to Y$ が, 任意の $x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ を満たすとき, T を**線型作用素**と呼ぶ. 線型作用素 $T : X \to Y$ が**連続**であるとは, $x \in X$ に収束する X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して, $\|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことをいう. また, T が**有界**であるとは, ある定数 $M \geqslant 0$ が存在し, 任意の $x \in X$ に対して, $\|Tx\|_Y \leqslant M \|x\|_X$ が成り立つことをいう. T が有界であることと T が連続であることは同値である. X から Y への有界な線型作用素全体のなす集合を $\mathscr{B}(X, Y)$ で表す. $\mathscr{B}(X, Y)$ は演算

$$T + S : X \ni x \longmapsto Tx + Sx \in Y, \quad \alpha T : X \ni x \longmapsto \alpha Tx \in Y \qquad \big(T, S \in \mathscr{B}(X, Y)\big)$$

により線型空間の構造をもつ. また,

$$\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} := \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X \leqslant 1}} \|Tx\|_Y \qquad \big(T \in \mathscr{B}(X, Y)\big)$$

によりノルム空間の構造をもつ. さらに, Y が完備であるとき, $\mathscr{B}(X, Y)$ は Banach 空間となる.

1.3 双対空間

線型作用素 $T : X \to Y$ において, $Y = \mathbf{K}$ であるものを**線型汎函数**と呼ぶ. 有界線型汎函数全体のなす集合 $\mathscr{B}(X, \mathbf{K})$ を X' で表し, X の**双対空間**と呼ぶ. $\mathbf{K}$ は完備であるから, ノルム空間 X の双対空間 X' もまた Banach 空間となる. ノルム空

* `https://nkmath.github.io`

1) "拡張定理" というお気持ちは, 部分的に定義されていたものを, 部分的には同じで, なおかつその性質を全体でも定義できるというものである.

間に関する重要な結果として, 次の定理がある. これもまた, Hahn-Banach の定理と呼ばれる.

定理 1.2 (Hahn-Banach の拡張定理 2). E を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間, $G \subseteq E$ を部分空間とする. このとき, 任意の $g \in G'$ に対して, 次を満たす $f \in E'$ が存在する：

$$f|_G = g \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}. \tag{1.3}$$

定理 1.2 の証明. $p : E \to [0, \infty)$ を $p(x) := \|g\|_{G'} \|x\|_E$ で定めると, (1.1) を満たすので, 事実 1.1 により, ある線型汎函数 $f : E \to \mathbf{K}$ が存在し,

$$f(x) = g(x) \qquad (\forall x \in G) \tag{1.4}$$

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (\forall x \in E) \tag{1.5}$$

を満たす. (1.5) より $\|f\|_{E'} \leqslant \|g\|_{G'}$ を得る. よって $f \in E'$ である. また, (1.4) より, 任意の $x \in G$ に対して $|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E$ となるので, $\|g\|_{G'} \leqslant \|f\|_{E'}$ を得る. ゆえに $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. □

系 1.3. E を $\mathbf{K}$ 上の自明でないノルム空間とする. $x_0 \in E \setminus \{0\}$ に対して, 次を満たすような $f \in E'$ が存在する：

$$f(x_0) = \|x_0\|_E \quad \text{かつ} \quad \|f\|_{E'} = 1. \tag{1.6}$$

系 1.3 の証明. $\mathbf{K}x_0 := \{\alpha x_0 \,|\, \alpha \in \mathbf{K}\}$ とおくと, $\mathbf{K}x_0$ は E の部分空間である. ここで, $G := \mathbf{K}x_0$ とおき G 上の写像 $g : G \to \mathbf{K}$ を $g(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|_E$ で定めると, g は明らかに線型であり, 任意の $\alpha x_0 \in \mathbf{K}x_0$ に対して $\|\alpha x_0\|_E = |\alpha| \|x_0\|_E = |\alpha \|x_0\|_E| = |g(\alpha x_0)|$ より $\|g\|_{G'} = 1$ を得るから $g \in G'$. よって, 定理 1.2 により, ある $f \in E'$ が存在して, $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|_E$ かつ $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1$ となる. □

系 1.3 から, ノルム空間 X の双対空間 X' は "多く" の元をもつことがわかる.

系 1.4. E をノルム空間とする. このとき, 任意の $x \in E$ に対して, 次が成り立つ：

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} = 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leqslant 1}} |f(x)|. \tag{1.7}$$

系 1.4 の証明.

$x \in E$ とする. $x = 0$ のときは明らかであるから $x \neq 0$ とする. いま, 任意の $f \in E'$ に対して, $|f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\|_E$ より $\sup\left\{|f(x)|/\|f\|_{E'} \,\middle|\, f \in E', f \neq 0\right\} \leqslant \|x\|_E$ を得る. また, $x \neq 0$ なので, 系 1.3 により, ある $f \in E'$ が存在して, $f(x) = \|x\|_E$ かつ $\|f\|_{E'} = 1$ が成り立つから, $\sup\left\{|f(x)|/\|f\|_{E'} \,\middle|\, f \in E', f \neq 0\right\} \geqslant |f(x)|/\|f\|_{E'} = |f(x)| = \|x\|_E$ を得る. ゆえに等号が成り立つ. 3 項目, 4 項目の等号は上限の性質から簡単にわかる. □

1.3.1 双対の記号

以後, ノルム空間 X の元 x とその双対空間 X' の元 f における記号として $f(x) = \langle f, x \rangle = {}_{X'}\langle f, x \rangle_X$ とかく. さらに, 双対空間 X' の元を一般に x' などとかく. 系 1.4 から, $x \in X$ と $x' \in X'$ のどちらを変数とみてもよい. また, 系 1.3 より, 任意の $x' \in X'$ に対して, ${}_{X'}\langle x', x \rangle_X = 0$ ならば $x = 0$ である.

1.3.2 二重双対空間

ノルム空間 X の双対空間 X' をノルム空間としての双対空間 $(X')' =: X''$ を X の**二重双対空間**と呼ぶ. X から X'' への写像 J_X を ${}_{X''}\langle J_X x, x' \rangle_{X'} := {}_{X'}\langle x', x \rangle_X$ により定めると, 系 1.4 から

$$\|J_X x\|_{X''} = \|x\|_X$$

を得る. よって, J_X は等長線型である. J_X を**標準的単射**あるいは**標準対応**と呼ぶ. 標準対応 J_X により, "ノルム空間" として $X \subseteq X''$ とみなすことができる. これが所謂, X を X'' の部分集合として **"同一視"** するということである.

2　双対作用素

以後, X, Y を $\mathbf{K}$ 上のノルム空間とする．$T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, その双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ を定義する．

2.1　双対作用素の定義

補題 2.1. $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ と $y' \in Y'$ に対して, 写像 $f : X \to \mathbf{K}$ を

$$f(x) := {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y \qquad (x \in X)$$

で定めると, $f \in X'$ である．

補題 2.1 の証明. まず, f は線型である．実際, 任意の $x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して, $y' \in Y'$ と $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ の線型性より $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = {}_{Y'}\langle y', T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle_Y = \alpha\, {}_{Y'}\langle y', Tx_1\rangle_Y + \beta\, {}_{Y'}\langle y', Tx_2\rangle_Y = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ となる．また, 任意の $x \in X$ に対して $|f(x)| = |{}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y| \leqslant \|y'\|_{Y'} \|Tx\|_Y \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \|x\|_X$ より $\|f\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る．$y' \in Y',\ T \in \mathscr{B}(X, Y)$ より $\|y'\|_{Y'} < \infty$ かつ $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} < \infty$ となるので $\|f\|_{X'} < \infty$ である．よって $f \in X'$.　□

定義 2.2 (双対作用素). $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, その双対作用素 $T' : Y' \to X'$ を次で定める：

$${}_{X'}\langle T'y', x\rangle_X := {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y \qquad (y' \in Y',\ x \in X).$$

定理 2.3. $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ に対して, 双対作用素 T' は $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ であって $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$.

定理 2.3 の証明. 補題 2.1 より, 任意の $y' \in Y'$ に対して $\|T'y'\|_{X'} \leqslant \|y'\|_{Y'} \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ なので, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ を得る．よって $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$. 逆向きは, T' の双対作用素 $T'' := (T')' : X'' \to Y''$ を考える．まず, 任意の $y' \in Y'$ に対して, ${}_{Y''}\langle J_Y(Tx), y'\rangle_{Y'} = {}_{Y'}\langle y', Tx\rangle_Y = {}_{X'}\langle T'y', x\rangle_X = {}_{X''}\langle J_X x, T'y'\rangle_{X'} = {}_{Y''}\langle T''(J_X x), y'\rangle_{Y'}$ であるから,

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X \tag{2.1}$$

を得る．標準対応 J_X, J_Y の等長性より, 任意の $x \in X$ に対して

$$\|Tx\|_Y = \|J_Y(Tx)\|_{Y''} = \|T''(J_X x)\|_{Y''} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|J_X x\|_{X''} = \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \|x\|_X$$

が成り立つので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')}$ を得る．また, 前半の証明により $\|T''\|_{\mathscr{B}(X'',Y'')} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$ となるので, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} \leqslant \|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')}$. ゆえに, $\|T'\|_{\mathscr{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$.　□

2.2　Schauder の定理

ノルム空間 E に対して, $B_E := \{x \in E \mid \|x\|_E \leqslant 1\}$ とする．

2.2.1　コンパクト作用素

ノルム空間 X, Y に対し, 線型作用素 $T : X \to Y$ が**コンパクト**であるとは, $T(B_X)$ の閉包 $\overline{T(B_X)}$ が Y においてコンパクト集合であることをいう．X から Y へのコンパクト作用素全体のなす集合を $\mathscr{K}(X, Y)$ で表すと, $\mathscr{K}(X, Y) \subset \mathscr{B}(X, Y)$ である．線型作用素 $T : X \to Y$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X の任意の有界点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対し, Y の点列 $\{Tx_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束部分列をもつことである．これは距離空間におけるコンパクト集合の特徴づけによって示される．

2.2.2　Ascoli-Arzelà の定理

コンパクト距離空間 K 上の複素数値連続函数全体のなす集合 $C(K)$ の部分集合 S が**同程度連続**であるとは, 任意の $y \in K, \varepsilon > 0$ に対して, y を含む開集合 U が存在して, 任意の $f \in S$ に対して, $x \in U$ のとき, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことである．また, S が**一様有界**であるとは, ある定数 $M > 0$ が存在し, 任意の $f \in S$ に対して, $\sup\{|f(x)| \mid x \in K\} \leqslant M$ が成り立つことである．$C(K)$ に関する重要な結果として次の定理が知られている．

事実 2.4 (Ascoli-Arzelà の定理). K をコンパクト距離空間とする．$C(K)$ の部分集合 S が一様有界かつ同程度連続ならば, S 内の任意の函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は K 上で一様収束する部分列をもつ．

2.2.3 双対作用素のコンパクト性

$T \in \mathscr{B}(X,Y)$ の双対作用素 $T' \in \mathscr{B}(Y',X')$ についての結果として, 定理 2.3 よりノルムが等しいこと, すなわち, 長さが双対においても引き継がれることがわかった．では, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ のとき, その双対作用素 T' にもコンパクト性が引き継がれるのかどうかが気になる．それについての結果が次である．

定理 2.5 (Schauder の定理). X をノルム空間, Y を Banach 空間とする．このとき, 以下が成り立つ：

$$T \in \mathscr{K}(X,Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad T' \in \mathscr{K}(Y',X').$$

定理 2.5 の証明.

($\Longrightarrow$) $K := \overline{T(B_X)}$ とおくと, $T \in \mathscr{K}(X,Y)$ より K はコンパクト集合である．また, 集合 $\left\{ y'|_K \,\middle|\, y' \in B_{Y'} \right\}$ を $B_{K'}$ と表すと, $B_{K'}$ は $C(K)$ の部分集合である．このとき, $B_{K'}$ は一様有界である．実際, 任意の $z' \in B_{K'}$, $z \in K$ に対して, $|{}_{Y'}\langle z', z\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'}\|z\|_Y \leqslant \|z\|_Y$ となる．いま, $z \in K = \overline{T(B_X)}$ より, B_X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 自然数 n を十分大きくとれば $\|z\|_Y - \|Tx_n\|_Y \leqslant \|z - Tx_n\|_Y < \varepsilon$ が成り立つ．すなわち, $\|z\|_Y < \varepsilon + \|Tx_n\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)} + \varepsilon$ が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だったので $\|z\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となる．よって, $\|z'\|_{Y'} \leqslant \|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ となり, $\|T\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ は z' に依らないので, $B_{K'}$ は一様有界であることがわかる．また, $B_{K'}$ は同程度連続である．実際, 任意の $z_1 \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して, K の開集合 $B(z_1;\varepsilon)$ を取ると, $z_1 \in B(z_1;\varepsilon)$ であり, 任意の $z' \in B_{K'}$ に対して, $z_2 \in B(z_1;\varepsilon)$ のとき, $|{}_{Y'}\langle z', z_1\rangle_Y - {}_{Y'}\langle z', z_2\rangle_Y| = |{}_{Y'}\langle z', z_1 - z_2\rangle_Y| \leqslant \|z'\|_{Y'}\|z_1 - z_2\|_Y \leqslant \|z_1 - z_2\|_Y < \varepsilon$ となる．ここで, $B_{Y'}$ の任意の点列を $\{y'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると, $B_{K'}$ は一様有界かつ同程度連続であるから, Ascoli-Arzelà の定理 (事実 2.4) より, K 上で一様収束する部分列 $\left\{y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ が存在する．よって,

$$\begin{aligned}
\left\|T'y'_{n_j} - T'y'_{n_k}\right\|_{X'} &= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{X'}\left\langle T'\left(y'_{n_j} - y'_{n_k}\right), x\right\rangle_X\right| && \because T'\text{の線型性.} \\
&= \sup_{x\in B_X}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, Tx\right\rangle_Y\right| && \because T'\text{の定義.} \\
&\leqslant \sup_{y\in K}\left|{}_{Y'}\left\langle y'_{n_j} - y'_{n_k}, y\right\rangle_Y\right| && \because T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)} = K. \\
&\longrightarrow \quad 0 \quad (j,k\to\infty) && \because \left\{y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}\text{ は } C(K) \text{ 上の Cauchy 列.}
\end{aligned}$$

を得る．したがって, $\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は X' の Cauchy 列である．また, X' の完備性より, $\left\{T'y'_{n_j}\right\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束列となる．ゆえに, T の双対作用素 T' はコンパクト作用素である． //

($\Longleftarrow$) X の任意の有界点列を $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ とすると, 標準対応 J_X の等長性より, $\{J_X x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は有界点列となる．いま, T' の双対作用素 $T'' : X'' \to Y''$ を考えると, 前半の証明により, T'' はコンパクト作用素となるので, $\{T''J_X x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束部分列 $\{T''J_X x_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ をもつ．また, 定理 2.3 の証明中の式 (2.1) により, $\{J_Y T x_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束列であるから, Cauchy 列となる．さらに, 標準対応 J_Y の等長性から, $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ も Cauchy 列となる．仮定より Y は完備であったから $\{Tx_{n_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ は収束する．ゆえに, T はコンパクト作用素である． □

参考文献

[1] Haïm Brezis 著・藤田宏監訳・小西芳雄訳, 「関数解析 その理論と応用に向けて」, 産業図書.

[2] 荷見守助・長宗雄・瀬戸道生共著, 「関数解析入門 線型作用素のスペクトル」, 内田老鶴圃.

[3] 宮島静雄著, 「関数解析」, 横浜図書.

[4] 内田伏一著, 「集合と位相」, 裳華房.