

# 微分積分学 問題集

## はじめに

これは大学1年次の微分積分学の講義で学習した定義・定理を用いて解くことのできる問題（主に演習でやったプリントの問題）などを簡単にまとめたものです。多少タイプミス等があるかもしれませんが、ご了承ください。すべての内容が収録されているわけではありませんが、復習などご自由に役立ててください。目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます。復習に役立てる方々はこちらの微分積分学の主な定義・定理、公式の証明を見ながらやるといいと思います。また解答はこちらのフォルダーにあります。その他、微積IV（瓜屋先生）の過去問（2017年度）の解答やレポートの解答例もありますが、パスワードをかけています。一度自分でやってみた後などにみるといいと思います。あと勉強の仕方ですが、意外とわかっているつもりでも表記の仕方がまづかったり、本当の意味をきちんと理解していないことが多いので人に説明などをしてみるといいと思います。説明することによって理解がより深まると思います。また難易度の高い問題では「そんな解き方思いつかねーよ!」みたいな問題があると思います。そんな問題に出会ったときは与えられた問題から何がとりあえず求まるかということやなぜそのような解法が思いつくのかということを考えたりSAの人たちや先生に聞いたりするといいと思います。あとそれと一番の基本なのですが多くの人が忘れがちなのが、定義をきちんと覚えるということです。これができていないとどうにもなりません。これができてかつ定理の意味などを理解する（その定理の何がうれしいのか?を考える。）. 問題が解けるというのは、その副産物のようなものです、って瓜屋先生が言っていました。笑。まあお話はこんなところくらいにしてテスト勉強および復習頑張ってください。

内容に不備や落丁、質問等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします。

目次

1	微積 I (松村先生)	1
1.1	数列 . . . . .	1
1.2	極限 . . . . .	2
1.3	関数の連続性 . . . . .	2
1.4	簡単な微分 . . . . .	3
1.5	接線の方程式 . . . . .	4
1.6	合成関数の微分 . . . . .	4
1.7	対数微分 . . . . .	5
1.8	様々な関数の微分 (まとめ) . . . . .	5
1.9	逆関数 . . . . .	6
2	微積 II (井上先生)	6
2.1	逆三角関数 . . . . .	6
2.2	記述問題 (逆三角関数) . . . . .	7
2.3	簡単な $n$ 次導関数 . . . . .	7
2.4	ライプニッツの公式を使う $n$ 次導関数 . . . . .	8
2.5	いろんな $n$ 次導関数 (まとめ) . . . . .	8
2.6	ロピタルの定理 . . . . .	9
2.7	平均値の定理 . . . . .	10
2.8	ロピタルの定理を用いた極限の計算 (まとめ) . . . . .	10
2.9	簡単なマクローリン展開の問題 . . . . .	11
2.10	簡単なテイラー展開の問題 . . . . .	11
2.11	$n$ 次マクローリン展開 . . . . .	12
2.12	記述問題 . . . . .	12
2.13	マクローリン展開 ( $\infty$ ) . . . . .	13
2.14	マクローリン展開を応用した極限 . . . . .	13
2.15	マクローリン展開を応用した無限級数の和 . . . . .	14
2.16	関数の増減凹凸表とグラフの概形 . . . . .	14
2.17	極値などを求める問題 . . . . .	15
2.18	増減凹凸表とグラフの概形の応用 . . . . .	15
3	微積 III (鬼塚先生)	16
3.1	簡単な不定積分 . . . . .	16
3.2	標準的? な不定積分 . . . . .	16
3.3	置換積分法 . . . . .	17
3.4	部分積分法 . . . . .	17
3.5	部分分数分解 . . . . .	18
3.6	まとめ . . . . .	19
3.7	区分求積法, 定積分の定義 . . . . .	20
3.8	記述問題 . . . . .	21
4	微積 IV (瓜屋先生)	21
4.1	定積分 (置換積分・部分積分も含む.) . . . . .	21
4.2	広義積分 . . . . .	22
4.3	広義積分の収束・発散 . . . . .	23
4.4	増減凹凸表とグラフの概形から面積を求める問題 . . . . .	24
4.5	比較定理を使う問題 . . . . .	25
4.6	ちょっと難しい定積分 . . . . .	25
4.7	そこそこ難しい定積分 . . . . .	26
4.8	特殊? な三角関数の定積分 . . . . .	26
4.9	曲線で囲まれた面積を求める問題 . . . . .	27
4.10	体積を求める問題 . . . . .	27
4.11	面積及び体積を求める問題 . . . . .	28
4.12	計算がめんどくさい問題 . . . . .	29
4.13	媒介変数表示 . . . . .	30
4.14	記述問題 . . . . .	31

1 微積 I (松村先生)

1.1 数列

**1** 漸化式  $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$  で定義された数列  $\{a_n\}$  について, 次の問いに答えよ.

(1)  $a_n < 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で成り立つことを示せ.

(2)  $a_n < a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) が成り立つことを示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

## 1.2 極限

2 次の極限值を求めよ.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{4n - 1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right) e^{2x}$

## 1.3 関数の連続性

3 関数  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  について次の問いに答えよ.

(1) 関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  の定義域を求めよ.

(2) 関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が定義域内で連続であることを示せ.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  を求めよ. また,  $g(x)$  は  $x = 3$  で連続であるか答えよ.

(4) 関数  $g(x)$  を拡張した関数

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & (x \neq 3) \\ 6 & (x = 3) \end{cases}$$

は  $x = 3$  で連続であるか答えよ.

#### 1.4 簡単な微分

4 次の関数の導関数を求めよ.

(1)  $y = x^{11}$

(2)  $y = \frac{1}{x^3}$

(3)  $y = \sqrt[3]{x^2}$

(4)  $y = e^x$

(5)  $y = \log |x|$

(6)  $y = \sin x$

(7)  $y = \cos x$

(8)  $y = \tan x$

(9)  $y = 3x^2 + 6x$

(10)  $y = x^4 e^x$

(11)  $y = 4 \sin x \cos x$

(12)  $y = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$

(13)  $y = \frac{1}{(x^2 - 1)}$

(14)  $y = (x^3 - 3)(x + 1)(x^2 + 2)$

(15)  $y = -3x^2 \sqrt[3]{x}$

(16)  $y = \frac{2\sqrt{x} - 3}{x}$

(17)  $y = \sin x + \log |x| + x^4 e^x$

(18)  $y = \frac{x^4 + 2x - 3}{\sqrt{2}x}$

### 1.5 接線の方程式

5  $y = \sqrt{x}$  について, 次の問いに答えよ.

(1) 点  $x = 4$  における接点を求めよ.

(2)  $f(x) = \sqrt{x}$  とするとき,  $f(x)$  の導関数と  $x = 4$  における微分係数を求めよ.

(3)  $x = 4$  における接線の方程式を求めよ.

6 次の関数の ( ) 内の点における接線の方程式を求めよ.

(1)  $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$  ( $x = 4$ )

(2)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $x = \log 2$ )

### 1.6 合成関数の微分

7 関数  $y = e^{x^2+3x}$  について以下の問いに答えよ.

(1)  $y = e^u$ ,  $u = f(x)$  の合成関数が  $y = e^{x^2+3x}$  になるような  $f(x)$  を求めよ.

(2)  $y = e^u$  と (1) で得た関数  $u = f(x)$  の導関数  $\frac{dy}{du}$ ,  $\frac{du}{dx}$  をそれぞれ求めよ.

(3) 合成関数の微分公式  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  を用いて,  $y = e^{x^2+3x}$  の導関数を求めよ. ただし,  $u$  が残らないよう注意すること.

8 次の関数の導関数を求めよ. (合成関数の微分)

(1)  $y = \sqrt{\tan x + 1}$

(2)  $y = (2x^2 + 1)^{10}$

(3)  $y = \sin^4 x$

(4)  $f(x)$  が微分可能であるとする.  $f(x^2)$  の導関数を求めよ.

(5)  $\{f(x)\}^2$

(6)  $\log |f(x)|$  ただし  $f(x) \neq 0$

### 1.7 対数微分

9 関数  $y = x^{\cos x}$  ( $x > 0$ ) の導関数を以下の問いにしたがって求めよ.

(1) 両辺の対数を取り, その後, 右辺に対数法則を用いて整理せよ.

(2) (1) で得た等式の両辺を  $x$  について微分せよ. (左辺に注意)

(3)  $y'$  を求めよ. ただし  $y$  が残らないように注意すること.

10 次の関数の導関数を対数微分を使って求めよ.

(1)  $y = x^x$  ( $x > 0$ )

(2)  $y = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}}$

### 1.8 様々な関数の微分 (まとめ)

11 次の関数の導関数を求めよ.

(1)  $y = \frac{x^5 - x^2 + 1}{2x^4}$

(2)  $y = (x+2)(x^2-3)$

(3)  $y = 2 \cos(2x^3 + 3)$

(4)  $y = \log |\sin x \cos x|$

(5)  $y = -3xe^{-x^2+3x}$

(6)  $y = (\sin x)^x$  ( $0 < x < \pi$ )

### 1.9 逆関数

12 次の関数の逆関数を求めよ. 定義域も記すこと.

(1)  $y = 3x - 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

(2)  $y = \sqrt{x - 1}$  ( $x \geq 1$ )

(3)  $y = (x - 2)^2$  ( $x \leq 2$ )

(4)  $y = e^{x-1}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

13 逆関数の微分公式を用いて

$$y = \sin^{-1} x \quad (-1 < x < 1)$$

の微分 (導関数) を求めよ.

## 2 微積 II (井上先生)

### 2.1 逆三角関数

1 次の逆三角関数の値を求めよ.

(1)  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2)  $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3)  $\sin^{-1}(-1)$

(4)  $\tan^{-1}(-1)$

(5)  $\sin^{-1}\left(\sin \frac{3}{5}\pi\right)$

(6)  $\sin^{-1}\left(\sin \frac{7}{5}\pi\right)$

## 2.2 記述問題（逆三角関数）

2 次の問いに答えよ.

(1)  $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1} x$  を満たす  $x$  を求めよ.

(2)  $y = \sin^{-1}(1 - 2^x)$  の定義域と値域を求めよ.

(3)  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) を示せ.

## 2.3 簡単な $n$ 次導関数

3 次の関数の  $n$  次導関数  $y^{(n)}$  を求めよ.

(1)  $y = 2^x$

(2)  $y = \log x$

(3)  $y = x^\alpha$

(4)  $y = \frac{1}{1-x}$

(5)  $y = \sin x$

(6)  $y = \cos x$



2.4 ライブニッツの公式を使う  $n$  次導関数

4 次の関数の  $n$  次導関数を求めよ.

(1)  $y = x^2 \log x$

(2)  $y = x^4 e^x$

2.5 いろんな  $n$  次導関数 (まとめ)

5 次の関数の  $n$  次導関数を求めよ.

(1)  $y = \frac{x^2}{1-x}$

(2)  $y = (x^2 + 2x) \cos x$

6  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \ (x \neq 0), f(0) = 0$  とする.  $f(x)$  は  $x = 0$  で微分可能ではあるが,  $f''(0)$  は存在しないことを示せ.

## 2.6 ロピタルの定理

7 次の極限を求めよ. ロピタルの定理を使う際はどの不定形か明記せよ. ロピタルの定理を使わずに解ける問題, 使ってはいけない問題もあるので注意.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+1}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\sin x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^2}{x}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$

(7)  $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$

(8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log x$

8  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$  を以下の手順で計算せよ.

(1)  $y = x^x$  とおき, 両辺の対数を取り, 右辺を式変形せよ.

(2) (1) を使って  $\lim_{x \rightarrow +0} \log y$  を計算せよ.

(3) (2) と  $y = e^{\log y}$  を使って,  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$  を求めよ.

9 次の極限を求めよ.

ロピタルの定理を用いるときは, どの不定形であるか明記すること.

(1)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^2}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

2.7 平均値の定理

10 次の関数  $f(x)$  に対して,  $( )$  内の区間  $[a, b]$  で

平均値の定理  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$  を使用した際の  $c \in (a, b)$  の値を具体的に求めよ.

(1)  $f(x) = x^3$   $([1, 3])$

(2)  $f(x) = x^3 - x$   $([-2, 2])$

11 平均値の定理を用いて

$$e^a < \frac{e^b - e^a}{b - a} < e^b \quad (a < b)$$

を示せ.

2.8 ロピタルの定理を用いた極限の計算（まとめ）

12 次の極限を求めよ. ロピタルの定理を使う際は, どの不定形であるか明記すること.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{\sin ax} \quad (a \neq 0)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{100}}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{cx^n + d}{ax^m + b} \quad (a > 0, c > 0, m, n \in \mathbb{N})$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

## 2.9 簡単なマクローリン展開の問題

- 13 次の関数の 3 次マクローリン展開を求めよ. ただし

$$R_4 = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!} x^4 \quad (0 < \theta < 1)$$

とする.

(1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

(2)  $f(x) = e^{2x}$

- 14  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$  のマクローリン展開を利用して,  $\sqrt[3]{1.1}$  の近似値を求める. 次の問いに答えよ.

(1)  $f(x)$  の 2 次までのマクローリン展開を求めよ.

(2) (1) の右辺に  $x = 0.1$  を代入して,  $\sqrt[3]{1.1}$  の近似値を小数点以下 4 桁まで求めよ.

## 2.10 簡単なテイラー展開の問題

- 15 次の関数の ( ) 内の点における 3 次テイラー展開を求めよ. ただし  $x = a$  における 3 次テイラー展開の剰余項

$$R_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x - a)^4 \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

とする.

(1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$  ( $x = -2$ )

(2)  $f(x) = \log x$  ( $x = 1$ )

### 2.11 $n$ 次マクローリン展開

16 次の関数の  $n$  次マクローリン展開を求めよ. ただし剰余項

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

とする. また具体的な数値は範囲は最初の項から 4 つ程度でよい.

(1)  $f(x) = \cos x$

(2)  $f(x) = \log(1+x)$

(3)  $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \text{ と定義する.}$$

### 2.12 記述問題

17 次の問いに答えよ.

(1)  $f(x)$  は  $[a, b]$  において 1 回微分可能とする.

$m \leq |f'(x)| \leq M$  ( $M \geq m > 0$  の定数) が成り立つとき, 不等式

$$m(b-a) \leq |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $f(x) = \sqrt{1+x}$  ( $x \in [0, h]$ ) で考えることにより,  $h > 0$  に対して

$$1 + \frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h} < 1 + \frac{h}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 関数  $f(x)$  が区間  $I$  で単調増加であることの定義をかけ.

(4) 関数  $f(x)$  が区間  $I$  で広義単調減少であることの定義をかけ.

### 2.13 マクローリン展開 (∞)

18 次の関数のマクローリン展開を求めよ,p78 の定理 2 を使ってよい.

(1)  $f(x) = \cos 2x$

(2)  $f(x) = e^{-3x}$

(3)  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

(4)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(5)  $f(x) = \sin^2 x$

### 2.14 マクローリン展開を応用した極限

19 マクローリン展開を利用して, 次の極限を求めよ.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x - \sin x}$

2.15 マクローリン展開を応用した無限級数の和

20 次の無限級数の和を求めよ.

(1)  $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \dots$

(2)  $1 + \log 2 + \frac{1}{2!}(\log 2)^2 + \frac{1}{3!}(\log 2)^3 + \dots$

(3)  $(\sqrt{e} - 1) - \frac{(\sqrt{e} - 1)^2}{2} + \frac{(\sqrt{e} - 1)^3}{3} - \dots$

(4)  $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$

2.16 関数の増減凹凸表とグラフの概形

21 関数  $y = (x^2 - 2)e^x$  の増減・凹凸・極値・変曲点を調べ, 増減凹凸表を書き, グラフの概形をかけ.

22 関数  $y = \log(2 - \sin x)$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) の増減・凹凸・極値・変曲点を調べ, 増減凹凸表を書き, グラフの概形をかけ.

2.17 極値などを求める問題

- 23
- 関数  $y = x^3 - 3x^2 - 9x$  について次の問いに答えよ.
- (1) 極値を求めよ. また, そのときの  $x$  の値を求めよ.

- (2)  $0 \leq x \leq 4$  における最大値と最小値を求めよ.  
また, そのときの  $x$  の値も求めよ.

- (3) 方程式  $x^3 - 3x^2 - 9x = k$  の実数解の個数は  $k$  の値によってどのように変化するか答えよ.

2.18 増減凹凸表とグラフの概形の応用

- 24
- 関数  $y = \frac{\log x}{x}$  について次の問いに答えよ.
- (1) 増減凹凸表を書き, グラフの概形をかけ.

- (2) 関数の最大値を求めよ.

- (3)  $e^\pi$  と  $\pi^e$  はどちらが大きいのか.



### 3 微積 III (鬼塚先生)

#### 3.1 簡単な不定積分

1 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int 3x^2 dx$

(2)  $\int e^x dx$

(3)  $\int \frac{1}{x} dx$

(4)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

(5)  $\int \sin x dx$

(6)  $\int \cos x dx$

(7)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

(8)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(9)  $\int e^{2x} dx$

(10)  $\int \frac{5x^7 + 3x^3}{x^4} dx$

#### 3.2 標準的? な不定積分

2 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \sin^2 x \cos x dx$

(2)  $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(3)  $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

(4)  $\int x^6 e^{x^7} dx$

(5)  $\int \frac{1}{(3x-2)^4} dx$

(6)  $\int \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right) (x^3 + \log x)^{10} dx$

(7)  $\int \frac{1}{x(\log x)^4} dx$

(8)  $\int \tan x dx$

### 3.3 置換積分法

3 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \frac{1}{x(\log x)^3} dx$

(2)  $\int \frac{2 + \log x^3}{x} dx$

(3)  $\int (-x^2) \sin(x^3 + 2) dx$

(4)  $\int \frac{\log x}{x(\log x + 1)^2} dx$

(5)  $\int \tan^4 x dx$

### 3.4 部分積分法

4 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int x e^x dx$

(2)  $\int \log x dx$

(3)  $\int e^x \sin x dx$

(4)  $\int (x^2 + 6) \sin x dx$

3.5 部分分数分解

5 次の分数を部分分数分解せよ.

(1)  $\frac{3}{x^2 - 4}$

(2)  $\frac{1}{x^3 + 1}$

(3)  $\frac{x^2}{(x - 5)^3}$

6 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \frac{3}{x^4 - 2} dx$

(2)  $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$

(3)  $\int \frac{x^2}{(x - 5)^3} dx$

### 3.6 まとめ

7 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int e^{4x+3} dx$

(2)  $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

(3)  $\int \left(5x^4 + \frac{1}{x}\right) (x^5 + \log x)^5 dx$

(4)  $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$

(5)  $\int x \cos 2x \, dx$

(6)  $\int \frac{x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1} dx$

8 次の  に適切な値を書け.

(1)  $\frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{\text{}}{x-1} + \frac{\text{}}{x+2} + \frac{\text{}}{x-3}$

(2)  $\frac{x^3 - x + 1}{(x+1)^4} = \frac{\text{}}{x+1} + \frac{\text{}}{(x+1)^2} + \frac{\text{}}{(x+1)^3} + \frac{\text{}}{(x+1)^4}$

(3)  $\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{\text{}}{x-2} + \frac{\text{}}{x-3} + \frac{\text{}}{(x-3)^2}$

9 次の不定積分を求めよ.

(1)  $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 2x + 2}{x(x+2)(x^2+1)} dx$

(2)  $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} dx \quad (a > 0)$

### 3.7 区分求積法, 定積分の定義

10 区分求積法を用いて次の定積分を求めよ.

(1)  $\int_0^1 x^3 dx$

(2)  $\int_0^1 3x^2 dx$

11 定積分の定義に従って,  $\int_{11}^{18} 3 dx$  を求めよ.

3.8 記述問題

12 関数  $f(x)$  は区間  $[1, 4]$  において積分可能とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 分割  $\Delta_1$  を  $\Delta_1 : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$  としたとき

定積分  $\int_1^2 f(x)dx$  の定義を答えよ.

(2) 定積分の定義に従って, 以下の等式が成立することを証明せよ.

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

13 関数  $f(x)$  が  $C^1$  級または連続微分可能であるとはどのようなことか.

4 微積 IV (瓜屋先生)

4.1 定積分 (置換積分・部分積分も含む.)

1 次の定積分を求めよ.

(1)  $\int_1^3 e^x dx$

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx$

(3)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} \, dx$

(4)  $\int_1^e \log x \, dx$

(5)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

## 4.2 広義積分

2 次の定積分を求めよ.

(広義積分も含む. 必ずしも値が求まるとは限らない.)

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

(2)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(3)  $\int_0^1 \log x \, dx$

(4)  $\int_0^1 e^{x^2} x^3 dx$

(5)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

(6)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(7)  $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} dx$

(8)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

4.3 広義積分の収束・発散

3  $\alpha < 0$  とする. 次の広義積分の収束・発散を調べよ.

(1)  $\int_0^1 x^\alpha dx$

(2)  $\int_1^\infty x^\alpha dx$

(3)  $\int_0^1 (1-x)^\alpha dx$

(4)  $\int_1^\infty (1+x)^\alpha dx$



4.4 増減凹凸表とグラフの概形から面積を求める問題

4  $y = x^2 \log x$  ( $x > 0$ )  $\cdots$  (♯) について以下の問いに答えよ.

(1) (♯) の増減凹凸表とグラフの概形をかけ.

(2) (♯) と  $x$  軸で囲まれている図形の面積を求めよ.

5  $y = (\log x)^2$  ( $x > 0$ )  $\cdots$  (b) について次の問いに答えよ.

(1) 原点  $(0, 0)$  から (b) にひき得る接線の方程式を求めよ.

(必ずしも接線が 1 本だけとは限らない.)

(2) (b) の増減凹凸表とグラフの概形をかけ.

また (1) で求めた接線もかけ.

(3)  $\int_0^1 (\log x)^2 dx$  を求めよ.

4.5 比較定理を使う問題

6  $n$  を 2 より大きい自然数とする.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

が収束することを示せ.

7  $n$  を自然数とする.

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$$

が収束することを示せ.

4.6 ちょっと難しい定積分

8  $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$  を求めよ. ただし  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  を使ってよい.

4.7 そここそ難しい定積分

9  $\int_0^\infty |\sin x| e^{-x} dx$  を求めよ.

4.8 特殊?な三角関数の定積分

10 次の定積分を求めよ.

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

(2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

#### 4.9 曲線で囲まれた面積を求める問題

11 次の図形の面積を求めよ.

(1)  $y = -x^2 + 4x - 2$  と  $y = 1$  により囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

(2) 2 曲線  $y = x^3$  と  $y = x$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

(3) 3 曲線  $y = \sin x$ ,  $y = x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  で囲まれる図形の面積  $S$ .

#### 4.10 体積を求める問題

12 次の図形の体積を求めよ.

(1)  $y = \log x$  の  $1 \leq x \leq e$  の部分を  $x$  軸を中心として回転させた立体の体積  $V$  を求めよ.

(2) 底面の半径が  $r$ , 高さが  $h$  の円錐の体積  $V$  を求めよ.

4.11 面積及び体積を求める問題

- 13
- $xy + x + y = 1$  と  $x$  軸,  $y$  軸が囲む図形を  $D$  とする. 以下の問いに答えよ.
- (1)  $D$  の面積  $S$  を求めよ.

- (2)  $D$  を  $x$  軸を中心として回転させてできる立体の体積  $V$  を求めよ.

- (3)  $D$  を  $y$  軸を中心として回転させてできる立体の体積  $V$  を求めよ.

- 14
- $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  の  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  の部分と  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = 0$  が囲む図形を  $D$  とする.
- (1)  $D$  の面積  $S$  を求めよ.

- (2)  $D$  を  $x$  軸を中心として回転させてできる立体の体積を求めよ.

4.12 計算がめんどくさい問題

- 15  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で, 3 曲線  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$  により囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

- 16  $a > 0$  とする.

$$S(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - \sin x| dx$$

を  $a$  を用いて表せ.

さらに  $a > 0$  が変化するとき,  $S(a)$  の最小値を求めよ.

#### 4.13 媒介変数表示

17 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = t^2 + t - 2 \end{cases}$$

で表される曲線と  $x$  軸で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

(2)  $K$  を  $x$  軸を中心として回転させてできる立体の体積  $V$  を求めよ.

(3) サイクロイドの弧長  $l$  を求めよ.

18 媒介変数表示された曲線 (サイクロイド)

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases}, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について, 次の問いに答えよ.

(1)  $x$  軸とサイクロイドで囲まれる図形  $K$  の面積  $S$  を求めよ.

4.14 記述問題

19  $-\pi < x < \pi$  とする.  $\tan \frac{x}{2} = t$  とおくとき

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であることを示せ.

20  $n > 2$  のとき

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} dx < \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ.

21  $f(x)$  が  $(a, b]$  で連続だが有界でないとする.  $f(x)$  が  $(a, b]$  で広義積分可能であることの定義を述べよ.

22  $f(x)$  は  $(-\infty, b]$  で連続であるとする.  $f(x)$  が  $(-\infty, b]$  で広義積分可能であることの定義を述べよ.

23  $f(x) : \text{区間 } [a, b] \text{ で連続}$   $g(t) : \text{区間 } [\alpha, \beta] \text{ で微分可能}$   
また  $g(\alpha) = a, g(\beta) = b, g'(x) : [\alpha, \beta]$  で連続とする.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt$$

が成り立つことを示せ.

24  $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

が成り立つことを示せ.