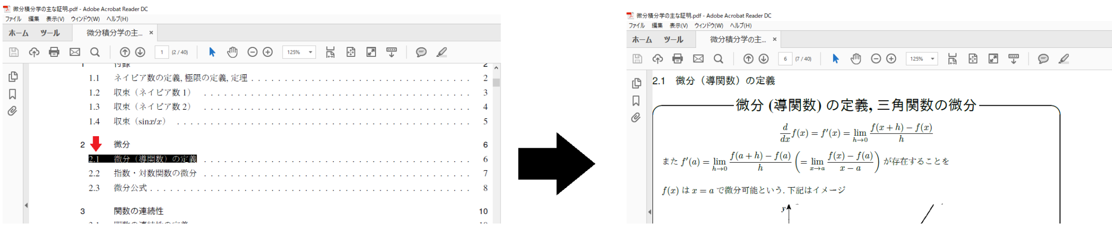
多変数の微分積分学の主な定義と定理, 公式の証明

はじめに

これは大学 2 年次の微分積分学の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです． 多少タイプミス等があるかもしれませんが，ご了承ください．すべての内容が収録されているわけではありませんが，復習などご自由に役立ててください．目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照) 本 PDF では，ベクトル表示は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}$，実数，複素数，自然数全体の集合等を $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{N}$ 等いわゆる太文字で表記する．関数のグラフに関するところは LaTeX で作図するのは非常にめんどくさいので言葉の説明のみにとどまる．

内容に不備や落丁等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします．

1)



[1] 目次の使い方

目次

第 I 部
多変数関数の微分

1　1 変数関数と 2 変数関数

定義

(1) x の値を決めると値 y が決まるとき，y は x の $\boxed{\text{1 変数関数}}$ という．
関数の名前を f とするとき，$y = f(x)$ と表す．

(2) x, y の値を決めると値 z が決まるとき，z は x, y の $\boxed{\text{2 変数関数}}$ という．
関数の名前を f とするとき，$z = f(x, y)$ と表す．

(3) $x_1, \ldots, x_n$ の値を決めると値 x_0 が決まるとき，x_0 は $x_1, \ldots, x_n$ の $\boxed{n\text{ 変数関数}}$ という．
関数の名前を f とするとき，$x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)$ と表す．

定義【関数の定義域】

変数は常に実数値[1]をとる場合を考える．
関数が定義されるような変数の値の範囲を関数の $\boxed{\text{定義域}}$ という．

<u>例</u>

(1) $f(x) = x^3 - x$ の定義域は $\mathbf{R}$.

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $x < 0$ では実数値をとらないので $x \geqq 0$.

(3) $f(x, y) = x + y$ の定義域は $\mathbf{R}^2$

(4) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の定義域は $1 - x^2 - y^2 < 0$ では実数値をとらないので，
$1 - x^2 - y^2 \geqq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leqq 1$. すなわち原点中心の半径 1 の単位円板上である．

[1] 虚数は扱わない．虚数も扱う複素関数というものもあるが，ここでは扱わない．

2　平面の方程式，関数のグラフ

平面の方程式[1]

点 (α,β,γ) を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ に垂直な平面の方程式は，

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0.$$

$d=a\alpha+b\beta+c\gamma$ とおけば，平面の一般の方程式は，

$$ax+by+cz=d.$$

考え方：
空間内の点 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ に垂直な平面を考える．
ここで平面上の任意の点 $P=(x,y,z)$ を考えるから，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ である．
$\overrightarrow{AP}=(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)$ であるから，

$$0=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(a,b,c)\cdot(x-\alpha,y-\beta,z-\gamma)=a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma).$$

となる．ここで式を展開すると，$ax+by+cz-a\alpha-b\beta-c\gamma=0.$

$$ax+by+cz=a\alpha+b\beta+c\gamma.$$

(右辺)$=d$ とおくと一般の方程式

$$ax+by+cz=d.$$

が得られる．　□

関数のグラフ

- 1 変数関数 $\cdots$ グラフは**曲線**.
- 2 変数関数 $\cdots z=f(x,y)$ を満たす点 (x,y,z) の集合を関数 $f(x,y)$ の**グラフ**という．グラフは**曲面**.

曲面を描くのは難しいので次の方法がある．
1. ベクトルを使う．
   ex) $z=x+y$ は上の平面の方程式より，$(1,1,-1)$ を法線ベクトルとする平面である．
2. z 軸に垂直な平面で切って考える．(等高線)
3. z 軸に平行な平面で切って考える．
4. コンピュータを使う．

[1] $c\neq 0$ のとき，上の式は $z=px+qy+r$ の形に変形できる．1 次関数 $f(x,y)=px+qy+r$ のグラフは，$px+qy-z=-r$. すなわち法線ベクトル $(p,q,-1)$ を持つ平面であることがわかる．

3 偏微分

3.1 偏微分の定義

$f(x,y)$ は $\begin{cases} y \\ x \end{cases}$ を定数とする $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ のみの 1 変数関数とみなせる．

$\begin{cases} y \\ x \end{cases}$ を一定にして，$f(x,y)$ を $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ に関して微分することを $\begin{cases} x \\ y \end{cases}$ で**偏微分**するといい，

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), f_x(x,y)}_{x\text{ で偏微分}}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), f_y(x,y)}_{y\text{ で偏微分}}$$

などとかく．[1)]

定義【偏導関数】

1. $y=b$ と固定し，$g(x)=f(x,b)$ とおく．このとき，

$$g'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}$$

が存在するとき，この値を (a,b) における $f(x,y)$ の x に関する**偏微分係数**といい，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ などとかく．
また，このとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で x について**偏微分可能である**という．

2. $x=a$ と固定し，$h(y)=f(a,y)$ とおく．このとき，

$$h'(b)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{h(b+\Delta y)-h(b)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}$$

が存在するとき，この値を (a,b) における $f(x,y)$ の y に関する**偏微分係数**といい，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ などとかく．
また，このとき $f(x,y)$ は点 (a,b) で y について**偏微分可能である**という．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ や } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ を } f(x,y) \text{ の } \boxed{\text{偏導関数}} \text{ という．}$$

偏導関数の定義

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_x(x,y)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)=\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

[1)] (x,y) は省略することが多い．

3.2　高次偏導関数

1 変数関数 $f(x)$ の場合，$f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ を (もしそれが存在すれば) 考えた．2 変数関数でも考えることができる．

定義【高次偏導関数】

$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合[1]で定義された 2 変数関数で，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在するとする．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x+\Delta x, y) - f_x(x,y)}{\Delta x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_y(x, y+\Delta y) - f_y(x,y)}{\Delta y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(x, y+\Delta y) - f_x(x,y)}{\Delta y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x+\Delta x, y) - f_y(x,y)}{\Delta x} \tag{4}$$

を **第 2 次偏導関数** という．同様にして n 次偏導関数も定義できる．

(1) は x で偏微分したものを x で偏微分．　(2) は y で偏微分したものを y で偏微分．
(3) は x で偏微分したものを y で偏微分．　(4) は y で偏微分したものを x で偏微分．

三角不等式

${}^\forall x, {}^\forall y \in \mathbf{R}$

$$\big||x| - |y|\big| \leqq |x+y| \leqq |x| + |y|$$

$\because$ $|x+y| \leqq |x| + |y|$ は両辺を 2 乗して $|x|^2 = x^2$ といった性質を用いて $xy \geqq 0$ または $xy < 0$ の場合分けをすると示せる．$\big||x| - |y|\big| \leqq |x+y|$ は $|x+y| \leqq |x| + |y|$ を用いて示す．
$|x| = |x+y-y| \leqq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$　$\therefore$ $|x| - |y| \leqq |x+y| \cdots$ [1]
$|y| = |y+x-x| \leqq |y+x| + |-x| = |x+y| + |x|$　$\therefore$ $|y| - |x| \leqq |x+y| \cdots$ [2]
よって [1], [2] より $\big||x| - |y|\big| \leqq |x+y|$　$\square$

---

[1] 平面 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 U が**開集合**であるとは，
U の各点 P に対して，P を中心とする正の半径を持つ円板で U が含まれるものが取れることをいう．

4 連続性

4.1 2 変数関数の極限

定義【2 変数関数の極限】

点 (x,y) が点 (a,b) 以外の点を通りながら，点 (a,b) に限りなく近づけた[1]とき，
関数 $f(x,y)$ が一定の値 L に近づく場合，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \qquad \text{または} \qquad (x,y)\to(a,b) \text{ のとき } f(x,y)\to L$$

とかく．また，この L を $(x,y)\to(a,b)$ のときの $f(x,y)$ の**極限**または**極限値**という．

発展 (ε-δ 論法)

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ s.t. } \forall(x,y): 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

<u>例題 (不定形の場合)</u>

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(x-a)^3-(y-b)^3}{(x-a)^2+(y-b)^2}$

この場合 $\dfrac{0}{0}$ 形となり，不定形である．ここで極座標を用いる．

$(x,y)\to(a,b) \Leftrightarrow (x-a,y-b)\to(0,0)$ であるから $\begin{cases} x-a=r\cos\theta \\ y-b=r\sin\theta \end{cases}$ と変換すると，
$(x-a,y-b)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$ である．

$$\frac{(x-a)^3-(y-b)^3}{(x-a)^2+(y-b)^2} = \frac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta-\sin^3\theta).$$

$$0 \leqq \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = |r(\cos^3-\sin^3\theta)| = r|\cos^3\theta-\sin^3\theta| \leqq r\left(\underbrace{|\cos^3\theta|}_{\leqq 1}+\underbrace{|-\sin^3\theta|}_{\leqq 1}\right) \leqq r(1+1) = 2r.$$

$\displaystyle \lim_{r\to 0} 0 = 0 = \lim_{r\to 0} 2r$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(x-a)^3-(y-b)^3}{(x-a)^2+(y-b)^2} = 0.$

[1] $(x,y)\to(a,b)$ の意味は (x,y) と (a,b) の距離が 0 近づく，すなわち $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\to 0$ という意味であり，
$\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ は $\displaystyle \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y)$ という意味ではない．

4.2 2 変数関数の連続

定義【連続性】

$$f(x,y) \text{ が点 } (a,b) \text{ で連続である} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

また $\mathbf{R}^2 \supset U$ 上のすべての点で $f(x,y)$ が連続であるとき，$f(x,y)$ は U 上で連続であるという.

定理

連続関数の和・差・積・商・定数倍は連続関数である.
また，連続関数同士の合成関数も連続である.
(この定理の証明は ε-δ 論法を用いるためここでは扱わない.)

<u>例</u>
関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0, & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

は $\mathbf{R}^2$ で連続かどうか.

${}^\forall(a,b) \neq (0,0)$ とすると，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a = g(a,b), \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b = h(a,b) \text{ より，}$$

$f(x,y)$ は $(x,y) \neq (0,0)$ で連続な関数 $g(x,y), h(x,y)$ の和・差・積・商であるから連続.

$(x,y) = (0,0)$ のとき，極座標変換して極限を計算すると (前頁参照)，

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. よって連続. したがって $f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ で連続. $\square$

4.3 2 次偏導関数と連続関数

定理

f を $\mathbf{R}^2$ の開集合で定義された 2 変数関数で，2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ が存在して，連続であるとする．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

が成り立つ．

証明：

点 (x_0, y_0) を f の定義域内の任意の点とする．ここで，

$$h(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right\}(x-x_0)(y-y_0)$$

とおくと $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right\} = -\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ が成り立つ．[1)]

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) > 0$ と仮定すると，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) < 0$ である．仮定の連続性より，

(x_0,y_0) を内部に含む微小な長方形 $[a,b]\times[c,d]$ においても $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} > 0, \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} < 0$ が成り立つ．

$$0 < \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)\,dy\right)dx = h(b,d) - h(a,d) - h(b,c) + h(a,c)$$

$$0 > \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y)\,dx\right)dy = h(b,d) - h(a,d) - h(b,c) + h(a,c)$$

となるが両方とも同じ値であるのに正負が異なるのは矛盾．逆もしかり．

したがって，$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = 0$ が成り立つ．よって $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ □

1) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ をそれぞれ計算してみるとわかる．

5　微分可能性と 1 次近似

5.1　1 変数関数の微分可能性

定義【1 変数関数の微分】

$$f(x) \text{ が } x \text{ で微分可能} \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \text{ が存在}$$

定理

$f(x)$ が x で微分可能

$\iff$ 次の (1),(2) を満たす定数 a と関数 g が存在.

$$f(x+\Delta x) = f(x) + a\Delta x + |\Delta x| g(\Delta x) \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta x) = 0 \tag{2}$$

証明：

($\Rightarrow$)

$f(x)$ が x で微分可能なので $f'(x)$ が存在する．このとき，$a = f'(x)$ とおく．

$\varphi(\Delta x) := \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \cdots [1]$ とすると $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = f'(x) - f'(x) = 0 \cdots [2]$

$[1] \times \Delta x$

$\Delta x\, \varphi(\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x) - \Delta x \underbrace{f'(x)}_{=a} \quad \therefore\ f(x+\Delta x) = f(x) + a\Delta x + \Delta x\, \varphi(\Delta x) \cdots [3]$

ここで $g(\Delta x) = \begin{cases} \varphi(\Delta x) & (\Delta x \geqq 0) \\ -\varphi(\Delta x) & (\Delta x < 0) \end{cases}$ とおくと，

$\begin{array}{l} \Delta x \geqq 0 \Rightarrow |\Delta x| g(\Delta x) = \Delta x\, \varphi(\Delta x) \\ \Delta x < 0 \Rightarrow |\Delta x| g(\Delta x) = -\Delta x\big(-\varphi(\Delta x)\big) = \Delta x\, \varphi(\Delta x) \end{array} \quad \therefore\ |\Delta x| g(\Delta x) = \Delta x\, \varphi(\Delta x)$

よって [3] より (1) は成立.

また [2] より $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} g(\Delta) = \lim_{\Delta x \to 0} (\pm\varphi(\Delta x)) = 0$ となるので (2) も成立.

($\Leftarrow$)

(1) より $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a + \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x)$ である.

$\left| \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x) \right| = \dfrac{|\Delta x|}{|\Delta x|} |g(\Delta x)| = |g(\Delta x)|$ となり，(2) より $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} |g(\Delta x)| = 0.$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(a + \frac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x) \right) = a$$

これは $f'(x) = a$ であることを示しているので $f(x)$ は x で微分可能.　□

5.2　2 変数関数の全微分可能の定義

定義【全微分】

$f(x,y)$ が (x,y) で $\boxed{\text{全微分可能である}}$ とは，次の (3),(4) を満たす定数 a,b と関数 g が存在すること.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + a\Delta x + b\Delta y + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, g(\Delta x, \Delta y) \tag{3}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} g(\Delta x, \Delta y) = 0 \tag{4}$$

定理

$f(x,y)$ が全微分可能ならば $f(x,y)$ は偏微分可能で,

$$a = \frac{\partial f}{\partial x},\ \ b = \frac{\partial f}{\partial y}$$

証明 :

$f(x,y)$ が全微分可能なので (3),(4) が成立.

(i) (3) の式で $\Delta y = 0$ とすると，$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2} = |\Delta x|$ であるから,

$$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + a\Delta x + |\Delta x| g(\Delta x, 0) \Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = a + \frac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x, 0)$$

$$\left|\frac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x, 0)\right| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta x|}|g(\Delta x, 0)| = |g(\Delta x, 0)|$$ となる.

(4) より $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} |g(\Delta x, 0)| = 0$, 両辺の極限 $(\Delta x \to 0)$ をとると,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(a + \frac{|\Delta x|}{\Delta x} g(\Delta x, 0)\right) = a.$$

これは $f(x,y)$ が x で偏微分可能かつ $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ であることを意味する.

(ii) (3) の式で $\Delta x = 0$ とすると，$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta y)^2} = |\Delta y|$ であるから,

$$f(x, y+\Delta y) = f(x,y) + b\Delta y + |\Delta y| g(0, \Delta y) \Leftrightarrow \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = b + \frac{|\Delta y|}{\Delta y} g(0, \Delta y)$$

$$\left|\frac{|\Delta y|}{\Delta y} g(0, \Delta y)\right| = \frac{|\Delta y|}{|\Delta y|}|g(0, \Delta y)| = |g(0, \Delta y)|$$ となる.

(4) より $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0} |g(0, \Delta y)| = 0$, 両辺の極限 $(\Delta y \to 0)$ をとると,

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left(b + \frac{|\Delta y|}{\Delta y} g(0, \Delta y)\right) = b.$$

これは $f(x,y)$ が y で偏微分可能かつ $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ であることを意味する.　□

5.3　偏微分可能性と連続性

定理

$$f(x,y) \text{ が偏微分可能で } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ が連続} \Longrightarrow f(x,y) \text{ は全微分可能.}$$

証明 :

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \bigl\{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\bigr\} + \bigl\{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\bigr\}$

左項について f は x で偏微分可能であるから, (ラグランジュの) 平均値の定理より,

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_x \Delta x, y+\Delta y) \text{ となる } \theta_x \in (0,1) \text{ が存在.}$$

$\varepsilon_x := \dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_x \Delta x, y+\Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ とすると,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \varepsilon_x\right) = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \Delta x\, \varepsilon_x$$

ここで仮定の連続性より, $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_x \Delta x, y+\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

よって $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$

同様に右項についても平均値の定理より,

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_y \Delta y) \text{ となる } \theta_y \in (0,1) \text{ が存在.}$$

$\varepsilon_y := \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_y \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ とすると,

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \varepsilon_y\right) = \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \Delta y\, \varepsilon_y.$$

仮定の連続性より, $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_y \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ であるから,

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

$$0 \leqq \left| \frac{\varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \overset{1)}{\leqq} \left| \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \overset{2)}{\leqq} |\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|$$

$\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \bigl(|\varepsilon_x| + |\varepsilon_y|\bigr) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} |\varepsilon_x| + \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} |\varepsilon_y| = 0$ であるから,

はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$

よって $\varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, g(\Delta x, \Delta y)$ と表せる.

したがって **5.2** の定理と以上のことより全微分可能の定義の (3),(4) を満たしている.　□

[1] $|\Delta x| = \sqrt{(\Delta x)^2} \leqq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, |\Delta y| = \sqrt{(\Delta y)^2} \leqq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. [2] 三角不等式.

5.4　接平面

接平面の方程式

$z=f(x,y)$ 上の点 $(x_0,y_0,z_0)\big(\Leftrightarrow f(x_0,y_0)=z_0\big)$ における接平面の方程式は，

$$z=z_0+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

また，この平面の法線ベクトルは，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right)$.

考え方：

$a=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),b=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を **5.2** の (3) に代入．

そして $x=x_0,y=y_0,\mathcal{R}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,g(\Delta x,\Delta y)$ とおく．すると，

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+\mathcal{R}$$

さらに $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$ とおくと，

$$f(x,y)=\underbrace{f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{1 次式（1 次近似）… 接平面}}+\underbrace{\mathcal{R}}_{(x,y)\text{ が }(x_0,y_0)\text{ の近くで小さい}}\qquad\square$$

例題

$z=xy$ の $(2,3,6)$ における接平面の方程式を求めよ．

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$ より，$\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,3)=3,\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,3)=2$. 接平面の方程式に代入すると，

$z=6+3(x-2)+2(y-3)=3x+2y-6$. よって求める接平面の方程式は $z=3x+2y-6$.

6　合成関数の微分

6.1　平面曲線, 合成関数の微分公式 (1)

定義

$x(t), y(t)$ を連続な 1 変数関数とするとき,

$$C(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

は平面曲線のパラメータ表示である.

$x(t), y(t)$ が微分可能であるとき, 曲線 $C(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ は微分可能であるといい,

$$\frac{dC}{dt} = C'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

と定義する.

合成関数の微分公式

$$\frac{d}{dt}f\big(C(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big)\frac{dy}{dt}$$

証明：

導関数の定義より, $\displaystyle \frac{d}{dt}f\big(C(t)\big) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{f\big(C(t+\Delta t)\big) - f\big(C(t)\big)}{\Delta t}\cdots[1]$

$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t), \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)\cdots[2]$ とする. f は全微分可能より **5.2** の (3),(4), 定理が成り立つ.
(3) の式に定理の式を代入して $x = x(t), y = y(t)$ とおくと,

$$f\Big(\underbrace{\underbrace{x(t)+\Delta x}_{=x(t+\Delta t)}, \underbrace{y(t)+\Delta y}_{=y(t+\Delta t)}}_{=C(t+\Delta t)}\Big)$$

$$= f\big(\underbrace{x(t), y(t)}_{=C(t)}\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\big(\underbrace{x(t), y(t)}_{=C(t)}\big)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\underbrace{x(t), y(t)}_{=C(t)}\big)\Delta y + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, g(\Delta x, \Delta y)$$

両辺から $f\big(C(t)\big)$ で引いて, Δt で割ると,

$$\frac{f\big(C(t+\Delta t)\big) - f\big(C(t)\big)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t}\, g(\Delta x, \Delta y)\cdots[3]$$

[2] より $\displaystyle \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}\ (\Delta t \to 0), \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}\ (\Delta t \to 0)\cdots[4]$

また [4] より $\displaystyle \left|\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t}\right| = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{|\Delta t|} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta t)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$

$$\to \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ (\Delta t \to 0)\cdots[5]$$

[2] より $\Delta t \to 0$ のとき $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. よって (4) より $g(\Delta x, \Delta y) \to 0\ (\Delta t \to 0)\cdots[6]$

したがって [3] で $\Delta t \to 0$ とすると, [1], [4], [5], [6] より,

$$\frac{d}{dt}f\big(C(t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big)\frac{dy}{dt}\quad\square$$

6.2　勾配ベクトル，合成関数の微分公式 (2)

定義【勾配ベクトル】

f を $\mathbf{R}^2$ の開集合で定義された 2 変数関数で，$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が存在するとする．このとき，

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

を f の $\boxed{\text{勾配ベクトル}}$ [1]という．$\mathrm{grad}\, f$ を ∇f と表すこともある．∇ はナブラと読む．

合成関数の微分公式は勾配ベクトルを用いて次のように表せる．

合成関数の微分公式

$$\frac{d}{dt} f\bigl(C(t)\bigr) = \mathrm{grad}\, f\bigl(C(t)\bigr) \cdot C'(t)$$

$\cdot$ はベクトルの内積を表す．

例題

$f(x, y) = xy$, $C(t) = (e^{2t}, e^t)$ とする．

$$\mathrm{grad}\, f = (y, x), \quad C'(t) = (2e^{2t}, e^t)$$

だから 公式に当てはめると，

$$\frac{d}{dt} f\bigl(C(t)\bigr) = y(2e^{2t}) + x(e^t) = e^t(2e^{2t}) + e^{2t}(e^t) = 2e^{3t} + e^{3t} = 3e^{3t}.$$

[1] 勾配を英語で gradient という．grad はこれを短縮したものである．

7 合成関数の偏微分

合成関数の偏微分公式

$g(u,v) = f\big(\phi(u,v), \psi(u,v)\big)$ とするとき,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

ただし $x = \phi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$.

考え方 :

合成関数の微分公式があった. (**6.1**) それの応用である.

$f(x,y) = f\big(\phi(u,v), \psi(u,v)\big) = g(u,v)$ とおく.

v を定数とみなして合成関数の微分公式を用いると u に関する偏導関数 (すなわち $t = u$ として)

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

まったく同様に u を定数とみなして v に関する偏導関数 (すなわち $t = v$ として)

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v}$$

を得る. □

8　方向微分係数・接平面

8.1　方向微分係数

定義[0)]

$$D_{\boldsymbol{v}}f(a,b) := \mathrm{grad}\, f(a,b)\cdot \boldsymbol{v}$$

を $f(x,y)$ の点 (a,b) における $\boldsymbol{v}$ 方向の 方向微分係数 という．

また，$\boldsymbol{v}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{v}}$ [1)]と表す．すなわち，

$$\hat{\boldsymbol{v}} := \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$$

命題

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，

$D_{\hat{\boldsymbol{v}}}f(a,b)$ の最大値は $\|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|$ で，$\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{grad}\, f(a,b)$ が同じ方向のとき．
$D_{\hat{\boldsymbol{v}}}f(a,b)$ の最小値は $-\|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|$ で，$\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{grad}\, f(a,b)$ が逆方向のとき．

証明：
$\mathrm{grad}\, f(a,b)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を $\theta \in [0,\pi]$ とする．$\boldsymbol{v}$ と $\hat{\boldsymbol{v}}$ は同じ方向なので，

$$D_{\hat{\boldsymbol{v}}}f(a,b) = \mathrm{grad}\, f(a,b)\cdot \hat{\boldsymbol{v}} = \|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|\,\underbrace{\|\hat{\boldsymbol{v}}\|}_{=1}\cos\theta = \|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|\cos\theta.$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なので $\theta = 0$ のとき最大値，$\theta = \pi$ のとき最小値となる．したがって，

(i) $\theta = 0$ のとき $\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{grad}\, f(a,b)$ は同じ方向で最大値 $\|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|$ をとる．

(ii) $\theta = \pi$ のとき $\boldsymbol{v}$ と $\mathrm{grad}\, f(a,b)$ は逆方向で最小値 $-\|\mathrm{grad}\, f(a,b)\|$ をとる．　□

[0)] 方向微分の定義はきちんとしたものが別にあるがここでは扱わないことにする．
[1)] 「$\hat{}$」はハットと読む．

8.2　接平面の方程式と方向微分係数

接平面の方程式 (5.4)

$z = f(x, y)$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{1}$$

考え方：

5.4 では $f(x, y)$ の (x_0, y_0) 付近での 1 次近似として考えた．ここでは接線で作られると考える．
zx 平面 ($y = y_0$ の切り口) での接線の方程式は,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \tag{2}$$

zy 平面 ($x = x_0$ の切り口) での接線の方程式は,

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{3}$$

また，接平面の方程式は x, y, z の 1 次式で (x_0, y_0, z_0) を通るので,

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \quad (A, B : \text{定数}) \cdots (*)$$

$y = y_0$ を (*) に代入すると，$z - z_0 = A(x - x_0)$．これは (2) と一致するから

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{4}$$

$x = x_0$ を (*) に代入すると，$z - z_0 = B(y - y_0)$．これは (3) と一致するから

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{5}$$

(4),(5) より $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$．したがって (1) の式を得る．　□

方向微分係数がどこに出てきたかというと,

接線の傾き，すなわち $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ が方向微分係数である．

9　陰関数の微分

9.1　等高線の接線

等高線 $\cdots$ 曲面 $z = f(x, y)$ の平面 $z = z_0$ による切り口.

等高線の接線の方程式

$f(x, y)$ を全微分可能な関数, z_0 を定数とするとき,
曲線 $f(x, y) = z_0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$\because$
8.2 の (1) に $z = z_0$ を代入するとえられる.　□

接線の方程式は内積を用いて, 次のように表せる.

$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

勾配ベクトルと接線方向のベクトルの内積が 0 なので, 勾配ベクトルと接線が垂直であることを示している.

<u>例題</u>
$x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は？

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおく. すると $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0$ であるから接線の方程式に代入すると,

$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0x + 2y_0y = 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 \Leftrightarrow x_0x + y_0y = {x_0}^2 + {y_0}^2$.

ここで (x_0, y_0) は $x^2+y^2 = 1$ 上の点だから ${x_0}^2+{y_0}^2 = 1$. したがって求める接線の方程式は $x_0x+y_0y = 1$.

9.2　陰関数の微分

定義【陰関数】

$f\bigl(x, \phi(x)\bigr) = 0$ を満たす $y = \phi(x)$ を $f(x, y) = 0$ で定められる $\boxed{\text{陰関数}}$ という.

例

(1) $f(x, y) = ax + by + c \ \ (a^2 + b^2 \neq 0)$

(i) $b \neq 0$ のとき $y = \dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \leftarrow$ これが陰関数.

(ii) $b = 0$ のとき $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{c}{a} \leftarrow$ これは「$y =$」の形でないので陰関数でない. 陰関数はない.

(2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ を y について解くと $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ ←2 つの陰関数がある.

陰関数の微分公式

$f(x, y) = 0$ の定める陰関数 $y = \phi(x)$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(x, \phi(x)\bigr) \neq 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\frac{f_x\bigl(x, \phi(x)\bigr)}{f_y\bigl(x, \phi(x)\bigr)} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigl(x, \phi(x)\bigr)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(x, \phi(x)\bigr)}$$

考え方:

$f\bigl(x, \phi(x)\bigr) = 0$ の両辺を x で微分すると, $\dfrac{d}{dx}f\bigl(x, \phi(x)\bigr) = 0 \cdots [1]$

ここで $C(x) = \bigl(x, \phi(x)\bigr)$ とおくと $C'(x) = \bigl(1, \phi'(x)\bigr)$. よって **6.2** の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}f\bigl(x, \phi(x)\bigr) = \frac{d}{dx}f\bigl(C(x)\bigr) = \operatorname{grad} f\bigl(C(x)\bigr) \cdot \bigl(1, \phi'(x)\bigr)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(C(x)\bigr), \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(C(x)\bigr)\right) \cdot \bigl(1, \phi'(x)\bigr) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(C(x)\bigr) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(C(x)\bigr)\phi'(x)$$

よって [1] より $\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigl(C(x)\bigr) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(C(x)\bigr)\phi'(x) = 0$. したがって $\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(C(x)\bigr) \neq 0$ のとき,

$$\phi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigl(C(x)\bigr)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(C(x)\bigr)} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigl(x, \phi(x)\bigr)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\bigl(x, \phi(x)\bigr)} \quad \square$$

9.3　陰関数定理

例

(1) $f(x,y)=ax+by+c \quad (a^2+b^2\neq 0)$

(i) $b\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\dfrac{a}{b}\leftarrow$ これは陰関数 $y=-\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{b}$ の傾きである．

(ii) $b=0$ のとき公式は使えないし，陰関数もない．

(2) $f(x,y)=x^2+y^2-1$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y} \quad (y\neq 0)$

$x^2+y^2-1=0$ 上の点 (x_0,y_0) における接線は，傾きが $-\dfrac{x_0}{y_0}$ であるから，

$y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)\Leftrightarrow y_0y-{y_0}^2=-x_0x+{x_0}^2\Leftrightarrow x_0x+y_0y={x_0}^2+{y_0}^2=1.$

$y_0=0$ のときは $x^2+y^2-1=0$ は $(1,0),(-1,0)$ を通る．そのような陰関数は $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ で 2 つある．

$y_0\neq 0$ のとき，(x_0,y_0) を通る陰関数はただ 1 つである．

陰関数定理

$f(x,y)$ は全微分可能で，$f(x_0,y_0)=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

$\Longrightarrow f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\phi(x)$ が $x=x_0$ の近くでただ一つ存在し，

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x,\phi(x)\bigr)}{\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x,\phi(x)\bigr)}$$

(証明はスペースの関係と難解なので省略する.)

10 2 次近似

10.1 1 変数関数の場合（テイラーの定理），微分作用素

Taylor の定理 (1 変数関数)

$x=a$ の近くで n 回微分可能な関数 $g(x)$ に対して，

$$g(x)=g(a)+g'(a)(x-a)+\frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$
$$R_n=\frac{g^{(n)}\bigl(a+\theta(x-a)\bigr)}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

となる θ が存在する．証明は 1 年次に学んでいるので省略. (ヒント：ロルの定理と帰納法を用いる.)

例

$n=2, x=a+\Delta x$ とおけば,

$$g(a+\Delta x)=g(a)+g'(a)\Delta x+R_2,\quad R_2=\frac{g''(a+\theta\Delta x)}{2!}(\Delta x)^2$$

これは **5** の微分可能性の定義を書き直した式と同等になっている．

参考：

$$g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}$$

次のページで扱う 2 変数関数の 2 次近似のために $n=3, x=1, a=0$ とすると,

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{g''(0)}{2}+R_3,\quad R_3=\frac{g^{(3)}(\theta)}{3!}(0<\theta<1) \tag{1}$$

を考えておく.

定義【微分作用素】

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\ \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

のように，$\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ の多項式を一般の多項式の展開や因数分解のように扱い，2 変数関数 $f(x,y)$ に作用するものとして考えられる．これを $\boxed{\text{微分作用素}}$ という.

10.2 2 変数関数の 2 次近似

2 変数関数の 2 次近似

$f(x,y)$ は (a,b) 近傍で 3 回連続的に偏微分可能とする．$h,k\in\mathbf{R}$ とする．このとき，

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+R_3$$

考え方：

$C(t):=(a+ht,b+kt),g(t)=f\big(C(t)\big)$ とおく．すると **6.1** の合成関数の微分公式より，

$$g'(t)=\frac{d}{dt}f\big(C(t)\big)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)\frac{d}{dt}(a+ht)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big)\frac{d}{dt}(b+kt)=h\frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)+k\frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big).$$

$$\begin{aligned}
g''(t)&=\frac{d}{dt}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}\big(C(t)\big)+k\frac{\partial f}{\partial y}\big(C(t)\big)\right)\\
&=h\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(C(t)\big)+k\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\big(C(t)\big)\right)+k\left(h\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(C(t)\big)+k\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(C(t)\big)\right)\\
&=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(C(t)\big)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(C(t)\big)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(C(t)\big).
\end{aligned}$$

よって **10.1** の (1) より，(スペースの関係で $+R_3$ は省略する.)

$$f(a+h,b+k)=f\big(C(1)\big)=g(1)=g(0)+g\prime(0)+\frac{g''(0)}{2}$$

$$=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}\big(C(0)\big)+k\frac{\partial f}{\partial y}\big(C(0)\big)+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(C(0)\big)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(C(0)\big)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(C(0)\big)\right)$$

$$=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\big(C(0)\big)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\big(C(0)\big)$$

$$=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$

したがって，

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+R_3 \quad \square$$

10.3　2 変数関数のテイラーの定理

Taylor の定理 (2 変数関数)

$f(x,y)$ は (a,b) 近傍で n 回連続的に偏微分可能とする．$h,k \in \mathbf{R}$ とする．このとき，

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b) + R_n$$
$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) \qquad (0 < \theta < 1)$$

$\because$ 2 次近似と同様.　□

11　2 変数関数の極値

11.1　極点と極値の定義, 臨界点

定義

関数 $f(x,y)$ について,

$$\text{点 } (a,b) \text{ の近くのすべての点 } (x,y) \text{ に対して，} f(a,b) \geqq f(x,y)$$

が成立するとき, (a,b) を関数 $f(x,y)$ の $\boxed{\text{極大点}}$, $f(a,b)$ を関数 $f(x,y)$ の $\boxed{\text{極大値}}$ という. また,

$$\text{点 } (a,b) \text{ の近くのすべての点 } (x,y) \text{ に対して，} f(a,b) \leqq f(x,y)$$

が成立するとき, (a,b) を関数 $f(x,y)$ の $\boxed{\text{極小点}}$, $f(a,b)$ を関数 $f(x,y)$ の $\boxed{\text{極小値}}$ という.

1 変数関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとる $\Rightarrow f'(a)=0 \Longleftrightarrow f'(a)\neq 0 \Rightarrow f(a)$ は極値でない.

定義【臨界点】

$f(x,y)$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合で定義された全微分可能な 2 変数関数とする. このとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

となる点 (a,b) を $\boxed{\text{臨界点}}$ [1]という.

<u>例題</u>

$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ の臨界点を求める.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-x^2-y^2}=0, \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2ye^{-x^2-y^2}=0$ を解くと $x=0, y=0$ より, 臨界点 $(0,0)$.

定理

$$f(x,y) \text{ が } (a,b) \text{ で極値をとるならば，} (a,b) \text{ は } f(x,y) \text{ の臨界点.}$$

<u>証明：</u>

(a,b) で $f(x,y)$ が極大とする. (極小も同様.) すると, 1 変数関数として考えると,

zx 平面での接線の傾きは $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$ である. 同様に zy 平面での接線の傾きは $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$.

よって $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ であるから, (a,b) は臨界点. $\square$

[1] 臨界点を英語で critical point という.

11.2　極値の判定法

極値の判定法 (1 変数関数の場合)

$$f'(a)=0,\quad \begin{array}{l} f''(a)>0 \Rightarrow f(x) \text{ は } x=a \text{ で極大値をとる} \\ f''(a)<0 \Rightarrow f(x) \text{ は } x=a \text{ で極小値をとる} \end{array}$$

証明は 1 年次に学んでいるので省略. (ヒント : 傾きが 0 と凸性を使う.)

極値の判定法 (2 変数関数の場合)

(a,b) を $f(x,y)$ の臨界点とする．$A:=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), B:=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), C:=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ とすると,

$$A>0, B^2-AC<0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極小点}$$
$$A<0, B^2-AC<0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極大点}$$

(証明は次のページでする.)

<u>例題</u>

$f(x,y)=\log(x^2+y^2+1)$ の極点と極値を求める.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+1}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+1}=0 \Rightarrow x=0, y=0 \text{ なので臨界点は } (0,0).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{x^2+y^2+1}-\frac{4x^2}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \therefore A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \therefore B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{x^2+y^2+1}-\frac{4y^2}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \therefore C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2.$$

$A=2>0, B^2-AC=0-4=-4<0$ であるから，$(0,0)$ は極小点で極小値は $f(0,0)=\log 1=0$.

11.3　極値の判定法の証明

証明：

(a,b) は $f(x,y)$ の臨界点なので $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$. また **10.2** の 2 次近似より,

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2}\left(h^2A+2hkB+k^2C\right)+R_3,$$

$$R_3=\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta h,b+\theta k)\ (0<\theta<1),\ \ P(h,k):=h^2A+2hkB+k^2C$$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}P(h,k)+R_3=P(h,k)\left(\frac{1}{2}+\frac{R_3}{P(h,k)}\right)$$

$h=r\cos\varphi, k=r\sin\varphi$ とすると, $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3}{P(h,k)}$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{1}{3!}\left(r\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+r\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta r\cos\varphi,b+\theta r\sin\varphi)}{Ar^2\cos^2\varphi+2Br\cos\varphi\, r\sin\varphi+Cr^2\sin^2\varphi}$$ 分母分子を r^2 で割る.

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r\,\frac{1}{3!}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a+\theta r\cos\varphi,b+\theta r\sin\varphi)}{A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi}=0.\quad \therefore \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_3}{P(h,k)}=0.$$

以下 $(h,k)\neq(0,0)$ が $(0,0)$ に十分近いとする. すると $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{R_3}{P(h,k)}\right)>0.$

$P(h,k)>0\Rightarrow f(a+h,b+k)-f(a,b)>0\Leftrightarrow f(a+h,b+k)>f(a,b)$ となり極小である.

$P(h,k)<0\Rightarrow f(a+h,b+k)-f(a,b)<0\Leftrightarrow f(a+h,b+k)<f(a,b)$ となり極大である.

$P(h,k)>0$ であるためには, $A\neq 0$ として平方完成すると,

$$P(h,k)=A\left(h^2+2\frac{B}{A}hk\right)+Ck^2=A\left\{\left(h+\frac{B}{A}k\right)^2-\frac{B^2-AC}{A^2}k^2\right\}$$

$k\neq 0$ のとき, $A>0, B^2-AC<0\Rightarrow P(h,k)>0.$

$k=0$ のとき, $P(h,k)=Ah^2\ \ (h\neq 0)$ よって $A>0\Rightarrow P(h,k)>0.$

$P(h,k)<0$ の場合も同様にして,

$k\neq 0$ のとき, $A<0, B^2-AC<0\Rightarrow P(h,k)<0.$

$k=0$ のとき, $P(h,k)=Ah^2\ \ (h\neq 0)$ よって $A<0\Rightarrow P(h,k)>0.$

したがって極値の判定法を得る.　□

11.4　鞍点・極値の判定法まとめ

11.2 では $B^2 - AC < 0$ の場合のみを考えた．$\underline{B^2 - AC > 0 \text{ を考える.}}$

(1) $A > 0, B^2 - AC > 0$ を仮定する．

(i) $h \neq 0, k = 0$ の場合 $\cdots P(h,k) = Ah^2 > 0$ であるから $f(a+h, b+k) > f(a,b)$ となり極小．

(ii) $h = -\dfrac{B}{A}k, k \neq 0$ の場合

$$P(h,k) = A\left(h + \frac{B}{A}k\right) - \frac{1}{A}(B^2 - AC)k^2 = -\frac{1}{A}(B^2 - AC)k^2 < 0 \text{ であるから,}$$

$f(a+h, b+k) < f(a,b)$ となり極大．

(2) $A < 0, B^2 - AC > 0$ を仮定する．

(i) $h \neq 0, k = 0$ の場合 $\cdots P(h,k) = Ah^2 < 0$ であるから $f(a+h, b+k) < f(a,b)$ となり極大．

(ii) $h = -\dfrac{B}{A}k, k \neq 0$ の場合

$$P(h,k) = A\left(h + \frac{B}{A}k\right) - \frac{1}{A}(B^2 - AC)k^2 = -\frac{1}{A}(B^2 - AC)k^2 > 0 \text{ であるから,}$$

$f(a+h, b+k) > f(a,b)$ となり極小．

(3) $A = 0, B^2 - AC > 0$ を仮定すると，$B^2 > 0 \quad \therefore B \neq 0$.

(i) $h = \dfrac{-C \pm 1}{2B}k, k \neq 0$ のとき $P(h,k) = 2B\left(\dfrac{-C \pm 1}{2B}k\right)k + Ck^2 = \pm k^2$.

(1),(2),(3) は切り口によって極大 or 極小になったりする．

このように $z = f(x,y)$ のグラフの切る方向によって，切り口の曲線が極大・極小になったりする臨界点を鞍点という．厳密な定義を下記に書いておく．

定義【鞍点】

点 (a,b) が関数 $f(x,y)$ の臨界点とする．以下の条件を満たすとき (a,b) は $\boxed{\text{鞍点}}$ という．

(i) (a,b) のどんな近くにも，ある点 (x_1, y_1) があって $f(a,b) < f(x_1, y_1)$.

(ii) (a,b) のどんな近くにも，ある点 (x_2, y_2) があって $f(a,b) > f(x_2, y_2)$.

極値の判定法 まとめ (2 変数関数の場合)

(a,b) を $f(x,y)$ の臨界点とする．$A := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), B := \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), C := \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ とすると，

$$A > 0, B^2 - AC < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極小点}$$
$$A < 0, B^2 - AC < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極大点}$$
$$A \in \mathbf{R}, B^2 - AC > 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は鞍点}$$

$B^2 - AC = 0$ の場合は A, B, C だけでは判定できない．

12　関数の最大・最小

12.1　1 変数関数の場合

1 変数関数の場合

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で微分可能とする.

- $f(x)$ は $[a, b]$ で最大値と最小値をとる.
- 最大点は極大点か端点 $(x = a, b)$ でとる.
- 最小点は極小点か端点 $(x = a, b)$ でとる.
- $f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとる $\Rightarrow f'(\alpha) = 0$.

まとめ

$f(x)$ の $[a, b]$ での**最大点・最小点**は**臨界点**か**端点**でとる.

<u>例</u>

$f(x) = x^3 - 3x$ の $[0, 3]$ での最大値を求める.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \longleftarrow \text{臨界点}.$$

$\underbrace{f(-1) = 2, f(1) = -2}_{\text{臨界点}}, \underbrace{f(0) = 0, f(3) = 18}_{\text{端点}}$. よって最大値は 18 で最大点は $x = 3$.

12.2　2 変数関数の最大・最小

定義

平面 ($\mathbf{R}^2$) 内の領域 D 上の関数 $f(x,y)$ について,

$$D \text{ 上の任意の点 } (x,y) \text{ に対して, } f(a,b) \geqq f(x,y)$$

が成り立つとき, $(a,b) \in D$ を関数 $f(x,y)$ の **最大点** といい, $f(a,b)$ を **最大値** という. また,

$$D \text{ 上の任意の点 } (x,y) \text{ に対して, } f(a,b) \leqq f(x,y)$$

が成り立つとき, $(a,b) \in D$ を関数 $f(x,y)$ の **最小点** といい, $f(a,b)$ を **最小値** という.

定義【有界】

$\mathbf{R}^2 \supset D$ が **有界** であるとは,

$$^{\exists}R > 0, \quad D \subset \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqq R^2 \right\}$$

を満たすことである.

定理

$f(x,y)$ を有界閉集合 D で連続な関数とする. このとき, $f(x,y)$ は D 内に最大点と最小点を持つ.
(証明は ε-δ 論法を用いるのでここでは扱わない.)

D 上での $f(x,y)$ の最大値・最小値の求め方

(i) D 内の臨界点を求め, その点の値を求める.

(ii) 境界 (1 変数関数でいう端点) 上での最大値・最小値を求める.

(iii) (i) と (ii) のなかで最大・最小のものをとる.

13 ラグランジュの乗数法

13.1 2 変数のラグランジュの乗数法

前頁で 2 変数関数の最大・最小を求める方法をしたが，**境界**での最大・最小の求め方はさまざまである．そこで統一した求め方を考えたものがラグランジュの乗数法である．

ラグランジュの乗数法

$g(x,y)=0$ のとき，$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとる $\Longrightarrow$ $(x,y)=(a,b)$ は次の解である．

$$g(x,y)=0$$

$$\mathrm{grad}\, f=\lambda \mathrm{grad}\, g \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

ただし，$g(x,y)=0$ に端点がある場合はそこも考える．

考え方：

$g(x,y)=0$ と $f(x,y)=k$ $(k:$ 定数$)$ が接するときの接点を (a,b) とおく．すると，

また，点 (a,b) は $g(x,y)=0$ 上の点なので $g(a,b)=0\cdots[1]$

点 (a,b) における $g(a,b)=0$ と $f(x,y)=k$ の法線は一致する．

$\mathrm{grad}\, g(a,b)$ と $\mathrm{grad}\, f(a,b)$ は同じ法線方向を向いている．(**9.1**)

すなわち $\mathrm{grad}\, g(a,b) /\!\!/ \mathrm{grad}\, f(a,b) \Leftrightarrow {}^{\exists}\lambda\in\mathbf{R}, \lambda\neq 0, \mathrm{grad}\, f(a,b)=\lambda\mathrm{grad}\, g(a,b)\cdots[2]$

よって $[1],[2]$ より $(x,y)=(a,b)$ であるためには，

$g(x,y)=0, \mathrm{grad}\, f=\lambda\mathrm{grad}\, g \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}$ である． □

13.2 3 変数関数のラグランジュの乗数法

3 変数関数においても同様にラグランジュの乗数法は成立.

ラグランジュの乗数法

$g(x, y, z) = 0$ のとき, $f(x, y, z)$ が (a, b, c) で極値をとる $\Longrightarrow$ $(x, y, z) = (a, b, c)$ は次の解である.

$$g(x, y, z) = 0$$

$$\mathrm{grad}\, f = \lambda \mathrm{grad}\, g \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}$$

相加・相乗平均の不等式

$a_k \geqq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n)$ のとき, $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

[$n = 2$ の場合の証明]

$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqq 0 \Leftrightarrow a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqq 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 \geqq 2\sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2} \quad \square$

[$n = 4$ の場合の証明]

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}\right)$$

$$\overset{[n=2]}{\geqq} \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}\right) = \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \overset{[n=2]}{\geqq} \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\,\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \quad \square$$

[$n = 3$ の場合の証明]

$n = 4$ の式で $a_4 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ とおくと,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{4} \overset{[n=4]}{\geqq} \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}$$

$= \left\{(a_1 a_2 a_3)(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}} = \left\{(a_1 a_2 a_3)^{\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{1}{4}} = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$. ここから 4 倍すると,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \geqq 4\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \geqq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \quad \square$$

13.3　ラグランジュの乗数法を用いた相加・相乗平均の不等式の証明

証明：

$m>0$: 定数, $x^2+y^2+z^2=m^2$ のときの $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ の最大値を求める.

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-m^2$ とおく.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2z^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^2yz^2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2x^2y^2z,\ \frac{\partial g}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial g}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial g}{\partial z}=2z.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=m^2 & \cdots[1] \\ 2xy^2z^2=2\lambda x & \cdots[2] \\ 2x^2yz^2=2\lambda y & \cdots[3] \\ 2x^2y^2z=2\lambda z & \cdots[4] \end{cases},\quad \begin{array}{l} [2]\text{ より } xy^2z^2=\lambda x \\ xy^2z^2-\lambda x=0 \\ x(y^2z^2-\lambda)=0\ \therefore\ x=0, y^2z^2=\lambda \\ [3],[4]\text{ より同様に } y=0, x^2z^2=\lambda \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z=0, x^2y^2=\lambda \end{array}$$

- $xyz=0$ のとき (x,y,z の少なくとも一つは 0 のとき), $f(x,y,z)=0$.

- $xyz\neq 0$ のとき,

$x^2y^2=y^2z^2=x^2z^2(=\lambda)$ であるから $x^2=y^2=z^2\cdots[5]$

$[5],[1]$ より $x^2=y^2=z^2=\dfrac{m^2}{3}$.

そのとき, $f(x,y,z)=x^2y^2z^2=\left(\dfrac{m^2}{3}\right)^3>0$. よって最大値は $\left(\dfrac{m^2}{3}\right)^3$.

以上より $x^2+y^2+z^2=m^2$ のとき $x^2y^2z^2\leqq\left(\dfrac{m^2}{3}\right)^3$ が成立.

すなわち $\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leqq\dfrac{m^2}{3}\leqq\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}$. $x^2=a_1, y^2=a_2, z^2=a_3$ とすれば,

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\leqq\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\qquad\square$$

14 多変数関数まとめ

14.1 偏導関数，勾配ベクトル，全微分可能性，合成関数の微分

定義【偏導関数 (3.1)】

n 変数関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の**偏導関数**は各 x_i に関する微分

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$

と定義される．

定義【勾配ベクトル (6.2)】

n 変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ の**勾配ベクトル**は

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

により定義される．

定義【全微分可能 (5.2)】

関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が $(x_1, \ldots, x_n)$ で**全微分可能**とは，

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + a_1 \Delta x_1 + \cdots + a_n \Delta x_n + \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}\, g(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \tag{1}$$

$$\lim_{(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)} g(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0 \tag{2}$$

この (1),(2) を満たす定数 $a_1, \ldots, a_n$ と関数 g が存在することである．

このとき，$a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ である．

合成関数の微分 (6.1 , 6.2)

関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ のそれぞれ変数に t の 1 変数関数 $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ を代入して得られる**合成関数** $g(t) = f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ の**微分公式**

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

が成立．$C(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big), C'(t) = \big({x_1}'(t), \ldots, {x_n}'(t)\big)$ とおくと，2 変数のときと同様に，

$$\frac{d}{dt} f\big(C(t)\big) = \operatorname{grad} f\big(C(t)\big) \cdot C'(t)$$

と表せる．

14.2　方向微分係数, 接空間, 陰関数, 極値

方向微分係数 (8.1)

関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ に関して，ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)$ に対して，

$$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) := \mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(\boldsymbol{a})$$

を f の点 $\boldsymbol{a}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分係数**という．

接空間 (8.2)

関数 $x_{n+1}=f(x_1,\dots,x_n)=f(\boldsymbol{x})$ のグラフは $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の図形を表している．$\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ として，このグラフ上の点 $\big(\boldsymbol{a},f(\boldsymbol{a})\big)$ における $\boxed{\text{接空間}}$ は方程式

$$x_{n+1} = \mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})$$

により定義される．また c を定数として，f の**等高集合** $f(\boldsymbol{x})=c$ を $\mathbf{R}^n$ 内の図形として考えられる．
その**接空間**の方程式は，

$$\mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$$

で与えられる．

陰関数 (9.2)

$(n+1)$ 変数関数 $f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=f(\boldsymbol{x},x_{n+1})$ に対して，$f\big(\boldsymbol{x},\phi(\boldsymbol{x})\big)=0$ を満たす n 変数関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ があったとする．この ϕ を $f(\boldsymbol{x},x_{n+1})=0$ で定められる**陰関数**という．陰関数の偏微分は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}}}$$

で与えられ，**9.2**, **9.3** と同じ定理が成り立つ．

極値

n 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極値点は，$n=1,2$ と同様に定義され，

$$\mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

となる点を**臨界点**という．
点 $\boldsymbol{a}$ が全微分可能な関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極値点ならば $\boldsymbol{a}$ は臨界点である．

第 II 部

多変数関数の積分

15　2 重積分

15.1　記号の説明, 1 変数の場合

記号の説明

$$\text{Length 長さ} : \mathbf{R} \supset I \text{ の長さ} = \text{Length}(I)$$
$$\text{Area 面積} : \mathbf{R}^2 \supset D \text{ の面積} = \text{Area}(D)$$
$$\text{Volume 体積} : \mathbf{R}^3 \supset V \text{ の体積} = \text{Vol}(V)$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} K_i = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$$

以下では上記のように表記する.

定積分の定義 (1 変数の場合)

g は閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数とする.

分割 $\Delta := \{I_i\}_{i=1}^n$ と ${}^\forall\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] =: I_i$ に対して, $(I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \text{Length}(I_i \cap I_j) = 0\,(i \neq j)$ とする.)

また $|\Delta| := \max_{1 \leqq i \leqq n} \text{Length}(I_i)$ とする. このとき,

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\text{Length}(I_i)$$

と定義する.

15.2　2 重積分の定義

定義【2 重積分】

$D \subset \mathbf{R}^2$: 閉領域(閉集合)に対して, f が D 上で 2 重積分可能とは,

分割 $\Delta := \{D_i\}_{i=1}^n$, ただし, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_j) = 0 \ (i \neq j)$ とする.

${}^\forall P_i \in D_i$ に対して, リーマン和を

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i)$$

で定義する. $|\Delta| := \max_{1 \leqq i \leqq n} \mathrm{Area}(D_i)$ とする. このとき

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i)$$

が分割 Δ, P_i の取り方によらず, 一定値に近づくことをいう. その極限値を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \text{ または } \iint_D f(x,y)\,d\mathrm{A}$$

と表す. (dA のことを面積要素という.)

以下, ここに出てきた記号 (D_i 等) は 2 重積分の話をしているときは前提として用いる.

2 重積分と定積分はそれぞれ対応させて考えていることがわかる. 対応しているものを簡単にまとめておく.

$$\begin{array}{ccc}
I = \bigcup_{i=1}^n I_i, \mathrm{Length}(I_i \cap I_j) = 0 & \longleftrightarrow & D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_j) = 0 \\
\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\mathrm{Length}(I_i) & \longleftrightarrow & \sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) \\
\int_I g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx & \longleftrightarrow & \iint_D f(x,y)\,d\mathrm{A}
\end{array}$$

15.3　体積としての解釈

体積としての解釈

$z = f(x,y) \geqq 0$,

閉領域を $D = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_j) = 0\ (i \neq j), {}^{\forall}P_i \in D_i$

体積 $V = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y) \in D\,,\, 0 \leqq z \leqq f(x,y) \,\right\}$ とする．

V を細かく分割した $V_i = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|(x,y) \in D_i\,,\, 0 \leqq z \leqq f(x,y) \right\}$ とすると，

$V = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_i\,,\, \mathrm{Vol}(V_i \cap V_j) = 0\ \ (i \neq j)$ となる．すると，V_i は直方体のようなものとして近似でき，

$$\mathrm{Vol}(V_i) \fallingdotseq f(P_i)\mathrm{Area}(D_i)$$

となる．V_i は V の分割であったので，

$$\mathrm{Vol}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(V_i) \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mathrm{Area}(D_i)$$

ここで $|\Delta| := \displaystyle\max_{1 \leqq i \leqq n} \mathrm{Area}(D_i)$ として極限をとると，

$$\mathrm{Vol}(V) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) = \iint_D f(x,y)d\mathrm{A}$$

16　2 重積分の計算

16.1　2 重積分 $=$ 定積分を 2 回行う (長方形の場合)

2 重積分の計算法（長方形の場合）

$D = [a,b] \times [c,d]$ のとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

<u>考え方：</u>

$D_i = D_{j,k} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k] \quad (1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq M)$ とする．

また，${}^\forall P_i \in D_i$ について $P_i = P_{j,k} = (\xi_j, \eta_k)$ $({}^\forall \xi_j \in [x_{j-1}, x_j], {}^\forall \eta_k \in [y_{k-1}, y_k])$ とする．

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) &= \sum_{\substack{1\leq j\leq N \\ 1\leq k\leq M}} f(\xi_j, \eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{M} f(\xi_j, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) \right\} (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{M} \left\{ \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j, \eta_k)(x_j - x_{j-1}) \right\} (y_k - y_{k-1})
\end{aligned}$$

2 行目の式で，まず $M \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_c^d f(\xi_j, y)\,dy$.

その後 $N \to \infty$ とすれば $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$ となる．同様に，

3 行目の式で，まず $N \to \infty$ とすると $\displaystyle\int_a^b f(x, \eta_k)\,dx$.

その後 $M \to \infty$ とすれば $\displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$ となる．

$N, M \to \infty$ は x, y の分割をより細かくするという意味 (所謂（いわゆる） 区分求積法的な考え方)
なので $|\Delta| \to 0$ と同じことになる．したがって，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \square$$

16.2　縦線集合・横線集合

定義

有界な閉領域 $D(\subset \mathbf{R}^2)$ に対して，

(1) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} a \leqq x \leqq b \\ g(x) \leqq y \leqq h(x) \end{array} \right\}$ と表せるとき，D を $\boxed{\text{縦線集合}}$ という.

記号として，$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} \underline{x} \leqq x \leqq \overline{x} \\ \underline{y}(x) \leqq y \leqq \overline{y}(x) \end{array} \right\}$ と表すことにする.

(2) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} g(y) \leqq x \leqq h(y) \\ a \leqq y \leqq b \end{array} \right\}$ と表せるとき，D を $\boxed{\text{横線集合}}$ という.

記号として，$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} \underline{x}(y) \leqq x \leqq \overline{x}(y) \\ \underline{y} \leqq y \leqq \overline{y} \end{array} \right\}$ と表すことにする.

系

長方形 $D = [a,b] \times [c,d]$ は縦線集合でもあり，横線集合でもある.

$\because$

[縦線集合]　[横線集合]

$\overline{y}(x) = d, \underline{y}(x) = c, \overline{x} = b, \underline{x} = a.$　$\overline{y} = d, \underline{y} = c, \overline{x}(y) = b, \underline{x}(y) = a.$　□

16.3　縦線集合・横線集合の計算方法

2 重積分の計算法（縦線・横線集合）

有界な閉領域を D とする.

(1) D が縦線集合ならば

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left(\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(2) D が横線集合ならば

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \left(\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

証明：

$D_i = D_{j,k} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$　$(1 \le j \le N, 1 \le k \le M)$ とする.

また, ${}^\forall P_i \in D_i$ について $P_i = P_{j,k} = (\xi_j, \eta_k)$ $({}^\forall \xi_j \in [x_{j-1}, x_j], {}^\forall \eta_k \in [y_{k-1}, y_k])$ とする.

(1)

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{k=1}^{M} f(\xi_j, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) \right\} (x_j - x_{j-1}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \int_{\underline{y}(\xi_j)}^{\overline{y}(\xi_j)} f(\xi_j, y)\,dy \right\} (x_j - x_{j-1})
\end{aligned}$$

ここで $F(\xi_j) = \displaystyle\int_{\underline{y}(\xi_j)}^{\overline{y}(\xi_j)} f(\xi_j, y)\,dy \,; F(x) = \int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,dy$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} F(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\
&= \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} F(x)\,dx = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left(\int_{\underline{y}(x)}^{\overline{y}(x)} f(x,y)\,dy \right) dx
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j, \eta_k)(x_j - x_{j-1}) \right\} (y_k - y_{k-1}) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} \left\{ \int_{\underline{x}(\eta_k)}^{\overline{x}(\eta_k)} f(x, \eta_k)\,dx \right\} (y_k - y_{k-1})
\end{aligned}$$

ここで $F(\eta_k) = \displaystyle\int_{\underline{x}(\eta_k)}^{\overline{x}(\eta_k)} f(x, \eta_k)\,dx \,; F(y) = \int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,dx$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^{M} F(\eta_k)(y_k - y_{k-1}) \\
&= \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} F(y)\,dy = \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \left(\int_{\underline{x}(y)}^{\overline{x}(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \quad \square
\end{aligned}$$

16.4　2 重積分の基本性質 (1) 【線形性】

定理

有界な閉領域を D, f, g は D 上で 2 重積分可能とする.

(1) $\displaystyle\iint_D \{(f(x,y)+g(x,y)\}\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

(2) $\displaystyle\iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad ({}^\forall k \in \mathbf{R})$

証明：

分割 $\Delta := \{D_i\}_{i=1}^n$ とし,

$D = \displaystyle\bigcup_{i=1}^n D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_j) = 0\ \ (i \neq j), {}^\forall P_i \in D_i, |\Delta| := \max_{1\leqq i\leqq n} \mathrm{Area}(D_i)$ とする.

(1)

$$\begin{aligned}
\iint_D \{f(x,y)+g(x,y)\}\,dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n \{f(P_i)+g(P_i)\}\mathrm{Area}(D_i) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0}\left\{\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) + \sum_{i=1}^n g(P_i)\mathrm{Area}(D_i)\right\} \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) + \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n g(P_i)\mathrm{Area}(D_i) \\
&= \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\iint_D kf(x,y)\,dxdy &= \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n kf(P_i)\mathrm{Area}(D_i) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} k\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) \\
&= k\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) \quad = \quad k\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \square
\end{aligned}$$

16.5 2 重積分の基本性質 (2)

定理

有界閉領域を D, E とし，f は D, E 上で 2 重積分可能とする．また D, E は連続とする．次が成立．
$\mathrm{Area}(D \cap E) = 0$ のとき，

$$\iint_{D\cup E} f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_E f(x,y)\,dxdy$$

証明：

D の分割 $\Delta_1 := \{D_i\}_{i=1}^n$，$E$ の分割 $\Delta_2 := \{E_j\}_{j=1}^m$ とし，

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_{i'}) = 0, E = \bigcup_{j=1}^m E_j, \mathrm{Area}(E_j \cap E_{j'}) = 0 \ \ (i \neq i', j \neq j') \text{ とする} \cdots [1]$$

$F := D \cup E$，F の分割 $\Delta := \{F_k\}_{k=1}^{n+m}$ とし，

$$F_k := \begin{cases} D_i & (k = i) \\ E_j & (k = j+n) \end{cases}, F_k \ni {}^\forall R_k := \begin{cases} P_i & (k = i) \\ Q_j & (k = j+n) \end{cases} \text{ としたとき，}$$

$\mathrm{Area}(F_k \cap F_{k'}) = 0$ $(k \neq k')$ を示す．

$$\begin{array}{c} 1 \leqq k, k' \leqq n \\ n+1 \leqq k, k' \leqq n+m \end{array} \text{ の場合は [1] より成り立つ．}$$

$1 \leqq k \leqq n \leqq k' \leqq n+m$ の場合は $0 \leqq \mathrm{Area}(D_i \cap E_j) \leqq \mathrm{Area}(D \cap E) = 0$ より成り立つ．

ここで $|\Delta_1| := \max\limits_{1\leqq i\leqq n} \mathrm{Area}(D_i), |\Delta_2| := \max\limits_{1\leqq j\leqq m} \mathrm{Area}(E_j)$,

$|\Delta| := \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} = \max\limits_{1\leqq k\leqq n+m} \mathrm{Area}(F_k)$ とする．

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_E f(x,y)\,dxdy &= \lim_{|\Delta_1|\to 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) + \lim_{|\Delta_2|\to 0} \sum_{j=1}^m f(Q_j)\mathrm{Area}(E_j) \\
&= \lim_{|\Delta_1|,|\Delta_2|\to 0} \left\{ \sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Area}(D_i) + \sum_{j=1}^m f(Q_j)\mathrm{Area}(E_j) \right\} \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n+m} f(R_k)\mathrm{Area}(F_k) \\
&= \iint_F f(x,y)\,dxdy \ = \iint_{D\cup E} f(x,y)\,dxdy \quad \square
\end{aligned}$$

16.6　2 重積分の基本的性質 (3)

命題

有界な閉領域 D に対して，$f(x,y) \equiv 1$ の 2 重積分は，

$$\mathrm{Area}(D) = \iint_D 1\,dxdy$$

$\because$

D 上の 1 の 2 重積分は，底面 D 高さ 1 の柱体の体積である．この体積を V とすると，

$$\mathrm{Area}(D) = \mathrm{Area}(D) \times 1 = \mathrm{Vol}(V) = \iint_D 1\,dxdy \quad \square$$

17　変数変換 (2 次元)

17.1　極座標変換

極座標

直交座標 (xy 平面) において，原点 $(0,0)$ から任意の点 (x,y) までの距離を r,
原点から点 (x,y) に向かう半直線と x 軸の正方向からなす角を θ とする．

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

である．また θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi, -\pi \leqq \theta \leqq \pi$ が一般的だが，$\alpha \leqq \theta \leqq 2\pi + \alpha$ なら何でもよい．
$r\theta$ 平面を**極座標**という．

定理

xy 平面内の有界閉領域 D と $r\theta$ 平面内の有界閉領域 E が極座標によって $1:1$ 対応しているとする．
このとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

証明：
$a \leqq r \leqq b, \alpha \leqq \theta \leqq \beta$ とする．領域 D を，
$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_n = b, \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_m = \beta$ と分割する．
また $D_{j,k}$ を，$r_{j-1} \leqq r \leqq r_j, \theta_{k-1} \leqq \theta \leqq \theta_k$ の範囲に当たる小領域とする．
すると，対応する $E_{j,k} = [r_{j-1}, r_j] \times [\theta_{k-1}, \theta_k]$ である．また σ_j, τ_k を，

$$\sigma_j = \frac{r_{j-1} + r_j}{2}, \quad \tau_k = \frac{\theta_{k-1} + \theta_k}{2} \qquad (j = 1, \ldots, n\,,\, k = 1, \ldots, m)$$

と定めると，$P_{j,k} \in D_{j,k} \Rightarrow P_{j,k} = (\sigma_j \cos\tau_k, \sigma_j \sin\tau_k)$ である．
$\Delta r_j := r_j - r_{j-1}, \Delta\theta_k := \theta_k - \theta_{k-1}$ とすると，$\mathrm{Area}(D_{j,k}) = \dfrac{\Delta\theta_k}{2}({r_j}^2 - {r_{j-1}}^2)$ [1)]

$$\mathrm{Area}(D_{j,k}) = \frac{1}{2}({r_j}^2 - {r_{j-1}}^2)\Delta\theta_k = \frac{(r_j + r_{j-1})}{2}(r_j - r_{j-1})\Delta\theta_k = \sigma_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(P_{j,k})\mathrm{Area}(D_{j,k}) \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} f(\sigma_j\cos\tau_k, \sigma_j\sin\tau_k)\sigma_j\Delta r_j\Delta\theta_k \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} f(\sigma_j\cos\tau_k, \sigma_j\sin\tau_k)\sigma_j\,\mathrm{Area}(E_{j,k}) \\
&= \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta \quad \square
\end{aligned}$$

$n, m \to \infty$ でなく，$|\Delta| \to 0$ でも o.k. ただし $|\Delta| := \max\limits_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq m}} \mathrm{Area}(D_{j,k})$

[1)] 半径 r, 角度 θ の扇形の面積は $\pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}$ であるから，
角度は $\Delta\theta_k$ であり，$\mathrm{Area}(D_{j,k})$ は角度 $\Delta\theta_k$，半径 r_j の扇形の面積から角度 $\Delta\theta_k$，半径 r_{j-1} の扇形の面積をひいたものである．
すなわち $\mathrm{Area}(D_{j,k}) = \frac{\Delta\theta_k}{2}{r_j}^2 - \frac{\Delta\theta_k}{2}{r_{j-1}}^2$ である．

17.2　変数変換 (1 変数の場合)

1 変数の場合

g,φ は適当な関数，α,β は適当な定数とする．このとき，

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt$$

$I=[a,b], J=[\alpha,\beta], \varphi : J \to I$; 全単射を用いて 2 重積分的にかくと，

$$\int_I g(x)\,dx = \int_J g\bigl(\varphi(t)\bigr)|\varphi'(t)|\,dt$$

考え方 :

$I=\bigcup_{i=1}^n I_i, J=\bigcup_{i=1}^n, \varphi(J_i)=I_i, \varphi(\tau_i)=\xi_i,$

${}^\forall\xi_i \in I_i, {}^\forall\tau_i \in J_i, |\Delta_1| := \max_{1\leqq i\leqq n} \mathrm{Length}(I_i), |\Delta_2| := \max_{1\leqq i\leqq n} \mathrm{Length}(J_i)$ とする．

$\int_I g(x)\,dx = \lim_{|\Delta_1|\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\mathrm{Length}(I_i)$　ここで $\mathrm{Length}(I_i) \fallingdotseq |\varphi'(\tau_i)|\mathrm{Length}(J_i)$ であるから，

$= \lim_{|\Delta_2|\to 0}\sum_{i=1}^n g\bigl(\varphi(\tau_i)\bigr)|\varphi'(\tau_i)|\mathrm{Length}(J_i) = \int_J g\bigl(\varphi(t)\bigr)|\varphi'(t)|\,dt$　□

17.3　2 つのベクトルで作られる平行四辺形の面積，ヤコビアン

定理

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a,b), \boldsymbol{b}=(c,d)$ で作られる平行四辺形の面積 S は,

$$S=\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|=|ad-bc|$$

$\because$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta\in[0,\pi]$ とする.

$S=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ である．また内積の性質より $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ac+bd=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$.

$\cos\theta=\dfrac{ac+bd}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}=\dfrac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}, \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ より,

$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}=\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}$

よって,

$S=\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2}$

$=\sqrt{a^2d^2-2adbc-b^2c^2}=\sqrt{(ad-bc)^2}=|ad-bc|$　$\square$

定義【ヤコビアン】

全微分可能で連続な関数 $f(x,y)=f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)$ で与えられるとき,

$$J(u,v)=\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\phi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

を $\boxed{\text{ヤコビアン}}$ またはヤコビ行列式という.

17.4　変数変換公式

定理

全微分可能で連続な関数 $f(x,y)=f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)$ で与えられ，xy 平面の領域 D がこの変換により uv 平面の領域 E に $1:1$ 対応で $f(x,y)$ は D で連続かつ E で $J(u,v)\neq 0$ のとき，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)|J(u,v)|\,dudv$$

証明：

E が長方形 $[a,b]\times[c,d]$ に含まれるように，a,b,c,d をとり，

分割 $a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b,\quad c=v_0<v_1<\cdots<v_n=d$ を考える．

uv 平面上の小領域 $E_{j,k}$ を，$u_j\leqq u\leqq u_{j+1},\quad v_k\leqq v\leqq v_{k+1}$ とする．

これに対応する xy 平面上の小領域を $D_{j,k}$ とする．

また $\Delta u_j:=u_{j+1}-u_j$，$\Delta v_k:=v_{k+1}-v_k$ とすると $u_{j+1}=u_j+\Delta u_j,\quad v_{k+1}=v_k+\Delta v_k$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{O}\big(\phi(u_j,v_k),\psi(u_j,v_k)\big),\\&\mathrm{A}\big(\phi(u_j+\Delta u_j,v_k),\psi(u_j+\Delta u_j,v_k)\big),\\&\mathrm{B}\big(\phi(u_j,v_k+\Delta v_k),\psi(u_j,v_k+\Delta v_k)\big).\end{aligned}$$

とおくと，$\mathrm{Area}(D_{j,k})$ は $\Delta u_j,\Delta v_k$ を十分小さくして

OA, OB をとなりあう 2 辺とする平行四辺形の面積として近似する．いま，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\big(\phi(u_j+\Delta u_j,v_k)-\phi(u_j,v_k),\psi(u_j+\Delta u_j,v_k)-\psi(u_j,v_k)\big)\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\big(\phi(u_j,v_k+\Delta v_k)-\phi(u_j,v_k),\psi(u_j,v_k+\Delta v_k)-\psi(u_j,v_k)\big)\end{aligned}$$

である．**10.2 , 10.3** のテイラーの定理[1]で 1 次近似すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_j,v_k)\Delta u_j,\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_j,v_k)\Delta u_j\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}(u_j,v_k)\Delta v_k,\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_j,v_k)\Delta v_k\right)$$

となる．よって **17.3** の定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D_{j,k})&\fallingdotseq\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_j,v_k)\Delta u_j&\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_j,v_k)\Delta u_j\\\frac{\partial\phi}{\partial v}(u_j,v_k)\Delta v_k&\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_j,v_k)\Delta v_k\end{pmatrix}\right|\ \text{行列式の性質より，}\\&=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u}(u_j,v_k)&\frac{\partial\psi}{\partial u}(u_j,v_k)\\\frac{\partial\phi}{\partial v}(u_j,v_k)&\frac{\partial\psi}{\partial v}(u_j,v_k)\end{pmatrix}\right|\Delta u_j\Delta v_k=|J(u_j,v_k)|\mathrm{Area}(E_{j,k})\end{aligned}$$

したがって，

[2] $$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}f(P_{j,k})\mathrm{Area}(D_{j,k})$$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}f\big(\phi(u_j,v_k),\psi(u_j,v_k)\big)|J(u_j,v_k)|\mathrm{Area}(E_{j,k})$$

$$=\iint_E f\big(\phi(u,v),\psi(u,v)\big)|J(u,v)|\,dudv\quad\square$$

---

[1] ここでは $h=\Delta u_j$, $k=\Delta v_k$ と考える．また $f(a+h,b+k)=\cdots$ となっているが，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ では $k=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ では $h=0$ と考える．

[2] $P_{j,k}\in D_{j,k}$, $|\Delta|:=\max\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq k\leq m}}\mathrm{Area}(D_{j,k})$

18 広義積分

18.1 近似増加列, 広義積分の定義

定義【近似増加列】

$\mathbf{R}^2 \supset D$ 内の有界な閉領域の列 $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$ が,

$$D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$$

を満たすとする. 任意の $A \subset D$ に対して, ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して $A \subset D_N$ が成り立つ.
このような $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D の 近似増加列 という.

定義【広義積分】[1]

$\mathbf{R}^2 \supset D$ 内の有界な閉領域の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方によらず,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \tag{1}$$

が, ある一定値に近づくとき f は D 上で**広義積分可能**という. この値を,

$$\iint_{D} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \tag{2}$$

と定義する.

定理

関数 f が領域 D 上で定符号関数[2]であり, D の近似増加列 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し, (1) の極限値が存在したとする. この極限値は別の近似増加列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ で得た極限値と一致する.

証明 :
$^{\forall} i \in \mathbf{N}$ に対して, $^{\exists} n_i \in \mathbf{N}$, $D_i \subset E_{n_i}$ を考える. 以下, $f(x,y) \geqq 0$ として議論する.($f(x,y) \leqq 0$ の場合も同様.)

$f(x,y) \geqq 0$ より $\displaystyle\iint_{E_{n_i}} f(x,y)\,dxdy$ は i について単調増大.

また $D_i \subset E_{n_i}$ を仮定しているので $\displaystyle\iint_{D_i} f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy$. すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{i\to\infty} \iint_{D_i} f(x,y)\,dxdy \leqq \lim_{i\to\infty} \iint_{E_{n_i}} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy$$

一方, $^{\forall} j \in \mathbf{N}, {}^{\exists} n_j \in \mathbf{N}, E_j \subset D_{n_j}$ を仮定し, 同様の議論をすると,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{j\to\infty} \iint_{E_j} f(x,y)\,dxdy \leqq \lim_{j\to\infty} \iint_{D_{n_j}} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

したがって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy \quad \square$

[1] 広義積分は領域非有界の場合と関数非有界の場合に用いる.
[2] 定符号関数とはどんな変数の値を代入しても常に関数 f の符号が一定である関数のこと.

18.2　ガウス積分の証明

Gaussian integral(ガウス積分)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

証明：

まず，$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を考える．近似増加列 $A_n : x^2+y^2=n^2$ で近似する．

すなわち $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

ここで A_n を極座標変換して $A'_n : 0 \le r \le n, 0 \le \theta \le 2\pi$ を考える．

$$\iint_{A_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{A'_n} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^n e^{-r^2}\,rdr\right\}d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-n^2}+\frac{1}{2}\right)d\theta = \left[-\frac{1}{2}e^{-n^2}\theta+\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = -\pi e^{-n^2}+\pi = -\frac{\pi}{e^{n^2}}+\pi$$

よって，$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{e^{n^2}}+\pi\right) = \pi\cdots[1].$

次に別の近似増加列 $B_n : [-n,n]\times[-n,n]$ で近似すると，$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$

$$\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-n}^n\left\{\int_{-n}^n e^{-x^2-y^2}\,dy\right\}dx$$

$$= \int_{-n}^n\left\{\int_{-n}^n e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right\}dx = \int_{-n}^n e^{-x^2}\,dx\int_{-n}^n e^{-y^2}\,dy$$

定積分の値としては $\displaystyle\int_{-n}^n e^{-x^2}\,dx = \int_{-n}^n e^{-y^2}\,dy$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{B_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-n}^n e^{-x^2}\,dx\right\}^2\cdots[2]$$

[1]=[2] より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-n}^n e^{-x^2}\,dx\right\}^2 = \left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx\right\}^2 = \pi$ で $e^{-x^2}>0$ でなので，$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

ここで $f(x)=e^{-x^2}$ とすると $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$ より e^{-x^2} は偶関数であるから，

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad \therefore 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.\ \text{よって}\ \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \square$$

19 3 重積分

19.1 3 重積分の定義

定義【3 重積分】

$D \subset \mathbf{R}^3$: 閉領域 (閉集合) に対して, f が D 上で 3 重積分可能とは,
分割 $\Delta := \{D_i\}_{i=1}^n$, ただし, $D = \bigcup_{i=1}^n D_i, \mathrm{Vol}(D_i \cap D_j) = 0 \ (i \neq j)$ とする.
${}^\forall P_i \in D_i$ に対して, リーマン和を

$$\sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Vol}(D_i)$$

で定義する. $|\Delta| := \max_{1 \leqq i \leqq n} \mathrm{Vol}(D_i)$ とする. このとき

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\mathrm{Vol}(D_i)$$

が分割 Δ, P_i の取り方によらず, 一定値に近づくことをいう. その極限値を

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz \text{ または } \iiint_D f(x,y,z)\,d\mathrm{V}$$

と表す. ($d\mathrm{V}$ のことを体積要素という.)
以下, ここに出てきた記号 (D_i 等) は 3 重積分の話をしているときは前提として用いる.

20　3 重積分の計算

20.1　3 重積分 $=$ 定積分を 3 回行う (直方体の場合)

定理

$D=[a,b]\times[c,d]\times[g,h]$ のとき,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b\left\{\int_c^d\left(\int_g^h f(x,y,z)\,dz\right)dy\right\}dx$$

<u>証明 :</u>

D の分割を $D_{i,j,k}$ とし, $D=\displaystyle\bigcup_{\substack{1\le i\le\ell\\1\le j\le m\\1\le k\le n}} D_{i,j,k}$ すなわち $D_{i,j,k}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$

${}^\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i], {}^\forall\eta_j\in[y_{j-1},y_j], {}^\forall\zeta_k\in[z_{k-1},z_k]$ i.e. ${}^\forall P_{i,j,k}\in D_{i,j,k}\Rightarrow P_{i,j,k}=(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)$.

$|\Delta|:=\displaystyle\max_{\substack{1\le i\le\ell\\1\le j\le m\\1\le k\le n}}\mathrm{Vol}(D_{i,j,k}), \Delta z_k:=(z_k-z_{k-1}), \Delta y_j:=(y_j-y_{j-1}), \Delta x_i:=(x_i-x_{i-1})$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{\substack{1\le i\le\ell\\1\le j\le m\\1\le k\le n}} f(P_{i,j,k})\mathrm{Vol}(D_{i,j,k})$$

$=\displaystyle\lim_{\ell,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta z_k\Delta y_j\Delta x_i$ において,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta z_k\to\int_g^h f(\xi_i,\eta_j,z)\,dz\ \ (n\to\infty)$. その後, 同様に $m\to\infty,\ell\to\infty$ の順に,

$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\int_g^h f(\xi_i,\eta_j,z)\,dz\Delta y_k\to\int_c^d\left(\int_g^h f(\xi_i,y,z)\,dz\right)dy\ (m\to\infty)$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell}\int_c^d\left(\int_g^h f(\xi_i,y,z)\,dz\right)dy\Delta x_i\to\int_a^b\left\{\int_c^d\left(\int_g^h f(x,y,z)\,dz\right)dy\right\}dx\ (\ell\to\infty)$. $\square$

20.2　3 重積分 ＝ 2 重積分 ＋ 定積分

定理

(1) $\mathbf{R}^2 \subset K$: xy 平面内の有界閉領域，K 上の 2 変数関数 $\overline{z}(x,y)$，$\underline{z}(x,y)$ を用いて，

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} (x,y) \in K \\ \underline{z}(x,y) \leqq z \leqq \overline{z}(x,y) \end{array} \right\}$$ と表せるとき，

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_K \left\{ \int_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dxdy$$

(2) 立体 D を x 軸に垂直な平面で切った断面を K_x とし，

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} (y,z) \in K_x \\ \underline{x} \leqq x \leqq \overline{x} \end{array} \right\}$$ と表せるとき，

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left\{ \iint_{K_x} f(x,y,z)\,dydz \right\} dx$$

<u>証明：</u> $D_{i,j,k}, \xi_i, \eta_j, \zeta_k, \Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k, |\Delta|$ 等は前頁と同じ意味とする．

(1) 仮定より，K の分割は $K_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ である．

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \lim_{\ell,m\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \right\} \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \lim_{\ell,m\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \int_{\underline{z}(\xi_i,\eta_j)}^{\overline{z}(\xi_i,\eta_j)} f(\xi_i, \eta_j, z)\,dz \right\} \mathrm{Area}(K_{i,j}) \\
&= \iint_K \left\{ \int_{\underline{z}(x,y)}^{\overline{z}(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dxdy
\end{aligned}$$

(2) 仮定より，$K_x =: G$ の分割は，

$G_{j,k} = [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ と表せるが x に依存する yz 平面上の微小な長方形である．

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \Delta y_j \Delta x_i \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \lim_{m,n\to\infty} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \Delta y_j \right\} \Delta x_i \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \lim_{m,n\to\infty} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \mathrm{Area}(G_{j,k}) \right\} \Delta x_i \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \iint_G f(x_i, y, z)\,dydz \right\} \Delta x_i \\
&= \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left\{ \iint_G f(x,y,z)\,dydz \right\} dx \\
&= \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} \left\{ \iint_{K_x} f(x,y,z)\,dydz \right\} dx \quad \square
\end{aligned}$$

21　変数変換 (3 次元)

21.1　球座標変換

球座標

簡単にいえば極座標の $\mathbf{R}^3$ 版である．
r を原点からの距離，θ を z 軸正の部分から負の部分をまたがない角度，φ を xz 平面から yz 平面への向きに計った経度 (簡単にいえば極座標でいう θ のこと) とする．このとき，

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & r \geqq 0 \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ z = r\cos\theta, & 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{cases}$$

で 3 次元空間内において，(x, y, z) の $\boxed{\text{球座標 } (r, \theta, \varphi)}$ を定義する．

定理

D, E : 有界な閉領域とする．
x-y-z 空間内の立体を D，球座標により $1:1$ 対応する r-θ-φ 空間内の立体を E とする．
D 上で定義された連続関数 $f(x, y, z)$ に対して，

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

証明 :
$a \leqq r \leqq b, c \leqq \theta \leqq d, g \leqq \varphi \leqq h$ とする領域 D を，
$a = r_0 < r_1 < \cdots < r_\ell = b, c = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_m = d, g = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = h$ と分割する．
また $\Delta r_i := r_i - r_{i-1}, \Delta\theta_j := \theta_j - \theta_{j-1}, \Delta\varphi_k := \varphi_k - \varphi_{k-1}$ $(i = 1, \ldots, \ell, j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n)$
とすると対応する $E_{i,j,k}$ の体積は $\mathrm{Vol}(E_{i,j,k}) = \Delta r_i \Delta\theta_j \Delta\varphi_k$ である．
小領域 $D_{i,j,k}$ を
x-y 平面上にできる弧[1]と $\sqrt{x^2+y^2}$-z 平面上にできる弧[2]と球の半径の分割の変化量で囲まれる領域とする．
さらに $^\forall P_{i,j,k} \in D_{i,j,k} \Rightarrow P_{i,j,k} = (\sigma_i \sin\tau_j \cos\rho_k, \sigma_i \sin\tau_j \sin\rho_k, \sigma_i \cos\tau_j)$ とする．このとき，
小領域 $D_{i,j,k}$ の体積は 3 辺が $\Delta r_i, \sigma_i\Delta\theta_j, \sigma_i \sin\tau_j \Delta\varphi_k$ の直方体の体積として近似できる．
すなわち $\mathrm{Vol}(D_{i,j,k}) \fallingdotseq \Delta r_i, \sigma_i\Delta\theta_j, \sigma_i\sin\tau_j\Delta\varphi_k = {\sigma_i}^2 \sin\tau_j \Delta r_i \Delta\theta_j \Delta\varphi_k$，$|\Delta| := \max\limits_{\substack{1\leq i\leq\ell \\ 1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n}} \mathrm{Vol}(D_{i,j,k})$

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz &= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{\substack{1\leq i\leq\ell \\ 1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n}} f(P_{i,j,k})\mathrm{Vol}(D_{i,j,k}) \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{\substack{1\leq i\leq\ell \\ 1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n}} f(\sigma_i\sin\tau_j\cos\rho_k, \sigma_i\sin\tau_j\sin\rho_k, \sigma_i\cos\tau_j){\sigma_i}^2\sin\tau_j\Delta r_i\Delta\theta_j\Delta\varphi_k \\
&= \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{\substack{1\leq i\leq\ell \\ 1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n}} f(\sigma_i\sin\tau_j\cos\rho_k, \sigma_i\sin\tau_j\sin\rho_k, \sigma_i\cos\tau_j){\sigma_i}^2\sin\tau_j\mathrm{Vol}(E_{i,j,k}) \\
&= \iiint_E f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \quad \square
\end{aligned}$$

[1] $2\pi\sigma_i \times \frac{\Delta\theta_j}{2\pi} = \sigma_i\Delta\theta_j$
[2] $2\pi(\sigma_i\sin\tau_j) \times \frac{\Delta\varphi_k}{2\pi} = \sigma_i\sin\tau_j\Delta\varphi_k$

21.2　円柱座標変換

円柱座標

点 (x, y, z) の $\boxed{\text{円柱座標 } (r, \theta, z)}$ を,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \geqq 0 \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{array}$$

で定義する.

定理

x-y-z 空間内の立体を D, 円柱座標により $1:1$ 対応する r-θ-z 空間内の立体を E とする.
D 上で定義された連続関数 $f(x, y, z)$ に対して,

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, drd\theta dz$$

$\because$
x-y 平面内の極座標 (**17.1**) に z 軸 (高さ) が加わったものとして考えられるから,
$d\mathrm{V} = dxdydz = r\, drd\theta dz.$　$\square$

21.3 変数変換公式, 3 次元のヤコビアン

定義【ヤコビアン】

全微分可能で連続な関数 $f(x,y,z)=f\big(\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w),\gamma(u,v,w)\big)$ で与えられるとき,

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(u,v,w)}=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial\alpha}{\partial w}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial\beta}{\partial w}\\ \frac{\partial\gamma}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial\gamma}{\partial w}\end{pmatrix}\right|$$

をヤコビアンという.

命題

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ で作られる平行六面体の体積 V は,

$$V=\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\right|$$

この証明は 煩雑(はんざつ) なので省略する. [1)]

定理

全微分可能で連続な関数 $f(x,y,z)=f\big(\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w),\gamma(u,v,w)\big)$ で与えられ,
x-y-z 空間の立体 D がこの変換により u-v-w 空間の立体 E に 1 : 1 対応で,
$f(x,y,z)$ は D で連続かつ E で $J(u,v,w)\neq 0$ のとき,

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_E f\big(\alpha(u,v,w),\beta(u,v,w),\gamma(u,v,w)\big)|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

この証明は **17.4** と同様に微小な体積を平行六面体で近似し,
3 変数関数のテイラーの定理を用いて 1 次近似すると得られる.

立体の体積

3 次元空間内の立体 D の体積は, $f(x,y,z)\equiv 1$ の 3 重積分

$$\mathrm{Vol}(D)=\iiint_D 1\,dxdydz$$

で与えられる.

---

1) これは行列式の幾何的意味であり命題ではあるが定義のようなものでもある.
証明は一応, 線型代数学と演習 Ⅳ(秋 2) で習っている (たぶん).

22 付録

22.1 2重積分の剛体の密度と重さとしての解釈, 重心

<u>剛体の密度と重さ</u>

密度 $\times$ (微小な) 面積 $=$ (微小領域の) 重さ

$f : \mathbf{R}^2 \supset D \to \mathbf{R}$ を考えたとき, $f \geqq 0$: 密度とする. 前提として,

$D = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i, \mathrm{Area}(D_i \cap D_j) = 0 \ (i \neq j), {}^{\forall}P_i \in D_i$ とする. このとき,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(P_i)\mathrm{Area}(D_i)}_{D_i \text{の重さ}}}_{\fallingdotseq D \text{ の重さ}} \longrightarrow \underbrace{\iint_D f \, d\mathrm{A}}_{\text{剛体 } D \text{ の重さ}}$$

と解釈できる.

この解釈によって密度一定の場合の**重心** (x_G, y_G) を求めることができる.

重心

重心 (x_G, y_G) は次のような計算で求まる.

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_D x \, d\mathrm{A}}{\displaystyle\iint_D 1 \, d\mathrm{A}}, \quad y_G = \frac{\displaystyle\iint_D y \, d\mathrm{A}}{\displaystyle\iint_D 1 \, d\mathrm{A}}$$

$\because$

$$\iint_D \big\{(x, y) - (x_G, y_G)\big\} d\mathrm{A} = 0 \iff \begin{cases} \displaystyle\iint_D x \, d\mathrm{A} = x_G \iint_D 1 \, d\mathrm{A} \\ \displaystyle\iint_D y \, d\mathrm{A} = y_G \iint_D 1 \, d\mathrm{A} \end{cases} \qquad \square$$

参考文献

[1] 大原 一孝 （1999）『実例で学ぶ 微分積分』 学術図書出版社

[2] 多変数の微分積分学 (2018) 岡山理科大学理学部応用数学科