# 現象の数理 講義まとめ

最終更新日：2019 年 3 月 5 日

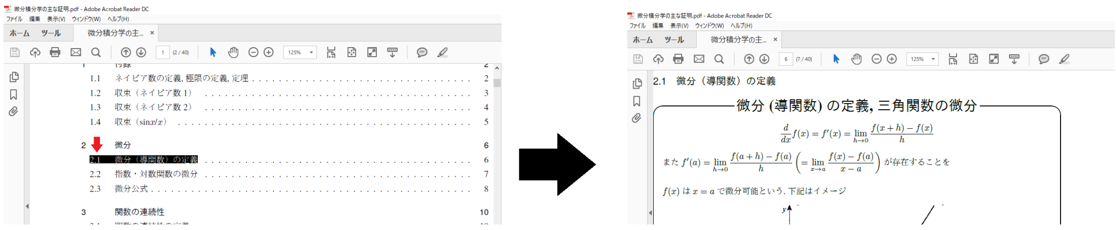
## はじめに

これは大学 2 年次の現象の数理 I, II の講義で学習した定義・定理を（証明なども含め）簡単にまとめたものです． 多少タイプミス等があるかもしれませんが， ご了承ください．すべての内容が収録されているわけではありませんが，復習などご自由に役立ててください．最初の方は内容 (微分方程式の解の存在と一意性の部分) がかなりエグいので，読み飛ばしてください．すべて読み終わってからだと意味がよくわかると思います．目次の行きたい単元の頭番号を押すとそのページへ行けます.(下記参照.) また，例題などで解き方を詳細に書いてありますが，解法の 1 例に過ぎないのであくまで参考までにしてください，

本 PDF では，ベクトル表示は $\mathbbm{a}$，実数，複素数，自然数全体の集合等を $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ 等いわゆる白抜き文字で表記する．また，零ベクトルは $\mathbbm{o}$，ゼロ行列は $O$ と表記する．ただし，ギリシャ文字 ($\xi$ など) のベクトル表示は，$\boldsymbol{\xi}$ などと表記する．
講義プリント等ではベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{0}$，集合では $\mathbf{R}$ と表記されていることもあったが同じ意味である．さらに，ネイピア数を $e$，$\log x$ は自然対数とする．

**式が複雑な場合は，$e^x = \exp(x)$ と書くこともある．例えば，$e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$ など.**

内容に不備や落丁等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします．



# 目次

# 1　自然界の現象と微分方程式

微分方程式は大きく分けて

$$\text{微分方程式}\begin{cases}\text{常微分方程式}\\ \text{偏微分方程式}\end{cases}$$

の２種類ある．何のためにこんなものを考えるのか？

様々な現象からモデルとして，微分方程式を考えたり，微分方程式をモデルとした現象を考えたりする．そこで重要となってくるのが微分方程式の解である．この講義では主にその解の求め方を学んでいく．では内容に入っていく．

---

$x(t)$：時刻 $t$ におけるある物質量とする．このとき，$x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$：増加率，$\dfrac{1}{x(t)}\cdot\dfrac{dx}{dt}$：単位量当たりの増加率である．

**例１**

(1) $x(t)$：時刻 $t$ における放射性物質の質量．

単位量当たりの崩壊量は一定とすると，

$$\frac{1}{x(t)}\cdot\frac{dx}{dt} = -k \quad (k：\text{正定数})$$

となる．したがって，崩壊現象のモデル (微分方程式) は

$$\frac{dx}{dt}(t) = -kx(t)$$

となる．

(2) $x(t)$：時刻 $t$ における単位容積当たりの個体数．

単位当たりの個体増加数を $F(x)$ とすると，

$$\frac{1}{x(t)}\cdot\frac{dx}{dt} = F(x(t)).$$

したがって，このモデルは

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(x(t))\cdot x(t)$$

となる．$F(x(t))$ の変化によって，このモデルは変わってくる．次のような場合を考える．

(a) $F(x(t)) = a$ （$a$：定数）の場合：

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t)$$

となる．この微分方程式のことを**マルサス (Malthus) の方程式**という．

(b) $F(x(t)) = a - bx(t)$ （$a, b$：定数）の場合：

$$\frac{dx}{dt}(t) = (a - bx(t))x(t)$$

となる．この微分方程式のことを**ロジスティック方程式**という．

**例２**

(1) $C$：任意定数とする．このとき，$x(t) = Ce^{-kt}$ は例１の (1) を満たす．また，$x(T) = \dfrac{1}{2}x(0)$ となる $T$ の値は $T = \dfrac{1}{k}\log 2$ である．(半減期)

$\because \dfrac{dx}{dt}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(Ce^{-kt}\right) = -k\underbrace{Ce^{-kt}}_{=x(t)} = -kx(t).$

$x(T) = \dfrac{1}{2}x(0) \Leftrightarrow Ce^{-kT} = \dfrac{1}{2}Ce^{-k\cdot 0} \Leftrightarrow e^{-kt} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log\left(e^{-kT}\right) = \log\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -kT = \log(2^{-1}) \Leftrightarrow T = \dfrac{1}{k}\log 2.$ ■

(2) $x(t) = \dfrac{ace^{at}}{1 + bce^{at}}$ （$c \neq 0$）は例１の (2)(b) を満たす．

めんどくさいのでまず，$a - bx(t)$ を先に計算しておく．$a - bx(t) = a - b\left(\dfrac{ace^{at}}{1 + bce^{at}}\right) = \dfrac{a(1 + bce^{at}) - b(ace^{at})}{1 + bce^{at}} = \dfrac{a}{1 + bce^{at}}.$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{a^2ce^{at}(1 + bce^{at}) - abce^{at}(ace^{at})}{(1 + bce^{at})}$$

$$= \frac{a^2c(e^{at} + bce^{2at} - bce^{2at})}{(1 + bce^{at})^2} = \frac{a^2ce^{at}}{(1 + bce^{at})} = \frac{ace^{at}}{(1 + bce^{at})}\cdot\frac{a}{(1 + bce^{at})} = x(t)\cdot(a - bx(t)).$$ ■

とまぁ，こんな感じになるわけだが，今からやりたいのはこの逆の作業である．

# 2　微分方程式

任意の $x$ で $f(x)=g(x)$ であることを，$f$ と $g$ は恒等的に等しいといい $f(x)\equiv g(x)$ とかく．

## 2.1　微分方程式の基礎事項

前述でも述べたが，この講義の目的はあくまで微分方程式を解くことである．微分方程式を解くとは，どのようなことを指すのかということを述べていく．

- 微分方程式を解く …… 微分方程式の<u>すべて</u>の解を求める．
- すべての解 …… 一般解，特異解．
- 一般解 ……<u>方程式の階数</u>に見合った数のもの．(何回微分の微分方程式か)
- 特異解 …… 任意定数をどのように選んでも得られない解．
- 特殊解 …… 一般解の任意定数に特別な値を代入して得られる解．

## 2.2　解法

微分方程式を解くための方法

- 求積法 …… 方程式の変形，変数変換，不定積分などを組み合わせて解く．➡**注** 求積法で解ける微分方程式はごくごくわずかである．

## 2.3　微分方程式の解の存在と一意性

$n$ 階微分方程式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=g(x),\qquad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n} \tag{$*$}$$

を考える．ここで，$y=y_1,\,y'=y_2,\,\cdots,\,y^{(n-1)}=y_n$ とおくと，$y_1'=y'=y_2,\,y_2'=y_3,\,\cdots,\,y_n'=y^{(n)}$ となるので，$(*)$ を，

$$y_n'=y^{(n)}=-p_1(x)\underbrace{y^{(n-1)}}_{=y_n}-p_2(x)\underbrace{y^{(n-2)}}_{=y_{n-1}}-\cdots-p_n(x)\underbrace{y}_{=y_1}+g(x)$$

とできる．これを行列を用いて表すと，

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{y}}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ p_n(x) & p_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & p_1(x)\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}(x)}\underbrace{\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{n-1}\\ y_n\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{y}}+\underbrace{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ g(x)\end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{g}(x)}$$

となる．$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}(x)$ とすれば，1 階線型微分方程式[1]の形とみれる．ここで，1 階微分方程式の初期値問題 ($y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f:R\to\mathbb{R}$ において)

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,\,y) & \cdots(1)\\ y(a)=b & \cdots(2)\end{cases}$$

を考える．

<u>仮定 **I**</u>

$(a,\,b)\in\mathbb{R}^2,\ A,\ B>0$ とする．また，領域 $R$ を，

$$R:=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,|x-a|\leqslant A,\,|y-b|\leqslant B\right\}$$

と定め，$f(x,\,y)$ は $R$ 上の連続関数とする．($f$：連続かつ有界 ⇒ 最大値・最小値をもつ.) ……(3)

さらに，$M:=\max\left\{|f(x,\,y)|\,;\,(x,\,y)\in R\right\}$ とする． ……(4)

<u>仮定 **II**</u>

$f(x,\,y)$ は $y$ について，Lipschitz 連続 $\left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}{}^{\exists}L>0,\ |f(x,\,y)-f(x,\,z)|\leqslant L(y-z)\right)$ とする．[2]

**定理**

$A':=\min\left\{A,\,\dfrac{B}{M}\right\}$，仮定 **I**,**II** が成り立つとすると，閉区間 $[a-A',\,a+A']$ において，(1),(2) を満たす $C^1$ 級関数 $y(x)$ が一意的に存在する．

この定理の証明には**逐次近似法**を用いる．

逐次近似法とは，某 O 先生曰く，わかりやすく言うと，映画「君の名は。」のようなことが起きない．ということらしい．[3]

[1] *3.2* 参照.
[2] 連続な関数たち ⊃Lipschitz continuity⊃ $C^1$ 級.
[3] 正直，私は何を言っているのかさっぱりわからなかった (笑).

証明：

[存在性]

$y(x)$ が $C^1$ 級で (1),(2) を満たすことと，$y(x)$ が連続で積分方程式

$$(*1)\qquad y(x) = b + \int_a^x f(t,\, y(t))\,dt$$

を満たすことは同値である.[4]

逐次近似法：

$\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ を次で定義する.

$$(*2)\qquad \begin{cases} y_0(x) = b \\ y_{k+1}(x) = b + \int_a^x f(t,\, y_k(t))\,dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= b + \int_a^x f(t,\, y_0)\,dt = b + \int_a^x f(t,\, b)\,dt \\ y_2(x) &= b + \int_a^x f(t,\, y_1)\,dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

Step1. 区間 $[a,\, a + A']$ において，各 $y_k$ が,

$$(*3)\qquad |y_k(x) - b| \leqslant M(x-a) \leqslant B$$

を満たす連続関数であることを示す.

数学的帰納法：

（ i ）$k = 0$ のとき，$y_0(x) = b$ は定数関数なので，連続. $|y_0(x) - b| = |b - b| = 0 \leqslant B$. よって成り立つ.

（ii）$k$ のとき，$(*3)$ と連続性が成り立つと仮定する.

（iii）$k + 1$ のとき,

連続性： 区間 $[a,\, a + A']$ から任意に $\alpha$ をとり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_{k+1}(x) - y_{k+1}(\alpha)| < \varepsilon$ なる $\delta > 0$ が存在することを示す.

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_{k+1}(\alpha)| &= \left|\left(b + \int_a^x f(t,\, y_k)\,dt\right) - \left(b + \int_a^\alpha f(t,\, y_k)\,dt\right)\right| && \because \text{逐次近似法} (*2) \text{より.} \\ &= \left|\int_\alpha^x f(t,\, y_k)\,dt\right| && {}^{5)} \\ &\leqslant \int_\alpha^x |f(t,\, y_k)|\,dt && \because \text{定積分の性質} \\ &\leqslant \int_\alpha^x M\,dt && \because \text{仮定 } \mathbf{I} \text{ より.} \\ &= M(x - \alpha) && \because \text{単なる定積分の計算.} \end{aligned}$$

ここで $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ とすれば，$|y_{k+1}(x) - y_{k+1}(\alpha)| \leqslant M(x-\alpha) < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. よって，

${}^\forall \alpha \in [a,\, a + A'],\ {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ s.t. ${}^\forall x : |x - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_{k+1}(x) - y_{k+1}(\alpha)| < \varepsilon$ が示せたので，$y_{k+1}$ は区間 $[a,\, a + A']$ 上で連続である.

次に等式 $(*3)$ を満たすことを示す

先ほどの連続性の証明より，$|y_{k+1}(x) - b| = \left|\int_a^x f(t,\, y_k)\,dt\right| \leqslant \int_a^x |f(x,\, y_k)|\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt = M(x-a)$ までは明らかである.

また，$x \in [a,\, a + A']$ より，$|y_{k+1}(x) - b| \leqslant M(x-a) \leqslant M(a + A' - a) = MA'$. さらに，$A' = \min\left\{A,\, \dfrac{B}{M}\right\}$ より，$MA' \leqslant M \cdot \dfrac{B}{M} = B$.

$\therefore |y_{k+1}(x) - b| \leqslant M(x-a) \leqslant B$ が示せた. よって $k + 1$ のときも成り立つ. したがって，（ i ),( ii ),(iii）より任意の $k$ において成り立つ. $\blacksquare_{\text{Step1}}$

Step2. 区間 $[a,\, a + A']$ において,

$$(*4)\qquad |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leqslant ML^{k-1} \cdot \frac{(x-a)^k}{k!} \quad (k = 1,\, 2,\, \ldots)$$

が成り立つことを示す.

数学的帰納法：

（ i ）$k = 1$ のとき，$|y_1(x) - y_0(x)| = |y_1(x) - b| = \left|\int_a^x f(t,\, b)\,dt\right| \leqslant M(x-a) = ML^0 \cdot \dfrac{(x-a)^1}{1!}$ なので成り立つ.

（ii）$k$ のとき，$(*4)$ が成り立つと仮定する.

（iii）$k + 1$ のときに成り立つことを示す.

---

[4] $(*1)$ を微分すると微積分学の基本定理より，$\dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y(x))$ となる. 仮定 $\mathbf{I}$ より，$f$ は連続なので，$y$ は $C^1$ 級. 逆は (1) を積分すると明らか.

[5] $\because \int_a^x f(t,\, y_k)\,dt - \int_a^\alpha f(t,\, y_k)\,dt = \int_a^x f(t,\, y_k)\,dt + \int_\alpha^a f(t,\, y_k)\,dt = \int_\alpha^a f(t,\, y_k)\,dt + \int_a^x f(t,\, y_k)\,dt = \int_\alpha^x f(t,\, y_k)\,dt.$

（iii）$k+1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
|y_{k+1}(x)-y_k(x)| &= \left|\int_a^x f(t,\,y_k)\,dt-\int_a^x f(t,\,y_{k-1})\,dt\right| && \because (*2)\\
&\leqslant \int_a^x |f(t,\,y_k)-f(t,\,y_{k-1})|\,dt && \because \text{定積分の性質}\\
&\leqslant L\int_a^x |y_k(t)-y_{k-1}(t)|\,dt && \because \text{仮定 }\mathbf{II}\text{ の Lipschitz 連続と } |y_k-b|\leqslant B \text{ より．}\\
&\leqslant L\int_a^x ML^{k-1}\cdot\frac{(t-a)^k}{k!}\,dt && \because \text{（ii）の帰納法の仮定より．}\\
&= ML^k\cdot\frac{1}{k!}\int_a^x (t-a)^k\,dt \quad = \quad ML^k\cdot\frac{1}{k!}\left[\frac{1}{k+1}(t-a)^{k+1}\right]_a^x\\
&= ML^k\cdot\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

よって，$k+1$ でも $(*4)$ は成り立つ．したがって，（i），（ii），（iii）より任意の $k$ で成り立つ．　$\blacksquare_{\text{Step2}}$

$(*4)$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}|y_k(x)-y_{k-1}(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\cdot\frac{(x-a)^k}{k!}\\
&= \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty} L^k\cdot\frac{(x-a)^k}{k!}\\
&= \frac{M}{L}\left(e^{L(x-a)}-1\right) && \because e^x \text{のテイラー展開より．}\\
&\leqslant \frac{M}{L}\left(e^{LA'}-1\right) && \because \text{指数関数の単調増加性と } x\leqslant a+A' \text{ より．}
\end{aligned}
$$

右辺は $x$ に無関係なので，$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k(x)-y_{k-1}(x)|$ は**一様収束**する．

$\sum_{k=1}^{N}(y_k(x)-y_{k+1}(x))=(\cancel{y_1}-y_0)+(\cancel{y_2}-\cancel{y_1})+\cdots+(\cancel{y_{N-1}}-\cancel{y_{N-2}})+(y_N-\cancel{y_{N-1}})=y_N(x)-b.\quad\therefore y_N(x)=b+\sum_{k=1}^{N}(y_k(x)-y_{k-1}(x)).$

よって，$\lim_{N\to\infty}y_N(x)=:y(x)$ が存在する．また，連続関数列の一様収束極限は連続関数なので $y(x)$ は連続である．

さらに，逐次近似法により，

$$y_k(x)=b+\int_a^x f(t,\,y_{k-1})\,dt$$

だったので，この極限をとると，

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{k\to\infty}y_k(x)\\
&= b+\lim_{k\to\infty}\int_a^x f(t,\,y_{k-1})\,dt && \because b \text{ は定数なので，}\lim\text{ の外に出せる．}\\
&= b+\int_a^x \lim_{k\to\infty}f(t,\,y_{k-1})\,dt && \because \text{一様収束なので } \int \text{ の中に } \lim \text{ を入れることができる．}\\
&= b+\int_a^x f(t,\,y)\,dt
\end{aligned}
$$

したがって，$y(x)=b+\int_a^x f(t,\,y(t))\,dt$ となる $y(x)$ が存在した.[6]　$\blacksquare_{\text{存在性}}$

[解の一意性]

一意性の証明の手法は大体決まっていて，なにかしら別々 (と思われる) の解を 2 つとってきて，それが最終的には同じだったということを証明するという手法が一般的であるのでこの手法を用いる．

$y(x)$, $z(x)$ を 1 階微分方程式の初期値問題 (1),(2) の解であるとする．$y(x)$ の定義域を $D_y$, $z(x)$ の定義域を $D_z$ とし，$D_y\cap D_z=D$ とする．

解の存在性の証明により，いま，$y(x)$, $z(x)$ が解なので，任意の $x\in D$ に対して，$y(x)$, $z(x)$ は

$$
\begin{aligned}
y(x) &= b+\int_a^x f(t,\,y(t))\,dt\\
z(x) &= b+\int_a^x f(t,\,z(t))\,dt
\end{aligned}
$$

とかける．

ここで，$\varphi(x)=|y(x)-z(x)|\quad(x\in D)$ とおくと，

[6] 区間 $[a,\,a+A']$ で話をしてきたが，$[a-A',\,a+A']$ にすると，$(x-a)$ のところが $|x-a|$ に代わるだけなので問題はない (たぶん).

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= |y(x)-z(x)| \\
&= \left|\left(b+\int_a^x f(t,\,y)\,dt\right)-\left(b+\int_a^x f(t,\,z)\,dt\right)\right| \\
&= \left|\int_a^x \{f(t,\,y)-f(t,\,z)\}\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^x |f(t,\,y)-f(t,\,z)|\,dt\right| && \because \text{定積分の性質} \\
&\leqslant L\left|\int_a^x |y(t)-z(t)|\,dt\right| = L\left|\int_a^x \varphi(t)\,dt\right| && \because \text{Lipschitz 連続より.}
\end{aligned}$$

となる．ここで，任意の正の定数 $\tilde{\varepsilon}$ を使って，

$$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon} + L\left|\int_a^x \varphi(t)\,dt\right| \tag{$*5$}$$

とする．ここで，$\phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$ とおく．

（ｉ）$x \geqslant a$ の場合，$(*5)$ の不等式は，$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}+L\phi(x)$ と表せる．いま，$\phi(x) \geqslant 0$ かつ $\phi'(x)=\varphi(x)$ なので，

$$\phi'(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}+L\phi(x) \Longleftrightarrow \phi'(x)-L\phi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon} \tag{$*6$}$$

となる．ここで天下り的だが，$\dfrac{d}{dx}\{\phi(x)e^{-Lx}\}=\phi'(x)e^{-Lx}-Le^{-Lx}\phi(x)=(\phi'(x)-L\phi(x))\,e^{-Lx}$ を考えると，$(*6)$ より，

$$\frac{d}{dx}\left\{\phi(x)e^{-Lx}\right\} \leqslant \tilde{\varepsilon}e^{-Lx} \tag{$*7$}$$

となる．$(*7)$ の両辺を区間 $[a,\,x]$ 上で積分すると，

$$\Big[\phi(x)e^{-Lx}\Big]_a^x \leqslant \Big[\frac{\tilde{\varepsilon}}{-L}e^{-Lx}\Big]_a^x \Longleftrightarrow \phi(x)e^{-Lx}-\phi(a)e^{-La} \leqslant -\frac{\tilde{\varepsilon}}{L}(e^{-Lx}-e^{-La})$$

ここで，$\phi(a)=0$ なので，[7] $\phi(x)e^{-Lx} \leqslant -\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{L}(e^{-Lx}-e^{-La}) \Leftrightarrow \phi(x) \leqslant -\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{L}(1-e^{L(x-a)})$ となる．

$(*5)$ の式に当てはめると，

$$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}+L\phi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}+L\cdot\left(-\frac{\tilde{\varepsilon}}{L}(1-e^{L(x-a)})\right)=\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}(1-e^{L(x-a)})=\tilde{\varepsilon}e^{L(x-a)} \tag{$\flat$}$$

が成り立つ．

（ii）$x \leqslant a$ の場合，$(*5)$ の不等式は，$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}+L\cdot(-\phi(x))$ と表せる．いま，$-\phi(x) \geqslant 0$, $\phi'(x)=\varphi(x)$ なので，

$$\phi'(x)+L\phi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}.$$

ここで，$\dfrac{d}{dx}\{\phi(x)e^{Lx}\}=\phi'(x)e^{Lx}+L\phi(x)e^{Lx}=(\phi'(x)+L\phi(x))e^{Lx}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\left\{\phi(x)e^{Lx}\right\} \leqslant \tilde{\varepsilon}e^{Lx}.$$

この両辺を $[a,\,x]$ 上で積分すると，

$$\phi(x) \leqslant \frac{\tilde{\varepsilon}}{L}(1-e^{L(a-x)}).$$

よって，

$$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}e^{L(a-x)} \tag{$\natural$}$$

$(\flat)$, $(\natural)$ より，

$$\varphi(x) \leqslant \tilde{\varepsilon}e^{L|x-a|}$$

である．$\tilde{\varepsilon} \to 0$ とすると，

$$0 \leqslant \varphi(x)=|y(x)-z(x)| \leqslant 0.$$

よって，任意の $x \in D$ で，

$$y(x)=z(x)$$

■一意性

したがって，微分方程式の解の存在と一意性を示せた．■

補足１：　$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varepsilon + L\left|\int_a^x \varphi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon e^{L|x-a|}$　$({}^\forall x)$ はグロンウォールの補題という．

補足２：　存在するからといって求められるかどうかは別問題．

[7] $\phi(x)=\int_a^x \varphi(t)\,dt$ で定義しているので，$\phi(a)=\int_a^a \varphi(t)\,dt=0$ となる．

# 3　1階微分方程式

## 3.1　変数分離形

**定義【変数分離形】**

次のような形で表される微分方程式を**変数分離形**という：

$$\frac{dy}{dx}=N(x)M(y)$$

**変数分離形の解法**

一般に変数分離形の微分方程式は

$$\int\frac{1}{M(y)}\,dy=\int N(x)\,dx$$

により解ける．

考え方

$\dfrac{dy}{dx}=N(x)M(y)\Leftrightarrow\dfrac{1}{M(y)}\cdot\dfrac{dy}{dx}=N(x).$

合成関数の微分より，$\dfrac{d}{dx}\underbrace{\left(\int\frac{1}{M(y)}\,dy\right)}_{M(y)\text{ は }y\text{ の関数であり，}y\text{ は }x\text{ の関数}}=\dfrac{d}{dy}\left(\int\frac{1}{M(y)}\,dy\right)\cdot\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{\text{中身の微分}}=\dfrac{1}{M(y)}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ なので，

$\dfrac{dy}{dx}=N(x)M(y)\Leftrightarrow\dfrac{1}{M(y)}\cdot\dfrac{dy}{dx}=N(x)\Leftrightarrow\dfrac{d}{dx}\left(\int\frac{1}{M(y)}\,dy\right)=N(x)\Leftrightarrow\int\frac{1}{M(y)}\,dy=\int N(x)\,dx.$ ■

例 1 (変数分離形)

(1) $y\dfrac{dy}{dx}=-x$

$\int y\,dy=\int -x\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1\Leftrightarrow y^2=-x^2+C_2\quad\therefore y=\pm\sqrt{C-x^2}$ （$C$：任意定数）.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y(3-y)$

$\int\frac{1}{y(3-y)}\,dy=\int 1\,dx.$

$\dfrac{1}{y(3-y)}$ を部分分数分解すると，$\dfrac{1}{y(3-y)}=\dfrac{1/3}{y}+\dfrac{1/3}{3-y}$ となる．(参考 ヘビサイドの方法で解くと暗算でできる.) よって，

$\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}\,dy+\frac{1}{3}\int\frac{1}{3-y}\,dy=\int 1\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{3}\Big(\log|y|-\log|3-y|\Big)=x+C_1\Leftrightarrow\log\left|\frac{y}{3-y}\right|=3x+C_2$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{y}{3-y}\right|=e^{3x+C_2}\Leftrightarrow\left|\dfrac{y}{3-y}\right|=e^{3x}\cdot e^{C_2}\Leftrightarrow\dfrac{y}{3-y}=\pm e^{C_2}e^{3x}$．ここで $\pm e^{C_2}=C_3$ とおく．また，$\dfrac{y}{3-y}$ は，

$$\begin{array}{r|l} & \quad -1 \\ \hline -y+3 & \quad y \\ & \quad y-3 \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

より，$\dfrac{y}{3-y}=-1+\dfrac{3}{3-y}$．よって，$-1+\dfrac{3}{3-y}=C_3e^{3x}\Leftrightarrow\dfrac{3}{3-y}=C_3e^{3x}+1\Leftrightarrow\dfrac{3-y}{3}=\dfrac{1}{C_3e^{3x}+1}$.

$\Leftrightarrow 3-y=\dfrac{3}{C_3e^{3x}+1}\Leftrightarrow y=3-\dfrac{3}{C_3e^{3x}+1}=\dfrac{3C_3e^{3x}}{C_3e^{3x}+1}$．$\therefore y=\dfrac{3Ce^{3x}}{Ce^{3x}+1}$ （$C$：任意定数）.

補足：このとき，$C\to 0\ (y=0)$, $C\to\infty\ (y=3)$ となる．

---

演習 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+ay+b=0$ （$a\neq 0$, $b$：定数）

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=y(1-y)$

解 (1) $y=Ce^{-ax}-\dfrac{b}{a}$　(2) $y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+C}$　(3) $y=\dfrac{Ce^x}{1+Ce^x}$　（$C$：任意定数）

### 3.2　1 階線型微分方程式

**定義【1 階線型微分方程式】**

次のような形で表される微分方程式のことを **1 階線型微分方程式**という：

(L1)
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

また，この $q(x)$ を**非斉次項**という．

**補助方程式**

(L1) の $q(x) \equiv 0$ のとき，

(L1)′
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

を**補助方程式**といい，(L1)′ の解は，$y(x) = C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$ （$C$：任意定数）である．

**証明：**

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -p(x) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx \Leftrightarrow \log|y| = -\int p(x)\,dx + C_1$$
$$|y| = \exp\left(-\int p(x)\,dx + C_1\right) \Leftrightarrow y = \pm\exp(C_1)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$$ ■

**1 階線型微分方程式の解法【定数変化法】**

1 階線型微分方程式 (L1) の一般解は，

$$y(x) = \left(\int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)q(x)\,dx + C\right)\cdot\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) \quad (C\text{：任意定数})$$

で与えられる．

**証明：**

補助方程式 (L1)′ の解 $y(x) = C_1\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$ の任意定数 $C_1$ をを $x$ の関数 $u(x)$ だと思う．(定数を関数に変化させる.) つまり，$y(x) = u(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$ と考えて解く．これを (L1) の式に代入すると，

$$\frac{d}{dx}\Bigl(\underbrace{u(x)\exp\Bigl(-\int p(x)}_{\text{積の微分}}\,dx\Bigr)\Bigr) + p(x)\left(u(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)\right) = q(x)$$

$$u'(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) + u(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)\cdot(-p(x)) + p(x)u(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = q(x)$$

$$\therefore u'(x)\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = q(x) \Leftrightarrow u'(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)q(x) = 0 \Longleftrightarrow u(x) = \int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)q(x)\,dx + C.$$

したがって，(L1) の一般解は

$$y(x) = \left(\int \exp\left(\int p(x)\,dx\right)q(x)\,dx + C\right)\cdot\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) \quad (C\text{：任意定数})$$

で与えられる． ■

しかし，ただ公式に当てはめて解くというのは<u>数学科としてはナンセンス</u>なので，この証明のプロセスで解くべきである．というか，公式を覚えるほうが私個人としては難しいような気がする．

例 2（1 階線型）

$\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \cdots (*1)$ を解く．

補助方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -2y$ をとくと，$\log|y| = -2x + C_1 \Leftrightarrow y = C_2e^{-2x}$．この $C_2$ を $x$ の関数 $u(x)$ として考えると，$y(x) = u(x)e^{-2x}$．

これを $(*1)$ に代入すると，$\dfrac{d}{dx}(u(x)e^{-2x}) + 2u(x)e^{-2x} = e^{-x} \Leftrightarrow u'(x)e^{-2x} + -2u(x)e^{-2x} + 2u(x)e^{-2x} = e^{-x} \Leftrightarrow u'(x) = e^{x}$．

$\therefore u(x) = \int u'(x)\,dx = \int e^{x}\,dx = e^{x} + C$．よって，$y(x) = (e^{x} + C)e^{-2x} = e^{-x} + Ce^{-2x}$．

#### 3.2.1　1 階線型微分方程式の初期値問題

**1 階線型微分方程式の初期値問題の解**

1 階線型微分方程式の初期値問題

(LI1)
$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x),\quad y(x_0)=y_0$$

を考える．この初期条件の下での特殊解は次で与えられる：

$$y(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)y_0+\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt.$$

証明：

補助方程式の一般解は $y(x)=C\exp\left(-\int p(x)\,dx\right)$ となるが，あえて $y(x)=C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)$ と考える.[8)]

これを先ほどと同じように，$y(x)=u(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)$ と思って，元の方程式 ((LI1) の左側) に代入して計算すると，

$$u'(x)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)q(x)$$

となる．この両辺を $[x_0,\,x]$ で積分すると，

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}u'(t)\,dt&=\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x_0}^{t}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt\\ u(x)-u(x_0)&=\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x_0}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt\\ u(x)&=u(x_0)+\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x_0}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt\end{aligned}$$

$\therefore y(x)=\left(u(x_0)+\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x_0}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)$．ここで $y_0=y(x_0)=u(x_0)e^0=u(x_0)$ なので，

$y(x)=y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)+\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x_0}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt.$

$\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x_0}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt$

$=\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x}^{x_0}p(s)\,ds+\int_{x_0}^{t}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x}^{t}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt$ となるので，

$$y(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)y_0+\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{t}^{x}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt.\qquad\blacksquare$$

別証：

(LI1) の左側の式の両辺に $\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)$ をかけると，

$$\frac{dy}{dx}\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)+y\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)p(x)=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)q(x)$$

左辺に積の微分の逆算をすると，

$$\frac{d}{dx}\left\{\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)y(x)\right\}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)q(x)$$

両辺を $[x_0,\,x]$ で積分すると，

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(\int_{x_0}^{t}p(s)\,ds\right)y(t)\right\}\right)dt=\int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x_0}^{t}p(s)\,ds\right)q(t)\,dt$$

左辺は $\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)\,ds\right)y(x)-e^0\cdot\underbrace{y(x_0)}_{=y_0}$ となるので，$y(x)=\cdots$ の形にすれば従う．$\blacksquare$

**演習** 次の微分方程式を解け．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+2y=4x^2,\quad y(1)=2$

**解** (1) $y(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

[8)] $y(x)=C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt\right)$ を補助方程式に代入すると解になっていることは容易にわかる．

## 3.3　同次形

**定義【同次形】**

(H)
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形で表せる微分方程式を**同次形**の方程式という．

**同次形の解法**

$u = \dfrac{y}{x}$ とおいて，新たな未知関数を導入する．$\left(u(x) = \dfrac{y(x)}{x} \Longleftrightarrow y(x) = xu(x)\right)$ すると，$f\left(\dfrac{y}{x}\right) = f(u)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big\{xu(x)\Big\} = u(x) + x\frac{du}{dx}$$

この方程式と (H) を比較すると，

$$f(u) = u + x\frac{du}{dx}$$

これは $u$ についての変数分離形の微分方程式であるから，

$$f(u) = u + x\frac{du}{dx} \Longleftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u \Longleftrightarrow \frac{1}{f(u)-u}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow \int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

により解ける．

例3 (同次形)

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+2xy}{x^2} = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$. $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = u^2 + 2u$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\Big\{xu(x)\Big\} = u + x\dfrac{du}{dx}$.

$$u^2 + 2u = u + x\frac{du}{dx} \Longleftrightarrow x\frac{du}{dx} = u(u+1) \Longleftrightarrow \int \underbrace{\frac{1}{u(u+1)}}_{\text{部分分数分解}}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \Longleftrightarrow \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \log|x| + C_1$$

$$\log\left|\frac{u}{u+1}\right| = \log|x| + C_1 \Longleftrightarrow \left|\frac{u}{u+1}\right| = e^{\log|x|+C_1} \Longleftrightarrow \frac{u}{u+1} = Cx \Longleftrightarrow \frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1} = Cx \Longleftrightarrow u(x) = \frac{Cx}{1-Cx}.$$

$\therefore y(x) = xu(x) = x\cdot\dfrac{Cx}{1-Cx} = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$　($C$：任意定数).

(2) $xy^2\dfrac{dy}{dx} = x^3 + y^3$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2} = \dfrac{\frac{1}{x^3}(x^3+y^3)}{\frac{1}{x^3}\cdot xy^2} = \dfrac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ と変形できる．$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx} \Longleftrightarrow \dfrac{1+u^3}{u^2} = u + x\dfrac{du}{dx}$.

$\dfrac{1+u^3}{u^2} - \dfrac{u^3}{u^2} = \dfrac{1}{u^2} = x\dfrac{du}{dx} \Longleftrightarrow \displaystyle\int u^2\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \Longleftrightarrow \frac{1}{3}u^3 = \log|x| + C_1 \Longleftrightarrow u^3 = 3\log|x| + C \Longleftrightarrow u = \sqrt[3]{3\log|x|+C}$ となる．

$\therefore y(x) = xu(x) = x\sqrt[3]{3\log|x|+C}$　($C$：任意定数).

**演習** 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

**解** (1) $y - x = C(y+3x)^5$　(2) $y(x) = x\tan(\log|x| + C)$　($C$：任意定数)

### 3.4　同次形 (補足)

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を定数とする次の微分方程式を考える：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{$\star$}$$

（ i ）$a_1b_2 - a_2b_1 \fallingdotseq 0$ の場合：

$a_1h + b_1k + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$ を満たす定数 $h, k$ を定めることができる．

∵ 2つの式を行列でかくと，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

$a_1b_2 - a_2b_1 \fallingdotseq 0 \Longrightarrow$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ の逆行列が存在して，$(*)$ の両辺に左から逆行列をかけて，

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

よって，$h, k$ を定めることができる．//

この $h, k$ を使って，$u = x - h,\ v = y - k$ とおくと，$\dfrac{du}{dx} = 1,\ \dfrac{dv}{dy} = 1$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$．

また，$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1(x-h) + b_1(y-h) = 0,\ \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2(x-h) + b_2(y-k) = 0$ となるので，

$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= a_1u + b_1v \\ a_2x + b_2y + c_2 &= a_2u + b_2v \end{aligned}$ となる．よって，$(\star)$ は

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$$

と変形できる．これは同次形の微分方程式として解ける．さらに，$v(u)$ を求めた後にもとの $u = x - h,\ v = y - k$ を代入すれば $y(x)$ が求まる．

（ ii ）$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ の場合：

$(a_1, b_1)$ と $(a_2, b_2)$ が一次従属なので，ある定数 $m$ があって $(a_2, b_2) = m(a_1, b_1)$ となるので，$a_2x + b_2y = m(a_1x + b_1y)$ である．

$s = a_1x + b_1y$ とおくと，

$\dfrac{ds}{dx} = a_1 + b_1\dfrac{dy}{dx} = a_1 + b_1 \cdot \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = a_1 + b_1 \cdot \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{m(a_1x + b_1y) + c_2} = a_1 + b_1 \cdot \dfrac{u + c_1}{mu + c_2}$ となる．これは変数分離形である．

---

**演習** 次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + x + 1}{2x + 4y + 1}$

**解** (1) $y - x + 3 = C(y + x + 1)^3$　(2) $\dfrac{1}{2}(x + 2y) - \dfrac{1}{8}\log|4x + 8y + 3| = x + C$　($C$：任意定数)

## 3.5　ベルヌイ型

**定義【ベルヌイ型】**

次のような形で表せる微分方程式を**ベルヌイ型**という：

$$\frac{dy}{dx} + \xi(x)y = \eta(x)y^{\alpha} \quad (\text{ただし}, \alpha \neq 0,\ 1)$$

**➡注** $\alpha = 1$ のとき変数分離形，$\alpha = 0$ のとき 1 階線型である.

**ベルヌイ型の解法**

$u = y^{1-\alpha}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(y^{1-\alpha}) \\ &= (1-\alpha)y^{1-\alpha-1} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot (-\xi(x)y + \eta(x)y^{\alpha}) \\ &= -(1-\alpha)\xi(x)\underbrace{y^{1-\alpha}}_{=u} + (1-\alpha)\eta(x)\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{du}{dx} + (1-\alpha)\xi(x)u = (1-\alpha)\eta(x)$ となる．これは $u$ についての 1 階線型微分方程式であるので解ける.

例 4 (ベルヌイ型)

$2\dfrac{dy}{dx} = y - xy^3 \quad (x > 1)$ を解く.

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{1}{2}xy^3$ と変形. $u = y^{1-3} = y^{-2}$ とおく. $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}(y^{-2}) = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -2y^{-3}\left(\dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}xy^3\right) = -y^{-2} + x.$

$\therefore \dfrac{du}{dx} = -u + x$ を解く. $\dfrac{du}{dx} = -u$ と思う. $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du = -\int 1\,dx \Leftrightarrow \log|u| = -x + C_1 \Leftrightarrow u(x) = C_2e^{-x}$ を $u(x) = s(x)e^{-x}$ と思う.

$-s(x)e^{-x} + x = -u + x = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}(s(x)e^{-x}) = s'(x)e^{-x} - s(x)e^{-x} \quad \therefore s'(x) = xe^x.$

$s(x) = \displaystyle\int s'(x)\,dx = \int xe^x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = e^x x - e^x = e^x(x-1) + C. \quad \therefore u(x) = (e^x(x-1)+C)e^{-x} = (x-1) + Ce^{-x}.$

$u = y^{-2} \Leftrightarrow y = \pm u^{-\frac{1}{2}}$ なので，$y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{x-1+Ce^{-x}}}$ （$C$：任意定数).

---

**演習** 次の微分方程式を解け.

(1) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^2$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2\sin x$

**解** (1) $y(x) = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + C(1-x^2)}$　(2) $y(x) = \dfrac{1}{\frac{\sin x + \cos x}{2} + Ce^x}$　（$C$：任意定数)

### 3.6　完全形

**定義【完全系 (完全微分方程式)】**

微分方程式

(E) $$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0\ \ (M(x,y)dx+N(x,y)dy=0)$$

を考える．

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=:\phi_x=M(x,y),\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=:\phi_y=N(x,y)$$

を満たす連続関数 $\phi(x,y)$ が存在するとき，(E) を**完全形**という．このとき，(E) の一般解は

(EG) $$\phi(x,y)=C\quad (C：任意定数)$$

で与えられる．

実際，$x$：**独立変数** $(x=x(x))$，$y$：**従属変数** $(y=y(x))$ と考え，(EG) の両辺を $x$ で (偏) 微分すると，合成関数の偏微分の公式より，

$$0=\frac{d}{dx}(\phi(x,y))=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}$$

となるので，$\phi(x,y)=C$ が解になっていることがわかる．

**定理**

$M(x,y),N(x,y)$：$x,y$ について $C^1$ 級であるとする．微分方程式 (E) が完全形であるための**必要十分条件**は,

(EC) $$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

である．

**証明：**

(E) が完全形 ⇒(EC) であることを示す．

完全形の定義より，$\phi_x(x,y)=M(x,y),\phi_y(x,y)=N(x,y)$ を満たす連続関数 $\phi(x,y)$ が存在する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\phi_x(x,y)\Big\}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}(x,y)=\phi_{xy}(x,y)\\ \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\phi_y(x,y)\Big\}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,y)=\phi_{yx}(x,y)\end{aligned}$$

$M(x,y),N(x,y)$ が $C^1$ 級の仮定より，$\phi_{xy}(x,y)=\phi_{yx}(x,y)$ なので，(EC) が成り立つ．

---

(EC) が成り立つ ⇒(E) が完全形であることを示す．

$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx$ とおくと，$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=M(x,y),\ \dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial y}\underset{\text{(EC)}}{=}\dfrac{\partial N}{\partial x}\quad\therefore\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$\therefore\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-N(x,y)\right)=0$ なので，$\dfrac{\partial F}{\partial y}-N(x,y)$ は $x$ に依存しない，つまり，$y$ のみに依存する関数である．

$\dfrac{\partial F}{\partial y}-N(x,y)=g(y)$ とおくと，$N(x,y)=\dfrac{\partial F}{\partial y}-g(y)$．よって，　　↓全微分 (外微分)

$M(x,y)+N(x,y)\dfrac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial F}{\partial x}+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-g(y)\right)\dfrac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-g(y)\right)dy=0\Leftrightarrow d\left(F(x,y)-\int g(y)\,dy\right)=0.$

これは，$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ が $F(x,y)-\int g(y)\,dy$ の全微分に等しいことを意味する．

つまり，$\phi(x,y)=F(x,y)-\int g(y)\,dy$ とすればよい．

$G(x,y)=\int N(x,y)\,dy$ とおくと，上と同様に，$\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y)=N(x,y),\ \dfrac{\partial^2G}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ となる．つまり，

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}-M(x,y)\right)=0$ となるので，$h(x)=\dfrac{\partial G}{\partial x}-M(x,y)$ とおくことができ，$M(x,y)=\dfrac{\partial G}{\partial x}-h(x)$.

上と同様にして，全微分 (外微分) より，$d\left(G(x,y)-\int h(x)\,dx\right)=0$ となるので，$\phi(x,y)=G(x,y)-\int h(x)\,dx$ とすればよい．■

## 3.7　完全形の解法

**完全形の解法**

$\boxed{1}$ 3.6 の定理を使って，微分方程式が完全形であることを確認. $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}\text{ であることを確認}\right)$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} \phi_x(x,\,y)(=M(x,\,y)) \text{ を } x \text{ で積分して } \phi(x,\,y) = * + \underbrace{h(y)}_{\text{積分定数が } y \text{ の関数}} \text{ を求める} \\ \phi_y(x,\,y)(=N(x,\,y)) \text{ を } y \text{ で積分して } \phi(x,\,y) = * + \underbrace{h(x)}_{\text{積分定数が } x \text{ の関数}} \text{ を求める} \end{cases}$ のどちらかを行う.

$\boxed{3}$ 積分していない方と $\boxed{2}$ で求めた $\phi(x,\,y)$ を微分して比較し，$h$ を求める.

$\boxed{4}$ $\phi(x,\,y) = C$ （$C$：任意定数）が一般解.

例 5 (完全形)

$(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 2)\dfrac{dy}{dx} = 0$ をとく.

$M(x,\,y) = y\cos x + 2xe^y$, $N(x,\,y) = \sin x + x^2e^y - 2$ と思う. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ なので，完全形である.
完全形の定義より，

$$\phi_x(x,\,y) = y\cos x + 2xe^y \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\phi_y(x,\,y) = \sin x + x^2e^y - 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす $\phi(x,\,y)$ が存在. ① の両辺を $x$ で積分すると，

$$\phi(x,\,y) = y\sin x + x^2e^y + h(y) \qquad \cdots\cdots ③$$

③ を $y$ で (偏) 微分すると，

$$\phi_y(x,\,y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) \qquad \cdots\cdots ④$$

④ と ② を比較すると，$h'(y) = -2$ なので，$h(y) = -2y + C_1$. よって，$\phi(x,\,y) = y\sin x + x^2e^y - 2y + C_1$. よって，一般解は，

$$y\sin x + x^2e^y - 2y = C \quad (C\text{：任意定数}).$$

---

**演習** 次の微分方程式を解け.

(1) $(xy^2 + y) + (x^2y + x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(2) $\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\dfrac{dy}{dx} = 0$

**解** (1) $\dfrac{1}{2}x^2y^2 + xy = C$　(2) $x^2 + y^2 = C$　（$C$：任意定数）

### 3.8　積分因子

**定義【積分因子】**

$$M(x,\,y)+N(x,\,y)\frac{dy}{dx}=0$$

が完全形でない場合でも，両辺に関数 $\mu(x,\,y)$ をかけることで，

$$\mu(x,\,y)M(x,\,y)+\mu(x,\,y)N(x,\,y)\frac{dy}{dx}=0$$

が完全形になることがある．このとき，関数 $\mu(x,\,y)$ を**積分因子**という．

**積分因子の見つけ方** |基本| 頻出

$M(x,\,y)+N(x,\,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ の両辺に $\mu(x,\,y)$ をかけて，$\mu(x,\,y)M(x,\,y)+\mu(x,\,y)N(x,\,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ が完全形になるとすると，*3.6* の定理より，

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,\,y)M(x,\,y)\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,\,y)N(x,\,y)\Big)$$

となる．この式は積の微分なので変形していくと，

$$(*)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial x}\Leftrightarrow N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

- $\dfrac{1}{N(x,\,y)}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ が $x$ だけの関数の場合：

  $\varphi(x):=\dfrac{1}{N(x,\,y)}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ とおく．このとき，積分因子 $\mu(x,\,y)$ は $\mu(x,\,y)=\exp\Big(\displaystyle\int\varphi(x)\,dx\Big)$ である．実際，$(*)$ に代入すると，

$$N\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)\right)-M\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\exp\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)\right)}_{0}=N\exp\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)\varphi(x)=\cancel{N}\underbrace{\exp\Big(\int\varphi(x)\,dx\Big)}_{\mu(x,y)}\cdot\frac{1}{\cancel{N}}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

  よって，$\mu(x,\,y)=\exp\Big(\displaystyle\int\varphi(x)\,dx\Big)$ でよい．■

- $\dfrac{1}{M(x,\,y)}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ が $y$ だけの関数の場合：

  $\phi(y):=\dfrac{1}{M(x,\,y)}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ とおく．このとき，積分因子は $\mu(x,\,y)=\exp\Big(-\displaystyle\int\phi(y)\,dy\Big)$ である．先ほどと同様に確認できる．

---

**参考** |やや難|

- $\dfrac{1}{M_x-N_y}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ が $xy$ の関数の場合：

  $\rho(xy):=\dfrac{1}{M_x-N_y}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ とおき，$u=xy$ とすると，積分因子は $\mu(x,\,y)=\exp\Big(-\displaystyle\int\rho(u)\,du\Big)$. (証明略)

- $\dfrac{x^2}{M_x+N_y}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ が $\dfrac{y}{x}$ の関数の場合：

  $\tau\Big(\dfrac{y}{x}\Big):=\dfrac{x^2}{M_x+N_y}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ とおき，$v=\dfrac{y}{x}$ とすると，積分因子は $\mu(x,\,y)=\exp\Big(-\displaystyle\int\tau(v)\,dv\Big)$. (証明略)

---

**例題** *3.3* の例 3 (2) $xy^2\dfrac{dy}{dx}=x^3+y^3$ について，積分因子を求めて完全形の方程式に変形し，完全形の方程式として一般解を求めよ．

式を $M(x,\,y)+N(x,\,y)\dfrac{dy}{dx}=0$ の形に変形すると，$-x^3-y^3+xy^2\dfrac{dy}{dx}=0$. これはなんとなく積分因子の作り方の 1 個目が使えそうなので，

$\varphi(x):=\dfrac{1}{xy^2}\left(\dfrac{\partial(-x^3-y^3)}{\partial y}-\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial x}\right)=-\dfrac{4}{x}$. $\displaystyle\int\varphi(x)\,dx=-4\int\frac{1}{x}\,dx=-4\log|x|+C_1$ となるので，

$\mu(x,\,y)=e^{-4\log|x|+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{\log x^{-4}}=Cx^{-4}$. $C$ は任意定数なので，$C=1$ としてもよい．よって，積分因子は $\mu(x,\,y)=x^{-4}$.

これを両辺にかけると，$-x^{-1}-y^3x^{-4}+y^2x^{-3}\dfrac{dy}{dx}=0$. $\dfrac{\partial(-x^{-1}-y^3x^{-4})}{\partial y}=-3y^2x^{-4}$, $\dfrac{\partial(y^2x^{-3})}{\partial x}=3y^2x^{-4}=\dfrac{\partial(-x^{-1}-y^3x^{-4})}{\partial y}$ なので，

完全形になっている．ここからは完全形を解く手順で解くと，$\dfrac{y^3}{3x^3}-\log|x|=C$ （$C$：任意定数）となる．

# 4　2階線型微分方程式

**定義【2階線型微分方程式】**

$P(x) \neq 0$ とする．このとき，

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

の形の微分方程式を (非斉次) **2階線型微分方程式**という．また，この両辺を $P(x)$ で割った

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) \tag{L2}$$

を**正規形**の微分方程式という．今後は (L2) を略して，$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ とかく．

**例1**

$y_1(x) = e^x$ と $y_2(x) = e^{-2x}$ は2階線型微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ の解である．
$\because (e^x)'' + (e^x)' - 2e^x = 0,\ (e^{-2x})'' + (e^{-2x})' - 2e^{-2x} = 4e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0.$ //

このような $y_1, y_2$ のことを**基本解**という．詳しい定義は後述 (*4.3*) する．

## 4.1　解の一意性

**定理1**

微分方程式 (L2) を考える．$p(x), q(x)$：(考える区間で) 連続で有界，$y(x), z(x)$：(L2) の解とする．また，次の条件を満たすとする：

$$y(x_0) = z(x_0),\ y'(x_0) = z'(x_0) \quad \text{(初期値が同じ)}$$

このとき，次が成り立つ：

$$y(x) \equiv z(x)$$

__証明：__

$V(x) := (y(x) - z(x))^2 + (y'(x) - z'(x))^2$ とおく．便宜上，$y(x) = y,\ z(x) = z$ などと "$(x)$" を略してかく．

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2(y-z)(y'-z') + 2(y'-z')(y''-z'') \\ &= 2(y-z)(y'-z') + 2(y'-z')((-p(x)y' - q(x)y + g(x)) - (-p(x)z' - q(x)z + g(x))) \\ &= 2(y-z)(y'-z') - 2p(x)(y'-z')^2 - 2q(x)(y-z)(y'-z') \end{aligned}$$

三角不等式とヤングの不等式[9]より，

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |V'(x)| &\leqslant 2|(y-z)(y'-z')| + 2|p(x)| \cdot |y'-z'|^2 + 2|q(x)| \cdot |(y-z)(y'-z')| \\ &\leqslant \underbrace{(y-z)^2 + (y'-z')^2}_{V(x)} + 2|p(x)|(y'-z')^2 + 2|q(x)|\{\underbrace{(y-z)^2 + (y'-z')^2}_{V(x)}\} \\ &\leqslant \big(1 + 2|p(x)| + |q(x)|\big)V(x) \end{aligned}$$

$L := \max_x \{1 + 2|p(x)| + |q(x)|\}$ とおくと，$|V'(x)| \leqslant LV(x)$. $\cdots$ ① (このような不等式を**微分不等式**という.)

$$\frac{d}{dx}\left\{V(x)e^{-Lx}\right\} = V'(x)e^{-Lx} + V(x)e^{-Lx} \cdot (-L) = \Big(\underbrace{V'(x) - LV(x)}_{①\text{ より } \leqslant 0}\Big)\underbrace{e^{-Lx}}_{>0} \leqslant 0. \quad \therefore \frac{d}{dx}\left\{V(x)e^{-Lx}\right\} \leqslant 0. \cdots (*)$$

$(*)$ を $[x_0, x]$ で積分すると，$V(x)e^{-Lx} - V(x_0)e^{-Lx_0} \leqslant 0 \Longleftrightarrow V(x)e^{-Lx} \leqslant V(x_0)e^{-Lx_0}$

$V(x)$ は作り方より，$V(x) \geqslant 0$. また，仮定より $y(x_0) = z(x_0),\ y'(x_0) = z'(x_0)$ なので，$V(x_0) = 0$ となるから，

$$0 \leqslant V(x)\underbrace{e^{-Lx}}_{>0} \leqslant \underbrace{V(x_0)}_{=0} e^{-Lx_0} = 0 \qquad \therefore V(x) = 0\ ({}^\forall x).$$

よって，

$$y(x) \equiv z(x)$$

■

[9] 三角不等式：$|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$，ヤングの不等式：$AB \leqslant \dfrac{A^2}{2} + \dfrac{B^2}{2} \Leftrightarrow 2AB \leqslant A^2 + B^2$.

## 4.2　斉次 2 階線型微分方程式

**定義【斉次 2 階線型微分方程式】**

*4* の (L2) の $g(x) \equiv 0$ の場合，つまり，

(L2)′
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

のことを**斉次 2 階線型微分方程式** (の一般形) という．

### 4.2.1　重ね合わせの原理

**重ね合わせの原理**

$y_1(x),\, y_2(x)$ : (L2)′ の解とする．このとき，

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1,\, C_2 : \text{任意定数})$$

は，(L2)′ の解である．

**証明：**
仮定より，$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,\, y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$
$(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))'' + p(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))' + q(x)(C_1y_1(x) + C_2y_2(x))$
$= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$ ■

## 4.3　ロンスキアン

**定義【ロンスキアン】**

$$W[y_1,\, y_2](x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

を**ロンスキアン**という．今後表記の都合上，$\det A = |A|$ とかく．

**定理 2**

$y_1(x),\, y_2(x)$ : (L2)′ の解とし，ある $x_0$ で $W[y_1,\, y_2](x_0) \fallingdotseq 0$ とする．このとき，(L2)′ の一般解は，次で与えられる：

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \quad (C_1,\, C_2 : \text{任意定数})$$

また，このときの $y_1(x),\, y_2(x)$ を**基本解**という．

**証明：**
重ね合わせの原理より，$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ は (L2)′ の解である．ここで $z(x)$ を (L2)′ の任意の解とすると，

$$(*) \quad \begin{aligned} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) &= z(x_0) \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) &= z'(x_0) \end{aligned}$$

を満たす定数 $C_1,\, C_2$ が存在する．(∵ $(*)$ を行列を用いてかくと，$W[y_1,\, y_2](x_0) \fallingdotseq 0$ なので逆行列の存在より明らか.[10])
$y(x) := C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ とおくと，$y(x)$ は (L2)′ の解であり，*4.1* の定理 1 より，$y(x) \equiv z(x)$ である．
したがって，(L2)′ の任意の解は $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ の形で表せる． ■

**例 1′**
*4* の例 1 の場合のロンスキアンは，$W[y_1,\, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x}$．ある $x_0 = 0$ とすると，$W[y_1,\, y_2](0) = -3 \fallingdotseq 0.$
よって，$y'' + y' - 2y = 0$ の一般解は，$C_1e^x + C_2e^{-2x}$　$(C_1,\, C_2 : \text{任意定数})$ である．

[10] $(*)$ を行列でかくと，$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix}$.

#### 4.3.1　関数の1次独立

**定義【1次独立】**

$y_1(x), y_2(x)$ が1次独立 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $c_1, c_2$ を定数とする．任意の $x$ について，$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$.

**定理３**

$y_1(x), y_2(x)$ のロンスキアン $W[y_1, y_2](x)$ が恒等的に0でなければ，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は1次独立．

証明：対偶を示す．
$y_1(x), y_2(x)$ が1次独立でないとする．このとき，0でない定数 $c_1, c_2$ が存在して，任意の $x$ について，

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0\ \left(\Longleftrightarrow y_2(x)=-\frac{c_1}{c_2}y_1(x)\right) \tag{$*$}$$

が成り立つ．また，$(*)$ の両辺を $x$ で微分すると，

$$c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0\ \left(\Longleftrightarrow y_2'(x)=-\frac{c_1}{c_2}y_1'(x)\right)$$

となる．以上のことから，

$$W[y_1, y_2](x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=y_1(x)\cdot\left(-\frac{c_1}{c_2}y_1'(x)\right)-y_1'(x)\cdot\left(-\frac{c_1}{c_2}y_1(x)\right)=0.$$

したがって，$y_1(x), y_2(x)$ が1次独立でないならば，$W[y_1, y_2](x)\equiv 0$.　■

### 4.4　定数係数２階線型微分方程式

$a, b, c$ を実数の定数とする**定数係数２階線型微分方程式**

$$ay''+by'+cy=0 \tag{LC}$$

が $y(x)=e^{rx}$ なる解を持つと仮定する．これを (LC) に代入すると，

$$r^2ae^{rx}+rbe^{rx}+ce^{rx}=0 \Longleftrightarrow e^{rx}(ar^2+br+c)=0$$

ここで，$e^{rx}\fallingdotseq 0$ より，$r$ は，

$$ar^2+br+c=0 \tag{CE}$$

の解である．このとき，(CE) を (LC) の**特性方程式**という．

#### 4.4.1　オイラーの公式

**オイラーの公式 (Euler's formula)**

$i$：虚数単位，$\theta\in\mathbb{R}$ とする．このとき，次が成り立つ：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

考え方
$e^x$ はテイラー展開により，

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{EXP}$$

となる．また，$\sin x, \cos x$ は，

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \tag{SC}$$

となる．(EXP) の $x$ を $i\theta$ に置き換えると，$i^2=-1$ なので，実部と虚部に分けられ，次のようにできる．

$$e^{i\theta}=\left\{1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right\}+i\left\{\frac{\theta}{1!}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right\}$$

よって，(SC) の $x$ を $\theta$ と思えば，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.　■

実は，$\theta$ は任意の複素数においても成り立つ．➡**注**　厳密には複素関数論の議論が必要である．また，$\theta$ が実数の場合，$\theta$ は複素数 $e^{i\theta}$ の偏角である．

### 4.5　定数係数斉次２階線型微分方程式の一般解の形

**定理４**

*4.4* の式番号をそのまま用いる．また，$C_1, C_2$：任意定数 とする．
（ｉ）(CE) が相異なる２つの**実数解** $r_1$, $r_2$ をもつ場合，(LC) の一般解は次で表される：

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

（ii）(CE) が共役な複素数 $p \pm qi$ ($p,\, q \in \mathbb{R}$) を解にもつ場合，(LC) の一般解は次で表される：

$$y(x) = e^{px}\left(C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)\right)$$

（iii）(CE) が重根 $r_1$ を解にもつ場合，(LC) の一般解は次で表される：

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

証明：
（ｉ）*4.2.1* の重ね合わせの原理より明らか．

（ii）重ね合わせの原理より，$C_1 e^{(p+qi)x} + C_2 e^{(p-qi)x}$ は解である．しかし，これは一般には複素数となる．実数解を求めたいので，
*4.4.1* のオイラーの公式より，$e^{(p\pm qi)x} = e^{px} \cdot e^{\pm i(qx)} = e^{px}\left(\cos(qx) \pm i \sin(qx)\right)$　(複合同順) とできるので，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^{(p+qi)x} + e^{(p-qi)x}\right) &= e^{px}\cos(qx) \\ \frac{1}{2i}\left(e^{(p+qi)x} - e^{(p-qi)x}\right) &= e^{px}\sin(qx) \end{aligned}$$

とかける．左辺は重ね合わせの原理より，(LC) の解であるから，右辺も解である．
よって，これまた重ね合わせの原理より，一般解は $y(x) = C_1 e^{px}\cos(qx) + C_2 e^{px}\sin(qx) = e^{px}\left(C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)\right)$．

（iii）$y_1(x) = e^{r_1 x}$ は (LC) の解である．$y_{2'}(x) = e^{rx}z(x)$ とおいて，(LC) に代入する．(積の微分になっていることに注意.)
$(e^{rx}z(x))'' = (re^{rx}z(x) + e^{rx}z'(x))' = r^2 e^{rx}z(x) + 2re^{rx}z'(x) + e^{rx}z''(x)$ なので，

$$\begin{aligned} & a(e^{rx}z(x))'' + b(e^{rx}z(x))' + c(e^{rx}z(x)) \\ =\ & a(r^2 e^{rx}z(x) + 2re^{rx}z'(x) + e^{rx}z''(x)) + b(re^{rx}z(x) + e^{rx}z'(x)) + c(e^{rx}z(x)) \\ =\ & \underbrace{(ar^2 + br + c)}_{=f(r)\text{ とおく}} e^{rx}z(x) + \underbrace{(2ar + b)}_{f'(r)} e^{rx}z'(x) + \underbrace{a}_{=\frac{1}{2}f''(r)} e^{rx}z''(x). \end{aligned}$$

$r = r_1$ は重根なので $f(r_1) = 0$, $f'(r_1) = 0$, $f''(r_1) \fallingdotseq 0$ となる．つまり，$z''(x) = 0 \Rightarrow y_2(x) = e^{r_1 x}z(x)$ は (LC) の解となる．
$z(x) = d_1 x + d_2$　$(d_1,\, d_2 \in \mathbb{R})$ とおけば，$z''(x) = 0$ である．特に，$d_1 = 1$, $d_2 = 0$ とすると，$z(x) = x$.
よって，$y_2(x) = e^{r_1 x}z(x) = e^{r_1 x}x$ は (LC) の解となる．したがって，重ね合わせの原理より，(LC) の一般解は,
$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$ となる．■

## 5　高階線型微分方程式

正規形の $n$ 階微分方程式

$$L[y] := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = g(x) \tag{L$n$}$$

を考える．この場合も２階線型微分方程式のときと同じようなことが定義でき，成り立つ．証明は省略する. (恐らく帰納法により証明できる.)

**定理【解の一意性】**

$y(x), z(x)$：(L$n$) の解であるとする．$y(a) = z(a),\ y'(a) = z'(a),\ \cdots,\ y^{(n-1)}(a) = z^{(n-1)}(a) \Longrightarrow y(x) \equiv z(x)$.

**定義【ロンスキアン】**

$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ について，ロンスキアンを次のように定める：

$$W[y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n](x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

**定理１ (4.3.1)**

ある $a$ で $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](a) \neq 0 \Longleftrightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n$ は 1 次独立.

**定理【一般解】(4.3)**

$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$：$L[y]=0$ の解とする．ある $a$ で $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](a) \neq 0$ のとき，$L[y]=0$ の一般解は,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n：\text{任意定数}).$$

**特性方程式 (4.4)**

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ を定数とする正規形の定数係数 $n$ 階線型微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{LC$n$}$$

を考える．$y = e^{rx}$ を (LC$n$) に代入して整理すると,

$$(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rx} = 0$$

となる．$e^{rx} \neq 0$ なので,

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{CE$n$}$$

ならば，$y = e^{rx}$ は (LC$n$) の解となる．この (CE$n$) を (LC$n$) の**特性方程式**という.

※代数学の基本定理から，(CE$n$) は重複度も込めて $n$ 個の根をもつ．実係数なので，$r$ が (CE$n$) の複素根ならば，共役 $\bar{r}$ も根である.

$r_1, \cdots, r_m$ $(n \geqslant m)$：(CE$n$) の根，$k_1, \cdots, k_m$：$r_1, \ldots, k_m$ それぞれの重複度 $\left(\sum_{j=1}^{m} k_j = n\right)$ とすると，(CE$n$) は次のように書き換えられる：

$$(r - r_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (r - r_m)^{k_m} = 0.$$

**定理２**

(CE$n$) の解 $r$ について,

（ｉ）$r$ が実数の $k$ 重根の場合：

$$e^{rx}, xe^{rx}, \cdots, x^{k-1}e^{rx}$$

は (LC$n$) の解である.

（ii）$r = p \pm qi$ が $k$ 重根の場合：

$$e^{px}\cos(qx), xe^{px}\cos(qx), \cdots, x^{k-1}e^{px}\cos(qx)$$
$$e^{px}\sin(qx), xe^{px}\sin(qx), \cdots, x^{k-1}e^{px}\sin(qx)$$

は (LC$n$) の解である.

## 5.1　例題

例 題

(1) $y''' + y'' + y' + y = 0$ の一般解を求める.

特性方程式 $r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \Longleftrightarrow (r+1)(r^2+1) = 0.$　$\therefore r = -1, 0 \pm i$ となるので，$e^{-x}$, $e^{0 \cdot x}\cos(1 \cdot x)$, $e^{0 \cdot x}\sin(1 \cdot x)$ は解である.

よって，一般解は $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$　$(C_1, C_2, C_3：\text{任意定数})$ である.

(2) $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$ を解く.

特性方程式 $r^8 + 8r^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow (r^4)^2 + 8(r^4)^1 + 16 = 0 \Leftrightarrow (r^4+4)^2 = 0 \Leftrightarrow r^4 + 4 = 0.$

$0 = r^4 + 4 = r^4 + 4 + 0 = r^4 + 4 + 4r^2 - 4r^2 = (r^2+2)^2 - (2r)^2 = (r^2 + 2 + 2r)(r^2 + 2 - 2r).$　$\therefore r = -1 \pm i, 1 \pm i.$

これは 2 重根：2 重根なので，$e^{-x}\cos x$, $xe^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$, $xe^{-x}\sin x$, $e^x \cos x$, $xe^x \cos x$, $e^x \sin x$, $xe^x \sin x$ は解である.

よって，一般解は $y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 xe^{-x}\cos x + C_3 e^{-x}\sin x + C_4 xe^{-x}\sin x + C_5 e^x \cos x + C_6 xe^x \cos x + C_7 e^x \sin x + C_8 xe^x \sin x$

まとめると，$y(x) = e^{-x}\{(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x\} + e^x\{(C_5 + C_6 x)\cos x + (C_7 + C_8 x)\sin x\}$

$(C_\ell：\text{任意定数}\ (\ell = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)).$

**演習** 次の微分方程式を解け.

(1) $y'' - 8y' + 16y = 0$　(2) $y'' + 3y' - 18y = 0$　(3) $y'' + 2y' + 5y = 0$　(4) $y''' + 2y'' - y = 0$　(5) $2y''' + 3y'' - 8y' + 3y = 0$

**解** (1) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x}$　(2) $y(x) = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{3x}$　(3) $y(x) = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin x$

(4) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)x} + C_3 e^{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$　(5) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{(1/2)x}$　$(C_1, C_2, C_3：\text{任意定数})$

# 6　非斉次線型微分方程式

## 6.1　解を予想して求める方法

$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \text{(斉次)}$$

と

$$L(y) = g(x) \qquad \text{(非斉次)}$$

を考える．

**定理 1**

$Y(x) : L(y) = g(x)$ の特殊解 (1 つの解) とする．このとき，$L(y) = g(x)$ の一般解は $L(y) = 0$ の一般解と $Y(x)$ の和で与えられる．式で書くと，

$$\Big(L(y) = g(x) \text{ の一般解}\Big) = \Big(L(y) = 0 \text{ の一般解}\Big) + \Big(L(y) = g(x) \text{ の特殊解}\Big).$$

**証明：**

$y(x)$ を $L(y) = g(x)$ の解とし，$z(x) = y(x) - Y(x)$ とおくと，$L(z) = L(y) - L(Y) = g(x) - g(x) = 0$.

$\therefore z(x)$ は $L(z) = 0$ を満たす．逆に，$L(z) = 0$ を満たす $z(x)$ に対して，$y(x) = z(x) + Y(x)$ とおけば，$L(y) = g(x)$ を満たす．■

**$Y(x)$ の予想の仕方**

| $g(x)$ | $Y(x)$ |
|---|---|
| $(n$ 次式$)\cdot e^{\alpha x}$ | $\alpha$ が特性方程式の解でない $\Rightarrow (n$ 次式の一般形$)\cdot e^{\alpha x}$ |
| | $\alpha$ が特性方程式の解 (根)$\Rightarrow x\cdot(n$ 次式の一般形$)\cdot e^{\alpha x}$ |
| | $\alpha$ が特性方程式の 2 重根 $\Rightarrow x^2\cdot(n$ 次式の一般形$)\cdot e^{\alpha x}$ |
| $(n$ 次式$)\cdot \sin\alpha x$ または $(n$ 次式$)\cdot\cos\alpha x$ | $\alpha$ が特性方程式の解でない $\Rightarrow (n$ 次式の一般形$)\cdot\sin\alpha x + (n$ 次式の一般形$)\cdot\cos\alpha x$ |
| | $\alpha$ が特性方程式の解 (根)$\Rightarrow (n$ 次式の一般形$)\cdot x\sin\alpha x + (n$ 次式の一般形$)\cdot x\cos\alpha x$ |
| | $\alpha$ が特性方程式の 2 重根 $\Rightarrow (n$ 次式の一般形$)\cdot x^2\sin\alpha x + (n$ 次式の一般形$)\cdot x^2\cos\alpha x$ |

➡注 ❶ $n$ 次式の一般形とは $A_n x^n + \cdots + A_1 x + A$ のことである．

❷ また，$\sin x$, $\cos x$ の予想の場合には，$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)\sin x + (B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0)\cos x$ と予想すること．

❸ 非斉次 2 階線型微分方程式の場合を考えたが，$n$ 階でも同様のことが成り立つ．

❹ $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ の場合，上の表を組み合わせればよい．

例えば，$\alpha + \beta i$ が特性方程式の解でない $\Rightarrow e^{\alpha x}\cdot\{(n$ 次式の一般形$)\cdot\sin\beta x + (n$ 次式の一般形$)\cdot\cos\beta x\}$.

**例 1**

(1) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$ ⋯① の一般解を求める．

特性方程式 $r^2 - 3r - 4 = 0 \Leftrightarrow (r-4)(r+1) = 0$ を用いると $y'' - 3y' - 4y = 0$ の一般解は $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ である．

① の特殊解を $Y(x) = Ae^{2x}$ と予想する．そして ① の左辺に代入すると，

$(Ae^{2x})'' - 3(Ae^{2x})' - 4Ae^{2x} = 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = -6Ae^{2x}$. これと ① の右辺を比較すると，$-6Ae^{2x} = 3e^{2x}$. $\therefore A = -\dfrac{1}{2}$.

よって，一般解は $y(x) = \underbrace{C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}}_{L(y)=0 \text{ の一般解}} \underbrace{-\dfrac{1}{2}e^{2x}}_{\text{特殊解}}$ $(C_1, C_2$：任意定数$)$.

(2) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ ⋯② の一般解を求める．

(1) より，$y'' - 3y' - 4y = 0$ の一般解は $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$.

$Y(x) = A\sin x + B\cos x$ と予想．$Y'' - 3Y' - 4Y = (-5A + 3B)\sin x + (-3A - 5B)\cos x$.

② の右辺と比較すると，$(-5A + 3B)\sin x + (-3A - 5B)\cos x = 2\sin x$. $\begin{cases} -5A + 3B = 2 \\ -3A - 5B = 0 \end{cases}$ をとくと，$A = -\dfrac{5}{17}$, $B = \dfrac{3}{17}$.

$\therefore Y(x) = -\dfrac{5}{17}\sin x + \dfrac{3}{17}\cos x$. $\therefore y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \dfrac{5}{17}\sin x + \dfrac{3}{17}\cos x$.

(3) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$

特殊解を $Y(x) = xAe^{-x}$ と予想して，(1),(2) と同様に解くと，$A = -\dfrac{1}{5}$. $\therefore y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \dfrac{1}{5}xe^{-x}$.

---

**演習** 次の非斉次線型微分方程式の特殊解 $Y(x)$ を求めよ．

(1) $y'' + 3y' - 18y = xe^{3x}$　　(2) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$

**解** (1) $Y(x) = \left(\dfrac{1}{18}x - \dfrac{1}{81}\right)xe^{3x}$　　(2) $Y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 e^{4x}$

## 6.2　ロンスキアンと微分方程式

前頁で，特殊解 $Y(x)$ を予想して，非斉次線型微分方程式の一般解を求めた．しかし，予想して解くというのは何だかパッとしないと思う．そこで，予想せずに求める方法として，1 階のときと同様に，**定数変化法**というものを用いる．その過程で，次の定理の (2) の対偶を用いるので紹介しておく．

**定理２**

$y_1(x),\, y_2(x)$ を

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

の解とする．このとき，次が成り立つ：

(1) $\dfrac{d}{dx}W[y_1,\, y_2](x) + p(x)W[y_1,\, y_2](x) = 0$

(2) ある $x_0$ で，$W[y_1,\, y_2](x_0) = 0$ ならば，$W[y_1,\, y_2](x) \equiv 0$ であり，$y_1(x),\, y_2(x)$ は 1 次従属である．
($\overset{\text{対偶}}{\Longleftrightarrow}$ $W[y_1,\, y_2](x)$ が恒等的に 0 でない ($y_1,\, y_2$ が 1 次独立) ならば，$W[y_1,\, y_2](x) \neq 0$ ($^\forall x$).)

<u>証明：</u> 便宜上，$W(x) := W[y_1,\, y_2](x)$ とする．

(1)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W(x) &= \frac{d}{dx}(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x))\\ &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x)\\ &= y_1(x)(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)) - y_2(x)(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x))\\ &= -p(x)y_1(x)y_2'(x) + p(x)y_1'(x)y_2(x)\\ &= -p(x)(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x))\\ &= -p(x)W(x) \quad /\!\!/\end{aligned}$$

(2) (1) より，$\dfrac{dW}{dx} + p(x)W(x) = 0 \ \cdots(*)$ これは変数分離形なので解ける．$(*)$ の両辺に $\exp\left(\displaystyle\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right)$ をかけると，

$$W'(x)\exp\left(\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right) + W(x)\exp\left(\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right)p(x) = 0$$

となる．左辺は積の微分の結果とみれるので，

$$\frac{d}{dx}\left\{W(x)\exp\left(\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right)\right\} = 0$$

とできる．これを $[x_0,\, x]$ で積分すると，

$$W(x)\underbrace{\exp\left(\int_{x_0}^x p(t)\,dt\right)}_{\neq 0} - \underbrace{W(x_0)}_{=0}\underbrace{\exp\left(\int_{x_0}^{x_0} p(t)\,dt\right)}_{=1} = 0$$

となるので，$W(x) \equiv 0$. $\cdots(*1)$ 次に，$y_1(x),\, y_2(x)$ が 1 次従属であることを示す．
$(*1)$ より，$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0$ である．$y_1(x) \equiv 0$ または $y_2(x) \equiv 0$ の場合，$y_1(x),\, y_2(x)$ は明らかに 1 次従属．
よって，ある $x_0$ で $y_1(x_0) \neq 0$ または $y_2(x_0) \neq 0$ の場合を考えればよい．$y_1(x_0) \neq 0$ の場合を考える．
$y_1(x)$ は連続なので，$x_0$ を含むようなある区間 $I$ で，$y_1(x) \neq 0$. (詳しくは $\varepsilon$-$\delta$ 論法.) この区間内で $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} =: C(x)$ とおく．
$\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C(x) \Leftrightarrow y_2(x) = C(x)y_1(x)$ この両辺を微分すると，$y_2'(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x)$. $\cdots$①
また，ロンスキアンが 0 より，$y_2'(x) = \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}y_1'(x) = C(x)y_1'(x)$. $\cdots$②
①,② より，$C'(x)y_1(x) = 0$. この区間 $I$ では $y_1(x) \neq 0$ なので，$C'(x) = 0$. つまり，$C(x)$ は定数関数である．
$C(x) = c$ ($c$：定数) とおくと，$\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = c \Longleftrightarrow y_2(x) = cy_1(x)$. したがって，$y_1(x),\, y_2(x)$ は 1 次従属である．　■

## 6.3　定数変化法

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{*L}$$

を考える．

<u>定数変化法</u>

$y_1(x),\, y_2(x)$ を

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

の 1 次独立な解とすると，(1) の一般解は，

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_(x) \quad (c_1,\, c_2\text{：任意定数})$$

で与えられる．

定数 $C_1$, $C_2$ を $x$ の関数 $u_1(x)$, $u_2(x)$ に変化させて，(*L) の解を，

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{**L}$$

の形で求める．ここで両辺を微分すると，$y'(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x)$．ここで，

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{2}$$

を仮定する．(特殊解を求めるので，$u_1(x)$, $u_2(x)$ には都合のいい仮定をする.) このとき，

$$y''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)$$

これらを (*L) に代入すると，

$$\begin{aligned}
& y'' + p(x)y' + q(x)y \\
= \; & (u_1'(x)y_1' + u_1(x)y_1'' + u_2'(x)y_2' + u_2(x)y_2'') + p(x)(u_1(x)y_1' + u_2(x)y_2') + q(x)(u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2) \\
= \; & u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' + u_1(x)(\underbrace{y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1}_{=0}) + u_2(x)(\underbrace{y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2}_{=0}) \\
= \; & u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) \qquad = \; g(x)
\end{aligned}$$

つまり，

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \tag{3}$$

であればよい．(2) と (3) より，連立方程式

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．これを行列を用いてかくと，

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

いま，$y_1(x)$, $y_2(x)$ は 1 次独立な解であるから，*6.2* の定理 2 の (2) の対偶より，$W[y_1, y_2](x) \fallingdotseq 0$ ($^\forall x$) なので，

$$\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[y_1, y_2](x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

したがって，

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}$$

である．これらを積分して，

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx + C_1, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx + C_2 \qquad (C_1,\, C_2：\text{任意定数})$$

この 2 つの式を (**L) に代入すると，

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int \frac{-y_2(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx$$

で与えられる．//

**参考** 上記の説明では行列を用いて，$u_1'(x)$, $u_2'(x)$ を求めたが，実際問題，連立方程式を解く方が有効だと考えられる．(逆行列を求めたり，ロンスキアンを計算する方が面倒だから.)

---

例 2　$y'' + 3y' + 2y = e^{2x}\cos x \cdots (*)$ を定数変化法により解く．

$y'' + 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$　($c_1$, $c_2$：任意定数) である．(各自に任せる.)

ここで，$y(x) = u_1(x)e^{-x} + u_2(x)e^{-2x}$ と思う．さらに，$u_1'(x)e^{-x} + u_2'(x)e^{-2x} = 0 \cdots (*1)$ を仮定する．そして，$(*)$ に代入して計算すると，

$y'' + 3y' + 2y = -u_1'(x)e^{-x} - 2u_2'(x)e^{-2x} = e^{2x}\cos x \cdots (*2)$．$(*1)$ と $(*2)$ を連立させると，$\begin{cases} u_1'(x)e^{-x} + u_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -u_1'(x)e^{-x} - 2u_2'(x)e^{-2x} = e^{2x}\cos x \end{cases}$．

$$\begin{array}{rrcrcl}
 & u_1'(x)e^{-x} & + & u_2'(x)e^{-2x} & = & 0 \\
+\big) & -u_1'(x)e^{-x} & - & 2u_2'(x)e^{-2x} & = & e^{2x}\cos x \\ \hline
 & & - & u_2'(x)e^{-2x} & = & e^{2x}\cos x
\end{array}
\quad \therefore \; \begin{array}{l} u_2'(x) = -e^{4x}\cos x, \\ u_1'(x) = e^{3x}\cos x \end{array}$$

となる．これらは，$\begin{array}{l} I = \int e^{3x}\cos x\,dx, \\ J = \int e^{4x}\cos x\,dx \end{array}$ などとおき，

部分積分法により，$\begin{array}{l} u_1(x) = \dfrac{e^{3x}\sin x + 3e^{3x}\cos x}{10} + C_1 \\ u_2(x) = -\dfrac{e^{4x}\sin x + 4e^{4x}\cos x}{17} + C_2 \end{array}$ が求まる．よって，一般解は，

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{e^{2x}\sin x + 3e^{2x}\cos x}{10} - \frac{e^{2x}\sin x + 4e^{2x}\cos x}{17} \quad (C_1,\, C_2：\text{任意定数}).$$

## 6.4　オイラー型の線型微分方程式

$a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする次の微分方程式を**オイラー (Euler) 型の線型微分方程式**という：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{*E}$$

$y = y(x)$ を求めるために，$x = e^t$ と変数変換する．また，$w(t) = y(e^t)$ とおく．すると，

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{y(e^t)\right\} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d(e^t)}{dt} = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

であり，さらに，

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dx}y(e^t)\cdot e^t\right\} = \frac{d^2}{dx^2}y(e^t)e^t\cdot e^t + \frac{d}{dx}y(e^t)e^t = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{x\frac{dy}{dx}}_{=\frac{dw}{dt}}$$

となるので，

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{dw}{dt}$$

である．これを (*E) に代入すると，

$$\left(\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{dw}{dt}\right) + a\frac{dw}{dt} + bw = 0 \iff \frac{d^2w}{dt^2} + (a-1)\frac{dw}{dt} + bw = 0$$

となる．これは $w(t)$ についての定数係数斉次 2 階線型微分方程式なので，特性方程式

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

によって，$w(t)$ が求まる．$x = e^t$ と変数変換しているので，$t = \log x$ を $w(t)$ に代入すると，(*E) の解 $y(x)$ が求まる．

---

**例 3**

オイラー型微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ （$x > 0$）を解く．

$x = e^t$ と変数変換し，$w(t) = y(e^t)$ とする．すると，$\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dy}{dx}e^t = x\dfrac{dy}{dx}$ であり，$\dfrac{d^2w}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dx^2}e^t\cdot e^t + \dfrac{dy}{dx}e^t = x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{x\dfrac{dy}{dx}}_{=\frac{dw}{dt}}$ となる．

よって，$x^2\dfrac{dy}{dx^2} = \dfrac{d^2w}{dt^2} - \dfrac{dw}{dt}$ であるから，$\dfrac{d^2w}{dt^2} + \dfrac{dw}{dt} + z = 0$ を解けばよい．

特性方程式 $r^2 + r + 1 = 0 \iff r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ なので，$w(t) = C_1e^{-(1/2)t}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2e^{-(1/2)t}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

$t = \log x$ を代入すると，

$$y(x) = \frac{C_1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + \frac{C_2}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) \quad (C_1,\, C_2：任意定数).$$

# 7 線型系の基礎理論

連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n \end{cases}$$

はベクトルと行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

で表される．$n$ 次元ベクトル $\mathbb{y}$，行列 $A(t)$ を，

$$\mathbb{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

と定めると，

$$\mathbb{y}' = A(t)\,\mathbb{y} \tag{1}$$

で表せる．これらの方程式たちは **$n$ 次元線型微分方程式系**または単に，**線型系**と呼ばれる．(ベクトル微分方程式ということもある.)

**定理 1**

行列 $A(t)$ の各成分が連続であるとき，線型系 (1) について，以下のことが成り立つ.

（ｉ）初期値に関する解の**存在性**と**一意性**は保証される.

（ii）初期条件 $\mathbb{y}(t_0) = \mathbb{y}_0$ を与えれば，解は唯一定まる.

（iii）解空間に線型性を有する. (**重ね合わせの原理**)

（iv）線型系 (1) は $n$ 個の **1 次独立**な解をもつ.

（ｖ）線型系 (1) の任意の解は 1 次独立な解により記述できる.

（vi）線型系 (1) の解空間は $n$ 次元ベクトル空間を成す. ((iii)−(ｖ) より明らか.)

**証明：**

(ｉ),(ii) は *2.3* 参照.

(iii) $\mathbb{y}_1(t), \mathbb{y}_2(t), \ldots, \mathbb{y}_n(t)$：(1) の解 $\Rightarrow C_1\mathbb{y}_1(t) + C_2\mathbb{y}_2(t) + \cdots + C_n\mathbb{y}_n(t)$ も (1) の解であることを示せばよい. ($C_\ell$：任意定数)

$$\begin{aligned} (C_1\mathbb{y}_1(t) + C_2\mathbb{y}_2(t) + \cdots + C_n\mathbb{y}_n(t))' &= C_1\mathbb{y}_1'(t) + C_2\mathbb{y}_2'(t) + \cdots + C_n\mathbb{y}_n'(t) \\ &= C_1(A(t)\mathbb{y}_1) + C_2(A(t)\mathbb{y}_2) + \cdots + C_n(A(t)\mathbb{y}_n) \\ &= A(t)(C_1\mathbb{y}_1(t) + C_2\mathbb{y}_2(t) + \cdots + C_n\mathbb{y}_n(t)) \quad /\!/ \end{aligned}$$

(iv) $c_1\mathbb{y}_1(t) + c_2\mathbb{y}_2(t) + \cdots c_n\mathbb{y}_n(t) \equiv \mathbb{o} \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ を示せばよい.

任意の $t$ において成り立つことを仮定しているので，ある $t_0$ においても成り立つ．ここで，$\ell = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\mathbb{y}_\ell(t)$ の初期条件

$$\mathbb{y}_\ell(t_0) = \mathbb{e}_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \ell\text{行目} \tag{2}$$

を満たす線型系 (1) の解とする．すると，

$$\begin{aligned} \mathbb{o} &= c_1\mathbb{y}_1(t_0) + c_2\mathbb{y}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbb{y}_n(t_0) \\ &= c_1\mathbb{e}_1 + c_2\mathbb{e}_2 + \cdots + c_n\mathbb{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. したがって，$\mathbb{y}_1, \mathbb{y}_2, \ldots, \mathbb{y}_n$ は 1 次独立. $/\!/$

(ｖ) は次のページで証明する.

**定理１の続き**

（ｖ）線型系 (1) の任意の解は 1 次独立な解により記述できる．

**証明：**

（ｖ）各 $\ell=1,2,\ldots,n$ に対して，$\mathrm{y}_\ell(t)$ を初期条件 (2) を満たす線型系 (1) の解とし，初期条件

$$\boldsymbol{\phi}(t_0)=\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

を満たす (1) の解 $\boldsymbol{\phi}(t)$ が

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\xi_1\,\mathrm{y}_1(t)+\xi_2\,\mathrm{y}_2(t)+\cdots+\xi_n\,\mathrm{y}_n(t)$$

であることを示す．

$\boldsymbol{\varphi}(t)=\xi_1\,\mathrm{y}_1(t)+\xi_2\,\mathrm{y}_2(t)+\cdots+\xi_n\,\mathrm{y}_n(t)$ とすれば，（iii）より $\boldsymbol{\varphi}(t)$ は (1) の解である．初期条件 (2) より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t_0)&=\xi_1\,\mathrm{y}_1(t_0)+\xi_2\,\mathrm{y}_2(t_0)+\cdots+\xi_n\,\mathrm{y}_n(t_0)\\ &=\xi_1\,\mathbb{e}_1+\xi_2\,\mathbb{e}_2+\cdots+\xi_n\,\mathbb{e}_n \quad =\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\phi}(t_0)\end{aligned}$$

よって，（ｉ）,（ii）より，$\boldsymbol{\phi}(t)\equiv\boldsymbol{\varphi}(t)$．ゆえに，$\boldsymbol{\phi}(t)=\xi_1\,\mathrm{y}_1(t)+\xi_2\,\mathrm{y}_2(t)+\cdots+\xi_n\,\mathrm{y}_n(t)$． ■

**定義【線型系の基本解】**

線型系 (1) の 1 次独立な解の組 $\mathrm{y}_1(t),\mathrm{y}_2(t),\ldots,\mathrm{y}_n(t)$ を (1) の**基本解**といい，定理 1 の（iii）,（ｖ）より，(1) の一般解は,

$$\mathrm{y}(t)=C_1\,\mathrm{y}_1(t)+C_2\,\mathrm{y}_2(t)+\cdots+C_n\,\mathrm{y}_n(t)\quad (C_1,C_2,\ldots,C_n：\text{任意定数})$$

で与えられる．

**定義【基本解行列】**

線型系 (1) の基本解 $\mathrm{y}_1(t),\mathrm{y}_2(t),\ldots,\mathrm{y}_n$ を列にもつ行列

$$\mathrm{Y}(t)=\Big(\mathrm{y}_1(t),\,\mathrm{y}_2(t),\,\cdots,\,\mathrm{y}_n(t)\Big)$$

を (1) の**基本解行列** (または基本行列) という．また，行列 Y の $t$ に関する微分を次で定義する：

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Y}=\mathrm{Y}'=\Big(\mathrm{y}_1',\,\mathrm{y}_2',\,\cdots,\,\mathrm{y}_n'\Big)=\begin{pmatrix}y_{11}' & y_{12}' & \cdots & y_{1n}'\\ y_{21}' & y_{22}' & \cdots & y_{2n}'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}' & y_{n2}' & \cdots & y_{nn}'\end{pmatrix}.$$

**定義【ロンスキアン】**

線型系 (1) の解の組 $\mathrm{y}_1(t),\mathrm{y}_2(t),\ldots,\mathrm{y}_n(t)$ に対して,

$$W[\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_n](t)=\det\Big(\mathrm{y}_1(t),\,\mathrm{y}_2(t),\,\cdots,\,\mathrm{y}_n(t)\Big)=\det\mathrm{Y}(t)$$

を $\mathrm{y}_1(t),\mathrm{y}_2(t),\ldots,\mathrm{y}_n(t)$ に関する**ロンスキアン**という．➡**注 *4.3*** のロンスキアンの定義と少し違うことに注意．

**定理２**

$$\mathrm{y}_1(t),\mathrm{y}_2(t),\ldots,\mathrm{y}_n(t)\ \text{が 1 次独立}\iff W[\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_n](t)\fallingdotseq 0$$

**証明：**

$W[\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\ldots,\mathrm{y}_n](t)$ は行列式なので，“$\fallingdotseq 0$” なら “正則”，“$=0$” なら “正則でない” と言い換えられる．

あとは線型代数学より明らか．詳しいことを知りたい方は,

**`https://drive.google.com/drive/folders/1zrWttg0BEg0woYCCEkTG9ulAY63QX5Lk`**

の線型代数学 2 年次 3.10 を参照.

**定義【行列解】**

行列 $\mathrm{Y}(t)$ が行列方程式

$$\mathrm{Y}' = A(t)\mathrm{Y}$$

を満たすとき，$\mathrm{Y}(t)$ を (1) の**行列解**という．

**定理３**

線型系 (1) の基本解行列 $\mathrm{Y}(t)$ は (1) の行列解である．

**証明：**
$\mathrm{Y}' = A(t)\mathrm{Y}$ を示す．

$$\begin{aligned} A(t)\mathrm{Y} &= A(t)\Big(\mathrm{y}_1,\, \mathrm{y}_2,\, \cdots,\, \mathrm{y}_n\Big) \\ &= \Big(A(t)\,\mathrm{y}_1,\, A(t)\,\mathrm{y}_2,\, \cdots,\, A(t)\,\mathrm{y}_n\Big) \\ &= \Big(\mathrm{y}_1',\, \mathrm{y}_2',\, \cdots,\, \mathrm{y}_n'\Big) \\ &= \mathrm{Y}' \end{aligned}$$

■

**例 題**

線型系

$$\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $\mathrm{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$, $\mathrm{y}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ が解になることを示せ．

$\mathrm{y}_1'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix}$, $A\,\mathrm{y}_1(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix}$.　$\therefore\, \mathrm{y}_1' = A\mathrm{y}_1$ なので $\mathrm{y}_1(t)$ は解である．

$\mathrm{y}_2'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$, $A\,\mathrm{y}_2(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$.　$\therefore\, \mathrm{y}_2' = A\mathrm{y}_2$ なので $\mathrm{y}_2(t)$ は解である．//

(2) $\mathrm{y}_1(t)$, $\mathrm{y}_2(t)$ は基本解であることを示せ．
ロンスキアンが 0 でないこと ($\mathrm{y}_1(t)$, $\mathrm{y}_2(t)$ が 1 次独立であること) を示せばよい．

$$W[\mathrm{y}_1,\, \mathrm{y}_2](t) = \det\Big(\mathrm{y}_1(t),\, \mathrm{y}_2(t)\Big) = \det\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} = 2e^{-4t} > 0.$$

$\therefore\, W[\mathrm{y}_1,\, \mathrm{y}_2](t) \fallingdotseq 0$. よって $\mathrm{y}_1(t)$, $\mathrm{y}_2(t)$ は 1 次独立なので基本解である．//

(3) 一般解を求めよ．

$$\mathrm{y}(t) = C_1\mathrm{y}_1(t) + C_2\mathrm{y}_2(t) = C_1\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} \\ -C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (C_1,\, C_2：任意定数).$$

**演習** 線型系 $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{y}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$, $\mathrm{y}_2(t) = \begin{pmatrix} te^{-3t} \\ (t-1)e^{-3t} \end{pmatrix}$ が解になることを示せ．

(2) (1) で与えた $\mathrm{y}_1(t)$, $\mathrm{y}_2(t)$ が基本解であることを示せ．

(3) 一般解 $\mathrm{y}(t)$ を求めよ．

(4) 初期条件 $\mathrm{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たす特殊解を求めよ．

**解** (1),(2) 略　(3) $\mathrm{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t} \\ C_1e^{-3t} + C_2(t-1)e^{-3t} \end{pmatrix}$ $(C_1,\, C_2：任意定数)$　(4) $\mathrm{y}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-3(t-1)} + 2te^{-3(t-1)} \\ -e^{-3(t-1)} + 2(t-1)e^{-3(t-1)} \end{pmatrix}$

# 8　定数係数線型系

**定数係数線型系**

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y} \tag{L}$$

について，$\mathbb{x}$ を $\mathbb{o}$ でない定ベクトルとし，$\mathbb{y}(t) = e^{\lambda t}\,\mathbb{x}$ が (L) の解になると仮定する．これを (L) の左辺と右辺にそれぞれ代入すると，

$$\mathbb{y}'(t) = (e^{\lambda t}\,\mathbb{x})' = \lambda e^{\lambda t}\,\mathbb{x}, \quad A\,\mathbb{y}(t) = Ae^{\lambda t}\,\mathbb{x} \quad \therefore \lambda e^{\lambda t}\,\mathbb{x} = Ae^{\lambda t}\,\mathbb{x}$$

が得られる．両辺を $e^{\lambda t}(\neq 0)$ で割ると，

$$\lambda\,\mathbb{x} = A\,\mathbb{x}\ (\Longleftrightarrow (\lambda E - A)\,\mathbb{x} = \mathbb{o}) \qquad (E：単位行列)$$

となる．この関係式を満たす $\lambda$ は $A$ の**固有値**であり，$\mathbb{x}$ は固有値 $\lambda$ に属する $A$ の**固有ベクトル**である．一般に，この $\lambda$ を求めるには，**固有方程式**

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

の根を求めればよい．

## 8.1　異なる実固有値をもつ場合の解法

定数係数線型系 (L) について，$A$ の相異なる $n$ 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ とする．また，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ に関する固有ベクトルを $\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{x}_n$ とする．$\mathbb{y}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\,\mathbb{x}_1, \mathbb{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\,\mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{y}_n(t) = e^{\lambda_n t}\,\mathbb{x}_n$ は (L) の基本解である．重ね合わせの原理より，(L) の一般解は，

$$\mathbb{y}(t) = C_1\,\mathbb{y}_1(t) + C_2\,\mathbb{y}_2(t) + \cdots + C_n\,\mathbb{y}_n(t) \quad (C_1, C_2, \ldots, C_n：任意定数)$$

となる．

---

**例 1**

線型系

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

の一般解を求める．

$$0 = \det(\lambda E_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \quad \therefore \lambda = -1, 4.$$

- $\lambda = -1$ に関する固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

$\mathbb{o} = (-E - A)\,\mathbb{a} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a_1 + 2a_2 \\ 2a_1 - a_2 \end{pmatrix}$ となる．$2a_1 - a_2 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = 2a_1$ なので，$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} a_1$.

$a_1 \neq 0$ なら何でもよいので，$a_1 = 1$ と考えてもよい．よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = 4$ に関する固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

$\mathbb{o} = (4E - A)\,\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2b_2 \\ 2b_1 + 4b_2 \end{pmatrix}$ となる．$b_1 + 2b_2 = 0 \Longleftrightarrow b_1 = -2b_2$ なので，$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} -2b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} b_2$.

$b_2 \neq 0$ なら何でもよいので，$b_2 = 1$ と考えてもよい．よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

したがって，一般解は，

$$\mathbb{y}(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t} \\ 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2：任意定数).$$

---

**演習** 線型系 $\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ の一般解を求めよ．

**解** $\mathbb{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$ （$C_1, C_2$：任意定数）

## 8.2　複素固有値をもつ場合の解法

定数係数線型系

$$\mathbb{y}' = A\mathbb{y}, \quad \mathbb{y} \in \mathbb{R}^n \tag{L}$$

を考える．行列 $A$ が複素固有値 $\lambda = \alpha + \beta i$ をもち，$\lambda$ に対応する固有ベクトルを $\mathbb{x} = \mathbb{a} + i\mathbb{b}$ とする．($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{a},\ \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$, $i$：虚数単位)
このとき，$\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ も行列 $A$ の固有値であり，$e^{\lambda t}\,\mathbb{x}$, $e^{\overline{\lambda}t}\,\overline{\mathbb{x}}$ は線型系 (L) の解である．しかし，これは一般に複素数値解となる．実数値解を求めたい．

**定理 1**

$\mathbb{u}(t) = e^{\alpha t}(\mathbb{a}\cos\beta t - \mathbb{b}\sin\beta t)$, $\mathbb{v}(t) = e^{\alpha t}(\mathbb{a}\sin\beta t + \mathbb{b}\cos\beta t)$ とするとき，$e^{\lambda t}\,\mathbb{x}$ の極表示は,

$$e^{\lambda t}\,\mathbb{x} = \mathbb{u}(t) + i\,\mathbb{v}(t)$$

であり，$\mathbb{u}(t)$, $\mathbb{v}(t)$ は線型系 (L) の実数値解である．

証明：

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t}\,\mathbb{x} &= e^{(\alpha+\beta i)t}(\mathbb{a} + i\,\mathbb{b}) \\
&= e^{\alpha t}\cdot e^{i(\beta t)}(\mathbb{a} + i\,\mathbb{b}) \\
&= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbb{a} + i\,\mathbb{b}) && \because \text{オイラーの公式 (4.4.1) より．} \\
&= e^{\alpha t}(\mathbb{a}\cos\beta t + i\,\mathbb{b}\cos\beta t + i\,\mathbb{a}\sin\beta t - \mathbb{b}\sin\beta t) \\
&= e^{\alpha t}(\mathbb{a}\cos\beta t - \mathbb{b}\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(\mathbb{a}\sin\beta t + \mathbb{b}\cos\beta t) \\
&= \mathbb{u}(t) + i\,\mathbb{v}(t) \quad /\!/ \\
\mathbb{u}'(t) + i\,\mathbb{v}'(t) &= (\mathbb{u}(t) + i\,\mathbb{v}(t))' && \text{厳密には複素関数論.} \\
&= (e^{\lambda t}\,\mathbb{x})' \\
&= A(e^{\lambda t}\,\mathbb{x}) && \because e^{\lambda t}\,\mathbb{x} \text{ は (L) の解なので.} \\
&= A(\mathbb{u}(t) + i\,\mathbb{v}(t)) \\
&= A\,\mathbb{u}(t) + iA\,\mathbb{v}(t)
\end{aligned}$$

実部と虚部を比較すると，$\mathbb{u}'(t) = A\,\mathbb{u}(t)$, $\mathbb{v}'(t) = A\,\mathbb{v}(t)$ なので，解である．　■

実は，$n = 2$ のとき，$\mathbb{u}(t)$, $\mathbb{v}(t)$ は **1 次独立**である．

**例 2**

線型系

$$\mathbb{y}' = A\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

の一般解を求める．

固有値と固有ベクトルを求める．$0 = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5.$　$\therefore \lambda = -1 \pm 2i.$

$\lambda = -1 + 2i$ の固有ベクトルを求める．(**片方だけでよい．**) 固有ベクトルを $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

$\mathbb{o} = (\lambda E - A)\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ix_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 2ix_2 \end{pmatrix}$ となる．$2ix_1 + 2x_2 = 0 \Longleftrightarrow x_2 = -ix_1$ なので，$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}x_1.$

$x_1 \neq 0$ なら何でもよいので，$x_1 = 1$ としてもよい．固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$e^{\lambda t}\,\mathbb{x}$ を極表示して，基本解を求め，一般解を求める．

$$e^{(-1+2i)t}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = e^{-t}\cdot e^{i(2t)}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = e^{-t}(\cos 2t + i\sin 2t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= e^{-t}\left\{\cos 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\cos 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + i\sin 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = e^{-t}\left\{\cos 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} + ie^{-t}\left\{\cos 2t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

よって，基本解は $e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$, $e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$. したがって一般解は，$\mathbb{y}(t) = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$　($C_1$, $C_2$：任意定数).

**演習**　次の線型系の一般解を求めよ．

(1) $\mathbb{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbb{y}$　　(2) $\mathbb{y}' = \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ -\pi & 3 \end{pmatrix}\mathbb{y}$

**解**　(1) $\mathbb{y}(t) = C_1e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2e^{t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$　(2) $\mathbb{y}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} C_1\cos\pi t + C_2\sin\pi t \\ -C_1\sin\pi t + C_2\cos\pi t \end{pmatrix}$　($C_1$, $C_2$：任意定数)

## 8.3　固有方程式が重根をもつ場合の解法 (２次元・３次元の場合)

### 例３　固有方程式が重根をもつ場合の解法 (1)

線型系

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の一般解を求める．

$$0 = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right| = (\lambda-2)(\lambda+1)^2. \quad \therefore \lambda = 2,\ \underbrace{-1}_{2\text{ 重根}}.$$

- $\lambda = 2$ の固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

  $\mathbb{o} = (2E - A)\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を解く．解き方はいろいろあるが，$(2E - A)$ を簡約化して解く方法 (掃き出し法) を用いる．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore \begin{array}{l} a_1 = a_3 \\ a_2 = a_3 \end{array} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 \text{ なので，} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1$$

  よって，$a_1 \neq 0$ なら何でもよいから，$a_1 = 1$ と考える．よって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

  $\mathbb{o} = (-E - A)\mathbb{b} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ を解けばよい．$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\therefore b_1 = -b_2 - b_3$.

  よって，$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_2 - b_3 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b_3$ なので，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とできる．したがって，一般解は，

$$\mathbb{y}(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2, C_3 : \text{任意定数}).$$

---

**演習** 次の線型系の一般解を求めよ．

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**解** $\mathbb{y}(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 　$(C_1, C_2 : \text{任意定数})$

**例4　固有方程式が重根をもつ場合の解法 (2)**

線型系

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の一般解を求める.

固有値を求める. $0 = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)$. $\therefore \lambda = 2$.

$\lambda = 2$ に関する固有ベクトルを求める. 固有ベクトルを $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする.

$\mathbb{o} = (2E - A)\,\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 \end{pmatrix}$. $\therefore a_1 + a_2 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = -a_1$ なので, 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とできる.

よって, $\mathbb{y}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は解である. ここで, $\mathbb{y}_1(t)$ と独立な解を, 定ベクトル $\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2$ を用いて, $\boxed{\mathbb{y}_2(t) = e^{\lambda t}\,(t\,\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2)}$ と仮定する.

これを $\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}$ に代入すると,

$\mathbb{y}_2'(t) = (e^{2t}(t\,\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2))' = 2e^{2t}(t\,\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2) + te^{2t} = e^{2t}(2\mathbb{x}_1 t + \mathbb{x}_1 + 2\mathbb{x}_2) \cdots①$, $A\,\mathbb{y}_2(t) = Ae^{2t}(t\,\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2) = e^{2t}(A\,\mathbb{x}_1 t + A\,\mathbb{x}_2) \cdots②$.

$\mathbb{y}_2(t)$ が解であるためには, ①,② より, $\begin{cases} 2\,\mathbb{x}_1 = A\,\mathbb{x}_1 \cdots③ \\ \mathbb{x}_1 + 2\,\mathbb{x}_2 = A\,\mathbb{x}_2 \cdots④ \end{cases}$ が成り立てばよい.

③ より $\mathbb{x}_1$ は固有ベクトルであればいいので $\mathbb{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdots⑤$ とできる. ④ は書き直すと, $(2E - A)\,\mathbb{x}_2 = -\mathbb{x}_1$. ⑤ より, $(2E - A)\,\mathbb{x}_2 = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおいて計算すると, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$. $x_1 + x_2 = -1 \Longleftrightarrow x_2 = -x_1 - 1$ なので, $\mathbb{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - 1 \end{pmatrix}$.

$x_1$ は実数なら何でもいいので, $x_1 = 0$ と考える. すると, $\mathbb{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\therefore \mathbb{y}_2(t) = e^{2t}\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -t - 1 \end{pmatrix}$. よって, 一般解は,

$$\mathbb{y}(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ -t - 1 \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2：任意定数).$$

---

**演習** 次の線型系の一般解を求めよ.

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

**解** $\mathbb{y}(t) = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}$ $(C_1, C_2：任意定数)$

# 9　行列の指数関数

**定義【行列の指数関数】**

行列 $A$ を定数行列，$t \in \mathbb{R}$ とするとき，行列の指数関数 $e^{At}(=\exp(At))$ を，

$$e^{At} = E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k$$

と定義する．一般に，$e^{At}$ を求めるのは難しい．

## 9.1　行列の指数関数と線型系

**定理 1**

(1) 行列 $A$ とスカラー $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{Y}(t) = e^{At}$ は線型系 $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の行列解である．

(2) ベクトル $\mathrm{y}(t) = e^{At}\,\mathrm{y}_0$ は初期条件 $\mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0$ を満たす線型系 $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の解である．

**証明：**

(1) $\mathrm{Y}'(t) = A\mathrm{Y}(t)$ であることを示せばよい．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}'(t) &= \left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right)' \\
&= O + A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots && \because \text{項別微分 (暗に認める.)} \\
&= A\left(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \cdots\right) \\
&= Ae^{At} && \because \text{項が無限個あるので 1 つ減ろうが問題ない.} \\
&= A\mathrm{Y}(t)
\end{aligned}$$

(2) (1) より，$e^{At} = Ae^{At}$ なので，$\mathrm{y}'(t) = Ae^{At}\,\mathrm{y}_0 = A\,\mathrm{y}(t)$．また，$\mathrm{y}(0) = e^{a\cdot 0}\,\mathrm{y}_0 = (E + 0\cdot A + \cdots)\,\mathrm{y}_0 = E\,\mathrm{y}_0 = \mathrm{y}_0$．

$\therefore$ $\mathrm{y}(t)$ は $\mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0$ を満たす $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の解である． ■

**定理 2**

行列 $A$，スカラー $t, s$，$\mathrm{Y}(t)$：線型系 $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の基本解行列に対して，次が成り立つ：

（i）$e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$．(指数法則)　（ii）$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$．　（iii）$(e^{-At}\mathrm{Y}(t))' = O$．　（iv）$e^{At} = \mathrm{Y}(t)(\mathrm{Y}(0))^{-1}$．

**証明：**

（i）$\mathrm{z}(t) = e^{At}e^{As}\,\mathrm{y}_0$ ($t$：変数,$s$：定数) とすれば，定理 1 の (2) より $\mathrm{z}(t)$ は $\mathrm{z}(0) = e^{A\cdot 0}e^{As}\,\mathrm{y}_0 = e^{As}\,\mathrm{y}_0$ を満たす $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の解である．

一方，$\mathrm{w}(t) = e^{A(t+s)}\,\mathrm{y}_0$ とすれば，$\mathrm{w}'(t) = (e^{A(t+s)}\,\mathrm{y}_0)' = Ae^{A(t+s)}\,\mathrm{y}_0 = A\,\mathrm{w}(t)$ であるから，$\mathrm{w}(t)$ もまた $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の解である．

また，$\mathrm{w}(0) = e^{A(0+s)}\,\mathrm{y}_0 = e^{As}\,\mathrm{y}_0 = \mathrm{z}(0)$ となるので，線型系の解の一意性から，$\mathrm{z}(t) \equiv \mathrm{w}(t)$．すなわち，$e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$．//

（ii）（i）より，$e^{-At}e^{At} = e^{A(-t+t)} = e^{A\cdot 0} = E$, $e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = e^{A\cdot 0} = E$．//

（iii）

$$\begin{aligned}
(e^{-At}\mathrm{Y}(t))' &= -Ae^{-At}\mathrm{Y}(t) + e^{-At}\mathrm{Y}'(t) && \because \text{積の微分} \\
&= -Ae^{-At}\mathrm{Y}(t) + e^{-At}(A\mathrm{Y}(t)) && \because \text{7 の定理 3 より.} \\
&= -Ae^{-At}\mathrm{Y}(t) + Ae^{-At}\mathrm{Y}(t) && \because \text{一般に，行列の積は非可換だが } -AA = A(-A) \text{ であるので o.k.} \\
&= O. \;//
\end{aligned}$$

（iv）（iii）より，$e^{-At}\mathrm{Y}(t)$ は微分して $O$ になるので，定数行列であるから，$e^{-At}\mathrm{Y}(t) \equiv C$ ($C$：定数行列) とおく．

$t = 0$ のとき，$C = e^{-A\cdot 0}\mathrm{Y}(0) = E\mathrm{Y}(0) = \mathrm{Y}(0)$．　$\therefore e^{-At}\mathrm{Y}(t) = \mathrm{Y}(0)$ ⋯①

① の両辺に左から $e^{At}$，右から $(\mathrm{Y}(0))^{-1}$ をかけると，$\mathrm{Y}(t)(\mathrm{Y}(0))^{-1} = e^{At}$． ■

**演習** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ とする．このとき，行列の指数関数 $e^{At}$ を求めよ．

ヒント：$A$ の固有値・固有ベクトルを求めて，線型系 $\mathrm{y}' = A\,\mathrm{y}$ の基本解行列 $\mathrm{Y}(t)$ を求める．他は考えよ．

**解** $e^{At} = -\begin{pmatrix} e^{-3t} - 2e^{-t} & 2e^{-3t} - 2e^{-t} \\ -e^{-3t} + e^{-t} & -2e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

## 9.2 行列の指数関数と定数変化法

**線型系の定数変化法の公式**

非斉次線型系の初期値問題

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{L*}$$

の解は次の式で与えられる：

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\,\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\mathbf{f}(s)\,ds.$$

**証明：**

非斉次線型系 (L*) の解を $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{u}(t)$ と予想する．$\mathbf{y}'(t) = Ae^{At}\mathbf{u}(t) + e^{At}\mathbf{u}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) + e^{At}\mathbf{u}'(t)$． $\therefore \mathbf{f}(t) = e^{At}\mathbf{u}'(t)$． ⋯①

① の両辺に左から $e^{-At}$ をかけると，$\mathbf{u}'(t) = e^{-At}\,\mathbf{f}(t)$．この両辺を $[t_0, t]$ で積分すると，

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{f}(s)\,ds$$

及び，予想した $\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{u}(t) \Longleftrightarrow \mathbf{u}(t) = e^{-At}\mathbf{y}(t)$ に $t = t_0$ を代入すると，

$$\mathbf{u}(t_0) = e^{-At_0}\mathbf{y}(t_0) = e^{-At_0}\mathbf{y}_0$$

となるので，

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{f}(s)\,ds \\ &= e^{-At_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{f}(s)\,ds\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\left(e^{-At_0}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\mathbf{f}(s)\,ds\right) = e^{A(t-t_0)}\,\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\mathbf{f}(s)\,ds. \qquad \blacksquare$$

この $\mathbf{f}(t)$ のことを 摂動（せつどう） という．

**演習** 非斉次線型系の初期値問題 $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

**解** $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - e^{-t} + \frac{5}{3}e^{-3t} \\ \frac{8}{3} - e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$

## 10　２次元定数係数線型系の原点の分類

２次元定数係数線型系

$$\mathbb{y}' = A\,\mathbb{y}, \quad \mathbb{y} \in \mathbb{R}^2, ' = \frac{d}{dt} \tag{L$_2$}$$

を考える．ただし，行列 $A$ は実数値を成分にもつ $2 \times 2$ 行列とし，$\det A \neq 0$ を仮定する．行列 $P$ を正則行列とすると，変数変換 $\mathbb{x} = P^{-1}\mathbb{y}$ により，$(\mathrm{L}_2)$ は，

$$\mathbb{x}' = P^{-1}AP\,\mathbb{x} \tag{L$_2^*$}$$

となる．これは線型代数学でおなじみの $P^{-1}AP$ である.[11] つまり，$A$ に対する固有方程式 $\det(\lambda E - A) = 0$ を解けば，場合分け：

- 異なる２つの実数根 $\mu, \nu$ $(\mu \neq 0 \neq \nu)$ である場合；
- 重根 $\mu (\neq 0)$ である場合；
- 虚数根 $\alpha \pm \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$ の場合

によって，行列 $P^{-1}AP$ を以下のいずれかの形に分類できる．これらを**標準形**という．

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

したがって，$(\mathrm{L}_2)$ の解の性質は，(a),(b),(c) いずれかの場合の $(\mathrm{L}_2^*)$ の解の性質に帰着される．このとき，初期条件

$$\mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，$(\mathrm{L}_2^*)$ の解は (a),(b),(c) それぞれに対して，次のように表される：

$$\text{(a)} \quad \mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\mu t} \\ y_0 e^{\nu t} \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} (x_0 + y_0 t)e^{\mu t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} (x_0 \cos\beta t + y_0 \sin\beta t)e^{\alpha t} \\ (-x_0 \sin\beta t + y_0 \cos\beta t)e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

$\because$

(a)
$$\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}\mathbb{x}, \quad \mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\mu, \nu \neq 0, \mu \neq \nu)$$

を解く．

固有方程式 $0 = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & 0 \\ 0 & \lambda - \nu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)(\lambda - \nu)$. $\therefore \lambda = \mu, \nu$.

- $\lambda = \mu$ の固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

$$\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\mu - \nu)a_2 \end{pmatrix}. \quad \underbrace{(\mu - \nu)}_{\neq 0} a_2 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = 0.$$ $a_1 \neq 0$ なら何でもよいので，$a_1 = 1$ とすると，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = \nu$ の固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \neq \mathbb{o}$ とする．

$$\mathbb{o} = \begin{pmatrix} \nu - \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nu - \mu)b_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \underbrace{(\nu - \mu)}_{\neq 0} b_1 = 0 \Longleftrightarrow b_1 = 0.$$ $b_2 \neq 0$ なら何でもよいので，$b_2 = 1$ とすると，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

よって，$e^{\mu t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e^{\nu t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は基本解である．したがって，一般解は,

$$\mathbb{x}(t) = C_1 e^{\mu t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\nu t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\mu t} \\ C_2 e^{\nu t} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2：\text{任意定数})$$

となる．いま，初期値が $\mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ と与えられているので，上の式 (一般解) に $t = 0$ を代入すると，$\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \right)\mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ となるので,
(a) の特殊解は,

$$\mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\mu t} \\ y_0 e^{\nu t} \end{pmatrix}$$

となる．

[11] ペンパイナッポーアポーペンと言っている人がいたら笑ってあげてほしい (切実)．(ちなみに私が言ったわけではない.)

続き：

(b)
$$\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mathbb{x}, \quad \mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (\mu \fallingdotseq 0)$$

を解く．

固有方程式 $0 = \begin{vmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ 0 & \lambda - \mu \end{vmatrix} = (\lambda - \mu)^2. \quad \therefore \lambda = \mu$ (重根)

$\lambda = \mu$ に関する固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \fallingdotseq \mathbb{o}$ とする．

$\mathbb{o} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$．$x_2 = 0$．$x_1 \fallingdotseq 0$ なら何でもよいので，$x_1 = 1$ とすると，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．$\therefore \mathbb{x}_1(t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は解の 1 つである．

この解と独立な解を $\mathbb{x}_2 = e^{\mu t}(t\,\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2)$ と予想．便宜上，$B = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ とおく．

$$\mathbb{x}_2'(t) = e^{\mu t}(\mu\,\mathbb{a}_1 t + \mu\,\mathbb{a}_2 + \mathbb{a}_1),\ B\,\mathbb{x}_2(t) = e^{\mu t}(B\,\mathbb{a}_1 t + B\,\mathbb{a}_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu\,\mathbb{a}_1 & = & B\,\mathbb{a}_1 \\ \mu\,\mathbb{a}_2 + \mathbb{a}_1 & = & B\,\mathbb{a}_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \begin{cases} (\mu E - B)\,\mathbb{a}_1 = \mathbb{o} & \cdots ① \\ (\mu E - B)\,\mathbb{a}_2 = -\mathbb{a}_1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$\mathbb{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots ③$ とできる．$\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ として，③ を ① に代入すると，

$(-\mathbb{a}_1 =) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda E - B)\,\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$．$-a_2 = -1 \Longleftrightarrow a_2 = 1$．$a_1$ は何でもよいので $a_1 = 0$ とすると，$\mathbb{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$．

$\therefore \mathbb{x}_2 = e^{\mu t} \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$．よって，一般解は，$\mathbb{x}(t) = C_1 e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{\mu t} \\ C_2 e^{\mu t} \end{pmatrix}$　($C_1, C_2$：任意定数)．

いま，初期値 $\mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ と与えられているので，代入すると，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ となる．したがって，特殊解は，

$$\mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} (x_0 + y_0 t)e^{\mu t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

---

(c)
$$\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbb{x}, \quad \mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \beta \fallingdotseq 0$$

を解く．

固有方程式 $0 = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & -\beta \\ \beta & \lambda - \alpha \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2. \quad \therefore \lambda = \alpha \pm \beta i.$

$\lambda = \alpha + \beta i$ に関する固有ベクトルを求める．固有ベクトルを $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \fallingdotseq \mathbb{o}$ とする．$\mathbb{o} = \begin{pmatrix} \beta i & -\beta \\ \beta & \beta i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta i a_1 - \beta a_2 \\ \beta a_1 + \beta i a_2 \end{pmatrix}$．$\therefore a_2 = i a_1$．

よって，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とできる．$e^{(\alpha + \beta i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ は解なので，これを極表示する．

$$\begin{aligned}
e^{(\alpha+\beta i)t} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &= e^{\alpha t} \cdot e^{i(\beta t)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{\alpha t} \left\{ \cos\beta t + i \sin\beta t \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{\alpha t} \left\{ \cos\beta t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin\beta t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + i e^{\alpha t} \left\{ \cos\beta t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin\beta t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + i e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，一般解は，

$$\mathbb{x}(t) = C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)e^{\alpha t} \\ (-C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t)e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2：任意定数).$$

いま，初期値が与えられているので代入すると，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbb{x}(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ となるので，特殊解は，

$$\mathbb{x}(t) = \begin{pmatrix} (x_0 \cos\beta t + y_0 \sin\beta t)e^{\alpha t} \\ (-x_0 \sin\beta t + y_0 \cos\beta t)e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

■

2 次元定数係数線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ の解を，$\mathbb{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ とすれば，$(x(t),\,y(t))$ は $x$-$y$ 平面上でパラメータ $t$ によって変化する曲線を描く．この曲線を**解軌道**といい，$x$-$y$ 平面を**相平面**という．また，$t$ の増加に伴って動く向きを矢印で表した解軌道を何本か相平面上に描き入れた図を**相平面図**という．

行列 $P^{-1}AP$ によって，線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ の相平面図の様相は大きく変化する．特に，原点近傍の相平面図に着目すれば，その幾何学的特徴によって，原点は分類される．

**線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ がもつ解軌道の性質**

- 線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ は**零解** $\mathbb{x}(t)\equiv\mathbb{0}$ をもつので，解の一意性を考慮すれば，零解以外の解が描く解軌道は原点 $(0,\,0)$ を通らない．
- 線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ の任意の解を $\mathbb{x}(t)$ とすれば，$c\,\mathbb{x}(t)$ （$c$：任意定数）も解であることから，$-\mathbb{x}(t)$ も $(\mathrm{L}_2^*)$ の解になる．すなわち，線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ の解軌道は原点対称である．

## 10.1　2 次元定数係数線型系の原点の幾何学的分類 (a)

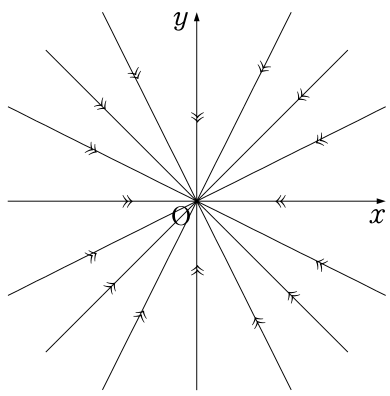
2 次元定数係数線型系

$$\mathbb{x}'=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \nu\end{pmatrix}\mathbb{x}$$

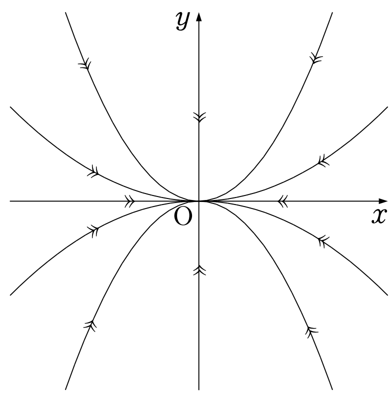
の原点の幾何学的分類として以下が知られている．

(a-1) $\nu\leqslant\mu<0$ のとき，原点は**安定結節点** (stable node).
(a-2) $0<\nu\leqslant\mu$ のとき，原点は**不安定結節点** (unstable node).
(a-3) $\nu<0<\mu$ のとき，原点は**鞍形点** (saddle point).

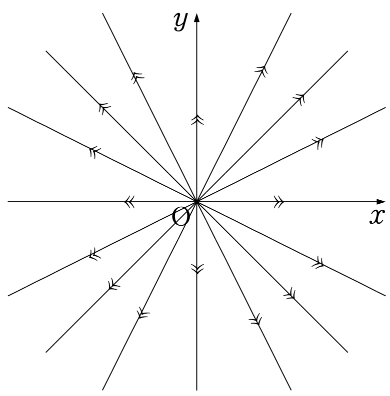
相平面図の例：



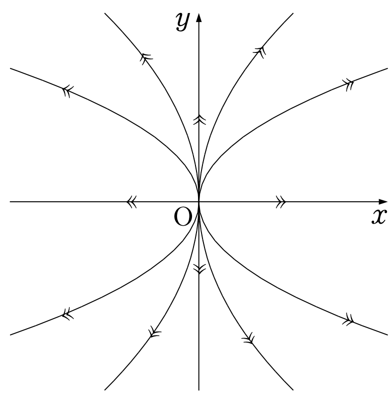
(a-1)　安定結節点 $(\nu=\mu)$



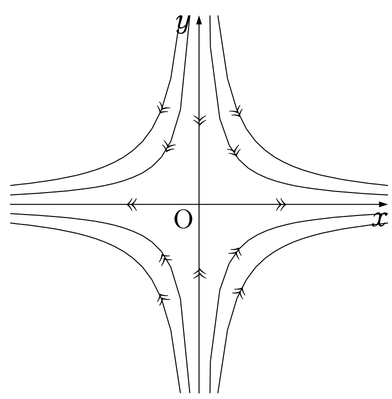
(a-1)　安定結節点 $(\nu<\mu<0)$



(a-2)　不安定結節点 $(\nu=\mu)$



(a-2)　不安定結節点 $(0<\nu<\mu)$



(a-3)　鞍形点

## 10.2　２次元定数係数線型系の原点の幾何学的分類 (b)

２次元定数係数線型系

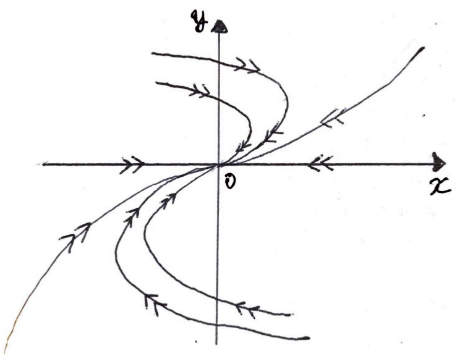
$$\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mathbb{x}$$

の原点の幾何学的分類として以下が知られている．

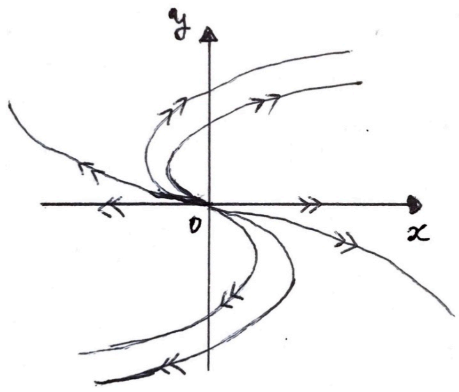
(b-1) $\mu < 0$ のとき，原点は**安定結節点** (stable node).

(b-2) $0 < \mu$ のとき，原点は**不安定結節点** (unstable node).

**相平面図の例：**



(b-1) 安定結節点（$\mu < 0$）



(b-2) 不安定結節点（$0 < \mu$）

## 10.3　２次元定数係数線型系の原点の幾何学的分類 (c)

２次元定数係数線型系

$$\mathbb{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbb{x}$$

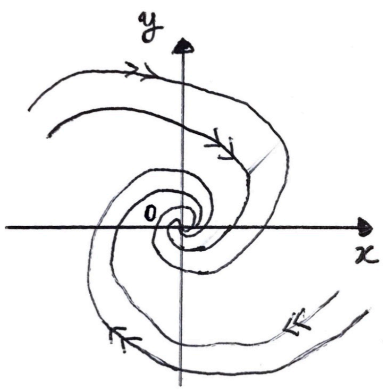
の原点の幾何学的分類として以下が知られている．

(c-1) $\alpha < 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき，原点は**安定渦状点** (stable focus).

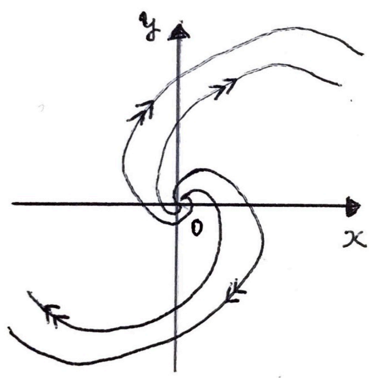
(c-2) $0 < \alpha$ かつ $\beta \neq 0$ のとき，原点は**不安定渦状点** (unstable focus).

(c-3) $\alpha = 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき，原点は**渦心点** (center).

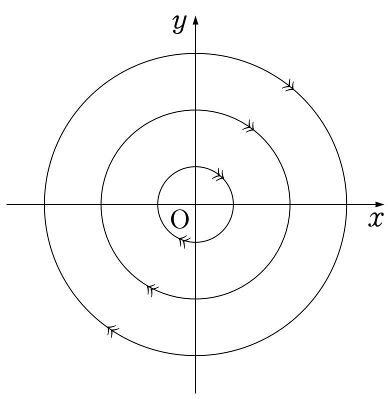
**相平面図の例：**



(c-1) 安定渦状点（$\alpha < 0,\ \beta > 0$）



(c-2) 不安定渦状点（$0 < \alpha,\ \beta > 0$）



(c-3) 渦心点（$\alpha = 0,\ \beta > 0$）

**[12]

[12] 手書きの図が下手で申し訳ない．実際はもっと滑らかであることと，解軌道が重なることは絶対にないことに注意．(a) は LaTeX で作図したのだが，少なくとも 6 時間ほどはかかってしまったので，(b),(c) の一部では断念した．

## 10.4　相平面図の描き方

前頁で相平面図の例をあげたが，実際に描くときの手順を紹介する．線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ を $x$-$y$ 平面であることを意識するために，ベクトル微分方程式の形で書かれていたものを，連立微分方程式の形で書き直すと，

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} x' = \mu x, \\ y' = \nu y \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} x' = \mu x + y, \\ y' = \mu y \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

である．ただし，$\mu, \nu, \beta \fallingdotseq 0$ であり，初期条件 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ を満たす．これらをもとに相平面図を描く．

**相平面図を描く手順**

$\boxed{1}$ 初期値問題の解 $(x(t), y(t))$ を求める．

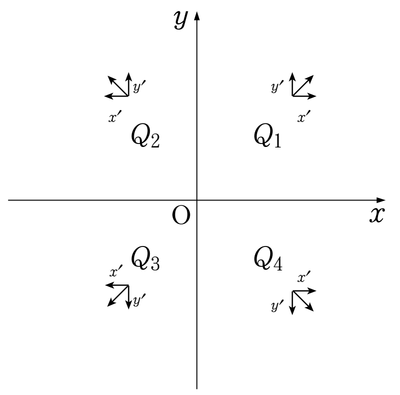
$\boxed{2}$ $x', y'$ の符号の変化をもとに，解軌道の動く向き (**ベクトル場**) を矢印を使って図示する．

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))$ を求める．(解軌道の行き先を求める.) 初期値の符号によって場合分けが必要なことがある．

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}$ を求める．(解軌道の接線の傾きの変化を求める．つまり，解軌道の曲がり具合 ($\smile$ なのか $\frown$ なのかなど) を調べる.)[13]

** ただし，(c) の相平面図を描く場合には，もう少し作業する必要がある．

**ベクトル場の例**：第 $k$ 象限を $Q_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ とかく．

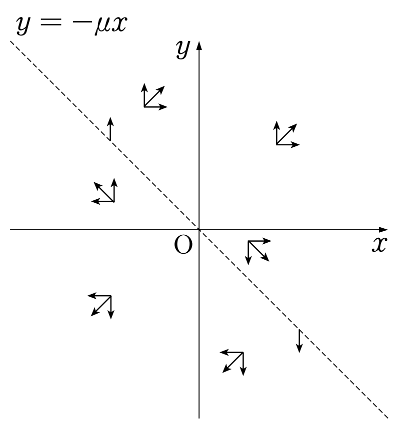
| 考え方 | ベクトル場 |
|---|---|
| (a-2) の場合：<br>$\begin{cases} x' = \mu x, \\ y' = \nu y \end{cases}, \quad 0 < \nu < \mu$<br>$x' > 0$ になる領域は $\mu x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ なので，$Q_1, Q_4$.<br>$x' < 0$ になる領域は $\mu x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ なので，$Q_2, Q_3$.<br>$y' > 0$ になる領域は $\nu y > 0 \Leftrightarrow y > 0$ なので，$Q_1, Q_2$.<br>$y' < 0$ になる領域は $\nu y < 0 \Leftrightarrow y < 0$ なので，$Q_3, Q_4$. |  |

(b),(c) の場合は，象限によってではなく，直線を境とした領域によって場合分けが必要である．

(b-2) の場合：

$$\begin{cases} x' = \mu x + y, \\ y' = \mu y \end{cases}, \quad \mu > 0$$

を考える．

| 考え方 | ベクトル場 |
|---|---|
| $x' > 0$ となる領域は $\mu x + y > 0 \Leftrightarrow y > -\mu x$ である．<br>$x' < 0$ となる領域は $\mu x + y < 0 \Leftrightarrow y < -\mu x$ である．<br>$y' > 0$ になる領域は $\mu y > 0 \Leftrightarrow y > 0$ なので，$Q_1, Q_2$.<br>$y' < 0$ になる領域は $\mu y < 0 \Leftrightarrow y < 0$ なので，$Q_3, Q_4$. |  |

(c) は 2 本の直線を境とする領域によって，(b) と同様にベクトル場を描くことができる.[14]

**演習** (c) において，$\alpha < 0, \beta > 0$ のときのベクトル場を描け．

[13] $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$.

[14] 象限も $x = 0$, $y = 0$ の直線を境とする領域ととれるが，ここでいう直線は $y = ax + b$ の形のことを指す．

線型系

(c)
$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = -\beta x + \alpha y \end{cases}, \quad \beta \neq 0$$

は極座標変換 $\boxed{x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta}$ により，極座標系

$$\begin{cases} r' = \alpha r, \\ \theta' = -\beta \end{cases}, \quad \beta \neq 0 \tag{P}$$

になる．ただし，

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}\,(x \neq 0)$$

である．

証明：

(c) に $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ を代入する．($x = x(t),\, y = y(t),\, r = r(t),\, \theta = \theta(t)$ であることに注意.)

$x' = (r\cos\theta)' = r'\cos\theta + r\cdot(-\sin\theta)\cdot\theta'$,　$\alpha x + \beta y = \alpha r\cos\theta + \beta r\sin\theta$. $\therefore r'\cos\theta - r\sin\theta\cdot\theta' = \alpha r\cos\theta + \beta r\sin\theta$.　…①

$y' = (r\sin\theta)' = r'\sin\theta + r\cos\theta\cdot\theta'$,　$-\beta x + \alpha y = -\beta r\cos\theta + \alpha r\sin\theta$. $\therefore r'\sin\theta + r\cos\theta\cdot\theta' = -\beta r\cos\theta + \alpha r\sin\theta$.　…②

①$\times\cos\theta +$②$\times\sin\theta$ をすると，

$$\begin{array}{rcccccccc} & r'\cos^2\theta & - & r\sin\theta\cos\theta\cdot\theta' & = & \alpha r\cos^2\theta & + & \beta r\sin\theta\cos\theta \\ +) & r'\sin^2\theta & + & r\sin\theta\cos\theta\cdot\theta' & = & \alpha r\sin^2\theta & - & \beta r\sin\theta\cos\theta \\ \hline & r' & & & = & \alpha r & & \end{array}$$

②$\times\cos\theta -$①$\times\sin\theta$ をすると，

$$\begin{array}{rcccccccc} & r'\sin\theta\cos\theta & + & r\cos^2\theta\cdot\theta' & = & -\beta r\cos^2\theta & + & \alpha r\sin\theta\cos\theta \\ -) & r'\sin\theta\cos\theta & - & r\sin^2\theta\cdot\theta' & = & \beta r\sin^2\theta & + & \alpha r\sin\theta\cos\theta \\ \hline & & & r\theta' & = & -\beta r & & \\ & & & \theta' & = & -\beta & & \end{array}$$

したがって，(c) は (P) となる．■

また，初期条件 $(r(0),\, \theta(0)) = (r_0,\, \theta_0)$ を満たす (P) の解 $(r(t),\, \theta(t))$ の解は，

$$(r(t),\, \theta(t)) = (r_0 e^{\alpha t},\, -\beta t + \theta_0)$$

となる．($r(t),\, \theta(t)$ はそれぞれ変数分離形なので解ける．つまり，$r(t),\, \theta(t)$ をそれぞれ別々に解く.)

(c) の相平面図を作図する手順の準備はここまで．$\boxed{1}$,$\boxed{2}$ までの作業は (a),(b) と同様である．$\boxed{3}$ からの作業を極座標系を用いる．$\sin\theta,\, \cos\theta$ がでてきたので，筋のいい人は気づいているかもしれないが，解軌道は回転っぽくなる．$\boxed{3}$ の作業の代わりに $\lim_{t\to\infty}(r(t),\, \theta(t))$ を求めるわけだが，先ほど解を求めたときのように，これもまた，別々に求める．つまり，$\lim_{t\to\infty} r(t),\, \lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求める．(意味は同じ，個人的にこちらの方が意味が分かりやすい気がする.)

- $\lim_{t\to\infty} r(t)$ は原点からの距離が $t$ が大きくなるにつれてどう変化するかを調べる．
- $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$ は $t$ が大きくなるにつれての回転の向きを調べる．

例えば，$\alpha < 0,\, \beta > 0$ (c-1) のとき，$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$ なので，解軌道は原点に近づき，$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = -\infty$ なので，解軌道は時計回りに動く．つまり，すべての解軌道は原点の周囲を時計回りに回転しながら，原点に**漸近**する．また，$\alpha = 0$ (c-3) のとき，$r(t) \equiv r_0$ となるので，解軌道は回転する．

補足

以上のことから次がわかる．

**定理**

行列 $P^{-1}AP$ の固有値の実部がすべて負であるならば，線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ のすべての解 $\mathbb{x}(t)$ は $\mathbb{o}$ に漸近する．すなわち，

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{x}(t) = \mathbb{o}$$

このとき，線型系 $(\mathrm{L}_2^*)$ の原点 $\mathbb{x} = \mathbb{o}$ (零解 $\mathbb{x}(t) \equiv \mathbb{o}$) は**漸近安定**と呼ばれる．

# 11　非線型系

## 11.1　自励系

２次元非線型系

$$\begin{cases} x' = F_1(x,\, y), \\ y' = F_2(x,\, y) \end{cases} \tag{NL}$$

を考える.[15] ただし，$F_1$, $F_2$ は $\mathbb{R}^2$ 上で連続微分可能な関数 ($C^1$ 級関数) とし，$(F_1(x_*,\, y_*),\, F_2(x_*,\, y_*)) = (0,\, 0)$ を満たすと仮定する．このように，方程式の右辺に独立変数 $t$ を含まない方程式系を**自励系**という.[16] また，点 $(x_*,\, y_*) \in \mathbb{R}^2$ は (NL) の**平衡点** (または**危点**) といわれ，$(x(t),\, y(t)) \equiv (x_*,\, y_*)$ は，(NL) の自明解になる．初期条件 $(x(0),\, y(0)) = (x_0,\, y_0)$ を満たす (NL) の解を $\mathbb{x}(t,\, x_0,\, y_0)$ で表す．平衡点 $(x_*,\, y_*)$ が,

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists\delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad ^\forall t \geqslant 0 : \|(x_0,\, y_0) - (x_*,\, y_*)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbb{x}(t,\, x_0,\, y_0) - (x_*,\, y_*)\| < \varepsilon$$

を満たすとき，**安定**であるという.[17]

ベクトル値関数 $\mathbb{F}(\mathbb{x})$ $(\mathbb{x} = {}^t(x,\, y))$ に対して，行列

$$D\mathbb{F}(x,\, y) = D\mathbb{F}(\mathbb{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,\, y) & \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,\, y) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,\, y) & \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,\, y) \end{pmatrix}$$

を**ヤコビ行列**という. ($D_{\mathbb{x}}\mathbb{F}(\mathbb{x})$, $\mathbb{F}_{\mathbb{x}}(\mathbb{x})$, $\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{x}}(\mathbb{x})$, $\mathbb{F}'(\mathbb{x})$ とかくこともある.) 記号

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbb{x}_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

を用いると，(NL) はベクトルの方程式系

$$\mathbb{x}' = \mathbb{F}(\mathbb{x})$$

に書き換えられ，点 $\mathbb{x} = \mathbb{x}_*$ は平衡点である．いま，$F_1$, $F_2$ は $C^1$ 級関数であるから，全微分可能である．よって，$k = 1,\, 2$ に対して,

$$F_k(x + a,\, y + b) - F_k(a,\, b) = \frac{\partial F_k}{\partial x}(a,\, b)x + \frac{\partial F_k}{\partial y}(a,\, b)y + f_k(x,\, y)$$

が成り立つ．ただし，$f_k(x,\, y)$ は,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_k(x,\, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

を満たす.[18] $\mathbb{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ とすると,

(1)
$$\mathbb{F}(\mathbb{x} + \mathbb{x}_*) = D\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)\mathbb{x} + \mathbb{f}(\mathbb{x})$$

が成り立つ．また，変数変換 $\mathbb{y} = \mathbb{x} - \mathbb{x}_*$ により，方程式系 (NL) は，方程式系

(2)
$$\mathbb{y}' = D\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)\mathbb{y} + \mathbb{f}(\mathbb{y})$$

に変換される．

**証明：**

(1)
$$\mathbb{F}(\mathbb{x} + \mathbb{x}_*) = \begin{pmatrix} F_1(x + x_*,\, y + y_*) \\ F_2(x + x_*,\, y + y_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_*,\, y_*) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_*,\, y_*)x + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_*,\, y_*)y + f_1(x,\, y) \\ F_2(x_*,\, y_*) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_*,\, y_*)x + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_*,\, y_*)y + f_2(x,\, y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_1(x_*,\, y_*) \\ F_2(x_*,\, y_*) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_*,\, y_*) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_*,\, y_*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_*,\, y_*) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_*,\, y_*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x,\, y) \\ f_2(x,\, y) \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)}_{\text{平衡点なので } 0} + D\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)\mathbb{x} + \mathbb{f}(\mathbb{x}) = D\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)\mathbb{x} + \mathbb{f}(\mathbb{x}).$$

(2) $\mathbb{y}' = (\mathbb{x} - \mathbb{x}_*)' = \mathbb{x}' = \mathbb{F}(\mathbb{x}) = \mathbb{F}(\mathbb{y} + \mathbb{x}_*) = D\mathbb{F}(\mathbb{x}_*)\mathbb{y} + \mathbb{f}(\mathbb{y})$. ■

---

15) ベクトル微分方程式の形で表すと，$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x(t),\, y(t)) \\ F_2(x(t),\, y(t)) \end{pmatrix}$ である．

16) 非自励系の例として，$F_1(t,\, x,\, y)$ の場合など．

17) 一般の非線型系においては，ある原点近傍から始まる任意の解 $\mathbb{x}(t)$ が単に $\lim_{t\to\infty} \mathbb{x}(t) = \mathbb{o}$ であるとき，原点は**吸収的**といわれ，これに加えて，原点が**安定**であるとき，原点は**漸近安定**といわれる．よって，非線型系において，吸収性と漸近安定性は別の概念として扱われる．しかしながら，線型系に限れば，基本解行列の性質を用いて，「原点が吸収的ならば，それは安定である」ことが示される．したがって，線型系における吸収性と漸近安定性は同値である．この理由により，*10.4* の定理では原点が漸近安定であると結論付けた．

**参考** 原点 (零解) が安定 $[S] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\forall t_0 \in \mathbb{R},\ {}^\exists\delta(t_0,\, \varepsilon) > 0,\ {}^\forall\mathbb{x}_0 \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{x}_0\| < \delta(t_0,\, \varepsilon),\ \|\mathbb{x}(t; t_0,\, \mathbb{x}_0)\| < \varepsilon \quad \text{for} \quad t \geqslant t_0$.

原点 (零解) が吸収的 $[A] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists\delta_0 > 0,\ {}^\forall t_0 \in \mathbb{R},\ {}^\forall\mathbb{x}_0 \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbb{x}_0\| < \delta_0,\ \lim_{t\to\infty} \|\mathbb{x}(t; t_0,\, \mathbb{x}_0)\| = 0$. 原点 (零解) が漸近安定 $[AS] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [A]$ かつ $[S]$.

18) 全微分可能の定義．

## 11.2　線型近似

非線型系

$$\mathbf{x}' = \mathbb{F}(\mathbf{x}) \tag{NL}$$

は変数変換 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_*$ により，方程式系

$$\mathbf{y}' = D\mathbb{F}(\mathbf{x}_*)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{AL}$$

に変換される．ただし，$\mathbf{f}$ は条件

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbb{o}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = 0 \tag{C}$$

を満たす．この条件から，$\mathbf{f}(\mathbb{o}) = \mathbb{o}$ であるので，方程式系 (AL) は零解 $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbb{o}$ をもつ．また，$D\mathbb{F}(\mathbf{x}_*)$ は定数行列であり，条件 (C) を満たすことから，原点 $\mathbb{o}$ の近傍で，線型系

$$\mathbf{y}' = D\mathbb{F}(\mathbf{x}_*)\mathbf{y} \tag{L}$$

の近似とみなせる．この理由から，(AL) は**殆線型系**といわれ，(L) は (NL) の**線型近似系**といわれる．

**定理**

$\mathbb{F}(\mathbf{x}_*) = \mathbb{o}$ とするとき，以下が成り立つことが知られている：

(1) 行列 $D\mathbb{F}(\mathbf{x}_*)$ の固有値の実部がすべて負 $\Longrightarrow$(NL) の平衡点 $\mathbf{x}_*$ は (局所) **漸近安定**.

(2) 行列 $D\mathbb{F}(\mathbf{x}_*)$ の少なくとも 1 つの固有値の実部が正 $\Longrightarrow$(NL) の平衡点 $\mathbf{x}_*$ は**不安定**.

**例**　非線型系

$$\begin{cases} x' = x(3-2x-y), \\ y' = y(3-x-2y) \end{cases}$$

のすべての平衡点における安定性を調べる．

まず，平衡点を求める．つまり，$\begin{cases} x(3-2x-y) = 0, \\ y(3-x-2y) = 0 \end{cases}$ を解く．

| 参考 | $x=0$ | $(3-2x-y)=0$ |
|---|---|---|
| $y=0$ | ① | ② |
| $(3-x-2y)=0$ | ③ | ④ |

① に入るのは (0, 0)，② に入るのは $y=0$ かつ $3-2x-y=0$ なので，$x = \dfrac{3}{2}$ となる．よって，$\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

③ に入るのは $x=0$ かつ $3-x-2y=0$ なので，$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$．④ に入るのは，$3-x-2y=0$ かつ $3-2x-y=0$ なので，(1, 1).

よって，平衡点は (0, 0), $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, (1, 1) である．

次にヤコビ行列を求める．$D\mathbb{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3-4x-y & -x \\ -y & 3-x-4y \end{pmatrix}$．これに，各平衡点を代入して固有値を求める．

① $0 = \det(\lambda E - D\mathbb{F}(0, 0)) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2$．$\lambda = 3$．$\mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\lambda)) = +1$ なので，(1, 1) は不安定.

③ $0 = \det(\lambda E - D\mathbb{F}(0, \frac{3}{2})) = \begin{vmatrix} \lambda-\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-\frac{3}{2})(\lambda+3)$．$\lambda = \dfrac{3}{2}, -3$．$\mathrm{sgn}(\mathrm{Re}(\frac{3}{2})) = +1$ なので，$\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ は不安定.

② ③ と同様にして，$\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ は不安定.

④ $0 = \det(\lambda E - D\mathbb{F}(1, 1)) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$．$\lambda = -1, -3$ なので，(1, 1) は**漸近安定**.

**演習** 非線型系

$$\begin{cases} x' = 2 - xy, \\ y' = x - 2y^3 \end{cases}$$

におけるすべての平衡点の安定性を調べよ．

**解** (2, 1) は漸近安定，(−2, −1) は不安定．

# 参考文献

[1] 現象の数理　岡山理科大学理学部応用数学科