微分積分学 問題集解答

詳細な解答を付けたつもりですが, ところどころ省略している箇所もあります. ご了承ください.
内容に不備や落丁, 質問等がありましたら <s17m066nk@ous.jp> へ連絡をお願いします.
まぁ質問は担当の先生に聞くのが一番かもしれません.

目次

1 微積 I（松村先生）

1.1 数列

$\boxed{1}$ 漸化式 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ で定義された数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $a_n < 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で成り立つことを示せ.

数学的帰納法によって示す.

i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 1$ より $a_1 < 2$ よって成り立つ.

ii) n のとき

$a_n < 2$ が成り立つと仮定する.

iii) $n + 1$ のとき

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2 \quad \therefore\ a_{n+1} < 2$

よって $n + 1$ のとき成り立つ. $\square$

(2) $a_n < a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が成り立つことを示せ.

$a_n < a_{n+1}$ の両辺を a_n で割ると $1 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ← これを示す.

仮定より $1 < \dfrac{\sqrt{a_n + 2}}{a_n}$ 右辺を $\sqrt{\ }$ でまとめると $1 < \sqrt{\dfrac{a_n + 2}{{a_n}^2}}$

$1 < \sqrt{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{2}{{a_n}^2}}$ ここで (1) より $a_n < 2$ なので $\dfrac{1}{a_n} > \dfrac{1}{2} \cdots$[1]

[1] より $\sqrt{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{2}{{a_n}^2}} > \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4}} = 1 \quad \therefore\ 1 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $\square$

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ.

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ とおく.

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ なので $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \alpha$ とみてもよい.

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ より

両辺の極限値のみについて考えると $\alpha = \sqrt{\alpha + 2}$

この両辺を 2 乗すると

$\alpha^2 = \alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$

$\therefore\ \alpha = -1, 2$

ここで $a_1 = 1$ かつ $a_n < a_{n+1}$ より $\alpha > 1$ なので $\alpha = 2$

したがって $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 2$ $\square$

1.2　極限

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right\}^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{4n-1}$

分母の最高次数で分母・分子を割る

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{4-\frac{1}{n}}=\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}$

分母・分子を x で割る

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\quad ここで\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\ より$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$

さらに $e^x-1=t$ とおくと $x=\log(t+1)$ また $t\to0$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log(1+t)}\quad 分母・分子を\ t\ で割ると$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log(1+t)}\quad 対数の性質より$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log e}=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$

分母・分子を e^x で割る

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\right)^{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+e^{-2x})^{e^{2x}}}{(1-e^{-2x})^{e^{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+e^{-2x})^{e^{2x}}\cdot(1+(-e^{-2x}))^{-e^{2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)^{e^{2x}}\cdot\left(1+\left(-\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)^{-e^{2x}}$$

$$=e\cdot e=e^2$$

1.3　関数の連続性

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=x+3$, $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ について次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ の定義域を求めよ．

$f(x):(-\infty,\infty)\ (x\in\mathbb{R})$, $g(x):\{x\in\mathbb{R}|x\neq3\}$

(2) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が定義域内で連続であることを示せ．

$f(x)$ について $a\in(-\infty,\infty)$

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=a+3=f(a)$ よって連続.

$g(x)$ について $a(\neq3)\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to a}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to a}x+3=a+3$$

$$g(a)=\frac{a^2-9}{a-3}=\frac{(a+3)(a-3)}{a-3}$$

ここで $a\neq3$ より分母・分子を $a-3(\neq0)$ で割ると

$g(a)=a+3$ したがって $\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ゆえに $g(x)$ は定義域内で連続.　□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)$ を求めよ．また , $g(x)$ は $x=3$ で連続であるか答えよ．

$$\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}x+3=6$$

$g(x)$ は $x=3$ 定義されていないので $g(3)$ は存在しない.

すなわち $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)\neq g(3)$ よって $g(x)$ は $x=3$ で連続でない.　□

(4) 関数 $g(x)$ を拡張した関数

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & (x\neq3)\\ 6 & (x=3)\end{cases}$$

は $x=3$ で連続であるか答えよ．

(3) より $x=3$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)=6$

仮定より $h(3)=6$ なので $\displaystyle\lim_{x\to3}h(x)=h(3)$

したがって $h(x)$ は $x=3$ で連続.　□

1.4　簡単な微分

$\boxed{4}$ 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y = x^{11}$

$y' = 11x^{10}$

(2) $y = \dfrac{1}{x^3}$

$y = x^{-3}$

$y' = -3x^{-4} \left(= -\dfrac{3}{x^4} \right)$

(3) $y = \sqrt[3]{x^2}$

$y = x^{\frac{2}{3}}$ よって $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \left(= \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$

(4) $y = e^x$

$y' = e^x$

(5) $y = \log|x|$

$y' = \dfrac{1}{x}$

(6) $y = \sin x$

$y' = \cos x$

(7) $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

(8) $y = \tan x$

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(9) $y = 3x^2 + 6x$

$y' = 6x + 6$

(10) $y = x^4 e^x$

$y' = 4x^3 e^x + x^4 e^x$

(11) $y = 4 \sin x \cos x$

$y = 4(\sin x \cos x)$

$y' = 4(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)) = 4(\cos^2 x - \sin^2 x)$

(12) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$

$$y' = \frac{(x^2-2)'(x-1) - (x^2-2)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x(x-1) - (x^2-2)}{(x-1)^2}$$

(13) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)}$

$y' = -\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(14) $y = \underbrace{(x^3 - 3)(x+1)}_{y_1}(x^2 + 2)$

$y_1' = 3x^2(x+1) + (x^3 - 3)$

$$y' = (3x^2(x+1) + (x^3-3))(x^2+2) + ((x^3-3)(x+1))2x$$
$$= (3x^2(x+1) + (x^3-3))(x^2+2) + 2x(x^3-3)(x+1)$$

(15) $y = -3x^2 \sqrt[3]{x}$

$y = -3x^2 x^{\frac{1}{3}} = -3x^{\frac{7}{3}}$

$y' = -7x^{\frac{4}{3}}$

(16) $y = \dfrac{2\sqrt{x} - 3}{x}$

$y = \dfrac{2\sqrt{x}}{x} - \dfrac{3}{x} = 2x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} - 3x^{-1} = 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-1}$

$y' = -x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-2}$

(17) $y = \sin x + \log|x| + x^4 e^x$

$y' = \cos x + \dfrac{1}{x} + 4x^3 e^x + x^4 e^x$

(18) $y = \dfrac{x^4 + 2x - 3}{\sqrt{2}\,x}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{x^4}{x} + \dfrac{2x}{x} - \dfrac{3}{x} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + 2 - 3x^{-1})$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(3x^2 + 3x^{-2})$

1.5　接線の方程式

$\boxed{5}$ $y=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $x=4$ における接点を求めよ．

$y=\sqrt{x}$ に $x=4$ を代入すると $y=\sqrt{4}=2$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ とするとき，$f(x)$ の導関数と $x=4$ における微分係数を求めよ．

$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ，$f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$

(3) $x=4$ における接線の方程式を求めよ．

$x=a$ における接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ なので
$x=4$ における接線の方程式は $y-f(4)=f'(4)(x-4)$

$y=\dfrac{1}{4}(x-4)+2=\dfrac{1}{4}x+1$ よって求める方程式は $y=\dfrac{1}{4}x+1$

$\boxed{6}$ 次の関数の ( ) 内の点における接線の方程式を求めよ．

(1) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$　$(x=4)$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ とすると $f(x)=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$x=4$ における接点は $y=f(4)=\dfrac{1}{2}$

$x=4$ における微分係数は

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ すなわち $f'(4)=-\dfrac{1}{16}$

よって $x=4$ における接線の方程式は $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{16}(x-4)$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{16}x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}$　$\therefore y=-\dfrac{1}{16}x+\dfrac{3}{4}$

(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　$(x=\log 2)$

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とする．

$f(\log 2)=\dfrac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{5}{4}$

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ，$f'(\log 2)=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$

$y-\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}(x-\log 2)$　$\therefore y=\dfrac{3}{4}(x-\log 2)+\dfrac{5}{4}$

1.6　合成関数の微分

$\boxed{7}$ 関数 $y=e^{x^2+3x}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $y=e^u$，$u=f(x)$ の合成関数が $y=e^{x^2+3x}$ になるような $f(x)$ を求めよ．

$f(x)=x^2+3x$

(2) $y=e^u$ と (1) で得た関数 $u=f(x)$ の導関数 $\dfrac{dy}{du}$，$\dfrac{du}{dx}$ をそれぞれ求めよ．

$\dfrac{dy}{du}=e^u$，$\dfrac{du}{dx}=u'=2x+3$

(3) 合成関数の微分公式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ を用いて，$y=e^{x^2+3x}$ の導関数を求めよ．ただし，u が残らないよう注意すること．

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=e^u\cdot(2x+3)=e^{x^2+3x}(2x+3)$

$\boxed{8}$ 次の関数の導関数を求めよ．（合成関数の微分）

(1) $y=\sqrt{\tan x+1}$

$y=\sqrt{\tan x+1}=(\tan x+1)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}(\tan x+1)^{-\frac{1}{2}}(\tan x+1)'=\dfrac{1}{2}(\tan x+1)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

上までで o.k. 整理すると $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\tan x+1}\cos^2 x}$

(2) $y=(2x^2+1)^{10}$
$y'=10(2x^2+1)^9(4x)=40x(2x^2+1)^9$

(3) $y=\sin^4 x$
$=(\sin x)^4$
$y'=4\sin^3 x\cos x$

(4) $f(x)$ が微分可能であるとする．$f(x^2)$ の導関数を求めよ．
$\{f(x^2)\}'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$

(5) $\{f(x)\}^2$
$[\{f(x)\}^2]'=2f(x)\cdot f'(x)$

(6) $\log|f(x)|$ ただし $f(x)\neq 0$

$\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

1.7 対数微分

$\boxed{9}$ 関数 $y = x^{\cos x}(x > 0)$ の導関数を以下の問いにしたがって求めよ.

(1) 両辺の対数をとり，その後，右辺に対数法則を用いて整理せよ.

$\log y = \log x^{\cos x} = \cos x \log x \quad \therefore\ \log y = \cos x \log x$

(2) (1) で得た等式の両辺を x について微分せよ.（左辺に注意）

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

(*左辺は合成関数の微分，右辺は積の微分.)

(3) y' を求めよ. ただし y が残らないように注意すること.

(2) の結果より

$$y' = y\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \log x\right) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \log x\right)$$

$\boxed{10}$ 次の関数の導関数を対数微分を使って求めよ.

(1) $y = x^x \quad (x > 0)$

両辺の対数をとり整理すると $\log y = x \log x$

両辺を x について微分すると $\dfrac{y'}{y} = \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1$

$y' = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}}$

両辺の対数をとると

$$\log y = \log(\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}}) = \log\left(\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\{\log(x+1) + \log(x+2) - \log(x+3)\}$$

両辺を x について微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right\}$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{x+3}}\left\{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right\}$$

1.8 様々な関数の微分（まとめ）

$\boxed{11}$ 次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y = \dfrac{x^5 - x^2 + 1}{2x^4}$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{2}(x - x^{-2} + x^{-4})$$

$$y' = \frac{1}{2}(1 + 2x^{-3} - 4x^{-5})$$

(2) $y = (x+2)(x^2-3)$

$y' = x^2 - 3 + 2x(x+2)$

(3) $y = 2\cos(2x^3+3)$

$y' = -2\sin(2x^3+3)6x^2 = -12x^2\sin(2x^3+3)$

(4) $y = \log|\sin x \cos x|$

$$y' = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}$$

(5) $y = -3xe^{-x^2+3x}$

$$y' = -3e^{-x^2+3x} + (-3x)e^{-x^2+3x}(-2x+3)$$
$$= -3e^{-x^2+3x}(1+3-2x) = -3e^{-x^2+3x}(4-2x)$$

(6) $y = (\sin x)^x \quad (0 < x < \pi)$

$\log y = x\log(\sin x)$

$$\frac{y'}{y} = \log(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = (\sin x)^x\left(\log\sin x + \frac{x\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x\left(\log\sin x + \frac{x}{\tan x}\right)$$

1.9　逆関数

$\boxed{12}$ 次の関数の逆関数を求めよ. 定義域も記すこと.

(1) $y = 3x - 4 \ (x \in \mathbb{R})$

$y = 3x - 4$ の値域は $y \in \mathbb{R}$

$y = 3x - 4 \Leftrightarrow 3x = y + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}(y+4)$

x と y を入れかえると $y = \dfrac{1}{3}(x+4)$

$y = 3x - 4$ の値域は $y \in \mathbb{R}$ だったので

$y = \dfrac{1}{3}(x+4)$ の定義域は $x \in \mathbb{R}$

(2) $y = \sqrt{x-1} \ (x \geq 1)$

$y = \sqrt{x-1}$ の値域は $0 \leq y$

$y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = y^2 + 1$

x と y を入れかえると $y = x^2 + 1$ 定義域は $x \geq 0$

(3) $y = (x-2)^2 \ (x \leq 2)$

$y = (x-2)^2 \ (x \leq 2)$ の値域は $0 \leq y$

$y = (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} + 2$

x と y を入れかえて $y = \sqrt{x} + 2$, 定義域は $x \geq 0$

(4) $y = e^{x-1} \ (x \in \mathbb{R})$

$y = e^{x-1}$ の値域は $0 < y$

$y = e^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = \log y \Leftrightarrow x = \log y + 1$

x と y を入れかえると $y = \log x + 1$, 定義域は $x > 0$

$\boxed{13}$ 逆関数の微分公式を用いて

$$y = \sin^{-1} x \ (-1 < x < 1)$$

の微分（導関数）をを求めよ.

逆関数の微分公式は $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ なので

$f(x) = \sin x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \ (-1 < x < 1)$ とみれる.

微分公式にあてはめると

$$y' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2　微積 II（井上先生）

2.1　逆三角関数

$\boxed{1}$ 次の逆三角関数の値を求めよ.

(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = x$ とすると

$\cos x = \dfrac{1}{2} \ (0 \leq x \leq \pi) \quad \therefore x = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(1) と同様にして $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{4}\pi$

(3) $\sin^{-1}(-1) = x$ とすると

$\sin x = -1 \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore x = -\dfrac{\pi}{2}$

(4) $\tan^{-1}(-1) = x$ とすると

$\tan x = -1 \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore x = -\dfrac{\pi}{4}$

(5) $\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{3}{5}\pi\right) = x$ とすると

$\sin x = \sin \dfrac{3}{5}\pi \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \therefore x = \dfrac{2}{5}\pi$

(6) $\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{7}{5}\pi\right)$

$\sin \dfrac{7}{5}\pi = \sin\left(-\dfrac{2}{5}\pi\right)$ より

$\sin^{-1}\left(\sin \dfrac{7}{5}\pi\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(-\dfrac{2}{5}\pi\right)\right) = -\dfrac{2}{5}\pi$

2.2　記述問題（逆三角関数）

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ.

(1) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \tan^{-1} x$ を満たす x を求めよ.

$y = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \tan^{-1} x$ とおくと.

$y = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ より $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$

また $\sin y = \dfrac{3}{5}$, $\tan y = x$ が成り立つので

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = \dfrac{16}{25}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos y = \dfrac{4}{5}$

$x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$

(2) $y = \sin^{-1}(1-2^x)$ の定義域と値域を求めよ.

$-1 \leq 1-2^x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2^x \leq 2$　$\therefore$ 定義域は $x \leq 1$

また $x \leq 1$ のとき $0 < 2^x \leq 2$ なので $-1 \leq 1-2^x < 1$

よって値域は $-\dfrac{\pi}{2} \leq y < \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$　$(-1 \leq x \leq 1)$ を示せ.

$y = \cos^{-1} x$ とおくと $\cos y = x$ $(0 \leq y \leq \pi)$

$x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$

$\sin^{-1} x$ が定義できる範囲は $-\dfrac{\pi}{2} \leq \left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので

$\dfrac{\pi}{2} - y = \sin^{-1} y \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} = \sin^{-1} x + y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$　$\square$

2.3　簡単な n 次導関数

$\boxed{3}$ 次の関数の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ.

(1) $y = 2^x$

$y' = 2^x \log 2$

$y'' = 2^x \log 2 \cdot \log 2 = 2^x (\log 2)^2$

$\vdots$

$y^{(n)} = 2^x (\log 2)^n$

(2) $y = \log x$

$y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

$y'' = -x^{-2}$

$y^{(3)} = 2x^{-3}$　$\therefore\ y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x)^{-n}$

(3) $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\vdots$

$$y^{(n)} = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} & (\alpha \geq n) \\ 0 & (\alpha < n) \end{cases}$$

(4) $y = \dfrac{1}{1-x}$

$y' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

$y^{(3)} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$

$\vdots$

$y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

(5) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + \dfrac{2}{2}\pi\right)$

$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\vdots$

$y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(6) $y = \cos x$

(5) と同様にして $y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

2.4　ライプニッツの公式を使う n 次導関数

$\boxed{4}$ 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $y = x^2 \log x$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (\log x)^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} x^2 (\log x)^{(n)} + \binom{n}{1} (x^2)' (\log x)^{(n-1)}$$

$$+ \binom{n}{2} (x^2)'' (\log x)^{(n-2)} + \binom{n}{3} (x^2)^{(3)} (\log x)^{(n-3)}$$

$$+ \cdots + \binom{n}{n} (x^2)^n \log x$$

$$= x^2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + 2nx \cdot \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$+ n(n-1) \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \quad (\because\ (x^2)^{(k)} = 0\ (k \geq 3))$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}} + \frac{2n(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-2}}$$

$$+ \frac{n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \{(n-1)(n-2) - 2n(n-2) + n(n-1)\}$$

$$= \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

(2) $y = x^4 e^x$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^4)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} x^4 e^x + \binom{n}{1} 4x^3 e^x + \binom{n}{2} 12x^2 e^x$$

$$+ \binom{n}{3} 24xe^x + \binom{n}{4} 24e^x + 0 + \cdots + 0$$

$$= e^x \{x^4 + 4nx^3 + 6n(n-1)x^2 +$$
$$4n(n-1)(n-2)x + n(n-1)(n-2)(n-3)\}$$

2.5　いろんな n 次導関数（まとめ）

$\boxed{5}$ 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$

$$y' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$y^{(3)} = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad \therefore\ y^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2} & (n = 1) \\ \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

(2) $y = (x^2 + 2x) \cos x$

$$y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2 + 2x)^{(k)} (\cos x)^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0} (x^2 + 2x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ \binom{n}{1} (2x + 2) \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + \binom{n}{2} 2 \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$$= (x^2 + 2x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ n(2x + 2) \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 2n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$\boxed{6}$ $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$, $f(0) = 0$ とする. $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではあるが, $f''(0)$ は存在しないことを示せ.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) + f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h}$$

$-1 \leq \sin \dfrac{1}{h} \leq 1$ 全ての辺に h をかけると $-h \leq h \sin \dfrac{1}{h} \leq h$

$\displaystyle\lim_{h \to 0}(-h) = 0,\ \lim_{h \to 0} h = 0$

よって, はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad \therefore\ f'(0) = 0$

したがって $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である.

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} (-x^{-2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

また $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f'(0+h) + f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h} - 1}{h}$

これは振動するので $f''(0)$ は存在しない. □

2.6　ロピタルの定理

$\boxed{7}$ 次の極限を求めよ. ロピタルの定理を使う際はどの不定形か明記せよ. ロピタルの定理を使わずに解ける問題, 使ってはいけない問題もあるので注意.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1}$

$\displaystyle=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{\sin x}$

$\displaystyle\frac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}$

$\displaystyle\frac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{(1+x)\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+2x}=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}$

$\displaystyle\frac{\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\log x)\cdot(\frac{1}{x})}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\log x}{x}$

これもまた $\displaystyle\frac{\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$

$\infty\times 0$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

$0\times(-\infty)$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log x$

$=\infty$

$\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$ を以下の手順で計算せよ.

(1) $y=x^x$ とおき, 両辺の対数をとり, 右辺を式変形せよ.

$\log y=\log x^x=x\log x$

(2) (1) を使って $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y$ を計算せよ.

(1) より $\log y=x\log x$ なので $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x\log x$

$\boxed{5}$ の (7) より $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}\lim_{x\to+0}(-x)=0$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to+0}\log y=0$

(3) (2) と $y=e^{\log y}$ を使って, $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x$ を求めよ.

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}e^{\log y}=e^0=1$

$\boxed{9}$ 次の極限を求めよ.

ロピタルの定理を用いるときは, どの不定形であるか明記すること.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{x^2}$

$y=x^{x^2}$ とおくと $\log y=x^2\log x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}x^2\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-2}}$

これは $\displaystyle\frac{-\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0\quad\therefore\ \lim_{x\to+0}\log y=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{x^2}=\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}{}^{*}e^{\log y}=e^0=1\ \ ({}^{*}a^{\log_a x}=x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

$y=(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ とおくと (1) と同様に

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log y=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log(1+\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+\sin x)}{x}$

これは $\displaystyle\frac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{1+\sin x}=1\quad\therefore\ \lim_{x\to+0}\log y=1$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}e^{\log y}=e^1=e$

2.7　平均値の定理

$\boxed{10}$ 次の関数 $f(x)$ に対して, ( ) 内の区間 $[a,b]$ で

平均値の定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ を使用した際の $c\in(a,b)$ の値を具体的に求めよ.

(1) $f(x)=x^3$ $([1,3])$

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{27-1}{2}=13=f'(c)$$

$f'(x)=3x^2$ より $f'(c)=3c^2=13$ $\therefore$ $c^2=\dfrac{13}{3}$

$c=\pm\sqrt{\dfrac{13}{3}}$, $1<c<3$ より $c=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

(2) $f(x)=x^3-x$ $([-2,2])$

$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{6-(-6)}{4}=3=f'(c)$$

$f'(x)=3x^2-1$ より $f'(c)=3c^2-1=3$ $\therefore$ $c^2=\dfrac{4}{3}$

$c=\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$, $-2<c<2$ より $c=\pm\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\boxed{11}$ 平均値の定理を用いて

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b\ \ (a<b)$$

を示せ.

$\because$

$f(x)=e^x$ $[a,b]$ とする.

このとき平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

すなわち $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^c$ となる $c\,(a<c<b)$ が存在する.

ここで e^x は単調増加なので $e^a<e^c<e^b$

ゆえに $e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$ が成り立つ.　□

2.8　ロピタルの定理を用いた極限の計算（まとめ）

$\boxed{12}$ 次の極限を求めよ. ロピタルの定理を使う際は, どの不定形であるか明記すること.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{\sin ax}$ $(a\neq 0)$

$\dfrac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos bx)\cdot(bx)'}{(\cos ax)\cdot(ax)'}=\lim_{x\to 0}\frac{b\cos bx}{a\cos ax}=\frac{b}{a}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{100}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を 100 回用いると

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{100!}=\infty$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{cx^n+d}{ax^m+b}$ $(a>0,\ c>0,\ m,n\in\mathbb{N})$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を用いる. また場合分けを行う.

i) $n<m$ のとき

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{cnx^{n-1}}{amx^{m-1}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{cn!}{a\cdot{}_m\mathrm{P}_n x^{m-n}}=0$$

ii) $n=m$ のとき

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{cnx^{n-1}}{anx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{c}{a}=\frac{c}{a}$$

iii) $n>m$ のとき

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\frac{cnx^{n-1}}{amx^{m-1}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{c\cdot{}_n\mathrm{P}_m x^{n-m}}{am!}=\infty$$

$(*\ {}_n\mathrm{P}_k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1))$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$y=\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおく.

$$\log y=\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}$$

これは $\dfrac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}\left(\leftarrow\frac{0}{0}\text{形}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{e^x+xe^x-1}\left(\leftarrow\frac{0}{0}\text{形}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{2+x}=\frac{1}{2}\ \therefore\ \lim_{x\to 0}\log y=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\log y}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2.9　簡単なマクローリン展開の問題

$\boxed{13}$ 次の関数の 3 次マクローリン展開を求めよ. ただし

$$R_4 = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 \quad (0 < \theta < 1)$$

とする.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, $f''(x) = 6x - 6$, $f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(4)} = 0$

$f(0) = -1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -6$, $f^{(3)}(0) = 6$

$$f(x) = -1 + 2x + \frac{1}{2!}(-6)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 6 \cdot x^3 + R_4$$

$$= -1 + 2x - 3x^2 + x^3$$

(2) $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x}$, $f^{(4)}(x) = 16e^{2x}$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 4$, $f^{(3)}(0) = 8$

$$R_4 = \frac{16e^{2\theta x}}{4!}x^4$$

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + R_4$$

$\boxed{14}$ $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ のマクローリン展開を利用して, $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求める. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}},\ f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \frac{1}{3},\ f''(0) = -\frac{2}{9}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + R_3$$

(2) (1) の右辺に $x = 0.1$ を代入して, $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を小数点以下 4 桁まで求めよ.

$$f(0.1) = 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{900} = \frac{929}{900} = 1.0322\ldots$$

2.10　簡単なテイラー展開の問題

$\boxed{15}$ 次の関数の ( ) 内の点における 3 次テイラー展開を求めよ.
ただし $x = a$ における 3 次テイラー展開の剰余項

$$R_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-a)^4 \ (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

とする.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \ (x = -2)$

$f(-2) = -25$, $f'(-2) = 26$, $f''(-2) = -18$, $f^{(3)}(-2) = 6$

$f(x) = 25 + 26(x+2) - 9(x+2)^2 + (x+2)^3$

(2) $f(x) = \log x \ (x = 1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -x^{-2},\ f^{(3)}(x) = 2x^{-3},\ f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = -1,\ f^{(3)}(1) = 2$$

$$R_4 = \frac{-6c^{-3}}{4!}(x-1)^4 = -\frac{1}{4c^3}(x-1)^4$$

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2(x-1)^3 + R_4$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + R_4$$

2.11 n 次マクローリン展開

$\boxed{16}$ 次の関数の n 次マクローリン展開を求めよ. ただし剰余項

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \ (0 < \theta < 1)$$

とする. また具体的な数値は範囲は最初の項から 4 つ程度でよい.

(1) $f(x) = \cos x$

$$\begin{cases} f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \\ f^{(3)}(x) = \sin x \\ f^{(4)}(x) = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\sin x \\ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \end{cases}$$

$f^{(2n+1)}(0) = 0\,,\ f^{(2n)}(0) = (-1)^n$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1} \ (0 < \theta < 1)$$

(2) $f(x) = \log(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,,\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\,,\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$f(0) = 0\,,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$f(x) = 0 + x + \frac{1}{2!}\cdot(-1)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2!x^3 +$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!x^n + R_{n+1}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

(3) $f(x) = (1+x)^\alpha$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \ (n \in \mathbb{N},\, \alpha \in \mathbb{R})$$

$\binom{\alpha}{0} := 1$ と定義する.

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,,\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,,\ \ldots$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) = {}_\alpha\mathrm{P}_n$$

$$f(x) = {}_\alpha\mathrm{P}_0 + {}_\alpha\mathrm{P}_1 x + \frac{{}_\alpha\mathrm{P}_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{{}_\alpha\mathrm{P}_n}{n!}x^n + R_{n+1}$$

$$= \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

2.12 記述問題

$\boxed{17}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $[a,b]$ において 1 回微分可能とする.
$m \le |f'(x)| \le M$ ($M \ge m > 0$ の定数) が成り立つとき, 不等式

$$m(b-a) \le |f(b) - f(a)| \le M(b-a)$$

が成り立つことを示せ.

$\because$

$a < c < b$ とすると $m \le |f'(c)| \le M$

$f(x)$ は $[a,b]$ において微分可能なので平均値の定理より

$$m \le \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le M$$

ここで $b - a > 0$ より $m(b-a) \le |f(b) - f(a)| \le M(b-a)$ □

(2) $f(x) = \sqrt{1+x}$ ($x \in [0,h]$) で考えることにより, $h > 0$ に対して

$$1 + \frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h} < 1 + \frac{h}{2}$$

が成り立つことを示せ.

$\because$

平均値の定理より $\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$h > 0$ より $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}} < \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} < \dfrac{1}{2}$

全ての辺に h をかけると

$$\frac{h}{\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h} - 1 < \frac{h}{2}$$

全ての辺に 1 加えると

$$1 + \frac{h}{2\sqrt{1+h}} < \sqrt{1+h} < 1 + \frac{h}{2} \quad \square$$

(3) 関数 $f(x)$ が区間 I で単調増加であることの定義をかけ.
$x_1\,,\, x_2 \in I$ で $x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) < f(x_2)$ であること.

(4) 関数 $f(x)$ が区間 I で広義単調減少であることの定義をかけ.
$x_1\,,\, x_2 \in I$ で $x_1 < x_2$ なら必ず $f(x_1) \ge f(x_2)$ であること.

2.13　マクローリン展開（∞）

$\boxed{18}$ 次の関数のマクローリン展開を求めよ.p78 の定理 2 を使ってよい.

(1) $f(x)=\cos 2x$

$$f(x)=\cos(2x)=1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot 4^k x^{2k}\text{（定理 2 ,10.6）}$$

(2) $f(x)=e^{-3x}$

$$f(x)=1+(-3x)+\frac{1}{2!}(-3x)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(-3x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot 3^k x^k\text{（定理 2 ,10.4）}$$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots$$

$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ は $\alpha=-2$ のときである

$$\frac{1}{(1+x)^2}=\binom{-2}{0}+\binom{-2}{1}x+\cdots+\binom{-2}{n}x^n+\cdots$$

$$=1-2x+\cdots+\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1-2x+\cdots+\frac{(-1)^n n!(n+1)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\binom{-\frac12}{0}+\binom{-\frac12}{1}x+\cdots+\binom{-\frac12}{n}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!2^k}x^k$$

($*$2 重階乗 $n!!=n(n-2)(n-4)\cdots 1$)

(5) $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$

(1) より

$$\sin^2 x=\frac12-\frac12\cos 2x=\frac12-\frac12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot 4^k x^{2k}$$

2.14　マクローリン展開を応用した極限

$\boxed{19}$ マクローリン展開を利用して，次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac16 x^3}{x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\underline{x}-\underline{\frac{x^3}{3!}}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)-\underline{x}+\underline{\frac16 x^3}}{x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5!}-\frac{x^2}{7!}+\cdots\right)=\frac{1}{5!}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac13-\frac{x}{4}+\cdots\right)=\frac13$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x-\sin x}$

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}(x^2)^2+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots\right)-1-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}=\frac{0}{\frac{1}{3!}}=0$$

しかしこの問題はロピタルの定理を使ったほうが早い (個人的には)

2.15 マクローリン展開を応用した無限級数の和

$\boxed{20}$ 次の無限級数の和を求めよ.

(1) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^3+\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^5-\cdots$

$$f(x):=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots=\sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5-\cdots=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) $1+\log 2+\dfrac{1}{2!}(\log 2)^2+\dfrac{1}{3!}(\log 2)^3+\cdots$

$$f(x):=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=e^x$$

$$f(\log 2)=1+\log 2+\frac{1}{2!}(\log 2)^2+\frac{1}{3!}(\log 2)^3+\cdots=e^{\log 2}=2$$

(3) $(\sqrt{e}-1)-\dfrac{(\sqrt{e}-1)^2}{2}+\dfrac{(\sqrt{e}-1)^3}{3}-\cdots$

$$f(x):=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=\log(1+x)$$

$$f((\sqrt{e}-1))=(\sqrt{e}-1)-\frac{(\sqrt{e}-1)^2}{2}+\frac{(\sqrt{e}-1)^3}{3}-\cdots$$

$$=\log(1+(\sqrt{e}-1))=\log\sqrt{e}=\frac{1}{2}$$

(4) $\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\cdots$

$$=0+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$f(x):=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=e^x$$

$$f(-1)=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2.16 関数の増減凹凸表とグラフの概形

$\boxed{21}$ 関数 $y=(x^2-2)e^x$ の増減・凹凸・極値・変曲点を調べ，増減凹凸表を書き，グラフの概形をかけ.

$y=f(x)$ とする.

$f'(x)=2xe^x+(x^2-2)e^x=e^x(x^2+2x-2)$

$f'(x)=0$ のとき $x=-1\pm\sqrt{3}$

$f''(x)=e^x(x^2+2x-2)+e^x(2x+2)=x(x+4)e^x$

$f''(x)=0$ のとき $x=0,-4$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	$-1-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	$\frac{14}{e^4}$	↗	$*$	↘	-2	↘	$2-2\sqrt{3}$	↗

$*=(2+2\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}}$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2)e^x=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-2)e^x$$

これは $\infty\times 0$ 形なのでロピタルの定理を 2 回用いる.

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-2)}{e^{-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0$$

増減凹凸表と極限よりグラフがかける. グラフの概形はこちら.

$\boxed{22}$ 関数 $y=\log(2-\sin x)$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$ の増減・凹凸・極値・変曲点を調べ，増減凹凸表を書き，グラフの概形をかけ.

$f(x)=y$ とする.$f'(x)=\dfrac{-\cos x}{2-\sin x}$，$f'(x)=0$ のとき $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$

$$f''(x)=\frac{\sin x(2-\sin x)+\cos x(-\cos x)}{(2-\sin x)^2}=\frac{2\sin x-1}{(2-\sin x)^2}$$

$f''(x)=0$ のとき $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	$\log 2$	↗	$\log 3$	↘	$\log\frac{3}{2}$	↘	0	↗	$\log\frac{3}{2}$	↗	$\log 2$

グラフの概形はこちら

2.17　極値などを求める問題

$\boxed{23}$ 関数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ について次の問いに答えよ.

(1) 極値を求めよ. また, そのときの x の値を求めよ.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	5	↘	-27	↗

増減表より $\begin{cases} x = -1 \text{ のとき極大値 } 5 \\ x = 3 \text{ のとき極小値 } -27 \end{cases}$

(2) $0 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値を求めよ.
また, そのときの x の値も求めよ.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-27	↗	-20

増減表より $\begin{cases} x = 0 \text{ のとき最大値 } 0 \\ x = 3 \text{ のとき最小値 } -27 \end{cases}$

(3) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 9x = k$ の実数解の個数は k の値によってどのように変化するか答えよ.

$y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	5	↘	-11	↘	-27	↗

増減表よりグラフ（省略）を書くと

$\begin{cases} k < -27 \,,\, 5 < k \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ k = 5 \text{ または } k = -27 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ -27 < k < 5 \text{ のとき } 3 \text{ 個} \end{cases}$

2.18　増減凹凸表とグラフの概形の応用

$\boxed{24}$ 関数 $y = \dfrac{\log x}{x}$ について次の問いに答えよ.

(1) 増減凹凸表を書き , グラフの概形をかけ.

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする.

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x)}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ のとき

$\dfrac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 1$ より $x = e$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$

$f''(x) = 0$ のとき $2\log x = 3 \Leftrightarrow \log x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$

x	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	↘

グラフの概形をかくために極限を考える.

まずは $x \to \infty$ の極限を考える.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$ これは $\dfrac{\infty}{\infty}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

次に $x \to -\infty$ を考えたいが
$\log x$ は $x \leq 0$ で定義されていないので（真数条件より）
$x \to +0$ の極限を考える.

$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} \log x = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

グラフの概形はこちら

(2) 関数の最大値を求めよ.
グラフの概形より $x = e$ のとき $\dfrac{1}{e}$

(3) e^π と π^e はどちらが大きいか.
e^x と x^e を比較する.

$\log e^x$		$\log x^e$
↓		↓
x		$e \log x$
↓	x で割る	↓
1		$\dfrac{e\log x}{x}$
↓	e で割ると (1)(2) より	↓
$\dfrac{1}{e}$	$\geq$	$\dfrac{\log x}{x}$

$\pi > e > 0$ なので $x = \pi$ のときも成り立つ. よって $e^\pi > \pi^e$

3　微積 III（鬼塚先生）

3.1　簡単な不定積分

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int 3x^2 dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\cdot 3x^3 + C = x^3 + C\ \ (C:\text{積分定数})$

(2) $\displaystyle\int e^x dx$

$= e^x + C\ (C:\text{積分定数})$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx$

$= \log|x| + C\ (C:\text{積分定数})$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= \tan x + C\ (C:\text{積分定数})$

(5) $\displaystyle\int \sin x dx$

$= -\cos x + C\ (C:\text{積分定数})$

(6) $\displaystyle\int \cos x dx$

$= \sin x + C\ (C:\text{積分定数})$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \tan^{-1} x + C\ (C:\text{積分定数})$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \sin^{-1} x + C\ (C:\text{積分定数})$

(9) $\displaystyle\int e^{2x} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}e^{2x} + C\ (C:\text{積分定数})$

(10) $\displaystyle\int \frac{5x^7+3x^3}{x^4} dx$

$\displaystyle= \int \left(\frac{5x^7}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4}\right) dx$

$\displaystyle= 5\int x^3 dx + 3\int \frac{1}{x} dx = \frac{5}{4}x^4 + 3\log|x| + C\ (C:\text{積分定数})$

3.2　標準的？な不定積分

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$

$\displaystyle\int \{f(x)\}^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C$ タイプ

$\displaystyle= \frac{1}{3}\sin^3 x + C\ (C:\text{積分定数})$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1} dx$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ タイプ

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\ (C:\text{積分定数})$

(3) $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 + C\ (C:\text{積分定数})$

(4) $\displaystyle\int x^6 e^{x^7} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{7}\int 7x^6 e^{x^7} dx = \frac{1}{7}e^{x^7} + C\ (C:\text{積分定数})$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-2)^4} dx$

$\displaystyle= \int (3x-2)^{-4} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\int 3(3x-2)^{-4} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{-3}(3x-2)^{-3}\right) + C = -\frac{1}{9}(3x-2)^{-3} + C\ (C:\text{積分定数})$

(6) $\displaystyle\int \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)(x^3 + \log x)^{10} dx$

$\displaystyle= \frac{1}{11}(x^3+\log x)^{11} + C\ (C:\text{積分定数})$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^4} dx$

$\displaystyle= \int (\log x)^{-4}\cdot\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3}(\log x)^{-3} + C\ (C:\text{積分定数})$

(8) $\displaystyle\int \tan x dx$

$\displaystyle= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$= -\log|\cos x| + C\ (C:\text{積分定数})$

3.3　置換積分法

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^3}dx$

$t=\log x$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ $\therefore\ dt=\dfrac{1}{x}dx$

$=\displaystyle\int\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{2}t^{-2}+C=-\frac{1}{2}(\log x)^{-2}+C$ (C : 積分定数)

(2) $\displaystyle\int \frac{2+\log x^3}{x}dx$

$t=2+\log x^3=2+3\log x$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{3}{x}$ $\therefore\ dx=\dfrac{x}{3}dt$

$=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int t\,dt=\frac{1}{6}t^2+C=\frac{1}{6}(2+\log x^3)^2+C$ (C : 積分定数)

$\left(*\dfrac{1}{6}(\log x^3)^2+C\ \text{でも可}\right)$

(3) $\displaystyle\int(-x^2)\sin(x^3+2)dx$

$t=x^3+2$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$ $\therefore\ dx=\dfrac{1}{3x^2}dt$ となるので

$=-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\sin t\,dt=\frac{1}{3}\cos t+C=\frac{1}{3}\cos(x^3+2)+C$

(C : 積分定数)

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log x+1)^2}dx$

$t=\log x+1$ とすると $\log x=t-1$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ $\therefore\ dx=xdt$

$=\displaystyle\int\frac{t-1}{t^2}dt=\int\frac{t}{t^2}dt-\int\frac{1}{t^2}dt$

$=\displaystyle\int\frac{1}{t}dt+t^{-1}=\log|t|+t^{-1}+C$

$=\log|\log x+1|+(\log x+1)^{-1}+C$ (C : 積分定数)

(5) $\displaystyle\int\tan^4 x\,dx$

$\tan^4 x=\tan^2 x\cdot\tan^2 x=\tan^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)$

$\displaystyle\int\tan^4 x\,dx=\int\tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\displaystyle\int\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\tan^2 x\,dx$

$\displaystyle\int\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$ について

$t=\tan x$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\therefore\ dx=\cos^2 x\,dt$

$\displaystyle\int\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int t^2\,dt$

$=\dfrac{1}{3}t^3+C=\dfrac{1}{3}(\tan x)^3+C$

$\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$ について

$\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ より

$\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int 1dx=\tan x-x+C$

$\therefore\displaystyle\int\tan^4 x\,dx=\frac{1}{3}(\tan x)^3+\tan x-x+C$ (C : 積分定数)

3.4　部分積分法

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x dx$

$=xe^x-\displaystyle\int e^x dx=e^x(x-1)+C$ (C : 積分定数)

(2) $\displaystyle\int\log x\,dx$

$=\displaystyle\int 1\cdot\log x\,dx=\int(x)'\log x\,dx$

$=x\log x-\displaystyle\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\log x-\displaystyle\int 1dx=x(\log x-1)+C$ (C : 積分定数)

(3) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=I$ とする

$I=e^x\sin x-\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\displaystyle\int e^x\cdot(-\sin x)dx\right)$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-I$ $\therefore\ 2I=e^x(\sin x-\cos x)$

したがって $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$ (C : 積分定数)

(4) $\displaystyle\int(x^2+6)\sin x\,dx$

$=(-\cos x)(x^2+6)-\displaystyle\int(-\cos x)2x\,dx$

$=-(x^2+6)\cos x+\left(2x\sin x-\displaystyle\int 2\sin x\,dx\right)$

$=-(x^2+6)\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$ (C : 積分定数)

3.5　部分分数分解

$\boxed{5}$ 次の分数を部分分数分解せよ.

(1) $\dfrac{3}{x^2-4}$

$$\frac{3}{x^2-4}=\frac{3}{(x+2)(x-2)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}$$

$$\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-2)+b(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a+2b}{x^2-4}$$

$a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$

$-2(a-b)=3 \Leftrightarrow -2(a+a)=3 \Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{3}{4}$

$$\therefore\ \frac{3}{x^2-4}=\frac{-3/4}{x+2}+\frac{3/4}{x-2}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

(簡単に求める方法としてヘビサイドの方法がある.

$$a=\left.\frac{3}{x-2}\right|_{x+2=0\Leftrightarrow x=-2\text{ を代入}}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$$

$$b=\left.\frac{3}{x+2}\right|_{x-2=0\Leftrightarrow x=2\text{ を代入}}=\frac{3}{4}$$

)

(2) $\dfrac{1}{x^3+1}$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(b-a+c)x+a+c}{x^3+1}$$

$a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$

$b-a+c=0 \Leftrightarrow c=2a \Leftrightarrow a=\dfrac{c}{2}$

$a+c=1 \Leftrightarrow 3a=1 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore\ \frac{1}{x^3+1}=\frac{1/3}{x+1}+\frac{-x/3+2/3}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$$

(3) $\dfrac{x^2}{(x-5)^3}$

$$\frac{x^2}{(x-5)^3}=\frac{a}{x-5}+\frac{b}{(x-5)^2}+\frac{c}{(x-5)^3}$$

ヘビサイドの方法を用いると

（x が残った場合 $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ を代入）

$$a=\frac{1}{2!_{\leftarrow(\text{最高指数}\ -\ \text{自身の分母の指数})\ \text{の階乗})}}(x^2)''^{(\leftarrow(\text{最高指数}\ -\ \text{自身の分母の指数})\ \text{回微分})}$$

$$=\frac{1}{2!}(2x)'=\frac{1}{2!}\cdot 2=1$$

$$b=\frac{1}{1!}(x^2)'=2x=10$$

$$c=\frac{1}{0!}=(x^2)^{(0)}=x^2=25$$

$$\therefore\ \frac{x^2}{(x-5)^3}=\frac{1}{x-5}+\frac{10}{(x-5)^2}+\frac{25}{(x-5)^3}$$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{3}{x^4-2}dx$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{3}{4}\log|x-2|-\frac{3}{4}\log|x+2|+C=\frac{3}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

(C : 積分定数)

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-2x-3}dx$

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}$$

ヘビサイドの方法を用いると $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$

$$\therefore\ \frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\int\frac{1}{x^2-2x-3}dx=\frac{1}{4}\left(\int\frac{1}{x-3}dx-\int\frac{1}{x+1}dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\log|x-3|-\log|x+1|\right)+C=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C$$

(C : 積分定数)

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-5)^3}dx$

$$=\int\frac{1}{x-5}dx+\int\frac{10}{(x-5)^2}dx+\int\frac{25}{(x-5)^3}dx$$

$$=\log|x-5|-10(x-5)^{-1}-\frac{25}{2}(x-5)^{-2}+C\ \ (C : \text{積分定数})$$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int e^{4x+3}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{4}e^{4x+3} + C\ (C：積分定数)$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2}dx$

$x = 2\tan t\ \left(\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと $t = \tan^{-1}\frac{x}{2}$

$\displaystyle \frac{dx}{dt} = \frac{2}{\cos^2 t}\quad \therefore\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt$

$\displaystyle = \int \frac{2}{4(1+\tan^2 t)\cos^2 t}dt$

$\displaystyle = \int \frac{1}{2(\frac{1}{\cos^2 t})\cos^2 t}dt$

$\displaystyle = \int \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C\ (C：積分定数)$

(3) $\displaystyle\int \left(5x^4 + \frac{1}{x}\right)(x^5 + \log x)^5 dx$

$\displaystyle = \frac{1}{6}(x^5 + \log x)^6 + C\ (C：積分定数)$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

$x = 4\sin t\ \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と置換して (2) と同様に解くと

$\displaystyle = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C\ (C：積分定数)$

(5) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\sin 2x)\cdot x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\ (C：積分定数)$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x+1}dx$

分子の次数を下げる．

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x \\
x^2+x+1 & \overline{)x^3+x^2+3x+1} \\
 & \underline{x^3+x^2+\ \ x} \\
 & 2x+1
\end{array}
$$

$x^3+x^2+3x+1 = x(x^2+x+1) + 2x + 1$

$\displaystyle \Longleftrightarrow \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x+1} = x + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$\displaystyle \therefore \int \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+x+1}dx = \int x\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}x^2 + \log(x^2+x+1) + C\ (C：積分定数)$

$\boxed{8}$ 次の$\boxed{}$に適切な値を書け．

(1) $\displaystyle \frac{1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{\boxed{a}}{x-1} + \frac{\boxed{b}}{x+2} + \frac{\boxed{c}}{x-3}$

ヘビサイドの方法より $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{15}$, $c = \frac{1}{10}$

(2) $\displaystyle \frac{x^3-x+1}{(x+1)^4} = \frac{\boxed{a}}{x+1} + \frac{\boxed{b}}{(x+1)^2} + \frac{\boxed{c}}{(x+1)^3} + \frac{\boxed{d}}{(x+1)^4}$

ヘビサイドの方法より

（x が残った場合は $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ を代入）

$\displaystyle a = \frac{1}{3!}(x^3-x+1)^{(3)} = \frac{1}{6}(3x^2-1)'' = \frac{1}{6}(6x)' = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$

$\displaystyle b = \frac{1}{2!}\cdot 6x = -3,\ c = \frac{1}{1!}(3x^2-1) = 3-1 = 2$

$\displaystyle d = \frac{1}{0!}(x^3-x+1) = -1+1+1 = 1$

$\therefore\ a = 1,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 1$

(3) $\displaystyle \frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{\boxed{a}}{x-2} + \frac{\boxed{b}}{x-3} + \frac{\boxed{c}}{(x-3)^2}$

ヘビサイドの方法より

$\displaystyle a = \left.\frac{x^2+4}{(x-3)^2}\right|_{x-2=0\Leftrightarrow x=2\ を代入} = \frac{2^2+4}{(-1)^2} = 8$

$\displaystyle b = \frac{1}{1!}\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)' = \frac{2x(x-2)-(x^2+4)}{(x-2)^2}$

$\displaystyle = \frac{2\cdot 3\cdot(3-2)-(9+4)}{(3-2)^2} = -7$

$\displaystyle c = \frac{1}{0!}\left(\frac{x^4+4}{x-2}\right)^{(0)} = \frac{9+4}{3-2} = 13$

$\therefore\ a = 8,\ b = -7,\ c = 13$

$\boxed{9}$ 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+2x+2}{x(x+2)(x^2+1)}dx$

$\displaystyle\int$ の中身は $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ と分解できる.

$a(x+2)(x^2+1)+bx(x^2+1)+(cx+d)x(x+2)=2x^3+7x^2+2x+2$

となる a, b, c, d を求める.

a, b, c, d に関する項をそれぞれ計算すると

$a(x+2)(x^2+1)=ax^3+2ax^2+ax+2a$

$bx(x^2+1)=bx^3+bx$

$(cx+d)x(x+2)=cx^3+(2c+d)x^2+2dx$

上記の結果から $2a=2$ $\therefore$ $a=1$ がわかる

その他には $a+b+c=2 \Leftrightarrow b+c=1\cdots[1]$

$2a+2c+d=7 \Leftrightarrow 2c+d=5 \Leftrightarrow d=-2c+5\cdots[2]$

$a+b+2d=2 \Leftrightarrow b+2d=1\cdots[3]$

[3] の式に [2] を代入すると $b-4c=-9\cdots[4]$

[4] と [1] の式を連立して解くと $c=2$ $b=-1$, [2] より $d=1$

$\therefore$ $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=1$

$$\therefore(\text{与式})=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\log|x|-\log|x+2|+\log(x^2+1)+\tan^{-1}x+C$$

$$=\log\left|\frac{x(x^2+1)}{x+2}\right|+\tan^{-1}x+C\ (C:\text{積分定数})$$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}dx\ \ (a>0)$

$x=a\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$, $\tan t=\dfrac{x}{a}$

$$=\int\frac{a}{\sqrt{(a^2+a^2\tan^2 t)^3}\,\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{a}{\sqrt{(a^2(1+\tan^2 t))^3}\,\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{a}{\sqrt{a^6(1+\tan^2 t)^3}\,\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{a}{a^3\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}\,\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}\,\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}\,\cos^2 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{((\cos t)^{-2})^{\frac{3}{2}}(\cos t)^2}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(\cos t)^{-1}}dt=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$\tan t=\dfrac{x}{a}$ なので三平方 (ピタゴラス) の定理より $\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\therefore\int\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C\ (C:\text{積分定数})$$

3.7 区分求積法, 定積分の定義

$\boxed{10}$ 区分求積法を用いて次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3dx$

$x_i=\xi_i$ とすると

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{4}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 3x^2dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{2n^2}(2n^2+3n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)=1$$

$\boxed{11}$ 定積分の定義に従って, $\displaystyle\int_{11}^{18}3\,dx$ を求めよ.

$$\left(\begin{array}{l}\text{分割 }\Delta: 11=x_0<x_1<\cdots<x_n=18\text{ とし}\\ \text{小区間 }[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3]\ \ldots,[x_{n-1},x_n]\\ \text{の間にそれぞれ任意に }\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ldots,\xi_n\text{ をとり}\\ |\Delta|:=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})\text{ とする.}\end{array}\right)$$

$$\int_{11}^{18}3\,dx=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

$f(x)=3$ より $f(\xi_i)=3$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}3(x_i-x_{i-1})$$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}3\{(x_1\boxed{-x_0})+(x_2-x_1)+\cdots+(\boxed{x_n}-x_{n-1})\}$$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}3(\underbrace{x_n}_{=18}-\underbrace{x_0}_{=11})=3(18-11)=21$$

3.8　記述問題

$\boxed{12}$　関数 $f(x)$ は区間 $[1,4]$ において積分可能とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 分割 Δ_1 を $\Delta_1 : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$ としたとき

定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ の定義を答えよ.

$|\Delta_1| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

$$\int_1^2 f(x)dx = \lim_{|\Delta_1| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

(2) 定積分の定義に従って, 以下の等式が成立することを証明せよ.

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$\Delta_1 : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$
$\Delta_2 : 2 = x_n < x_{n+1} < \cdots < x_{2n} = 3$
$\Delta_3 : 3 = x_{2n} < x_{2n+1} < \cdots < x_{3n} = 4$
$\Delta : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots < x_{2n} < \cdots < x_{3n} = 4$ とする.
また,

$|\Delta_1| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

$|\Delta_2| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_{n+i} - x_{n+i-1})$

$|\Delta_3| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_{2n+i} - x_{2n+i-1})$

$|\Delta| := \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|, |\Delta_3|\}$ とする.

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \lim_{|\Delta_1| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$\lim_{|\Delta_2| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{n+i})(x_{n+i} - x_{n+i-1}) +$$

$$\lim_{|\Delta_3| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{2n+i})(x_{2n+i} - x_{2n+i-1})$$

(ここで $(x_i - x_{i-1}) = \Delta_i$
$(x_{n+i} - x_{n+i-1}) = \Delta_{n+i}$
$(x_{2n+i} - x_{2n+i-1}) = \Delta_{2n+i}$ とする.
(解答スペースの関係で Δ_* とおいたが本来はおかなくてもよい.))

ここで $\sum$ の線形性より

$$= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \{f(\xi_i)\Delta_i + f(\xi_{n+i})\Delta_{n+i} + f(\xi_{2n+i})\Delta_{2n+i}\}$$

$$= \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{3n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_1^4 f(x)dx \quad \square$$

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)$ が C^1 級または連続微分可能であるとはどのようなことか.

関数 $f(x)$ が微分可能で $f(x)$ を微分した関数 $f'(x)$ が連続である.

4　微積 IV（瓜屋先生）

4.1　定積分（置換積分・部分積分も含む.）

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^3 e^x dx$

$$= \Big[\ e^x\ \Big]_1^3 = e^3 - e = e(e+1)(e-1)$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\cos\pi - \left(-\frac{1}{3}\cos 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

$x = 2\sin t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換すると

$\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t \quad \therefore\ dx = 2\cos t\, dt$

また積分範囲は

x	0	$\cdots$	1
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\, 2\cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1 - \sin^2 t)}\, 2\cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos t \cdot 2\cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\, dt$$

ここで $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ より

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)dt = 2\left\{\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \Big[\ t\ \Big]_0^{\frac{\pi}{6}}\right\}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right) - 2\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

(4) $\displaystyle\int_1^e \log x\, dx$

$$= \Big[\ x\log x\ \Big]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \Big[\ x\log x\ \Big]_1^e - \Big[\ x\ \Big]_1^e = (e - 0) - (e - 1) = 1$$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

分母・分子を e^x で割ると

$$= \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$= \Big[\ -\log(1 + e^{-x})\ \Big]_{-1}^1 = -\log(1 + e^{-1}) - (-\log(1 + e))$$

$$= \log(1 + e) - \log(1 + e^{-1}) = \log\left(\frac{1 + e}{1 + e^{-1}}\right)$$

分母・分子に e をかけると

$$= \log\left(\frac{1 + e}{1 + e^{-1}}\right) = \log\left(\frac{e + e^2}{e + 1}\right) = \log\left(\frac{e(1 + e)}{1 + e}\right) = \log e = 1$$

4.2 広義積分

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ.（広義積分も含む. 必ずしも値が求まるとは限らない.）

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)'}{1+(\sin x)^2}dx$

$\displaystyle= \Big[\ \tan^{-1}(\sin x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ \sin^{-1}x\ \Big]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\sin^{-1}(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x\,dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\Big[\ x\log x\ \Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1\,dx\right\}$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ x(\log x - 1)\ \Big]_\varepsilon^1$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}(-1-\varepsilon(\log\varepsilon - 1))$

$\displaystyle= -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon$ ロピタルの定理より

$= -1$

(4) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3dx$

$x^2 = t$ と置換すると $\displaystyle\frac{dt}{dx} = 2x \quad \therefore\ dx = \frac{1}{2x}dt$

また積分範囲は

x	0	$\cdots$	1
t	0	$\cdots$	1

$\displaystyle= \int_0^1 e^t\cdot tx\cdot\frac{1}{2x}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 te^tdt$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left\{\Big[\ te^t\ \Big]_0^1 - \int_0^1 e^tdt\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\Big[\ te^t - e^t\ \Big]_0^1 = \frac{1}{2}(e-e+1) = \frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$

$\displaystyle\frac{1}{x}$ は $x=0$ で定義されないので広義積分となる.

$\displaystyle= \int_{-1}^0 \frac{1}{x}dx + \int_0^1 \frac{1}{x}dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{x}dx$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ \log|x|\ \Big]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to+0}\Big[\ \log|x|\ \Big]_{\varepsilon'}^1$

$\displaystyle= \lim_{\varepsilon\to+0}\log\varepsilon + \left(-\lim_{\varepsilon'\to+0}\log\varepsilon'\right) \quad (=\infty-\infty) \leftarrow$ 不定形

この極限は存在しない. よって発散する.

(6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

$\displaystyle= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

$\displaystyle= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}dx$

$\displaystyle= \lim_{\alpha\to-\infty}\Big[\ \tan^{-1}x\ \Big]_\alpha^0 + \lim_{\beta\to\infty}\Big[\ \tan^{-1}x\ \Big]_0^\beta$

$\displaystyle= \lim_{\beta\to\infty}\tan^{-1}\beta - \lim_{\alpha\to-\infty}\tan^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

(7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}dx$

$\displaystyle= \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-3}(1-x)^{-\frac{3}{2}}dx$

$\displaystyle= \lim_{t\to-\infty}\Big[\ (-1)(-2)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\ \Big]_t^{-3}$

$\displaystyle= 2\lim_{t\to-\infty}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right\} = 1$

(8) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$t = \sqrt{x^2-1}$ とおくと $x^2 = t^2+1$

$\displaystyle\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x \quad \therefore\ dx = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dt$

また積分範囲は

x	1	$\cdots$	∞
t	0	$\cdots$	∞

$\displaystyle= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{1}{x\cdot t}\cdot(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}dt$

$\displaystyle= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{t}{x^2\cdot t}dt$

$\displaystyle= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{1}{t^2+1}dt = \lim_{\alpha\to\infty}\tan^{-1}\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{3}$ $\alpha < 0$ とする．次の広義積分の収束・発散を調べよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}dx$

i) $\alpha = -1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ \log x\ \Big]_{\varepsilon}^1$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(\log 1 - \log\varepsilon) = -(-\infty) = \infty$$

ii) $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_0^1 x^{\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^1 x^{\alpha}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_{\varepsilon}^1$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha+1} - \left(\frac{1}{\alpha+1}\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{\alpha+1}\right)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} & (-1 < \alpha < 0) \\ \infty & (\alpha < -1) \end{cases}$$

$\therefore\ -1 < \alpha < 0$ で $\dfrac{1}{\alpha+1}$ に収束，$\alpha \leq -1$ で発散する．

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{\alpha}dx$

i) $\alpha = -1$ のとき

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\Big[\ \log x\ \Big]_1^t = \lim_{t\to\infty}\log t = \infty$$

ii) $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{\alpha}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha+1}\lim_{t\to\infty}t^{\alpha+1}\right) - \frac{1}{\alpha+1}$$
$$= \begin{cases} \infty & (-1 < \alpha < 0) \\ -\dfrac{1}{\alpha+1} & (\alpha < -1) \end{cases}$$

$\therefore\ -1 \leq \alpha < 0$ で発散，$\alpha < -1$ で $-\dfrac{1}{\alpha+1}$ に収束．

(3) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{\alpha}dx$

i) $\alpha = -1$ のとき

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ -\log(1-x)\ \Big]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon) = -(-\infty) = \infty$$

ii) $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_0^1 (1-x)^{\alpha}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{\alpha}dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\right]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} - \left(\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-\alpha}\right)$$
$$= \begin{cases} -\infty & (-1 < \alpha < 0) \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & (\alpha < -1) \end{cases}$$

$\therefore\ -1 \leq \alpha < 0$ のとき発散，$\alpha < -1$ のとき $\dfrac{1}{1-\alpha}$ に収束．

(4) $\displaystyle\int_1^{\infty}(1+x)^{\alpha}dx$

i) $\alpha = -1$ のとき

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{1+x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\Big[\ \log(1+x)\ \Big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}(\log(1+t) - \log 2) = \infty$$

ii) $\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_0^{\infty}(1+x)^{\alpha}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (1+x)^{\alpha}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha+1}(1+t)^{\alpha+1} - \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha+1}\lim_{t\to\infty}(1+t)^{\alpha+1}\right) - \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
$$= \begin{cases} \infty & (-1 < \alpha < 0) \\ -\dfrac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha < -1) \end{cases}$$

$\therefore\ -1 \leq \alpha < 0$ のとき発散，$\alpha < -1$ のとき $-\dfrac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ に収束．

4.4　増減凹凸表とグラフの概形から面積を求める問題

$\boxed{4}$ $y = x^2 \log x \ \ (x > 0) \cdots (\natural)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $(\natural)$ の増減凹凸表とグラフの概形をかけ．

$f(x) = x^2 \log x$ とする．

$f'(x) = 2x \log x + x$

$f'(x) = 0$ となるのは

$x(2\log x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\log x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log x = -\dfrac{1}{2}$

$x = e^{-\frac{1}{2}}$ である．

$f''(x) = 2\log x + 3$, $f''(x) = 0$ となるのは $x = e^{-\frac{3}{2}}$

よって増減凹凸表は

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$
y'		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y		$\searrow$	$-\frac{3}{2e^3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$

また極限は $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^2 \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x^{-2}} \overset{*}{=} \lim_{x\to+0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = 0$

(*はロピタルの定理)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \log x = \infty$

よってグラフの概形はこちら (**ただし $(0, 0)$ は含まない.)

(2) $(\natural)$ と x 軸で囲まれている図形の面積を求めよ．

原点で関数が定義されていないので

関数は有界だが広義積分になる．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \log x \, dx &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 x^2 \log x \, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 \log x \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{1}{3}\varepsilon^3 \log \varepsilon \right) - \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{9}(1 - \varepsilon^3) \right) \\
&= {}^{*}0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

(*はロピタルの定理) したがって求める面積は $\dfrac{1}{9}$

$\boxed{5}$ $y = (\log x)^2 \ \ (x > 0) \cdots (\flat)$ について次の問いに答えよ．

(1) 原点 $(0, 0)$ から $(\flat)$ にひき得る接線の方程式を求めよ．

(必ずしも接線が 1 本だけとは限らない.)

$f(x) = (\log x)^2$ とすると $f'(x) = \dfrac{2\log x}{x}$

原点 $(0, 0)$ を通る接線の接点を仮に $(a, (\log a)^2)$ とおくと

接線の方程式は $y - (\log a)^2 = \dfrac{2\log a}{a}(x - a) \cdots (\natural)$

これが原点 $(0, 0)$ を通るので $x = 0$, $y = 0$ を $(\natural)$ に代入すると

$-(\log a)^2 = -2\log a \Leftrightarrow (\log a)^2 - 2\log a = 0$

$\Leftrightarrow \log a(\log a - 2) = 0$ より $\log a = 0$, $\log a = 2$ 　$\therefore\ a = 1$, e^2

$a = 1$, e^2 をそれぞれ $(\natural)$ に代入すると $y = 0$, $y = \dfrac{4}{e^2}x$

(2) $(\flat)$ の増減凹凸表とグラフの概形をかけ．

また (1) で求めた接線もかけ．

(1) より $f'(x) = 0$ なるのは

$\dfrac{2\log x}{x} = 0 \Leftrightarrow \log x = 0$ すなわち $x = 1$

$f''(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \cdot x - 2\log x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}(1 - \log x)$

$f''(x) = 0$ となるのは $x = e$

よって増減凹凸表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} (\log x)^2 = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\log x)^2 = \infty$

グラフの概形はこちら

(3) $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^2 dx$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\log x)^2 dx &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 (\log x)^2 dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ \left[x(\log x)^2 \right]_\varepsilon^1 - 2\int_\varepsilon^1 \log x \, dx \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \left\{ (-\varepsilon(\log \varepsilon)^2) - 2\left\{ \left[x \log x \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 1 dx \right\} \right\} \\
&= -\left(\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon(\log \varepsilon)^2 \right) + 2\left(\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log \varepsilon \right) + 2 - \left(2 \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

(*不定形のものはすべてロピタルの定理を使うと 0 になる.)

4.5 比較定理を使う問題

$\boxed{6}$ n を 2 より大きい自然数とする.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

が収束することを示せ.

$\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ は $[0,\infty)$ で連続だが有界でないので

$f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$, $\alpha=2>1$ とすると

$\lim_{x\to\infty} x^2|f(x)|$

ここで $(1+x^2)>0$ より $(1+x^2)^n$ すなわち $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}>0$ なので

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}\overset{*}{=}0$ （$*$はロピタルの定理 2 回)

上より $x^2|f(x)|$ が収束したので $x^2|f(x)|$ は有界. よって比較定理より

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ は収束. □

$\boxed{7}$ n を自然数とする.

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$$

が収束することを示せ.

$f(x)=x^n e^{-x^2}$ とすると $f(x)$ は $[0,\infty)$ で連続だが有界でないので

全ての $\alpha>1$ に対して

$\lim_{x\to\infty} x^\alpha|f(x)|=x^{\alpha+n}e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+n}}{e^{x^2}}\overset{*}{=}0$

(*は $\alpha+n\leq m\in\mathbb{N}$ 回ロピタルの定理を適用する.)

よって比較定理より $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2}dx$ は収束. □

4.6 ちょっと難しい定積分

$\boxed{8}$ $\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$ を求めよ. ただし $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ を使ってよい.

$\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^\infty\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{x^2}dx$

$t=2x$ とすると $x=\dfrac{1}{2}t$, $\dfrac{dt}{dx}=2$ $\therefore\ dx=\dfrac{1}{2}dt$

また積分範囲は $\begin{array}{c||ccc} x & 0 & \cdots & \infty \\ \hline t & 0 & \cdots & \infty \end{array}$

$\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\int_0^\infty\frac{1}{2}(1-\cos t)\frac{4}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_0^\infty\frac{1-\cos t}{t^2}dt$

$\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-\cos t}{t^2}dt=\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^\alpha\frac{1-\cos t}{t^2}dt$

$\displaystyle=\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^\alpha\left(\frac{1}{t^2}-\frac{\cos t}{t^2}\right)dt$（右項は部分積分）

$\displaystyle=\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left\{\left[-\frac{1}{t}\right]_\varepsilon^\alpha-\left\{\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_\varepsilon^\alpha-\int_\varepsilon^\alpha\frac{\sin t}{t}dt\right\}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left[\frac{\cos t-1}{t}\right]_\varepsilon^\alpha+\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^\alpha\frac{\sin t}{t}dt$

$\displaystyle=\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{\cos\alpha-1}{\alpha}-\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \varepsilon\to+0}}\frac{\cos\varepsilon-1}{\varepsilon}+\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt$

ここで

1 項目は分子は振動するが分母か限りなく大きくなるので 0

2 項目は $\dfrac{0}{0}$ 形なのでロピタルの定理を用いると

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\cos\varepsilon-1}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-\sin\varepsilon}{1}=0$

3 項目は問題文より $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ なので $\dfrac{\pi}{2}$

したがって

$=0+0+\dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore\ \int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$$

4.7 そこそこ難しい定積分

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_0^{\infty}|\sin x|e^{-x}dx$ を求めよ.

$$\int_0^{\infty}|\sin x|e^{-x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\sin x)\cdot e^{-x}dx$$

$I=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\sin x)e^{-x}dx=\int_{n}^{(n+1)\pi}(-\cos x)'e^{-x}dx$ を計算すると

$$=\Big[(-\cos x)e^{-x}\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-\cos x)(-e^{-x})dx$$

$$=-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi+e^{-n\pi}\cos n\pi$$

$$-\left\{\underbrace{\Big[(\sin x)e^{-x}\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}}_{=0}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\sin x)(-e^{-x})dx\right\}$$

$$=e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi-I$$

$$\therefore\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\sin x)e^{-x}dx=\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi\}$$

$$\int_0^{\infty}|\sin x|e^{-x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\sin x)e^{-x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}\{e^{-n\pi}\cos n\pi-e^{-(n+1)\pi}\cos(n+1)\pi\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(1+e^{-\pi})-(-e^{-\pi}-e^{-2\pi})+(e^{-2\pi}+e^{-3\pi})-\cdots\}$$

$$=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})-\frac{1}{2}(-e^{-\pi})(1+e^{-\pi})+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})+\frac{1}{2}(e^{-\pi})(1+e^{-\pi})+\cdots$$

これは初項 $\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$, 公比 $e^{-\pi}$ の無限等比級数である.

無限等比級数の和の公式より

$$=\frac{\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})}{1-e^{-\pi}}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

$$\therefore\int_0^{\infty}|\sin x|e^{-x}dx=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

4.8 特殊?な三角関数の定積分

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ とおくと

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt \qquad \begin{array}{c||ccc} x & 0 & \cdots & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$=2\displaystyle\int_0^1\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}dt$ 中身を部分分数分解すると

$$=2\int_0^1\left\{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)}\right\}dt$$

$$=2\left\{\Big[\tan^{-1}t\Big]_0^1-\Big[-(1+t)^{-1}\Big]_0^1\right\}$$

$$=2\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{1}{2}-(-1)\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$\left({}^{*}\dfrac{\sin x}{1+\sin x}=1-\dfrac{1}{1+\sin x}\right.$であることに気づくと計算はもっと楽になる.$\left.\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=I$ とする.

ここで $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=J$ を与える.

$$J-I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\Big[\log|\sin x+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0\quad\therefore I=J$$

$$2I=I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}\quad\therefore I=\frac{\pi}{4}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{4}$

4.9　曲線で囲まれた面積を求める問題

$\boxed{11}$ 次の図形の面積を求めよ．

(1) $y=-x^2+4x-2$ と $y=1$ により囲まれる図形の面積 S を求めよ．

$y=-x^2+4x-2$ と $y=1$ の交点は
$-x^2+4x-2=1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0$
$\therefore\ x=1,3$

よって求める面積 S は

$$S=\int_1^3(-x^2+4x-2-1)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

(2) 2 曲線 $y=x^3$ と $y=x$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

交点は $x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)=0\quad \therefore\ x=-1,0,1$
また区間 $[-1,0]$ では $x^3\geq x$, 区間 $[0,1]$ では $x^3\leq x$ なので

求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^0(x^3-x)dx+\int_0^1(x-x^3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

(3) 3 曲線 $y=\sin x$, $y=x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる図形の面積 S.

交点は $x=0$, また区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ で $x-\sin x\geq 0$

（区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ で $x-\sin x\geq 0$ を示す．
$f(x)=x-\sin x$ とおくと $f'(x)=1-\cos x$
$|\cos x|\leq 1$ なので $f'(x)\geq 0$ また $f'(x)\geq 0$ なので $f(x)\geq 0$　□）

よって求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-1$$

4.10　体積を求める問題

$\boxed{12}$ 次の図形の体積を求めよ．

(1) $y=\log x$ の $1\leq x\leq e$ の部分を x 軸を中心として回転させた立体の体積 V を求めよ．

$$V=\pi\int_1^e(\log x)^2dx$$
$$=\pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$
$$=\pi\left\{e-2\left(\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e 1dx\right)\right\}=\pi(e-2)$$

(2) 底面の半径が r , 高さが h の円錐の体積 V を求めよ．

半径が r , 高さが h なので

原点 $(0,0)$ と点 (h,r) を通る直線を考える．

この直線は $y=\dfrac{r}{h}x$ である．

この直線の $0\leq x\leq h$ の部分を x 軸を中心に回転させると

円錐の体積 V が求まる．したがって

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx$$
$$=\frac{r^2}{h^2}\pi\int_0^h x^2dx=\frac{r^2}{h^2}\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

4.11　面積及び体積を求める問題

$\boxed{13}$ $xy+x+y=1$ と x 軸,y 軸が囲む図形を D とする. 以下の問いに答えよ.

(1) D の面積 S を求めよ.

$xy+x+y=1 \Leftrightarrow xy+y=-x+1 \Leftrightarrow y(x+1)=-x+1 \Leftrightarrow$

$$y=\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-(x+1)+2}{x+1}=-1+\frac{2}{x+1}$$

$xy+x+y=1$ と x 軸 $(y=0)$, y 軸 $(x=0)$ との交点は

$x=0\,,\,y=0$ をそれぞれ代入すると $x=1,\,y=1$ なので

y を基準にすると $0 \leq x \leq 1$ が被積分区間となる.

$$S=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[-x+2\log|x+1|\Big]_0^1=-1+2\log 2$$

(2) D を x 軸を中心として回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

$$V=\pi\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(1-\frac{4}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\pi\left[x-4\log|x+1|-\frac{4}{x+1}\right]_0^1$$
$$=\pi\left\{(1-4\log 2-2)+4\right\}=\pi(3-4\log 2)$$

(3) D を y 軸を中心として回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

$xy+x+y=1 \Leftrightarrow xy+x=-y+1 \Leftrightarrow x(y+1)=-y+1 \Leftrightarrow$

$$x=\frac{-y+1}{y+1}=\frac{-(y+1)+2}{y+1}=-1+\frac{2}{y+1}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(-1+\frac{2}{y+1}\right)^2dy=\pi(3-4\log 2)$$

$\boxed{14}$ $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ の $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ の部分と $x=\dfrac{\pi}{4}\,,\,y=0$ が囲む図形を D とする.

(1) D の面積 S を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ において $\sin x \geq 0$ より $y \geq 0$

また $y'=\dfrac{\cos x\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}=\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ において $\cos x \geq 0$ より $\cos^3 x \geq 0$ すなわち $y' \geq 0$

よって y は $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$ で単調増加.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x)^{-2}\cdot(\sin x)dx$$
$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x)^{-2}\cdot(\cos x)'dx$$
$$=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$$

(2) D を x 軸を中心として回転させてできる立体の体積を求めよ.

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\cdot(\tan x)'dx=\pi\left[\frac{1}{3}\tan^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{3}$$

4.12 計算がめんどくさい問題

$\boxed{15}$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で,3 曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ により囲まれる図形の面積 S を求めよ.

まず,$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$\sin x$ と $\cos x$, $\sin x$ と $\tan x$, $\cos x$ と $\tan x$ の交点を調べる.

$\sin x = \cos x \quad \therefore\ x = \frac{\pi}{4}$

$\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \sin x - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\cos x - 1) = 0$

$\therefore\ \sin x = 0, \cos x = 1$ すなわち $x = 0$

$\cos x = \tan x \Leftrightarrow \cos x - \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\sin x$ の 2 次式とみれば $\sin x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

しかし $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x \geq 0$ なので $\sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ x = \sin^{-1}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$ とする.

また $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で

$\tan x \geq \sin x$, $\cos x \geq \sin x$ ($\because$ 微分するとわかる.) なので

$$S = \int_0^{\alpha} (\tan x - \sin x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx$$

$$= \Big[-\log|\cos x| + \cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (-\log(\cos\alpha) + \cos\alpha - 1) + (\sqrt{2} - \sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$= -\log(\cos\alpha) - 1 + \sqrt{2} - \sin\alpha$$

ここで $\alpha = \sin^{-1}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ なので $\sin\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\cos\alpha = \cos\left(\sin^{-1}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

三平方の定理より

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}-2}{4}} = \left(\frac{2\sqrt{5}-2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log(\cos\alpha) = \log\left(\frac{2\sqrt{5}-2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\sqrt{5}-2}{4}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$\therefore\ S = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\boxed{16}$ $a > 0$ とする.

$$S(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\cos x - \sin x|dx$$

を a を用いて表せ.

さらに $a > 0$ が変化するとき,$S(a)$ の最小値を求めよ.

まず絶対値がついているので $y = a\cos x$ と $y = \sin x$ の交点を調べ,どの点で符号が変化するかを調べる.

$a\cos x = \sin x \Leftrightarrow a^2\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow a^2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x(a^2+1) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{a^2+1}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad \therefore\ x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

$t = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)$ とおく.

$$S(a) = \int_0^{t} (a\cos x - \sin x)dx + \int_t^{\frac{\pi}{2}} -(a\cos x - \sin x)dx$$

$$= \Big[a\sin x + \cos x\Big]_0^{t} - \Big[a\sin x + \cos x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (a\sin t + \cos t - 1) - (a - a\sin t - \cos t)$$

$$= 2a\sin t + 2\cos t - 1 - a$$

($a\cos x$ と $\sin x$ の交点が $x = t$ より $a\cos t = \sin t$ なので)

$$= 2a \cdot a\cos t + 2\cos t - 1 - a$$

$$= 2a^2\cos t + 2\cos t - 1 - a$$

$$= 2\cos t(a^2+1) - 1 - a = 2(a^2+1)\cos t - 1 - a$$

$$= 2\cdot\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} - 1 - a = 2\sqrt{a^2+1} - 1 - a \quad \square_1$$

また $a > 0$ の値が変化するときの最小値を考えると

$S'(a) = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}} - 1$

$S'(a) = 0$ とすると

$\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = -1 \Leftrightarrow 2a = -\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 4a^2 = a^2+1$

$\Leftrightarrow 3a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{3} \quad \therefore\ a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$a > 0$ より $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

増減表を書くと

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		$\searrow$	$\sqrt{3}-1$	$\nearrow$

よって $S(a)$ の最小値は $\sqrt{3}-1 \quad \square_2$

4.13　媒介変数表示

$\boxed{17}$ 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = t^2 + t - 2 \end{cases}$$

で表される曲線と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

まずグラフの概形を考える.（x, y がどう変化するか考える.）

$\dfrac{dx}{dt} = 4t\,,\ \dfrac{dy}{dt} = 2t + 1$

ここで $y = 0$ となる t が求まれば, x 軸との交点がわかる.
$y = t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-1) = 0 \quad t = -2, 1$

また $\dfrac{dx}{dt} = 0, \dfrac{dy}{dt} = 0$ となる t も求めると

それぞれ $t = 0, t = -\dfrac{1}{2}$

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
x	$\searrow$	9	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3
y	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0

よってグラフの概形はこちらのようになる.

$$S = \int_{-2}^{0} (t^2 + t - 2)4t\,dt + \int_{0}^{1} (t^2 + t - 2)4t\,dt$$
$$= \int_{-2}^{1} (t^2 + t - 2)4t\,dt = 4\left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 2t^2\right]_{-2}^{1} = 9$$

$\boxed{18}$ 媒介変数表示された曲線（サイクロイド）

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) x 軸とサイクロイドで囲まれる図形 K の面積 S を求めよ.

$$S = \int_0^{2\pi r} y\,dx$$

$\dfrac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \quad \therefore\ dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$

x	0	$\cdots$	$2\pi r$
θ	0	$\cdots$	2π

$$= \int_0^{\pi} r(1 - \cos\theta) \cdot r(1 - \cos\theta)d\theta$$
$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$
$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$
$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= r^2 \left[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi r^2$$

(2) K を x 軸を中心として回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

$$V = \pi \int_0^{2\pi r} y^2 dx \quad (1) \text{ より}$$
$$= \pi \int_0^{2\pi} (r(1 - \cos\theta))^2 \cdot r(1 - \cos\theta)d\theta$$
$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta$$
$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)d\theta$$
$$= \pi r^3 \left\{2\pi - 3\Big[\sin\theta\Big]_0^{2\pi} + 3\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos\theta(1 - \sin^2\theta)d\theta\right\}$$
$$= \pi r^3 \left\{2\pi + 3\pi - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta}_{\text{原始関数が}\sin\theta\text{より }0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}_{=0(\text{同じく})}\right\}$$
$$= \pi r^3(5\pi) = 5\pi^2 r^3$$

(3) サイクロイドの弧長 ℓ を求めよ.

$$\ell = \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta \quad \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r\sin\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2}} \cdot r(1 - \cos\theta)d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - 2\cos\theta + \underline{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}{(1 - \cos\theta)^2}} \cdot (1 - \cos\theta)d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)^2}} \cdot (1 - \cos\theta)d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{(1 - \cos\theta)}} \cdot (1 - \cos\theta)d\theta$$

ここで $|\cos\theta| \leq 1$ より $1 - \cos\theta \geq 0$ なので $\sqrt{\ }$ の中に入れると

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2(1 - \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)}}\,d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\,d\theta$$

さらにここで $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{2}$ より $1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$$= r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$= r\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$= 2r\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 2r(2 - (-2)) = 8r \quad \therefore\ \ell = 8r$$

4.14　記述問題

$\boxed{19}$ $-\pi < x < \pi$ とする.$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくとき

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

であることを示せ.

$\frac{dt}{dx} = \left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right) = \frac{t^2+1}{2}$

$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

加法定理より

$\tan x = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$

$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \cos x\cdot\tan x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$　□

$\boxed{20}$ $n > 2$ のとき

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ.

$0 < x < \frac{1}{2}$ において

$1 - x^2 < 1 - x^n < 1$ より $1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

全辺を $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ で積分すると

$\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\Big[x\Big]_0^{\frac{1}{2}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \Big[\sin^{-1}x\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

したがって $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^n}}dx < \frac{\pi}{6}$　□

$\boxed{21}$ $f(x)$ が $(a,b]$ で連続だが有界でないとする.$f(x)$ が $(a,b]$ で広義積分可能であることの定義を述べよ.

$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \left(= \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx\right)$ が存在すること.

$\boxed{22}$ $f(x)$ は $(-\infty,b]$ で連続であるとする.$f(x)$ が $(-\infty,b]$ で広義積分可能であることの定義を述べよ.

$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$ が存在すること.

$\boxed{23}$ $f(x)$: 区間 $[a,b]$ で連続　$g(t)$: 区間 $[\alpha,\beta]$ で微分可能

また $g(\alpha) = a, g(\beta) = b, g'(x) : [\alpha,\beta]$ で連続とする.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とすると微分積分学の基本定理より $F'(x) = f(x)$

$\frac{d}{dx}F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$

$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}\left(F(g(t))\right)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$

$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$　□

$\boxed{24}$ $f(x), g(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

積の微分法より

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

両辺を $[a,b]$ で積分すると

$\int_a^b \{f(x)g(x)\}'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

$\therefore \int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$　□