Metody numeryczne

Nikodem Kocjan

07.05.2024

Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Spis treści

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zastosowanie metody interpolacji kwadratowej Powella do znalezienia minium funkcji w danym przedziale.

2 Wstęp teorytyczny

2.1 Interpolacja kwadratowa Powella

Metoda interpolacji kwadratowej Powella jest jedną z technik optymalizacji numerycznej, która pozwala na efektywne znajdowanie ekstremów lokalnych funkcji. Jest szczególnie przydatna w przypadkach, gdzie potrzebne jest szybkie znalezienie minimum funkcji bez użycia pochodnych. Interpolacja kwadratowa wykorzystuje wielomian drugiego stopnia (parabolę), który jest wyznaczany tak, aby przechodził przez trzy wybrane punkty na wykresie funkcji celu. Te trzy punkty, reprezentujące wartości funkcji w danych miejscach, są kluczowe do skonstruowania krzywej, która przybliża lokalne zachowanie funkcji.

2.2 Zastosowanie metody w praktyce

W metodzie interpolacji Powella korzystamy z lokalnego przybliżenia funkcji wielomianem drugiego stopnia. Jeśli znamy położenie trzech punktów: (x_1, x_2, x_3) i wartości funkcji w tych punktach $(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$, to przy założeniu że ciąg wartości funkcji jest malejący możemy wyznaczyć przybliżone położenie minimum:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{F[x_1, x_2]}{2F[x_1, x_2, x_3]} \tag{1}$$

gdzie:

$$F[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

jest ilorazem różnicowym pierwszego rzędu, a

$$F[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3 - x_1} \tag{3}$$

jest ilorazem różnicowym drugiego rzędu. Wykorzystujemy tę zależność do znalezienia minimum/maksimum wartości funkcji.

2.3 Rozważane przypadki

Zadanie zostało rozwiązane dla trzech przypadków.

- $f_1(x) = \ln\left(x^5 + 3x^2 + x + 9\right)$
  - $x \in [-1.5, 1]$
  - $x_1 = -0.5$
  - $h = 0.01$
- $f_1(x) = \ln\left(x^5 + 3x^2 + x + 9\right)$
  - $x \in [-1.5, 1]$
  - $x_1 = -0.9$
  - $h = 0.01$
- $f_1(x) = x^6$
  - $x \in [-1.5, 1]$
  - $x_1 = -1.5$
  - $h = 0.01$

3 Deklaracja zmiennych oraz implementacja bibliotek

Opisane zagadnienie rozwiązano za pomocą programu Visual Studio Code w języku JavaScript. Wykorzystanie zewnętrznej biblioteki PlotlyJS umożliwiło sprawne i proste generowanie wykresów.

Zadeklarowane stałe, macierze oraz wektory użyte w programie to:

```
//Poczatek przedzialu
let x_start = -1.5;

//Koniec przedzialu
let x_end = 1.0;

//Krok
let h = 0.01;

//Punkty startowe
let x1 = -0.5;
let x2 = x1 + h;
let x3 = x2 + h;

//Tablica przechowujaca rezultaty
let xm_tab = [];
```

Fragment kodu 1: Deklaracja stalych

4 Opis działania

4.1 Krótki opis programu

Program składa się z głównej funkcji, oraz czterech funkcji pomocniczych.

- F1(x1, x2, f)
- F2(x1, x2, x3, f)
- f1(x)
- f2(x)

4.2 F1

. Funkcja odpowiada za obliczenie wartości x, zgodnie z wzorem (2)

```
    function F1(x1, x2, f){
        return ((f(x2) - f(x1) ) / (x2-x1))
    }
```

Fragment kodu 2: Funkcja F1

4.3 F2

Funkcja odpowiada za obliczenie wartości x, zgodnie z wzorem (3)

```
    function F2(x1,x2,x3,f){
        return ((F1(x2,x3,f) - F1(x1,x2,f)) / (x3-x1));
    }
```

Fragment kodu 3: Funkcja F2

4.4 f1

Funkcja zwraca wartość funkcji, rozpatrywanej dla przypadku pierwszego oraz drugiego

```
    function f1(x){
        return Math.log(Math.pow(x, 5) + 3 * (Math.pow(x, 2)) + x +
     9);
    }
```

Fragment kodu 4: Funkcja f1

4.5 f2

Funkcja zwraca wartość funkcji, rozpatrywanej dla przypadku trzeciego

```
    function f2(x){
        return  Math.pow(x, 6);
    }
```

Fragment kodu 5: Funkcja f2

4.6 Główna część funkcji

Funkcja oparta jest o jedną główną pętle, która iteruje dla każdego przybliżenia. Na początku obliczane są wartości szukanego x, zależnie od danego przybliżenia.

```
for(let i = 0; i < 10; i++){
    //Wyznaczenie wartosci aktualnego minimum
    xm_tab[i] = ((x1 + x2) / 2) - (F1(x1,x2,f1) / (2 * F2(x1,x2,x3,
    f1)));

    //Zapis wartosci wspolczynnikow do tablic
    wspa1_p1[i] = F1(x1,x2,f1);
    wspa2_p1[i] = F2(x1,x2,x3,f1);

    //Zmienna tymczasowa
    let tmp;

    //Odrzucenie najdalszego punktu
    if(Math.abs(xm_tab[i] - x1) > Math.abs(xm_tab[i] - x2)){
        if(Math.abs(xm_tab[i] - x1) > Math.abs(xm_tab[i] - x3)){
            x1 = xm_tab[i];
        }else {
            x3 = xm_tab[i];
        }
    }else {
        if(Math.abs(xm_tab[i] - x2) > Math.abs(xm_tab[i] - x3)){
            x2 = xm_tab[i];
        }else {
            x3 = xm_tab[i];
        }
    }
}
```

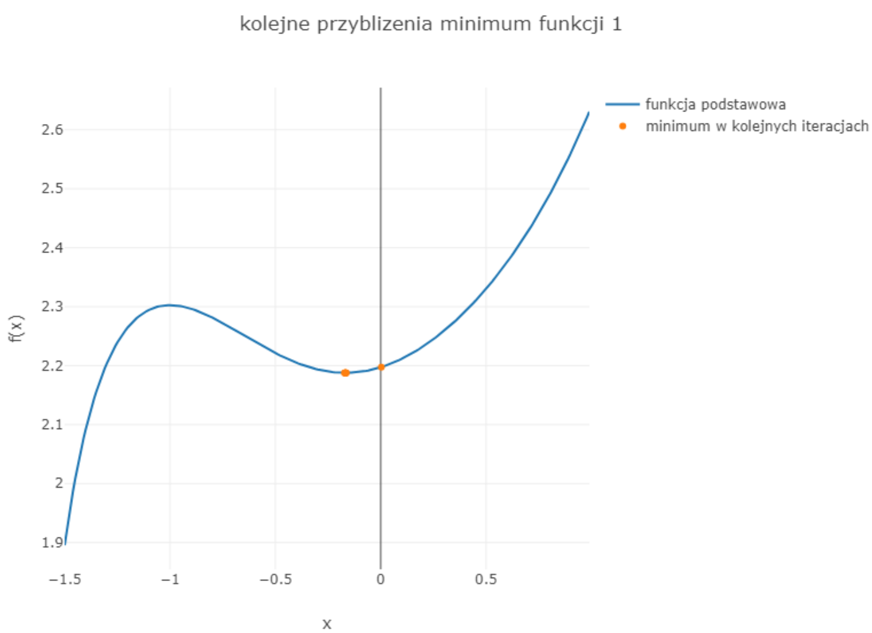
Fragment kodu 6: Główna pętla

Dalsza część kodu odpowiada za wyznaczenie wartości punktów, niezbędnych do wygenerowania wykresów, które zostaną przedstawiona podczas analizy wyników.

5 Analiza wyników

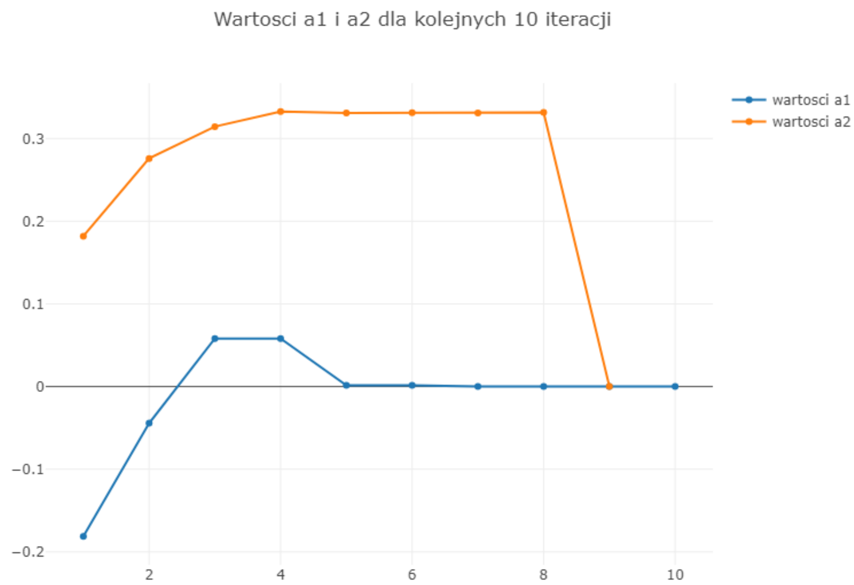
5.1 Przypadek pierwszy

Na wykres funkcji podstawowej nałożono punkty wyznaczone w kolejnych iteracjach działania programu. Rezultaty znajdują się poniżej.



Rysunek 1: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 10 iteracjach

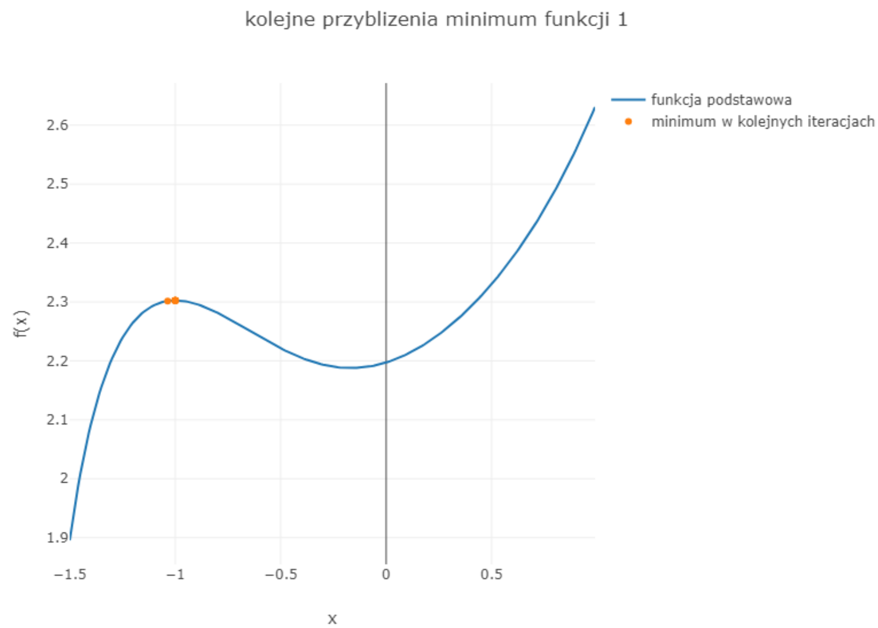
W celu dokładniejszej analizy, zwizualizowano również zależność ilorazów w kolejnych iteracjach.



Rysunek 2: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 100 iteracjach

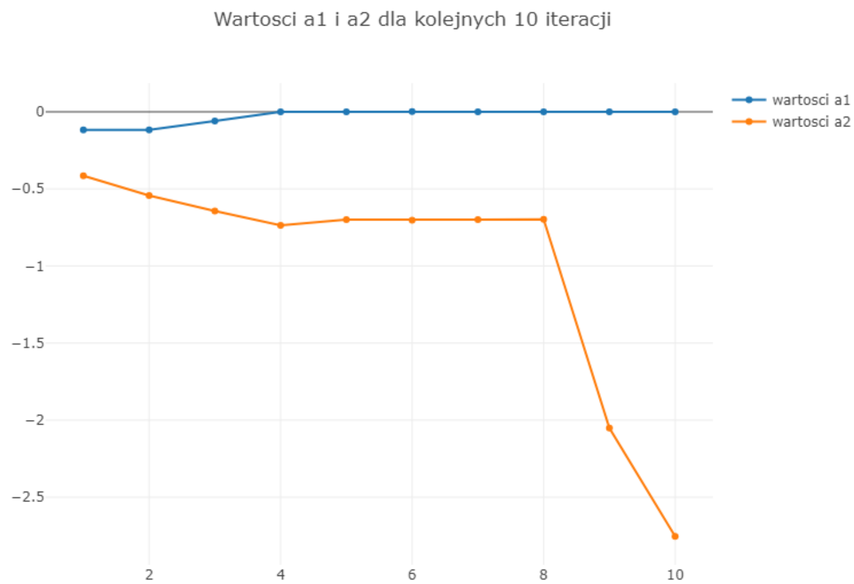
5.2 Przypadek drugi

Na wykres funkcji podstawowej nałożono punkty wyznaczone w kolejnych iteracjach działania programu. Rezultaty znajdują się poniżej.



Rysunek 3: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 10 iteracjach

W celu dokładniejszej analizy, zwizualizowano również zależność ilorazów w kolejnych iteracjach.

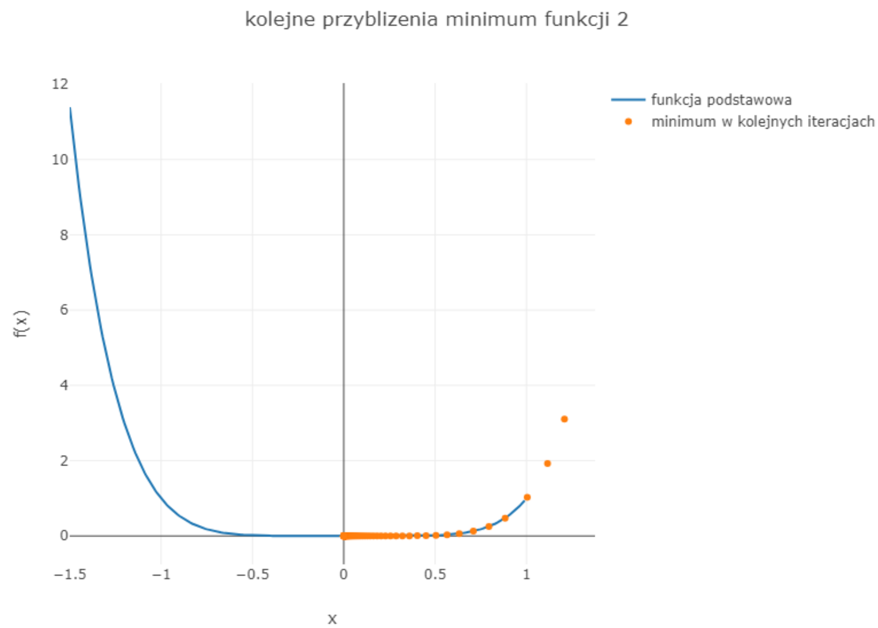


Rysunek 4: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 100 iteracjach

Analiza wartości ilorazów dla drugiego zestawu punktów startowych funkcji wskazuje, że punkty te prowadzą do znalezienia lokalnego maksimum zamiast minimum. Wartość ilorazu różnicowego drugiego rzędu (opisanego wzorem (3)), który jest kluczowy w tej metodzie, okazuje się być ujemna w miejscu ekstremum. Kiedy drugi iloraz różnicowy jest ujemny, sugeruje to, że wielomian interpolacyjny przyjmuje kształt "wypukły"w tym obszarze, co odpowiada lokalnemu maksimum funkcji.

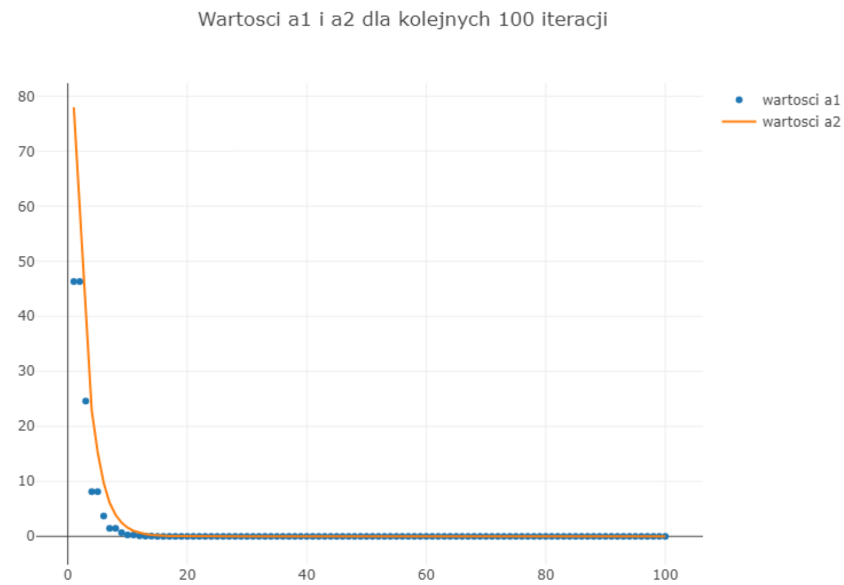
5.3 Przypadek trzeci

Na wykres funkcji podstawowej nałożono punkty wyznaczone w kolejnych iteracjach działania programu. Rezultaty znajdują się poniżej.



Rysunek 5: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 100 iteracjach

W celu dokładniejszej analizy, zwizualizowano również zależność ilorazów w kolejnych iteracjach.



Rysunek 6: Wykres przedstawia kolejne wyznaczone wartości minimalne nałożone na wykres funkcji podstawowej w kolejnych 100 iteracjach

Funkcja x^6 jest przykładem funkcji, która ma bardzo płaskie zbocza blisko minimum. Przy takiej charakterystyce, zmiany wartości funkcji w odpowiedzi na niewielkie zmiany x są minimalne, co sprawia, że trudno jest dokładnie zlokalizować minimum tylko na podstawie wartości funkcji. Metoda interpolacji kwadratowej, która polega na dopasowaniu paraboli do punktów funkcji, może mieć trudności z dokładnym przybliżaniem tej funkcji, gdy zmiany są tak subtelne, prowadząc do wolniejszej zbieżności. Najodpowiedniejszym warunkiem stopu w przypadku wolnozbieżnych funkcji, jest warunek bazujący na minimalnej zmianie wartości funkcji lub argumentu między iteracjami. Taki warunek stopu pozwala przerwać proces iteracji, gdy dalsze przybliżenia nie przynoszą już znaczącej poprawy wyniku, co jest kluczowe w unikaniu niepotrzebnie długich i mało efektywnych obliczeń.

6 Wnioski

Znaczenie drugiej pochodnej druga pochodna funkcji jest nadal istotnym kryterium przy ocenie, czy dany punkt jest minimum czy maksimum lokalnym. Dla funkcji $f(x) = x^6$, druga pochodna w punkcie x=0 jest równa zero, co typowo sugeruje punkt siodłowy. Jednak, jako że wszystkie wyższe pochodne (rozpoczynając od czwartej) w tym punkcie są dodatnie, funkcja przyjmuje minimum lokalne. W kontekście numerycznych metod optymalizacji, informacja ta może być użyta do potwierdzenia, czy znalezione rozwiązanie jest minimum, nawet jeśli metoda interpolacyjna może mieć trudności z dokładnym jego zlokalizowaniem.

Efektywność metody Wykorzystanie lokalnych przybliżeń funkcji wielomianem drugiego stopnia, okazała się efektywna w szybkim znajdowaniu ekstremów lokalnych dla zadanych funkcji. Jest to szczególnie przydatne w sytuacjach, gdzie pochodne funkcji nie są dostępne lub ich obliczenie jest zbyt kosztowne.

Znaczenie wyboru punktów startowych Analiza przypadku drugiego funkcji $f1(x)$ pokazała, że wybór punktów startowych ma kluczowe znaczenie. Znalezienie maksimum zamiast minimum w tym przypadku wynikało z ujemnej wartości ilorazu różnicowego drugiego rzędu, co wskazuje na konieczność dokładnego doboru punktów startowych w zależności od oczekiwanego wyniku.

Wrażliwość metody na warunki początkowe Metoda interpolacji kwadratowej jest wrażliwa na warunki początkowe, co zostało zilustrowane przez wolnozbieżność w przypadku funkcji $f2(x) = x^6$. Funkcja ta, mająca bardzo płaskie minimum, pokazała, że drobne różnice w wartościach początkowych mogą znacząco wpływać na tempo zbieżności metody.