Экономическая модель Солоу

Batalenkov Stanislav M3234, Nikita Kozhukharov M3236

December 2020 - January 2021

Содержание

1 Введение

Модель Солоу (модель Солоу — Свона, англ. Solow model) — неоклассическая модель экзогенного экономического роста. Модель обладает рядом существенных недостатков, таких как экзогенная норма сбережения и нереалистичная оценка ставки процента в развивающихся странах. Но, несмотря на эти недостатки, именно её считают отправной точкой для всех современных моделей экономического роста, которым она дала необходимую математическую базу для анализа темпов изменения капитала. Модель оказала влияние на всю макроэкономическую теорию. Разработана одновременно и независимо друг от друга Робертом Солоу и Тревором Своном в 1956 году.

1.1 Пара слов о производственных функциях

Производственная функция — экономико-математическая количественная зависимость между величинами выпуска (количества продукции) и факторами производства, такими как затраты ресурсов, уровень технологий.

Наиболее приближенными к современным являются неоклассические производственные функции. Определим их и будем дальше использовать.

Пусть Y — выпуск, а $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — факторы производства (обычно K — капитал и L — труд). Производственная функция $Y = F(x)$ является неоклассической, если выполнены следующие условия:

1. Положительная и убывающая предельная производительность факторов: $F^{'}_{x_i} > 0, F^{''}_{x_i} < 0$

2. Линейная однородность или постоянная отдача от масштаба:

$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$

   Отсюда следует, в частности, что производственную функцию можно представить как $\frac{Y}{x_i} = f(\frac{x}{x_i})$, в частности, для двух факторов — капитала и труда, обычно представляют следующим образом: $\frac{Y}{L} = f(\frac{K}{L})$, то есть как зависимость производительности труда от его капиталовооруженности. Кроме того, выполнена теорема Эйлера об однородных функциях: $\sum\limits_{i=1}^{n} F^{'}_{x_i} x_i = Y$

3. Условия Инады:

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{L\to 0} \frac{\partial Y}{\partial L} = +\infty, \lim_{K\to +\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = \lim_{L\to +\infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = 0$$

4. Дополнительным свойством является существенность производственного ресурса: ресурс является существенным, если для выпуска требуется положительный объём ресурса:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

1.2 Базовые предпосылки модели

В модели рассматривается закрытая экономика. Фирмы максимизируют свою прибыль и функционируют в условиях совершенной конкуренции (производителей бесконечно много и ни один из них не может влиять на цену товара). Производится только один продукт Y, используемый как для потребления C, так и для инвестиций I. Темпы технологического прогресса g, роста населения n и норма выбытия капитала δ — постоянны и задаются экзогенно. Норма сбережений s также задаётся экзогенно. Фискальная политика (налоги) в модели отсутствует. Время t непрерывно.

Закрытая экономика означает, что произведённый продукт тратится на инвестиции и потребление, экспорт/импорт отсутствуют, а сбережения равны инвестициям: $S = I = sY,\ Y = C + I$.

Производственная функция $Y(K, L, E)$ удовлетворяет следующим предпосылкам:

1. технологический прогресс увеличивает производительность труда: $Y_t = Y(K_t, L_t E_t),\ E_t = E_0 e^{gt},\ g = const$;

2. в производственной функции используются труд L и капитал K, она обладает постоянной отдачей от масштаба: $Y(aK, aLE) = aY(K, LE)$;

3. предельная производительность факторов положительная и убывающая: $\dfrac{\partial Y}{\partial K} > 0, \dfrac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \dfrac{\partial Y}{\partial L} > 0, \dfrac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$;

4. производственная функция удовлетворяет условиям Инады, а именно, если запас одного из факторов бесконечно мал, то его производительность бесконечно велика, если же запас одного из факторов бесконечно велик. то его производительность бесконечно мала: $\lim\limits_{K \to 0} \dfrac{\partial Y}{\partial K} = \lim\limits_{L \to 0} \dfrac{\partial Y}{\partial L} = +\infty,\ \lim\limits_{K \to +\infty} \dfrac{\partial Y}{\partial K} = \lim\limits_{L \to +\infty} \dfrac{\partial Y}{\partial L} = 0$;

5. для производства необходим каждый фактор: $Y(K, 0) = Y(0, LE) = 0$.

Население L_t, равное в модели совокупным трудовым ресурсам, растет с постоянным темпом n: $L_t = L_0 e^{nt},\ n = const$.

Для поиска решения модели используются удельные показатели: выпуск на единицу эффективного труда $y = \dfrac{Y}{LE}$, запас капитала на единицу эффективного труда $k = \dfrac{K}{LE}$, потребление на единицу эффективного труда $c = \dfrac{C}{LE}$ и инвестиции на единицу эффективного труда $i = \dfrac{I}{LE}$.

Тогда производственную функцию можно записать в следующем виде: $y = \dfrac{Y}{LE} = Y\left(\dfrac{K}{LE}, 1\right) = f(k)$.

Поведение потребителей в явном виде в модели не рассматривается. Функция полезности отсутствует. Вместо этого имеется экзогенно задаваемая норма сбережений s, $0 < s < 1$, означающая, что домохозяйства сберегают долю своего дохода s, а оставшуюся долю $1 - s$ тратят на потребление, и это соотношение не зависит от происходящих в экономике событий

2 Результаты, или «вторая страница, а формулы всё нет»

Нужна формула: $\dot{K} = sY_t - \delta K_t$

Наиболее часто в качестве конкретного примера производственной функции, удовлетворяющей предпосылкам модели, используется производственная функция Кобба-Дугласа:

$$Y(K,\ L,\ E) = E \times K^{\beta} \times L^{\alpha},\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,$$

где α — коэффициент эластичности по труду, β — коэффициент эластичности по капиталу.

3 Вывод уравнения модели

Напомним вид функции Кобба-Дугласа:

$$Y = f(k_t) = E_t \cdot K_t^{\beta} \cdot L_t^{\alpha}$$

Где α - коэффициент эластичности по труду, β - по капиталу.
Тогда удельная производительность $y = \dfrac{Y}{LE} = K^{\beta} L^{\alpha - 1}$
Будем предполагать, что $\alpha + \beta = 1$, то есть функция Кобба-Дугласа в данном случае демонстрирует постоянную отдачу. Тогда $\beta = 1 - \alpha$.

С представленными допущениями и знанием того, что $k = \dfrac{K}{LE}$, мы можем найти точную формулу для модели Солоу:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L_t E_t} - \frac{K_t(\dot{L}E_t + L_t\dot{E})}{(L_t E_t)^2} = \frac{sY_t - \delta K_t}{L_t E_t} - \frac{K}{LE} \cdot \frac{\dot{L}}{L_t} - \frac{K_t}{L_t E_t} \cdot \frac{\dot{E}}{E_t} = sy - (n+g+\delta)k_t$$

Выразим y через $k = \frac{K}{LE}$:

$$\frac{Y}{LE} = \frac{K^{\beta}}{L^{1-\alpha}} = \frac{K^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} = k^{1-\alpha} E^{1-\alpha}$$

Тогда:

$$k'(t) = sk(t)^{1-\alpha} E^{1-\alpha} - (n + g + \delta) \cdot k(t),\ k(0) = k_0$$

Введем новую переменную:

$$z(t) = k(t)^{\alpha}$$
$$z'(t) = \alpha \cdot k(t)^{\alpha - 1} \cdot k'(t)$$
$$k'(t) = \frac{z'(t) k(t)^{1-\alpha}}{\alpha}$$

Подставим, получилось:

$$z'(t) + \alpha \cdot (n+g+\delta) z(t) = s\alpha \cdot E^{1-\alpha}$$

Зная, что $E_t = E_0 e^{gt},\ E_0 = const$
Решаем линейное неоднородное уравнение:

$$y' + py = q \longrightarrow y = e^{-\int p} \left[\int q \cdot e^{\int p} + C \right]$$

$$z(t) = e^{-\int \alpha(n+g+\delta)\, dt} \left[\int e^{\int \alpha(n+g+\delta)\, dt} \cdot s\alpha \cdot E_t^{1-\alpha}\, dt + C \right]$$

$$z(t) = e^{-\alpha(n+g+\delta)t} \left[\int e^{\alpha(n+g+\delta)t} \cdot s\alpha \cdot (E_0^{1-\alpha} e^{g(1-\alpha)t})\, dt + C \right]$$

$$z(t) = e^{-\alpha(n+g+\delta)t} s\alpha E_0^{1-\alpha} \left[\int e^{\alpha(n+g+\delta)t + g(1-\alpha)t}\, dt + C \right]$$

$$z(t) = e^{-\alpha(n+g+\delta)t} s\alpha E_0^{1-\alpha} \left[\frac{e^{(\alpha(n+\delta)+g)t}}{\alpha(n+\delta)+g} + C \right]$$

Необходимо решить задачу Коши, где $z(0) = k_0^\alpha$

$$z(0) = s\alpha E_0^{1-\alpha} \left[\frac{1}{\alpha(n+\delta)+g} + C \right] = k_0^\alpha$$

Итого:

$$k(t) = \left[s\alpha E_0^{1-\alpha} \left(\frac{e^{tg(1-\alpha)}}{\alpha(n+\delta)+g} + C \cdot e^{-\alpha(n+g+\delta)t} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$C = \frac{k_0^\alpha}{s\alpha E_0^{1-\alpha}} - \frac{1}{\alpha(n+\delta)+g}$$

4 Построение

1. Построение графика $k(t)$ очевидно
   Можно пренебречь множителем с константой как множителем из бесконечно малого и бесконечно малого

2. Получить $y(k)$ можно через известные нам преобразования:

$$y = \frac{Y}{LE} = K^\beta L^{\alpha-1} = (k \cdot L \cdot E)^{1-\alpha} L^{\alpha-1} = (kE)^{1-\alpha}$$

5 Сравнение с реальными данными

В данном разделе мы пользуемся данными, предоставленными в книге «Applied Intermediate Macroeconomics», автор - Kevin D. Hoover; издание 2011 года.

5.1 Поиск коэффициентов

5.1.1 Поиск коэффициента технологического роста

Известны технологические коэффициенты 1948 года - 4.60 и 2008 - 9.63, считаем $t_0 = 0$, единица времени - год, тогда:

$$\frac{E_0 e^{g \cdot 2008}}{E_0 e^{g \cdot 1948}} = \frac{9.63}{4.6}$$
$$g \approx \frac{\log(2.09)}{2008 - 1948}$$

Теперь можно найти E_0:

$$E_0 = \frac{9.63}{e^{g \cdot 2008}}$$

5.1.2 Поиск коэффициента роста населения

Константа L_0 ищется аналогично.
При среднем росте населения в 1.1% в год, $n = \log(\frac{1.1\%}{100\%} + 1.0)$

5.1.3 Остальные константы

Коэффициенты оттока капитала и инвестиций взяты из статистики поведения инвесторов.

5.2 Результат сравнения

Графики, построенные нашей программой, с учётом найденных значений констант, полностью сошлись с историческими данными за 1948-2008 годы. Скриншот результатов прилагается.

6 Источники

- Статья на Wiki2
- Applied Intermediate Macroeconomics, Kevin D. Hoover, 2011
- Конспект
- Куриный мозг Никиты Кожухарова
- И ещё один куриный мозг