Κουτσόπουλος Νίκος
Πυρηνικοί Αντιδραστήρες Σύντηξης
ΔΜΠΣ ΦΤΕ
Εαρινό Εξάμηνο 2022

Άσκηση 3

Άσκηση 1. Το μαγνητικό πεδίο της Γης, θεωρούμενο ως δίπολο, δίνεται από την σχέση:

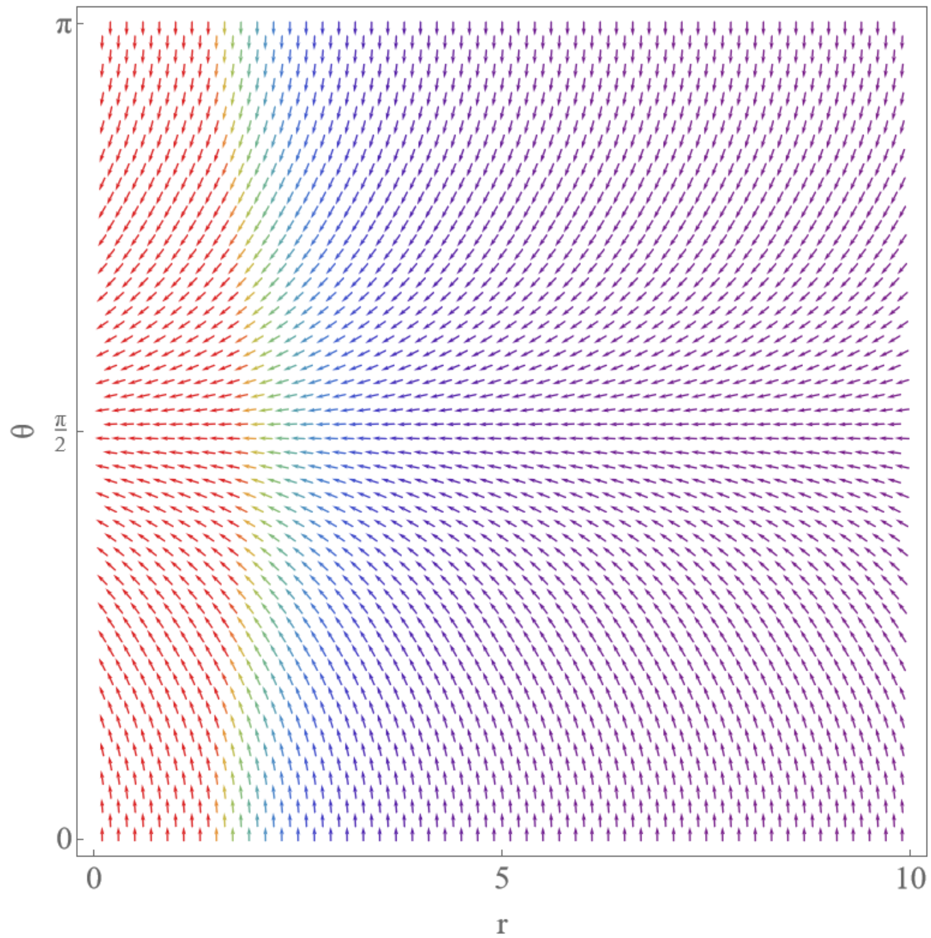
$$\vec{B} = 3 \times 10^{-5} \frac{R_E^3}{r^3} \left(-2 \sin\theta \hat{r} + \cos\theta \hat{\theta}\right) \tag{1}$$

όπου $R_E = 6400\,\mathrm{km}$ είναι η ακτίνα της Γης, r είναι η απόσταση από το κέντρο της Γης και θ το γεωγραφικό πλάτος.

1) Να γραφτεί η εξίσωση των μαγνητικών πεδιακών γραμμών στη μορφή $r = r(\theta)$.
2) Αν B_E είναι η τιμή μαγνητικού πεδίου στον ισημερινό ($\theta = 0$) σε κάποια απόσταση r, να βρεθεί το μέτρο του μαγνητικού πεδίου B σαν συνάρτηση των B_E και θ κατά μήκος μιας μαγνητικής πεδιακής γραμμής που διέρχεται από τον ισημερινό.
3) Ένα σωματίδιο εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο της Γης σε κάποια απόσταση R_0 στον ισημερινό με αρχική ενέργεια
$$E_0 = E_\perp + E_\parallel$$
όπου $E_\perp = \frac{2}{3}E_0$ και $E_\parallel = \frac{1}{3}E_0$.
Να υπολογιστεί το γεωγραφικό πλάτος θ_t όπου το σωματίδιο ανακλάται. Υποθέστε ότι το θ_t είναι μικρό και κρατήστε μόνο τους πρώτους όρους μη-μηδενικούς τάξης από όλους τους τριγωνομετρικούς όρους ως προς θ.
4) Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα ολίσθησης του σωματιδίου στον ισημερινό ως χαρακτηριστική ταχύτητα με την οποία το σωματίδιο ολισθαίνει καθώς ταλαντώνεται ανάμεσα σε δυο ακραίες θέσεις διαφορετικού γεωγραφικού πλάτους, εκτιμήστε τον χρόνο που απαιτείται για να εκτελέσει το σωματίδιο μια πλήρη περιστροφή γύρω από τη Γη. Υπολογίστε για την περίπτωση πρωτονίου ενέργειας $E_0 = 1\,\mathrm{MeV}$ σε ύψος $r = 2R_E$. Είναι η ακτίνα Larmor αρκετά μικρή ώστε να ισχύουν οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό των ολισθήσεων βαθμίδας και καμπυλότητας;

<u>Λύση</u>

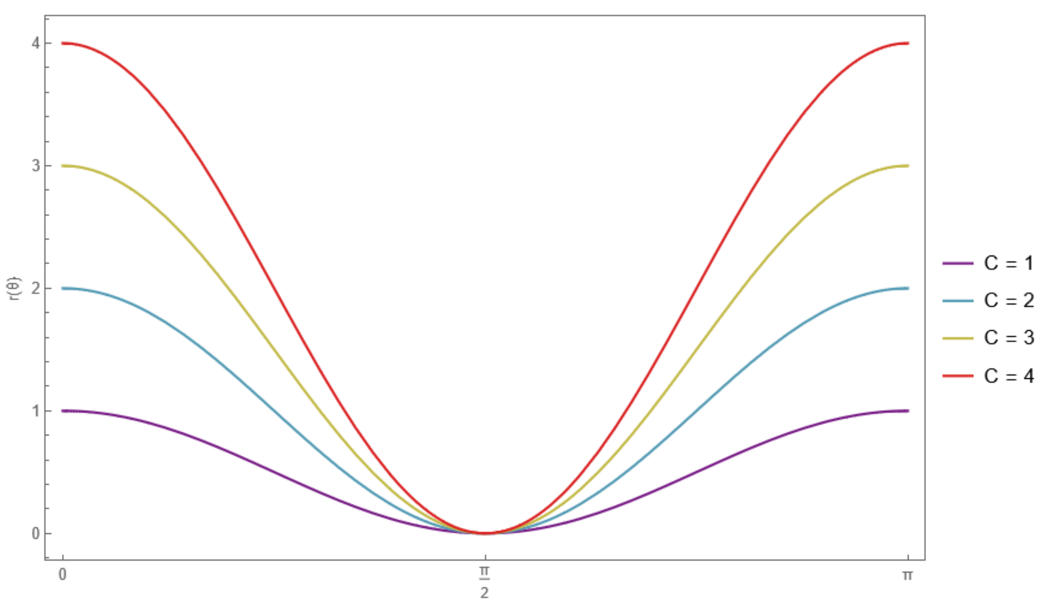
1) Αρχικά ελέγχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που δίνεται, εξίσωση (1), ικανοποιεί το νόμο του Ampere
$$\nabla \times \vec{B} = 0. \tag{2}$$
Ο έλεγχος γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), όπου $\nabla \times A = \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$ και η εξίσωση (2) ισχύει.



Σχημα 1. Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού μαγνητικού πεδίου της εξίσωσης (1).

Οι πεδιακές γραμμές του πεδίου δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dr}{rd\theta} = -2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3}$$

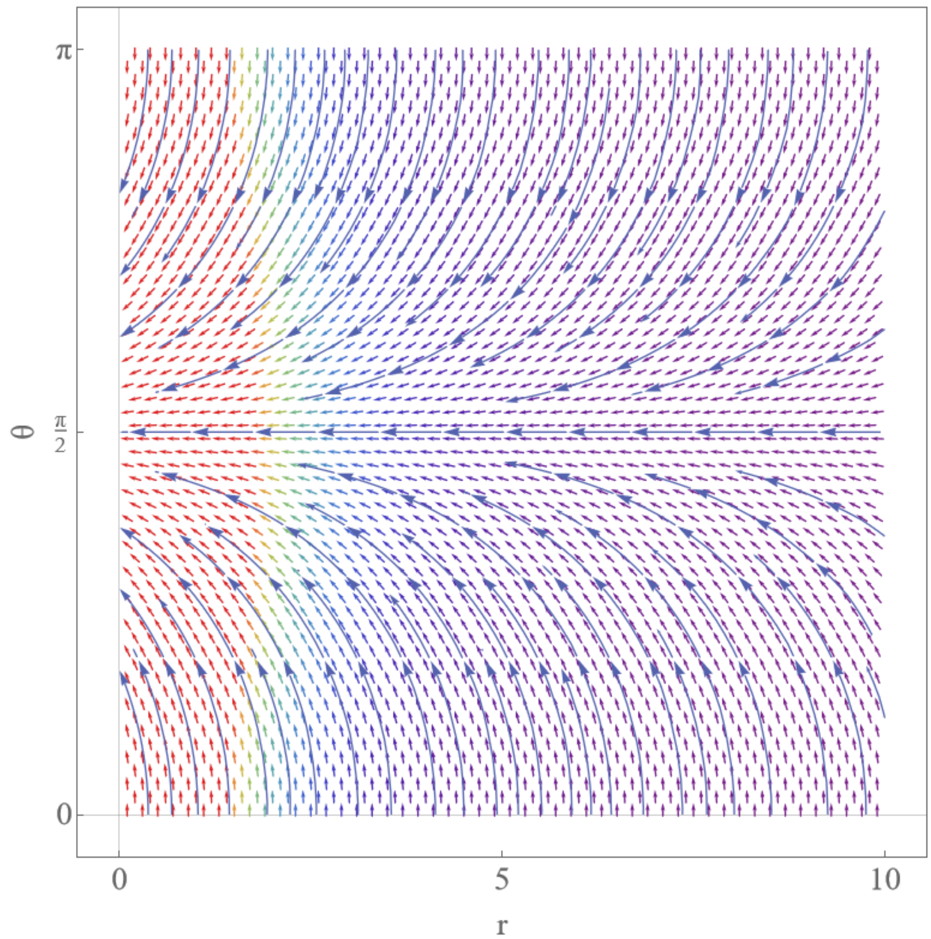


Σχημα 2. Γραφική αναπαράσταση των πεδιακών γραμμών της εξίσωσης (4).

και λύνοντας τη διαφορική παίρνουμε

(4) $$\boxed{r(\theta) = C\cos^2\theta}$$

Έτσι τώρα μπορούμε να φτιάξουμε και το Stream Plot του μαγνητικού πεδίου



Σχημα 3. Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού μαγνητικού πεδίου της εξίσωσης (1) και των πεδιακών γραμμών της εξίσωσης (4).

2) Τώρα θεωρώντας $\theta = 0$ στην εξίσωση (1), θέτουμε τις σταθερές B_E, δηλαδή

(5) $$\boxed{B_E = 3\times 10^{-5} R_E^3}$$

και αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (4) και (5) στην (1) και έχουμε

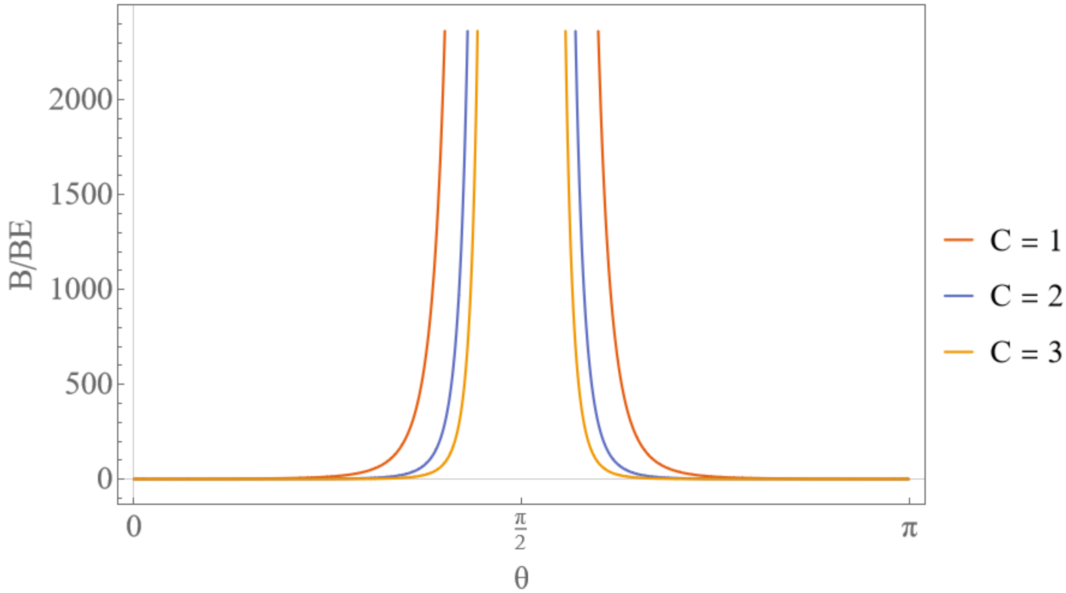
(6) $$\boxed{B' = B_E\sqrt{\frac{(4\tan^2\theta + 1)\sec^{10}\theta}{C^6}}}$$

έπειτα αναπαριστούμε γραφικά την εξίσωση (6) και έχουμε

ενώ για κάθε τιμή του C φτιάχνουμε το πίνακα Εδώ παρατηρούμε ότι το σημείο του μεγίστου βρίσκεται

C	$\theta_{\max}(deg)$	$B(\theta_{max})/B_E$	$B(0)/B_E$
1	90	1.76534×10^{79}	1.
2	90	2.20667×10^{78}	0.125
3	90	6.17489×10^{77}	0.037037

στις $90°$, για κάθε τιμή του C, ενώ αυξάνοντας το, στενεύει ο «λαιμός» της παράστασης



Σχημα 4. Γραφική παράσταση του B'/B_E, εξίσωση (6), για $C = 1$ (πορτοκαλι), 2 (μπλε) και 3 (κίτρινο).

3) Στον ισημερινό, δηλαδή για $\theta = 0$, το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με

(7)
$$\boxed{\vec{B}_{equator} = \frac{B_E}{r^3}\hat{\theta}}$$

και σε μία απόσταση R_0 είναι έχει μέτρο ίσο με $B_{equator,0} = \frac{B_E}{R_0^3}$.
Καθώς το σωματίδιο κινείται μέσα στο πεδίο, διατηρούνται η μαγνητική ροπή μ και η συνολική κινητική ενέργεια E, εξισώνοντας τις αρχικές τιμές με τις τιμές σε μια γωνία θ_t που το σωματίδιο ανακλάται. Έτσι ξεκινώντας από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας

$$E_0 = E_t \rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2) = \frac{1}{2}m(v_{\perp t}^2 + v_{\parallel t}^2) \rightarrow$$

καταλήγουμε στη σχέση

(8)
$$\boxed{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 = v_{\perp t}^2}$$

αφού κατά την ανάκλαση έχουμε $v_{\parallel t} = 0$. Επιστρέφοντας στη διατήρηση της μαγνητικής ροπής, έχουμε

$$\mu_0 = \mu_t$$
$$\frac{mv_{\perp 0}^2}{2\frac{B_E}{R_0^3}} = \frac{mv_{\perp t}^2}{2\frac{B_E^3}{R_0^3}\sqrt{4\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}}$$
$$v_{\perp 0}^2\left(\sqrt{4\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}\right) = v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2$$

όπου αναπτύσσουμε κατα Taylor κοντά στο $\theta = 0$ έως 2ου βαθμού τις συναρτήσεις

$$\sin\theta \simeq \theta + O(\theta^3)$$

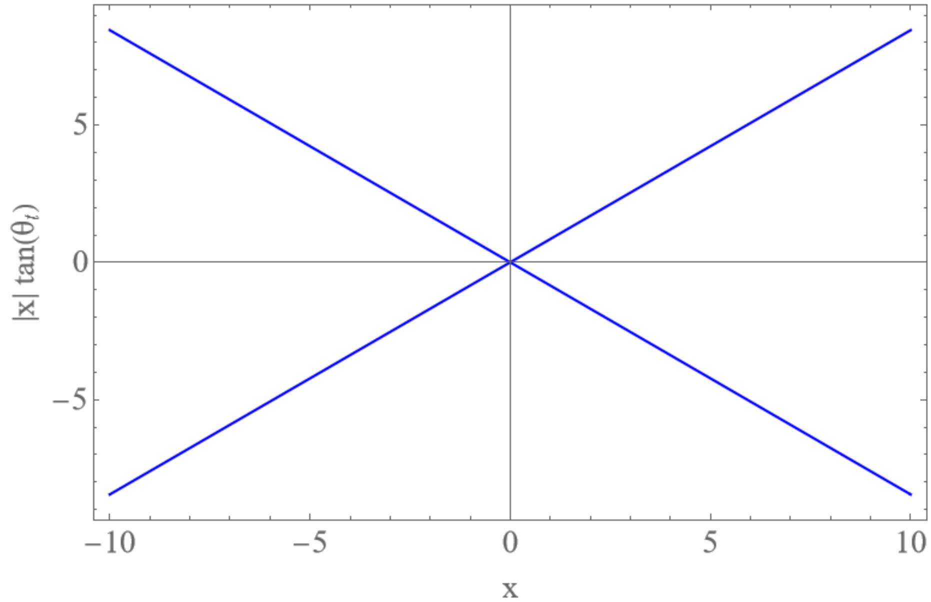
και

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3)$$

στην εξίσωση (3) και λύνουμε ως προς θ

(9)
$$\boxed{\theta_t = 0.63}$$

δηλαδή η $\theta_t = 36.38°$.[1] Έτσι μπορουμε να αναπαραστήσουμε τον loss cone όπως στο παρακάτω σχήμα



Σχημα 5. Γραφική αναπαράσταση του loss cone.

4) Για τον υπολογισμό της συνολικής drift velocity (gradient & curvature drift) ακολουθούμε τον τύπο

$$v_R + v_\nabla = \left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)\frac{\vec{B}\times\vec{\nabla}B}{\omega_c B^2} \tag{10}$$

όπου $\omega_c = \frac{qB}{m}$, το μαγνητικό πεδίο είναι αυτό της εξίσωσης (7) και οι ταχύτητες βρίσκονται από τις ενέργειες που δίνονται στην εκφώνηση. Έτσι οι υπολογισμοί για κάθε όρο της εξίσωσης (10), έχουν ως εξής

$$\begin{aligned} v_\perp &= \sqrt{\frac{4E_0}{3m}} \\ v_\parallel &= \sqrt{\frac{2E_0}{3m}} \end{aligned} \tag{11}$$

για τις ταχύτητες,

$$\vec{\nabla}B = -\frac{3B_E}{r^4}\hat{r} \tag{12}$$

η κλίση του μαγνητικού πεδίου στον ισημερινό και τελικά έχουμε το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{B}\times\vec{\nabla}B = \frac{3r^2}{B_E}. \tag{13}$$

Έτσι καταλήγουμε για την drift velocity

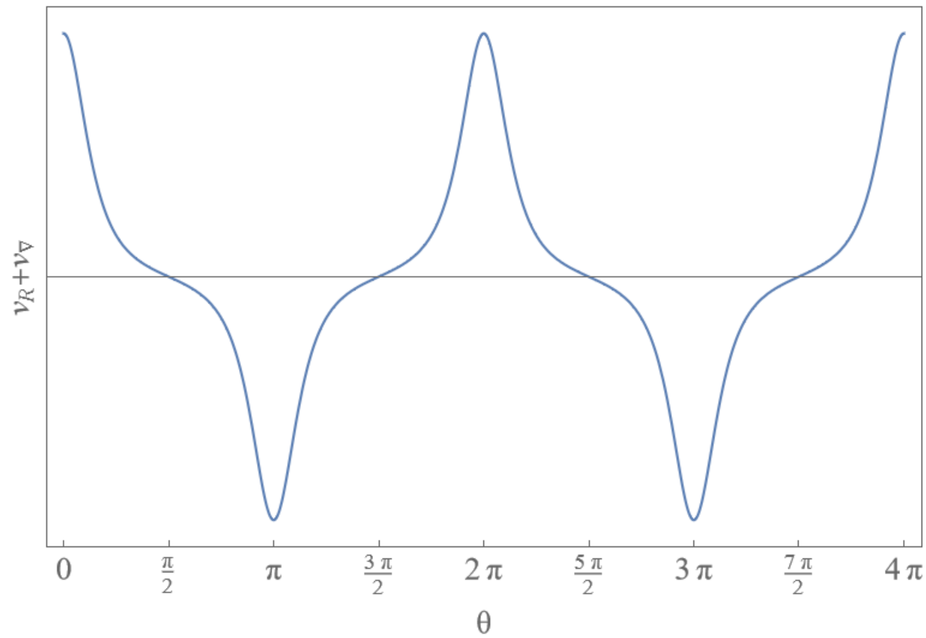
$$\boxed{\vec{v}_R + \vec{v}_\nabla = \frac{4r^2E_0}{|q|B_E}\hat{z}} \tag{14}$$

Αν δεν πάρουμε την προσέγγιση για τον ισημερινό και αφήναμε το θ θα είχαμε για την drift velocity

$$\vec{v}_R + \vec{v}_\nabla = \frac{E_0 r^2}{qB_E}\frac{(0.44\cos(3\theta) - 2.22222\cos(\theta))}{(1.66667\ - \cos(2\theta))^2}\hat{z} \tag{15}$$

η οποία θα έχει γραφική παράσταση

[1] Με αναλυτικές πράξεις (χωρίς τη χρήση αναπτύγματος) στη Mathematica βρίσκουμε ότι $\theta_t = 40.2°$.



Σχημα 6. Γραφική αναπαράσταση της γενικευμένης drift velocity, εξίσωση (15).

Σε απόσταση $r = 2R_E$ ένα ηλεκτρόνιο θα καλύψει μία απόσταση $2\pi(2R_E)$. Ο χρόνος που θα διαρκέσει η περιστροφή είναι

$$\boxed{T = \frac{2\pi(2R_E)}{v_R + v_\nabla}} \tag{16}$$

δηλαδή

$$T = 0.000218166\frac{|q|B_E}{E_0 R_E}$$

έτσι για $E_0 = 1\,\mathrm{MeV}$, ο χρόνος είναι $T = 0.27\,\mathrm{h}$.
Τέλος υπολογίζουμε την ακτίνα Larmor,

$$\boxed{r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B}} \tag{17}$$

και τη συγκρίνουμε με τον όρο $\left|\frac{\nabla B}{B}\right|$, δηλαδή για να ισχύουν οι προσεγγίσεις πρέπει

$$r_L\left|\frac{\nabla B}{B}\right| \ll 1 \tag{18}$$

όπου στη δική μας περίπτωση έχουμε $r_L\left|\frac{\nabla B}{B}\right| = 0.0002$. Επομένως οι προσεγγίσεις ισχύουν.

Αναφορες

Chen, F. F. (2006). *Introduction to plasma physics and controlled fusion. 1. plasma physics.* (2ed. έκδ.). Plemum Pr, Springer.

Κουτσόπουλος Νικόλαος. (2022). *Κώδικας για την λύση των ασκήσεων mathematica.* Ανακτήθηκε στις από https://github.com/nkouts1/Plasma-Physics

Umran S. Inan, M. G. (2011). *Principles of plasma physics for engineers and scientists* (Har/Psc έκδ.). Cambridge University Press.