На правах рукописи

Казимиров Николай Игоревич

ЛЕСА ГАЛЬТОНА—ВАТСОНА И СЛУЧАЙНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Петрозаводск 2003

Работа выполнена в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Ю. Л. Павлов.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор В. Ф. Колчин,
доктор физико-математических наук, профессор Е. В. Морозов.

Ведущая организация:
Петрозаводский государственный университет.

Защита состоится 19 декабря 2003 г. в 14 часов 15 мин. на заседании диссертационного совета К 002.142.01 в Институте прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН по адресу: 185610, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Карельского научного центра РАН.

Автореферат разослан «   »   2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
К 002.142.01
к.ф.-м.н., доцент   В. Т. Вдовицын.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время широкое распространение в комбинаторном анализе получил теоретико-вероятностный подход. Хорошо развитые в теории вероятностей методы асимптотического анализа успешно используются при решении сложных комбинаторных задач. Применение вероятностных методов в решении перечислительных задач комбинаторики связано с заданием вероятностей на множестве изучаемых комбинаторных объектов таким образом, чтобы эти вероятности определяли долю объектов с интересующими нас свойствами. Тогда, используя теоретико-вероятностный аналитический аппарат, можно получить точные или приближенные формулы для числа объектов, обладающих изучаемыми свойствами. Одним из важнейших направлений исследований является изучение предельных свойств комбинаторных объектов, проявляющихся при неограниченном возрастании числа элементов, образующих такие объекты. Значительное внимание в работах по дискретной математике в настоящее время уделяется изучению случайных графов. С помощью обобщенной схемы размещения в этой области математики удается решать множество сложных и полезных в других областях науки задач.

В диссертации рассматриваются собственно обобщенная схема размещения, леса Гальтона—Ватсона и случайные подстановки. Так как к обобщенной схеме размещения сводится большое число задач комбинаторики, она представляет интерес как самостоятельный объект исследования. Случайные деревья, леса и подстановки находят применение в анализе вычислительных алгоритмов, статистических методах, моделировании транспортных и информационных систем, генетике, химии полимеров, криптографии, а также при решении собственно математических задач, например, в теории случайных уравнений и проблеме эволюции случайных графов.

Цель исследования. Целью диссертации является получение новых результатов о предельном поведении важнейших характеристик лесов Гальтона—Ватсона и случайных подстановок с известным числом циклов. В частности, предполагалось, во-первых, снятие ограничения конечности третьего момента распределения числа прямых потомков каждой частицы в ветвящемся процессе, генерирующем лес Гальтона—Ватсона, для изучения всех известных характеристик леса, во-вторых, получение полного спектра теорем, описывающих предельное поведение наибольших длин циклов случайной подстановки с известным числом циклов, в-третьих, выявление условий возникновения гигантского цикла в случайной подстановке.

Для достижения этой цели предполагалось получение общих теорем об обобщенной схеме размещения, охватывающих широкий класс комбинаторных задач, описываемых этой схемой.

Объекты исследования. Объектами изучения в диссертации являются: собственно обобщенная схема размещения, леса Гальтона—Ватсона и случайные подстановки. Обобщенная схема размещения как метод комбинаторного анализа была введена и изучена В. Ф. Колчиным как обобщение задачи о случайном равновероятном размещении n частиц в N ячеек, получившей название классическая схема размещения. Введение обобщенной схемы не только расширяет область использования удобного языка для описания комбинаторных структур, но также дает возможность применять те методы, которые были развиты при анализе классической схемы. В работе изучается предельное поведение объемов компонент обобщенной схемы при достаточно общих ограничениях, позволяющих охватить ряд известных конкретных примеров применения этой обобщенной.

Леса Гальтона—Ватсона представляют собой случайные леса, соответствующие траекториям ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона, откуда и происходит это название. Понятие лес Гальтона—Ватсона было введено J. Pitman в 1998 г. В диссертации рассматривается предельное поведение объемов деревьев, числа деревьев заданного объема и высоты леса Гальтона—Ватсона, состоящего из N деревьев и n некорневых вершин.

Случайные подстановки могут быть представлены в виде случайных графов, компонентами связности которых являются ориентированные циклы. Случайный вектор, составленный из длин занумерованных произвольным образом циклов таких случайных графов, можно изучать с помощью обобщенной схемы размещения. Этой же обобщенной схеме размещения соответствует случайный рекурсивный лес. Таким образом результаты о длинах циклов случайной подстановки эквивалентны соответствующим результатам об объемах деревьев случайного рекурсивного леса. В диссертации рассматривается предельное поведение длин циклов случайной подстановки с известным числом циклов.

Методы исследования. Основными методами исследования в диссертации являются обобщенная схема размещения, теория ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона и методы получения предельных теорем для сумм независимых решетчатых случайных величин, включая локальную сходимость в схеме серий. Главной трудностью при получении результатов явилось доказательство локальных предельных теорем для таких сумм в схеме серий, а также нахождение асимптотики моментов производящих функций этих сумм.

Научная новизна. В диссертации впервые рассматривается частный случай обобщенной схемы размещения, к которому сводится большое число перечислительных задач комбинаторики. С помощью результатов об обобщенной схеме доказывается ряд теорем о лесах Гальтона—Ватсона и случайных подстановках для не рассматривавшихся ранее характеристик и зон изменения параметров. Все полученные результаты являются новыми.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. Предельные распределения при $N \to \infty$: а) всех компонент обобщенной схемы размещения n частиц по N ячейкам при $n = \mathrm{const}$; б) p-ых по величине компонент ($p = 0$ соответствует максимальной компоненте) при $N, n \to \infty$, $p^3 =$

$= o(n)$, $n = O(N)$, где p принимает значения из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$; в) p-ых по величине компонент при $p = \mathrm{const}$ и $n/N \to \infty$, с ограничением на скорость роста дроби n/N.

2. Доказательство того, что в известных ранее теоремах о предельном поведении наибольших объемов деревьев леса Гальтона—Ватсона, числа деревьев заданного объема и высоты леса, условие конечности третьего момента распределения числа прямых потомков каждой частицы в процессе, генерирующем лес Гальтона—Ватсона, может быть заменено на условие конечности второго момента.

3. Предельные распределения объемов всех деревьев леса Гальтона—Ватсона при постоянном числе n некорневых вершин.

4. Предельные распределения p-ых по величине объемов деревьев леса Гальтона—Ватсона при $N, n, p \to \infty$ так, что $p^3 = o(n)$, $n = O(N)$.

5. Полное описание предельного поведения длин p-ых по величине длин циклов случайной подстановки степени n с N циклами при $n \to \infty$, включая случай $p \to \infty$ при ограничениях $n - N = O(N)$, $p^3 = o(n - N)$.

6. Доказательство того, что в случайной подстановке степени n с N циклами гигантский цикл (т. е. цикл, число вершин которого имеет порядок n, в то время как каждый из остальных циклов содержит меньшее по порядку число вершин) возникает только при $N, n \to \infty$ так, что $N/\ln n \to 0$. Ранее было известно, что гигантский цикл возникает при $N/\ln n \to 0$ и не возникает при $N/\ln n \to \infty$, а случай $N \asymp \ln n$ не был изучен (символ $\asymp$ означает, что связанные им величины имеют одинаковый порядок).

Связь работы с крупными научными программами, темами. Результаты диссертации были получены в ходе проработки темы "Вероятностные и алгебраические методы исследования дискретных объектов", входившей в 1997–2000 гг. в план научно-исследовательских работ Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (№ гос. регистрации 01.9.60 0 12636) и выполнявшейся в рамках проекта "Интеграция высшего образования и фундаментальной науки Республики Карелия" ФЦП "Интеграция"(рег. №634). В 2001–2003 гг. исследования проводились в рамках темы плана научно-исследовательских работ этого же института "Вероятности на деревьях и лесах", № гос. регистрации 01.2.00 1 03997. В 2003 г. работа проводилась также по государственному контракту "Исследование случайных комбинаторных структур" по программе фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики" (госконтракт № 100002–251/ОМН-01/018–026/090703–1029). В 2000–2002 гг. автор являлся одним из исполнителей гранта РФФИ 00–01–00233 "Вероятности на деревьях и лесах".

Апробация результатов диссертации. Основные результаты докладывались на IV Санкт-Петербургской ассамблее молодых ученых и специалистов (1999 г.), V Петрозаводской международной конференции "Вероятностные методы в дискретной математике" (2000 г.), Kalashnikov Memorial Seminar (Петрозаводск, 2002 г.), научной конференции "Карелия и РФФИ" (Петрозаводск, 2002 г.), IV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Петрозаводск, 2003 г.), международной конференции "Колмогоров и современная математика" (Москва, 2003 г.).

Публикация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, из них 3 статьи в журнале "Дискретная математика", 1 статья в трудах международной конференции, 5 статей в сборниках трудов, 6 тезисов докладов на международных, всероссийских и региональных конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 127 страниц. Список литературы содержит 87 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, проводится анализ литературы по рассматриваемой тематике, формулируется цель работы и описываются основные методы исследования. Даются основные научные положения, выносимые на защиту. Приводятся описание структуры диссертации и краткая характеристика полученных результатов.

Первая глава носит вводный характер. В этой главе даются все основные определения и обозначения, приводится ряд примеров применения обобщенной схемы размещения. В четвертом параграфе этой главы приводится описание изучаемых в дальнейшем в общем виде схем размещения. Пусть имеется последовательность неотрицательных чисел $b = (b_0, b_1, \dots)$, определяющая распределение случайного вектора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ с суммой компонент $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$ по формуле

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} = \frac{b_{n_1} \dots b_{n_N}}{\sum\limits_{j_1+\dots+j_N=n} b_{j_1} \dots b_{j_N}} \tag{1}$$

для всех целых неотрицательных $n_1, \dots, n_N$, сумма которых равна n. Ясно, что значения вектора η можно интерпретировать как размещения (вообще говоря, неравновероятные) n частиц в N занумерованных ячеек. Если $\xi_1, \dots, \xi_N$ независимы и одинаково распределены так, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = b_k x^k / B(x), \tag{2}$$

где $B(x) = \sum_k x^k b_k$ $(x > 0)$, то имеет место равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \dots, \eta_N = n_N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_N = n_N | \, \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}.$$

Это значит, что случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N, \xi_1, \ldots, \xi_N$ образуют *обобщенную схему размещения*. Пусть R — радиус сходимости $B(x)$, причем $0 < R < \infty$. В диссертации показано, что все схемы, заданные по формуле (1), могут быть сведены к аналогичным схемам со следующими ограничениями: $R = 1$, $b_0 > 0$ и $\gcd(\mathrm{supp}(b)) = 1$, где supp означает носитель последовательности b (т. е. множество все таких k, что $b_k \neq 0$), а gcd — наибольший общий делитель. Последнее требование, таким образом, означает, что максимальный шаг ξ_1 равен 1. Схемы, удовлетворяющие таким условиям, для удобства изложения в диссертации названы *каноническими*. В 4-м параграфе первой главы показано, что не все схемы размещения могут быть сведены к такому виду, но приведенные примеры являются скорее исключением, подтверждающим правило, т. к. большинство известных в литературе примеров обобщенной схемы размещения все же сводятся к каноническим.

В 5-м параграфе дается описание рассматриваемых случайных подстановок степени n с N циклами. Пусть $X_n = \{1, \ldots, n\}$ и $S_{N,n}$ — множество всех подстановок X_n с N циклами. Задав на $S_{N,n}$ равномерное распределение, получим случайную подстановку, обозначаемую далее $\pi_{N,n}$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_N$ — длины циклов случайной подстановки $\pi_{N,n}$, занумерованных в произвольном порядке. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = n_1, \ldots, \eta_N = n_N\} = \frac{(n_1)^{-1} \ldots (n_N)^{-1}}{\sum\limits_{j_1 + \cdots + j_N = n} (j_1)^{-1} \ldots (j_N)^{-1}}.$$

Формула (1) выполнена, если $b_k = 1/k$ при $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом, длины циклов случайной подстановки могут изучаться с помощью канонической схемы. В этом же параграфе приводится ряд известных ранее результатов о цикле максимальной длины.

Вторая глава посвящена исследованию канонической схемы. В параграфе 2.1 вводятся все необходимые обозначения и дается сводка результатов, полученных в этой главе. Пусть $\eta_{(1)} \leqslant$

$\ldots \leqslant \eta_{(N)}$ — вариационный ряд случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$, распределение которых задано формулой (1), пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (2), кроме того, пусть заданы независимые случайные величины $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}, \tilde{\xi}_1^{(r)}, \ldots, \tilde{\xi}_N^{(r)}$ с распределениями

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \, \xi_1 \leqslant r\}, \quad k = \overline{0, r}, \quad i = \overline{1, N},$$
$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k | \, \xi_1 > r\}, \quad k = r+1, r+2, \ldots, \quad i = \overline{1, N}.$$

Обозначим $\zeta_N = \xi_1 + \cdots + \xi_N$, $\zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \cdots + \xi_N^{(r)}$, $\tilde{\zeta}_N^{(r)} = \tilde{\xi}_1^{(r)} + \cdots + \tilde{\xi}_N^{(r)}$ и $P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$. Хорошо известно, что для обобщенной схемы размещения справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1.1. *Для любого* $p = \overline{0, N-1}$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r\} = \sum_{l=0}^{p} \binom{N}{l} P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)} = n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}.$$

Отсюда видно, что для получения предельных распределений порядковых компонент $\eta_{(N-p)}$ достаточно найти асимптотику полинома $(1-P_r)^N$ и распределений сумм $\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}$, ζ_N. Легко видеть, что распределение вектора η не зависит от параметра x, который задает распределение указанных сумм. Поэтому выбор этого параметра осуществляется наиболее удобным для получения предельных теорем способом. Во второй главе этот выбор производится с помощью равенства $\mathbf{E}\,\xi_1 = n/N$. Там же доказывается, что данное уравнение имеет не более одного решения, а в том случае, если ряд $\sum_k kb_k$ сходится, результаты этой главы могут быть применены только в случае $n = O(N)$.

Для того, чтобы сформулировать некоторые результаты главы 2, введем ряд обозначений. Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_w\}$ — такое множество элементов носителя b, что y_1 — первый положительный элемент носителя b, и для любого $j = \overline{2, w}$ элемент y_j является наименьшим элементом носителя b, не представимым в виде комбинации $\rho_1 y_1 + \dots + \rho_{j-1} y_{j-1}$ с целыми неотрицательными коэффициентами ρ_i. Множество Y назовем образующим множеством носителя b. Если число n представимо в виде комбинации $\rho_1 y_1 + \dots + \rho_w y_w$, то оно называется *разложимым по* Y. Максимум суммы коэффициентов $\rho_1 + \dots + \rho_w$ по всем разложениям обозначим $\mathfrak{f}(n)$, а через $\Omega_Y(n)$ обозначим множество всех векторов $\bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_w)$ с целочисленными неотрицательными координатами таких, что $n = \rho_1 y_1 + \dots + \rho_w y_w$ и $\rho_1 + \dots + \rho_w = \mathfrak{f}(n)$. Имеет место

Теорема 2.1.2. *Пусть* $N \to \infty$, $n = \mathrm{const}$ *и выполнено условие*

$$\begin{gathered} b_k = O(b_l) \text{ равномерно по } l, k \in \mathrm{supp}(b) \text{ таким, что } l < k; \\ b_k \asymp b_{k+1} \text{ и существует } K \text{ такое, что } b_k > 0 \text{ при } k \geqslant K. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда для любого $y_i \in Y$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = y_i\} \to \frac{\sum\limits_{\bar{r} \in \Omega_Y(n,p,y_i)} (b_{y_1}^{r_1}/r_1!) \dots (b_{y_w}^{r_w}/r_w!)}{\sum\limits_{\bar{r} \in \Omega_Y(n)} (b_{y_1}^{r_1}/r_1!) \dots (b_{y_w}^{r_w}/r_w!)},$$

где множество $\Omega_Y(n,p,y_i)$ *состоит из таких векторов* $\bar{r} \in \Omega_Y(n)$, *что* $r_1 + \dots + r_i \geqslant \mathfrak{f}(n) - p$, $r_i + \dots + r_w \geqslant p + 1$. *Кроме того, если* $p \geqslant \mathfrak{f}(n)$, *то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = 0\} \to 1.$$

Для случая $n \to \infty$ так, что $n \asymp N$, справедлива

Теорема 2.1.6. *Пусть* x *выбран как корень уравнения* $n = N\,\mathbf{E}\,\xi_1$, $N \asymp n \to \infty$ *и выполнено условие* (3). *Пусть параметр* r *выбран так, что* $NP_r \to \infty$ *и* $(NP_r)^3 = o(n)$. *Тогда для* $p \asymp NP_r$ *и любого целого фиксированного* h *справедливы соотношения:*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r + h\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(p-NP_{r+h})/\sqrt{NP_{r+h}}} e^{-t^2/2}.$$

Если $n/N \to \infty$, то доказательство локальных теорем для сумм $\zeta_{N-l}^{(r)} + \tilde{\zeta}_l^{(r)}$ и ζ_N значительно усложняется. В диссертации удалось получить такой результат.

Теорема 2.1.7. *Пусть $b_k \asymp k^{-\delta}$, где постоянная $\delta \in (1;2]$. Пусть $n/N \to \infty$ так, что $N(1-x)^{\delta-1} \to \infty$, где x выбрано как корень уравнения $N\,\mathbf{E}\,\xi_1 = n$. Кроме того, пусть параметр r удовлетворяет соотношению $NP_r \to \gamma$, где γ — положительная постоянная. Тогда при любом фиксированном p*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r\} \to e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p} \frac{\gamma^l}{l!}.$$

Все теоремы с 2.1.1 по 2.1.7 описывают предельное поведение компонент $\eta_{(N-p)}$, причем для $n = \mathrm{const}$ получены предельные распределения для всех p, при $n \to \infty$, $n = O(N)$ — только для таких p, что $p^3 = o(n)$, а для $n/N \to \infty$ в общем виде удалось получить только результат, описанный теоремой 2.1.7.

С помощью теорем 2.1.1–2.1.7 для рассматриваемых в них зон изменения параметров N, n в диссертации найдены достаточные условия отсутствия гигантской компоненты в канонической схеме. Эти результаты содержатся в теоремах 2.1.8 и 2.1.9.

В параграфах 2.2–2.5 доказываются теоремы 2.1.1–2.1.7 отдельно по зонам изменения параметров N, n, а в параграфе 2.6 доказаны теоремы 2.1.8 и 2.1.9.

В третьей главе рассматриваются леса Гальтона—Ватсона. В параграфе 3.1 дается их определение по схеме, предложенной В. А. Ватутиным. В диссертации рассматриваются леса Гальтона—Ватсона, состоящие из N корневых деревьев с n некорневыми вершинами, сгенерированные ветвящимся процессом Гальтона—Ватсона G, начинающимся с N частиц, в котором число прямых потомков каждой частицы имеет распределение

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

где $(p_0, p_1, \dots)$ — распределение числа прямых потомков частиц в критическом процессе, а $F(\lambda) = \sum_k p_k \lambda^k$ и d — соответственно, производящая функция и максимальный шаг данного распределения. Пусть $\nu_i(\lambda) - 1$ — число всех потомков начальной частицы i в рассматриваемом процессе Гальтона—Ватсона, а $\nu_i - 1$ — число всех потомков начальной частицы i в соответствующем критическом процессе, $i = \overline{1, N}$. Понятно, что в каждом из этих двух наборов случайные величины независимы и одинаково распределены. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_N$ — объемы деревьев рассматриваемого леса Гальтона—Ватсона с N корнями и n некорневыми вершинами, тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\nu_1(\lambda) = k_1, \dots, \nu_N(\lambda) = k_N |\ \nu_1(\lambda) + \dots + \nu_N(\lambda) = N + n\}.$$

Из равенства

$$\mathbf{P}\{\nu_1(\lambda) = k\} = \frac{\lambda^{k-1}}{F(\lambda)^k}\, \mathbf{P}\{\nu_1 = k\}$$

легко получить, что $((\eta_1 - 1)/d, \dots, (\eta_N - 1)/d)$ образуют каноническую схему размещения, если положить $b_k = \mathbf{P}\{\nu_1 = kd + 1\}$, $x = (\lambda / F(\lambda))^d$. Используя эту связь параметров x и λ, а также результаты главы 2, в диссертации получен весь спектр известных ранее теорем о предельном поведении объемов деревьев леса Гальтона–Ватсона, числа деревьев заданного объема и высоты леса при условии $F''(1) < \infty$ и, кроме того, получены новые теоремы, две из которых приведены ниже.

Теорема 3.2.2. *Пусть Y — образующее множество носителя распределения $(\nu_1 - 1)/d$, $\Omega_Y(n)$ — множество всех векторов $(r_1, \dots, r_w)$ с целыми неотрицательными координатами таких, что $n/d = (r_1 y_1 + \dots + r_w y_w)$ и $r_1 + \dots + r_w = \mathfrak{f}(n/d)$. Пусть $N \to \infty$, n*

фиксировано. Тогда для любого $y_i \in Y$

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N-p)} = y_i d + 1\} \to \frac{\sum\limits_{\bar r \in \Omega_Y(n,p,y_i)} (b_{y_1}^{r_1}/r_1!) \ldots (b_{y_w}^{r_w}/r_w!)}{\sum\limits_{\bar r \in \Omega_Y(n)} (b_{y_1}^{r_1}/r_1!) \ldots (b_{y_w}^{r_w}/r_w!)},$$

где множество $\Omega_Y(n,p,y_i)$ состоит из таких векторов $\bar r \in \Omega_Y(n)$, что $r_1 + \cdots + r_i \geqslant \mathfrak{f}(n/d) - p$, $r_i + \cdots + r_w \geqslant p + 1$. Кроме того, если $p \geqslant \mathfrak{f}(n/d)$, то

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N-p)} = 1\} \to 1.$$

Теорема 3.2.6. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что n принимает значения, кратные d, $n \asymp N$, λ удовлетворяет соотношению*

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N+n},$$

параметр r выбран так, что $\gamma = N\,\mathsf{P}\{\nu_1(\lambda) > rd + 1\} \to \infty$ и $\gamma^3 = o(n)$. Тогда для $p \asymp \gamma$ и любого целого фиксированного h справедливы соотношения:

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant (r+h)d + 1\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(p-\gamma_h)/\sqrt{\gamma_h}} e^{-t^2/2},$$

где $\gamma_h = N\,\mathsf{P}\{\nu_1(\lambda) > (r+h)d + 1\}$.

Заметим, что теоремы 3.2.2 и 3.2.6, непосредственно следующие из теорем 2.1.2 и 2.1.6, описывают предельное поведение объемов деревьев леса Гальтона—Ватсона для таких зон изменения параметров N, n, p, которые ранее не были рассмотрены.

Доказательство теорем об объемах деревьев приведено в параграфе 3.3, а для числа деревьев заданного объема и высоты леса — в параграфе 3.4.

Четвертая глава посвящена случайным подстановкам $\pi_{N,n}$ степени n с N циклами. Ранее, Ю. Л. Павловым и Е. А. Лосевой при исследовании случайных рекурсивных лесов были получены предельные распределения длины наибольшего цикла такой подстановки. В частности, имеет место

Теорема 1.5.6. *Пусть $n \to \infty$ так, что $N/\ln n \to 0$. Тогда для любого положительного z*

$$\mathbf{P}\{-N(\ln(1-\eta_{(N)}/n))/\ln n \leqslant z\} \to 1-e^{-z}.$$

Из этого результата следует, что при $N/\ln n \to 0$ возникает гигантский цикл, а из других результатов следует, что при $N/\ln n \to \infty$ он не возникает. Вопрос о существовании гигантского цикла при $N \asymp \ln n$ оставался открытым.

В диссертации рассматриваются компоненты $\eta_{(N-p)}$. Предельное поведение этих компонент изучается отдельно в каждой из следующих зон изменения параметров N, n:

1. $N \to \infty$, $n - N = \mathrm{const}$,
2. $N \to \infty$, $n - N \to \infty$, $n - N = o(N)$,
3. $N \to \infty$, $n - N \asymp N$,
4. $N \to \infty$, $n/N \to \infty$, $N/\ln n \to \infty$,
5. $N \to \infty$, $N/\ln n \to \alpha$, постоянная $\alpha > 0$,
6. $N/\ln n \to 0$.

Для первых трех зон с использованием теорем главы 2 были получены следующие результаты.

Теорема 4.1.1. *Пусть $N, n \to \infty$ и $n - N = \mathrm{const}$. Тогда для $p = 0, \ldots, n-N-1$*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = 2\} \to 1.$$

Теорема 4.1.2. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n-N \to \infty$, $n-N = o(N)$, параметр x выбран как корень уравнения*

$$\frac{x}{(1-x)\ln(1-x)^{-1}} = \frac{n}{N}, \tag{4}$$

а $r \geqslant 3$ удовлетворяет соотношениям $Nx^{r-1}/r \to \infty$, $Nx^r/(r+1) \to \gamma$, где γ — некоторая неотрицательная постоянная. Тогда для $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r\} \to e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p} \frac{\gamma^l}{l!}; \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r+1\} \to 1 - e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p} \frac{\gamma^l}{l!}.$$

Теорема 4.1.3. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n-N \to \infty$, $n-N = o(N)$, параметр x выбран как корень уравнения (4), а параметр $r \geqslant 3$ удовлетворяет соотношениям: $\gamma = Nx^r/(r+1) \to \infty$, $\gamma^3 = o(n-N)$. Тогда для $p \asymp \gamma$*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r-1\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(p-\gamma)/\sqrt{\gamma}} e^{-t^2/2} dt,$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} = r\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(p-\gamma)/\sqrt{\gamma}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Теорема 4.1.4. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n - N \asymp N$, параметр x выбран как корень уравнения (4), а r удовлетворяет соотношению $nx^r/r \to \gamma$, где γ — положительная постоянная. Тогда для $p = 0, 1, 2, \ldots$ и любого целого фиксированного h*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r+h\} \sim e^{-\gamma x^h} \sum_{l=0}^{p} \frac{(\gamma x^h)^l}{l!}.$$

Теорема 4.1.5. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n - N \asymp N$, параметр x выбран как корень уравнения (4), а r выбран так, что $\gamma = nx^r/r \to \infty$ и $\gamma^3 = o(n-N)$. Тогда для $p \asymp \gamma$ и любого целого* *фиксированного h справедливы соотношения:*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r+h\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(p-\gamma_h)/\sqrt{\gamma_h}} e^{-t^2/2},$$

где $\gamma_h = nx^{r+h}/r$.

Для случая $n/N \to \infty$ найденные в главе 2 результаты неприменимы, поэтому следующие теоремы были доказаны с помощью локальной предельной теоремы, а в 6 зоне изменения параметров — непосредственным вычислением требуемых по лемме 1.1.1 вероятностей.

Теорема 4.1.6. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$ и $N/\ln n \to \infty$, x выбран как корень уравнения* (4), *r удовлетворяет соотношению $nx^r/r \to \gamma$, где γ — положительная постоянная. Тогда для $p = 0, 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r\} \to e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p} \frac{\gamma^l}{l!}.$$

Обозначим $I_0(y,z) = y^{\alpha-1}$ и

$$I_s(y,z) = \int_{X(s,y,z)} \frac{(y - x_1 - \cdots - x_s)^{\alpha-1}}{x_1 \ldots x_s} dx_1 \ldots dx_s,$$

где $X(s,y,z) = \{(x_1,\ldots,x_s) :\ x_k \geqslant z,\ y \geqslant x_1 + \cdots + x_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$, α — параметр, определяющий зону 5.

Теорема 4.1.7. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $N/\ln n \to \alpha$, где α — некоторая положительная постоянная. Тогда для $p = 0, 1, 2, \ldots$ и любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant zn\} \to \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^s}{s!} I_s(1,z)(-1)^{\min\{p,s\}} \binom{s-1}{\min\{p,s\}}.$$

Теорема 4.1.8. *Пусть* $n \to \infty$ *так, что* $N/\ln n \to 0$, r *удовлетворяет соотношению* $\ln(n/r) \sim \gamma(\ln n)/N$, *где* γ *— положительная постоянная. Тогда для* $p = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r\} \to e^{-\gamma} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\gamma^l}{l!},$$

если $N \to \infty$, *и*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-p)} \leqslant r\} \to \sum_{l=0}^{p-1} \binom{N-1}{l} \frac{\gamma^l}{N^l} \left(1 - \frac{\gamma}{N}\right)^{N-l-1},$$

если N *фиксировано и* $\gamma < N$.

Все эти результаты приводятся в первом параграфе 4-ой главы, а далее, в параграфах 4.2–4.5 проводится их доказательство. В параграфе 4.6 с помощью теорем 4.1.1–4.1.8 и 1.5.6 показано, что гигантский цикл в рассматриваемой случайной подстановке возникает только в шестой зоне изменения параметров N, n, т. е. при $N/\ln n \to 0$.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Казимиров Н. И. Локальная сходимость в схеме серий и ветвящиеся процессы // Тр. Петрозаводского ГУ, сер. математика, 1997, **4**, с.85–96.

2. Казимиров Н. И. О предельных распределениях для числа потомков процесса Гальтона—Ватсона // Тр. Института прикл. матем. исслед. Карельского НЦ РАН, 1999, **1**, с.7–20.

3. Казимиров Н. И., Павлов Ю. Л. Одно замечание о лесах Гальтона—Ватсона // Дискретная математика, 2000, **12**, №1, с.47–59.

4. Казимиров Н. И. О некоторых условиях отсутствия гигантской компоненты в обобщенной схеме размещения // Дискретная математика, 2002, **14**, №2, с.107–118.

5. Казимиров Н. И. Один случай локальной предельной теоремы // Тр. Института прикл. матем. исслед. Карельского НЦ РАН, 2002, **3**, с.58–66.

6. Kazimirov N. I. Local limit theorems for an array scheme and Galton—Watson forests // In: Probabilistic Methods in Discrete Math. Proc. of the Fifth Intern. Petrozavodsk Conf., Utrecht, VSP, 2002, pp.189–196.

7. Казимиров Н. И. Возникновение гигантской компоненты в случайной подстановке с известным числом циклов // Дискретная математика, 2003, **15**, №3.

8. Казимиров Н. И. Об асимптотике больших компонент обобщенной схемы размещения // Тр. Института прикл. матем. исслед. Карельского НЦ РАН, 2003, **4**, с.61–76.

9. Казимиров Н. И. Предельные распределения наибольших длин циклов случайной подстановки // Тр. Института прикл. матем. исслед. Карельского НЦ РАН, 2003, **4**, с.77–82.

Тезисы докладов

10. Казимиров Н. И. Предельные теоремы для лесов Гальтона—Ватсона // IV С.-Пб. ассамблея молодых ученых и специалистов, СПб, 1999, с.37.

11. Казимиров Н. И. Об асимптотике распределений числа потомков процесса Гальтона—Ватсона // Обозрение прикл. и пром. математики, 2000, **7**, №1, с.105–106.

12. Казимиров Н. И. Об асимптотике больших компонент в обобщенной схеме размещения // Тез. докл. науч. конф. “Карелия и РФФИ", Петрозаводск, 2002, с.88–89.

13. Kazimirov N. I. On the asymptotics of big components in a generalized allocation scheme // Information Processes, 2002, **2**, №2, pp.209–210.

14. Казимиров Н. И. Предельные распределения больших компонент в случайной подстановке с известным числом циклов // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2003, **4**, №1, с.166–167.

15. Kazimirov N. I., Pavlov Yu. L. On a giant component in random permutation with a known number of cycles. // Abstracts of Conf. Kolmogorov and Contemporary Math., MSU, 2003, pp. 461–462.