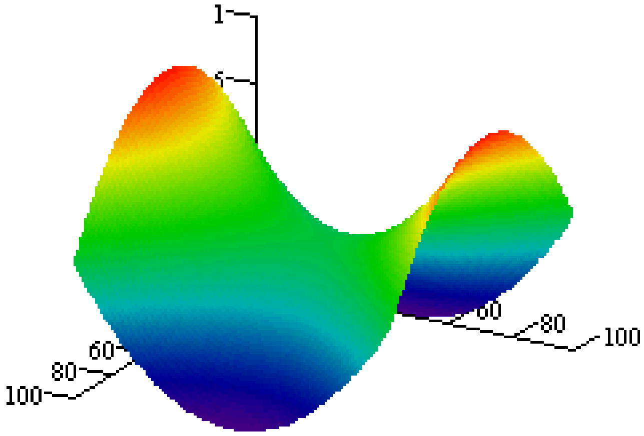
Математический анализ

конспект лекций для первого курса специальности «физика»

Н. И. Казимиров



Петрозаводск 2002

Оглавление

Введение

О математике, ее роли в науке (mathema ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$) — познание, наука (греч.)). Определения математики:

1. Математика есть единая симфония бесконечного (Д. Гильберт)
2. Математика — это искусство избегать вычислений (К. Ф. Гаусс)
3. Математика — наука о порядке и мере (Р. Декарт)
4. Математика — наука о математических структурах. Говорить 'математика' — значит говорить 'доказательство' (Н. Бурбаки).
5. Математика — то, чем занимаются Чебышёв, Ляпунов, Стеклов и я (Марков).
6. Математика — наука, изучающая объекты, свойства которых строго сформулированы (Н. Н. Непейвода).
7. Математика — это язык (Гельмгольц).
8. Математика — то, что написано в книгах по математике.
9. Математика — наука о решении математических задач, математические задачи — это задачи, сформулированные крупными математиками.
10. Математика — наука о числах и фигурах (К. Маркс).

Примечания к тексту:

1) **Упражнение*** — утверждение, которое предлагается для самостоятельного доказательства, либо может быть добавлено в качестве теоремы;

2) особым цветом выделены абзацы или более крупные блоки текста, засчет которых в первую очередь следует сокращать программу в случае нехватки времени; наивысший приоритет сокращаемости имеют наименьшие блоки текста.

Глава 1

Базовые понятия

1.1 Множества и операции над множествами

1.1.1 понятие 'множество'

Определение . *Множество* — произвольная определяемая совокупность объектов (это определение т. н. 'наивной' теории множеств, поэтому ниже будет упомянут парадокс Расселла и необходимость аксиоматического подхода).

Если объект x *принадлежит* множеству M, то пишут $x \in M$ или $M \ni x$.[1] При этом x называется *элементом* или *точкой* множества M.
[примеры]

Обычно будем обозначать множества большими латинскими буквами, а их элементы — маленькими латинскими. Однако элементы множества также могут быть множествами, поэтому данное разграничение несущественно.
[примеры]

Если множество N состоит из тех же элементов (*всех* или *не всех*), что и множество M, то N называется *частью* или *подмножеством* множества M: $N \subseteq M$ (N содержится в M) или $M \supseteq N$ (M содержит N).
[примеры, диагр. Вейля]

Множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов (т. е. $M = N$, если $N \subseteq M$ и $M \subseteq N$).

Если N — часть M, но $N \neq M$ (т. е. N содержит *не все* элементы M), то N — собственное подмножество M ($N \subset M$ или $M \supset N$).
[подчеркнуть отличие символов $\in$ и $\subset$]

Теорема 1.1. *Свойства равенства:*
1) $A = A$
2) $A = B \rightarrow B = A$
3) $(A = B) \wedge (B = C) \rightarrow (A = C)$

---

[1] символ $\in$ происходит от первой буквы греч. слова $\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\acute{\omega}\mu\alpha\iota$ (exartomai) — принадлежать, быть частью.

1.1.2 способы определения множеств

Если множество состоит из элементов $a, b, c, \ldots, f$, то его можно обозначать так: $\{a, b, c, \ldots, f\}$. Порядок записи элементов значения не имеет. Аналогия с коробкой, содержащей предметы. $\{a, a\} = \{a\}$ (синглет).

Пустое множество — множество без элементов (аналогия с нулем в арифметике): $\{\} = \emptyset$.

Пусть $\varphi(x)$ — некоторое свойство объекта x (например, $\varphi(x) \equiv [x \in A]$ или $\varphi(x) \equiv [x = \emptyset]$). Тогда квантор $\{x|\ \varphi(x)\}$ обозначает множество *всех* тех объектов x, для которых свойство $\varphi(x)$ истинно.
[арифметические примеры]

Пример. (парадокс Расселла) Поскольку при определении множеств не накладывается никаких ограничений, мы вправе рассмотреть следующее множество: $R = \{x : x \notin x\}$. Легко проверить тогда, что само множество R не может как принадлежать самому себе, так и не принадлежать. Оба предположения приводят к противоречию.

Замечание . Этот парадокс и родственные ему пардоксы из логики и теории множеств заставляют нас принимать некоторые ограничения на понятие множества. Эти ограничения обычно записывают в виде правил построения множеств, отправляясь о пустого множества, и называют аксиомами. Таковы аксиоматические теории множеств Цермело—Френкеля (ZF) и Гёделя—Бернайса (GB). Вводя далее основные конструкции множеств мы по сути придерживаемся рамок этих аксиом.

$\mathrm{Exp}(X) = \{M|\ M \subseteq X\}$ — *степенно́е* множество.
[примеры для конечных множеств и количество элементов в экспоненте]

Пересечение (умножение): $A \cap B$ (AB).

Объединение (сумма): $A \cup B$ ($A + B$).

Разность: $A \setminus B$.

Дополнение: $\setminus A$ (показать, что $A \cap \setminus B = A \setminus B$).
[примеры с кругами Вейля, конечными множествами, арифметические]

Понятие упорядоченной пары объектов: (a, b). $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$. Здесь порядок уже существенен и следует отличать пару (a, b) от множества $\{a, b\}$, которое обычно называют *двоеточием*. У.п. можно определить (по Куратовскому) как множество $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ (все сводится к множествам!).

Прямое произведение: $A \times B$.
[пример с плоскостью, прямоугольником и цилиндром]

Подмножество пар $\mathsf{R} \subseteq A \times B$ называется *соответствием* (*отношением*) элементам множества A элементов множества B.

Пример. Пусть C — множество процессоров, F — числовое множество. Тогда каждому процессору $c \in C$ соответствует несколько значений $f_1, f_2, \ldots$ частот ядра (в GHz, например), на которых оно может работать: $c \mapsto f_1, c \mapsto f_2, \ldots$ Это означает, что пары $(c, f_1), (c, f_2), \ldots$ принадлежат множеству $\mathsf{R} \subseteq C \times F$, которое является соответствием процессоров и частот их ядра. Неработающему процессору не соответствует ни одна частота.

Если $A = B$, то соответствие $\mathsf{R} \subseteq A \times B$ называется отношением на A.
[пример: знакомство людей друг с другом]

Обычно вместо $(x, y) \in \mathsf{R}$ пишут $x\,\mathsf{R}\,y$, а само отношение R обозначают каким-либо экзотическим символом, например, $x < y$, $x \preccurlyeq y$, $x \sim y$.

$\operatorname{dom} \mathsf{R}$ — область определения (domain) отношения R; $\operatorname{ran} \mathsf{R}$ — область значений (range) отношения R.
[примеры]

В заключение основные используемые множества: $\mathbb{N}$ (с единицы), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Множество $\mathbb{R}$ позже будет определено более строго.

1.2 Функции

Определение. Если f каждой точке непустого множества A ставит в соответствие <u>один и только один элемент</u> множества B, то f называется *функцией* из A в B. Обозначение: $f : A \to B$.

Отметим, что для произвольного соответствия возможны следующие три случая: (a) точке $a \in A$ не поставлен в соответствие никакой элемент B, (b) точке $a \in A$ поставлен в соответствие ровно один элемент B, (c) точке $a \in A$ поставлено в соответствие более одного элемента B. Для функции — только второй вариант (b)!

Если f ставит в соответствие элементу $a \in A$ элемент $b \in B$, то пишут $f : a \mapsto b$ или $f(a) = b$, при этом элемент a называется *аргументом* функции f, а элемент b называется значением функции f в точке a. Областью определения функции $f : A \to B$ является множество A.

Определение. Если $\operatorname{ran} f = B$, то говорят, что функция f действует из A **на** B или что f является *сюрьекцией*. Если $f : A \to B$ принимает различные значения при разных аргументах ($a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$), то f называется *инъекцией* или «отображением 'в'». Если f одновременно сюрьекция и инъекция, то f называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием*.

Если $f : A \to B$ биекция, то пишем $f : A \leftrightarrow B$.

[примеры разных функций]

Множества X и Y *эквивалентны* ($X \sim Y$) или *равномощными*, если они оба пустые, либо оба непустые и существует биекция $f : A \leftrightarrow B$. Если $X \sim \mathbb{N}$, то X называется *счетным*. Если $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то X называется *конечным*. Конечное, либо счетное множество называется *не более чем счетным*.
[$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ счетно, $\mathbb{Q}$ счетно]

Сужением функции $f : A \to B$ на множество $C \subseteq A$ называется функция, которая определена на C и принимает в его точках ровно те же значения, что и функция f. Обозначение: $f|_C$.

[пример]

1.2.1 способы задания функций

1. Аналитический. Если есть некоторая формула (свойство) $\varphi(x, y)$, связывающая переменные $x \in X$ и $y \in Y$, то можно определить множество пар $\mathsf{R} = \{(x, y) | \ \varphi(x, y)\}$, которое будет соответствием элементов множества X и множества Y. Пусть $A = \operatorname{dom} \mathsf{R}$. Тогда R будет также и соответствием элементов множеств A и Y. Если полученное соответствие оказалось функцией $\mathsf{R}\colon A \to Y$, то мы говорим, что функция R задана *аналитически* (т. е. с помощью формулы, выражающей зависимость переменных x и y).
[примеры с формулами $y = x^2$, $x = y^2$, $x^2 + y^2 = 1$]

2. Табличный. Функцию $f : A \to B$ можно задать при помощи таблицы, указав явно для каждого элемента $a \in A$, какой элемент $b \in B$ ему соответствует.
[пример]

3. Числовую функцию ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) можно задать графически, явно начертив ее в декартовой плоскости координат, либо поверхность для $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
[пример]

4. Явный способ задания. В этом случае явно выписывается формула, по которой вычисляется значение функции в зависимости от аргумента. Например, $f(x) = \sin(x) + e^x$.

1.2.2 последовательности и кортежи

Последовательностью элементов множества A называется функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая значения из A. В этом случае аргумент (натуральное число) принято приписывать нижним индексом: x_n — n-ое значение последовательности x со значениями в множестве A. Способ записи последовательности: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, либо $(x_1, x_2, \dots)$ Например, $(0.2, 0.4, 0.8, 0.16, \dots)$.

Подпоследовательность: сужение последовательности на бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Ее значения образуют подмножество в $\mathbb{N}$ ($\operatorname{ran} n \subseteq \mathbb{N}$). Построим сужение x на множество $\operatorname{ran} n$. Тогда $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности x. Если в предыдущем примере взять подпоследовательность с четными номерами, то получим новую последовательность $(0.4, 0.16, 0.64, 0.256, \dots)$.

Кортеж — это функция, заданная на первых нескольких натуральных числах: $x : \{1, 2, \dots, n\} \to M$, обозначение: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кортеж также называется *упорядоченным набором* элементов. Множество всех кортежей длины n, для которых $x_1, \dots, x_n \in M$, обозначается M^n.

$$M^n = \{(x_1, \dots, x_n) | \ x_1, \dots, x_n \in M\}.$$

Если аргументами функции f являются кортежи фиксированной длины n, то говорят, что функция f зависит от n аргументов: $f(x_1, \dots, x_n)$.
[пример]

По аналогии с определением отношения, данным ранее, можно ввести понятие k*-арного отношения* на M как подмножества M^k. k*-арной операцией* на множестве M называется функция из M^k в M.
[примеры, показать связь с отношением]

Здесь же добавить метод математической индукции.
[пример: $(1+x)^n \geqslant 1+xn$ для $n \geqslant 1$, $x \geqslant -1$]

1.3 Действительные числа

Теоретико-множественный и, в частности, функциональный аппарат является мощным средством для построения и изучения математических объектов (или математических структур). Мы рассмотрим построение числовых множеств с точки зрения потребностей в расширении их по мере введения новых операций над числами.

1.3.1 иерархия числовых множеств

Натуральные числа в теории множеств строятся из пустого множества рекурсивно. При этом мы полагаем $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{1, \emptyset\}$, $3 = \{2, 1, \emptyset\}$, и так далее. Мы не будем определять здесь стандартные операции сложения и умножения натуральных чисел.

Определение. *Структурой* называется кортеж $(M, Rel, Op, Func, \mathfrak{F}, \mu)$, где M — произвольное множество (носитель структуры), Rel — набор отношений на M, Op — набор операций на M, $Func$ — набор функций, определенных на M или его степенях, $\mathfrak{F}$ — набор подмножеств множества $\mathrm{Exp}(M)$, μ — набор функций, определенных на множествах из $\mathfrak{F}$.

Структура $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ — это натуральные числа с заданными на нем стандартными бинарными операциями сложения и умножения. Плюс, можно рассмотреть отношение $<$, упорядочивающее натуральные числа по величине. Тогда речь идет о структуре $(\mathbb{N}, <, +, \cdot)$

Понятие нейтрального и обратного элементов и необходимость пополнения множества $\mathbb{N}$ до множества $\mathbb{Z}$ в связи с операцией сложения. Пополнение до $\mathbb{Q}$ в связи с операцией умножения.

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется отношением *линейного порядка*, если

(a) для любых $x, y \in M$: $x \mathsf{R} y$ или $x = y$ или $y \mathsf{R} x$ (связность),

(b) для любого $x \in M$: не верно $x \mathsf{R} x$ (антирефлексивность),

(c) для любых $x, y, z \in M$: если $x \mathsf{R} y$ и $y \mathsf{R} z$, то $x \mathsf{R} z$ (транзитивность).

Обычно линейный порядок обозначают $<$.

1.3.2 определение действительных чисел

Определение . Пусть $(M,<)$ — линейно упорядоченное множество. Если M можно представить в виде объединения множеств A и B таких, что для любых $a \in A$, $b \in B$ имеет место $a < b$, то пара (A,B) называется сечением множества M. Сечение обозначается $A|B$.

Неполнота множества рациональных чисел.
[пример с $\sqrt{2}$, его иррациональность]

Указание на построение множества действительных чисел как совокупности всех сечений (без подробностей).

Теорема 1.2. *Множество $\mathbb{Q}$ можно пополнить до множества $\mathbb{R}$ действительных чисел с операциями $+$ и $\cdot$, отношением $<$, которые обладают следующими свойствами:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ (нейтральный элемент — ноль)
4. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists -x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ (обратный элемент)
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность умножения)
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность умножения)
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ (нейтральный элемент — единица)
8. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$ (обратный элемент)
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (дистрибутивность)
10. $\forall x \in \mathbb{R} : x \not< x$ (антирефлексивность)
11. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y) \wedge (y < z) \to (x < z)$ (транзитивность)
12. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ (связность)
13. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y) \to (x + z < y + z)$ (связь $+$ и $<$)
14. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y) \wedge (z > 0) \to (x \cdot z < y \cdot z)$ (связь $\cdot$ и $<$)
15. если $A|B$ — сечение $\mathbb{R}$, то
    $\exists x \in \mathbb{R} : \forall a \in A, b \in B : a \leqslant x \leqslant b$ (непрерывность, полнота)

[без доказательства, комментарии к аксиомам 1.–15.]

Определение. Структура $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ называется *полем действительных чисел.*

Определение и свойства функции $|x|$: $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|xy| = |x||y|$; $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$.

Операции на подмножествах $\mathbb{R}$: $X + Y = \{x + y | \ x \in X, y \in Y\}$ и т. п. Аналогично сравнения: $c \geqslant X \Leftrightarrow \forall x \in X : \ c \geqslant x$ и т. п.

1.3.3 ограниченные множества

Определение ограниченных снизу или сверху множеств, верхней и нижней граней, точной верхней и точной нижней граней.

Теорема 1.3. *Если* $X \subseteq \mathbb{R}$ *ограничено сверху, то существует* $\sup X \in \mathbb{R}$*; если* $X \subseteq \mathbb{R}$ *ограничено снизу, то существует* $\inf X \in \mathbb{R}$*.*

Теорема 1.4. *Теорема 1.3 эквивалентна аксиоме непрерывности.*

ε-окрестность точки x: $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$. Проколотая окрестность: $\dot{U}_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)$. Окрестность бесконечности.

Свойства $\inf$, $\sup$:

1) $s = \sup X \Leftrightarrow (s \geqslant X) \wedge (\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(s) \cap X \neq \emptyset)$

2) $s = \inf X \Leftrightarrow (s \leqslant X) \wedge (\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(s) \cap X \neq \emptyset)$

3) *если* $X \subseteq Y$, Y *— ограниченное, то* $\sup X \leqslant \sup Y$ *и* $\inf X \geqslant \inf Y$

4) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y; \inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$

5) $\sup(-X) = -\inf X; \inf(-X) = -\sup X$

6) $\sup |X| = \max\{|\sup X|, |\inf X|\}$

7) $\sup |X - X| = \sup X - \inf X$

Аксиомы метрики:

M1 $\rho(x,y) \geqslant 0$ и $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2 $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

M3 $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Определение евклидовой метрики $\rho(x,y)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и ее свойства. Определение ε-окрестности в $\mathbb{R}^n$:

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n |\ \rho(x,y) < \varepsilon\}.$$

Замкнутый шар с центром x и радиусом r: $B(x,r)$.

Определение ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$. Примеры множеств в $\mathbb{R}^n$ и функций вида $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

1.4 Вопросы для коллоквиума

1) Определить операции $\cap$, $\cup$, $\setminus$ и отношение $=$ на множествах через отношение принадлежности.

2) Построить $\operatorname{Exp}(\{a, b, c\})$

3) Дать определение отношения и следующих его видов: линейный порядок, отношение эквивалентности.

4) Дать определение функции и последовательности.

5) Бином Ньютона.

6) Доказать иррациональность $\sqrt{2}$.

7) Неравенство треугольника и противоположное ему, для модуля действительного числа.

8) Определение граней и точных граней множеств действительных чисел.

Глава 2

Теория пределов

2.1 Предел последовательности

2.1.1 определение и свойства, число e

Определение предела последовательности действительных чисел, в том числе и на языке окрестностей, эквивалентность определений. Выражение 'почти все'. Монотонные последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности, эквивалентность этого аксиоме непрерывности. Свойства пределов:

1) $x_n \to a$, $y_n \to b$, *тогда* $x_n + y_n \to a + b$

2) $x_n \to a$, $y_n \to b$, *тогда* $x_n y_n \to ab$

3) $x_n \to a$, $y_n \to b$, $y_n \neq 0$, $b \neq 0$, *тогда* $x_n/y_n \to a/b$

4) $x_n \to a < b$, *тогда почти все* $x_n < b$

5) $x_n \to a$, *тогда* $|x_n| \to |a|$

6) $x_n \to a$, $y_n \to b$, *почти все* $x_n \leqslant y_n$, *то* $a \leqslant b$

7) *(лемма 'о двух милиционерах')* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $x_n, z_n \to a$, *тогда* $y_n \to a$

Пример. Определение числа e через последовательность, доказательство существования: монотонность:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{nj},$$

$$\frac{n-j+1}{nj} \leqslant \frac{n+1-j+1}{(n+1)j} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ограниченность:

$$\frac{n-j+1}{nj} \leqslant \frac{1}{j} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

($e \approx 2.71828$)

[Практика: индукция и определение предела]

Теорема 2.1 (о вложенных отрезках).
Если $[a_n; b_n] \supseteq [a_{n+1}; b_{n+1}]$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $b_n - a_n \to 0$, *то*

$$\bigcap_n [a_n; b_n] = \{c\}$$

и $a_n \to c$, $b_n \to c$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 2.2 (критерий Коши). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* N *такой, что для любых* $n, m > N$ *выполняется неравенство* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

2.1.2 бесконечно малые, бесконечно большие величины, их иерархия

Символы o, O, отношение $\prec$, свойства бесконечно малых (б.м.в.) и бесконечно больших величин (б.б.в.):

1) $o(\mathrm{const}) = o(1)$

2) $o(1) + o(1) = o(1)$

3) $o(1) \cdot O(1) = o(1)$

4) $o(1) = O(1)$

5) $x_n \to a \Leftrightarrow x_n - a = o(1)$

6) $x_n \quad (x_n \neq 0)$ — *б.б.в.* $\Leftrightarrow \quad (x_n)^{-1} = o(1)$

7) $1/n^2 \prec 1/n \prec 1/\sqrt{n} \prec 1 \prec \sqrt{n} \prec n \prec n^2$

Отношения $\asymp$ и $\sim$ на последовательностях.

2.1.3 частичные пределы

Определение, примеры. Сходимость подпоследовательности сходящейся последовательности.

Теорема 2.3 (Больцано—Вейерштрасса). *Если* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— ограничена, то множество ее частичных пределов не пусто.*

Определение. Пусть $PL(x)$ — множество частичных пределов ограниченной последовательности x. Тогда

$$\inf PL(x) \eqqcolon \varliminf_{n\to\infty} x_n; \quad \sup PL(x) \eqqcolon \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Теорема 2.4. *Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности являются ее частичными пределами.*

[пример с последовательностью $(0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, \dots)$]

Теорема 2.5. *Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы равны.*

Упражнение* **.** Доказать, что обе теоремы эквивалентны аксиоме непрерывности действительных чисел.

[на практике основные пределы:

$$\frac{1}{n} \to 0; \quad q^n \to 0; \quad nq^n \to 0; \quad \frac{1}{n^\alpha} \to 0; \quad n^\alpha q^n \to 0; \quad \frac{\ln n}{n} \to 0; \quad \left(\frac{a}{n}\right)^n \to 0.$$

Здесь $\alpha > 0, -1 < q < 1, a > 1$.
Порядковая иерархия: $q^n \prec n^{-\alpha} \prec (\ln n)^{-1} \prec 1 \prec \ln n \prec n^\alpha \prec a^n \prec n! \prec n^n$.]

2.2 Пределы и непрерывность функций

2.2.1 открытые и замкнутые множества

Внутренняя точка множества, точка прикосновения, предельная точка, изолированная точка (в $\mathbb{R}^n$).

1) x *— точка прикосновения* $\Leftrightarrow$ x *— предельная точка или изолированная точка.*

Внутренность множества X: $\operatorname{int} X$, замыкание множества X: $[X]$, граница множества X: ∂X .

Определение открытого множества ($X = \operatorname{int} X$), примеры. Определение замкнутого множества ($X = [X]$), примеры.

2) x_0 *— предельная точка* $\Leftrightarrow$ *существует посл-ть* $x_n \to x_0$ *,* $x_n \neq x_0$

3) $X \subseteq [X]$ *;* $\operatorname{int} X \subseteq X$

4) $[[X]] = [X]$ *;* $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$

5) $[X] \cup [Y] = [X \cup Y]$ *;* $\operatorname{int} X \cap \operatorname{int} Y = \operatorname{int}(X \cap Y)$

Теорема 2.6. *Множество* X *открыто тогда и только тогда, когда* $\mathbb{R}^n \setminus X$ *замкнуто.*

Открыто-замкнутые множества: $\mathbb{R}^n$ и $\emptyset$.

Теорема 2.7 (связность $\mathbb{R}^n$ **).** *Других открыто-замкнутых множеств в* $\mathbb{R}$ *нет.*

Упражнение* **.** Доказать, что теорема эквивалентна аксиоме непрерывности.

Теорема 2.8. 1) *Любое пересечение и любое конечное объединение замкнутых множеств замкнуто;* 2) *любое конечное пересечение и любое объединение открытых множеств открыто.*

Теорема 2.9 (структура открытых множеств в $\mathbb{R}$).
Каждое открытое множество есть не более чем счетное объединение интервалов вида $(a;b)$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Дополнительно: открытые покрытия множеств, компактное множество, критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.

2.2.2 предел функции

Здесь и далее все основные понятия вводятся для многомерных пространств, однако для простоты можно ограничиться и одномерным случаем.
Обобщение предела последовательности на многомерный случай, примеры и свойства.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и x_0 — предельная точка X. Тогда $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (*по Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap X :\ f(x) \in U_\varepsilon(a).$$

$a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (*по Гейне*), если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, имеет место соотношение $f(x_n) \to a$ ($n \to \infty$).

Теорема 2.10. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Определение предела на бесконечности и бесконечного предела в терминах окрестностей. Сводная таблица обозначений для одномерного случая:

	$\mathbb{R}$	$[\mathbb{R}] = \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$	$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$
окрестность ($\varepsilon > 0, E \in \mathbb{R}$)	$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$	$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ $U_E(-\infty) = [-\infty; E)$ $U_E(+\infty) = (E; +\infty]$	$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ $U_E(\infty) =$ $= \mathbb{R}\cup\{\infty\} \setminus [-E; E]$
проколотая окрестность	$\dot{U}_\varepsilon(a) =$ $= (a-\varepsilon; a) \cup (a; a+\varepsilon)$	$\dot{U}_\varepsilon(a) = \dots$ $\dot{U}_E(-\infty) = (-\infty; E)$ $\dot{U}_E(+\infty) = (E; +\infty)$	$\dot{U}_\varepsilon(a) = \dots$ $\dot{U}_E(\infty) = \mathbb{R} \setminus [-E; E]$
предельные точки	только из $\mathbb{R}$	$+\infty$ — предельная точка неогр. сверху множества $-\infty$ — предельная точка неогр. снизу множества	∞ — предельная точка неогр. множества

<table>
<tr><td rowspan="2">$a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$</td><td rowspan="2">$a \in \mathbb{R}, x_0 \in [\mathbb{R}]$</td><td>$a, x_0 \in [\mathbb{R}]$</td><td>$a, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$</td></tr>
</table>

Примечание: последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определена на множестве $\mathbb{N}$, единственной предельной точкой которого в $[\mathbb{R}]$ является $+\infty$, поэтому этот случай также описан в таблице.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины, символы $\prec$, $\preccurlyeq$, $o(\dots)$, $O(\dots)$, $\asymp$, $\sim$.
[примеры с полиномами]

Свойства пределов (все пределы при $x \to x_0$):

1) $f(x) \to a$, $g(x) \to b$, *тогда* $f(x) + g(x) \to a + b$

2) $f(x) \to a$, $g(x) \to b$, *тогда* $f(x)g(x) \to ab$

3) $f(x) \to a$, $g(x) \to b$, $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$ *тогда* $f(x)g(x) \to a/b$

4) $f(x) \to a < b$, *тогда в некоторой проколотой окр-ти* x_0 $f(x) < b$

5) $f(x) \to a$, *тогда* $|f(x)| \to |a|$

6) $f(x) \to a$, $g(x) \to a$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, *тогда* $h(x) \to a$

Теорема 2.11. *Критерий Коши существования предела функции.*

2.2.3 непрерывность функции

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ и x_0 — предельная точка X, причем для любого $\delta > 0$ интервал $(x_0 - \delta; x_0)$ содержит точки X. Тогда $a = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cap X :\ |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Аналогично правый предел.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. x_0 — *точка непрерывности* функции $f(x)$, если $x_0 \in X$, x_0 — предельная точка X и существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, либо если x_0 — изолированная точка X. x_0 — точка разрыва $f(x)$, если x_0 — предельная точка X и не является точкой непрерывности $f(x)$.

Определение (Классификация точек разрыва в одномерном случае).

x_0 — предельн. т. X	Точки разрыва:	
	I рода	II рода
1. $\exists \delta > 0:$ $X \cap (x_0; x_0 + \delta) = \emptyset$	$\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\}$	$x_0 \notin X$ или $\nexists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \in \mathbb{R}$
2. $\exists \delta > 0:$ $X \cap (x_0 - \delta; x_0) = \emptyset$	$\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\}$	$x_0 \notin X$ или $\nexists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \in \mathbb{R}$
3. $\forall \delta > 0:$ $X \cap (x_0 - \delta; x_0) \neq \emptyset$, $X \cap (x_0 - \delta; x_0) \neq \emptyset$	$\exists \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) \in \mathbb{R}$, но равенство $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ нарушено(!) или $x_0 \notin X$	не существует хотя бы одного конечного одностороннего предела

Определение . Функция *непрерывна в точке*, если данная точка является ее точкой непрерывности, функция *непрерывна на множестве*, если она непрерывна в каждой точке данного множества.

Теорема 2.12. $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in X \;\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0: \; \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X: \; f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

$\Leftrightarrow$ *для любой послед-ти* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$, $x_n \to x_0$, *выполнено:* $f(x_n) \to f(x_0)$ *(* $n \to \infty$ *).*

Односторонняя непрерывность (одномерный случай).
Частичный предел функции (одномерный случай). Теорема о существовании конечных верхнего и нижнего пределов у ограниченной функции (одномерный случай).
[пример с $\sin(1/x)$]

2.2.4 монотонные функции

Определение монотонной и строго монотонной функции.

Теорема 2.13. 1) *Если* f *возрастает на* $(a; b)$ *и ограничена сверху, то существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$,

2) *Если* f *убывает на* $(a; b)$ *и ограничена снизу, то существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.
Аналогично правый предел.

2.2.5 свойства непрерывных функций

Теорема 2.14. *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ *непрерывны в* $x_0 \in X$. *Тогда* $f + g$, fg *и, в случае* $g(x_0) \neq 0$, f/g *непрерывны в* x_0.

Теорема 2.15. $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}^l$, $y_0 = f(x_0)$, f *непр. в* x_0, g *непр. в* y_0, *тогда* $g(f(x))$ *непр. в* x_0.

Теорема 2.16 (Вейерштрасса). *Область значений непрерывной на замкнутом ограниченном множестве функции замкнута и ограничена.*

Теорема 2.17 (Больцано—Коши о промежуточном значении). *Если* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и* $f(a)f(b) < 0$, *то существует* $c \in (a; b)$, *для которой* $f(c) = 0$.

Теорема 2.18. *Если* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a; b]$, *то областью значений* f *является отрезок.*

Определение. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых его двух точек x_0, x_1 существует непрерывная функция $f : [0; 1] \to X$ такая, что $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.

Открытое линейно связное множество называется *областью*.

Теорема 2.19. *Образ линейно связного множества относительно непрерывной функции также линейно связен.*

Теорема 2.20. *Если* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *непрерывна и строго монотонна, то существует* $f^{-1} : \operatorname{ran} f \to (a; b)$, *которая также непрерывна.*

2.2.6 элементарные функции

Основные элементарные функции.

1) Степенна́я функция: x^a, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Непрерывность.

2) Целые рациональные функции: $P_n(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$. Непрерывность.

3) Дробные рациональные функции: $P_n(x)/Q_m(x)$, непрерывность.

4) Показательная: a^x, $a > 0$, $a \neq 1$. Непрерывность без доказательства.

5) Тригонометрические функции: $\sin(x), \cos(x), \operatorname{tg}(x), \operatorname{ctg}(x)$. Непрерывность. Обратные тригонометрические: $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, непрерывность.

6) Гиперболические функции: $\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x), \operatorname{th}(x), \operatorname{cth}(x)$.

Определение. Элементарные функции — это функции, полученные из основных элементарных функций путем конечного числа операций $+, \star, -, /$ и суперпозиции.

2.2.7 замечательные пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}$.

2.2.8 равномерная непрерывность

Определение. $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *равномерно непрерывна* на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \to |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

[пример с гиперболой]

Теорема 2.21 (Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на нем.*

2.3 Вопросы для коллоквиума

1) Предел последовательности, арифметические свойства.

2) Определение числа e, бесконечно больших и бесконечно малых величин.

3) Отношения $\asymp$ и $\sim$.

4) Частичные пределы, верхний и нижний пределы.

5) Основные предельные соотношения.

6) Определение внутренних, предельных и изолированных точек множества, точек прикосновения, внутренности и замыкания множества, замкнутого и открытого множества в $\mathbb{R}$.

7) Предел функции в точке по Коши и по Гейне.

8) Предел функции на бесконечности и бесконечный предел.

9) Операции с символом ∞ и неопределенности.

10) Критерий Коши.

11) Точки непрерывности, точки разрыва, классификация.

12) Свойства непрерывных функций.

13) Замечательные пределы.

Глава 3

Дифференциальное исчисление

До вектор-функций (пункт 3.4) рассматриваем только одномерный случай.

3.1 Производная и дифференциал

3.1.1 производная

Определение производной функции в точке, ее арифметические свойства, вывод формул производных элементарных функций.

Теорема 3.1. *Если f имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

3.1.2 дифференциал

Определение дифференцируемости функции в точке, определение дифференциала.

Теорема 3.2. *f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$.*

Арифметические свойства дифференциала.
Касательная, геометрический смысл производной.
Применение дифференциала для приближенных вычислений.

3.1.3 независимость формы первого дифференциала

Теорема о производной сложной функции. Теорема о независимости формы первого дифференциала.

3.1.4 дифференцируемость обратной функции

Теорема 3.3. *Пусть f строго монотонна и непрерывна в окрестности x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная функция*

$g(y) = f^{-1}(y)$, *дифференцируемая в точке* $y_0 = f(x_0)$, *и* $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

[производные обратных тригонометрических функций]

3.1.5 производные высших порядков

Определение производной $f^{(n)}$.

Теорема 3.4. *Если в окрестности* x_0 *существуют производные* $f^{(n-1)}$ *и* $g^{(n-1)}$, *а в точке* x_0 — *производные* $f^{(n)}$ *и* $g^{(n)}$, *то* (a) $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$ *и* (b) *справедлива формула Лейбница:*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

[примеры с x^n, $\ln x$, e^x]

3.1.6 дифференциалы высших порядков

Определение дифференциала порядка выше первого. Дифференциал n-го порядка от суммы функций и произведения (формула Лейбница). Форма дифференциала порядка выше первого зависит от того, является ли x независимым аргументом или функцией от третьего аргумента.

3.2 Основные теоремы о дифференцируемых функциях

3.2.1 теоремы о среднем значении

Теорема 3.5 (Ферма́). *Пусть* $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема, в точке* x_0 *достигает своего* $\max$ *или* $\min$. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3.6 (Ролля). *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна, дифференцируема на* $(a;b)$ *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда существует* $x_0 \in (a;b)$: $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3.7 (Лагра́нжа). *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна, дифференцируема на* $(a;b)$. *Тогда существует* $x_0 \in (a;b)$: $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$.

Следствие 3.1 (теорема о конечном приращении). *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна, дифференцируема на* $(a;b)$. *Тогда* $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$, *где* $x, x + \Delta x \in [a;b]$, $0 < \theta < 1$.

Теорема 3.8 (Коши). *Пусть* $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывны, дифференцируемы на* $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a;b)$. *Тогда существует* $x_0 \in (a;b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

[Сравнить с теоремой Лагранжа]

3.2.2 правило Лопиталя

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3.9. *Пусть* $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$, *дифференцируемы в точке* a, $f(a) = g(a) = 0$ *и* $g'(a) \neq 0$. *Тогда*

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Недостаток теоремы:

$$\lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{1/x}, \quad \nexists (\ln x)'|_{x=0}$$

Упражнение* **.** Теорема верна и для $x \to a - 0$, и для $x \to a$.

Теорема 3.10. *Пусть* $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ *и выполнены условия:*
(a) *существуют* f', g' *на* $(a; b)$
(b) $f(x), g(x) \to 0$ *при* $x \to a + 0$
(c) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a; b)$
(d) *существует предел* $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [\mathbb{R}]$.
Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[пример с $\sin x = x + (1/6)x^3 + o(x^3)$]

Теорема 3.11. *Пусть* $f, g : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ *и выполнены условия:*
(a) *существуют* f', g' *на* $(a; +\infty)$
(b) $f(x), g(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$
(c) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a; +\infty)$
(d) *существует предел* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [\mathbb{R}]$.
Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема 3.12. *Пусть* $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ *и выполнены условия:*
(a) *существуют* f', g' *на* $(a; b)$
(b) $f(x), g(x) \to \infty$ *при* $x \to a + 0$
(c) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a; b)$
(d) *существует предел* $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [\mathbb{R}]$.
Тогда существует и предел

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[пример с $x\ln x$]

Теорема 3.13. *Пусть* $f, g : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ *и выполнены условия:*
(a) *существуют* f', g' *на* $(a; +\infty)$
(b) $f(x), g(x) \to \infty$ *при* $x \to +\infty$
(c) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a; +\infty)$
(d) *существует предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in [\mathbb{R}]$.
Тогда существует и предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.2.3 теоремы о монотонных функциях

Теорема 3.14. *Пусть* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* $(a; b)$. *Тогда она возрастает (убывает)* $\iff$ $f' \geqslant 0$ *(* $f' \leqslant 0$ *) на* $(a; b)$.

Теорема 3.15. *Пусть* $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема. Если* $f' > 0$ *(* $f' < 0$ *) на* $(a; b)$, *то* f *строго возрастает (строго убывает).*

[контрпример к обратному: x^3]

Теорема 3.16. *Дифференцируемая на* $(a; b)$ *функция* f *строго возрастает тогда и только тогда, когда* (a) $f' \geqslant 0$ *на* $(a; b)$ *и* (b) *множество* $E = \{x | \, f'(x) = 0\}$ *не имеет внутренних точек (* $\operatorname{int} E = \emptyset$ *).*

3.2.4 формула Тейлора

Теорема 3.17 (Тейлора—Пеано). *Пусть* f *непрерывно дифференцируема* $(n-1)$ *раз в окрестности точки* x_0 *и* n *раз дифференцируема в точке* x_0. *Тогда при* $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right),$$

где $o\left((x-x_0)^n\right)$ *— остаточный член в форме Пеано.*

Теорема 3.18 (Тейлора—Лагранжа). *Пусть* f *имеет* $n+1$ *производную в окрестности* x_0. *Тогда для любого* x *их данной окрестности существует* $\xi \in (x; x_0) \cup (x_0; x)$ *такая, что*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *— остаточный член в форме Лагранжа.*

3.3 Исследование функций

3.3.1 экстремумы

Определение точки экстремума (локальный максимум и минимум), строгого экстремума (строгий максимум, минимум).

Теорема 3.19 (необходимое условие экстремума).
Если x_0 *— точка экстремума* f, f *определена в окрестности* x_0, *существует* $f'(x_0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3.20 (достаточное условие экстремума).
Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, *существует* $f'(x)$ *на* $\dot{U}(x_0)$. *Тогда:*
(a) *если* f' *меняет знак с* $+$ *на* $-$ *при переходе через* x_0, *то* x_0 *— точка строгого максимума*
(b) *если* f' *меняет знак с* $-$ *на* $+$ *при переходе через* x_0, *то* x_0 *— точка строгого минимума.*

Теорема 3.21. *Пусть* $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, *существует* $f^{(n-1)}(x)$ *на* $U(x_0)$, *для* $k = \overline{1, n-1}$ $f^{(k)}(x_0) = 0$, *существует* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда*
1) *если* n *нечетно, то экстремума нет*
2) *если* n *четно, то экстремум есть, причем*
   (a) *если* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *то строгий максимум*
   (b) *если* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *то строгий минимум.*

3.3.2 наибольшее и наименьшее значение

Поиск точки на отрезке $[a; b]$, где непрерывная функция f достигает своего максимума или минимума.

3.3.3 выпуклость и точки перегиба

Определение выпуклой вверх и выпуклой вниз (вогнутой) на интервале функции.

Теорема 3.22. f *дифференцируема на* $(a; b)$, *тогда* f *выпукла вверх* (*вниз*) $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ *убывает* (*возрастает*).

Следствие 3.2. *Если* f *дважды дифференцируема, то* f *выпукла вверх* (*вниз*) $\Leftrightarrow$ $f'' \leqslant 0$ $(f'' \geqslant 0)$.

Теорема 3.23. *Если* f *дважды дифференцируема и* $f'' < 0$ $(f'' > 0)$, *то* f *строго выпукла вверх* (*вниз*).

Теорема 3.24. *Если* f *дважды дифференцируема и* $f'' > 0$, *то для* $x \neq x_0$ $f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Определение точки перегиба.

Теорема 3.25 (достаточный признак точки перегиба).
Пусть f дважды дифференцируема на $(a;b)$ и f'' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 — точка перегиба.

Теорема 3.26 (необходимое условие точки перегиба).
Если f дважды дифференцируема и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

3.3.4 асимптоты

Определение асимптот, нахождение их коэффициентов, примеры.

3.3.5 построение эскизов графиков

1) Область определения, непрерывности, точки разрыва и их тип, пределы в точках разрыва, пересечение с осями координат.

2) Симметрия и периодичность.

3) Производная, экстремумы, значения в точках экстремумов.

4) Интервалы монотонности.

5) Вторая производная, точки перегиба.

6) Участки выпуклости (вверх или вниз).

7) Углы наклона графика в характерных точках.

8) Асимптоты.

9) Эскиз графика.

[Пример.]

3.4 Введение в дифференциальную геометрию

3.4.1 пространство $\mathbb{R}^n$ и вектор-функции

Определение линейного нормированного пространства, скалярного произведения. Некоторые свойства операций в линейном пространстве. Свойства нормы (неравенство, противоположное неравенству треугольника), свойства скалярного произведения.

Теорема 3.27 (Неравенство Коши—Буняковского). $|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$.

Теорема 3.28. $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ *является нормой.*

Определение. *Углом между векторами* x *и* y называется число

$$\arccos \frac{(x,y)}{||x||\cdot||y||}.$$

Векторы x и y *ортогональны* (обознач: $x \perp y$), если $(x,y)=0$; *коллинеарны* (обознач: $x \parallel y$), если $|(x,y)| = ||x||\cdot||y||$; *сонаправлены* (обознач: $x \upuparrows y$), если $(x,y) = ||x||\cdot||y||$; *противоположно направлены* (обознач: $x \uparrow\downarrow y$), если $(x,y) = -||x||\cdot||y||$.

Определение $\mathbb{R}^n$ и операций в нем. Определение скалярного произведения векторов.

Теорема 3.29 (Неравенство Минковского).

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

Отсюда следует, что $|\vec{x}|$ является нормой на $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Вектор-функция* — это функция вида:

$$\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)),$$

в случае трехмерного пространства чаще пишут $(x(t), y(t), z(t))$.

Вектор $\vec{b}$ называется пределом вектор-функции $\vec{a}(t)$ при $t \to t_0$, если существует

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{b} - \vec{a}(t)| = 0.$$

В частности, когда t пробегает множество натуральных чисел, получаем предел последовательности векторов.

Теорема 3.30. $\vec{a}(t) \to \vec{b} \Leftrightarrow a_i(t) \to b_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Теорема 3.31. *Операции сложения векторов и умножения вектора на число, норма и скалярное произведение непрерывны.*

Производная и дифференциал вектор-функции. Свойства производной.

1) $(\vec{a}(t) + \vec{b}(t))' = \vec{a}'(t) + \vec{b}'(t)$

2) $(\lambda(t)\vec{a}(t))' = \lambda'(t)\vec{a}(t) + \lambda(t)\vec{a}'(t)$

3) $(\vec{a}(t), \vec{b}(t))' = (\vec{a}'(t), \vec{b}(t)) + (\vec{a}(t), \vec{b}'(t))$

4) $\vec{a}(t)$ *дифференцируема* $\Leftrightarrow$ *при любом* i $a_i(t)$ *дифференцируема*

3.4.2 путь и кривая

Определение. *Путем* в $\mathbb{R}^n$ будем называть любую непрерывную вектор-функцию, отображающую некоторый отрезок $[a;b]$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение носителя пути, обратного пути, склейки путей: $(\gamma\star\mu)(t)$. Простой путь (инъективный).Элементарный путь — у которого все координаты выражаются как непрерывнфе функции от одной из координат.
[Пример с $(x, y(x))$]

Определение пути k-го порядка гладкости, гладкого пути. Касательный вектор, касательная, вывод формулы касательной: $(t-t_0)\vec{a}(t_0)'+\vec{a}(t_0)$. Особые точки. Регулярный путь.
[Пример с (t^2, t^3)]

Диффеоморфизм, примеры. Эквивалентность путей, свойства. Определение кривой как класса эквивалентных гладких путей. Параметризация кривой — это любой путь, принадлежащий этой кривой (как классу эквивалентных путей).

Теорема 3.32. *Касательная к кривой не зависит от ее параметризации.*

Простая по отношению к координатной оси кривая — когда ее параметризация есть элементарный путь.

3.4.3 параметрическое дифференцирование

Определение кривой на плоскости.

Теорема 3.33. *Пусть $y=\varphi(t), x=\psi(t)$ – кривая, $t\in[a;b]$, φ,ψ непрерывно дифференцируемы и $\varphi'(t)\neq 0$ на $[a;b]$. Тогда существует $y'_x=\psi'(t)/\varphi'(t)$ $(dy/dx=(dy/dt)/(dx/dy))$.*

[пример с циклоидой]

3.4.4 кривизна простой кривой

Определение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — гладкие функции. Точка x_0 называется точкой касания порядка k гладких элементарных путей $(x, f(x))$ и $(x, g(x))$, если

$$f^{(i)}(x_0)=g^{(i)}(x_0),\quad i=\overline{0,k};\quad f^{(k+1)}(x_0)\neq g^{(k+1)}(x_0).$$

Определение радиуса кривизны и кривизны простой по отношению к оси Ox кривой в данной точке. Эволюта. Формулы (без доказательства): радиус кривизны:

$$R=\frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|};\quad k=1/R;$$

эволюта:

$$\xi=x-\frac{y'(1+(y')^2)}{y''};\quad \eta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

3.5 Частные производные

3.5.1 пространство $\mathbb{R}^n$

Повторение понятий, связанных с $\mathbb{R}^n$ и функциями из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$: операции, скалярное проивзедение, норма, метрика, окрестности, открытые и замкнутые множества, пределы, непрерывность. Если этого не было ранее, то определение и вывод всех необходимых результатов.

3.5.2 частная производная и дифференцируемость

Определение частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, примеры. Частные производные высших порядков, смешанные производные, обозначения. Геометрический смысл частной производной.

Для функций одной переменной из существования производной следует непрерывность. Контрпример для аналогичного утверждения в случае функции нескольких переменных:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & x = y = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Дифференцируемость функции n переменных:

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(|x - x^0|).$$

Теорема 3.34. *Если f дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в точке x^0, у нее существуют все частные производные первого порядка и совпадают с коэффициентами A_i в выражении дифференциала.*

Функция (3.1) является контрпримером к обратному утверждению. То есть из существования частных производных не следует дифференцируемость.

Определение непрерывной дифференцируемости.

Теорема 3.35. *Если f непрерывно дифференцируема, то она дифференцируема.*

3.5.3 геометрический смысл дифференциала, касательная плоскость

Уравнение касательной плоскости к поверхности $u(x,y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = u(x_0, y_0)$:

$$u_x(x_0,y_0)(x - x_0) + u_y(x_0,y_0)(y - y_0) = z - z_0.$$

3.5.4 дифференцирование сложной функции и независимость формы первого дифференциала

Определение. Вектор-функция, определенная на $\mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемой* в данной точке, если в этой точке дифференцируемы все ее координаты.

Теорема 3.36. *Пусть* $\vec{\varphi}(x) : U(x^0) \to \mathbb{R}^n$, $f : V(y^0) \to \mathbb{R}$, *где* $y^0 = \vec{\varphi}(x^0)$, $U(x^0)$ *— окрестность точки* $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $V(y^0)$ *— окрестность точки* y^0, *содержащая образ* $\vec{\varphi}U(y^0)$. *Пусть* $h(x) = f(\vec{\varphi}(x))$ *и функции* $\vec{\varphi}$ *и* f *дифференцируемы в точках* x^0 *и* y^0 *соответственно. Тогда функция* h *дифференцируема в точке* x^0, *причем*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^0).$$

Теорема 3.37. *Форма дифференциала* df *функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *не зависит от того, являются ли переменные* x_i *независимыми переменными или функциями от других переменных, и имеет вид:*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Следствие 3.3. $d(u+v) = du + dv$, $d(uv) = udv + vdu$, $d(u/v) = (vdu - udv)/v^2$, *где* u, v *— функции от* $x_1, \ldots, x_n$.

[Пример волнового уравнения для функции $u(x,t)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}a^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, его сведение к уравнению вида $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ линейной заменой координат: $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Подчеркнуть, что используется условие независимости порядка дифференцирования (т.е. $v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}$).]

3.5.5 производная по направлению, градиент

Определение производной по направлению, градиента. Градиент $\operatorname{grad} f$ в матричной форме записывается как вектор-строка:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right). \tag{3.2}$$

Градиент указывает направление наибольшего роста функции. Обозначим $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$. В матричной форме дифференциал, как и обычный вектор, записывается как столбец. Отсюда следует, что производная вектор-функции одной пеменной в матричной форме также представляется столбцом:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1'(x) \\ \vdots \\ a_n'(x) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Тогда $df = (\operatorname{grad} f, dx) = \operatorname{grad} f \cdot dx$ (первое произведение — скалярное, второе — матричное). Отсюда второе обозначение градиента: df/dx (производная функции f). Для вектор-функции $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x))$ получаем:

$$d\vec{\varphi} = ((\operatorname{grad} \varphi_1, dx), \ldots, (\operatorname{grad} \varphi_k, dx)).$$

Производная вектор-функции (матрица Якóби, матрица частных производных):

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

(сравнить с градиентом (3.2) при $k = 1$ и с производной вектор-функции от одной переменной (3.3) при $n = 1$). Тогда: $d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{\varphi}}{dx} \cdot dx$ (матричное произведение).

Если $k = n$, то определитель матрицы частных производных называют *якобианом*.

[Пример с полем $c/|\vec{r}|$, $c = \text{const} > 0$.]

Если частные производные $\vec{\varphi}$ берутся не по всем аргументам, а лишь по некоторым из них $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, $m < n$ и $i_1 < \dots < i_m$, то тогда матрица частных производных обозначается так:

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{i_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_{i_m}} \end{pmatrix}.$$

Если $k \leqslant n$, то всегда определена квадратная матрица $\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$, определитель которой также называют якобианом.

3.5.6 независимость производной от порядка дифференцирования

Теорема 3.38. *Если в окрестности точки* (x_0, y_0) *существуют производные* f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} *и в точке* (x_0, y_0) *производные* f_{xy}, f_{yx} *непрерывны, то* $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

[Пример с функцией $xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.]

3.5.7 дифференциалы высших порядков

Второй дифференциал:

$$d^2 f = d(df) = d(\operatorname{grad} f, dx) = (d \operatorname{grad} f, dx) + (\operatorname{grad} f, d^2 x).$$

В случае, если x — независимая переменная, $d^2 x = 0$, поэтому:

$$d^2 f = \big((\operatorname{grad} f_{x_1}, dx) \cdots (\operatorname{grad} f_{x_n}, dx)\big) \cdot dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Форма второго дифференциала является независимой только в случае, если все переменные x_i являются линейными функциями от других переменных. Т. е. если $x = At + c$, где A — матрица из n строк и k столбцов, c — вектор-константа, то $d^2x = d(Adt) = d^2t = 0$.

3.5.8 формула Тейлора

Общий вид дифференциала порядка p функции $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$d^p f(x) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

Дифференциальный оператор порядка p от функции $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$\mathrm{D}^p(f; x, t) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} t_{i_1} \dots t_{i_p}.$$

Ясно, что $d^p f = \mathrm{D}^p(f; x, dx)$.

Теорема 3.39 (Тейлора). *Пусть f в окрестности точки x^0 имеет все частные производные порядка p. Тогда имеет место формула Тейлора:*

$$f(x) = f(x^0) + \frac{\mathrm{D}^1(f; x^0, \Delta x)}{1!} + \dots + \frac{\mathrm{D}^{p-1}(f; x^0, \Delta x)}{(p-1)!} + \frac{\mathrm{D}^p(f; x^0 + \theta\Delta x, \Delta x)}{p!},$$

где $\Delta x = x - x^0$, $\theta \in (0; 1)$.

Следствие 3.4. *Пусть f в окрестности точки x^0 имеет все частные производные порядка p, и эти производные непрерывны. Тогда при $x \to x^0$*

$$f(x) = f(x^0) + \frac{\mathrm{D}^1(f; x^0, \Delta x)}{1!} + \dots + \frac{\mathrm{D}^p(f; x^0, \Delta x)}{p!} + o(|\Delta x|^p),$$

3.6 Экстремумы функции нескольких переменных

Определение локального [строгого] экстремума.

Теорема 3.40 (необходимое условие экстремума). *Если в точке x^0 функция f имеет экстремум и частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.*

Следствие 3.5. *Если в точке x^0 функция f имеет экстремум и дифференцируема в этой точке, то $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.*

Определение квадратичной формы: $x^\intercal \mathsf{A}\, x$, где A — квадратная матрица. Форма $x^\intercal \mathsf{A}\, x$ *положительно определена*, если она положительна для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, *отрицательно определена*, если она отрицательна для всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, а если знаки разные — не определена.

Теорема 3.41 (критерий Сильвестра). *Форма $x^\intercal \mathsf{A}\, x$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны. Форма $x^\intercal \mathsf{A}\, x$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных миноров чередуются начиная с минуса.*

$\mathrm{D}^2(f; x, t)$ — квадратичная форма с матрицей

$$\frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = \frac{d}{dx}(\operatorname{grad} f)^\intercal = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

То есть $\mathrm{D}^2(f; x, t) = t^\intercal \, \dfrac{d^2 f(x)}{(dx)^2} \, t$.

Теорема 3.42 (достаточное условие экстремума). *Пусть f определена и имеет все частные производные второго порядка в окрестности точки x^0. Пусть, кроме того, $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$. Тогда в этой точке:*

(a) *строгий минимум, если $\mathrm{D}^2(f; x^0, t)$ положительно определена,*

(b) *строгий максимум, если $\mathrm{D}^2(f; x^0, t)$ отрицательно определена,*

(c) *не имеет экстремума, если $\mathrm{D}^2(f; x^0, t)$ не определена.*

Следствие 3.6. *Пусть $f = f(x, y)$, $a = f_{xx}(x_0, y_0)$, $b = f_{xy}(x_0, y_0)$, $c = f_{yy}(x_0, y_0)$. Тогда если $a > 0$ и $ac - b^2 > 0$, то (x_0, y_0) — точка строгого минимума, если $a < 0$ и $ac - b^2 > 0$, то (x_0, y_0) — точка строгого максимума, и если $ac - b^2 < 0$, то экстремума нет.*

3.7 Неявные функции

3.7.1 основные теоремы о неявных функциях

Определение неявной функции $y(x)$ с помощью уравнения $F(x, y) = 0$.

Теорема 3.43 (о неявной функции). *Пусть $F(x, y)$ определена в окрестности U точки $P_0 = (x_0, y_0)$ и*

1) $F(P_0) = 0$;

2) $F(x, y)$ *непрерывна на* U;

3) *существует производная* $F_y(x, y)$ *на* U, $F_y(P_0) \neq 0$, $F_y(x, y)$ *непрерывна в точке* P_0.

Тогда существуют $\varepsilon, \delta > 0$ *такие, что в прямоугольнике* $|x - x_0| \leqslant \delta$, $|y - y_0| \leqslant \varepsilon$ *уравнение* $F(x, y) = 0$ *задает функцию* $y = f(x)$ *для всех* $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *причем функция* $f(x)$ *непрерывна на своей области определения.*

Теорема 3.44. *Пусть* $F(x, y)$ *определена в окрестности* U *точки* $P_0 = (x_0, y_0)$ *и выполнены следующие условия*

1) $F(P_0) = 0$;

2) $F(x, y)$ *непрерывна на* U;

3) *существует производная* $F_y(x, y)$ *на* U, $F_y(P_0) \neq 0$,
   $F_y(x, y)$ *непрерывна в точке* P_0;

4) *существует производная* $F_x(x, y)$ *на* U, $F_x(x, y)$ *непрерывна в точке* P_0.

Тогда заданная уравнением $F(x, y) = 0$ *функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *причем:*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Если, кроме того, производные F_x, F_y *непрерывны на* U, *то и* $f'(x)$ *существует и непрерывна на* $\operatorname{dom} f$.

[пример вычисления угла наклона касательной к эллипсу двумя способами: параметрическим и через неявную функцию]

Теорема 3.45 (о неявной функции нескольких переменных). *Пусть* $F(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *определена в окрестности* U *точки* $P_0 = (x^0, y_0)$ *и*

1) $F(P_0) = 0$;

2) $F(x, y)$ *непрерывна на* U;

3) *существует производная* $F_y(x, y)$ *на* U, $F_y(P_0) \neq 0$,
   $F_y(x, y)$ *непрерывна в точке* P_0.

Тогда существуют $\delta, \varepsilon > 0$ *такие, что в цилиндре* $|x - x^0| \leqslant \delta$, $|y - y_0| \leqslant \varepsilon$ *уравнение* $F(x, y) = 0$ *задает функцию* $y = f(x)$ *для всех* $x \in B(x^0, \delta)$, *причем функция* $f(x)$ *непрерывна.*

Если, кроме того, выполнено условие

4) *существуют производные* $F_{x_i}(x, y)$ *на* U, $F_{x_i}(x, y)$ *непрерывны в точке* P_0,

то существуют частные производные $f'_{x_i}(x^0)$, *причем*

$$f'_{x_i}(x^0) = -\frac{F_{x_i}(x^0, y_0)}{F_y(x^0, y_0)}. \tag{3.5}$$

Если же производные F_{x_i}, F_y *непрерывны на* U, *то существуют и непрерывны на* $\operatorname{dom} f$ *производные* f'_{x_i}.

Теорема 3.46. *Пусть* $F(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *дифференцируема на области* $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, *и* $F_y(x,y) \neq 0$ *на этом множестве. Тогда уравнение* $F(x,y) = 0$ *задает функцию* $y = f(x)$. *При этом* f *дифференцируема на* $\operatorname{dom} f$, *а ее частные производные выражаются соотношениями* (3.5).

3.7.2 вектор-функции нескольких переменных

Рассматривается вектор-функция

$$\vec{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

ее производная (матрица Якоби, матрица частных производных – (3.4)): $\dfrac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}$.

Теорема 3.47. *Пусть* $\vec{\varphi}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\vec{\psi}(y) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, *обе функции дифференцируемы. Тогда суперпозиция* $\vec{\chi}(x) = \psi(\varphi(x))$ *также дифференцируема и*

$$\frac{d\vec{\chi}(x)}{dx} = \frac{d\vec{\psi}(y)}{dy} \cdot \frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}$$

(*матричное произведение*).

Следствие 3.7 (якобиан сложной функции). *Пусть* $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$, $\vec{\chi}$ *— функции из теоремы, и* $n = k = m$. *Тогда*

$$\left|\frac{d\vec{\chi}(x)}{dx}\right| = \left|\frac{d\vec{\psi}(y)}{dy}\right| \left|\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}\right|.$$

Следствие 3.8. *Пусть* $\vec{\varphi} : A \to B$ $(A, B \subseteq \mathbb{R}^n)$ *— биекция, причем* $\vec{\varphi}(x)$ *и* $\vec{\psi}(y) = (\vec{\varphi})^{-1}(y)$ *дифференцируемы. Тогда*

$$\frac{d\vec{\varphi}(x)}{dx} \cdot \frac{d\vec{\psi}(y)}{dy} = \mathrm{E}_n,$$

где $y = \vec{\varphi}(x)$, E_n *— единичная матрица размерности* $n \times n$.

Определение. Дифференцируемые на области $G \subseteq \mathbb{R}^n$ функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются *зависимыми на* G, если для некоторого k существует дифференцируемая на $\mathbb{R}^{m-1}$ функция Φ такая, что

$$\varphi_k(x) = \Phi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x), \varphi_{k+1}(x), \ldots, \varphi_m(x)), \quad x \in G.$$

Теорема 3.48. *Пусть* $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ *и функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *зависимы на области* G, $m \leqslant n$. *Тогда ранг матрицы частных производных* $\dfrac{d\vec{\varphi}(x)}{dx}$ *меньше* m.

Следствие 3.9. *Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ зависимы на области G, то якобиан $\vec{\varphi}$ тождественно равен нулю на G.*

Следствие 3.10. *Если якобиан $\vec{\varphi}$ отличен от нуля в некоторой точке области G, то функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ независимы на G.*

Теорема 3.49 (о неявной вектор-функции нескольких переменных). *Пусть функция $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), \dots, F_m(x, y))$ определена на области $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Пусть, кроме того,*

1) *$\vec{F}(x, y)$ дифференцируема на U;*

2) *якобиан $\left|\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|$ отличен от нуля на области U.*

Тогда уравнение $\vec{F}(x, y) = 0$ задает дифференцируемую вектор-функцию $y = \vec{f}(x)$. При этом имеет место матричное равенство:

$$\frac{d\vec{f}(x)}{dx} = -\left(\frac{\partial \vec{F}(x, f(x))}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}(x, f(x))}{\partial x}.$$

3.8 Условный экстремум

Определение условного экстремума функции $f(x)$ при условиях $\vec{\varphi}(x) = 0$. x — вектор из $\mathbb{R}^n$, $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$, $m < n$. Обозначим

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-m}); \quad \hat{x} = (x_{n-m+1}, \dots, x_n).$$

При этом мы пишем, что $x = \tilde{x}\,\hat{x}$.

Теорема 3.50. *Пусть условия $\vec{\varphi}(x) = 0$ в окрестности точки x^0 задают единственным образом зависимость $\hat{x} = \vec{\psi}(\tilde{x})$. Пусть $g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}\,\vec{\psi}(\tilde{x}))$. Тогда x^0 — точка условного максимума (минимума) при условии $\vec{\varphi}(x) = 0$ функции f тогда и только тогда, когда $\tilde{x}^0$ — точка максимума (минимума) функции g.*

Определение. Функция $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^{\intercal}\vec{\varphi}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, называется *функцией Лагранжа*, λ — вектор параметров.

Упражнение*. Пусть A, B, C, D — матрицы размерностей, соответственно, $k \times l$, $k \times t$, $l \times p$, $t \times p$. Тогда

$$(A \;\; B)\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = AC + BD.$$

Теорема 3.51 (необходимое условие условного экстремума). *Пусть функция f определена и дифференцируема в окрестности $U(x^0)$, и ее производные непрерывны в точке x^0. Пусть также на $U(x^0)$ существует и непрерывна матрица* *частных производных* $\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\hat{x}}$, *причем в точке* x^0 *якобиан* $\left|\dfrac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\hat{x}}\right|$ *отличен от нуля. Пусть* x^0 *— точка условного экстремума* f *при условии* $\vec{\varphi}(x) = 0$. *Тогда существует единственный* λ *такой, что* $\dfrac{\partial L}{\partial x}(x^0, \lambda) = 0$.

Доказательство. Из условия $\left|\dfrac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\hat{x}}\right| \neq 0$ легко получить, что существует единственный вектор λ такой, что

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda)}{\partial\hat{x}} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial\hat{x}} + \lambda^{\mathsf{T}}\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\hat{x}} = 0. \tag{3.6}$$

Осталось показать, что $\dfrac{\partial L(x^0, \lambda)}{\partial\tilde{x}} = 0$ при найденном λ.

По теореме 3.49 о неявной вектор-функции нескольких переменных в некоторой окрестности точки x^0 существует единственное решение $\hat{x} = \vec{\psi}(\tilde{x})$ уравнения $\vec{\varphi}(x) = 0$. При этом:

$$\frac{d\vec{\psi}(\tilde{x}^0)}{d\tilde{x}} = -\left(\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\hat{x}}\right)^{-1}\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\tilde{x}}. \tag{3.7}$$

По теореме 3.50 и следствию 3.5 получаем, что $\operatorname{grad} g(\tilde{x}^0) = 0$, где $g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}\,\vec{\psi}(\tilde{x}))$. Отсюда и из (3.6), (3.7) следует, что

$$0 = \frac{dg(\tilde{x}^0)}{d\tilde{x}} = \frac{df(x^0)}{dx}\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{n-m} \\ \dfrac{d\vec{\psi}(\tilde{x}^0)}{d\tilde{x}} \end{pmatrix} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial f(x^0)}{\partial\hat{x}}\frac{d\vec{\psi}(\tilde{x}^0)}{d\tilde{x}} =$$

$$= \frac{\partial f(x^0)}{\partial\tilde{x}} + \lambda^{\mathsf{T}}\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\hat{x}}\left(\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\hat{x}}\right)^{-1}\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial\tilde{x}} + \lambda^{\mathsf{T}}\frac{\partial\vec{\varphi}(x^0)}{\partial\tilde{x}} = \frac{\partial L(x^0, \lambda)}{\partial\tilde{x}}.$$

Теорема доказана. □

Упражнение* **.** Пусть матрица A имеет размерность $m \times n$, $m \leqslant n$, $\operatorname{rang}\mathsf{A} = m$. Тогда для любого $z \perp \operatorname{Kern}\mathsf{A}$ [1] существует единственный вектор $k \in \mathbb{R}^m$ такой, что $z = \mathsf{A}^{\mathsf{T}} k$.

Теорема 3.52. *Пусть матрица* A *имеет размерность* $m \times n$, $m \leqslant n$, $\operatorname{rang}\mathsf{A} = m$, $z \perp \operatorname{Kern}\mathsf{A}$ *и* $|z| \to 0$. *Тогда* $|\mathsf{A}\,z| \asymp |z|$.

Доказательство. Квадратная матрица $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ размерности $m \times m$ невырождена, поэтому квадратичная форма $t^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} t$ положительно определена (поскольку $t^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} t = |\mathsf{A}^{\mathsf{T}} t|^2$). Пусть $S \geqslant s > 0$ — точные границы значений функции $H(t) = t^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} t$ на единичной сфере. Тогда

$$|z|^2 = k^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} k = |k|^2 t^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{\mathsf{T}} t \in [s|k|^2; S|k|^2],$$

[1] $\operatorname{Kern}\mathsf{A} = \{y|\ \mathsf{A}\,y = 0\}$ — ядро линейного оператора с матрицей A.

где $t = k/|k|$, k находится из уравнения $z = \mathsf{A}^\top k$. Аналогично,

$$|\,\mathsf{A}\,z|^2 = k^\top \mathsf{A}\,\mathsf{A}^\top \mathsf{A}\,\mathsf{A}^\top k \in [s_1|k|^2; S_1|k|^2],$$

где $S_1 \geqslant s_1 > 0$ — точные границы значений $H_1(t) = t^\top \mathsf{A}\,\mathsf{A}^\top \mathsf{A}\,\mathsf{A}^\top t$ на единичной сфере. Отсюда следует, что $|z|^2 \asymp |\,\mathsf{A}\,z|^2$. $\square$

Обозначим $E = \{x|\ \vec{\varphi}(x) = 0\}$.

Теорема 3.53 (достаточное условие условного экстремума). *Пусть f и $\vec{\varphi}$ определены и дважды дифференцируемы в окрестности точки $x^0 \in E$. Пусть, кроме того, $\operatorname{grad} L(x^0, \lambda) = 0$ при некотором λ, и для всех векторов y, удовлетворяющих равенству*

$$\frac{d\vec{\varphi}(x^0)}{dx} y = 0, \tag{3.8}$$

квадратичная форма $y^\top \dfrac{d^2 L(x^0, \lambda)}{(dx)^2} y$:

(a) *положительна, тогда x^0 — точка условного минимума $f(x)$ при условии $\vec{\varphi}(x) = 0$;*

(b) *отрицательна, тогда x^0 — точка условного максимума $f(x)$ при условии $\vec{\varphi}(x) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathsf{M} = \dfrac{d\vec{\varphi}(x^0)}{dx} = 0$. Тогда условия (a) и (b) являются достаточными условиями экстремума функции $L(x, \lambda)$ в точке x^0 по теореме 3.42. Но для всех $x \in E$ имеем $f(x) = L(x, \lambda)$, поэтому x^0 будет точкой условного экстремума для $f(x)$ при условии $\vec{\varphi}(x) = 0$.

Пусть теперь $\mathsf{M} \neq 0$. Будем считать, что ранг этой матрицы равен m. Если это не так, то в исходной задаче рассмотрим только те k условий $\varphi_{j_1}(x) = \dots = \varphi_{j_k}(x) = 0$, для которых векторы $\operatorname{grad}\varphi_{j_1}(x^0), \dots, \operatorname{grad}\varphi_{j_k}(x^0)$ линейно независимы, поскольку если x^0 — точка условного экстремума $f(x)$ при данных k условиях, то x^0 будет точкой экстремума и при всех m условиях.

Пусть $\Delta x = x - x^0$. Обозначим через y проекцию Δx на пространство $\operatorname{Kern}\mathsf{M}$. Тогда $y - \Delta x$ ортогонально этому пространству, и, по теореме 3.52,

$$|y - \Delta x| \asymp |\,\mathsf{M}(y - \Delta x)| \tag{3.9}$$

при $\Delta x \to 0$. По формуле Тейлора для $x \in E$ имеем [2]

$$0 = \vec{\varphi}(x) - \vec{\varphi}(x^0) = \mathsf{M}\,\Delta x + o(|\Delta x|) \tag{3.10}$$

при $\Delta x \to 0$. Поскольку y удовлетворяет уравнению (3.8), из (3.10) и (3.9) получаем, что

$$|y - \Delta x| \asymp |\,\mathsf{M}(y - \Delta x)| = o(|\Delta x|),$$

[2]последнее слагаемое суть вектор, каждая компонента которого есть $o(|\Delta x|)$.

следовательно, $\Delta x = y + \delta$, где $\delta_i = o(|\Delta x|)$, $i = \overline{1,n}$.

Для $x \in E$ по формуле Тейлора получаем, что

$$f(x) - f(x^0) = L(x,\lambda) - L(x^0,\lambda) =$$
$$= \operatorname{grad} L(x^0,\lambda)\Delta x + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2(L; x^0, \Delta x) + o(|\Delta x|^2) \tag{3.11}$$

при $x \to x^0$. По условию теоремы $\operatorname{grad} L(x^0,\lambda) = 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^2(L; x^0, \Delta x) &= (\Delta x)^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2}\Delta x = (y+\delta)^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2}(y+\delta) = \\ &= y^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2} y + 2y^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2}\delta + \delta^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2}\delta = \\ &= |y|^2 t^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2} t + o(|y|^2) = |\Delta x|^2 \left(t^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2} t + o(1) \right),\end{aligned}$$

где $t = y/|y|$. Очевидно, что t удовлетворяет уравнению (3.8), поэтому функция $H(t) = t^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2} t$ сохраняет знак при выполнении условия (a) или условия (b). В силу непрерывности $H(t)$ на замкнутом ограниченном множестве $\{t |\ \mathsf{M}t = 0,\ |t| = 1\}$ из полученных соотношений и формулы (3.11) получаем, что знак разности $f(x) - f(x^0)$ в достаточно малой окрестности x^0 при $x \in E$ совпадает со знаком $H(t)$. Теорема доказана. □

Пример. Пусть $f(x) = x_1 \cdots x_n$ при условии $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Для поиска условного экстремума находим

$$\operatorname{grad} L(x,\lambda) = (f(x)/x_1 + \lambda, \ldots, f(x)/x_n + \lambda) = 0,$$

откуда $x_1^0 = \cdots = x_n^0 = \lambda = 1/n$. Условие (3.8) равносильно $y_1 + \cdots + y_n = 0$. Далее,

$$y^\intercal \frac{d^2L(x^0,\lambda)}{(dx)^2} y = y^\intercal \begin{pmatrix} 0 & n^{-n+2} & \ldots & n^{-n+2} \\ n^{-n+2} & 0 & \ldots & n^{-n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n^{-n+2} & n^{-n+2} & \ldots & 0 \end{pmatrix} y = -|y|^2 n^{-n+2} < 0.$$

Поэтому $f(x)$ достигает максимума в точке $x_1 = \cdots = x_n = 1/n$. Отсюда следует, что $x_1 \cdots x_n \leqslant (1/n)^n$ и для любых $y_i \geqslant 0$, полагая $x_i = y_i / \sum_i y_i$, легко получаем, что

$$\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leqslant (y_1 + \cdots + y_n)/n.$$

3.9 Вопросы для коллоквиума

1) Производная произведения, частного, обратной функции.

2) Формула Лейбница.

3) Теорема о конечном приращении.

4) Правило Лопиталя.

5) Формула Тейлора и разложения $\exp, \sin, \cos, \ln$.

6) Достаточное условие экстремума (о смене знака производной).

7) Достаточное условие экстремума (n-ая производная).

8) Неравенство Коши—Буняковского для скалярного произведения.

9) Неравенство Минковского.

10) Путь, обратный путь, склейка путей.

11) Диффеоморфизм, кривая.

12) Производная параметризованной кривой $dy(t)/dx(t)$.

13) Частные производные, градиент.

14) Производная по направлению.

15) Дифференциал вектор-функции нескольких переменных, якобиан.

16) Биномиальная формула для $d^n f(x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

17) Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

18) Критерий Сильвестра.

19) Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

20) Производная неявной функции.

21) Условный экстремум.

Глава 4

Интегральное исчисление

4.1 Неопределенный интеграл

4.1.1 определение и свойства первообразной

Определение. *Промежутком* мы будем называть любое множество $X \subseteq \mathbb{R}$, удовлетворяющее для некотрых $a, b \in [\mathbb{R}]$, $a < b$, неравенствам: $(a; b) \subseteq X \subseteq [a; b]$. То есть промежуток — это интервал, либо интервал с одной или обеими границами.

Определение. Пусть действительная функция f определена на промежутке Δ. Если существует такая функция F, определенная на Δ, что $F' = f$ на Δ, то F называется *первообразной* функции f.

Теорема 4.1. 1. *Если F — первообразная для f, то для любой $C \in \mathbb{R}$ функция $F + C$ также является первообразной для f.*
2. *Если F_1 и F_2 — первообразные для f, то $F_1 - F_2 = \mathrm{const}$.*

Определение. Множество $\{F + C\}_{C \in \mathbb{R}}$ всех первообразных функции f называется *неопределенным интегралом* функции f и обозначается

$$\int f(x)dx \quad \text{или} \quad \int f dx.$$

Здесь f называется *подынтегральной функией*, а fdx — *подынтегральным выражением.*

Свойства неопределенного интеграла.

1) $d \int f dx = f dx$; $\int dF = F + C$

Замечание. Под дифференциалом интеграла понимается дифференциал любого элемента семейства первообразных.

2) $\int (f + g)dx = \int f dx + \int g dx$

3) *если постоянная* $k \neq 0$, *то* $\int k f dx = k \int f dx$

Таблица интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$; $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$.

13. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x dx$.

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

Замена переменной (независимость формы интеграла):

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C \quad \left(\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt\right),$$

где F — первообразная для f, а функция g диффренцируема.

Интегрирование по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu; \quad \int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

[Пример с $\ln x dx$, $xe^x dx$,]

4.1.2 интегрирование рациональных дробей

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени, соответственно, n и m. Функция $P(x)/Q(x)$ называется *рациональной*. При $n \geqslant m$ данная дробь *неправильная*, при $n < m$ — правильная. Поскольку ее всегда можно представить как сумму многочлена и правильной дроби, то далее считаем, что $n < m$.

Метод неопределенных коэффициентов. По основной теореме алгебры

$$Q(x) = c(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t},$$

где $k_1+\dots+k_r+2(s_1+\dots+s_t)=m$, $p_i^2-4q_i<0$. Тогда представим дробь $P(x)/Q(x)$ в виде суммы дробей вида

$$\frac{A}{x-a};\quad \frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Интегралы от таких дробей сводятся к табличным и, следовательно, выражаются в элементарных функциях.

Теорема 4.2. *Интеграл от рациональной функции выражается в элементарных функциях.*

[пример $\int \frac{xdx}{1+x^3}$]

Метод Остроградского.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{4.1}$$

где многочлен $Q_2(x)$ содержит те же самые корни, что и $Q(x)$, только кратности 1, т. е.

$$Q_2(x) = (x-a_1)\dots(x-a_r)(x^2+p_1xq_1)\dots(x^2+p_tx+q_t),$$

а $Q_1(x)=Q(x)/Q_2(x)$.

Из уравнения (4.1) многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ определяются однозначно.

Замечание . Метод Остроградского дает существенную выгоду, когда корней не много, но они высокой кратности.

[пример $\int \frac{dx}{x^3(1+x)^2}$]

4.1.3 интегрирование некоторых иррациональностей

Рациональная функция нескольких переменных: P/Q, где P,Q — полиномы от переменных $y_1,\dots,y_m$:

$$P(\bar{y}) = \sum_{0\leqslant k_1+\dots+k_m\leqslant n} a_{k_1\dots k_m} y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m};\quad Q(\bar{y}) = \sum_{0\leqslant k_1+\dots+k_m\leqslant l} b_{k_1\dots k_m} y_1^{k_1}\dots y_m^{k_m}.$$

Если подставить $y_i = \varphi_i(x)$ рациональные функции, то полученная дробь $\Phi(x) = P(\bar{\varphi}(x))/Q(\bar{\varphi}(x))$ снова будет рациональной. Рассмотрим случай, когда $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_i(x) = ((ax+b)/(cx+d))^{r_i}$, $i = 2, \ldots, m$, где r_i — рациональные числа. Тогда функция $R(x) = P(\bar{\varphi}(x))/Q(\bar{\varphi}(x))$ будет *иррациональной*, если хотя бы один r_i не является целым числом.

Теорема 4.3. *Интеграл*

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right) dx,$$

где R — рациональная функция m переменных, вычисляется в элементарных функциях следующей заменой переменных:

$$t = \sqrt[N]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

где N — наименьшее общее кратное знаменателей дробей r_i.

[Пример с $(x+\sqrt{x+1})/(x-\sqrt{x+1})$.]

Теорема 4.4 (подстановки Эйлера). *Интеграл*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

вычисляется в элементарных функциях следующей заменой переменных:

1) *если x_1, x_2 — корни ax^2+bx+c, то $t = \sqrt{(x-x_1)/(x-x_2)}$;*

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm x\sqrt{a}$ *(первая подстановка Эйлера);*

3) *то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$ (вторая подстановка Эйлера).*

Замечание. Подстановок Эйлера желательно избегать, вместо них использовать замену типа $x = a \operatorname{tg} t$, сводя интеграл к тригонометрическому.

[Пример с $1/\sqrt{x^2+1}$.]

4.1.4 интегрирование биномиальных дифференциалов

Определение. *Биномиальным дифференициалом* (*дифференциальным биномом*) называется функция вида $f(x) = x^m(a+bx^n)^p$, где $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{4.2}$$

вычисляется заменой $t = x^n, x = t^{1/n}, dx = (1/n)t^{1/n-1}dt$.

а) если $p \in \mathbb{Z}$, то, полагая $q = (m+1)/n - 1 = r/s$, $r, s \in \mathbb{Z}$, сводим интеграл (4.2) к интегралу от $R(t, t^{1/s})$, где R — рациональная функция. Полученный интеграл вычисляется в элементарных функциях заменой $u = t^{1/s}$;

b) если $q \in \mathbb{Z}$, то, полагая $p = r/s$, сводим интеграл (4.2) к интегралу от $R(t, (a + bt)^{1/s})$, который вычисляется в элементарных функциях заменой $u = (a + bt)^{1/s}$;

c) в случае $p + q \in \mathbb{Z}$, полагая $p = r/s$, преобразованием $t^q(a+bt)^p = t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p$ и заменой $u = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}$ сводим интеграл (4.2) к интегралу от рациональной функции от u.

Тем самым доказана

Теорема 4.5. *В случаях p — целое, либо $(m+1)/n$ — целое, либо $(m+1)/n + p$ — целое, интеграл от дифференциального бинома вычисляется в элементарных функциях.*

Теорема 4.6 (Чебышёва). *Во всех остальных случаях интеграл от дифференциального бинома не вычисляется в элементарных функциях.* [без доказательства]

[пример с $x^{1/3}(1 + x^{1/2})^{1/3}$.]

4.1.5 интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{4.3}$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция.

1) *Универсальная подстановка* $t = \operatorname{tg}(x/2)$ сводит интеграл (4.3) к интегралу от рациональной функции:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Замечание. Универсальная подставновка в ряде случаев бывает очень трудоемкой, ее желательно избегать.

2) Пусть $R(u, v)$ — нечетная по u, т. е. $R(-u, v) = -R(u, v)$.

(a) Пусть R — полином. Тогда $R = \sum a_{kl}u^k v^l$, и в силу нечетности R получаем тождество $a_{kl}u^k v^l = -a_{k_l}(-u)^k v^l$, которое выполняется только для нечетных k, поэтому R имеет вид: $uR_1(u^2, v)$, где R_1 — некоторая рациональная функция. Далее, заменой $t = \cos x$ получаем

$$\sin x \cdot R_1(\sin^2 x, \cos x)dx = -R_1(\sin^2 x, \cos x)d\cos x = R_2(t)dt,$$

где R_2 — рациональная функция, $t = \cos x$.

(b) $R = P/Q$, где P, Q — многочлены. Условие нечетности R может быть выполнено, когда P — нечетный, а Q — четный. Тогда, аналогично (a), получаем, что $P(u, v) = uP_1(u^2, v)$, $Q(u, v) = Q_1(u^2, v)$. Здесь используется такая же подстановка: $t = \cos x$. Аналогично, когда P — четный, Q — нечетный.

3) R — нечетная по v: $R(u,-v) = -R(u,v)$. Тогда $R(u,v) = vR_1(u,v^2)$, и интеграл (4.3) сводится к интегралу от рациональной функции заменой $t = \sin x$.

4) R — четная по обоим аргументам: $R(-u,-v) = R(u,v)$.

(a) Пусть $R = \sum a_{kl}u^k v^l$ — полином. Тогда равенство $(-u)^k(-v)^l = u^k v^l$ дает условие: $k+l$ — четное. Тогда

$$u^k v^l = \left(\frac{u}{v}\right)^k v^{k+l} = \left(\frac{u}{v}\right)^k v^{\frac{k+l}{2}}.$$

То есть $R(u,v) = R_1(u/v, v^2)$, где R_1 — полином. В этом случае замена $t = \operatorname{tg} x$ сводит интеграл (4.3) к интегралу от рациональной функции.

(b) $R = P/Q$. Тогда либо P и Q оба четные, и $R(u,v) = R_1(u/v, v^2)$, либо оба нечетные: $P(-u,-v) = -P(u,v)$, $Q(-u,-v) = -Q(u,v)$. Пусть $P = \sum a_{kl}u^k v^l$. Из полученного равенства $(-u)^k(-v)^l = -u^k v^l$ следует, что $k+l$ — нечетное. Тогда $u^k v^l = v(u/v)^k (v^2)^{(k+l-1)/2}$, т.е. $P(u,v) = vP_1(u/v, v^2)$. Аналогично $Q(u,v) = vQ_1(u/v, v^2)$. Тогда снова получаем, что $R(u,v) = R_1(u/v, v^2)$, и интеграл (4.3) вычисляется заменой $t = \operatorname{tg} x$.

[пример с $\cos^{-3} x$.]

Рассмотрим интеграл

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x \, dx, \quad \mu, \nu \in \mathbb{Q}. \tag{4.4}$$

Сводим к дифференциальному биному:

$$\sin^\mu x \cos^\nu x \, dx = -\sin^{\mu-1} x \cos^\nu x \, d\cos x = -(1-t^2)^{\frac{\mu-1}{2}} dt$$

заменой $t = \cos x$. Из теоремы 4.5 следует, что интеграл (4.4) вычисляется в элементарных функциях, если:

a) μ — нечетное целое;

b) ν — нечетное целое;

c) $\mu + \nu$ — четное.

В последнем случае применима также подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

4.1.6 некоторые интегралы, невычислимые в элементарных функциях

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n} dx$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n} dx$

3. $\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{dx}{\ln^n x}$

4. $\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x^n} dx$

5. $\int e^{-x^2} dx, \quad \int x^{2n} e^{-x^2} dx$

6. $\int R(x, \sqrt{P_{3(4)}(x)}) dx$,

где $n \in \mathbb{Z}$, $P_{3(4)}(x)$ — полиномы 3 и 4 степени. (Для некоторых таких полиномов интегралы берутся, а вообще говоря — нет.)

4.2 Определенный интеграл

4.2.1 интеграл Римана

Определение. *Разбиением* отрезка $[a;b]$ называется множество точек $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Диаметром* разбиения $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ называется число $\operatorname{diam}(T) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1})$. Пусть набор точек $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ таков, что $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\bar{\xi}$ называется *сечением* разбиения T.

Пусть на $[a;b]$ задана функция $f(x)$, T — разбиение отрезка $[a;b]$ и $\bar{\xi}$ — сечение T.

Определение. *Интегральной суммой Римана* для функции f, разбиения T и сечения $\bar{\xi}$ называется число

$$\sigma(f, T, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\operatorname{diam}(T) \to 0} \sigma(f, T, \bar{\xi})$, не зависящий от выбора разбиений T и их сечений $\bar{\xi}$, то этот предел называется *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a;b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx,$$

при этом функция f называется *интегрируемой по Риману* (R*-интегрируемой, суммируемой*) на отрезке $[a;b]$.

[Задача о нахождении массы стержня и работы силы.]

Теорема 4.7. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.*

4.2.2 суммы Дарбу

Пусть $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ ограничена. Для данного разбиения T определим следующие числа:

$$m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_i}f(\xi);\quad M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant\xi\leqslant x_i}f(\xi);\quad i=\overline{i,n}.$$

Определение. Суммы

$$s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1});\quad S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

называются, соответственно, *нижней и верхней суммами Дарбу* для функции f и разбиения T.

[Геометрический смысл сумм Дарбу в связи с понятием площади]

Свойства сумм Дарбу.

1) $s(T)\leqslant S(T)$

2) *если* $T_1\subseteq T_2$ *(*T_2 *— измельчение* T_1*), то* $s(T_1)\leqslant s(T_2)$ *и* $S(T_1)\geqslant S(T_2)$

3) *для любых разбиений* T_1 *и* T_2*:* $s(T_1)\leqslant S(T_2)$

4) *для любого сечения* $\bar\xi$ *разбиения* T*:* $s(T)\leqslant\sigma(T,\bar\xi)\leqslant S(T)$

5) $s(T)=\inf\limits_{\bar\xi}\sigma(T,\bar\xi)$, $S(T)=\sup\limits_{\bar\xi}\sigma(T,\bar\xi)$

Определение. Числа

$$I_*=\sup_T s(T);\quad I^*=\inf_T S(T)$$

называются, соответственно, *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f по отрезку $[a;b]$.

Теорема 4.8 (критерий интегрируемости по Риману). *Ограниченная функция* $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon>0$ *существует разбиение* T *отрезка* $[a;b]$ *такое, что* $S(T)-s(T)<\varepsilon$.

Следствие 4.1. *Ограниченная функция* $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$ *тогда и только тогда, когда* $I_*=I^*$.

[функция Дирихле не интегрируема по Риману]

4.2.3 свойства интеграла Римана

Теорема 4.9. *Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.*

Теорема 4.10. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на нем*

Определение. Если $b < a$, то полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

если последний интеграл существует. Кроме того, мы полагаем, что интеграл по отрезку $[a;a]$ существует и равен нулю.

1) $\int_a^b dx = b - a$

2) *если* $[c;d] \subseteq [a;b]$ *и* f *интегрируема на* $[a;b]$, *то* f *интегрируема на* $[c;d]$

3) *если* $c \in [a;b]$ *и* f *интегрируема на отрезках* $[a;c]$ *и* $[c;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) *если* f *и* g *интегрируемы на* $[a;b]$, *то* $f+g$ *также интегрируема и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5) *если* f *интегрируема на* $[a;b]$, *то для любого числа* $c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

6) *если* f *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $|f|$ *интегрируем на* $[a;b]$ *и*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

7) *если* f *и* g *интегрируемы на* $[a;b]$, *то их произведение также интегрируемо на* $[a;b]$

8) *если* $f \geqslant 0$ *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

Следствие 4.2. *если* $f \geqslant g$ *и обе функции интегрируемы на* $[a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$$

9) *если* $f \geqslant 0$ *интегрируема на* $[a;b]$, *в некоторой точке* $x_0 \in [a;b]$ *она непрерывная и положительна, то интеграл от* f *положителен*

Теорема 4.11 (о среднем). *Пусть* f *интегрируема на* $[a;b]$, $M = \sup f$, $m = \inf f$. *Тогда существует число* $c \in [m;M]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Следствие 4.3. *Если* f *непрерывна на* $[a;b]$, *то существует число* $\xi \in [a;b]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

4.2.4 связь определенного и неопределенного интегралов

Для функции f, интегрируемой на $[a;b]$, положим:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a;b].$$

Интеграл, в котором верхний предел является переменной величиной, называют *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 4.12. *Если* f *интегрируема на* $[a;b]$, *то* $\Phi(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$.

Теорема 4.13. *Если* f *непрерывна на* $[a;b]$, *то* $\Phi(x)$ *дифференцируема на* $[a;b]$ *и* $\Phi'(x) = f(x)$.

Следствие 4.4. *Если* f *непрервна на* $[a;b]$, *то у нее существует первообразная, представимая в виде:*

$$\int_a^x f(t)dt + C = \int f(x)dx.$$

Теорема 4.14 (формула Ньютона—Лейбница). *Если* f *непрерывна на* $[a;b]$ *и* F *— некоторая ее первообразная, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4.2.5 методы интегрирования

Теорема 4.15. *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a;b]$ *непрерывно дифференцируема и* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема 4.16. *Пусть* $u, v : [a; b] \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

[$\int_0^\pi e^x \sin(x)dx$]

4.2.6 формула Бонэ

Теорема 4.17. *Пусть* f *непрерывна на* $[a; b]$, g *монотонна и непрерывно дифференцируема на* $[a; b]$. *Тогда существует число* $\xi \in [a; b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

4.2.7 неравенства Гёльдера и Минковского

Определение. Функция f, определенная на отрезке $[a; b]$, *абсолютно интегрируема* на нем, если $|f|$ интегрируема на данном отрезке. Функция f *абсолютно интегрируема с показателем* p на отрезке $[a; b]$, если на данном отрезке интегрируема функция $|f|^p$. При $p = 2$ говорят, что f суммируема *с квадратом.*

Определение. Числа $p, q > 0$ называются *сопряженными показателями*, если $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Теорема 4.18. *Пусть функции* f *и* g *абсолютно суммируемы на отрезке* $[a; b]$ *с сопряженными показателями* p *и* q *соответственно, а также на данном отрезке интегрируема функция* $|fg|$. *Тогда имеет место неравенство Гёльдера:*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}.$$

Замечание. Аналогично доказывается соответствующее неравенство Гёльдера для сумм:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q},$$

где p и q — сопряженные показатели. При $p = q = 2$ получаем неравенство Коши—Буняковского.

Теорема 4.19. *Пусть функции* f *и* g *абсолютно интегрируемы с показателем* p. *Тогда имеет место неравенство Минковского:*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Замечание. Аналогично доказывается соответствующее неравенство Минковского для сумм:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

При $p=q=2$ получаем неравенство треугольника для случая евклидовой метрики на $\mathbb{R}^n$.

4.3 Введение в теорию меры

4.3.1 мера Жордана на плоскости

Определение. *Ячейкой* на плоскости (и в $\mathbb{R}^n$) называется прямое произведение промежутков (прямоугольник). Ячейки называются *перекрывающимися*, если их внутренности пересекаются, *касающимися*, если они имеют общие граничные точки, но не имеют общих внутренних точек.

Определение . *Мерой* (Жордана) ячейки $\Delta=\langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle$ называется число $\operatorname{mes}\Delta=(b-a)(d-c)$.

Определение . *Покрытием* множества $X\subset\mathbb{R}^2$ называется конечный набор ячеек $\Delta_1,\dots,\Delta_k$, в объединении которых содержится X.

Определение. *Внешней мерой Жордана* ограниченного множества X называется число

$$\overline{\operatorname{mes}}\,X=\inf_{\bigcup_i\Delta_i\supseteq X}\sum_i\operatorname{mes}\Delta_i,$$

где $\inf$ берется по всем покрытиям множества X. *Внутренней мерой Жордана* множества X называется число

$$\underline{\operatorname{mes}}\,X=\sup_{\bigcup_i\Delta_i\subseteq X}\sum_i\operatorname{mes}\Delta_i,$$

где сумма берется по всем конечным наборам попарно неперекрывающихся(!) ячеек. Ограниченное множество X называется *измеримым по Жордану* или *квадрируемым* (в случае $\mathbb{R}^n,n\geqslant3,$ — *кубируемым*), если $\overline{\operatorname{mes}}\,X=\underline{\operatorname{mes}}\,X$. В этом случае общее значение внутренней и внешней мер обозначается $\operatorname{mes}X$.

Некоторые свойства меры Жордана.

1) $\underline{\operatorname{mes}}\,X\leqslant\overline{\operatorname{mes}}\,X$

2) $\operatorname{mes}X\geqslant0$

3) *если* $X_1\cap X_2=\emptyset$ *и оба множества измеримы, то* $\operatorname{mes}(X_1\cup X_2)=\operatorname{mes}X_1+\operatorname{mes}X_2$

4) *если* $X \subseteq \Delta$, *то* $\overline{\mathrm{mes}}\, X = \mathrm{mes}\,\Delta - \underline{\mathrm{mes}}(\Delta \setminus X)$ *и* $\underline{\mathrm{mes}}\, X = \mathrm{mes}\,\Delta - \overline{\mathrm{mes}}(\Delta \setminus X)$

5) X *— ограничено, тогда* X *— измеримо, если и только если его граница измерима и имеет меру ноль (* $\mathrm{mes}\,\partial X = 0$ *)*

6) *если* $X_1 \subseteq X_2$ *и оба измеримы, то* $\mathrm{mes}\, X_1 \leqslant \mathrm{mes}\, X_2$

Теорема 4.20. *Если неотрицательная функция* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *ограничена, то она интегрируема по Риману на* $[a;b]$ *тогда и только тогда, когда ее подграфик измерим по Жордану. При этом площадь подграфика* f *совпадает с интегралом* f *на отрезке* $[a;b]$.

4.3.2 мера Лебега

Определение и некоторые свойства меры Лебега на $\mathbb{R}$, замечание об измеримых функциях и интеграле Лебега. Два основных следствия: из измеримости множества по Жордану следует измеримость по Лебегу, и обе меры в этом случае равны; из существования интеграла Римана следует существование интеграла Лебега, и в этом случае оба интеграла равны. Контпримеры к обратному утверждению.

Несколько слов о неконструктивных примерах в математике, связанных с аксиомой выбора. В частности, существование неизмеримых по Лебегу множеств и теорема Банаха—Тарского о разрезании шара.

4.4 Приложения определенного интеграла

4.4.1 вычисление площадей

Площадь фигуры с границей, состоящей из следующих четырех кусков: 1) график $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$; 2) график $y = g(x) \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$; 3) прямая $x = a$, $g(a) \leqslant y \leqslant f(a)$; 4) прямая $x = b$, $g(b) \leqslant y \leqslant f(b)$.

Если функции f и g интегрируемы по Риману, то полученная фигура измерима по Жордану и ее площадь равна интегралу

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

[пример: площадь круга]

4.4.2 площадь в полярных координатах

На плоскости полярные координаты (φ, ρ) связаны с декартовыми (x, y) следующим образом:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \end{cases}$$

Если плоская фигура имеет форму криволинейного сектора, т. е. занимает область между лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, то ее площадь вычисляется как интеграл
$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

4.4.3 длина дуги гладкой кривой

Пусть имеется гладкая кривая $\vec{s}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть $\vec{t} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$. Через $\vec{\gamma}(t)$ обозначим ломаную, последовательно соединяющую точки $(x(t_k), y(t_k))$. Длина ломаной равна сумме длин ее отрезков:
$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \quad \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}), \Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}).$$

При стремлении к нулю диаметра разбиения $\vec{t}$ в пределе получаем по определению *длину кривой* $\vec{s}$:
$$s = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt.$$

[пример с окружностью]

В дальнейшем под дифференциалом длины дуги понимаем дифференциальную форму:
$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt,$$
если кривая $\vec{s}$ задана функциями $x(t), y(t)$.

4.4.4 вычисление объемов и поверхностей тел вращения

Телом вращения называется тело, полученное вращением некоторой кривой вокруг какой-либо оси в пространстве. Чаще всего в качестве кривой берут график положительной функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, который вращается вокруг оси Ox.

Используя приближение объема такого тела с помощью суммы объемов вписанных в него цилиндров, получаем формулу объема тела вращения:
$$\pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Для нахождения площади поверхности тела врщения используем приближение кривой с помощью ломаной как в предыдущем пункте. Тогда поверхность тела вращения приближенно равна сумме поверхностей сегментов конусов, полученных вращением отрезков, составляющих ломаную. Отсюда, переходя к пределу, находим формулу площади поверхности тела вращения:
$$2\pi \int_a^b f(x)ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f(x)')^2}dx.$$

[Примеры с шаром]

4.5 Несобственные интегралы

4.5.1 определение н.и.

Определение . Точка $x_0 \in [\mathbb{R}]$ называется *особой точкой* функции f, если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, либо бесконечен, либо $|x_0| = \infty$.

Пусть $f : [a; b) \to \mathbb{R}$, b — особая точка f. Будем говорить, что f интегрируема *внутри* $[a; b)$, если она интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, лежащем в $[a; b)$.

Определение . Если b — особая точка f и f интегрируема внутри $[a; b)$, то символ $\int_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом* функции f по $[a; b)$.

Обозначим $F(t) = \int_a^t f(x)dx$. Если существует левый предел $F(b-0)$, то он обозначается символом несобственного интеграла, который при этом называется *сходящимся*, если $F(b-0) = \infty$, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *расходится к бесконечности*, если в $[\mathbb{R}]$ не существует предела $F(b-0)$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *расходящимся*.
[Пример с интегралом $\int_1^\infty x^a dx$]

Обобщение определения: если $a < b$ — особые точки функции f, и интегралы $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ сходятся, то их сумма считается значением несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Этот интеграл не зависит от выбора точки $c \int (a; b)$.
Наконец, если f определена на $X = [a; b] \setminus D$, где $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ — множество особых точек f, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ — это сумма несобственных интегралов на соответствующих интервалах и полуинтервалах, из которых состоит множество X.
[Пример с интегралом $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$]

Далее чаще всего будем рассматривать несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где только b — особая точка.

Теорема 4.21 (критерий Больцано—Коши). *Пусть f интегрируема внутри $[a; b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ b - \delta < t_1 < t_2 < b \to \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

4.5.2 виды и признаки сходимости н.и.

Определение . Пусть f интегрируема внутри $[a;b)$. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, *условно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, но расходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Лемма 4.1. *Из абсолютной сходимости несобственнго интеграла следует его сходимость.*

Теорема 4.22 (1-ая теорема сравнения). *Пусть $|f(x)| \leqslant g(x)$ на $[a;b)$, и обе функции интегрируемы внутри $[a;b)$. Пусть также сходится интеграл $\int_a^b g(x)dx$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно.*

Теорема 4.23 (признак Дирихле). *Пусть f,g интегрируемы внутри $[a;b)$, и выполнены следующие условия:*
a) $\int_a^t f(x)dx$ *ограничен равномерно по $t \in (a;b)$;*
b) $g(x)$ *монотонна и стремится к нулю при $x \to b-0$.*
Тогда интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Теорема 4.24 (признак Абеля). *Пусть f,g интегрируемы внутри $[a;b)$, и выполнены следующие условия:*
a) *интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится;*
b) $g(x)$ *монотонна и ограничена равномерно по x.*
Тогда интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание. Признаки Дирихле и Абеля логически независимы.

[Пример: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ в нуле сходится абсолютно, в ∞ — условно.]

Теорема 4.25 (2-ая теорема сравнения). *Пусть f,g интегрируемы внутри $[a;b)$ и неотрицательны. Тогда если $f \preccurlyeq g$, то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а если $g \preccurlyeq f$, то из сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.*

Следствие 4.5. *Если f интегрируема внутри $[1;\infty)$ и для некоторых положительных постоянных A,B выполнены неравенства $Ax^{-\alpha} \leqslant f(x) \leqslant Bx^{-\alpha}$, то* *интеграл* $\int_1^\infty f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

4.6 Интегралы с параметрами

4.6.1 предел функции по параметру

Пусть $f(x,y)$ определена на $X \times Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^m, Y \subseteq \mathbb{R}^k$. В том случае, когда $f(x,y)$ рассматривается как функция с аргументом x, а y выступает в роли второстепенной переменной, принято говорить, что y является *параметром*. Множество Y значений параметра y задает множество функций $f(x,y)$ с аргументом x. Частный случай параметра — натуральное число. Пусть $Y = \mathbb{N}$, тогда вместо y будем писать n, а вместо $f(x,y)$ — $f_n(x)$. В $[\mathbb{R}]$ существует единственная предельная точка $\mathbb{N}$ — бесконечность.

Определение. Пусть y_0 — предельная точка множества Y. Если для каждого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, то говорят, что $f(x,y)$ сходится *точечно* к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$.

Определение. Говорят, что $f(x,y)$ *сходится равномерно к* $\varphi(x)$ *на множестве* X *при* $y \to y_0$ (обозначение: $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность U точки y_0 такая, что для всех $y \in \dot{U} \cap Y$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Лемма 4.2. *Из равномерной сходимости следует точечная.*

Замечание. Обратное неверно, пример: $f(x,y) = x^y$ на $[0;1]^2$.

Говорят, что $f(x,y)$ сходится равномерно на X при $y \to y_0$, если существует ее точечный предел, и имеет место равномерная сходимость к этому точечному пределу.

Теорема 4.26 (критерий Больцано—Коши). $f(x,y)$ *сходится равномерно на* X *при* $y \to y_0$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется окрестность* U *точки* y_0 *такая, что для всех* $y_1, y_2 \in \dot{U} \cap Y$ *и для всех* $x \in X$ *имеет место неравенство* $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$.

Следствие 4.6 (критерий Больцано—Коши для последовательности). $f_n(x)$ *сходится раномерно на* X *при* $n \to \infty$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что для любого* $n > N$ *и любого натурального* p *имеет место неравенство* $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Теорема 4.27. $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ *тогда и только тогда, когда для любой последовательности* $y_n \to y_0$, *лежащей в* Y, *имеет место равномерная сходимость* $f(x,y_n) \underset{n \to \infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$.

Теорема 4.28 (теорема Дини). *Пусть* $f(x,y)$ *удовлетворяет условиям:*
1) $f(x,y)$ *непрерывна по* x *при каждом* $y \in Y$ *;*
2) $f(x,y)$ *монотонна по* y *при каждом* $x \in X$ *;*
3) $f(x,y)$ *сходится точечно к* $\varphi(x)$ *при* $y \to y_0$ *;*
4) $\varphi(x)$ *непрерывна по* x *;*
5) X *замкнуто и ограничено (компакт).*
Тогда $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ *.*

[сначала доказываем для последовательностей]

Теорема 4.29. *Если* $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ *и при каждом* $y \in Y$ $f(x,y)$ *непрерывна в точке* x_0*, то* $\varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0*.*

[доказываем сначала для последовательности]

Для непрерывных функций, заданных на множестве X можно задать норму:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

В более общем случае (функции могут быть не непрерывны) такой функционал задает полунорму. Сходимость в пространстве функций по такой полунорме эквивалентна равномерной сходимости.

Теорема 4.30. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ *тогда и только тогда, когда* $\|f(x,y)-\varphi(x)\|_\infty \to 0$ *при* $y \to y_0$*.*

Теорема о перестановке пределов.

Теорема 4.31. *Если* $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$ *и при каждом* y *существует точечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$*, то*

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

4.6.2 собственные интегралы с параметром

Пусть $f(x,y)$ определена на $[a;b]\times Y$ и y_0 — предельная точка Y. Пусть, кроме того, $f(x,y)$ интегрируема на $[a;b]$ при каждом $y \in Y$. Обозначим

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Теорема 4.32 (перестановка предела и интеграла). *Если* $f(x,y)$ *непрерывна по* $x \in [a;b]$ *при каждом* $y \in Y$ *и* $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;b]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$*, то имеет место равенство:*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

Теорема 4.33 (непрерывность интеграла). *Если* $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a;b]\times\times[c;d]$, *то* $I(y)$ *непрерывна на* $[c;d]$.

Теорема 4.34 (производная по параметру). *Пусть* $f(x,y)$ *непрерывна по* $x\in[a;b]$ *при каждом* $y\in[c;d]$, *существует и непрерывна на* $[a;b]\times[c;d]$ *частная производная* $f'_y(x,y)$. *Тогда* $I(y)$ *дифференцируема и*

$$I'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx.$$

Далее обозначим $P=[a;b]\times[c;d]$. Пусть функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ принимают значения на отрезке $[a;b]$. Пусть, кроме того, существует интеграл

$$J(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)dx$$

при каждом $y\in[c;d]$.

Теорема 4.35. *Если* $\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *непрерывны на* $[c;d]$ *и* $f(x,y)$ *непрерывна на* P, *то* $J(y)$ *непрерывна на* $[c;d]$.

Теорема 4.36. *Пусть* $\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *дифференцируемы на* $[c;d]$, $f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны на* P. *Тогда* $J(y)$ *дифференцируема и*

$$J'(y)=f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f'_y(x,y)dx.$$

Теорема 4.37. *Если* $f(x,y)$ *непрерывна на* P, *то*

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

4.6.3 равномерная сходимость н.и.

Пусть $f(x,y)$ определена на $[a;b)\times Y$, $b\in[\mathbb{R}]$ — особая точка $f(x,y)$ при каждом y, кроме того, $f(x,y)$ интегрируема внутри $[a;b)$ при каждом y и при каждом y сходится несобственный интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx. \tag{4.5}$$

[пример: $\int_0^1(1-x)^\alpha dx$, $\alpha>-1$.]

Определение . Говорят, что интеграл (4.5) *сходится равномерно на* Y, если выполнено соотношение:

$$F(t,y)=\int_a^t f(x,y)dx\underset{t\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}I(y).$$

Теорема 4.38 (критерий Больцано—Коши). *Интеграл (4.5) сходится равномерно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $A \in (a;b)$ такое, что для любых t_1, t_2, удовлетворяющих неравенствам $A < t_1 < t_2 < b$, и для любого $y \in Y$ имеет место неравенство $\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$.*

Теорема 4.39 (признак Вейерштрасса). *Если $|f(x,y)| \leqslant g(x)$ на $[a;b) \times Y$ и $g(x)$ несобственно интегрируема на $[a;b)$, то интеграл (4.5) сходится равномерно на Y.*

Замечание. Признак Вейерштрасса дает одновременно равномерную сходимость интеграла от $|f(x,y)|$ (будем называть это абсолютно-равномерной сходимостью).

Пусть $g(x,y)$ также интегрируема внутри $[a;b)$ при каждом $y \in Y$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx. \tag{4.6}$$

Теорема 4.40 (признак Дирихле). *Пусть выполнены условия:*
a) $\left|\int_a^t f(x,y)dx\right|$ *ограничен равномерно по $t \in (a;b)$ и $y \in Y$;*
b) $g(x,y) \underset{x\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$ *и $g(x,y)$ монотонна по x при каждом $y \in Y$.*
Тогда интеграл (4.6) сходится равномерно на Y.

Теорема 4.41 (признак Абеля). *Пусть выполнены условия:*
a) *интеграл (4.5) сходится равномерно на Y;*
b) *$g(x,y)$ монотонна по x при каждом $y \in Y$ и ограничена равномерно по x, y.*
Тогда интеграл (4.6) сходится равномерно на Y.

[интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x}dx$ сходится равномерно на ∞ по $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, а в нуле равномерной сходимости нет]

4.6.4 непрерывность и дифференцируемость н.и.

К условиям предыдущего пункта добавим обычное обозначение y_0 для предельной точки множества Y.

Теорема 4.42. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *$f(x,y)$ непрерывна по x на $[a;b)$ при всех $y \in Y$;*
2) *$f(x,y)$ сходится равномерно на $[a;t]$ при $y \to y_0$ при любом $t \in (a;b)$;*
3) *интеграл (4.5) сходится равномерно на Y.*
Тогда

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

Далее положим $P = [a;b) \times [c;d]$.

Теорема 4.43. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна на* P *и интеграл* (4.5) *сходится равномерно на* $[c; d]$. *Тогда* $I(y)$ *непрерывна на* $[c; d]$.

Теорема 4.44. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна на* P, $f(x, y) \geqslant 0$, *интеграл* (4.5) *сходится при каждом* $y \in Y$, $I(y)$ *непрерывна на* $[c; d]$. *Тогда* (4.5) *сходится равномерно.*

Теорема 4.45 (дифференцирование по параметру). *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $f(x, y)$ *непрерывна по* x *на* $[a; b)$ *при всех* $y \in [c; d]$;
2) $f'_y(x, y)$ *существует и непрерывна на* P;
3) *интеграл* (4.5) *сходится при каждом* $y \in [c; d]$;
4) *интеграл* $\int_a^b f'_y(x, y)dx$ *сходится равномерно на* $[c; d]$.
Тогда имеет место правило Лейбница:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx.$$

4.6.5 вычисление н.и. дифференцированием по параметру

Вычислим интеграл $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Этот интеграл не вычислить по формуле Ньютона—Лейбница, т. к. неопределенный интеграл от $\frac{\sin x}{x}$ не выражается в элементарных функциях. Рассмотрим интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} e^{-\beta x} dx.$$

Ясно, что $I = J(1, 0)$.

По признаку Дирихле интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ сходится равномерно по $\beta \geqslant 0$ (т. к. не зависит от β) при каждом фиксированном α. Поскольку $e^{-\beta x} \leqslant 1$ равномерно по $\beta \geqslant 0$, интеграл $J(\alpha, \beta)$ сходится равномерно по $\beta \geqslant 0$ при любом фиксированном α. Кроме того, функция $g_\alpha(x, \beta) = \sin(\alpha x) \exp\{-\beta x\}/x$ непрерывна по x при всех $\beta \geqslant 0$ и при любом $t > 0$ $g_\alpha(x, \beta)$ сходится равномерно по $x \in [0; t]$ к $\sin(\alpha x)/x$ при $\beta \to +0$. Тогда по теореме 4.42 мы можем переходить к пределу под знаком интеграла, откуда

$$J(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to +0} J(\alpha, \beta). \tag{4.7}$$

Вычислим $J(\alpha, \beta)$, $\beta > 0$, дифференцированием по параметру α. Полагая по непрерывности $g_\alpha(0, \beta) = \alpha$, получаем, что $g_\alpha(x, \beta)$ непрерывна по x для всех α, производная $\frac{\partial}{\partial \alpha} g_\alpha(x, \beta) = \cos(\alpha x) \exp\{-\beta x\}$ непрерывна по (α, x) на $\mathbb{R} \times [0; \infty)$. Кроме того, интеграл $\int_0^\infty \cos(\alpha x) \exp\{-\beta x\} dx$ сходится равномерно по α при каждом фиксированном $\beta > 0$ по признаку Вейерштрасса. Тогда по теореме 4.45 имеем:

$$J'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \cos(\alpha x) e^{-\beta x} dx.$$

Вычисляя последний интеграл по частям, приходим к уравенению: $J'_\alpha(\alpha,\beta) = \beta\alpha^{-2} - \beta^2\alpha^{-2}J'_\alpha(\alpha,\beta)$. Отсюда $J'_\alpha(\alpha,\beta) = \beta/(\alpha^2+\beta^2)$, поэтому

$$J(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta) + C(\beta),$$

а $C(\beta)$ легко найти, подставив $\alpha = 0$. Окончательно имеем $J(\alpha,\beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta)$. Отсюда и из (4.7) получаем, что

$$I = J(1,0) = \lim_{\beta\to+0} \operatorname{arctg}(1/\beta) = \pi/2.$$

4.6.6 интегрирование н.и. по параметру

Пусть по-прежнему $f(x,y)$ определена на $P = [a;b)\times[c;d]$ и при каждом y интегрируема внутри $[a;b)$.

Теорема 4.46. *Пусть $f(x,y)$ непрерывна на P и интеграл (4.5) сходится равномерно на $[c;d]$. Тогда $I(y)$ интегрируема на $[c;d]$ и*

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Следствие 4.7. *Если $f(x,y) \geqslant 0$ и непрерывна на P, интеграл $I(y)$ непрерывен по $y \in [c;d]$, то выполнена та же формула перестановки интегралов.*

Рассмотрим теперь более сложный случай: d — также особая точка $f(x,y)$. Пусть $f(x,y)$ определена на $Q = [a;b)\times[c;d)$ и интегрируема внутри $[a;b)$ по x и внутри $[c;d)$ по y. Обозначим также $J(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$.

Теорема 4.47. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *$f(x,y)$ непрерывна на P;*
2) *$I(y)$ и $J(x)$ сходятся равномерно на отрезках $[a;b']$ и $[c;d']$ соответственно, где $a < b' < b$, $c < d' < d$;*
3) *сходится один из интегралов:*

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)dx \quad \textit{или} \quad \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|dx\right)dy.$$

Тогда $I(y)$ и $J(x)$ несобственно интегрируемы и их интегралы равны.

Следствие 4.8. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *$f(x,y) \geqslant 0$ и непрерывна на P;*
2) *$I(y)$ и $J(x)$ непрерывны;*
3) *сходится один из интегралов:*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \quad \textit{или} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Тогда сходится и второй интеграл, и оба они равны.

4.6.7 интеграл Пуассона

Вычислим еще один "неберущийся интеграл" — интеграл Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$. Идея вычисления такова.

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} dudx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} ue^{-u^2(t^2+1)} dtdu \quad (x = ut).$$

Если здесь можно переставлять интегралы, то получим:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u^2(t^2+1)} ududt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{4.8}$$

Обозначим $f(u,t) = ue^{-u^2(t^2+1)}$,

$$J(u) = \int_0^{\infty} f(u,t)dt = Ie^{-u^2}, \quad I(t) = \int_0^{\infty} f(u,t)du = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2+1}.$$

Функция $J(u)$ непрерывна при $t > 0$, но разрывна в точке 0. Поэтому рассмотрим ее на полуинтервале $[v, \infty)$, $v > 0$. Поскольку $f(u,t)$ непрерывна и неотрицательна на $[0,\infty) \times [v,\infty)$, $J(u)$ непрерывна на $[v,\infty)$ и сходится следующий интеграл:

$$\int_0^{\infty} \int_v^{\infty} f(u,t)dudt,$$

по следствию 4.8 можно менять в нем порядок интегрирования. Итак,

$$\int_0^{\infty} \int_v^{\infty} f(u,t)dudt = \int_v^{\infty} \int_0^{\infty} f(u,t)dtdu. \tag{4.9}$$

Осталось обосновать здесь возможность предельного перехода при $v \to +0$. Обозначим $H(t,v) = \int_0^{\infty} f(u,t)du$. Так как

$$H(t,v) = \frac{1}{2(t^2+1)} e^{-v^2(t^2+1)}$$

непрерывна по t на $[0,\infty)$, для любого $a > 0$ $H(t,v)$ сходится равномерно по $t \in [0;a]$ к $\frac{1}{2(t^2+1)}$ при $v \to +0$ (по теореме Дини), и интеграл $\int_0^{\infty} H(t,v)dt$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, то по теореме 4.42 окончательно получаем, что предельный переход под знаком интеграла в (4.9) допусти́м. Отсюда получаем равенство (4.8). Итак,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.6.8 функции Эйлера

Поскольку класс элементарных функций достаточно узок для приложений математического анализа, существует целый ряд так называемых специальных функций, которые определяются с помощью некоторой процедуры, допустимой в рамках аксиоматики действительных чисел (см. пункт 1.3.2), и невычислимы в элементарных функциях. Здесь приводятся определения и свойства двух функций Эйлера.

Бета-функция Эйлера. По определению она равна

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Свойства бета-функции.

1) *область сходимости:* $a>0, b>0$

2) $B(a,b)$ *непрерывна по* a *и по* b *в области сходимости*

3) $B(a,b)=B(b,a)$

4) *при* $b>1$ *имеем:* $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$

5) *при натуральных* m,n *получаем*

$$B(m,n)=\binom{m+n-2}{n-1}^{-1}(m+n-1)^{-1}$$

6) $B(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$

7) *для* $a\in(0;1)$ *имеем:* $B(a,1-a)=\pi/\sin(a\pi)$

Гамма-функция Эйлера. По определению она равна

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx.$$

Свойства гамма-функции.

8) *область сходимости:* $s>0$

9) $\Gamma(s)$ *бесконечно дифференцируема и*

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^\infty x^{s-1}(\ln x)^n e^{-x}dx$$

10) *при* $s>1$ *имеем:* $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$

11) *если* $n\in\mathbb{N}$, *то* $\Gamma(n+1)=n!$

Принято продлевать $\Gamma(s)$ в область нецелых неположительных чисел, пользуясь формулой $\Gamma(s)=\Gamma(s+1)/s$. Кроме того, существует аналитическое продолжение $\Gamma(s)$ на комплексную плоскость. Функция комплексного переменного $\Gamma(z)$, совпадающая с $\Gamma(s)$ на действительной оси, регулярна (т. е. бесконечно дифференцируема) на всей комплексной плоскости за исключением неположительных целых точек, которые являются ее полюсами (т. е. предел $\Gamma(z)$ в этих точках существует и равен ∞). С помощью этой функции определяют факториал комплексного числа как $z! = \Gamma(z+1)$.

12) $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

13) $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi/\sin(a\pi)$, $a \in (0;1)$

14) $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ *(замена $x = t^2$)*

15) $-\Gamma'(1) = \gamma$, *где γ — постоянная Эйлера, которая удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

при $n \to \infty$

Приведем также соотношение, связывающее гамма-функцию Эйлера с дзета-функцией Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}; \quad \Gamma(s)\zeta(s) = H(s),$$

где $H(s) = \int_0^\infty \dfrac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$.

4.7 Вопросы для коллоквиума

1. Первообразная и ее свойства.
2. Таблица интегралов.
3. Замена переменной и интегрирование по частям.
4. Метод неопределенных коэффициентов.
5. Метод Остроградского.
6. Вычисление интеграла $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_m}\right) dx$.
7. Подстановки Эйлера.
8. Биномиальный дифференциал.
9. Интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
10. Интегралы, невычислимые в элементарных функциях.
11. Интегральные суммы Римана и Дарбу для функции на отрезке.

12. Определение и свойства интеграла Римана.
13. Теорема о среднем.
14. Формула Ньютона—Лейбница.
15. Замена переменной в определенном интеграле.
16. Интегрирование по частям.
17. Формула Бонэ.
18. Неравенство Гельдера для интегралов и для сумм.
19. Неравенство Минковского для интегралов и для сумм.
20. Площадь криволинейной трапеции и площадь в полярных координатах.
21. Длина дуги гладкой кривой.
22. Объем тела вращения.
23. Поверхность тела вращения.
24. Определение несобственного интеграла, виды сходимости.
25. Сходимость и расходимость интегралов $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^\lambda}$ и $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^\lambda}$.
26. Точечная и равномерная сходимость по параметру.
27. Теорема Дини.
28. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла *с параметром*.
29. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла *с параметром*.
30. Интеграл Пуассона, бета- и гамма-функции Эйлера.
31. Основные свойства бета- и гамма-функций Эйлера.

Глава 5

Некоторые виды интегралов

5.1 Кратные интегралы

5.1.1 интеграл Римана от функции нескольких переменных

Для произвольного множества $M \subseteq \mathbb{R}^n$ определим его диаметр $\operatorname{diam}(M)$ как $\sup|(x-y)|$, где x, y — произвольные точки M. Пусть G — измеримое (здесь и далее — по Жордану) подмножество $\mathbb{R}^n$ и $T = \{G_k\}_{k=1}^r$ — набор измеримых множеств, содержащихся в G.

Определение . T называется *разбиением множества* G, если все $\operatorname{int} G_k$ не пусты, попарно не пересекаются, а сумма их замыканий дает замыкание G ($\bigcup_k [G_k] = [G]$).

Обозначим $\operatorname{diam}(T) = \max\{\operatorname{diam}(G_1), \ldots, \operatorname{diam}(G_r)\}$ — *диаметр* разбиения T. *Сечением* разбиения T назовем всякий набор точек $\xi = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}\}$, удовлетворяющих условию: $x^{(k)} \in G_k$. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$.

Определение. *Интегральной суммой Римана* для функции f при данном разбиении T и сечении ξ называется величина

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^{r} f(x^{(k)}) \operatorname{mes}(G_k).$$

Функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на множестве G, если существует предел $\lim\limits_{\operatorname{diam}(T)\to 0} \sigma(f, T, \xi)$, не зависящий от выбора разбиений и сечений. Этот предел обозначают

$$\int_G f(x)dx = \iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

и называют *интегралом* (Римана) функции f по множеству G.

Теорема 5.1. *Если функция интегрируема по Риману на G, то она ограничена.*

5.1.2 суммы Дарбу и критерий R-интегрируемости

Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ ограничена. Положим тогда

$$M_k = \sup_{x \in G_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in G_k} f(x),$$

где все обозначения мы заимствуем из предыдущего пункта.

Определение. Величины

$$S(f,T) = \sum_{k=1}^{r} M_k \operatorname{mes} G_k; \quad s(f,T) = \sum_{k=1}^{r} m_k \operatorname{mes} G_k$$

называются, соответственно, *верхней* и *нижней суммами Дарбу*.

[геометрический смысл сумм Дарбу в связи с понятием объема]

В данном общем случае суммы Дарбу обладают свойствами, аналогичными суммам Дарбу для одномерного интеграла (см. п. 4.2.2):

1) $s(f,T) \leqslant S(f,T)$

Назовем T_1 *измельчением* разбиения T, если существуют разбиения $t_1, \dots, t_r$ множеств, соответственно, $G_1, \dots, G_r$ такие, что их объединение равно T_1. При этом T_1 является разбиением множества G.

2) *если T_1 — измельчение T, то* $s(f,T) \leqslant s(f,T_1) \leqslant S(f,T_1) \leqslant S(f,T)$

3) *для любых разбиений T_1, T_2 имеем:* $s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2)$

4) *для любого сечения ξ разбиения T имеем:* $s(f,T) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T,\xi)$

5) $s(f,T) = \inf_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$, $S(f,T) = \sup_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$

Определение. Числа

$$I^* = \inf_T S(f,T), \quad I_* = \sup_T S(f,T)$$

называются, соответственно, *верхним* и *нижним интегралми Дарбу* функции f по множеству G.

Теорема 5.2. *Ограниченная на G функция f интегрируема по Риману на G тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений T множества G с диаметром $\operatorname{diam}(T) < \delta$ имеет место неравенство $|s(f,T) - S(f,T)| < \varepsilon$.*

Следствие 5.1. *Ограниченная на G функция f интегрируема по Риману на G тогда и только тогда, когда $I^* = I_*$.*

Критерий интегрируемости, связанный с мерой Лебега.

Теорема 5.3 (Лебега). *Ограниченная функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на G тогда и только тогда, когда она почти всюду*[1] *(относительно меры Лебега) непрерывна на нем.*

5.1.3 свойства интеграла Римана

1) $\int_G 1dx = \operatorname{mes} G$, *если G измеримо (здесь и далее — по Жордану)*

2) *если $H \subseteq G$, и оба множества измеримы, а f интегрируема на G, то тогда f интегрируема на H*

3) *если $G_1, \ldots, G_r$ — разбиение множества G, и на каждом G_k функция f интегрируема, то она интегрируема на G и*

$$\int_G f dx = \sum_{k=1}^{r} \int_{G_k} f dx$$

4) *если f и g интегрируемы на G, то для любых констант a и b*

$$\int_G (af + bg)dx = a\int_G f dx + b\int_G g dx$$

5) *если f интегрируема на G, то $|f|$ интегрируема на G и*

$$\left|\int_G f dx\right| \leqslant \int_G |f| dx$$

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно.

6) *если $f \leqslant g$ на G и обе функции интегрируемы на G, то*

$$\int_G f dx \leqslant \int_G g dx$$

7) *если G — измеримое множество с непустой внутренностью, $f \geqslant 0$ интегрируема на G, $f(x^0) > 0$ и f непрерывна в точке x^0, то $\int_G f dx > 0$*

Теорема о среднем:

8) *если f непрерывна на $[G]$, G — область (либо отличается от некоторой области на множество меры ноль), то существует точка $\xi \in [G]$ такая, что $\int_G f dx = f(\xi) \operatorname{mes} G$*

[1]Выражение "почти всюду" здесь означает "на всем множестве G, за исключением его подмножества меры ноль". Иными словами, множество точек разрыва функции f имеет меру Лебега ноль.

5.1.4 вычисление двойного интеграла

Теорема 5.4. *Пусть* $f(x,y)$ *интегрируема на ячейке* $P=(a;b)\times(c;d)$ *и при каждом* y *интегрируема на* $(a;b)$ *по* x. *Тогда*

$$\int_P f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Теорема 5.5. *Если область* G *ограничена линиями* $x=a, x=b$, $a<b$, *и* $y= =\varphi(x), y=\psi(x)$, $\varphi\leqslant\psi$, *функции* φ,ψ *непрерывны, а* f *интегрируема на* G *и при каждом* x *интегрируема на отрезке* $[\varphi(x);\psi(x)]$ *по* y, *то*

$$\int_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

5.1.5 вычисление тройного интеграла

Теорема 5.6. *Пусть область* $G=\{(x,y,z)|\ \varphi(x,y)<z<\psi(x,y),(x,y)\in D\}$, *где* D *— область в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть также* φ *и* ψ *непрерывны на* D, *для каждой точки* $(x,y)\in D$ *функция* $f(x,y,z)$ *интегрируема по* z *на отрезке* $[\varphi(x,y);\psi(x,y)]$ *и* $f(x,y,z)$ *интегрируема на* G. *Тогда*

$$\int_G f(x,y,z)dxdydz = \int_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy.$$

[Пример с криволинейным цилиндром]

5.2 Криволинейные интегралы

5.2.1 к.и. 1-го рода

Обобщение интеграла по отрезку — криволинейный интеграл. Рассмотрим некоторую кривую γ в $\mathbb{R}^n$ и ее представителя $\vec{\varphi}(t)$, $t\in[a;b]$. Выберем разбиение отрезка $[a;b]$: $a=t_0<t_1<\dots<t_r=b$. Пусть $M_k=\vec{\varphi}(t_k)$, $k=\overline{0,r}$. Будем считать, что кривая γ *спрямляема*, т.е. существует ее длина (4.4.3).

Обозначим длины дуг $M_{k-1}M_k$ через Δs_k, $k=\overline{1,r}$. Выберем некоторым образом точки $N_1,\dots,N_r$ так, что для каждого k N_k лежит на дуге $M_{k-1}M_k$. Пусть функция f определена на носителе кривой γ. Составим интегральную сумму для функции f по кривой γ:

$$\sigma=\sum_{k=1}^r f(N_k)\Delta s_k.$$

Определение . Если существует предел таких сумм при $\max_k(t_k-t_{k-1})\to 0$, не зависящий от выбора точек t_k и N_k, то он называется *криволинейным интегралом 1-го рода* функции f по кривой γ и обозначается

$$\int_\gamma f ds.$$

Задача о массе кривой. Пусть ρ — линейная плотность кривой γ. Тогда масса каждого сегмента кривой $M_{k-1}M_k$ (см. предыдущий п.) может быть приближена числом $\rho(N_k)\Delta s_k$. Отсюда следует, что массу кривой можно определить как криволинейный интеграл 1-го рода от плотности ρ по кривой γ.

5.2.2 свойства к.и. 1-го рода

Здесь во всех равенствах предполагается, что все интегралы существуют.

1) $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma^{-1}} f ds$

2) *если* $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ *(склейка путей), то* $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

3) *для любых констант* a, b *имеем:* $\int_\gamma (af(x) + bg(x)ds) = a\int_\gamma f ds + b\int_\gamma g ds$

5.2.3 вычисление к.и. 1-го рода

Теорема 5.7. *Если* f *непрерывна на носителе* γ, *а* γ *— гладкая кривая, представителем которой является* $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [a; b]$, *то интеграл* $\int_\gamma f ds$ *существует и равен*

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))|d\vec{\varphi}(t)| = \int_a^b f(\vec{\varphi}(t))|\vec{\varphi}'(t)|dt.$$

В частном случае $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ получаем, что

$$|d\vec{\varphi}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

[Пример: кривая $x^2 + y^2 = a^2$ с плотностью $|xy|$.]

5.2.4 к.и. 2-го рода

Пусть вновь имеется кривая γ в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная представителем $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [a; b]$. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ — разбиение отрезка $[a; b]$ и $M_k = \vec{\varphi}(t_k)$, $k = \overline{0, r}$. Через $\Delta\vec{s}_k$ обозначим вектор $M_k - M_{k-1}$, $k = \overline{1, r}$. Пусть на носителе кривой γ определена вектор-функция $\vec{F}$ со значениями также в $\mathbb{R}^n$. Выберем произвольно точки N_k с дуг $M_{k-1}M_k$. Теперь составим следующую интегральную сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{r}(\vec{F}(N_k), \Delta\vec{s}_k),$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение.

Определение . Если существует предел таких сумм при $\max_k(t_k - t_{k-1}) \to 0$, не зависящий от выбора точек t_k и N_k, то он называется *криволинейным интегралом 2-го рода* функции $\vec{F}$ по кривой γ и обозначается

$$\int_\gamma (\vec{F}, d\vec{s}) = \int_\gamma F_1 ds_1 + \cdots + F_n ds_n.$$

В частном случае $n = 3$, $\vec{s} = (x, y, z)$, $\vec{F} = (p, q, r)$, криволинейный интеграл 2-го рода записывают, соответственно, в виде $\int_\gamma pdx + qdy + rdz$.

Дифференциальную форму $(\vec{F}, d\vec{s})$ или $pdx + qdy + rdz$ чаще будем обозначать ω. Следует помнить, что коэффициенты F_k (они же p, q, r) являются функциями от $x_1, \dots, x_n$ (соответственно, x, y, z). Если существует интеграл от формы ω, то говорят, что ω интегрируема по кривой γ. Мы говорим, что форма ω непрерывна, дифференцируема (и т. п.), если, соответственно, непрерывна, дифференцируема (и т. п.) вектор-функция $\vec{F}$.

Задача о работе силы. Пусть на материальную точку, движущуюся вдоль кривой γ, действует переменная сила $\vec{F}$. Принимая ее за постоянную на бесконечно малом участке $d\vec{s}$ кривой γ, мы получаем, что скалярное произведение $(\vec{F}, d\vec{s})$, равное проекции силы $\vec{F}$ на касательную к кривой γ в данной точке, выражает работу этой силы на участке ds. Таким образом, интегральная сумма σ является приближением полной работы силы $\vec{F}$ вдоль кривой γ. Поэтому предельное значение сумм σ в данной интерпретации принято считать работой силы $\vec{F}$ вдоль кривой γ:

$$A = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{s}).$$

5.2.5 свойства к.и. 2-го рода

1) *если ω интегрируема по $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ (склейка), то* $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$

2) *если $\omega = \omega_1 + \omega_2$ (т. е. $p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$ и т.д.) и обе формы ω_1 и ω_2 интегрируемы по γ, то* $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

3) *если ω интегрируема по γ, то для любой постоянной a* $\int_\gamma (a\omega) = a\int_\gamma \omega$

4) *если ω интегрируема по γ, то она интегрируема по γ^{-1} и* $\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma^{-1}} \omega$

5.2.6 вычисление к.и. 2-го рода

Теорема 5.8. *Если γ — гладкая кривая, заданная представителем $\vec{\varphi}(t)$, $t \in [a; b]$, а функция $\vec{F}$ непрерывна на носителе кривой γ, то*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (\vec{F}(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t))dt. \tag{5.1}$$

В частном случае $n = 3$, $\vec{F} = (p, q, r)$, $\vec{\varphi} = (x, y, z)$ имеем:

$$\int_\gamma pdx + qdy + rdz = \int_a^b (px' + qy' + rz')dt,$$

т. е. следует выполнять привычную нам по интегралу Римана замену переменных.
[Пример: форма $\omega = xdy - ydx$ вдоль эллипса.]

Замечание. Если γ — кусочно-гладкая кривая, т. е. является склейкой конечного числа гладких кривых, то интеграл является суммой интегралов по гладким кускам, каждый из которых уже можно вычислять по формуле (5.1).

5.2.7 формула Грина

Здесь приводится формула Грина, устанавливающая связь между криволинейным интегралом 2-го рода и двойным интегралом. Мы называем область $G \subseteq \mathbb{R}^2$ *односвязной*, если любой простой замкнутый контур γ, носитель которого содержится в G, ограничивает такую область в $\mathbb{R}^2$, которая содержится в G. Область G называется K*-связной*, если она получена как разность односвязной области и суммы $K-1$ содержащихся в ней попарно не пересекающихся компактов, являющихся замыканиями односвязных областей: $G = G_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{K-1}[G_j]$ ($G_0, G_1, \ldots, G_{K-1}$ — односвязные области, причем $[G_1], \ldots, [G_{K-1}]$ попарно не пересекаются и содержатся в G_0). Такие компакты по отношению к области G принято называть *дырками*.

Часто при интегрировании по замкнутому контуру на плоскости не указывают направление обхода по контуру. Это означает, что интегрирование производится в положительном направлении обхода, т. е. когда область, ограниченная данным контуром, все время остается слева при движении по контуру (против часовой стрелки). Именно такую ориентацию следует подразумевать в следующей теореме.

Теорема 5.9. *Пусть область $G \subseteq \mathbb{R}^2$ односвязная с кусочно-гладкой границей γ, форма $\omega = pdx + qdy$ определена и непрерывно дифференцируема на $[G]$. Тогда имеет место формула Грина:*

$$\int_\gamma \omega = \iint_G (q'_x - p'_y)dxdy.$$

Замечание. Для исчисления дифференциальных форм вводят обычно следующие аксиомы: 1) $dxdy = -dydx$, 2) $dxdx = 0$. Отметим, что эти аксиомы справедливы, если dx, dy являются векторами, а $dxdy$ — их векторное произведение. Пользуясь этими аксиомами и тем условием, что переменные x, y независимы на области G, т. е. $d^2x = d^2y = 0$, нетрудно получить, что

$$d\omega = (p'_x dx + p'_y dy)dx + (q'_x dx + q'_y dy)dy = (q'_x - p'_y)dxdy.$$

$d\omega$ является дифференциальной формой второго порядка. Таким образом, формула Грина может быть переписана в виде:

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega.$$

Следствие 5.2. *Если G — односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочной-гладкой границей, то* $\operatorname{mes} G = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{\partial G} xdy - ydx$.

5.2.8 независимость криволинейного интеграла от пути

Определение. Непрерывная на области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ дифференциальная форма $\omega = pdx + qdy$ называется *точной*, если на D существует такая функция U, что $dU = \omega$; непрерывно дифференцируемая на D форма ω называется *замкнутой*, если $q'_x = p'_y$ ($d\omega = 0$).

Лемма 5.1. *Если дифференциальная форма точна, то она замкнута.*

Теорема 5.10. *Пусть ω — непрерывно дифференцируемая форма на области D. Тогда эквивалентны следующие три утверждения:*
1) *для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой γ, лежащей в области D справедливо равенство:* $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$;
2) *интеграл* $\displaystyle\int_\gamma \omega$ *не зависит от выбора кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в D и соединяющей две фиксированные точки в D;*
3) *ω точна в D.*

Теорема 5.11. *Если область D односвязна, то непрерывно дифференцируемая форма ω, заданная на D, точна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Следствие 5.3. *Пусть область D имеет k компактных односвязных дырок, γ — замкнутый гладкий контур в D, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — простые гладкие контуры, ограничивающие дырки области D. Пусть также форма ω замкнута и непрерывно дифференцируема в D. Тогда*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{k} C_j \int_{\gamma_j} \omega,$$

где C_j — число ориентированных оборотов контура γ вокруг j-ой дырки.

Замечание. Число ориентированных оборотов вычисляется как разность числа оборотов контура в положительном направлении (при обходе дырка остается слева) и числа оборотов в отрицательном направлении.

5.3 криволинейные координаты

Пусть задано следующее преобразование координат на плоскости:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \tag{5.2}$$

где функции φ, ψ дважды непрерывно дифференцируемы на замыкании области D. Пусть Ω — образ области D при преобразовании (5.2). Обозначим через $J(u,v)$ якобиан (см. стр. 34) этого преобразования. Мы будем предполагать далее, что всюду на области D преобразование плоскости невырожденное, т. е. $J(u,v)$ не обращается в ноль. В силу связности D получаем также, что якобиан сохраняет знак на D. Отметим, что при гладком невырожденном преобразовании плоскости область переходит в область, а граница области в границу ее образа, т. е. $\partial\Omega$ является образом ∂D.

Теорема 5.12. *Пусть задано преобразование* (5.2) *со всеми перечисленными выше ограничениями. Тогда*

$$\operatorname{mes}\Omega = \iint\limits_D |J(u,v)|dudv.$$

Обобщение данной теремы — утверждение о замене переменных в двойном интеграле.

Теорема 5.13. *Пусть задано преобразование* (5.2) *с указанными ранее ограничениями и пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[\Omega]$. Тогда справедлива формула замены переменных:*

$$\iint\limits_\Omega f(x,y) = \iint\limits_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы и для случая n–мерного пространства.

5.4 Поверхностные интегралы

5.4.1 поверхность, площадь поверхности

Определение. Функция $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : D \to \mathbb{R}^3$, где D — область в $\mathbb{R}^2$, называется *непрерывной* (*дифференцируемой j-го порядка, непрерывно дифференцируемой j-го порядка*), если каждая из функций x, y, z непрерывна (дифференцируема до j-го порядка, непрерывно дифференцируема до j-го порядка).

Определение. Пусть заданы непрерывные функции $r_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$, $r_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$, где D_1, D_2 — области в $\mathbb{R}^2$. Обозначим $r_1 \sim_j r_2$, если существует биекция

$F : [D_1] \to [D_2]$, непрерывно дифференцируемая до j-го порядка и такая, что $r_1(u,v) \equiv r_2(F(u,v))$ на D_1, $j = 0, 1, \ldots$

Отношение $\sim_j$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности по данному отношению будем называть *поверхностью* непрерывно дифференцируемой до j-го порядка (при $j = 0$ — непрерывной), а его элементы — представителями поверхности.

Поверхность S называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема ($j = 1$) и векторное произведение $[r_u, r_v]$ отлично от нуля всюду на D, где $r : D \to \mathbb{R}^3$ — представитель поверхности S, а r_u, r_v — частные производные ($r_u = (x_u, y_u, z_u)$).

Носитель поверхности S — это область значений любого представителя: $|S| = r(D)$.

Пусть r — представитель гладкой поверхности S. Тогда

$$(d\bar{r}, d\bar{r}) = (r_u du + r_v dv, r_u du + r_v dv) = (r_u, r_u)dudv + 2(r_u, r_v)dudv + (r_v, r_v)dvdv$$

называется первой квадратичной формой поверхности, $E = (r_u, r_u)$, $F = (r_u, r_v)$, $G = (r_v, r_v)$ — коэффициенты этой формы.

Если на векторах $r_u du, r_v dv$ построить параллелограмм, то его площадь будет равна $\sqrt{EG - F^2}dudv$. Рассмотрим преобразование координат $(u, v, w) \to (x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$, заданное по формуле $(x, y, z) = r(u, v) + w\bar{k}$, т. е. сохраняем смещение по оси z. Тогда якобиан этого преобразования равен $\sqrt{EG - F^2}$.

В качестве приближения площади поверхности S возьмем сумму площадей касательных параллелограммов, построенных на векторах $r_u \Delta u_i, r_v \Delta v_j$ в точках $r(P_{ij})$, где P_{ij} — точки области D такие, что $P_{i+1,j} = P_{ij} + (\Delta u_i, 0)$, $P_{i,j+1} = P_{ij} + (0, \Delta v_j)$ (т. е. это узлы прямоугольной решетки). В случае гладкой поверхности существует предел упомянутых сумм при $\max \Delta u_i, \max \Delta v_j \to 0$, равный интегралу $\iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$, который мы будем называть *площадью поверхности* S.

Заметим, что здесь снова работает формула замены переменных в кратном интеграле. Отсюда также следует, что если мы выберем другого представителя поверхности S, то по свойству перемножения якобианов (следствие 3.7) получим то же самое значение площади. Итак, площадь гладкой поверхности инвариантна относительно представителей поверхности.

Пусть $S_1, \ldots, S_n$ — гладкие поверхности, обладающие тем свойством, что носители поверхностей S_i и S_{i+1} имеют общую границу, и носители любых двух различных поверхностей S_i, S_j не имеют других (кроме граничных) общих точек. Тогда непрерывная поверхность S, представитель которой есть объединение представителей поверхностей S_i, называется *кусочно-гладкой поверхностью*.

По определению положим, что площадью кусочно-гладкой поверхности является сумма площадей составляющих ее гладких поверхностей (кусков).

5.4.2 п.и. 1-го рода

Поверхностный интеграл — обобщение кратного интеграла. Пусть задана поверхность S и ее представитель $r : D \to |S|$. Будем считать, что поверхность S имеет площадь. Пусть на $|S|$ задана скалярная функция f. Разобьем область D на квадрируемые куски $D_1, \ldots, D_n$ и обозначим диаметр этого разбиения через τ. Выберем в каждой области $S_i = r(D_i)$ по одной точке p_i, $i = 1, \ldots, n$. Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \operatorname{mes} S_i.$$

Определение. Если существует предел σ при $\tau \to 0$, не зависящий от выбора точек p_i и элементов разбиения D_i, то такой предел называется *поверхностным интегралом 1-го рода* функции f по поверхности S и обозначается

$$\int_S f dr.$$

Заметим, что если поверхность S кусочно-гладкая, то интеграл по ней является суммой интегралов по гладким кускам поверхности.

5.4.3 вычисление п.и. 1-го рода

Следующая теорема позволяет сводить поверхностный интеграл к повторному.

Теорема 5.14. *Пусть S — гладкая поверхность, E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, функция f непрерывна на $|S|$. Тогда*

$$\int_S f dr = \iint_D f(r(u,v))\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Отметим, что значение этого интеграла инвариантно относительно выбора представителя поверхности S (опять-таки по свойству произведения якобианов).

5.4.4 ориентированные поверхности

Пусть S — гладкая поверхность, тогда векторы r_u и r_v линейно независимы, а значит, они задают касательную плоскость к поверхности S. Векторы $r_u, r_v, [r_u, r_v]$ образаюут правую тройку векторов по отношению к исходным координатам (см. курс аналитической геометрии). Этим объясняется выбор вектора $\bar{n} = [r_u, r_v]/\sqrt{EG - F^2}$ в качестве *положительной нормали* поверхности S ($|[r_u, r_v]| = \sqrt{EG - F^2}$).

Если для гладкой поверхности S выбрано какое-либо направление нормали: положительное $\bar{n}$ или отрицательное $-\bar{n}$, — то поверхность S называется *ориентированной*, соответственно, положительно или отрицательно. Выбор ориентации визуально означает, с какой стороны мы смотрим на поверхность (смотрят обычно с конца нормали). Поэтому положительно ориентированную поверхность часто называют положительной (или внешней) стороной поверхности S и обозначают S^+, а отрицательно ориентированную — отрицательной (или внутренней) стороной и обозначают S^-.

Если гладкая поверхность S задана функцией r, определенной на односвязной (K-связной) области D, то S так же называют односвязной (K-связной). У односвязной поверхности граница представляет собой простой замкнутый контур. Направление обхода этого контура называется его ориентацией. Если обход граничного контура выполняется таким образом, что нормаль к поверхности S всегда остается слева от него, если смотреть с конца нормали, то говорят, что этот контур положительно ориентирован по отношению к ориентированной поверхности S. При смене ориентации поверхности меняется и ориентация граничного контура.

Если две поверхности S_1 и S_2 ориентированы некоторым способом, их границы ориентированы положительно, S_1 и S_2 пересекаются лишь по части своих границ, причем граничные контуры на этом пересечении ориентированы в противоположные стороны, то говорят, что S_1 и S_2 *согласованно* ориентированы.

Заметим, что если ориентированную гладкую поверхность разрезать на два куска вдоль некоторой гладкой кривой, то мы получим две согласованно ориентированные поверхности.

В более общем случае, если поверхность S — кусочно-гладкая, то она называется *ориентируемой*, если все ее куски можно ориентировать так, что любые два смежных куска будут согласованно ориентированы. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые поверхности, если не оговорено противное.

Пример. Куб и сфера — ориентируемые поверхности, лист Мёбиуса — нет.

5.4.5 п.и. 2-го рода

Пусть S — гладкая поверхность. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\Omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Здесь, как и раньше (см. стр. 76) для исчисления дифференциальных форм мы пользуемся правилами перемножения дифференциалов как векторов. Таким образом, вектор $dydz$ направлен вдоль первой орты $\bar{i}$, вектор $dzdx$ — вдоль $\bar{j}$, вектор $dxdy$ — вдоль $\bar{k}$.

Пусть $\bar{W} = (P, Q, R)$. Тогда $\Omega = (\bar{W}, \bar{n})\sqrt{EG - F^2}dudv = (\bar{W}, \bar{n})dr$.

Определение. Поверхностный интеграл 1-го рода $\int_S (\bar{W}, \bar{n})dr$ называется *поверхностным интегралом 2-го рода* вектор-функции $\bar{W}$ по внешней стороне поверхности S и обозначается

$$\int_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_{S^+} \Omega.$$

По определению положим также, что

$$\int_{S^-}\Omega = -\int_{S^+}\Omega.$$

Если вектор-функция $\bar{W}$ задана на кусочно-гладкой поверхности, то ее интеграл вычисляется как сумма интегралов по кускам.

5.4.6 вычисление п.и. 2-го рода

Часто нормаль $\bar{n}$ к поверхности S задают углами между этой нормалью и осями координат: α — угол между $\bar{n}$ и $\bar{i}$, β — угол между $\bar{n}$ и $\bar{j}$, γ — угол между $\bar{n}$ и $\bar{k}$, тогда координатами $\bar{n}$ являются *направляющие* косинусы: $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Поэтому

$$\int_{S^+}\Omega = \int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dr.$$

Из определения п.и. 2-го рода можно получить и его формулу вычисления через повторный интеграл:

$$\int_{S^+}\Omega = \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv,$$

где $r = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Отметим также, что якобиан $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$.

Пример. рассмотреть поверхность, заданную графиком функции $z = f(x,y)$.

5.4.7 формула Стокса

Эта формула обобщает формулу Грина на случай, когда кривая и ограниченная ею область лежат на некоторой гладкой поверхности.

Теорема 5.15 (Стокса). *Пусть S — гладкая второго порядка поверхность, вектор-функция $\bar{W}$ определена и непрерывна на области $G \subseteq \mathbb{R}^3$, содержащей в себе носитель S. Пусть также на носителе S задан кусочно-гладкий замкнутый контур γ, ограничивающий односвязную область Σ поверхности S и положительно ориентированный. Тогда справедлива формула Стокса:*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Sigma (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy.$$

Если, как и раньше обозначить $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ и воспользоваться аксиомами исчисления дифференциальных форм, то формула Стокса принимает вид:

$$\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_\Sigma d\omega,$$

где под $\partial\Sigma$ следует понимать положительно ориентированную границу поверхности Σ.

5.4.8 формула Гаусса—Остроградского

Это — формула, аналогичная формуле Грина, но в ней все рассматриваемые объекты имеют размерность на 1 больше: вместо кривой — поверхность, вместо формы первого порядка — форма второго порядка, вместо криволинейного интеграла — поверхностный.

Ранее мы оговаривали, что на плоскости замкнутый контур принято ориентировать против часовой стрелки, и это направление обхода называть положительным. Аналогично, в пространстве замкнутая поверхность (без края) ориентируется по умолчанию так, что вектор нормали направлен от поверхности во внешнюю сторону, и эта ориентация называется положительной.

Теорема 5.16. *Пусть S — кусочно-гладкая поверхность без края (замкнутая), ограничивающая односвязную*[2] *область $D \subseteq \mathbb{R}^3$, на $[D]$ определена непрерывно дифференцируемая форма второго порядка Ω. Тогда справедлива формула Гаусса—Остроградского:*

$$\int_{S^+} \Omega = \iiint_D d\Omega.$$

Если $\Omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$, то $d\Omega = (P_x + Q_y + R_z)dxdydz$.

Следствие 5.4. *Объем тела D может быть вычислен через его поверхность S по формуле*

$$V = \iiint_D dxdydz = \frac{1}{3}\int_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

5.5 Элементы теории поля

Здесь мы по большей части переложим все полученные ранее результаты на терминологию теории поля.

Полем на какой-либо области пространства R^n (обычно $n = 2, 3$) будем называть любую непрерывную функцию на ней. Поле называется *скалярным*, если его значения одномерны (число), *векторным* — если многомерны (вектор).

Пусть задано поле $U(x, y, z)$ и некоторый вектор l единичной длины. Пусть $M = M_0 + \Delta l$, где M_0 — некоторая точка пространства, а M — произвольная точка, удаленная от M_0 на расстояние Δ в направлении l. Если существует предел

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{U(M) - U(M_0)}{\Delta},$$

то он называется *производной поля U по навправлению l*.

Пусть поле U непрерывно дифференцируемо в окрестности точки M_0. Тогда производная по любому направлению l в точке M_0 существует и равна скалярному произведению $(\operatorname{grad} U, l)$ или проекции градиента поля на направление l. Отсюда видно также, что наибольший рост поля в точке M_0 достигается в направлении градиента и равен $|\operatorname{grad} U|$.

[2]Аналогично случаю $\mathbb{R}^2$ односвязную область в $\mathbb{R}^3$ можно определить с помощью замкнутых поверхностей.

Градиент скалярного поля суть векотрное поле. Существует терминология, связывающая эти два поля друг с другом. Обозначим $E = \operatorname{grad} U$. Тогда E называется *напряженностью* поля U, а U называется *потенциалом* поля E. Если векторное поле имеет потенциал, то оно называется потенциальным.
Пример. Гравитационное и электрическое поля.

Криволинейный интеграл 2-го рода $\int_\gamma (E, d\vec{s})$ по замкнутому кусочно-гладкому контуру называется *циркуляцией* поля E вдоль контура γ.

Теорема 5.17. *Поле E потенциально тогда и только тогда, когда его циркуляция по любому кусочно-гладкому контуру равна нулю.*

Пример. Поле $x\bar{i} + y\bar{j}$ потенциально, а поле $y\bar{i} - x\bar{j}$ — нет.

Поверхностный интеграл $\int_S (E, \bar{n}) dr$ называют *потоком векторного поля E через поверхность S в направлении нормали $\bar{n}$.*

Пусть $E = (P, Q, R)$. Тогда вектор

$$\operatorname{rot} E = (R_y - Q_z)\bar{i} + (P_z - R_x)\bar{j} + (Q_x - P_y)\bar{k}$$

называется *ротором* или *вихрем* поля E. Ротор может быть записан с помощью символьного вектора производных $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ в виде векторного произведения $[\nabla, E]$. Заметим, что для скалярного поля U произведение ∇U представляет собой $\operatorname{grad} U$.

Пример. найти роторы из предыдущего примера

Теорема 5.18. *В односвязной области непрерывно дифференцируемое поле потенциально тогда и только тогда, когда его ротор равен нулю.*

Формула Стокса в терминах теории поля принимает следующий вид: поток вихря через поверхность Σ в направлении нормали $\bar{n}$ равен циркуляции поля вдоль края поверхности Σ:

$$\int_\Sigma (\operatorname{rot} E, \bar{n}) dr = \int_{\partial\Sigma} (E, d\vec{s}).$$

Дивиргенцией поля $E = (P, Q, R)$ называется величина

$$\div E = P_x + Q_y + R_z.$$

По формуле Гаусса—Остроградского поток поля E через замкнутую поверхность S, ограничивающую область D, в направлении внешней нормали равен

$$\int_S (E, \bar{n}) dr = \iiint_D \div E dxdydz.$$

Непрерывно дифференцируемое поле E называется *соленоидальным*, если его дивиргенция равна нулю.

Пример. соленоидальное поле $y\bar{i} - x\bar{j}$

Теорема 5.19. *В односвязной области D непрерывно дифференцируемое поле E соленоидально тогда и только тогда, когда его поток через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность, лежащую в D, равен нулю.*

5.6 Вопросы для коллоквиума

1. Кратный интеграл Римана и сведение его к повторному на плоскости и в пространстве.
2. Криволинейный интеграл 1-го рода и его вычисление.
3. Ориентация контура, криволинейный интеграл 2-го рода и его вычисление.
4. Формула Грина, вычисление площади плоской области через криволинейный интеграл.
5. Замена переменной в кратном интеграле.
6. Поверхностный интеграл 1-го рода и его вычисление.
7. Ориентация поверхности, поверхностный интеграл 2-го рода и его вычисление.
8. Формула Стокса.
9. Формула Гаусса—Остроградского.
10. Потенциальное поле, градиент скалярного поля.
11. Поток, вихрь (ротор).
12. Дивиргенция, соленоидальное поле.

Глава 6

Основы теории рядов

6.1 Числовые ряды

6.1.1 основные свойства рядов

Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. Символическая запись $a_1 + a_2 + \dots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *рядом.*

Частная сумма ряда: $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Формула, выражающая значение a_n через номер n, называется общим членом ряда. Если существует предел частных сумм ряда (в $\mathbb{R}$ или $[\mathbb{R}]$), то ряд называют *сходящимся* (соответственно, в $\mathbb{R}$ или в $[\mathbb{R}]$), в противном случае — *расходящимся*. Иногда в случае $\lim s_n = \infty$ говорят, что ряд расходится к бесконечности.

Если ряд сходится, то значение предела частных сумм называют *суммой ряда* и приравнивают его к символу ряда.

Пример. геометрическая прогрессия, «дурная» бесконечность, $1-1+1-1+\dots$

1) *для любой константы* c: $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2) *если сходятся ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *то сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *и его сумма равна сумме исходных рядов*

3) *если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}$ — n-ый остаток ряда.

4) *если ряд сходится, то* $r_n \to 0$

Теорема 6.1 (критерий Больцано—Коши). *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* N *такое, что для всех* $n \geqslant N$ *и всех натуральных* p $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ *(словами: любой достаточно далекий отрезок ряда сколь угодно мал).*

Пример. расходимость гармонического ряда, ζ-функция Римана

6.1.2 ряды с неотрицательными членами

Рассматривается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geqslant 0$.

1) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность частных сумм ограничена*

2) *если* $a_n \leqslant b_n$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3) *пусть* $a_n/b_n \to K$, *тогда при* $K = 0$ *из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(обратное неверно), при* $K = \infty$ *из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует сходимость* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *(обратное неверно), при* $0 < K < \infty$ *сходимость обоих рядов равносильна*

Теорема 6.2 (признак Даламбера). *Если начиная с некоторого* n *имеем* $a_{n+1} \leqslant qa_n$, *где постоянная* $q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Следствие 6.1. *Если* $a_{n+1}/a_n \to q$, *то при* $q < 1$ *ряд сходится, при* $q > 1$ *— расходится.*

Теорема 6.3 (признак Коши). *Если начиная с некоторого* n *имеем* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Следствие 6.2. *Если* $\sqrt[n]{a_n} \to q$, *то при* $q < 1$ *ряд сходится, при* $q > 1$ *— расходится.*

Теорема 6.4 (признак Раабе). *Если начиная с некоторого* n

$$\rho_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \rho > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Следствие 6.3. *Если* $\rho_n \to \rho$, *то при* $\rho > 1$ *ряд сходится, при* $\rho < 1$ *— расходится.*

Теорема 6.5 (интегральный признак). *Если* $a_n = f(n)$, *где* $f(x)$ *— непрерывная убывающая функция, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится или расходится вместе с интегралом* $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Пример. область существования ζ-функции Римана

6.1.3 дальнейшие свойства произвольных рядов

1) *признак Лейбница: если неотрицательные* $a_n \to 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *сходится.*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2) *если ряд сходится абсолютно, то он сходится*

Ряд *сходится условно*, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$

Положим по определению $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$.

3) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$*

4) *если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ оба расходятся*

[контрпример к обратному: $1-1+1-1+\dots$]

Биекция $\sigma : M \to M$ не более чем счетного множества на себя называется в некоторых приложениях *подстановкой* (или перестановкой). Пусть имеется подстановка σ натуральных чисел и последовательность $\{a_n\}$. Построим новую последовательность $b_n = a_{\sigma(n)}$, полученную перемешиванием номеров исходной последовательности.

Теорема 6.6 (коммутативность). *если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится абсолютно и к тому же пределу.*

Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $n_0 = 0$. Обозначим $c_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$ Новая последовательность — это расстановка скобок в исходной.

Теорема 6.7 (ассоциативность). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ к тому же пределу.*

[контрпример к обратному: $(1-1)+(1-1)+\dots$]

Замечание. Обратное утверждение будет справедливо в том случае, когда каждая скобка содержит слагаемые с одинаковыми знаками (т. е. скобки расставлены в местах смены знака значений a_n).

Теорема 6.8 (Римана). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то для любого $A \in [\mathbb{R}]$ существует такая подстановка σ натуральных чисел, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится к A.*

6.1.4 признаки Абеля и Дирихле

Теорема 6.9 (преобразование Абеля).

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\sum_{i=1}^{k} b_i$$

[сравнить с интегрированием по частям]

Теорема 6.10 (признак Дирихле). *Если частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены, a_n монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

[сравнить с теоремой 4.23]

Теорема 6.11 (признак Абеля). *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.*

[сравнить с теоремой 4.24]

6.2 Функциональные ряды

6.2.1 равномерная сходимость рядов

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого являются функциями от x и определены на множестве X. Такие ряды принято называть *функциональными*. Если при $x = x_0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что ряд сходится в точке x_0. Обозначим $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Это — частные суммы исходного функционального ряда. Если на множестве $D \subseteq X$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в каждой точке, это равносильно поточечной сходимости последовательности функцмй $s_n(x)$ на D. Далее для простоты мы будем считать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X, его сумму в каждой точке $x \in X$ обозначим $u(x)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* X, если $s_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} u(x)$.

Теорема 6.12 (критерий Больцано—Коши). *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > N$ и для всех $x \in X$, $p \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 6.13. *Если все $u_n(x)$ непрерывны в точке x_0 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно, то $u(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Теорема 6.14 (Дини). *Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на X,*
1) $u_n(x)$ непрерывны на X,
2) $u(x)$ непрерывна на X,
3) $u_n(x) \geqslant 0$,
4) X — компакт.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X.

Теорема 6.15 (предельный переход). *Пусть x_0 — предельная точка X. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X и для любого n существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = c_n$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ равный сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.*

6.2.2 интегрирование и дифференцирование рядов

Обозначения заимствуем из предыдущего раздела.

Теорема 6.16 (интегрирование). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$, *функции* $u_n(x)$ *непрерывны на* $[a;b]$, *тогда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

Теорема 6.17 (дифференцирование). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на отрезке* $[a;b]$, *функции* $u_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a;b]$ *и ряд из производных* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно на* $[a;b]$, *то* $u(x)$ *дифференцируема на* $[a;b]$ *и*

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

6.2.3 признаки равномерной сходимости

Теорема 6.18 (Вейерштрасс). *Если для всех* $x \in X$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства* $|u_n(x)| \leqslant a_n$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно.*

[привести примеры]

Теорема 6.19 (признак Дирихле). *Если частные суммы* $s_n(x)$ *равномерно по* n *и* x *ограничены, а* $v_n(x)$ *монотонно по* n *и равномерно по* x *стремится к нулю, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ *сходится равномерно на* X.

[сравнить с теоремой 4.40]

Теорема 6.20 (признак Абеля). *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* X, *а* $v_n(x)$ *равномерно по* n *и* x *ограничены и монотонны по* n, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ *сходится равномерно на* X.

[сравнить с теоремой 4.41]

Пример. сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\sin(nx)$, $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$

6.3 Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Далее рассматриваем случай только $x_0 = 0$.

Теорема 6.21. *Для любого степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *существует число* R *такое, что в интервале* $(-R;R)$ *этот ряд сходится, а на множестве* $\mathbb{R} \setminus [-R;R]$ *расходится.*

Число R называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1) *число* R *может быть найдено как предел* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$, *если таковой существует*

2) *число* R *может быть найдено как предел* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}$, *если таковой существует*

3) *на любом отрезке* $[a;b] \subset (-R;R)$ *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится равномерно*

4) *на интервале* $(-R;R)$ *функция* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *бесконечно дифференцируема, причем* $a_n = f^{(n)}(0)/n!$

5) *ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можно почленно интегрировать на любом отрезке* $[a;b] \subset (-R;R)$

Если функция $f(x)$ может быть представлена в виде степенного ряда на некотором открытом множестве, то она называется *аналитической* на этом множестве.

Пример. Разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора: e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$.

Пример. Вычисление числа $\pi/4$ с помощью разложения в ряд функции $\operatorname{arctg}(x)$ в окрестности единицы.

Глава 7

Основы ТФКП

7.1 Комплексная переменная и функции от нее

7.1.1 комплексные числа и действия над ними

7.1.2 пределы комплексных последовательностей

7.1.3 функции к.п.

7.1.4 дифференцирование ф.к.п.

7.1.5 интегралы от ф.к.п., формула Коши

7.2 аналитические функции

7.2.1 степенной ряд, круг сходимости

7.2.2 единственность а.ф.

7.2.3 аналитическое продолжение

7.2.4 элементарные функции

7.3 Ряд Лорана

7.4 Вычеты

7.5 Конформные отображения