Листок №43 Аксиома полноты 13.01.2020 – 29.01.2020
33/25/17 з. на 5/4/3

**Определение 1.** Пусть дано подмножество $M$ множества действительных чисел $\mathbb{R}$.
Число $c \in \mathbb{R}$ называют *верхней гранью* множества $M$, если $c \geqslant m$ для всех $m \in M$.
Число $c \in \mathbb{R}$ называют *точной верхней гранью* множества $M$, если $c$ является верхней гранью $M$, но никакое меньшее число не является верхней гранью $M$. Обозначение: $\sup M$ (читается «супрéмум» $M$).
Аналогично определяется точная нижняя грань множества $M$ ($\inf M$, «инфи́мум» $M$).

**Задача 1.** Докажите, что число $c$ есть $\sup M$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:
1) для всех $x \in M$ верно, что $x \leqslant c$; 2) для любого числа $c_1 < c$ найдётся такое $x \in M$, что $x > c_1$.

**Задача 2.** Может ли у множества быть несколько точных верхних (нижних) граней?

**Задача 3.** Найдите $\sup M$ и $\inf M$, если **а)** $M = \{a^2 + 2a \mid -5 < a \leqslant 5\}$; **б)** $M = \{\pm\frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Задача 4.** Последовательность $(a_n)$ имеет предел. Докажите, что какой-то из её членов совпадает либо с точной верхней гранью множества $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, либо с точной нижней гранью этого множества.

**Задача 5.** Пусть $A$ и $B$ — некоторые подмножества $\mathbb{R}$, и пусть известны $\sup A$ и $\sup B$.
**а)** Найдите $\sup(A \cup B)$. **б)** Найдите $\sup(A + B)$, где $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
**в)** Найдите $\inf(A \cdot B)$, где $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, если $A$ и $B$ состоят из отрицательных чисел.

**Аксиома полноты.** *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.*

**Задача 6.** Каждое ли ограниченное снизу непустое подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань?

**Задача 7.** (*Теорема Вейерштрасса*) Докажите, что любая неубывающая ограниченная сверху последовательность действительных чисел имеет предел.

**Задача 8.** Найдите пределы последовательностей: **а)** $x_1 = 2$, $x_{n+1} = (x_n + 1)/2$; **б)** $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $y_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$; **в)** $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $z_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$; **г)*** $t_1 = 1$, $t_{n+1} = 1/(1 + t_n)$.

**Задача 9.** Пусть $a_1 = 1$. Ограничена ли последовательность **а)** $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$; **б)** $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_1 + \ldots + a_n}$?

**Задача 10.** Докажите, что последовательность $x_n = 1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + (-1)^{n+1}/n$ имеет предел.

**Задача 11.** (*Принцип вложенных отрезков*) Пусть $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots$ — последовательность вложенных отрезков. Докажите, что **а)** у отрезков есть общая точка; **б)** если $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$, то общая точка одна.

**Задача 12.** **а)** Любая ли последовательность $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq \ldots$ вложенных интервалов имеет общую точку? **б)** А если и в $(a_n)$ и в $(b_n)$ бесконечно много разных элементов? **в)** Верна ли «аксиома полноты» в $\mathbb{Q}$?

**Задача 13.** **а)** На прямой дано некоторое (бесконечное) множество отрезков. Известно, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.
**б)** Верна ли та же задача для прямоугольников на плоскости, если их стороны параллельны осям координат?

**Задача 14.** Верно ли, что последовательность вложенных кругов на плоскости всегда имеет общую точку?

**Задача 15.** На отрезке отметили бесконечное множество точек. Докажите, что
**а)** хотя бы одна из половин этого отрезка содержит бесконечно много отмеченных точек;
**б)** на этом отрезке найдётся точка $x$, любая окрестность которой содержит бесконечно много отмеченных точек.

**Задача 16.** (*Лемма Больцано – Вейерштрасса*) Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

**Задача 17.** **а)** (*Компактность отрезка*) Отрезок покрыт интервалами. Докажите, что можно выбрать конечное число этих интервалов так, что они покроют отрезок. **б)** А если заменить отрезок на интервал?

**Задача 18.** (*Вычисление квадратного корня методом последовательных приближений*) Пусть $a > 0$. Возьмем любое $x_0 > 0$ и построим последовательность $(x_n)$ по закону: $x_{n+1} = 0{,}5 \cdot (x_n + a/x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$.
**а)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. **б)*** Для $a = 10$ найдите такое $n$, что $|x_n - \sqrt{10}| < 0{,}0001$, если $x_0 = 3$.

**Задача 19.** (*Существование корня*) **а)** Докажите существование квадратного корня из положительного числа с помощью аксиомы полноты. (*Указание:* докажите, что если $c = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \text{ и } q^2 < 2\}$, то $c^2 = 2$.)
**б)*** Для любого $a \geqslant 0$ и любого $r \in \mathbb{Q}$ определите $a^r$ и докажите его существование и единственность.

**Задача 20.** **а)** (*Критерий Коши*) Докажите, что последовательность $(x_n)$ *сходится* (то есть имеет предел) тогда и только тогда, когда она фундаментальна (см. листок 30): $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geqslant k \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$.
Верен ли критерий Коши для последовательностей из **б)** рациональных чисел; **в)*** комплексных чисел?

**Задача 21.** **а)** С помощью аксиомы полноты докажите аксиому Архимеда: для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > c$. **б)*** Выведите из принципа вложенных отрезков и аксиомы Архимеда аксиому полноты.

| 1 | 2 | 3 а | 3 б | 4 | 5 а | 5 б | 5 в | 6 | 7 | 8 а | 8 б | 8 в | 8 г | 9 а | 9 б | 10 | 11 а | 11 б | 12 а | 12 б | 12 в | 13 а | 13 б | 14 | 15 а | 15 б | 16 | 17 а | 17 б | 18 а | 18 б | 19 а | 19 б | 20 а | 20 б | 20 в | 21 а | 21 б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |