Графы. Компоненты связности.

Определение 1. Пусть даны граф и его вершина A. *Компонента связности* вершины A — это подграф, состоящий из всех вершин, связанных с A путём, и всех рёбер, входящих в эти пути. Обозначение: $K(A)$.

Задача 1. Пусть вершины A и B графа связаны путём. Докажите, что $K(A) = K(B)$.

Задача 2. На сколько компонент связности распадается граф слона?

Задача 3. Из единичных спичек сложена клетчатая доска 8×8. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было доползти до любой другой, не переползая через спички. Сколько спичек минимум придётся убрать?

Задача 4. Сколько рёбер куба (максимум) можно перекусить (посередине), чтобы он не распался на части?

Задача 5. Дан граф с n вершинами. Докажите, что **а)** если граф связен, то в нём не менее $n-1$ рёбер; **б)** если граф распадается на k компонент связности, то в нём не менее $n-k$ рёбер; **в)** если в связном графе больше $n-1$ рёбер, то одно ребро можно удалить (оставив концы) так, что граф останется связным.

Задача 6. Можно ли рёбра куба покрасить в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?

Задача 7. В аудитории сидят 50 школьников: кто-то из 8-го класса (возможно, все или никто), а остальные из 9-го. За один вопрос можно выбрать двоих и узнать, одинаковый у них номер класса или нет. После какого наименьшего числа вопросов можно будет разделить школьников на две группы так, чтобы в одной группе оказались все школьники одного класса, а в другой — другого?

Задача 8. **а)** Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться многоугольник? **б)** Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы доска не распалась на части?

Задача 9. Каждую клетку большого клетчатого прямоугольника покрасили в один из 179 цветов (все цвета присутствуют). Пару различных цветов назовём хорошей, если найдутся две соседние (по стороне) клетки этих цветов. Каково минимально возможное число хороших пар?

Определение 2. Пусть дан простой граф G. Рассмотрим полный граф с теми же вершинами и сотрём в нём все рёбра, которые есть в G. Полученный граф называется *дополнительным* к графу G.

Задача 10. **а)** Докажите, что граф, дополнительный к несвязному графу, связен. **б)** Верно ли обратное? **в)** Каких графов на n данных вершинах больше: связных или несвязных? Дайте ответ для всех n.

Задача 11. В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что: **а)** одним из этих видов транспорта можно добраться (напрямую или с пересадками) из любого города в любой другой; **б)** для каждого города можно выбрать свой вид транспорта так, чтобы при помощи него можно было бы добраться из этого города до любого другого, совершив не более одной пересадки; **в)** в пункте а) можно выбрать вид транспорта так, чтобы количество пересадок было не больше двух.

Определение 3. Связный граф без циклов называется *деревом.* Ребро связного графа, при удалении которого (без удаления концов) граф перестаёт быть связным, называется *мостом.*

Задача 12. Докажите, что **а)** граф является деревом, если и только если каждые две его вершины соединены ровно одним путём с различными рёбрами; **б)** в дереве более чем с одной вершиной есть две *висячие* вершины (т.е. степени 1); **в)** в дереве с n вершинами $n-1$ рёбер; **г)** любое ребро дерева — мост.

Задача 13. N-угольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Построим граф, соответствующий этому разбиению: отметим внутри каждого треугольника точку (это будут вершины графа), соединяя две точки ребром ровно в том случае, когда соответствующие точкам треугольники имеют общую сторону. Докажите, что **а)** этот граф будет деревом; **б)** хотя бы у двух треугольников разбиения две стороны совпадают со сторонами N-угольника (при $N > 3$).

Определение 4. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 14. **а)** Всякий ли связный граф имеет остов? **б)** Может ли граф иметь несколько остовов?

Задача 15. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным?

Задача 16.** *(Теорема Кели)* Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	12 в	12 г	13 а	13 б	14 а	14 б	15	16