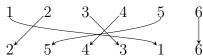
## Листок №49

Перестановки: чётность

**Определение 1.** Беспорядок или инверсия в перестановке  $\alpha$  — это такая пара (i, j), что i < j и  $\alpha(i) > \alpha(j)$ . Перестановка называется  $y = m + n \delta u$ , если число инверсий в ней чётно, и  $y = m + n \delta u$ в противном случае. Говорят также, что знак чётной перестановки равен 1, а знак нечётной перестановки равен -1.

**Задача 1**
$$^{\circ}$$
**. а)** Какие перестановки в  $S_3$  чётные?   
**б)** Сколько инверсий у перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ?

Задача 2. (Правило ниточек) Чтобы увидеть число инверсий геометрически, на картинке, можно поступить двумя способами. Первый: в таблице, отвечающей перестановке  $\alpha$ , соединим нитями одинаковые элементы (картинка слева). Второй: нарисуем таблицу с двумя одинаковыми верхними строками  $-1, 2, \ldots, n$ , — и каждый элемент i верхней строки соединим нитью с элементом  $\alpha(i)$  во второй строке (картинка справа).



- а) Как увидеть количество инверсий на картинке (можете дать ответ для одного из способов)?
- $\mathbf{6}$ ) Сделайте это для  $(2\ 3\ 4)$  и (14)(23) из  $S_4$ .
- в) Изменится ли чётность числа инверсий, если в нижней строке таблицы поменять два элемента местами?

**Задача 3** $^{\varnothing}$ . Найдите число инверсий перестановки  $\alpha^{-1}$ , зная число инверсий перестановки  $\alpha$ .

**Задача 4^{\circ}.** а) Докажите, что любая транспозиция — нечётная перестановка;

- б) Докажите, что умножение на транспозицию (справа) меняет чётность перестановки;
- в) Докажите, что произведение двух перестановок одной чётности чётная перестановка, а произведение двух перестановок разной чётности — нечётная (знаки перемножаются!).

**Задача 5^{\circ}.** Пусть  $\alpha$  — произвольная перестановка. Как связаны наименьшее число транспозиций в разложении  $\alpha$  на элементарные транспозиции и число инверсий у  $\alpha$ ?

Задача 6. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?

**Задача**  $7^{\varnothing}$ . Сколько всего чётных перестановок в  $S_n$ ? (Их множество обозначается  $A_n$ .)

Задача 8\*. В игре Сэма Лойда «пятнашки» поменяли квадраты с числами 14 и 15 местами. Можно ли из этой позиции по правилам игры получить исходную?

Задача 9\*. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Могут ли они гарантировать результат а) более 500; б) не менее 999?

**Задача 10** $^{\varnothing}$ . Пусть  $n\geqslant 3$ . Докажите, что  $A_n$  — это в точности множество перестановок из  $S_n$ , которые можно разложить в произведение циклов длины 3 (повторения разрешаются).

**Задача 11** $^{\varnothing}$ . Постройте такое соответствие между элементами  $A_4$  и вращениями пространства, переводящими правильный тетраэдр в себя, что композиции перестановок соответствует композиция соответствующих вращений.

**Задача 12\*.** Пусть  $s_l$  – количество перестановок с числом инверсий l. Покажите, что  $1 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \dots = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1}).$ 

1 a	1 6	2 a	2 6	2 B	3	4 a	4 6	4 B	5	6	7	8	9 a	9 6	10	11	12

```
<?xml version='1.0'?>
   listok number = '49' description='Перестановки: чётность' type='1' date='22.04.2020 - 29.04.2020'
marks = '14/11/8' >
    cproblem group='1' type='4'>1a</problem>
    problem group='1' type='4'>16</problem>
    cproblem group='2' type='0'>2a</problem>
    problem group='2' type='4'>26</problem>
    problem group='2' type='4'>2B</problem>
    cproblem group='3' type='4'>3</problem>
    cproblem group='4' type='4'>4a</problem>
    problem group='4' type='4'>46</problem>
    cproblem group='4' type='4'>4B</problem>
    cproblem group='5' type='4'>5</problem>
    cproblem group='6' type='4'>6</problem>
    cproblem group='7' type='4'>7</problem>
    cproblem group='8' type='1'>8</problem>
    cproblem group='9' type='1'>9a</problem>
    problem group='9' type='1'>96</problem>
    cproblem group='10' type='4'>10</problem>
    cproblem group='11' type='4'>11</problem>
    cproblem group='12' type='1'>12</problem>
```

</listok>