

# ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

листки с задачами  
«100 урокам математики» Алексея Савватеева

составители: Н. Казимиров, П. Иванов, М. Бочкарев

Москва, 2020



## АННОТАЦИЯ К СБОРНИКУ

---

Данный сборник задач может использоваться как приложение к конспекту «Введение в математику» Алексея Савватеева, а также как самостоятельный практикум для изучения основ математики. Нумерация глав-уроков в сборнике соответствует урокам онлайн-курса, подготовленным проектом «Дети и наука».

В каждом уроке даны ссылки на соответствующие видеоуроки и главы и разделы конспекта. Перед блоком задач даны краткие сведения из курса, содержащие необходимые определения и обозначения.

При составлении задачника было использовано несколько источников, в частности, задачи видеокурса по «100 урокам математики» проекта «Дети и наука», листки задач кружка Вечерней математической школы в 179 школе г. Москвы, листки задач для математиков из подборки Григория Мерзона.

Составители настоящего сборника: Николай Казимиров, Павел Иванов, Михаил Бочкарев.

20 ноября 2020 г.



# Числа, символы и фигуры

Связь с **онлайн курсом** и главами **конспекта**:

«Дети и наука»: Урок 1. Числа, символы, фигуры.

Конспект: Глава 1, разделы 1.1 Запись действий с отрезками, 1.2 Понятие натурального числа, 1.3 Визуальные доказательства. Глава 7, раздел 7.1 Построение рациональных чисел.

## Справочные сведения

Операции сложения и умножения мы визуализируем со смещением по прямой вправо или влево. Вправо — со знаком  $+$ , влево — со знаком  $-$ . Смещение на несколько единиц вправо или влево — это смещение на одноименное число шагов в данном направлении. В итоге операцию сложения или вычитания можно представить как путь по прямой дороге, который складывается из шагов, равных  $+1$  или  $-1$  в зависимости от направления.

Умножение задается с помощью прямоугольной сетки на плоскости. Имеем две координатные оси, на которых отложены, как и в одномерном случае, шаги-числа в обе стороны от точки  $O$  с соответствующими знаками. Откладываем перемножаемые числа по обеим осям, получаем прямоугольник, состоящий из единичных квадратов. Число этих квадратов, т.е. площадь прямоугольника, и есть значение произведения (см. рис. 1.1).



Рис. 1.1: Произведение  $5 \cdot 3$ .

В том случае, когда умножаются числа, оснащенные знаками, применяется правило ориентированной площади, т.е. знак выбирается в зависимости от направления оси наблюдателя, для которого порядок множителей всегда соответствует повороту против часовой стрелки (см. рис. 1.2).

## Задачи

- 1.1. Нанести на прямой метки, соответствующие шагам вправо и влево, считая начальной точкой  $O$ , а все шаги равновеликими (т.е. каждый шаг равен выбранной единице длины). Дойти до точки 5, а затем от точки 5 до точки  $-5$ . Записать последовательность шагов с помощью  $\pm 1$ , предполагая, что шаг вправо записывается как  $+1$ , шаг влево — как  $-1$ .
- 1.2. Описать в терминах одномерного путешественника операции сложения:  $5 + 3$ ,  $8 - 4$ ,  $3 - 5$ ,  $-2 - 6$ . Сколько шагов и в какую сторону он прошел и в каком порядке? Записать в каждом

Рис. 1.2: произведение  $a \cdot b$ .

случае путь с помощью  $\pm 1$  и расставить скобки, объединяя в них указанные слагаемые.

- 1.3. *Путь* — это последовательность единичных шагов, обозначаемых  $+1$  (шаг вправо) и  $-1$  (шаг влево). Путь может начинаться в любой точке прямой. Записать пути, соответствующие операциям  $-2 + 7$ ,  $10 - 5$ ,  $11 - 2 - 4$ ,  $-8 + 3 + 10$ .
- 1.4. Выберем точку  $O$  в качестве начала отсчета, затем нанесем на прямую точки, которые получаются в результате отсчета шагов влево и вправо, т.е. точки  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$  и т.д. Назовем эти точки *целыми*.
  - а) В какой точке окажется путешественник, если он стартует в точке  $-3$  и проходит путь  $4 - 1$ ? Изобразить графически.
  - б) В какой точке окажется путешественник, если он стартует в точке  $1$  и проходит путь  $11 - 4 + 7$ ? Изобразить графически.
- 1.5. Два пути назовем *эквивалентными*, если, стартуя в одной и той же точке, они и закончатся в одной и той же точке. Эквивалентны ли пути  $-2 + 7$ ,  $10 - 5$ ,  $11 - 2 - 4$ ,  $-8 + 3 + 10$ ?
- 1.6. Путь  $a$  назовем *обратным* к пути  $b$ , если, стартовав там, где путь  $b$  заканчивается, он повторяет все шаги пути  $b$  в обратном порядке и с противоположным знаком (например, путь  $1+1+1-1-1-1$  обратен к пути  $-1-1-1+1+1+1$ ). Построить пути, соответствующие операциям  $5 + 3$ ,  $8 - 4$ ,  $3 - 5$ ,  $-2 - 6$ , построить обратные к ним пути, выразить обратные пути в виде суммы или разности двух чисел (использовать те же цифры, что у исходного пути).
- 1.7. Изобразить ориентированные площади, соответствующие произведениям  $3 \cdot 5$  и  $5 \cdot 3$ ,  $(-2) \cdot 6$  и  $6 \cdot (-2)$ ,  $(-3) \cdot (-4)$  и  $(-4) \cdot (-3)$

# Соизмеримость отрезков

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 2. Соизмеримость и несоизмеримость отрезков.](#)

Конспект: Глава 1, разделы 1.2 Понятие натурального числа, 1.4 Соизмеримость отрезков, алгоритм Евклида.

## Справочные сведения

На этот раз у нас имеется два путешественника (кузнечика), каждый из которых имеет свою меру длины (длину шага), соответственно, у каждого из них получаются свои собственные ометки на прямой, расставленные через каждый шаг. Пусть у первого путешественника шаг равен  $a$ , а у второго —  $b$ . Таким образом, первый может придти в точки  $\pm a, \pm 2a, \pm 3a$  и т.д., а второй — в точки  $\pm b, \pm 2b, \pm 3b$  и т.д. Точка начала отсчета у них общая — точка  $O$ .

Длины шагов этих путешественников, т.е. числа  $a$  и  $b$  *соизмеримы*, если существует такая длина  $c$  (*общая мера отрезков  $a$  и  $b$* ), которая целое число раз укладывается в том и другом шаге:  $a = pc$ ,  $b = tc$ .

*Графический алгоритм Евклида*: о прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  отрезают квадраты со стороной, равной меньшей из длин  $a$  и  $b$ , столько раз, сколько возможно (будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида, и так далее (см. рис. 2.1).

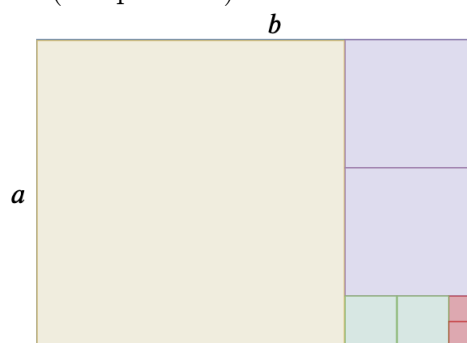


Рис. 2.1: Графический алгоритм Евклида.

*Наибольший общий делитель* целых чисел  $a$  и  $b$  — это наибольшее целое число, делящее  $a$  и  $b$ . Обозначение:  $\text{НОД}(a, b)$ . Если  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то числа  $a$  и  $b$  называются *взаимно простыми* (обозначается так:  $a \perp b$ ).

## Задачи

2.1. Найти  $\text{НОД}(10, 6)$ ,  $\text{НОД}(11, 5)$ ,  $\text{НОД}(12, 9)$  методом прямоугольников.

- 2.2. Сколько и каких шагов должны сделать 10- и 6-шаговые кузнечики, чтобы попасть в точку  $\text{НОД}(10,6)$ ?
- 2.3. Доказать, что  $a$  и  $b$  соизмеримы тогда и только тогда, когда существует отрезок  $d$  такой, что отрезки  $a$  и  $b$  укладываются в нем целое число раз:  $d = ka = lb$ . Верно ли, что это также равносильно тому, что два путешественника могут встретиться в какой-то точке прямой, отличной от точки  $O$ ?
- 2.4. Верно ли, что отрезки  $a$  и  $b$  соизмеримы тогда и только тогда, когда  $a$  и  $2b$  соизмеримы?
- 2.5. Сколько и каких квадратов получится в результате применения графического алгоритма Евклида к прямоугольнику со сторонами 75 и 21? а со сторонами 324 и 141?
- 2.6. Применяя операцию Евклида, прямоугольник разрезали на большой квадрат, два квадрата поменьше и два совсем маленьких. Найти отношение сторон исходного прямоугольника.
- 2.7. Доказать, что если стороны прямоугольника соизмеримы, то, применяя операцию Евклида, мы в конце концов разрежем его на квадраты (применить метод бесконечного спуска).
- 2.8. Доказать, что если применение графического алгоритма Евклида разрезает прямоугольник на некоторое конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата будет их наибольшей общей мерой.
- 2.9. Доказать, что любая общая мера соизмеримых отрезков  $a$  и  $b$  целое число раз укладывается в наибольшей общей мере отрезков  $a$  и  $b$ .
- 2.10. От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному. Соизмеримы ли стороны исходного прямоугольника? Чему равно отношение его сторон?
- 2.11. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b)$  существует и единственный, если целые  $a$  и  $b$  не равны одновременно нулю.
- 2.12. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) = \text{НОД}(r, b)$ , где  $r$  — остаток от деления  $a$  на  $b$ .
- 2.13. Найдите наибольшую общую меру отрезков  $15/28$  и  $6/35$ .
- 2.14. Какие расстояния можно отложить на прямой, имея шаблоны 6 см и 15 см?
- 2.15. Найдите возможные значения а)  $\text{НОД}(n, 12)$ ; б)  $\text{НОД}(n, n + 1)$ ; в)  $\text{НОД}(2n + 3, 7n + 6)$ ; г)  $\text{НОД}(n^2, n + 1)$ .



# Визуальная арифметика

Связь с **онлайн курсом** и главами **конспекта**:

«Дети и наука»: Урок 3. Визуальное представление бинома Ньютона.

Конспект: Глава 1, раздел 1.3 Визуальные доказательства.

## Справочные сведения

Теорема Пифагора (см. рис. 3.1) и куб суммы (см. рис. 3.2).



Рис. 3.1:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  и  $a^2 + b^2 = c^2$ .



Рис. 3.2:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

## Задачи

- 3.1. Найти с помощью графического метода сумму подряд идущих нечетных чисел от 1 до  $n$ , где  $n$  — нечетное.

3.2. Рассмотрим последовательность уголков (см. рис. 3.3). Сколько клеток в  $k$ -м уголке? Чему равна суммарная площадь первых  $k$  уголков?

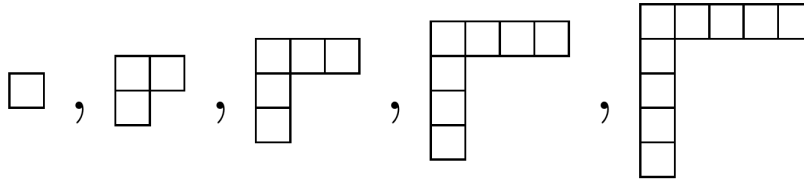


Рис. 3.3

3.3. Найти графически сумму первых  $k$  четных и первых  $k$  нечетных чисел.

3.4. Треугольные числа Диофанта  $\square, \square\square, \square\square\square, \square\square\square\square$  обозначим по порядку  $T_1, T_2, T_3, T_4$  и т.д.

- Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
- Что получится при сложении  $T_n$  с  $T_n$ ?
- Выразив  $T_n$  через  $n$ , найдите  $1 + 2 + \dots + n$ .
- Докажите геометрически, что  $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$ .

3.5. Докажите геометрически, что  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = n^2$ .

3.6. Получите геометрически выражение для  $(a + b + c)^2, (a + b + c)^3$ .

3.7. Объясните равенство на рис. 3.4 и получите формулу для суммы квадратов  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .

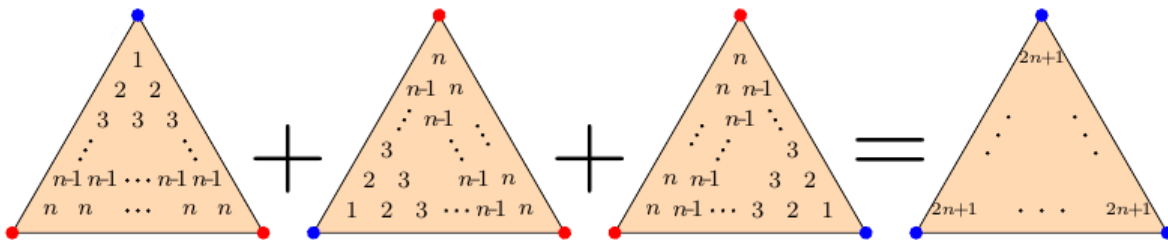


Рис. 3.4

3.8. С помощью рис. 3.5 получите еще один способ найти формулу для суммы квадратов.

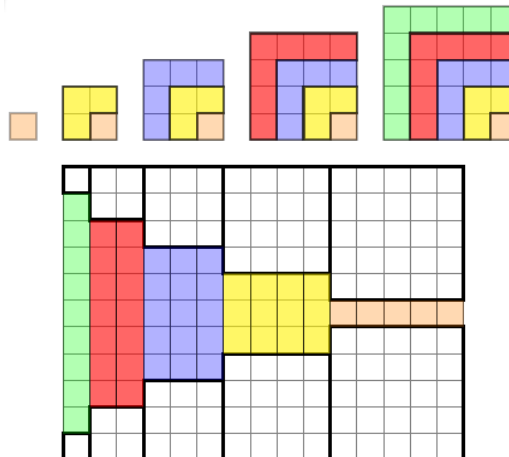


Рис. 3.5

# Бесконечные суммы

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 4. Бесконечные суммы](#).

## Справочные сведения

В данном разделе мы рассматриваем только суммы *положительных* слагаемых.

Бесконечные суммы с положительными слагаемыми могут быть сходящимися и расходящимися. Сходимость означает, что найдется такое число, что любой сколь угодно длинный конечный отрезок данной бесконечной суммы меньше этого числа. Например, сумму  $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$  можно оценивать так:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

и т.д. То есть, сумму можно разбить на отрезки длиной 2, 4, 8, 16 и т.д. слагаемых, причем сумма по каждому такому отрезку будет оцениваться сверху дробью  $1/2^k$ . Остается заметить, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

сходится. А это легко обнаружить на картинке 4.1 последовательным делением квадрата  $1 \times 1$  пополам. Таким образом, для суммы обратных квадратов справедлива оценка:

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq 2.$$

Обратно, для некоторых рядов можно найти такую оценку снизу, которая будет заведомо бесконечной, а значит, и сумма исходного ряда также будет бесконечной. Такое верно, например, для гармонического ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \dots,$$

а это — бесконечная сумма одинаковых слагаемых, равных  $1/2$  (кроме первого слагаемого). Ясно, что какое бы большое число мы ни выбрали, можно взять столь много раз  $1/2$ , что их сумма будет больше выбранного числа. А значит, и сумма гармонического ряда равна бесконечности.



Рис. 4.1

### Задачи

4.1. Выведите формулу суммы геометрической прогрессии  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  ( $0 < x < 1$ ) путем домножения этой суммы на  $x$ . Найдите:

- a)  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$ ;
- b)  $1 + 0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 + \dots$ ;
- c)  $\frac{1}{0.99} + \frac{1}{0.99^2} + \frac{1}{0.99^3} + \dots$

4.2. Исследовать ряды на сходимость:

- a)  $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots$ ;
- b)  $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots$ ;
- c)  $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$ ;
- d)  $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ ;
- e)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$

4.3. Доказать, что если ряды  $\sum_n a_n^2$  и  $\sum_n b_n^2$  сходятся, то сходятся также и ряды:

$$\sum_n a_n b_n, \quad \sum_n (a_n + b_n)^2.$$

Здесь все  $a_n, b_n \geq 0$ .

4.4. Доказать сходимость ряда

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

где  $0 \leq a_n < 10$ .

# Движения прямой: работа с понятием

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 5. Начальные представления о движении.](#)

Конспект: Глава 2, разделы 2.1 Сдвиг, композиция сдвигов, группа и раздел 2.2 Отражение.

## Справочные сведения

*Движением* называется такое преобразование (прямой, фигуры, плоскости, области пространства и т.д.), которое сохраняет расстояния. Т.е. если между точками  $A$  и  $B$  расстояние равно  $x$ , то между точками  $A'$  и  $B'$ , в которые переходят исходные точки  $A$  и  $B$  при некотором движении, расстояние также будет равно  $x$ .

На прямой рассматриваются следующие два вида движений:

- Сдвиг на  $x$ , когда все точки, как по команде, сдвигаются на число  $x$  (если  $x > 0$ , то вправо, а если  $x < 0$ , то влево). Сдвиг на  $x$  обозначается за  $T_x$ . Сдвиг на вектор  $AB$  обозначается  $T_{AB}$ .
- Отражение относительно точки  $O$ , когда все точки переходят в симметричные себе относительно точки  $O$ . Отражение относительно точки  $O$  обозначается за  $S_O$ .

Частный случай сдвига — тождественное движение  $\text{id}$ , которое ничего не меняет (все точки остаются на своих местах).  $\text{id} = T_0$  (сдвиг на нулевой вектор).

Композиция движений  $G$  и  $Q$  записывается как  $G \circ Q$ , что означает последовательное применение движений: сначала ко всем точкам прямой применяется движение  $Q$ , а затем к результату предыдущего движения применяется движение  $G$ . Композиция движений есть движение.

## Задачи

Пусть на прямой даны 4 точки  $A, B, C, D$ , поставленные друг за другом с одинаковым шагом (см. рис. 5.1).



Рис. 5.1

5.1. Куда перейдет точка  $A$  при отражении  $S_B$ ?

5.2. Куда перейдут точки  $B, C, D$  при преобразовании  $T_{AB} \circ T_{CA}$ ?

- 5.3. Куда перейдут точки  $A, B, C$  при преобразовании  $S_C \circ T_{AB}$ ?
- 5.4. Какое движение переводит  $A$  в  $C$  и  $B$  в  $D$ ?
- 5.5. Существует ли движение, которое переводит  $A$  в  $B$  и  $B$  в  $D$ ?
- 5.6. Опишите все движения, которые переводят  $A$  в  $C$ , используя только буквы  $A, B, C, D$  и обозначения сдвига и отражения.

# Движения прямой: классификация

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 6. Классификация движений прямой.](#)

Конспект: Глава 2, раздел 2.4 Теорема о гвоздях, аналог теоремы Шаля.

## Справочные сведения

Всякое движение прямой — это либо сдвиг, либо отражение. При этом любое движение — это либо одно отражение, либо композиция двух отражений.

Всякое движение прямой есть *взаимно однозначное соответствие* точек прямой, т.е. оно переводит разные точки в разные, и какова бы ни была точка прямой, найдется точка, переходящая в нее под действием движения.

*Обратное движение* для движения  $G$  — это такое движение  $G^{-1}$ , что  $G \circ G^{-1} = G^{-1} \circ G = \text{id}$ .

Обращение композиции:  $(G \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ G^{-1}$ .

## Задачи

Введем координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами:  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Через  $S_n$  обозначим отражение относительно точки  $n$ , через  $T_n$  — сдвиг на число  $n$ .

- 6.1. Известно, что при некотором преобразовании  $G$  точка 0 переходит в 2, а 2 — в 3. Может ли оно быть движением? Каким?
- 6.2. Известно, что при некотором преобразовании  $G$  точка 0 переходит в 3, а 2 — в 1. Может ли оно быть движением? Каким?
- 6.3. Известно, что при некотором преобразовании  $G$  точка 0 переходит в 2, а при обратном преобразовании  $G^{-1}$  точка 3 переходит в  $-1$ . Может ли  $G$  быть движением? Каким?
- 6.4. Дано движение  $G$ . Известно, что  $G^{-1}(0) = 1$  и при этом у  $G^{-1}$  нет неподвижных точек. Чему равно  $G$ ?
- 6.5. Назовем *четностью движения* прямой четность количества отражений, с помощью которых это движение может быть выражено. Какова четность следующих движений:  $S_0$ ,  $T_x$ ,  $T_x \circ T_y$ ,  $S_0 \circ T_x$ ,  $S_0 \circ S_1 \circ T_x \circ T_y$ ,  $T_x^{-1}$ ,  $S_0^{-1}$ ,  $S_0 \circ S_1 \circ \dots \circ S_n$ ?
- 6.6. Доказать, что

а) Четность обратного движения  $G^{-1}$  совпадает с четностью исходного движения  $G$ .

- b) Четность композиции движений равна сумме четностей (по модулю 2) компонентов.
- c) Четность движения не зависит от его представления в виде композиций каких-либо движений.



# Движения прямой: таблица композиций

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 7. Таблица композиций движений прямой.

Конспект: Глава 2, раздел 2.3 Таблица композиций движений прямой.

## Справочные сведения

Таблица композиций отражений и сдвигов:

	$T_a$	$S_O$
$T_b$	$T_{a+b}$	$S_{O+b/2}$
$S_C$	$S_{C-a/2}$	$T_{2OC}$

Таблицу композиций следует читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение  $F$ , а в верхней строке — движение  $G$ , то в соответствующей ячейке стоит композиция  $F \circ G$ .

## Задачи

Введем координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами:  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Через  $S_n$  обозначим отражение относительно точки  $n$ , через  $T_n$  — сдвиг на число  $n$ .

7.1. Какое движение получится при композиции

- a)  $S_0 \circ S_1$ ?
- b)  $S_0 \circ S_1 \circ S_2$ ?
- c)  $S_0 \circ S_2 \circ S_1$ ?

7.2. Построить сдвиг на 7 единиц вправо с помощью композиции двух отражений.

7.3. Каким движением является следующая композиция?

$$S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1 \circ S_0.$$

Ответ получить в зависимости от четности  $n$ .

7.4. При каких  $n$  сдвиг  $T_n$  выражается в виде композиций  $S_0$  и  $S_1$ ?

7.5. При каких  $n$  сдвиг  $S_n$  выражается в виде композиций  $S_0$  и  $S_1$ ?

7.6. Пусть  $G$  и  $Q$  — два движения прямой, причем  $G \circ Q = Q \circ G$  и  $G \neq Q$ . Какими могут быть  $G$  и  $Q$ ?

- 7.7. Пусть  $G$  и  $Q$  — два движения прямой, причем  $G \circ Q = \text{id}$  и  $G \neq Q$ . Какими могут быть  $G$  и  $Q$ ?
- 7.8. Вывести равенства  $S_C \circ T_a = S_{C-a/2}$  и  $T_b \circ S_O = S_{O+b/2}$  из соотношения  $S_C \circ S_O = T_{2OC}$  алгебраическим путем.
- 7.9. Доказать, что никакая композиция движений  $S_n$  и  $T_m$  с целыми индексами  $n, m$  не может быть равна сдвигу  $T_x$  с нецелым  $x$  и отражению  $S_y$  с неположительным  $y$ .

# Движения окружности: классификация

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 8. Движения окружности](#).

Конспект: Глава 3, раздел 3.1 Движения окружности, раздел 3.2 Группа движений окружности, теорема Шаля.

## Справочные сведения

Чтобы корректно говорить о движениях в криволинейном пространстве, нужно сначала договориться о метрике на нем. *Расстояние* (метрика) между двумя точками окружности — это длина меньшей из дуг данной окружности, соединяющих эти точки. Таким образом, движение окружности по определению должно сохранять длину дуги, переводя точки окружности в точки этой же окружности.

В отличие от прямой, на окружности расстояния имеют максимально допустимое значение, а именно, половину длины этой окружности. На максимальном расстоянии находятся диаметрально противоположные точки.

Движения на окружности являются:

- *Отражение относительно диаметра* (произвольного). Отражение обозначается  $S_l$ , где  $l$  — диаметр. Если на окружности зафиксировано нулевое положение диаметра, то любой диаметр можно определить через угол наклона относительно нулевого диаметра (угол откладывается против часовой стрелки). Если диаметр  $l$  имеет наклон  $\varphi$  относительно нулевого диаметра ( $0 \leq \varphi < \pi$ ), то отражение относительно данного диаметра мы также записываем как  $S_\varphi$ .
- *Поворот окружности* относительно ее центра. Поворот обозначается  $R_\varphi$ , где  $\varphi$  — угол поворота относительно центра окружности, осуществляемый против часовой стрелки,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

В обоих случаях можно рассматривать и другие значения угла  $\varphi$ , приводя его по модулю  $\pi$  в случае отражений и по модулю  $2\pi$  в случае поворотов, т.к. наклон диаметра на угол  $\phi \pm \pi$  приводит к диаметру с углом  $\varphi$ , а поворот на угол  $\pi \pm 2\pi$  — это поворот на угол  $\varphi$ .

Углы измеряются в радианах. 1 радиан — это угол, соответствующей дуге, длина которой равна радиусу окружности. Угол в  $180^\circ$ , соответствующий дуге, равной половине длины окружности, он же — развернутый угол, — имеет радианную меру, равную числу  $\pi$ . Если окружность имеет радиус, равный 1, то мера угла в радианах численно совпадает с длиной соответствующей этому углу дуги данной окружности.

Частным случаем поворота является *тождественное движение*  $\text{id}$ , оставляющее все точки окружности на месте.  $\text{id} = R_0 = R_{2\pi k}$ .

Других движений окружности не существует (теорема Шаля). Как и в случае прямой, любое движение окружности можно представить как композицию одного или двух отражений.

### Задачи

- 8.1. Доказать, что  $\pi > 3$ .
- 8.2. Пусть  $G$  — движение окружности. Сколько у  $G$  может быть неподвижных точек (имеется в виду общее количество, найдите все возможные варианты)?
- 8.3. Пусть  $G$  — движение окружности. Известно, что  $G(A) = A$  и  $G(B) \neq B$ . Какой вид может иметь  $G$ ?
- 8.4. Пусть диаметры  $l$  и  $k$  перпендикулярны. Найдите  $S_l \circ S_k$ .
- 8.5. Известно, что точка  $A$  переходит при движении  $G$  окружности в точку  $A'$ , диаметрально противоположную точке  $A$ . Каким может быть движение  $G$ ?
- 8.6. Движение назовем *четным*, если оно является композицией двух отражений, а в противном случае — *нечетным*. Верно ли, что:
  - а) Композиция четных движений — четное движение, композиция двух нечетных движений — четное движение, композиция четного движения с нечетным движением — нечетное движение?
  - б)  $G$  четно тогда и только тогда, когда  $G^{-1}$  нечетно?

# Движения окружности: таблица композиций

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 9. Таблица умножения движений окружности.

Конспект: Глава 3, раздел 3.2 Группа движений окружности, теорема Шаля.

## Справочные сведения

Таблица композиций движений окружности:

	$R_\alpha$	$S_\psi$
$R_\beta$	$R_{\alpha+\beta}$	$S_{\psi+\beta/2}$
$S_\varphi$	$S_{\varphi-\alpha/2}$	$R_{2(\varphi-\psi)}$

Таблицу композиций следует читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение  $F$ , а в верхней строке — движение  $G$ , то в соответствующей ячейке стоит композиция  $F \circ G$ .

## Задачи

- 9.1. Центральная симметрия — это какое движение?
- 9.2. Композицией каких отражений можно выразить центральную симметрию?
- 9.3. С помощью отражения относительно оси  $Ox$  (горизонтальной оси) и вращений выразить отражение относительно оси  $Oy$  (вертикальной оси).
- 9.4. Возьмем некоторый угол  $\varphi > 0$ . Найдите:
  - а)  $S_0 \circ S_\varphi$ ;
  - б)  $S_0 \circ S_\varphi \circ S_{2\varphi}$ ;
  - в)  $S_0 \circ S_{2\varphi} \circ S_\varphi$ ;
  - г)  $S_0 \circ S_\varphi \circ S_{2\varphi} \circ S_{3\varphi} \circ \dots \circ S_{n\varphi}$ .
  - е) Чему равно последнее выражение, если  $\varphi = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\pi = 2\pi$ ?
- 9.5. Построить поворот на угол  $90^\circ$  при помощи двух отражений.
- 9.6. При каких  $n$  поворот на угол  $n\varphi$  выражается в виде композиций  $S_0$  и  $S_\varphi$ ?
- 9.7. Пусть  $G$  и  $Q$  — движения окружности, причем  $G \circ Q = Q \circ G$ . Какими могут быть  $G$  и  $Q$ ?
- 9.8. Пусть  $G$  и  $Q$  — движения окружности, причем  $G \circ Q = \text{id}$ . Какими могут быть  $G$  и  $Q$ ?



# Конечные подгруппы движений прямой и окружности

Связь с [онлайн курсом](#) и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 10. Конечные подгруппы движений прямой и окружности.

Конспект: Глава 2, раздел 2.5 Все конечные подгруппы движений прямой, раздел 5.3 Подгруппы движений окружности.

## Справочные сведения

Все движения прямой и все движения окружности образуют группы с операцией композиции. Напомним определение группы. Пусть на множестве  $G$  задана операция  $\circ$ . Множество  $G$  с данной операцией называется *группой*, если:

- G1  $a \circ b \in G$  для всех  $a, b \in G$  (группоид);
- G2 для любых  $a, b, c \in G$  имеем тождество  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  (ассоциативность);
- G3 существует элемент  $\text{id} \in G$  такой, что  $a \circ \text{id} = \text{id} \circ a = a$  для всех  $a \in G$  (единица);
- G4 для всякого  $a \in G$  существует обратный элемент  $a^{-1} \in G$  такой, что  $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \text{id}$  (обратный элемент).

Кроме того, группа называется *абелевой* (или *коммутативной*), если  $a \circ b = b \circ a$  для всех  $a, b \in G$ . Количество элементов в группе называется ее **порядком**.

*Конечная подгруппа* может быть определена следующим образом: это — *конечное подмножество группы, замкнутое относительно групповой операции*. Такого определения достаточно, чтобы вывести из него тот факт, что данное подмножество само по себе является группой, т.е. содержит единицу (исходной группы), обратные элементы, а также удовлетворяет требованию ассоциативности операции (т.к. операция та же самая).

Всякая конечная подгруппа группы движений прямой имеет вид либо  $\{\text{id}\}$ , либо  $\{\text{id}, S_A\}$ , где  $A$  — некоторая точка прямой.

Всякая конечная подгруппа группы движений окружности имеет один из видов:

- 10.1. тривиальная подгруппа  $\{\text{id}\}$ ;
- 10.2. группа поворотов правильного  $n$ -угольника (включая случай вырожденного 2-угольника);
- 10.3. подгруппа одного отражения  $\{\text{id}, S_\varphi\}$ ;
- 10.4. группа движений правильного  $n$ -угольника (включает повороты, совмещающие углы многоугольника, и отражения относительно осей, проходящих через его вершины и центр окружности).

## Задачи

- 10.1. Выпишите все конечные подгруппы группы движений окружности порядка не выше 6, содержащие отражение  $S_0$  (относительно горизонтальной оси).
- 10.2. Какова группа движений правильного треугольника, квадрата, пятиугольника?
- 10.3. Пусть задан правильный треугольник  $ABC$  с осями симметрии  $a, b, c$  и центром  $O$ . Заполните таблицу композиций движений данного треугольника: Таблицу композиций следует

	id	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	$S_a$	$S_b$	$S_c$
id						
$R_{2\pi/3}$						
$R_{4\pi/3}$						
$S_A$						
$S_B$						
$S_C$						

читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение  $F$ , а в верхней строке — движение  $G$ , то в соответствующей ячейке стоит композиция  $F \circ G$ .



# Арифметика остатков

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 11. Введение в арифметику остатков.

Конспект: Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков.

## Справочные сведения

Посмотрим на шкалу целых чисел  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  через некоторый трафарет. Этот трафарет является непрозрачной полоской, в которой проделаны дырки с шагом  $m$  друг от друга (где  $m$  — целое положительное число). Например, пусть  $m = 7$ , тогда если в одной дырке мы видим число 0, то в другой, справа от нее, — число 7, а слева —  $-7$ . Если мы сместим трафарет вправо на единицу, то увидим числа  $-6, 1$  и  $8$ , еще сдвинем — числа  $-5, 2$  и  $9$ , и т.д.

Таким образом, в массиве всех целых чисел мы сможем выделять такие числа, которые связаны друг с другом через этот трафарет. Например, все числа кратные 7, т.е.  $0, \pm 7, \pm 14, \dots$ . В другой класс войдут все числа, смещенные от них на 1 вправо, т.е.  $1, \pm 7 + 1, \pm 14 + 1, \dots$ . Эти классы называются *классами вычетов по модулю  $m$* .

Если класс содержит число 0, то все числа из данного класса кратны шагу трафарета, т.е. модулю  $m$ . Действительно, ведь это числа  $0, \pm m, \pm 2m$  и т.д. Если класс не содержит нуля, то все числа в нем имеют слева соседа из нулевого класса на одном и том же расстоянии, т.к. это числа вида  $k, k \pm m, k \pm 2m, \dots$ , где  $0 < k < m$ . Число  $k$  является остатком от деления таких чисел на модуль  $m$ . Между классами и остатками от деления существует взаимно однозначное соответствие.

Простой иллюстрацией из жизни является пример с днями недели. Все понедельники отстоят друг от друга на кратное 7 число дней. Поэтому на шкале дней их можно увидеть через трафарет с шагом 7. Аналогично — все вторники, среды, четверги, пятницы, субботы и воскресенья. Если воскресенье обозначить за 0, понедельник — за 1, и т.д., то для любой даты можно определить ее класс, он же — остаток от деления на 7, т.е. день недели.

Как только мы отождествляем целые числа, входящие в один класс, их арифметика становится *модульной*. Это значит, что арифметические операции мы выполняем с точностью до класса. Так, если сложить  $2 + 5$ , то в обычной арифметике мы получим число 7, но оно находится в том же классе, что и число 0 по модулю  $m = 7$ , поэтому в модульной арифметике  $2 + 5 = 0 \pmod{7}$ . Проще говоря, в модульной арифметике мы всякий раз *вычитаем* максимально возможную часть числа, кратную модулю, и оставляем лишь *остаток* от деления на модуль. Поэтому она и называется арифметикой остатков.

Попадание чисел  $a$  и  $b$  в один класс по модулю  $m$  обозначается так:  $a \equiv b \pmod{m}$ . Формально это означает, что  $a - b = km$  при некотором целом  $k$ .

Сравните: среда(3) + 5 дней = понедельник(1). Это позволяет вычислять день недели для любой даты, отстоящей от нас на известное число дней. В частности, можно легко посчитать день недели даты, отстоящей от нас на 1 год. На рис. 11.1 приведен пример с

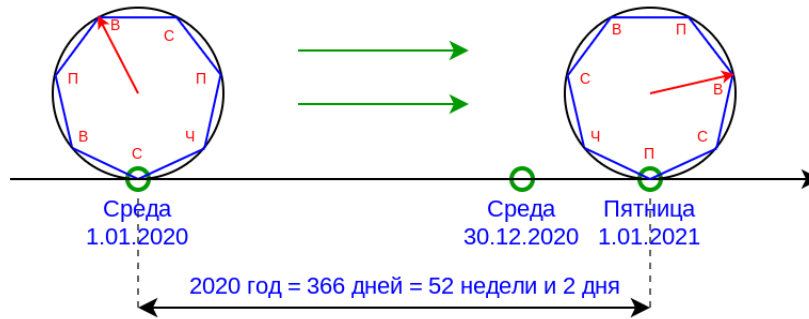


Рис. 11.1: Арифметика остатков по модулю 7.

високосным годом, содержащим 366 дней.  $366 = 350 + 14 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$ .

Если  $a$  делится на  $b$  (формально: существует целое  $k$  такое, что  $a = kb$ ), то пишут  $a:b$ , это равносильно записи  $b|a$  ( $b$  делит  $a$ ). Частный случай:  $0:x$  и  $x|0$  при любом целом  $x$ .

## Задачи

- 11.1. Отметить на числовой оси целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2 (на рисунке должны поместиться числа от -20 до 20).
- 11.2. Книжки на столе пытались связывать в пачки по 2, по 3, по 4 и по 5 книг, и каждый раз оставалась одна лишняя. Сколько книг было на столе? (Известно, что их было не больше 100.)
- 11.3. Одному брату 6 лет, другому — 10. Значит, сумма из возрастов четная. Какой она будет в следующем году?
- 11.4. Если сегодня понедельник, то какой день недели будет через 10 дней, через 90 дней, через 2 года (рассмотреть случай без високосных лет и с високосным годом)?
- 11.5. Найти день недели через месяц, квартал, полгода и год, отправляясь от текущей даты.
- 11.6. Поезд Москва–Владивосток отправляется из Москвы в 7:00 и находится в пути 166 часов. Определите время прибытия (московское) поезда во Владивосток.
- 11.7. Построить таблицы сложения для модулей: 2,3,4,5,6,10,11.
- 11.8. Найти число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 остаток 2, при делении на 4 остаток 3, при делении на 5 остаток 4, при делении на 6 остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.
- 11.9. Верно ли, что а) если  $n:k$  и  $k:n$ , то  $n = \pm k$ ; б) если  $a|b$  и  $b|c$ , то  $a|c$ ; в) если  $b:a$  и  $c:a$ , но  $d \nmid a$ , то  $(b+c):a$ , но  $(b+d) \nmid a$ ; г) если  $a$  и  $b$  не делятся на  $c$ , то  $ab$  не делится на  $c^2$ ?

# Таблицы умножения остатков

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 12. Таблицы умножения остатков](#).

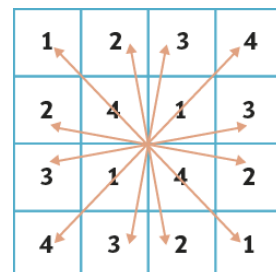
Конспект: Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

## Справочные сведения

Умножение остатков производится также по модулю  $m$ , т.е. после умножения отбрасываем часть, кратную  $m$ , и оставляем остаток от деления на  $m$  (см. рис. 12.1).

Таблица умножения по модулю  $m$  обладает следующими свойствами:

- Она центрально симметрична (на картинке 12.1 мы убрали строку и столбец, соответствующие умножению на ноль).
- Если модуль — простое число, то нулей в таблице нет (кроме тривиальных строк и столбца).



1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Рис. 12.1: Умножение по модулю 5.

## Задачи

- 12.1. Целое положительное число увеличили на 1. Могла ли сумма его цифр (а) возрасти на 8? (б) Уменьшиться на 8? (в) Уменьшиться на 10?
- 12.2. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?
- 12.3. Последняя цифра точного квадрата равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра нечётна.
- 12.4. Остаток от деления простого числа на 30 — простое число или 1. Почему?
- 12.5. Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15?
- 12.6. На какую цифру оканчивается число  $33^{77} + 77^{33}$ ?
- 12.7. Могут ли среди  $m$  последовательных целых чисел какие-то два иметь равные остатки от деления на  $m$ ?
- 12.8. Пусть  $5x \equiv 6 \pmod{8}$ . Найти  $x$ .
- 12.9. Найти последнюю цифру  $7^{100}$ ,  $7^{1942}$ .
- 12.10. Пусть  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m}$ . Докажите, что сравнения по одному и тому же модулю

- а) можно складывать и вычитать:  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ,  $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ ;
- б) можно перемножать:  $ac \equiv bd \pmod{m}$ ;
- с) можно возводить в натуральную степень  $n$ :  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ ;
- д) можно домножать на любое целое число  $k$ :  $ka \equiv kb \pmod{m}$ .

- 12.11. Найдите остаток от деления **а)** числа  $1 + 31 + 331 + \dots + 3333333331$  на 3; **б)** 6100 на 7.
- 12.12. Найдите остаток от деления числа  $1 - 11 + 111 - 1111 + \dots - 1111111111$  на 9.
- 12.13. Найдите остаток от деления **а)**  $10!$  на 11; **б)**  $11!$  на 12.
- 12.14. **а)** Какой цифрой оканчивается  $8^{18}$ ? **б)** При каких натуральных  $k$  число  $2^k - 1$  кратно 7?
- 12.15. Найдите три последние цифры числа  $1999^{2000}$ .
- 12.16. Найти **а)**  $3^{31} \pmod{7}$ , **б)**  $2^{35} \pmod{7}$ , **в)**  $128^{129} \pmod{17}$ .
- 12.17. Докажите, что **а)**  $30^{99} + 61^{100}$  делится на 31; **б)**  $43^{95} + 57^{95}$  делится на 100.
- 12.18. Докажите, что  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  делится на  $n$  при нечётном  $n$ .
- 12.19. Числа  $x$  и  $y$  целые, причем  $x^2 + y^2$  делится на 3. Докажите, что  $x$  и  $y$  делятся на 3.
- 12.20. Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?
- 12.21. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть или простое число или 1.
- 12.22. (а) Квадрат целого положительного числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Что это за цифра? (Указать все возможности.) (б) Квадрат целого положительного числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Указать все возможности.) (в) Пятая степень числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Почему? Для каких ещё степеней это верно?
- 12.23. Доказать, что для любого целого  $a$  число  $10a$  даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само  $a$ .
- 12.24. Доказать, что число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3 и 9.
- 12.25. \*Сколько есть способов записать 2018 как сумму натуральных слагаемых, любые два из которых равны или различаются на 1? (Способы лишь с разным порядком слагаемых считаем равными.)
- 12.26. \*Докажите, что из любых  $n$  целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на  $n$  (или одно число, делящееся на  $n$ ).

# Умножение по простому модулю

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 13. Основная теорема арифметики. Часть 1.](#)

Конспект: Глава 4, раздел 4.2 Кузнечик НОД и алгоритм Евклида, раздел 4.3 Простые числа и ОТА, Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

## Справочные сведения

Для произвольной строки (столбца) таблица умножения остатков по модулю  $m$  эквивалентны следующие утверждения:

- В строке (столбце) отсутствует ноль;
- Номер строки (столбца) взаимно прост с модулем  $m$ ;
- В строке (столбце) встречаются все числа от 1 до  $m - 1$ ;
- В строке (столбце) встречается 1.

Натуральное число  $p$  — *простое*, если оно имеет ровно два положительных делителя (1 и  $p$ ).

Таблица умножения остатков по простому модулю  $p$  не содержит нулей (кроме строки и столбца с умножением на ноль) и все строки и столбцы являются перестановками множества  $\{1, \dots, p - 1\}$ .

В таблице умножения остатков по простому модулю  $p$  номер  $k$  любой строки взаимно прост с модулем:  $\text{НОД}(k, p) = 1$ . Отсюда следует, что при некоторых целых  $n, t$  имеем  $tp - nk = 1$ , а по модулю  $p$  это равенство принимает вид  $nk \equiv 1$ , т.е. число  $n$  обратно к  $k$  по модулю  $p$ . Такого же и число  $n \bmod p$ . Иначе говоря, равенство  $tp - nk = 1$  позволяет найти обратный к остатку  $k$  остаток по модулю  $p$ .

Коэффициенты  $n, t$  можно найти методом цепных дробей. Например, пусть  $p = 101$ ,  $k = 77$ . Найдем обратный к нему остаток. Для этого используем цепную дробь

$$\frac{101}{77} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 - \frac{1}{5}}} \approx 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = \frac{21}{16}.$$

откуда видим, что  $77 \cdot 21 - 101 \cdot 16 = 1$ . Поэтому  $77 \cdot 21 \equiv 1 \pmod{101}$ , т.е. остаток 21 обратен к 77.

## Задачи

13.1. Найти обратные остатки к 5, 9, 12, 25, 51, 88, 99, 100 по модулю 101.

- 13.2. Найти (или доказать, что их не существует) обратные остатки к 10, 20, 30, 27, 51, 86 по модулю 2020. А по модулю 2021?
- 13.3. Докажите, что из любых  $n$  целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на  $n$  (или одно число, делящееся на  $n$ ).
- 13.4. Пусть  $m, n$  — целые, и  $5m + 3n \vdots 11$ . Докажите, что а)  $6m + 8n \vdots 11$ ; б)  $9m + n \vdots 11$ .
- 13.5. Пусть в некоторой стране имеют хождение монеты достоинством только 14 и 23 тугрика. Продавец должен выдать сдачу покупателю в размере 1 тугрик. Считая, что у обоих имеется достаточное количество монет того и другого достоинства, указать способ, которым должен воспользоваться продавец для выдачи сдачи.
- 13.6. Найти цепную дробь для  $\sqrt{3}$ .

### Еще задачи на остатки

- 13.7. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.
- 13.8. Число  $a$  даёт остаток 5 при делении на 9, число  $b$  даёт остаток 7 при делении на 9. Можно ли по этим данным определить, какой остаток дают числа  $a + b$  и  $ab$  при делении на 9?
- 13.9. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что **а)** их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.
- 13.10. Докажите, что а)  $\overline{aaa}$  делится на 37 (черта означает позиционную запись числа цифрами); б)  $\overline{abc} - \overline{cba}$  делится на 99 (где  $a, b, c$  — цифры).
- 13.11. Сформулировать и доказать признаки делимости на 2, 4, 5, 8.
- 13.12. Из числа  $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$  вычли сумму его цифр  $a_n + \dots + a_1 + a_0$ . а) Докажите, что получилось число, кратное 9. б) Выведите отсюда признаки делимости на 3 и на 9.
- 13.13. Переставив цифры в числе  $N$ , получили в 3 раза меньшее число. Докажите, что  $N \vdots 27$ .
- 13.14. Верен ли такой признак делимости на 27: число делится на 27 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 27?
- 13.15. Запись числа  $N$  составлено из записей подряд идущих чисел от 19 до 92:

$$N = 19202122 \dots 909192.$$

На какую максимальную степень тройки оно делится?

- 13.16. Докажите, что число  $11 \dots 11$ , запись которого состоит из  $3^n$  единиц, делится на  $3^n$ .
- 13.17. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих в четных разрядах, и сумма его цифр, стоящих в нечетных разрядах, отличаются на число, кратное 11.
- 13.18. Может ли  $n!$  оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?
- 13.19. \*Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых как сумма трёх или менее точных квадратов.

# Основная теорема арифметики

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 14. Основная теорема арифметики. Часть 2.

Конспект: Глава 4, раздел 4.3 Простые числа и ОТА, Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

## Справочные сведения

Всякое положительное число  $N$  имеет единственное представление в виде

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

где  $p_1, \dots, p_k$  — некоторые простые числа, целые  $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ .

$\text{НОД}(a, b)$  — наибольшее целое число, одновременно делящее  $a$  и  $b$ ,  $\text{НОК}(a, b)$  — наименьшее целое положительное число, одновременно делящееся на  $a$  и  $b$ .

**Теорема Вильсона:** если  $p$  — простое число, то  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

## Задачи

- 14.1. Написать на псевдоязыке алгоритм разложения числа по степеням простых.
- 14.2. \*Оценить скорость алгоритма следующим образом: посчитать количество операций деления с остатком, производимых в ходе выполнения алгоритма.
- 14.3. Известно, что  $n^2(m^2 + 1)(m + 1) = 9999$  при некоторых целых  $n, m$ . Найдите эти числа.
- 14.4. Произведение возрастов Машинных братьев равно 1664. Младший из братьев вдвое моложе старшего. Сколько у Маши братьев?
- 14.5. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа, не делящиеся на 10, такие, что  $ab = 10000$ . Чему равна их сумма?
- 14.6. В силу ОТА будем записывать положительное натуральное число  $m$  как последовательность  $\overline{m}$  степеней простых:

$$m = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \dots \iff \overline{m} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots),$$

где  $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$  — все простые числа, начиная с 2.

Докажите, что если  $\overline{m} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots)$  и  $\overline{n} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)$ , то

$$\begin{aligned} \overline{nm} &= (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_k + \beta_k, \dots) \\ \overline{\text{НОД}(n, m)} &= (\min(\alpha_0, \beta_0), \min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_k, \beta_k), \dots), \\ \overline{\text{НОК}(n, m)} &= (\max(\alpha_0, \beta_0), \max(\alpha_1, \beta_1), \dots, \max(\alpha_k, \beta_k), \dots). \end{aligned}$$

14.7. Докажите, что  $\text{НОД}(n, m)\text{НОК}(n, m) = nm$ .

14.8. Найти  $\sigma(p^k)$ , где  $p$  — простое число,  $k$  — целое положительное,  $\sigma(m)$  — сумма всех положительных делителей числа  $m$ . Верно ли, что  $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$  при условии  $\text{НОД}(a, b) = 1$ ?  
Найдите  $\sigma(n)$ , где

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

— разложение числа  $n$  по степеням простых.

14.9. Натуральное число называется **совершенным**, если сумма всех его делителей, меньших его, равно ему самому. Например, 6 и 28 — совершенные числа. Докажите, что число  $2^{n-1}(2^n - 1)$  будет совершенным, если  $2^n - 1$  — простое число.

14.10. Напишите на псевдоязыке алгоритм вычисления  $\sigma(n)$  для любого положительного целого числа.

## Задачи на сравнения

14.11. Пусть  $p$  — простое число вида  $4k + 1$ , и пусть  $x = (2k)!$ . Докажите, что  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ .

14.12. Пусть  $p$  — простое число вида  $4k + 1$ , и пусть  $x$  удовлетворяет сравнению  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Докажите, что

- $(a + xb)(a - xb) \equiv a^2 + b^2 \pmod{p}$  при  $a, b \in \mathbb{Z}$ ;
- среди чисел вида  $m + xn$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq m, n \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ , найдутся два с равными остатками от деления на  $p$ ;
- найдется ненулевое число  $a + bx$ , делящееся на  $p$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ , причем  $|a| < \sqrt{p}$  и  $|b| < \sqrt{p}$ ;
- $p$  представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.



# Следствия ОТА

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 15. Основная теорема арифметики. Следствия.

Конспект: Глава 4, раздел 4.2 Кузнечик НОД и алгоритм Евклида.

## Справочные сведения

Кузнечик умеет прыгать одной ногой на  $a$  (в обе стороны), другой ногой — на  $b$  (в обе стороны). Здесь  $a, b$  — целые числа. Тогда он может попасть во все целые точки, кратные НОД( $a, b$ ), и только в них.

**Лемма Евклида:** если простое число  $p$  делит произведение целых чисел  $ab$ , то  $p$  делит  $a$  или  $p$  делит  $b$ .

## Задачи

15.1. В какую ближайшую к нулю точку может попасть кузнечик, умеющий делать прыжки по числовой прямой длины 37 и 777, если он стартует в нуле?

15.2. Используя разложение на множители, решите уравнение:

$$n^3(n+1)^3 3 = 1728$$

15.3. Кузнечик делает по числовой прямой прыжки длины 11 и 1331. Укажите точки, в которых он может оказаться: 99, 999, 1, 11, 111.

15.4. Два кузнечика на числовой прямой, стартуя из нуля, могут совершать любые комбинации прыжков: первый — длины 16 и 28, а второй — длины 9 и 15. В какой ближайшей к нулю точке они могут встретиться?

15.5. При каком минимальном целом  $n > 0$  уравнение  $120n = x^3$  будет иметь целочисленное решение?

15.6. Доказать, что любое простое число  $p > 3$  имеет вид  $6k + 1$  или  $6k + 5$ .

15.7. Доказать, что квадрат простого числа  $p > 3$  при делении на 12 дает остаток 1.

15.8. Доказать, что любое общее кратное чисел  $a$  и  $b$  делится на их НОК.

15.9. Про натуральные числа  $a$  и  $b$  известно, что их НОД равен 15, а НОД равен 840. Найти  $a$  и  $b$ .

15.10. Доказать, что при  $n > 2$  два числа  $2^n - 1$  и  $2^n + 1$  одновременно не могут быть простыми.

- 15.11. Обозначим за  $\tau(n)$  количество всех положительных делителей числа  $n$ . Найти  $\tau(p^k)$ , где  $p$  — простое число. Верно ли, что  $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$  при условии  $\text{НОД}(a, b) = 1$ . Найти  $\tau(n)$ , если

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

— разложение числа  $n$  по степеням простых.

- 15.12. Напишите на псевдоязыке алгоритм вычисления  $\tau(n)$  для любого положительного целого числа.
- 15.13. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 положительных делителей?
- 15.14. Рассмотрим целое число  $n > 0$ . Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел  $(u, v)$  таких, что  $\text{НОК}(a, b) = n$ , равно количеству натуральных делителей у числа  $n^2$ .
- 15.15. Существуют ли целые  $x, y$ , для которых **(а)**  $x^2 + y^2 = 99$ ? **(б)**  $x^2 + y^2 = 33333$ ? **(с)**  $x^2 + y^2 = 5600$ ?
- 15.16. **(а)** [Решето Эратосфена] Выпишем целые числа от 2 до  $n$ . Подчеркнём 2 и сотрём числа, кратные 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём кратные ему, и т. д., пока каждое число от 2 до  $n$  не будет подчёркнуто или стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до  $n$ . **(б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше  $\sqrt{n}$ . Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до  $n$  простые. **(в)** Какие числа, меньшие 100, простые?
- 15.17. Числа  $a, b, c, n$  натуральные,  $\text{НОД}(a, b) = 1$ ,  $ab = c^n$ . Найдется ли такое целое  $x$ , что  $a = x^n n$ ?
- 15.18. Решите в натуральных числах уравнение  $x^{42} = y^{55}$ .
- 15.19. Найдутся ли такие 10 разных целых чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, со свойством: квадратом целого числа будет произведение **(а)** любых двух из них; **(б)** любых трёх них?
- 15.20. Найдите разложение по степеням простых числа **(а)** 2021; **(б)** 17!; **(в)**  $\binom{20}{10}$ .
- 15.21. При каких натуральных  $k$  число  $(k-1)!$  не делится на  $k$ ?
- 15.22. **(а)** [Теорема Лежандра] Докажите, что простое число  $p$  входит в разложение по степеням простых числа  $n!$  в степени  $\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \dots$  (где  $\lfloor x \rfloor$  — это целая часть числа  $x$ ). С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю? **(б)** Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **(в)** Может ли  $n!$  делиться на  $2^n$  ( $n \geq 1$ )?
- 15.23. Докажите, что существует бесконечное число простых чисел вида **(а)**  $3k+2$ ; **(б)**  $4k+3$ .

# Линейные уравнения в целых числах

Связь с [онлайн курсом](#) и [главами конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 16. Решение линейных уравнений в целых числах. Часть 1.](#)  
Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах.

## Справочные сведения

Уравнение вида  $ax + by = c$ , где  $a, b, c$  — некоторые целые числа, а  $x, y$  — переменные, пробегающие целые числа, называется линейным уравнением в целых числах. Задача: отыскать все возможные пары  $(x, y)$ , удовлетворяющие данному уравнению.

**Шаг 1.** Находим  $\text{НОД}(a, b)$  и проверяем, делится ли  $c$  на  $\text{НОД}(a, b)$ . Если не делится, то решений нет.

**Шаг 2.** Если делится, то сокращаем все уравнение на  $\text{НОД}(a, b)$ , получаем эквивалентное уравнение такого же вида, только с условием  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

**Шаг 3.** Ищем общее решение однородного уравнения:  $ax + by = 0$  (здесь уже считаем  $\text{НОД}(a, b) = 1$ ). Это решение имеет вид

$$x = bk, \quad y = -ak, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Шаг 4.** Ищем частное решение уравнения  $ax + by = 1$  (например, с помощью цепной дроби для  $a/b$ ). Это решение существует в силу алгоритма Евклида. Обозначим это решение за  $(x_0, y_0)$ . Тогда  $(x_0c, y_0c)$  будет частным решением уравнения  $ax + by = c$ .

**Шаг 5.** Общее решение уравнения  $ax + by = c$  ( $\text{НОД}(a, b) = 1$ ) записывается в виде

$$x = bk + x_0c, \quad y = -ak + y_0c, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Задачи

- 16.1. Решите в целых числах уравнения: **(а)**  $6x - 5y = 0$ ; **(б)**  $6x - 6y = 2$ ; **(в)**  $6x - 5y = 3$ .
- 16.2. Найти все решения линейного уравнения в целых числах или доказать что их нет: **(а)**  $5x - 9y = 2$ ; **(б)**  $225x + 81y = 18$ ; **(в)**  $10x - 18y = 3$ .
- 16.3. Решите уравнения: **(а)**  $121x + 91y = 1$ ; **(б)**  $-343x + 119y = 42$ ; **(в)**  $111x - 740y = 11$ .
- 16.4. Разложить в цепную дробь числа **(а)**  $15/4$ ; **(б)**  $42/31$ ; **(в)**  $13/9$ ; **(г)**  $6/5$ .
- 16.5. Используя разложение в цепную дробь решить уравнение в целых числах **(а)**  $57x - 89y = 16$ ; **(б)**  $13x - 10y = 27$ .

- 16.6. Докажите, что уравнение  $ax + by = d$  имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(a, b) | d$ . В частности,  $\text{НОД}(a, b)$  — это наименьшее натуральное число, представимое в виде  $ax + by$ .
- 16.7. **(а)**  $12x = 42y$ ; **(б)**  $ax + by = 0$ , где  $\text{НОД}(a, b) = d$ ; **(в)**  $2x + 3y = 1$ ; **(г)**  $4x + 6y = 2$ ; **(д)**  $4x + 6y = 5$ ; **(е)**  $20x + 21y = 2021$ .
- 16.8. Кузнечик может прыгать на расстояние 15 и 7. Изначально он находится в точке 0. **(а)** Найдите, как следует прыгать кузнечику, чтобы оказаться в точке 3. **(б)** Найдите, за какое наименьшее число прыжков он может попасть в точку 6;
- 16.9. Пусть  $(x_0, y_0)$  — решение уравнения  $ax + by = d$ . Пусть  $a_0$  и  $b_0$  — такие числа, что  $\text{НОД}(a, b)a_0 = a$ ,  $\text{НОД}(a, b)b_0 = b$ . Покажите, что каждое решение уравнения  $ax + by = d$  имеет вид  $x = x_0 + b_0 \cdot t$ ,  $y = y_0 - a_0 \cdot t$ , где  $t$  — целое число.
- 16.10. Известно, что пары чисел  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  являются решением уравнения  $ax + by + c = 0$ , где  $a, b, c$  — некоторые неизвестные целые коэффициенты. Найдите, выразив через  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , чему равно  $a/b$ .
- 16.11. Решите в целых числах уравнение  $2x + 3y + 5z = 1$ .
- 16.12. **(а)** В фирме 28 служащих с большим стажем и 37 — с маленьким. Хозяин фирмы выделил некую сумму для подарков служащим на Новый год. Бухгалтер подсчитал, что есть только один способ разделить деньги так, чтобы все служащие с большим стажем получили поровну и все с маленьким — тоже поровну (все получают целое число рублей, большее 0). Какую наименьшую и какую наибольшую сумму мог выделить хозяин на подарки? **(б)\*** А если ещё требуется, чтобы служащий с большим стажем получил больше денег, чем служащий с маленьким стажем?
- 16.13. Натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно просты. Докажите, что уравнение  $ax + by = c$
- а) при любом целом  $c$  имеет такое решение в целых числах  $x$  и  $y$ , что  $0 \leq x < b$ ;
  - б) имеет решение в *целых неотрицательных* числах  $x$  и  $y$ , если  $c$  целое, большее  $ab - a - b$ ;
  - в) \*при целых  $c$  от 0 до  $ab - a - b$  ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причем если для  $c = c_0$  такое решение есть, то для  $c = ab - a - b - c_0$  таких решений нет.

# Алгоритм Евклида

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 17. Решение линейных уравнений в целых числах. Часть 2.

Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах.

## Справочные сведения

**Алгоритм Евклида** последовательного деления с остатком. Пусть даны целые числа  $a$  и  $b$ , причем  $a > b > 0$ . Делим  $a/b$  с остатком:

$$a = bk_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b.$$

Далее делим  $b/r_0$  с остатком, получаем равенство  $b = r_0k_1 + r_1$ , где  $0 \leq r_1 < r_0$ . Затем делим с остатком  $r_0$  на  $r_1$ , и так далее. То есть делим каждый предыдущий остаток на текущий. Рано или поздно мы получим  $r_n = 0$ , на этом алгоритм останавливается.

При этом, последний ненулевой остаток есть не что иное как  $\text{НОД}(a, b)$ . Если сразу же получаем  $r_0 = 0$ , то  $\text{НОД}(a, b) = b$ .

Затем можно начать раскручивать полученные равенства в обратном направлении, чтобы выразить  $\text{НОД}(a, b)$  через  $a$  и  $b$ . Отсюда получаем представление

$$\text{НОД}(a, b) = an + bm, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Например, найдем  $\text{НОД}(16, 6)$  и его линейное представление.

$$16 = 6 \cdot 2 + 4$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

Отсюда  $\text{НОД}(16, 6) = 2$ . Из второго равенства получаем, что  $2 = 6 - 4 \cdot 1$ , куда подставляем 4, и получаем

$$2 = 6 - (16 - 6 \cdot 2) \cdot 1 = 16 \cdot (-1) + 6 \cdot 3,$$

т.е.  $n = -1, m = 3$ .

## Задачи

- 17.1. Написать реализацию алгоритма Евклида на псевдоязыке программирования. А также алгоритм, выводящий линейное представление  $\text{НОД}$  через исходные два числа.
- 17.2. Вычислите при помощи алгоритма Евклида: **(а)**  $\text{НОД}(91, 147)$ ; **(б)**  $\text{НОД}(-144, -233)$ ; **(в)**  $\text{НОД}(525, 231)$ ; **(г)**  $\text{НОД}(7\,777\,777, 7\,777)$ ; **(д)**  $\text{НОД}(10946, 17711)$ ; **(е)**  $\text{НОД}(2^m - 1, 2^n - 1)$ .
- 17.3. Доказать, что все остатки  $r_k$  в алгоритме Евклида можно представить в виде линейной комбинации  $ax + by$ , подобрав подходящие целые  $x, y$ .

- 17.4. Покажите, как при помощи алгоритма Евклида можно по произвольным  $a$  и  $b$  найти такие  $k$  и  $l$ , что  $ak + bl = \text{НОД}(a, b)$ .
- 17.5. Найти линейное представление НОД с помощью алгоритма Евклида и методом цепных дробей:
- $$\text{НОД}(5, 9), \quad \text{НОД}(18, 15), \quad \text{НОД}(225, 81).$$
- 17.6. Доказать, что алгоритм Евклида, описанный выше, завершается за конечное число шагов для любых стартовых целых положительных чисел  $a$  и  $b$ .
- 17.7. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b)$  делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$ .
- 17.8. С помощью представления НОД в виде линейной комбинации исходных чисел докажите, что если  $\text{НОД}(a, b) = 1$  и  $a \vdots b$ , то  $c \vdots b$ .
- 17.9. Какие расстояния можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины  $a$  см и  $b$  см (где  $\text{НОД}(a, b) = d$ )?