Математическая индукция

Математическая индукция— это способ доказать бесконечную серию занумерованных натуральными числами утверждений за два хода: 1) *база индукции:* доказываем первое утверждение; 2) *шаг индукции:* доказываем, что при любом натуральном n из n-го утверждения следует $(n+1)$-е.

Задача 1. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ при любом натуральном n.

Задача 2. Докажите, что при любом натуральном n **а)** $2^n > n$; **б)** $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

Задача 3°. Докажите неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, если $a \geqslant -1$ и n — натуральное число.

Задача 4. Докажите: модуль суммы любого числа слагаемых не больше суммы модулей этих слагаемых.

Задача 5. Найдите ошибку: «Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти, индукцией по числу лошадей. Если в табуне одна лошадь, всё очевидно. Пусть в любом табуне из n лошадей все лошади одной масти. Возьмём любой табун из $n+1$ лошади и построим в ряд. По предположению, первые n лошадей одной масти и последние n тоже, то есть все лошади той же масти, что и «средняя» лошадь.»

Задача 6. Верна ли теорема: «Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный»? Вот её доказательство (нет ли в нём ошибки?):
«1. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).
2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n+1$ треугольник, причём один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана.»

Задача 7. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость **а)** n прямых; **б)** n окружностей? **в)*** На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?

Есть разные варианты индукции. Иногда в качестве шага приходится проверять, что n-е утверждение верно если верны *все* предыдущие. Другой вариант: предположим, что не все утверждения верны. Тогда есть *наименьшее* натуральное n, для которого n-е утверждение неверно. Если из этого выводится противоречие, то все утверждения верны.

Задача 8°. Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Задача 9°. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую; сумма может состоять и из одного слагаемого).

Задача 10. Число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое при любом натуральном n.

Задача 11. (*Ханойские башни*) Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что **а)** можно переложить все кольца на один из пустых стержней; **б)** можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний; **в)** меньшим числом перекладываний не обойтись.

Задача 12*. N воров делят золотой песок. Каждый умеет делить на равные с его точки зрения части, но другие ему не верят. Как действовать ворам, чтобы каждый получил не менее $\frac{1}{N}$ с его точки зрения?

Задача 13*. При каких n гири весом 1, 2, …, n кг можно разложить на три равные по весу кучи?

Задача 14*. На круговой трассе стоят машины. Суммарно у них хватает бензина проехать один круг. Докажите, что одна из машин сможет объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

Задача 15*. На краю пустыни имеется неограниченный запас бензина и канистр, а также машина, которая при полной заправке может проехать 50 км. В канистры можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить нельзя, пустые можно возить в любом количестве.)

Задача 16*. Бизнесмен заключил с чёртом такую сделку: он может любую имеющуюся у него купюру обменять у чёрта на любой набор купюр любого меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Он может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у чёрта). При этом каждый день на еду ему нужен рубль. Сможет ли он так жить бесконечно долго?

Задача 17*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Ходят по очереди, по правилам игра длится не более n ходов. Ничьих нет. Докажите, что у кого-то есть выигрышная стратегия.

1	2 а	2 б	3	4	5	6	7 а	7 б	7 в	8	9	10	11 а	11 б	11 в	12	13	14	15	16	17