

Задача 1 . а) Разбейте все анаграммы слова ДЯДЯ на группы, в которых все слова одинаковые, если не различать размер букв; б) Разбейте все последовательности из 3 синих и 3 красных бусин в группы, в которых одинаковые ожерелья, если соединить последовательность в кольцо; в) Как посчитать все анаграммы слова ДЯДЯ? г) Как посчитать количество ожерелий из 3 синих и 3 красных бусин?

Задача 2. В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

Задача 3. Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) РОК; б) КУРОК; в) КОЛОБОК; г) $\underbrace{AA \dots A}_a \underbrace{BB \dots B}_b$? д) $\underbrace{c_1 \dots c_1}_{k_1} \underbrace{c_2 \dots c_2}_{k_2} \dots \dots \underbrace{c_m \dots c_m}_{k_m}$.

Задача 4. а) Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек?

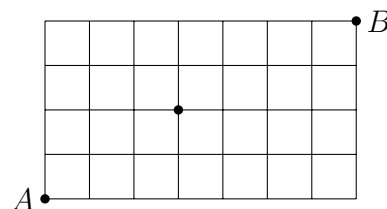
б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

Определение 1. Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: $\binom{n}{k}$ или C_n^k (читается «це из n по k »).

Задача 5 . Докажите, что а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 6 . Найдите формулу для C_n^k .

Задача 7. а) На рисунке справа изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B ?



б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

Задача 8 . Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

Задача 9. Сколькими способами можно посадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. Треугольником Паскаля называют числовой треугольник, изображенный на рисунке справа (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 10 . На рисунке выписаны первые 6 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

Задача 11 . Докажите, что k -ое число n -ой строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 12 . Докажите, что сумма чисел в n -ой строке треугольника Паскаля равна 2^n .

Задача 13. Докажите тождество: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

Задача 14 . а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.

б) (Бином Ньютона) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a+b)^n$. Докажите, что любое слагаемое имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$, причём $C = C_n^k$.

в) Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных в $(1+x^5+x^7)^{20}$.

Задача 15. Докажите тождество: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 16. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 17. Из задачи 16 найдите суммы а) $T_n = 1 + \dots + n$; б) $\Pi_n = T_1 + \dots + T_n$; в) $\Pi_1 + \dots + \Pi_n$.

Задача 18 . Как из предыдущей задачи вывести формулы для сумм $1^2 + \dots + k^2$, $1^3 + \dots + k^3$, ...?

Задача 19 . Отметьте в треугольнике Паскаля чётные числа. В каких строках все числа нечётные?

Задача 20 . Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

1	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13	14	14	14	15	16	17	17	17	18	19	20
a	b	b	г		a	б	в	г	д	a	б	в	г	a	б						a	б	в			a	б	в				