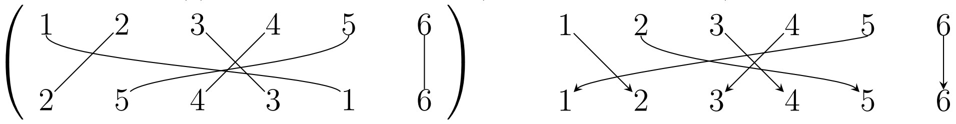
Листок №49 — Перестановки: чётность — 22.04.2020 – 29.04.2020; 14/11/8 з. на 5/4/3

Определение 1. *Беспорядок* или *инверсия* в перестановке α — это такая пара (i, j), что $i < j$ и $\alpha(i) > \alpha(j)$. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае. Говорят также, что *знак* чётной перестановки равен 1, а знак нечётной перестановки равен -1.

Задача 1. **а)** Какие перестановки в S_3 чётные?

б) Сколько инверсий у перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 2. (*Правило ниточек*) Чтобы увидеть число инверсий геометрически, на картинке, можно поступить двумя способами. Первый: в таблице, отвечающей перестановке α, соединим нитями одинаковые элементы (картинка слева). Второй: нарисуем таблицу с двумя одинаковыми верхними строками — 1, 2, …, n, — и каждый элемент i верхней строки соединим нитью с элементом $\alpha(i)$ во второй строке (картинка справа).



а) Как увидеть количество инверсий на этой картинке (можно дать ответ для одного способа)?

б) Сделайте это для (2 3 4) и (14)(23) из S_4.

в) Изменится ли чётность числа инверсий, если в нижней строке таблицы поменять два элемента местами?

Задача 3. Найдите число инверсий перестановки α^{-1}, зная число инверсий перестановки α.

Задача 4. **а)** Докажите, что любая транспозиция — нечётная перестановка;

б) Докажите, что умножение на транспозицию (справа) меняет чётность перестановки;

в) Докажите, что произведение двух перестановок одной чётности — чётная перестановка, а произведение двух перестановок разной чётности — нечётная (знаки перемножаются!).

Задача 5. Пусть α — произвольная перестановка. Как связаны наименьшее число транспозиций в разложении α на элементарные транспозиции и число инверсий у α?

Задача 6. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?

Задача 7. Сколько всего чётных перестановок в S_n? (Их множество обозначается A_n.)

Задача 8*. В игре Сэма Лойда «пятнашки» поменяли квадраты с числами 14 и 15 местами. Можно ли из этой позиции по правилам игры получить исходную?

Задача 9*. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Могут ли они гарантировать результат **а)** более 500; **б)** не менее 999?

Задача 10. Пусть $n \geqslant 3$. Докажите, что A_n — это в точности множество перестановок из S_n, которые можно разложить в произведение циклов длины 3 (повторения разрешаются).

Задача 11. Постройте такое соответствие между элементами A_4 и вращениями пространства, переводящими правильный тетраэдр в себя, что композиции перестановок соответствует композиция соответствующих вращений.

Задача 12*. Пусть s_l – количество перестановок с числом инверсий l. Покажите, что
$$1 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \ldots = (1 + x)(1 + x + x^2) \ldots (1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	4 в	5	6	7	8	9 а	9 б	10	11	12