Разбиение на пары

Часто в повседневной жизни нам приходится сравнивать количества различных объектов. Во многих случаях нас интересует не сами количества, а ответ на вопрос: каких из них больше? Так, при игре в слова победителем считается тот, кто придумал больше слов. Поэтому при подведении итогов совсем не обязательно считать количество слов каждого, достаточно как-то придумать, как сравнить эти количества. Приведём несколько примеров, как можно проводить такие сравнения без всяких подсчётов и вычислений.

Пример 1. Предположим, что воспитатель детского сада во время утренней прогулки решил выяснить, кого у него в группе больше: мальчиков или девочек. Посчитать их явно довольно сложно, поскольку они всё время двигаются и есть опасность кого-то посчитать два раза, а кого-то пропустить. Наверное одним из самых простых выходов в данной ситуации будет предложить детям построиться парами мальчик-девочка. Если у них это получится, то мальчиков и девочек в группе поровну. Если же какие-то мальчики окажутся без пары, то мальчиков больше. В противном же случае больше девочек.

Пример 2. Петя и Вася решили выяснить, кто из них может сделать больше приседаний. Считать сначала, сколько может присесть первый, а потом второй, им не подходит, поскольку после двух десятков приседаний они боятся сбиться со счета и ошибиться. Поэтому можно предложить им начать приседать одновременно и делать приседания синхронно (т.е. тоже одновременно). В этом случае тот, кто первый не сможет больше приседать, и будет проигравшим.

Пример 3. Пусть в зале собралось некоторое количество людей, и мы хотим установить, хватит ли на них на всех стульев (или надо принести ещё). То есть нужно сравнить количество людей и количество стульев. Можно конечно попытаться пересчитать и людей, и стулья. Но люди постоянно перемещаются, некоторые стулья мы можем не заметить, да и пересчитывая большое количество стульев легко ошибиться. Вместо этого предложим всем людям сесть на стулья. Если все люди сумели сесть и свободных стульев при этом не осталось, то количество людей равно количеству стульев. Если же, к примеру, окажется, что все стулья заняты, а кто-то всё ещё продолжает стоять, то стульев меньше, чем людей.

Во всех трёх примерах мы делали однотипную операцию, и вот её математическая формулировка:

Определение 1. Говорят, что между двумя множествами установлено *взаимно-однозначное соответствие* (или *биекция),* если любому элементу (объекту) первого множества соответствует единственный элемент (объект) второго множества и наоборот.

В первом примере мы рассматривали множество мальчиков и множество девочек. Строя их парами мальчик-девочка, мы пытались установить взаимно-однозначное соответствие между множеством мальчиков и множеством девочек. Во втором примере первое множество состояло из отдельных приседаний Пети, а второе — из отдельных приседаний Васи. После этого мы пытались сравнить количество отдельных приседаний в первом множестве и во втором, чтоб определить победителя. Для этого мы первому приседанию Пети ставили в соответствие первое приседание Васи, второму приседанию Пети — второе приседание Васи и т.д. Тем самым мы пытались установить биекцию между этими двумя множествами. В третьем примере мы пробовали установить биекцию между множеством людей и множеством стульев. Если бы все стулья оказались заняты людьми, а часть людей ещё продолжала бы стоять, то нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством стульев и частью множества людей. Все сказанное выше позволяет сделать три очевидных утверждения:

Утверждение 1. Если имеются два конечных множества A и B с одинаковым количеством элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, разбив их на пары: первому элементу множества A можно поставить в соответствие первый элемент множества B, второму элементу множества A — второй элемент множества B и т.д.

Утверждение 2. (*обратное*) Если между двумя конечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Утверждение 3. Если между конечным множеством A и частью конечного множества B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в множестве B больше элементов, чем в множестве A.

В отличие от реальных людей, которые сами находить себе стулья, в математических задачах объекты не смогут сами разбиться на пары без нашего участия и чёткого описания, какому объекту какой соответствует. Поэтому решение математических задач, в которых устанавливается биекция, должно состоять из трёх этапов. Если эти этапы перевести на язык людей и стульев, то они выглядят следующим образом:

1. Указать, какому человеку на какой стул садиться.
2. Проверить, что разные люди при этом должны будут сесть на разные стулья, т.е. убедиться, что нескольким людям не указано на один и тот же стул.
3. Выяснить, для каждого ли стула есть человек, который должен на него сесть

Задача 1. На окружности нарисованы 10 чёрных точек и одна белая. Чего больше: треугольников, все вершины которых чёрные, или четырёхугольников с тремя чёрными вершинами и одной белой?

Задача 2. Все последовательности из 20 нулей и единиц делятся на две группы — те, в которых чётное число единиц, и те, в которых нечётное. Каких больше?

Задача 3. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 4. Докажите, что натуральное число имеет нечётное число натуральных делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

Задача 5. Назовём число «убывающим», если цифры в его записи убывают, и «возрастающим» — если возрастают. **а)** Каких «убывающих» чисел больше — трёхзначных или семизначных? **б)** Каких «возрастающих» чисел больше — трёхзначных или семизначных?

Задача 6. Почему число решений уравнения $x + y + z = 30$ в положительных целых числах равно числу решений уравнения $x + y + z = 27$ в неотрицательных целых числах?

Задача 7. Петя выписал на доску все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для которых $0 < x < y < z < 13$. Вася выписал на доску все тройки целых чисел $(a; b; c)$, для которых $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 9$. У кого получилось больше троек?

Задача 8. Среди треугольников с целыми сторонами каких больше:
а) периметра 2014 или периметра 2017; **б)** периметра 2015 или периметра 2018?

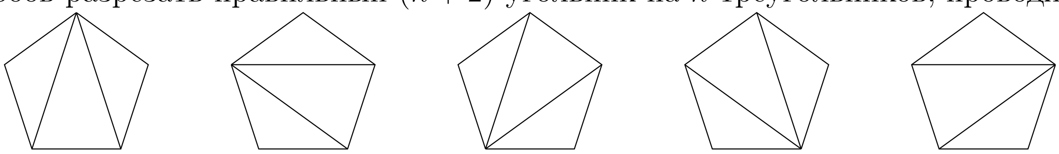
Задача 9*. Петя подсчитал количество всевозможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы T, O, W и N, причём в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всевозможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Задача 10*. Докажите, что число разбиений натурального n на k натуральных слагаемых равно числу разбиений n в сумму натуральных слагаемых, наибольшее из которых равно k. (Разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

Задача 11*. Докажите, что счастливых шестизначных номеров (то есть таких, где сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних) столько же, сколько шестизначных номеров с суммой цифр 27.

Задача 12*. Докажите, что число способов разрезать доску $2 \times (n + 1)$ на доминошки равно числу последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд.

Задача 13*. (*Числа Каталана*) Докажите, что следующие величины совпадают:
- Число способов разрезать правильный $(n + 2)$-угольник на n треугольников, проводя диагонали;



- Число способов расставить скобки в произведении $n - 1$ сомножителей.

`a(b(cd))`   `(ab)(cd)`   `((ab)c)d`   `a((bc)d)`   `(a(bc))d`

Задача 14.** Докажите, что число разбиений натурального n на нечётные натуральные слагаемые равно числу разбиений n на попарно различные натуральные слагаемые. (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

1	2	3	4	5 а	5 б	6	7	8 а	8 б	9	10	11	12	13	14