Листок №38 Математическое ожидание 02.10 – 16.10.2019
27/21/15 з. на 5/4/3

Определение 1. Часто каждому возможному исходу соответствует какое-то число. Например, число, написанное на выпавшей грани игрального кубика. Или сумма денег, которую мы получим от казино в случае выпадения комбинации. Тогда можно поинтересоваться, какое же число выпадает *в среднем*. Математики называют это «в среднем» *матожиданием* выпавшего числа.

Задача 1. Вам предлагают сыграть в игру. Вы платите 100 рублей и дважды бросаете игральную кость. Если сумма равна 12, то вам возвращают 1000 рублей. Стоит ли соглашаться?

Задача 2. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, после чего они одновременно открывают бумажки. Если числа совпали, то первый платит второму столько рублей, каковы эти числа; если нет — второй платит первому a рублей. При каком значении a эта игра будет честной? Разберите три случая:
а) Каждый игрок равновероятно выбирает 1 или 2.
б) Первый выбирает 1 с вероятностью p, а второй выбирает 1 с вероятностью q (где $0 \leqslant p, q \leqslant 1$).
в)* Каждый игрок может использовать любую стратегию, при которой вероятность его выигрыша будет максимальной.

Определение 2. Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* называется любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (читается «функция кси из множества омега в действительные числа»), для которой для любого числа $t \in \mathbb{R}$ множество таких исходов $\omega \in \Omega$, что $\xi(\omega) \leqslant t$ является событием, то есть $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leqslant t\} \in \mathbb{A}$. Вероятность этого события обозначается через $P(\xi \leqslant t)$.
Обратите внимание: каждая случайная величина — это вполне конкретная функция. Случайного в ней только то, что она ставит в соответствие число каждому случайному исходу.
Функция $F_\xi(t) = P(\xi \leqslant t)$ называется *функцией распределения* случайной величины.
Сумма двух случайных величин на одном и том же ВП — это просто сумма функций.

Задача 3. Нарисуйте график функции распределения: **а)** случайной величины, равной числу, выпадающему на игральном кубике; **б)** случайного числа на отрезке $[0, 1]$; **в)** расстояние до центра мишени радиуса 1 от точки попадания точечной пули. **г)** Докажите, что функция распределения монотонно неубывает.

Определение 3. Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ — конечное или счётное вероятностное пространство. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число $E\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)$ (от слова *expectation*).

Задача 4. В пакете лежат n вкусных и m невкусных конфеток, которые можно брать не глядя. Чему равно матожидание количества извлечённых конфет до получения первой вкусной, если **а)** $n = 1$ и $m = 1$; **б)** $n = 1$ и $m = 2$; **в)** $n = 2$ и $m = 3$? **г)** Выразите это матожидание через аналогичное для меньшего числа конфет.

Задача 5. Предположим, случайная величина ξ принимает значения в $\mathbb{N}$. Покажите, что формулу для её матожидания можно переписать так: $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(\xi = i)$ или $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi \geqslant i)$.

Задача 6. (*Линейность матожидания*) Пусть случайная величина ξ раскладывается в сумму некоторого числа более простых случайных величин: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$. Докажите что тогда $E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_k$.

Задача 7. 50 мужчин и 50 женщин случайно рассаживаются за круглый стол. Назовем мужчину довольным, если рядом с ним сидит женщина. Для каждого мужчины введем случайную величину равную 1, если он окажется доволен, и 0 иначе. Найдите матожидание **а)** такой случайной величины; **б)** числа довольных мужчин.

Задача 8. Проводятся n опытов, в каждом опыте может произойти определенное событие («успех») с вероятностью p (или не произойти — «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$). Найдите матожидание числа смен успеха на неудачу и неудачи на успех.

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6	7 а	7 б	8

Задача 9. В магазин послали n школьников, вручив список из m нужных предметов. Школьники потеряли список. Школьник помнит конкретный нужный предмет с вероятностью p. Найдите математическое ожидание количества нужных предметов, которые школьники смогут коллективно вспомнить.

Задача 10. Собралось k случайных людей. Найдите матожидание числа пар людей с совпадающими днями рождения (для простоты можно считать, что никто не родился 29 февраля).

Задача 11. Если человек стоит в очереди минуту, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а трое планируют операции, занимающие 10 минут. Рассмотрим суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут, найдите его **а)** наименьшее и наибольшее возможное значения; **б)** математическое ожидание, при условии, что порядок людей в очереди случаен.

Задача 12. Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100, и в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей. Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

Задача 13. Монетка падает орлом вверх **а)** с вероятностью $1/2$; **б)*** с вероятностью p.
Найдите матожидание числа подбрасываний этой монетки до выпадения первого орла.

Задача 14. Школьнику нужно правильно ответить на вопрос с n вариантами ответа. Он ничего не знает и каждый раз даёт случайный ответ. Найдите матожидание числа его попыток до правильного ответа, если он **а)** запоминает, какие ответы он уже давал; **б)*** даже не запоминает.

Задача 15. n претендентов на должность в случайном порядке приходят на собеседование. Если в результате собеседования выясняется, что новый претендент лучше того, кто в данный момент занимает должность, первого нанимают, а последнего — увольняют. **а)** С какой вероятностью k-й по силе претендент будет нанят в какой-либо момент. **б)** Найдите матожидание числа увольнений.

Задача 16. Чтобы сгенерировать перестановку чисел от 1 до n, возьмём число 1 и случайно выберем число, в которое оно переходит. Потом случайно выберем число, в которое переходит только что выбранное число и т.д., пока цикл не замкнётся. Будем строить этим методом цикл за циклом, начиная с наименьшего из ещё не выбранных чисел. **а)** Докажите что все перестановки получатся с равной вероятностью. **б)** Чему равна вероятность того, что первый цикл имеет длину m. **в)** Найдите матожидание числа циклов в случайной перестановке. **г)** Найдите матожидание числа пассажиров, сидящих не на своих местах, в задаче про сумашедшую старушку.

Задача 17*. Пачка жевачки содержит один из n разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей? Чему равно число для $n = 30$?

Задача 18*. На отрезке длины 1 случайным образом выбирают две точки, которые делят его на 3 части. Найдите матожидание координаты самой левой из них.

9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	16 в	16 г	17	18