Листок №46

Основная теорема алгебры

11.03.2020 – 01.04.2020
22/17/12 з. на 5/4/3

Определение 1. Говорят, что многочлен $P(z)$ имеет корень α кратности k, если $P(z)$ делится на $(z-\alpha)^k$, но не делится на $(z-\alpha)^{k+1}$.

Теорема 1. *Произвольный многочлен степени $n>0$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (считаемых со своими кратностями).*

Определение 2. Комплексная функция $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ комплексной переменной *непрерывна* в точке $z_0\in\mathbb{C}$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех z, где $|z-z_0|<\delta$, верно $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

Задача 1. Пусть $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ — вещественная функция на комплексной плоскости. Дайте определение того, что **а)** f ограничена на $\mathbb{C}$; **б)** $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$.

Решение. **а**) Функция f ограничена на $\mathbb{C}$, если существует такая константа $C\in\mathbb{R}$, что $|f(z)|<C$ при любом $z\in\mathbb{C}$.
б) Будем писать $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$, если для любого вещественного $C>0$ найдётся такой вещественный радиус $R>0$, что для любого z с $|z|>R$ выполнено неравенство $|f(z)|>C$. ■

Задача 2. Пусть $F(z)=f(z)+ig(z)$, где f и g — функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$. Докажите, что функция F непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции f и g непрерывны в точке z_0.

Решение. Пусть $F(z)$ непрерывна в точке $z_0\in\mathbb{C}$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех z, где $|z-z_0|<\delta$, верно $|F(z)-F(z_0)|<\varepsilon$. Но $|F(z)-F(z_0)|=\sqrt{|f(z)-f(z_0)|^2+|g(z)-g(z_0)|^2}$, а значит $|f(z)-f(z_0)|\leqslant|F(z)-F(z_0)|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, $f(z)$ непрерывна в z_0. Аналогично $g(z)$ непрерывна в точке z_0.

Пусть теперь f и g непрерывны в точке $z_0\in\mathbb{C}$. Докажем, что $F(z)$ непрерывна в точке z_0. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда по определению существует такое δ_1, что при всех z, где $|z-z_0|<\delta_1$, верно $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon/2$. И существует такое δ_2, что при всех z, где $|z-z_0|<\delta_2$, верно $|g(z)-g(z_0)|<\varepsilon/2$. Возьмём $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Тогда при всех z, где $|z-z_0|<\delta$, выполнено

$$|F(z)-F(z_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|+|g(z)-g(z_0)|\leqslant 2\cdot\varepsilon/2=\varepsilon.$$

■

Замечание. Далее $P(z)$ — произвольный многочлен степени $n>0$ от комплексной переменной z с комплексными коэффициентами. $P(z)$ задаёт функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, а $|P(z)|$ — функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$.

Задача 3. (*Поведение многочлена на бесконечности*) Докажите, что $|P(z)|\to+\infty$ при $|z|\to+\infty$.

Решение. Пусть $P(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1z+c_0$. Обозначим «хвост» $c_{n-1}z^{n-1}+\ldots+c_1z+c_0$ через $Q(z)$. Тогда $P(z)=c_nz^n+Q(z)$.

Пусть дана константа $C>0$. Найдём явно такой радиус $R>0$, что для любого z с $|z|>R$ выполнено неравенство $|P(z)|>C$.

Будем рассматривать только z с $|z|>1$. Возьмём $M=\max(|c_0|,|c_1|,\ldots,|c_{n-1}|)$. Тогда выполнено $|Q(z)|\leqslant M+M|z|+\ldots M|z|^{n-1}\leqslant nM|z|^{n-1}$. Дальше

$$|P(z)|\geqslant|c_nz^n|-|Q(z)|\geqslant|c_nz^n|-nM|z|^{n-1}=|z|^{n-1}(|c_n||z|-nM)\geqslant(|c_n||z|-nM).$$

Если взять $R=nMC/|c_n|$, то при $|z|>R$ будет выполнено неравенство $|P(z)|>C$. ■

Задача 4. **а)** (*Непрерывность многочлена*) Докажите, что функция $P(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$.
б) (*Непрерывность модуля многочлена*) Докажите, что функция $|P(z)|$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Решение. **а**) **Через сумму и произведение**. Докажем, что константа и $f(z)=z$ непрерывны, а также что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны. Из этого будет сразу следовать непрерывность многочлена.

Константа и $f(z) = z$. Итак, пусть $f(z)$ — константа или $f(z) = z$. Если нам дали точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$, то возьмём $\delta = \varepsilon$. Если вдруг $|z - z_0| < \delta = \varepsilon$, то очевидно, что $|(f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Сумма. Пусть функции f и g непрерывны в точке z_0. Докажем, что и сумма $f + g$ непрерывна в точке z_0. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по определению существует такое δ_1, что при всех z, где $|z - z_0| < \delta_1$, верно $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/2$. И существует такое δ_2, что при всех z, где $|z - z_0| < \delta_2$, верно $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/2$. Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при всех z, где $|z - z_0| < \delta$, выполнено

$$|(f + g)(z) - (f + g)(z_0)| \leqslant |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| \leqslant 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Произведение. Пусть функции f и g непрерывны в точке z_0. Докажем, что и произведение $f \cdot g$ непрерывна в точке z_0. Возьмём $0 < \varepsilon < 1$ и странную константу $M = 2(|f(z_0)| + 1) \cdot (|g(z_0)| + 1)$.

Тогда по определению существует такое δ_1, что при всех z, где $|z-z_0| < \delta_1$, верно $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon/M < 1$. И существует такое δ_2, что при всех z, где $|z - z_0| < \delta_2$, верно $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/M < 1$. Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Теперь пусть $|z - z_0| < \delta$. Считаем и преобразуем:

$$\begin{array}{ll}
 & |(fg)(z) - (fg)(z_0)| = |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| = \\
\text{вычтем и прибавим } f(z)g(z_0) & = |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| = \\
\text{вынесем за скобку } f(z) \text{ и } g(z_0) & = \Big|f(z)\big(g(z) - g(z_0)\big) - g(z_0)\big(f(z) - f(z_0)\big)\Big| \leqslant \\
\text{модуль разности не больше суммы модулей} & \leqslant \Big|f(z)\big(g(z) - g(z_0)\big)\Big| + \Big|g(z_0)\big(f(z) - f(z_0)\big)\Big| \leqslant \\
|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon/M, |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon/M & \leqslant |f(z)|\varepsilon/M + |g(z_0)|\varepsilon/M \leqslant \\
|f(z) - f(z_0)| < 1 \Rightarrow |f(z)| < |f(z_0) + 1| & \leqslant (|f(z_0)| + 1)\varepsilon/M + |g(z_0)|\varepsilon/M \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{array}$$

Напрямую. Пусть $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$. Возьмём произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и $0 < \varepsilon < 1$.

$$P(z) - P(z_0) = c_n(z^n - z_0^n) + c_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \ldots + c_1(z - z_0) + c_0(1 - 1).$$

Заметим, что $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0^1 + \ldots + z^1 z_0^{k-2} + z_0^{k-1})$. Свободные члены сокращаются, во всех оставшихся можно вынести за скобку $(z - z_0)$. В результате получим:

$$P(z) - P(z_0) = (z - z_0) \cdot Q(z), \text{ где } Q(z) \text{ — какой-то многочлен степени } n - 1.$$

Обозначим через C — максимальный из модулей коэффициентов многочлена $Q(z)$. Тогда при $|z-z_0| < 1$ выполнено $Q(z) \leqslant nC(|z_0|+1)^n$. Обозначим эту странную константу через M. Значит, при $|z-z_0| < \varepsilon/M$ выполнено

$$|P(z) - P(z_0)| = |z - z_0| \cdot |Q(z)| \leqslant \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon.$$

б)

■

Задача 5. (*Поведение многочлена в круге*) Докажите, что $|P(z)|$ ограничен в любом круге (конечного радиуса) и достигает в нём своих максимума и минимума. (Вместо круга разрешается решить эту задачу для квадрата со сторонами, параллельными осям координат — этого достаточно для дальнейшего.)

Решение. ■

Задача 6. (*Разложение Тейлора*) Докажите, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ существуют такое $k \in \mathbb{N}$ и такие $c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, что $c_k \neq 0$ и для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$P(z) = P(z_0) + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z - z_0)^n \qquad (*)$$

Представление $P(z)$ в таком виде называется *разложением Тейлора многочлена $P(z)$ в точке z_0.*

Решение. Возьмём $w = z - z_0$. Тогда $z = w + z_0$. Подставим $z = w + z_0$ в многочлен, раскроем все скобки и приведём подобные. Получится многочлен степени n уже от w. Осталось подставить $w = z - z_0$.

■

Задача 7. Напишите разложение Тейлора для многочленов
а) $P(z) = z^3 - 3z - 2$ в точке $z_0 = -1$; **б)** $P(z) = iz^3 + 2z^2 - iz + 179$ в точке $z_0 = i$;

Решение. а) $-3(z+1)^2 + (z+1)^3$; **б)** $179 - (z-i)^2 + i(x-i)^3$. ■

Задача 8. (*Вспомогательная лемма для следующей задачи*) Пусть $(*)$ — разложение Тейлора многочлена $P(z)$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{D}(z_0, r)$ — круг с центром в z_0 радиуса r. Докажите, что существует такое $r > 0$, что для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$, $z \neq z_0$ выполнено $|P(z)| < |P(z_0) + c_k(z-z_0)^k| + |c_k(z-z_0)^k|$.

Решение.

■

Задача 9. (*Поведение многочлена в малой окрестности точки*) Пусть $P(z_0) \neq 0$. Докажите, что существует такое z_1, что $|P(z_1)| < |P(z_0)|$.

Решение. По предыдущей задаче существует такое $r_1 > 0$, что для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, r_1)$, $z \neq z_0$ выполнено $|P(z)| < |P(z_0) + c_k(z-z_0)^k| + |c_k(z-z_0)^k|$.

Так как $|P(z)| > 0$, то найдётся такой $r_2 > 0$, что при $|z - z_0| < r_2$ выполнено $|c_k(z-z_0)^k| < |P(z_0)|$. Возьмём $\varphi = (-\operatorname{Arg}(P(z_0)) - \operatorname{Arg}(c_k))/k$. Тогда если $\operatorname{Arg}(z - z_0) = \varphi$, то

$$\operatorname{Arg}(c_k(z-z_0)^k) = \operatorname{Arg}(c_k) + k \cdot \operatorname{Arg}(z-z_0) = -\operatorname{Arg}(P(z_0)).$$

А значит аргументы у $P(z_0)$ и $c_k(z-z_0)^k$ противоположны. Так как $|c_k(z-z_0)^k| < |P(z_0)|$, то модуль их суммы просто равен разности модулей:

$$|P(z_0) + c_k(z-z_0)^k| + |c_k(z-z_0)^k| = |P(z_0)| - |c_k(z-z_0)^k| + |c_k(z-z_0)^k| = |P(z_0)|.$$

Теперь возьмём $r = \min(r_1, r_2)/2$ и $z_1 = z_0 + re^{i\varphi}$. Тогда $\operatorname{Arg}(z_1 - z_0) = \varphi$ и $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, r_1)$, следовательно

$$|P(z_1)| < |P(z_0) + c_k(z_1-z_0)^k| + |c_k(z-z_0)^k| = |P(z_0)|.$$

■

Задача 10. (*Поведение многочлена на плоскости*)
а) Докажите, что $|P(z)|$ достигает на плоскости своего минимума: существует такое $\mu \geqslant 0$, что $|P(z)| \geqslant \mu$ при любом $z \in \mathbb{C}$, причём найдётся такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|P(z_0)| = \mu$.
б) Пусть μ такое, как в п. а). Докажите, что $\mu = 0$.

Решение. а) Пусть $|P(0)| = A$. По задаче 3 и 1б) найдётся такой вещественный радиус R, что при $z > |R|$ выполнено неравенство $|P(z)| > A$. При этом в круге радиуса R по задаче 5 в этом круге найдётся минимум $\mu \leqslant A$. Значит μ — минимум значения $|P(z)|$ как в круге радиуса R, так и вне него, то есть на всей плоскости. **б)** По задаче 9, если $|P(z_0)| = \mu \neq 0$, то найдётся точка z_1, в которой значение $|P(z_1)|$ строго меньше μ, что противоречит определению μ. Поэтому $\mu = 0$.

■

Задача 11. **а)** Докажите, что всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. **б)** Выведите из пункта а) основную теорему алгебры.

Решение. а) В задаче 10 доказано, что для любого многочлена $P(z)$ найдётся такое z_0, что $|P(z_0)| = 0$, а значит, и $P(z_0) = 0$. **б)** Доказываем утверждение по индукции. База: $\deg P(z) = 1$, то $P(z) = az + b$, и есть корень $z_0 = -\frac{b}{a}$. Пусть для всех многочленов степени $n - 1$ это верно. Рассмотрим многочлен $P(z)$ степени n.

По предыдущему пункту у него найдётся хотя бы один корень z_0. В силу разложения Тейлора (или задачи 8 листка 25) $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. Если $\deg Q(z) \geqslant 1$, то по предположению индукции у $Q(z)$ ровно $n - 1$ корень с учётом кратностей, а значит, у $P(z)$ ровно n корней с учётом кратностей.

■

Задача 12. Разложите в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами многочлены **а)** x^4+3x^2+2; **б)** x^4+4; **в)** x^6+8; **г)** x^n-1; **д)** $x^{2n}-\sqrt{3}x^n+1$.

Решение. **а**) $(x^2+1)(x^2+2)$;
б) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$;
в) $x^6+8=(x^2-\sqrt{6}+2)(x^2+\sqrt{6}+2)(x^2+2)$;
г) $(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2(\cos\frac{2\pi k}{n})x+1)$ при нечётных n,
$(x+1)(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(x^2-2(\cos\frac{2\pi k}{n})x+1)$ при чётных n.

д) $x^{2n}-\sqrt{3}x^n+1=(x^n-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})(x^n-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})=\prod_{k=1}^{n}(x^2-2(\cos\frac{2\pi k+\frac{\pi}{6}}{n})x+1$ ∎

Задача 13. Докажите, что произвольный многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами.

Решение. ∎

Задача 14. Многочлен $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ таков, что $P(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что его можно представить в виде суммы **а)** квадратов многочленов из $\mathbb{R}[x]$; **б)** двух таких квадратов.

Решение. **а**) Заметим, что если два многочлена представлены в виде суммы квадратов, то и их произведение также можно представить в виде суммы квадратов: достаточно раскрыть скобки в произведении.

Пусть α — вещественный корень многочлена $P(x)$ кратности r, то есть $P(x)=(x-\alpha)^rQ(x)$, где $Q(\alpha)\neq 0$. Предположим, что r нечётно. Тогда в окрестности α, не содержащей других корней, при переходе через α значение $P(x)$ меняет знак, что противоречит условию. Значит, $r=2k$ — чётно, и $P(x)=((x-\alpha)^k)^2$.

Если же $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\notin\mathbb{R}$ — комплексный и не вещественный корень $P(x)$, то $P(x)$ содержит множитель $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=((x-\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2})^2+(\mathrm{Im}\alpha)^2)$ — сумма двух квадратов.

б) По аналогии с предыдущим пунктом, достаточно проверить, что произведение многочленов, представимых как сумма двух квадратов само является суммой двух квадратов. Пусть $P(x)=p_1(x)^2+p_2(x)^2$, $Q(x)=q_1^2(x)+q_2^2(x)$. Рассмотрим комплексные многочлены $f(x)=p_1(x)+ip_2(x)$, $g(x)=q_1(x)+iq_2(x)$. Тогда $P(x)=|f(x)|$, $Q(x)=|g(x)|$, а $P(x)Q(x)=|f(x)g(x)|$, то есть также является суммой квадратов. ∎

Задача 15. Докажите, что максимум функции $|P(z)|$ в фиксированном круге достигается в некоторой точке граничной окружности этого круга.

Решение. ∎

---

1 а	1 б	2	3	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	13	14 а	14 б	15