179 школа, 7Б.
Листок №3

Принцип Дирихле: задачи посложнее

09.2017

Примеры задач с решениями

Пример 1. *Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.*

Решение. Предположим противное — у всех разное число знакомых. Заметим, что у каждого человека в этой компании может быть 0, 1, 2, 3 или 4 знакомых, всего 5 вариантов. Но и человек всего 5, а значит, все эти варианты присутствуют. Но в компании не могут одновременно находиться человек, знакомый со всеми, и человек, незнакомый ни с кем. Противоречие. ■

Пример 2. *Дано 52 различных натуральных числа, не превосходящих 100. Докажите, что из них всегда можно выбрать два, одно из которых на три больше другого.*

Решение. Разобьём первые 100 натуральных чисел на три такие последовательности:

$$1, 4, 7, 10, ..., 97, 100;$$
$$2, 5, 8, 11, ..., 98;$$
$$3, 6, 9, 12, ..., 99.$$

В первой 34 числа, в двух других — по 33, и в каждой последовательности любые два соседних числа отличаются на 3. Докажем, что какие-то два из данных 52 чисел стоят рядом в одной из последовательностей. Разобьем числа в каждой последовательности на группы из двух соседних чисел. В первой последовательности получится 17 пар, во второй и третьей — по 16 пар и по одному непарному числу. Всего получим $17 + 16 + 1 + 16 + 1 = 51$ группу. Поскольку чисел 52, а групп 51, то какие-то два из данных чисел попадут в одну группу. Но числа одной группы различаются на 3, а значит, среди данных 52 чисел есть два, отличающиеся на 3. ■

Задачи

Задача 1. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Задача 2. В канун Нового года 10 друзей посылали праздничные открытки друг другу. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, пославшие открытки друг другу.

Задача 3. На большую «шахматную» доску 2017×2017 поставили 2017 ладей так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате 1009×1009 найдётся хотя бы одна ладья.

Задача 4. Петя пытается занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 (без повторений) так, чтобы суммы чисел на концах каждого ребра куба были различны. Удастся ли ему это сделать?

Задача 5. На шахматной доске стоят фигуры: на каждой горизонтали есть хотя бы одна фигура, а на разных горизонталях стоит разное число фигур. Докажите, что можно убрать часть фигур так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали останется ровно одна фигура.

Задача 6. В поход пошло 30 школьников. Оказалось, что среди любых 10 из них обязательно найдётся трое одноклассников. Докажите, что в походе приняло участие не менее 8 человек из одного класса.

Задача 7. Докажите, что из 51 натурального числа первой сотни можно выбрать 6 так, что никакие два из них не имеют одинаковых цифр в одном разряде.

Задача 8. Верно ли, что среди любых **а)** 34; **б)** 32 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых вдвое больше другого?

Задача 9. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

1	2	3	4	5	6	7	8 а	8 б	9

Задача 10. Даны 50 различных натуральных чисел, 25 из которых не больше 50, а остальные больше 50, но не больше 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Задача 11. Из ряда 1, 2,..., 200 выбрали 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Задача 12. Числа 1, 2, …, 600 выписаны в строчку в неком порядке. Сумма любых двух соседних чисел не больше 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, идущих через одно, больше 800.

Задача 13. На пир собралось 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть «матрёшка» из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

Задача 14. Пять школьников решили в воскресенье посмотреть все новые фильмы последнего месяца. Для этого был выбран семизальный кинотеатр, в котором сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00, 20.40 и 22.00. На каждый сеанс школьники делились на две группы, одна шла в один зал, а другая — в другой. Вечером выяснилось, что каждый школьник побывал в каждом зале. Докажите, что в каждом из залов был сеанс, на котором никто из школьников не был.

Задача 15. В течение прошлого учебного года Саша каждый день решал хотя бы одну задачу по математике. Однако, боясь перетрудиться, за неделю он решал не более 12 задач. Докажите, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых Саша решил ровно 20 задач.

Задача 16. В банде 50 гангстеров. Все вместе они ни в одной разборке ни разу не участвовали, а каждые двое встречались на разборках ровно по разу. Докажите, что кто-то из гангстеров был не менее, чем на восьми разборках.

Задача 17. В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отметили по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

Задача 18. Доска 6×6 разбита на доминошки. Докажите, что можно разрезать доску по прямой на две части, не повредив ни одной доминошки.

Задача 19. **а)** Докажите, что если в $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены $3n$ звёздочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звёздочки будут вычеркнуты.
б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ можно расставить $3n + 1$ звёздочек, так что при вычёркивании любых n строк и любых n столбцов остаётся невычеркнутой хотя бы одна звёздочка.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б