Геометрическая алгебра

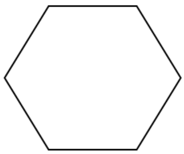
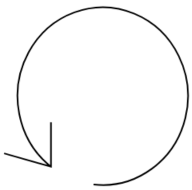
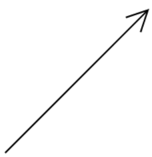
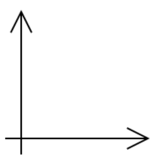
	Базис группы движений: 1 симметрия + все повороты	конечные группы	понятие группы, базиса
	Базис группы движений: 1 симметрия + все повороты	конечные группы, группы типа $\mathbb{Z}$ по сложению	число пи и арифметика остатков $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
	Базис группы движений: 1 симметрия + все сдвиги	группы типа $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ по сложению	гомотетии и кольцо $(\mathbb{R}, +, \times)$
	Базис группы движений: 1 симметрия + все переносы + все повороты	группа типа $\mathbb{C}$ по сложению, группа корней из 1	поворотные гомотетии и кольцо $(\mathbb{C}, +, \times)$ число e
Евклидовы кольца	Норма и деление с остатком, алгоритм Евклида	ОТА	числа Гаусса и Эйзенштейна

Рис. 1.1: Вехи арифметики.

1.1 Диэдральные группы

Аннотация.
Цель: знакомство с языком алгебры.

1.1.1 План

1. Группа симметрий правильного треугольника, ее таблица Кэли.
2. Группа симметрий ромба (четверная группа Клейна), ее таблица Кэли.
3. Группа симметрий правильного многоугольника (снежинки).
4. *Почему можно обойтись только одной симметрией для описания всех движений?*
5. Понятие группы $(G, \circ)$ и подгруппы, смежные классы, порядок элемента.
6. Несколько слов о базисе группы, порождающие эементы, эквивалентные базисы.
7. Базисы S_3 и V_4.

1.1.2 Группа симметрий правильного треугольника

Представим себе, что есть дверь и в ней замок треугольной формы (треугольник правильный). Чтобы открыть дверь, нужно вставить в замок ключ (формы треугольной призмы) в правильном положении. Причем, вставить его можно как с одной стороны двери, так и с другой. Каковы шансы открыть дверь с первого раза?

Чтобы это описать математическим языком, рассмотрим все возможные соединения ключа и замка, которые сводятся к следующим действиям:

a) вставить ключ так, что его бородка вертикальна,

b) вынуть и повернуть ключ до совмещения следующих углов, снова вставить, и так далее,

c) те же действия с другой стороны двери.

Таким образом, на треугольнике вводятся следующие элементарные операции, переводящие треугольник в себя (со сменой номеров вершин):

- id — тождественное преобразование (ничего не меняем),

- R_φ — поворот на угол φ, где $\varphi \in \{120^o, 240^o\}$,
- S_1 — симметрия относительно биссектрисы, проходящей через 1-ю вершину треугольника (верхнюю).

Итого имеем 4 преобразования. Вопрос: *могут ли быть еще какие-то преобразования и сколько их?*
45 минут |

1.2 Движения окружности

Аннотация.
Цель: разобраться с группой $O(2)$ и ее подгруппами.

Определение: преобразование пространства (прямой/плоскости), сохраняющее размеры (попарные расстояния), называется ***движением*** (изометрией).

План:

1. Классификация движений окружности: лемма о гвоздях.
2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция вращений и одной выделенной симметрии.
3. Эквивалетность базисов группы движений: все вращения + одна симметрия, все симметрии.
4. Конечные подгруппы, соответствующие диэдральным и циклическим группам.
5. Бесконечные подгруппы: иррационалньость числа π и группа $(\mathbb{Z}, +)$ (вращение на несоизмеримый с π угол).
6. Арифметика остатков: конечные циклические группы и факторизация $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.3 Движения и гомотетии вещественной прямой

Аннотация.
Цель: найти кольцо $(\mathbb{R}, +, \times)$.

План:

1. Классификация движений прямой: аналог теоремы Шаля.

2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция смещений и одной выделенной симметрии (умножение на -1).

3. Эквивалетность базисов: все сдвиги + одна симметрия, все симметрии.

4. Все сдвиги образуют группу, изоморфную $(\mathbb{R}, +)$.

5. Действие группы $\mathbb{Z}$ на прямой. Понятие орбиты.

6. ***Определение***: гомотетией с заданным центром и коэффициентом называется преобразование пространства (прямой/плоскости), при котором все векторы с началом в этом центре удлиняются на заданный коэффициент. Подобие на прямой — это гомотетия + сдвиг.

7. Подобия на прямой можно описать с помощью кольца $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1.4 Движения и подобия на плоскости

Аннотация.

Цель: найти кольцо $(\mathbb{C}, +, \times)$.

План:

1. Классификация движений плоскости: теорема Шаля.

2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция параллельных переносов, поворотов и одного выделенного отражения (умножение на -1 вдоль одной оси).

3. Эквивалетность базисов: все параллельные переносы + все повороты + одна симметрия, все отражения.

4. Все параллельные переносы образуют группу, изоморфную $(\mathbb{C}, +)$.

5. Формула Эйлера и число e. Группа корней из 1. Связь умножения комплексных чисел со сложением в группе вычетов.

6. Мультипликаивная группа $|z| = 1$, ее действие на комплексной плоскости. Орбиты.

7. Подобия на плоскости — это поворотные гомотетии + параллельные переносы.

8. Подобия на плоскости описываются арифметикой кольца $(\mathbb{C}, +, \times)$.

1.5 Делимость в евклидовых кольцах

Аннотация.
Цель: общий вывод основной теоремы арифметики и ее следствий.

План:

1. Понятие кольца.
2. Понятие нормы и обратимых элементов кольца.
3. Алгоритм Евклида деления с остатком.
4. Представление НОД двух чисел в виде линейной комбинации этих чисел.
5. Основная теорема арифметики. Факториальное кольцо.
6. Приложение к кольцам: многочленов, гауссовых чисел.
7. Примеры нефакториальных колец.
8. Несколько теорем теории делимости: МТФ, РТФ,...