

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

листки с задачами
«100 урокам математики» Алексея Савватеева

составители: Н. Казимиров, П. Иванов, М. Бочкарев

Москва, 2020



АННОТАЦИЯ К СБОРНИКУ

Данный сборник задач может использоваться как приложение к конспекту «Введение в математику» Алексея Савватеева, а также как самостоятельный практикум для изучения основ математики. Нумерация глав-уроков в сборнике соответствует урокам онлайн-курса, подготовленным проектом «Дети и наука».

В каждом уроке даны ссылки на соответствующие видеоуроки и главы и разделы конспекта. Перед блоком задач даны краткие сведения из курса, содержащие необходимые определения и обозначения.

При составлении задачника было использовано несколько источников, в частности, задачи видеокурса по «100 урокам математики» проекта «Дети и наука», листки задач кружка Вечерней математической школы в 179 школе г. Москвы, листки задач для математиков из подборки Григория Мерзона.

Составители настоящего сборника: Николай Казимиров, Павел Иванов, Михаил Бочкарев.

25 ноября 2020 г.

Числа, символы и фигуры

Связь с **онлайн курсом** и главами **конспекта**:

«Дети и наука»: Урок 1. Числа, символы, фигуры.

Конспект: Глава 1, разделы 1.1 Запись действий с отрезками, 1.2 Понятие натурального числа, 1.3 Визуальные доказательства. Глава 7, раздел 7.1 Построение рациональных чисел.

Справочные сведения

Операции сложения и умножения мы визуализируем со смещением по прямой вправо или влево. Вправо — со знаком $+$, влево — со знаком $-$. Смещение на несколько единиц вправо или влево — это смещение на одноименное число шагов в данном направлении. В итоге операцию сложения или вычитания можно представить как путь по прямой дороге, который складывается из шагов, равных $+1$ или -1 в зависимости от направления.

Умножение задается с помощью прямоугольной сетки на плоскости. Имеем две координатные оси, на которых отложены, как и в одномерном случае, шаги-числа в обе стороны от точки O с соответствующими знаками. Откладываем перемножаемые числа по обеим осям, получаем прямоугольник, состоящий из единичных квадратов. Число этих квадратов, т.е. площадь прямоугольника, и есть значение произведения (см. рис. 1.1).



Рис. 1.1: Произведение $5 \cdot 3$.

В том случае, когда умножаются числа, оснащенные знаками, применяется правило ориентированной площади, т.е. знак выбирается в зависимости от направления оси наблюдателя, для которого порядок множителей всегда соответствует повороту против часовой стрелки (см. рис. 1.2).

Задачи

- 1.1. Нанести на прямой метки, соответствующие шагам вправо и влево, считая начальной точкой O , а все шаги равновеликими (т.е. каждый шаг равен выбранной единице длины). Дойти до точки 5, а затем от точки 5 до точки -5 . Записать последовательность шагов с помощью ± 1 , предполагая, что шаг вправо записывается как $+1$, шаг влево — как -1 .
- 1.2. Описать в терминах одномерного путешественника операции сложения: $5 + 3$, $8 - 4$, $3 - 5$, $-2 - 6$. Сколько шагов и в какую сторону он прошел и в каком порядке? Записать в каждом

Рис. 1.2: произведение $a \cdot b$.

случае путь с помощью ± 1 и расставить скобки, объединяя в них указанные слагаемые.

- 1.3. *Путь* — это последовательность единичных шагов, обозначаемых $+1$ (шаг вправо) и -1 (шаг влево). Путь может начинаться в любой точке прямой. Записать пути, соответствующие операциям $-2 + 7$, $10 - 5$, $11 - 2 - 4$, $-8 + 3 + 10$.
- 1.4. Выберем точку O в качестве начала отсчета, затем нанесем на прямую точки, которые получаются в результате отсчета шагов влево и вправо, т.е. точки ± 1 , ± 2 , ± 3 и т.д. Назовем эти точки *целыми*.
 - а) В какой точке окажется путешественник, если он стартует в точке -3 и проходит путь $4 - 1$? Изобразить графически.
 - б) В какой точке окажется путешественник, если он стартует в точке 1 и проходит путь $11 - 4 + 7$? Изобразить графически.
- 1.5. Два пути назовем *эквивалентными*, если, стартуя в одной и той же точке, они и закончатся в одной и той же точке. Эквивалентны ли пути $-2 + 7$, $10 - 5$, $11 - 2 - 4$, $-8 + 3 + 10$?
- 1.6. Путь a назовем *обратным* к пути b , если, стартовав там, где путь b заканчивается, он повторяет все шаги пути b в обратном порядке и с противоположным знаком (например, путь $1+1+1-1-1-1$ обратен к пути $-1-1-1+1+1+1$). Построить пути, соответствующие операциям $5 + 3$, $8 - 4$, $3 - 5$, $-2 - 6$, построить обратные к ним пути, выразить обратные пути в виде суммы или разности двух чисел (использовать те же цифры, что у исходного пути).
- 1.7. Изобразить ориентированные площади, соответствующие произведениям $3 \cdot 5$ и $5 \cdot 3$, $(-2) \cdot 6$ и $6 \cdot (-2)$, $(-3) \cdot (-4)$ и $(-4) \cdot (-3)$

Соизмеримость отрезков

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 2. Соизмеримость и несоизмеримость отрезков.](#)

Конспект: Глава 1, разделы 1.2 Понятие натурального числа, 1.4 Соизмеримость отрезков, алгоритм Евклида.

Справочные сведения

На этот раз у нас имеется два путешественника (кузнечика), каждый из которых имеет свою меру длины (длину шага), соответственно, у каждого из них получаются свои собственные ометки на прямой, расставленные через каждый шаг. Пусть у первого путешественника шаг равен a , а у второго — b . Таким образом, первый может придти в точки $\pm a, \pm 2a, \pm 3a$ и т.д., а второй — в точки $\pm b, \pm 2b, \pm 3b$ и т.д. Точка начала отсчета у них общая — точка O .

Длины шагов этих путешественников, т.е. числа a и b *соизмеримы*, если существует такая длина c (*общая мера отрезков a и b*), которая целое число раз укладывается в том и другом шаге: $a = pc$, $b = tc$.

Графический алгоритм Евклида: о прямоугольника со сторонами a и b отрезают квадраты со стороной, равной меньшей из длин a и b , столько раз, сколько возможно (будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида, и так далее (см. рис. 2.1).

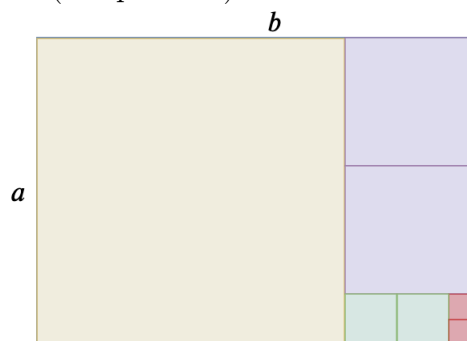


Рис. 2.1: Графический алгоритм Евклида.

Наибольший общий делитель целых чисел a и b — это наибольшее целое число, делящее a и b . Обозначение: $\text{НОД}(a, b)$. Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми* (обозначается так: $a \perp b$).

Задачи

2.1. Найти $\text{НОД}(10, 6)$, $\text{НОД}(11, 5)$, $\text{НОД}(12, 9)$ методом прямоугольников.

- 2.2. Сколько и каких шагов должны сделать 10- и 6-шаговые кузнечики, чтобы попасть в точку $\text{НОД}(10,6)$?
- 2.3. Доказать, что a и b соизмеримы тогда и только тогда, когда существует отрезок d такой, что отрезки a и b укладываются в нем целое число раз: $d = ka = lb$. Верно ли, что это также равносильно тому, что два путешественника могут встретиться в какой-то точке прямой, отличной от точки O ?
- 2.4. Верно ли, что отрезки a и b соизмеримы тогда и только тогда, когда a и $2b$ соизмеримы?
- 2.5. Сколько и каких квадратов получится в результате применения графического алгоритма Евклида к прямоугольнику со сторонами 75 и 21? а со сторонами 324 и 141?
- 2.6. Применяя операцию Евклида, прямоугольник разрезали на большой квадрат, два квадрата поменьше и два совсем маленьких. Найти отношение сторон исходного прямоугольника.
- 2.7. Доказать, что если стороны прямоугольника соизмеримы, то, применяя операцию Евклида, мы в конце концов разрежем его на квадраты (применить метод бесконечного спуска).
- 2.8. Доказать, что если применение графического алгоритма Евклида разрезает прямоугольник на некоторое конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата будет их наибольшей общей мерой.
- 2.9. Доказать, что любая общая мера соизмеримых отрезков a и b целое число раз укладывается в наибольшей общей мере отрезков a и b .
- 2.10. От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному. Соизмеримы ли стороны исходного прямоугольника? Чему равно отношение его сторон?
- 2.11. Докажите, что $\text{НОД}(a, b)$ существует и единственный, если целые a и b не равны одновременно нулю.
- 2.12. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) = \text{НОД}(r, b)$, где r — остаток от деления a на b .
- 2.13. Найдите наибольшую общую меру отрезков $15/28$ и $6/35$.
- 2.14. Какие расстояния можно отложить на прямой, имея шаблоны 6 см и 15 см?
- 2.15. Найдите возможные значения а) $\text{НОД}(n, 12)$; б) $\text{НОД}(n, n + 1)$; в) $\text{НОД}(2n + 3, 7n + 6)$; г) $\text{НОД}(n^2, n + 1)$.

Визуальная арифметика

Связь с **онлайн курсом** и главами **конспекта**:

«Дети и наука»: Урок 3. Визуальное представление бинома Ньютона.

Конспект: Глава 1, раздел 1.3 Визуальные доказательства.

Справочные сведения

Теорема Пифагора (см. рис. 3.1) и куб суммы (см. рис. 3.2).

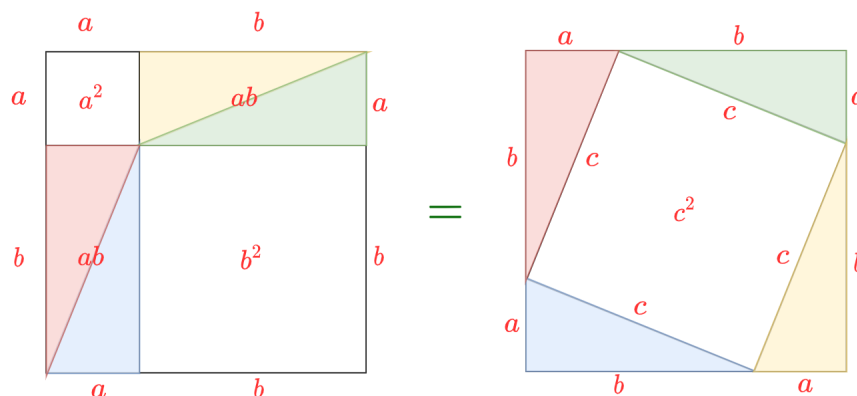


Рис. 3.1: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $a^2 + b^2 = c^2$.

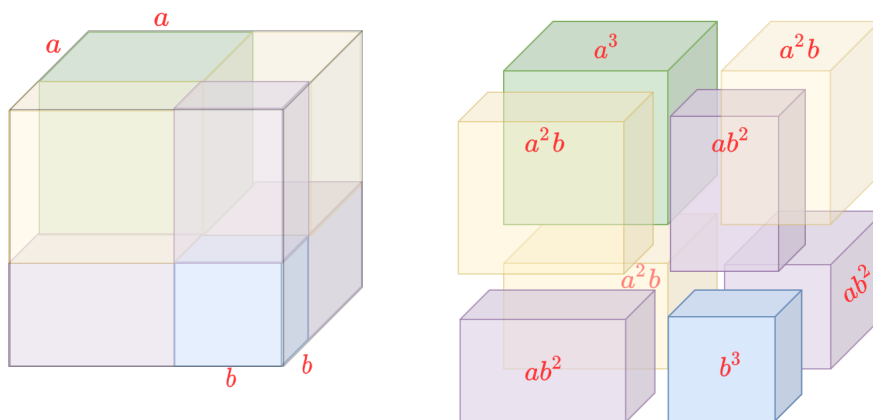


Рис. 3.2: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Задачи

- 3.1. Найти с помощью графического метода сумму подряд идущих нечетных чисел от 1 до n , где n — нечетное.

3.2. Рассмотрим последовательность уголков (см. рис. 3.3). Сколько клеток в k -м уголке? Чему равна суммарная площадь первых k уголков?

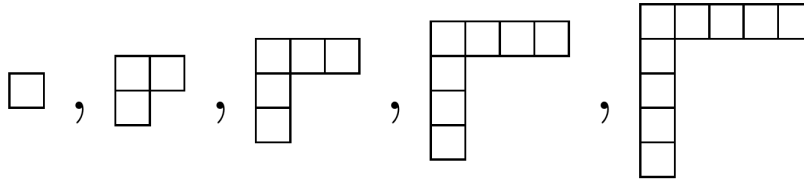


Рис. 3.3

3.3. Найти графически сумму первых k четных и первых k нечетных чисел.

3.4. Треугольные числа Диофанта $\square, \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \end{smallmatrix}$ обозначим по порядку T_1, T_2, T_3, T_4 и т.д.

- Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
- Что получится при сложении T_n с T_n ?
- Выразив T_n через n , найдите $1 + 2 + \dots + n$.
- Докажите геометрически, что $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$.

3.5. Докажите геометрически, что $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$.

3.6. Получите геометрически выражение для $(a+b+c)^2$, $(a+b+c)^3$.

3.7. Объясните равенство на рис. 3.4 и получите формулу для суммы квадратов $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

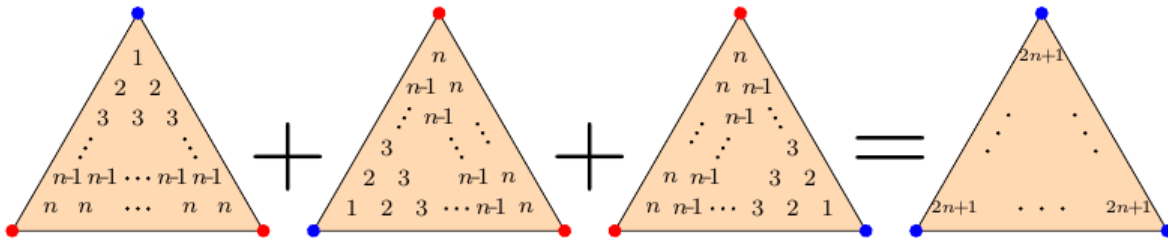


Рис. 3.4

3.8. С помощью рис. 3.5 получите еще один способ найти формулу для суммы квадратов.

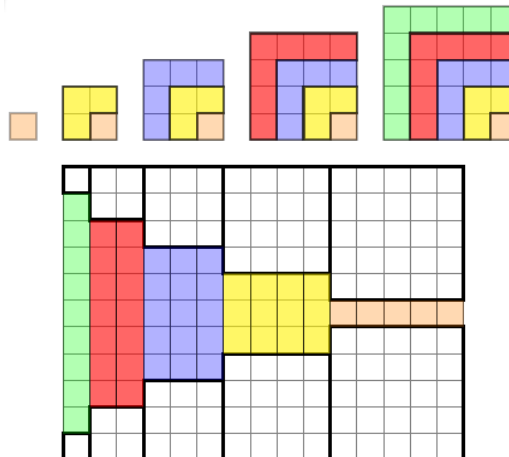


Рис. 3.5

Бесконечные суммы

Связь с [онлайн курсом](#) и [главами конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 4. Бесконечные суммы](#).

Справочные сведения

В данном разделе мы рассматриваем только суммы *положительных* слагаемых.

Бесконечные суммы с положительными слагаемыми могут быть сходящимися и расходящимися. Сходимость означает, что найдется такое число, что любой сколь угодно длинный конечный отрезок данной бесконечной суммы меньше этого числа. Например, сумму $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$ можно оценивать так:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

и т.д. То есть, сумму можно разбить на отрезки длиной 2, 4, 8, 16 и т.д. слагаемых, причем сумма по каждому такому отрезку будет оцениваться сверху дробью $1/2^k$. Остается заметить, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

сходится. А это легко обнаружить на картинке 4.1 последовательным делением квадрата 1×1 пополам. Таким образом, для суммы обратных квадратов справедлива оценка:

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \leq 2.$$

Обратно, для некоторых рядов можно найти такую оценку снизу, которая будет заведомо бесконечной, а значит, и сумма исходного ряда также будет бесконечной. Такое верно, например, для гармонического ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \dots,$$

а это — бесконечная сумма одинаковых слагаемых, равных $1/2$ (кроме первого слагаемого). Ясно, что какое бы большое число мы ни выбрали, можно взять столь много раз $1/2$, что их сумма будет больше выбранного числа. А значит, и сумма гармонического ряда равна бесконечности.



Рис. 4.1

Задачи

4.1. Выведите формулу суммы геометрической прогрессии $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ($0 < x < 1$) путем домножения этой суммы на x . Найдите:

- a) $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$;
- b) $1 + 0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 + \dots$;
- c) $\frac{1}{0.99} + \frac{1}{0.99^2} + \frac{1}{0.99^3} + \dots$

4.2. Исследовать ряды на сходимость:

- a) $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots$;
- b) $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots$;
- c) $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$;
- d) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$;
- e) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$

4.3. Доказать, что если ряды $\sum_n a_n^2$ и $\sum_n b_n^2$ сходятся, то сходятся также и ряды:

$$\sum_n a_n b_n, \quad \sum_n (a_n + b_n)^2.$$

Здесь все $a_n, b_n \geq 0$.

4.4. Доказать сходимость ряда

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

где $0 \leq a_n < 10$.

Движения прямой: работа с понятием

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 5. Начальные представления о движении.](#)

Конспект: Глава 2, разделы 2.1 Сдвиг, композиция сдвигов, группа и раздел 2.2 Отражение.

Справочные сведения

Движением называется такое преобразование (прямой, фигуры, плоскости, области пространства и т.д.), которое сохраняет расстояния. Т.е. если между точками A и B расстояние равно x , то между точками A' и B' , в которые переходят исходные точки A и B при некотором движении, расстояние также будет равно x .

На прямой рассматриваются следующие два вида движений:

- Сдвиг на x , когда все точки, как по команде, сдвигаются на число x (если $x > 0$, то вправо, а если $x < 0$, то влево). Сдвиг на x обозначается за T_x . Сдвиг на вектор AB обозначается T_{AB} .
- Отражение относительно точки O , когда все точки переходят в симметричные себе относительно точки O . Отражение относительно точки O обозначается за S_O .

Частный случай сдвига — тождественное движение id , которое ничего не меняет (все точки остаются на своих местах). $\text{id} = T_0$ (сдвиг на нулевой вектор).

Композиция движений G и Q записывается как $G \circ Q$, что означает последовательное применение движений: сначала ко всем точкам прямой применяется движение Q , а затем к результату предыдущего движения применяется движение G . Композиция движений есть движение.

Задачи

Пусть на прямой даны 4 точки A, B, C, D , поставленные друг за другом с одинаковым шагом (см. рис. 5.1).



Рис. 5.1

5.1. Куда перейдет точка A при отражении S_B ?

5.2. Куда перейдут точки B, C, D при преобразовании $T_{AB} \circ T_{CA}$?

- 5.3. Куда перейдут точки A, B, C при преобразовании $S_C \circ T_{AB}$?
- 5.4. Какое движение переводит A в C и B в D ?
- 5.5. Существует ли движение, которое переводит A в B и B в D ?
- 5.6. Опишите все движения, которые переводят A в C , используя только буквы A, B, C, D и обозначения сдвига и отражения.

Движения прямой: классификация

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 6. Классификация движений прямой.](#)

Конспект: Глава 2, раздел 2.4 Теорема о гвоздях, аналог теоремы Шаля.

Справочные сведения

Всякое движение прямой — это либо сдвиг, либо отражение. При этом любое движение — это либо одно отражение, либо композиция двух отражений.

Всякое движение прямой есть *взаимно однозначное соответствие* точек прямой, т.е. оно переводит разные точки в разные, и какова бы ни была точка прямой, найдется точка, переходящая в нее под действием движения.

Обратное движение для движения G — это такое движение G^{-1} , что $G \circ G^{-1} = G^{-1} \circ G = \text{id}$.

Обращение композиции: $(G \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ G^{-1}$.

Задачи

Введем координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Через S_n обозначим отражение относительно точки n , через T_n — сдвиг на число n .

- 6.1. Известно, что при некотором преобразовании G точка 0 переходит в 2, а 2 — в 3. Может ли оно быть движением? Каким?
- 6.2. Известно, что при некотором преобразовании G точка 0 переходит в 3, а 2 — в 1. Может ли оно быть движением? Каким?
- 6.3. Известно, что при некотором преобразовании G точка 0 переходит в 2, а при обратном преобразовании G^{-1} точка 3 переходит в -1 . Может ли G быть движением? Каким?
- 6.4. Дано движение G . Известно, что $G^{-1}(0) = 1$ и при этом у G^{-1} нет неподвижных точек. Чему равно G ?
- 6.5. Назовем *четностью движения* прямой четность количества отражений, с помощью которых это движение может быть выражено. Какова четность следующих движений: S_0 , T_x , $T_x \circ T_y$, $S_0 \circ T_x$, $S_0 \circ S_1 \circ T_x \circ T_y$, T_x^{-1} , S_0^{-1} , $S_0 \circ S_1 \circ \dots \circ S_n$?
- 6.6. Доказать, что
 - а) Четность обратного движения G^{-1} совпадает с четностью исходного движения G .

- b) Четность композиции движений равна сумме четностей (по модулю 2) компонентов.
- c) Четность движения не зависит от его представления в виде композиций каких-либо движений.

Движения прямой: таблица композиций

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 7. Таблица композиций движений прямой.

Конспект: Глава 2, раздел 2.3 Таблица композиций движений прямой.

Справочные сведения

Таблица композиций отражений и сдвигов:

	T_a	S_O
T_b	T_{a+b}	$S_{O+b/2}$
S_C	$S_{C-a/2}$	T_{2OC}

Таблицу композиций следует читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение F , а в верхней строке — движение G , то в соответствующей ячейке стоит композиция $F \circ G$.

Задачи

Введем координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Через S_n обозначим отражение относительно точки n , через T_n — сдвиг на число n .

7.1. Какое движение получится при композиции

- a) $S_0 \circ S_1$?
- b) $S_0 \circ S_1 \circ S_2$?
- c) $S_0 \circ S_2 \circ S_1$?

7.2. Построить сдвиг на 7 единиц вправо с помощью композиции двух отражений.

7.3. Каким движением является следующая композиция?

$$S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1 \circ S_0.$$

Ответ получить в зависимости от четности n .

7.4. При каких n сдвиг T_n выражается в виде композиций S_0 и S_1 ?

7.5. При каких n сдвиг S_n выражается в виде композиций S_0 и S_1 ?

7.6. Пусть G и Q — два движения прямой, причем $G \circ Q = Q \circ G$ и $G \neq Q$. Какими могут быть G и Q ?

- 7.7. Пусть G и Q — два движения прямой, причем $G \circ Q = \text{id}$ и $G \neq Q$. Какими могут быть G и Q ?
- 7.8. Вывести равенства $S_C \circ T_a = S_{C-a/2}$ и $T_b \circ S_O = S_{O+b/2}$ из соотношения $S_C \circ S_O = T_{2OC}$ алгебраическим путем.
- 7.9. Доказать, что никакая композиция движений S_n и T_m с целыми индексами n, m не может быть равна сдвигу T_x с нецелым x и отражению S_y с неположительным y .

Движения окружности: классификация

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 8. Движения окружности](#).

Конспект: Глава 3, раздел 3.1 Движения окружности, раздел 3.2 Группа движений окружности, теорема Шаля.

Справочные сведения

Чтобы корректно говорить о движениях в криволинейном пространстве, нужно сначала договориться о метрике на нем. *Расстояние* (метрика) между двумя точками окружности — это длина меньшей из дуг данной окружности, соединяющих эти точки. Таким образом, движение окружности по определению должно сохранять длину дуги, переводя точки окружности в точки этой же окружности.

В отличие от прямой, на окружности расстояния имеют максимально допустимое значение, а именно, половину длины этой окружности. На максимальном расстоянии находятся диаметрально противоположные точки.

Движения на окружности являются:

- *Отражение относительно диаметра* (произвольного). Отражение обозначается S_l , где l — диаметр. Если на окружности зафиксировано нулевое положение диаметра, то любой диаметр можно определить через угол наклона относительно нулевого диаметра (угол откладывается против часовой стрелки). Если диаметр l имеет наклон φ относительно нулевого диаметра ($0 \leq \varphi < \pi$), то отражение относительно данного диаметра мы также записываем как S_φ .
- *Поворот окружности* относительно ее центра. Поворот обозначается R_φ , где φ — угол поворота относительно центра окружности, осуществляемый против часовой стрелки, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

В обоих случаях можно рассматривать и другие значения угла φ , приводя его по модулю π в случае отражений и по модулю 2π в случае поворотов, т.к. наклон диаметра на угол $\phi \pm \pi$ приводит к диаметру с углом φ , а поворот на угол $\pi \pm 2\pi$ — это поворот на угол φ .

Углы измеряются в радианах. 1 радиан — это угол, соответствующей дуге, длина которой равна радиусу окружности. Угол в 180° , соответствующий дуге, равной половине длины окружности, он же — развернутый угол, — имеет радианную меру, равную числу π . Если окружность имеет радиус, равный 1, то мера угла в радианах численно совпадает с длиной соответствующей этому углу дуги данной окружности.

Частным случаем поворота является *тождественное движение* id , оставляющее все точки окружности на месте. $\text{id} = R_0 = R_{2\pi k}$.

Других движений окружности не существует (теорема Шаля). Как и в случае прямой, любое движение окружности можно представить как композицию одного или двух отражений.

Задачи

- 8.1. Доказать, что $\pi > 3$.
- 8.2. Пусть G — движение окружности. Сколько у G может быть неподвижных точек (имеется в виду общее количество, найдите все возможные варианты)?
- 8.3. Пусть G — движение окружности. Известно, что $G(A) = A$ и $G(B) \neq B$. Какой вид может иметь G ?
- 8.4. Пусть диаметры l и k перпендикулярны. Найдите $S_l \circ S_k$.
- 8.5. Известно, что точка A переходит при движении G окружности в точку A' , диаметрально противоположную точке A . Каким может быть движение G ?
- 8.6. Движение назовем *четным*, если оно является композицией двух отражений, а в противном случае — *нечетным*. Верно ли, что:
 - а) Композиция четных движений — четное движение, композиция двух нечетных движений — четное движение, композиция четного движения с нечетным движением — нечетное движение?
 - б) G четно тогда и только тогда, когда G^{-1} нечетно?

Движения окружности: таблица композиций

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 9. Таблица умножения движений окружности.

Конспект: Глава 3, раздел 3.2 Группа движений окружности, теорема Шаля.

Справочные сведения

Таблица композиций движений окружности:

	R_α	S_ψ
R_β	$R_{\alpha+\beta}$	$S_{\psi+\beta/2}$
S_φ	$S_{\varphi-\alpha/2}$	$R_{2(\varphi-\psi)}$

Таблицу композиций следует читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение F , а в верхней строке — движение G , то в соответствующей ячейке стоит композиция $F \circ G$.

Задачи

- 9.1. Центральная симметрия — это какое движение?
- 9.2. Композицией каких отражений можно выразить центральную симметрию?
- 9.3. С помощью отражения относительно оси Ox (горизонтальной оси) и вращений выразить отражение относительно оси Oy (вертикальной оси).
- 9.4. Возьмем некоторый угол $\varphi > 0$. Найдите:
 - а) $S_0 \circ S_\varphi$;
 - б) $S_0 \circ S_\varphi \circ S_{2\varphi}$;
 - в) $S_0 \circ S_{2\varphi} \circ S_\varphi$;
 - г) $S_0 \circ S_\varphi \circ S_{2\varphi} \circ S_{3\varphi} \circ \dots \circ S_{n\varphi}$.
 - е) Чему равно последнее выражение, если $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, $\pi = 2\pi$?
- 9.5. Построить поворот на угол 90° при помощи двух отражений.
- 9.6. При каких n поворот на угол $n\varphi$ выражается в виде композиций S_0 и S_φ ?
- 9.7. Пусть G и Q — движения окружности, причем $G \circ Q = Q \circ G$. Какими могут быть G и Q ?
- 9.8. Пусть G и Q — движения окружности, причем $G \circ Q = \text{id}$. Какими могут быть G и Q ?

Конечные подгруппы движений прямой и окружности

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 10. Конечные подгруппы движений прямой и окружности.

Конспект: Глава 2, раздел 2.5 Все конечные подгруппы движений прямой, раздел 5.3 Подгруппы движений окружности.

Справочные сведения

Все движения прямой и все движения окружности образуют группы с операцией композиции. Напомним определение группы. Пусть на множестве G задана операция \circ . Множество G с данной операцией называется *группой*, если:

- G1 $a \circ b \in G$ для всех $a, b \in G$ (группоид);
- G2 для любых $a, b, c \in G$ имеем тождество $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (ассоциативность);
- G3 существует элемент $\text{id} \in G$ такой, что $a \circ \text{id} = \text{id} \circ a = a$ для всех $a \in G$ (единица);
- G4 для всякого $a \in G$ существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \text{id}$ (обратный элемент).

Кроме того, группа называется *абелевой* (или *коммутативной*), если $a \circ b = b \circ a$ для всех $a, b \in G$. Количество элементов в группе называется ее **порядком**.

Конечная подгруппа может быть определена следующим образом: это — *конечное подмножество группы, замкнутое относительно групповой операции*. Такого определения достаточно, чтобы вывести из него тот факт, что данное подмножество само по себе является группой, т.е. содержит единицу (исходной группы), обратные элементы, а также удовлетворяет требованию ассоциативности операции (т.к. операция та же самая).

Всякая конечная подгруппа группы движений прямой имеет вид либо $\{\text{id}\}$, либо $\{\text{id}, S_A\}$, где A — некоторая точка прямой.

Всякая конечная подгруппа группы движений окружности имеет один из видов:

- 10.1. тривиальная подгруппа $\{\text{id}\}$;
- 10.2. группа поворотов правильного n -угольника (включая случай вырожденного 2-угольника);
- 10.3. подгруппа одного отражения $\{\text{id}, S_\varphi\}$;
- 10.4. группа движений правильного n -угольника (включает повороты, совмещающие углы многоугольника, и отражения относительно осей, проходящих через его вершины и центр окружности).

Задачи

- 10.1. Выпишите все конечные подгруппы группы движений окружности порядка не выше 6, содержащие отражение S_0 (относительно горизонтальной оси).
- 10.2. Какова группа движений правильного треугольника, квадрата, пятиугольника?
- 10.3. Пусть задан правильный треугольник ABC с осями симметрии a, b, c и центром O . Заполните таблицу композиций движений данного треугольника: Таблицу композиций следует

	id	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	S_a	S_b	S_c
id						
$R_{2\pi/3}$						
$R_{4\pi/3}$						
S_A						
S_B						
S_C						

читать слева направо, т.е. если в левом столбце стоит движение F , а в верхней строке — движение G , то в соответствующей ячейке стоит композиция $F \circ G$.

Арифметика остатков

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 11. Введение в арифметику остатков.

Конспект: Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков.

Справочные сведения

Посмотрим на шкалу целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ через некоторый трафарет. Этот трафарет является непрозрачной полоской, в которой проделаны дырки с шагом m друг от друга (где m — целое положительное число). Например, пусть $m = 7$, тогда если в одной дырке мы видим число 0, то в другой, справа от нее, — число 7, а слева — -7 . Если мы сместим трафарет вправо на единицу, то увидим числа $-6, 1$ и 8 , еще сдвинем — числа $-5, 2$ и 9 , и т.д.

Таким образом, в массиве всех целых чисел мы сможем выделять такие числа, которые связаны друг с другом через этот трафарет. Например, все числа кратные 7, т.е. $0, \pm 7, \pm 14, \dots$. В другой класс войдут все числа, смещенные от них на 1 вправо, т.е. $1, \pm 7 + 1, \pm 14 + 1, \dots$. Эти классы называются *классами вычетов по модулю m* .

Если класс содержит число 0, то все числа из данного класса кратны шагу трафарета, т.е. модулю m . Действительно, ведь это числа $0, \pm m, \pm 2m$ и т.д. Если класс не содержит нуля, то все числа в нем имеют слева соседа из нулевого класса на одном и том же расстоянии, т.к. это числа вида $k, k \pm m, k \pm 2m, \dots$, где $0 < k < m$. Число k является остатком от деления таких чисел на модуль m . Между классами и остатками от деления существует взаимно однозначное соответствие.

Простой иллюстрацией из жизни является пример с днями недели. Все понедельники отстоят друг от друга на кратное 7 число дней. Поэтому на шкале дней их можно увидеть через трафарет с шагом 7. Аналогично — все вторники, среды, четверги, пятницы, субботы и воскресенья. Если воскресенье обозначить за 0, понедельник — за 1, и т.д., то для любой даты можно определить ее класс, он же — остаток от деления на 7, т.е. день недели.

Как только мы отождествляем целые числа, входящие в один класс, их арифметика становится *модульной*. Это значит, что арифметические операции мы выполняем с точностью до класса. Так, если сложить $2 + 5$, то в обычной арифметике мы получим число 7, но оно находится в том же классе, что и число 0 по модулю $m = 7$, поэтому в модульной арифметике $2 + 5 = 0 \pmod{7}$. Проще говоря, в модульной арифметике мы всякий раз *вычитаем* максимально возможную часть числа, кратную модулю, и оставляем лишь *остаток* от деления на модуль. Поэтому она и называется арифметикой остатков.

Попадание чисел a и b в один класс по модулю m обозначается так: $a \equiv b \pmod{m}$. Формально это означает, что $a - b = km$ при некотором целом k .

Сравните: среда(3) + 5 дней = понедельник(1). Это позволяет вычислять день недели для любой даты, отстоящей от нас на известное число дней. В частности, можно легко посчитать день недели даты, отстоящей от нас на 1 год. На рис. 11.1 приведен пример с

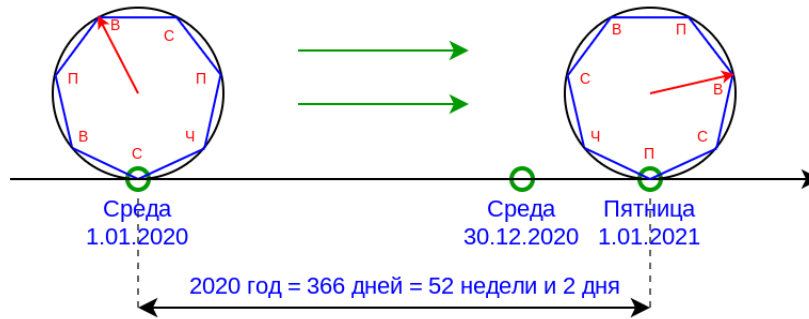


Рис. 11.1: Арифметика остатков по модулю 7.

високосным годом, содержащим 366 дней. $366 = 350 + 14 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Если a делится на b (формально: существует целое k такое, что $a = kb$), то пишут $a:b$, это равносильно записи $b|a$ (b делит a). Частный случай: $0:x$ и $x|0$ при любом целом x .

Задачи

- 11.1. Отметить на числовой оси целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2 (на рисунке должны поместиться числа от -20 до 20).
- 11.2. Книжки на столе пытались связывать в пачки по 2, по 3, по 4 и по 5 книг, и каждый раз оставалась одна лишняя. Сколько книг было на столе? (Известно, что их было не больше 100.)
- 11.3. Одному брату 6 лет, другому — 10. Значит, сумма из возрастов четная. Какой она будет в следующем году?
- 11.4. Если сегодня понедельник, то какой день недели будет через 10 дней, через 90 дней, через 2 года (рассмотреть случай без високосных лет и с високосным годом)?
- 11.5. Найти день недели через месяц, квартал, полгода и год, отправляясь от текущей даты.
- 11.6. Поезд Москва–Владивосток отправляется из Москвы в 7:00 и находится в пути 166 часов. Определите время прибытия (москowsкое) поезда во Владивосток.
- 11.7. Построить таблицы сложения для модулей: 2,3,4,5,6,10,11.
- 11.8. Найти число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 остаток 2, при делении на 4 остаток 3, при делении на 5 остаток 4, при делении на 6 остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.
- 11.9. Верно ли, что а) если $n:k$ и $k:n$, то $n = \pm k$; б) если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$; в) если $b:a$ и $c:a$, но $d \nmid a$, то $(b+c):a$, но $(b+d) \nmid a$; г) если a и b не делятся на c , то ab не делится на c^2 ?

Таблицы умножения остатков

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 12. Таблицы умножения остатков.

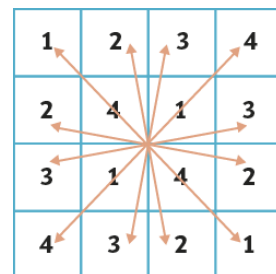
Конспект: Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

Справочные сведения

Умножение остатков производится также по модулю m , т.е. после умножения отбрасываем часть, кратную m , и оставляем остаток от деления на m (см. рис. 12.1).

Таблица умножения по модулю m обладает следующими свойствами:

- Она центрально симметрична (на картинке 12.1 мы убрали строку и столбец, соответствующие умножению на ноль).
- Если модуль — простое число, то нулей в таблице нет (кроме тривиальных строк и столбца).



1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

Рис. 12.1: Умножение по модулю 5.

Задачи

- 12.1. Целое положительное число увеличили на 1. Могла ли сумма его цифр (а) возрасти на 8? (б) Уменьшиться на 8? (в) Уменьшиться на 10?
- 12.2. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?
- 12.3. Последняя цифра точного квадрата равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра нечётна.
- 12.4. Остаток от деления простого числа на 30 — простое число или 1. Почему?
- 12.5. Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15?
- 12.6. На какую цифру оканчивается число $33^{77} + 77^{33}$?
- 12.7. Могут ли среди m последовательных целых чисел какие-то два иметь равные остатки от деления на m ?
- 12.8. Пусть $5x \equiv 6 \pmod{8}$. Найти x .
- 12.9. Найти последнюю цифру 7^{100} , 7^{1942} .
- 12.10. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что сравнения по одному и тому же модулю

- а) можно складывать и вычитать: $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
- б) можно перемножать: $ac \equiv bd \pmod{m}$;
- с) можно возводить в натуральную степень n : $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;
- д) можно домножать на любое целое число k : $ka \equiv kb \pmod{m}$.

- 12.11. Найдите остаток от деления **а)** числа $1 + 31 + 331 + \dots + 3333333331$ на 3; **б)** 6100 на 7.
- 12.12. Найдите остаток от деления числа $1 - 11 + 111 - 1111 + \dots - 1111111111$ на 9.
- 12.13. Найдите остаток от деления **а)** $10!$ на 11; **б)** $11!$ на 12.
- 12.14. **а)** Какой цифрой оканчивается 8^{18} ? **б)** При каких натуральных k число $2^k - 1$ кратно 7?
- 12.15. Найдите три последние цифры числа 1999^{2000} .
- 12.16. Найти **а)** $3^{31} \pmod{7}$, **б)** $2^{35} \pmod{7}$, **в)** $128^{129} \pmod{17}$.
- 12.17. Докажите, что **а)** $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31; **б)** $43^{95} + 57^{95}$ делится на 100.
- 12.18. Докажите, что $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$ делится на n при нечётном n .
- 12.19. Числа x и y целые, причем $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажите, что x и y делятся на 3.
- 12.20. Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?
- 12.21. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть или простое число или 1.
- 12.22. (а) Квадрат целого положительного числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Что это за цифра? (Указать все возможности.) (б) Квадрат целого положительного числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Указать все возможности.) (в) Пятая степень числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Почему? Для каких ещё степеней это верно?
- 12.23. Доказать, что для любого целого a число $10a$ даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само a .
- 12.24. Доказать, что число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3 и 9.
- 12.25. *Сколько есть способов записать 2018 как сумму натуральных слагаемых, любые два из которых равны или различаются на 1? (Способы лишь с разным порядком слагаемых считаем равными.)
- 12.26. *Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Умножение по простому модулю

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 13. Основная теорема арифметики. Часть 1.](#)

Конспект: Глава 4, раздел 4.2 Кузнечик НОД и алгоритм Евклида, раздел 4.3 Простые числа и ОТА, Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

Справочные сведения

Для произвольной строки (столбца) таблица умножения остатков по модулю m эквивалентны следующие утверждения:

- В строке (столбце) отсутствует ноль;
- Номер строки (столбца) взаимно прост с модулем m ;
- В строке (столбце) встречаются все числа от 1 до $m - 1$;
- В строке (столбце) встречается 1.

Натуральное число p — *простое*, если оно имеет ровно два положительных делителя (1 и p).

Таблица умножения остатков по простому модулю p не содержит нулей (кроме строки и столбца с умножением на ноль) и все строки и столбцы являются перестановками множества $\{1, \dots, p - 1\}$.

В таблице умножения остатков по простому модулю p номер k любой строки взаимно прост с модулем: $\text{НОД}(k, p) = 1$. Отсюда следует, что при некоторых целых n, t имеем $tp - nk = 1$, а по модулю p это равенство принимает вид $nk \equiv 1$, т.е. число n обратно к k по модулю p . Таково же и число $n \bmod p$. Иначе говоря, равенство $tp - nk = 1$ позволяет найти обратный к остатку k остаток по модулю p .

Коэффициенты n, t можно найти методом цепных дробей. Например, пусть $p = 101$, $k = 77$. Найдем обратный к нему остаток. Для этого используем цепную дробь

$$\frac{101}{77} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 - \frac{1}{5}}} \approx 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = \frac{21}{16}.$$

откуда видим, что $77 \cdot 21 - 101 \cdot 16 = 1$. Поэтому $77 \cdot 21 \equiv 1 \pmod{101}$, т.е. остаток 21 обратен к 77.

Задачи

13.1. Найти обратные остатки к 5, 9, 12, 25, 51, 88, 99, 100 по модулю 101.

- 13.2. Найти (или доказать, что их не существует) обратные остатки к 10, 20, 30, 27, 51, 86 по модулю 2020. А по модулю 2021?
- 13.3. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).
- 13.4. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что а) $6m + 8n \vdots 11$; б) $9m + n \vdots 11$.
- 13.5. Пусть в некоторой стране имеют хождение монеты достоинством только 14 и 23 тугрика. Продавец должен выдать сдачу покупателю в размере 1 тугрик. Считая, что у обоих имеется достаточное количество монет того и другого достоинства, указать способ, которым должен воспользоваться продавец для выдачи сдачи.
- 13.6. Найти цепную дробь для $\sqrt{3}$.

Еще задачи на остатки

- 13.7. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.
- 13.8. Число a даёт остаток 5 при делении на 9, число b даёт остаток 7 при делении на 9. Можно ли по этим данным определить, какой остаток дают числа $a + b$ и ab при делении на 9?
- 13.9. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что **а)** их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.
- 13.10. Докажите, что а) \overline{aaa} делится на 37 (черта означает позиционную запись числа цифрами); б) $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).
- 13.11. Сформулировать и доказать признаки делимости на 2, 4, 5, 8.
- 13.12. Из числа $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \dots + a_1 + a_0$. а) Докажите, что получилось число, кратное 9. б) Выведите отсюда признаки делимости на 3 и на 9.
- 13.13. Переставив цифры в числе N , получили в 3 раза меньшее число. Докажите, что $N \vdots 27$.
- 13.14. Верен ли такой признак делимости на 27: число делится на 27 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 27?
- 13.15. Запись числа N составлено из записей подряд идущих чисел от 19 до 92:

$$N = 19202122 \dots 909192.$$

На какую максимальную степень тройки оно делится?

- 13.16. Докажите, что число $11 \dots 11$, запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n .
- 13.17. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих в четных разрядах, и сумма его цифр, стоящих в нечетных разрядах, отличаются на число, кратное 11.
- 13.18. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?
- 13.19. *Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых как сумма трёх или менее точных квадратов.

Основная теорема арифметики

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 14. Основная теорема арифметики. Часть 2.

Конспект: Глава 4, раздел 4.3 Простые числа и ОТА, Глава 8, раздел 8.1 Арифметика остатков, раздел 8.2 Свойства арифметики остатков.

Справочные сведения

Всякое положительное число N имеет единственное представление в виде

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

где p_1, \dots, p_k — некоторые простые числа, целые $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$.

$\text{НОД}(a, b)$ — наибольшее целое число, одновременно делящее a и b , $\text{НОК}(a, b)$ — наименьшее целое положительное число, одновременно делящееся на a и b .

Теорема Вильсона: если p — простое число, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Задачи

- 14.1. Написать на псевдоязыке алгоритм разложения числа по степеням простых.
- 14.2. *Оценить скорость алгоритма следующим образом: посчитать количество операций деления с остатком, производимых в ходе выполнения алгоритма.
- 14.3. Известно, что $n^2(m^2 + 1)(m + 1) = 9999$ при некоторых целых n, m . Найдите эти числа.
- 14.4. Произведение возрастов Машинных братьев равно 1664. Младший из братьев вдвое моложе старшего. Сколько у Маши братьев?
- 14.5. Пусть a и b — натуральные числа, не делящиеся на 10, такие, что $ab = 10000$. Чему равна их сумма?
- 14.6. В силу ОТА будем записывать положительное натуральное число m как последовательность \overline{m} степеней простых:

$$m = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \dots \iff \overline{m} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots),$$

где $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ — все простые числа, начиная с 2.

Докажите, что если $\overline{m} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots)$ и $\overline{n} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \dots)$, то

$$\begin{aligned} \overline{nm} &= (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_k + \beta_k, \dots) \\ \overline{\text{НОД}(n, m)} &= (\min(\alpha_0, \beta_0), \min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_k, \beta_k), \dots), \\ \overline{\text{НОК}(n, m)} &= (\max(\alpha_0, \beta_0), \max(\alpha_1, \beta_1), \dots, \max(\alpha_k, \beta_k), \dots). \end{aligned}$$

14.7. Докажите, что $\text{НОД}(n, m)\text{НОК}(n, m) = nm$.

14.8. Найти $\sigma(p^k)$, где p — простое число, k — целое положительное, $\sigma(m)$ — сумма всех положительных делителей числа m . Верно ли, что $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ при условии $\text{НОД}(a, b) = 1$?
Найдите $\sigma(n)$, где

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

— разложение числа n по степеням простых.

14.9. Натуральное число называется **совершенным**, если сумма всех его делителей, меньших его, равно ему самому. Например, 6 и 28 — совершенные числа. Докажите, что число $2^{n-1}(2^n - 1)$ будет совершенным, если $2^n - 1$ — простое число.

14.10. Напишите на псевдоязыке алгоритм вычисления $\sigma(n)$ для любого положительного целого числа.

Задачи на сравнения

14.11. Пусть p — простое число вида $4k + 1$, и пусть $x = (2k)!$. Докажите, что $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

14.12. Пусть p — простое число вида $4k + 1$, и пусть x удовлетворяет сравнению $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Докажите, что

а) $(a + xb)(a - xb) \equiv a^2 + b^2 \pmod{p}$ при $a, b \in \mathbb{Z}$;

б) среди чисел вида $m + xn$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m, n \leq \lfloor \sqrt{p} \rfloor$, найдутся два с равными остатками от деления на p ;

в) найдется ненулевое число $a + bx$, делящееся на p , где $a, b \in \mathbb{Z}$, причем $|a| < \sqrt{p}$ и $|b| < \sqrt{p}$;

г) p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Следствия ОТА

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 15. Основная теорема арифметики. Следствия.

Конспект: Глава 4, раздел 4.2 Кузнечик НОД и алгоритм Евклида.

Справочные сведения

Кузнечик умеет прыгать одной ногой на a (в обе стороны), другой ногой — на b (в обе стороны). Здесь a, b — целые числа. Тогда он может попасть во все целые точки, кратные НОД(a, b), и только в них.

Лемма Евклида: если простое число p делит произведение целых чисел ab , то p делит a или p делит b .

Задачи

15.1. В какую ближайшую к нулю точку может попасть кузнечик, умеющий делать прыжки по числовой прямой длины 37 и 777, если он стартует в нуле?

15.2. Используя разложение на множители, решите уравнение:

$$n^3(n+1)^3 \cdot 3 = 1728$$

15.3. Кузнечик делает по числовой прямой прыжки длины 11 и 1331. Укажите точки, в которых он может оказаться: 99, 999, 1, 11, 111.

15.4. Два кузнечика на числовой прямой, стартуя из нуля, могут совершать любые комбинации прыжков: первый — длины 16 и 28, а второй — длины 9 и 15. В какой ближайшей к нулю точке они могут встретиться?

15.5. При каком минимальном целом $n > 0$ уравнение $120n = x^3$ будет иметь целочисленное решение?

15.6. Доказать, что любое простое число $p > 3$ имеет вид $6k + 1$ или $6k + 5$.

15.7. Доказать, что квадрат простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает остаток 1.

15.8. Доказать, что любое общее кратное чисел a и b делится на их НОК.

15.9. Про натуральные числа a и b известно, что их НОД равен 15, а НОД равен 840. Найти a и b .

15.10. Доказать, что при $n > 2$ два числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ одновременно не могут быть простыми.

- 15.11. Обозначим за $\tau(n)$ количество всех положительных делителей числа n . Найти $\tau(p^k)$, где p — простое число. Верно ли, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$ при условии $\text{НОД}(a, b) = 1$. Найти $\tau(n)$, если

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

— разложение числа n по степеням простых.

- 15.12. Напишите на псевдоязыке алгоритм вычисления $\tau(n)$ для любого положительного целого числа.
- 15.13. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 положительных делителей?
- 15.14. Рассмотрим целое число $n > 0$. Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел (u, v) таких, что $\text{НОК}(a, b) = n$, равно количеству натуральных делителей у числа n^2 .
- 15.15. Существуют ли целые x, y , для которых **(а)** $x^2 + y^2 = 99$? **(б)** $x^2 + y^2 = 33333$? **(с)** $x^2 + y^2 = 5600$?
- 15.16. **(а)** [Решето Эратосфена] Выпишем целые числа от 2 до n . Подчеркнём 2 и сотрём числа, кратные 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём кратные ему, и т. д., пока каждое число от 2 до n не будет подчёркнуто или стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n . **(б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше \sqrt{n} . Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. **(в)** Какие числа, меньшие 100, простые?
- 15.17. Числа a, b, c, n натуральные, $\text{НОД}(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдется ли такое целое x , что $a = x^n n$?
- 15.18. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.
- 15.19. Найдутся ли такие 10 разных целых чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, со свойством: квадратом целого числа будет произведение **(а)** любых двух из них; **(б)** любых трёх них?
- 15.20. Найдите разложение по степеням простых числа **(а)** 2021; **(б)** 17!; **(в)** $\binom{20}{10}$.
- 15.21. При каких натуральных k число $(k-1)!$ не делится на k ?
- 15.22. **(а)** [Теорема Лежандра] Докажите, что простое число p входит в разложение по степеням простых числа $n!$ в степени $\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \dots$ (где $\lfloor x \rfloor$ — это целая часть числа x). С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю? **(б)** Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **(в)** Может ли $n!$ делиться на 2^n ($n \geq 1$)?
- 15.23. Докажите, что существует бесконечное число простых чисел вида **(а)** $3k+2$; **(б)** $4k+3$.
- 15.24. Сократить дробь $\frac{8547}{4144}$.

Линейные уравнения в целых числах

Связь с [онлайн курсом](#) и [главами конспекта](#):

«Дети и наука»: [Урок 16. Решение линейных уравнений в целых числах. Часть 1.](#)

Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах.

Справочные сведения

Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — некоторые целые числа, а x, y — переменные, пробегающие целые числа, называется линейным уравнением в целых числах. Задача: отыскать все возможные пары (x, y) , удовлетворяющие данному уравнению.

Шаг 1. Находим $\text{НОД}(a, b)$ и проверяем, делится ли c на $\text{НОД}(a, b)$. Если не делится, то решений нет.

Шаг 2. Если делится, то сокращаем все уравнение на $\text{НОД}(a, b)$, получаем эквивалентное уравнение такого же вида, только с условием $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Шаг 3. Ищем общее решение однородного уравнения: $ax + by = 0$ (здесь уже считаем $\text{НОД}(a, b) = 1$). Это решение имеет вид

$$x = bk, \quad y = -ak, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Шаг 4. Ищем частное решение уравнения $ax + by = 1$ (например, с помощью цепной дроби для a/b). Это решение существует в силу алгоритма Евклида. Обозначим это решение за (x_0, y_0) . Тогда (x_0c, y_0c) будет частным решением уравнения $ax + by = c$.

Шаг 5. Общее решение уравнения $ax + by = c$ ($\text{НОД}(a, b) = 1$) записывается в виде

$$x = bk + x_0c, \quad y = -ak + y_0c, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи

16.1. Решите в целых числах уравнения:

- a) $6x - 5y = 0$;
- b) $6x - 6y = 2$;
- c) $6x - 5y = 3$;
- d) $4x + 7y = 41$;
- e) $7x - 5y = 21$;
- f) $19x + 17y = 15$.

16.2. Найти все решения линейного уравнения в целых числах или доказать что их нет: **(а)** $5x - 9y = 2$; **(б)** $225x + 81y = 18$; **(в)** $10x - 18y = 3$.

16.3. Решите уравнения: **(а)** $121x + 91y = 1$; **(б)** $-343x + 119y = 42$; **(в)** $111x - 740y = 11$.

- 16.4. Разложить в цепную дробь числа **(а)** $15/4$; **(б)** $42/31$; **(в)** $13/9$; **(г)** $6/5$.
- 16.5. Используя разложение в цепную дробь решить уравнение в целых числах **(а)** $57x - 89y = 16$; **(б)** $13x - 10y = 27$.
- 16.6. Докажите, что уравнение $ax + by = d$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a, b) | d$. В частности, $\text{НОД}(a, b)$ — это наименьшее натуральное число, представимое в виде $ax + by$.
- 16.7. Кузнечик может прыгать на расстояние 15 и 7. Изначально он находится в точке 0. **(а)** Найдите, как следует прыгать кузнечику, чтобы оказаться в точке 3. **(б)** Найдите, за какое наименьшее число прыжков он может попасть в точку 6;
- 16.8. Пусть (x_0, y_0) — решение уравнения $ax + by = d$. Пусть a_0 и b_0 — такие числа, что $\text{НОД}(a, b)a_0 = a$, $\text{НОД}(a, b)b_0 = b$. Покажите, что каждое решение уравнения $ax + by = d$ имеет вид $x = x_0 + b_0 \cdot t$, $y = y_0 - a_0 \cdot t$, где t — целое число.
- 16.9. Известно, что пары чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) являются решением уравнения $ax + by + c = 0$, где a, b, c — некоторые неизвестные целые коэффициенты. Найдите, выразив через (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , чему равно a/b .
- 16.10. Решите в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 1$.
- 16.11. Доказать, что уравнение $ax + by = ab$, где $a, b > 0$ и $\text{НОД}(a, b) = 1$, неразрешимо в натуральных числах.

Алгоритм Евклида

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 17. Решение линейных уравнений в целых числах. Часть 2.

Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах.

Справочные сведения

Алгоритм Евклида последовательного деления с остатком. Пусть даны целые числа a и b , причем $a > b > 0$. Делим a/b с остатком:

$$a = bk_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b.$$

Далее делим b/r_0 с остатком, получаем равенство $b = r_0k_1 + r_1$, где $0 \leq r_1 < r_0$. Затем делим с остатком r_0 на r_1 , и так далее. То есть делим каждый предыдущий остаток на текущий. Рано или поздно мы получим $r_n = 0$, на этом алгоритм останавливается.

При этом, последний ненулевой остаток есть не что иное как $\text{НОД}(a, b)$. Если сразу же получаем $r_0 = 0$, то $\text{НОД}(a, b) = b$.

Затем можно начать раскручивать полученные равенства в обратном направлении, чтобы выразить $\text{НОД}(a, b)$ через a и b . Отсюда получаем представление

$$\text{НОД}(a, b) = an + bm, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Например, найдем $\text{НОД}(16, 6)$ и его линейное представление.

$$16 = 6 \cdot 2 + 4$$

$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

Отсюда $\text{НОД}(16, 6) = 2$. Из второго равенства получаем, что $2 = 6 - 4 \cdot 1$, куда подставляем 4, и получаем

$$2 = 6 - (16 - 6 \cdot 2) \cdot 1 = 16 \cdot (-1) + 6 \cdot 3,$$

т.е. $n = -1, m = 3$.

Задачи

- 17.1. Написать реализацию алгоритма Евклида на псевдоязыке программирования. А также алгоритм, выводящий линейное представление НОД через исходные два числа.
- 17.2. Вычислите при помощи алгоритма Евклида: **(а)** $\text{НОД}(91, 147)$; **(б)** $\text{НОД}(-144, -233)$; **(в)** $\text{НОД}(525, 231)$; **(г)** $\text{НОД}(7\,777\,777, 7\,777)$; **(д)** $\text{НОД}(10946, 17711)$; **(е)** $\text{НОД}(2^m - 1, 2^n - 1)$.
- 17.3. Доказать, что все остатки r_k в алгоритме Евклида можно представить в виде линейной комбинации $ax + by$, подобрав подходящие целые x, y .

- 17.4. Покажите, как при помощи алгоритма Евклида можно по произвольным a и b найти такие k и l , что $ak + bl = \text{НОД}(a, b)$.
- 17.5. Найти линейное представление НОД с помощью алгоритма Евклида и методом цепных дробей:
- $$\text{НОД}(5, 9), \quad \text{НОД}(18, 15), \quad \text{НОД}(225, 81).$$
- 17.6. Доказать, что алгоритм Евклида, описанный выше, завершается за конечное число шагов для любых стартовых целых положительных чисел a и b .
- 17.7. Докажите, что $\text{НОД}(a, b)$ делится на любой общий делитель чисел a и b .
- 17.8. С помощью представления НОД в виде линейной комбинации исходных чисел докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$ и $a \vdots b$, то $c \vdots b$.
- 17.9. Какие расстояния можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины a см и b см (где $\text{НОД}(a, b) = d$)?

Метод цепных дробей

Связь с [онлайн курсом](#) и главами [конспекта](#):

«Дети и наука»: Урок 18. Метод цепных дробей.

Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах, Глава 7, раздел 7.2 Соизмеримость. Иррациональности.

Справочные сведения

Равенства, используемые в алгоритме Евклида, соберем в одно выражение для исходной дроби a/b , введя обозначения $a = r_0$, $b = r_1$.

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r_1} &= \frac{k_1 r_1 + r_2}{r_1} = \boxed{k_1} + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} = \boxed{k_1} + \frac{1}{\frac{k_2 r_2 + r_3}{r_2}} = \\ &= \boxed{k_1} + \frac{1}{\boxed{k_2} + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}} = \boxed{k_1} + \frac{1}{\boxed{k_2} + \frac{1}{\boxed{k_3} + \dots \frac{1}{\boxed{k_n} + \frac{1}{r_{n+1}/r_n}}}}, \end{aligned}$$

где $r_0 > r_1 > r_2 > \dots > r_n > r_{n+1}$.

Такое разложение называется **цепной дробью**.

Разложение дроби a/b в цепную дробь конечно тогда и только тогда, когда дробь a/b рациональна, т.е. числа a и b *соизмеримы*.

Цепная дробь помогает решать линейные уравнения вида $ax + by = c$ в целых числах.

Пусть дано уравнение

$$112x - 34y = 16.$$

Предположим, что мы не знаем НОД(112,34), и не будем сокращать на него уравнение.

Ищем приближение дроби 112/34 следующим способом:

$$\frac{112}{34} = 3 + \frac{10}{34} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{4}{10}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2+2/4}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2+1/2}}$$

Как только мы дошли до хвоста вида $1/k$, мы останавливаемся, отбрасываем этот хвост и сворачиваем дробь обратно, получая приближение исходной дроби:

$$\frac{112}{34} \approx 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{23}{7}.$$

Далее, перемножая накрест эти дроби, получаем представление для НОД:

$$\text{НОД}(112, 34) = 112 \cdot 7 - 34 \cdot 23 = 2.$$

Таким образом, мы нашли НОД(112,34) и одновременно — коэффициенты для общего и частного решения.

Искомые коэффициенты: $n = 7$, $m = 23$. Общее решение уравнения, таким образом, получаем в виде

$$\begin{cases} x = (34/2)k + (16/2) \cdot 7, \\ y = (112/2)k + (16/2) \cdot 23, \end{cases}$$

где k — любое целое число.

Задачи

- 18.1. Разложить в цепную дробь отношения: $36/25$, $111/34$, $12/8$, $1024/333$.
- 18.2. Решить уравнение в целых числах методом цепных дробей: $100x + 77y = 1$, $355x + 113y = 1$, $271x - 100y = 7$, $707x + 500y = 10$.
- 18.3. Маша продавала на школьной ярмарке плетеные мандалы по 135 рублей, а потом купила несколько фенечек по 40 рублей, после чего у нее осталось 5 рублей. Пользуясь методом цепных дробей, найдите, сколько фенечек купила Маша.
- 18.4. (а) В фирме 28 служащих с большим стажем и 37 — с маленьким. Хозяин фирмы выделил некую сумму для подарков служащим на Новый год. Бухгалтер подсчитал, что есть только один способ разделить деньги так, чтобы все служащие с большим стажем получили поровну и все с маленьким — тоже поровну (все получают целое число рублей, большее 0). Какую наименьшую и какую наибольшую сумму мог выделить хозяин на подарки?
(б)* А если ещё требуется, чтобы служащий с большим стажем получил больше денег, чем служащий с маленьким стажем?
- 18.5. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax + by = c$
 - а) при любом целом c имеет такое решение в целых числах x и y , что $0 \leq x < b$;
 - б) имеет решение в *целых неотрицательных* числах x и y , если c целое, большее $ab - a - b$;
 - с) *при целых c от 0 до $ab - a - b$ ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причем если для $c = c_0$ такое решение есть, то для $c = ab - a - b - c_0$ таких решений нет.
- 18.6. *Слонопотам типа (p, q) ходит по бесконечной клетчатой доске, сдвигаясь за ход на p клеток по любому направлению «горизонталь-вертикаль» и на q клеток по перпендикулярному. (Шахматный конь — слонопотам типа $(1, 2)$.) Какие слонопотамы могут попасть на соседнее с собой поле? $m + 179n$
- 18.7. *Натуральные числа m и n взаимно просты. Известно, что дробь $\frac{m + 179n}{179m + n}$ можно сократить на число k . Каково наибольшее возможное значение k ?
- 18.8. *Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n , разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Игруют двое. За ход можно отломить от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Итоги арифметических исследований

Связь с онлайн курсом и главами конспекта:

«Дети и наука»: Урок 19. Итоги арифметических исследований.

Конспект: Глава 6, раздел 6.2 Линейные уравнения в целых числах, Глава 7, раздел 7.2 Соизмеримость. Иррациональности.

Справочные сведения

Линейное уравнение $ax + by + c = 0$ можно решать в целых числах, даже если коэффициенты a, b, c не являются целыми.

Отрезки a и b называются *соизмеримыми*, если существует третий отрезок c , который укладывается в a и в b целое число раз без остатка, т.е. $a = cn$ и $b = ct$ для некоторых натуральных n, t .

Обобщение линейного уравнения в целых числах:

- 19.1. уравнение с рациональными коэффициентами $ax + bx + c = 0$ — сводится к уравнению в целых числах, если все коэффициенты умножить на общий знаменатель;
- 19.2. уравнение $ax + bx + c = 0$ с соизмеримыми коэффициентами a и b — сводится к случаю уравнения в целых числах, если c также соизмеримо с a (или с b), и не имеет решений в противном случае.

В обоих случаях мы ищем решение (x, y) с целыми координатами x и y .

Задачи

- 19.1. При каком c прямая $ax + (\sqrt{3})y + c = 0$ пройдет через рациональную точку (x, y) ?
- 19.2. Решить уравнение $(\sqrt{3})x - (\sqrt{12})y = \sqrt{75}$ в целых числах.
- 19.3. Имеет ли решения в целых числах следующее уравнение: $x\sqrt{6} + y\sqrt{24} = \sqrt{12}$?
- 19.4. Сколько решений в зависимости от c может иметь уравнение $x + y\sqrt{3} = c$?
- 19.5. Методом цепных дробей найти наилучшее приближение с точностью до 0.001 следующих иррациональных чисел: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.
- 19.6. Английский ярд составляет 0.914383 метра. Найти приближенное отношение метра к ярду.
- 19.7. Год равен 365.2422 суткам. Разложить эту дробь в цепную и найти первые четыре подходящие дроби.

- 19.8. Разность между последней и предпоследней подходящими дробями равна $1/42$. Подберите два-три набора пар чисел, которые могли бы быть, соответственно, числителями и знаменателями этих подходящих дробей.
- 19.9. Разложите в цепную дробь число $43/40$. Найдите все ее подходящие дроби. Чему равна разность между последней и предпоследней дробями?
- 19.10. Решить уравнения в целых числах
- a) $12x = 42y$;
 - b) $ax + by = 0$, где $\text{НОД}(a, b) = d$;
 - c) $2x + 3y = 1$;
 - d) $4x + 6y = 2$;
 - e) $4x + 6y = 5$;
 - f) $20x + 21y = 2021$.