179 школа, 7Б.
Листок №17

Формула Эйлера. Плоские графы

04.04 – 14.04/2018
21/16/11 з. на 5/4/3

Задача 1. Докажите, что любой граф можно нарисовать в пространстве так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин.

Определение 1. *Плоский граф* — граф, который можно нарисовать на плоскости так, что вершины будут точками, рёбра — линиями, и рёбра не будут пересекаться (нигде, кроме вершин). Нарисованный граф делит плоскость на части (одна часть неограничена), их называют *гранями* графа.

Задача 2. Какие графы задач 4, 5а листка 9 плоские? Нарисуйте, найдите число вершин, рёбер, граней.

Задача 3. (*Формула Эйлера*) Для каждого связного плоского графа с B вершинами, P рёбрами и $\varGamma$ гранями имеет место равенство: $B - P + \varGamma = 2$. Докажите это
а) для дерева; **б)** для графа с одним циклом; **в)** в общем случае.
г)* Как изменится формула, если в плоском графе будет k компонент связности?

Определение 2. Граф без кратных рёбер и петель называется *простым.*

Задача 4. Докажите для простых плоских графов: **а)** $2P \geqslant 3\varGamma$ при $\varGamma \geqslant 2$; **б)** $P \leqslant 3B - 6$ при $B \geqslant 3$.

Задача 5. С помощью задачи 4 выясните, является ли плоским полный граф с пятью вершинами?

Задача 6. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались? (*Указание:* вам снова поможет задача 4.)

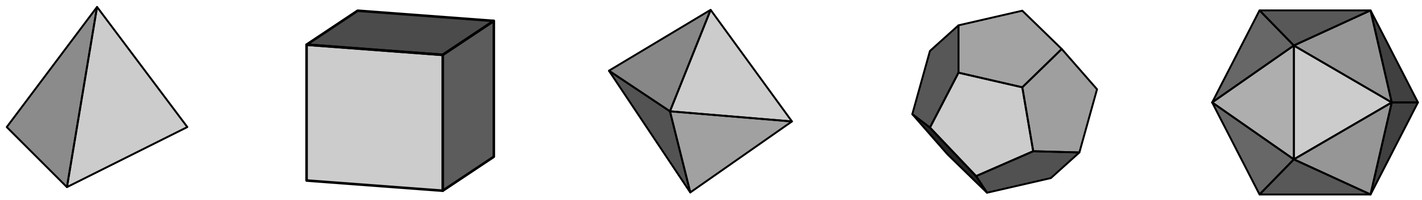
Задача 7. Пусть G — простой плоский граф. Докажите, что **а)** в G есть вершина степени меньше 6; **б)** вершины графа G можно раскрасить в 6 или менее цветов так, что никакие две вершины одного цвета не будут соединены ребром; **в)*** можно ли так же раскрасить граф не более чем в 5 цветов?

Задача 8. Внутри квадрата отметили несколько точек и соединили непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. **а)** Сколько вышло треугольников, если точек внутри 179? **б)** Докажите, что число треугольников всегда чётно.

Задача 9. Можно ли разбить какой-нибудь шестиугольник на выпуклые шестиугольники так, чтобы выполнялось условие: границы любых двух из этих шестиугольников (включая исходный) либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону?

Задача 10. Докажите формулу Эйлера **а)** для произвольного связного графа с непересекающимися рёбрами, нарисованного на сфере; **б)** для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 11. **а)** Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n+1/k = 1/2+1/r$, где r — число его рёбер. **б)** Проверьте это равенство для приведённых ниже многогранников.



Задача 12. Выпуклый многогранник называют *правильным,* если все его грани — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник комбинаторно устроен как тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр или икосаэдр (см. рис.).

Задача 13. У выпуклого многогранника все грани — правильные пятиугольники или правильные шестиугольники. **а)** Докажите, что в каждой вершине этого многогранника сходятся ровно три грани. **б)** Сколько пятиугольных граней у данного многоугольника?

Задача 14. Докажите, что связный плоский граф *эйлеров* (то есть у него ещё и степень каждой вершины чётна) если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро принадлежало границам двух граней разного цвета.

Задача 15*. На плоскости расположены n непересекающихся отрезков и $n + 2$ точки, не лежащие на этих отрезках. Докажите, что какие-то две точки «видят друг друга» (то есть если соединить эти две точки отрезком, он не пересечёт ни одного из данных n отрезков).

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14	15