Каких больше – острых или тупых?

Г.КОРБУЛОН

Как-то подбегает ко мне мой ребенок и спрашивает: каких больше – острых или тупых?!

Он имел в виду треугольники – остроугольные и тупоугольные. А в самом деле, каких треугольников на свете больше и во сколько раз? Ясно, что и тех и других можно построить бесконечно много. Несмотря на это, давайте попробуем подумать над этим вопросом.

Способ 1 (выбираем стороны). Можно считать так. Взять три отрезка случайной длины и попробовать из них сложить треугольник – для этого нужно, чтобы длина самого длинного из них была все же меньше, чем сумма двух оставшихся. Чтобы не возиться с сантиметрами и футами или парсеками с ангстремами, за единицу длины возьмем длину самого длинного отрезка. Тогда длины двух оставшихся отрезков (x и y) будут числами меньше единицы, а условие, что из этих отрезков можно сложить треугольник, запишется так: $x + y > 1$. Если отложить x и y по осям, то диагональ квадрата $x + y = 1$ (красная линия) разделит его пополам (рис. 1), т.е. в половине возможных случаев из трех случайно взятых отрезков нельзя вообще сложить треугольник.

Рис. 1

Если учесть, что у прямоугольных треугольников $x^2 + y^2 = 1$ (дуга окружности, синяя линия), получим области «острых» и «тупых» треугольников. Площадь фиолетового сегмента равна $\frac{\pi}{4} - 0{,}5 \approx 0{,}285$, а площадь зеленой области равна $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$. По площади видно, что «тупых» около 57 процентов, т.е. в 1,325 раз больше, чем «острых».

Способ 2 (выбираем углы). Но ведь можно брать не три отрезка, а три угла и собирать треугольники из них. Однако три угла должны в сумме давать π, т.е. $180°$. Итак, треугольник с углами x, y, z существует тогда и только тогда, когда $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y + z = \pi$. В координатном

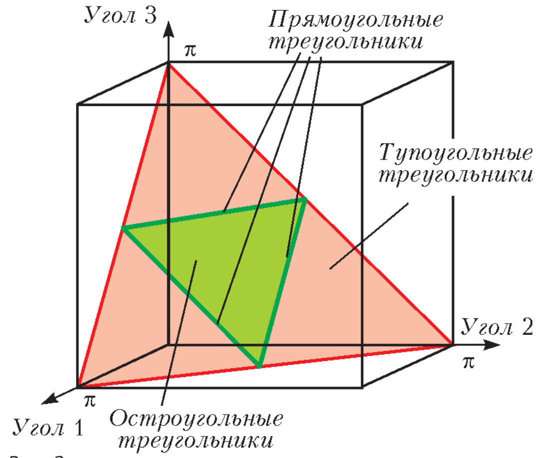

Рис. 2

пространстве эти условия задают внутренность правильного треугольника, выделенного на рисунке 2 красными линиями (это сечение первого квадранта плоскостью $x + y + z = \pi$).

Дополнительные условия остроугольности $x < \pi/2$, $y < \pi/2$, $z < \pi/2$ означают, что точка (x, y, z) попадает внутрь маленького зеленого треугольничка с вершинами в серединах красных отрезков. Тогда «тупых», как показывает рисунок, 75 процентов, т.е. в три раза больше, чем «острых».

Способ 2′ (дуги). Нарисуем окружность s. Так как любой треугольник подобен некоторому треугольнику, вписанному в эту окружность, ограничимся рассмотрением только треугольников, вписанных в s. Три случайно выбранные точки на окружности s задают треугольник. Какова вероятность, что он остроугольный?[1]

Пусть три точки делят окружность s на дуги величиной x, y и z, где $x + y + z = 2\pi$. Треугольник будет остроугольным при выполнении условий $x < \pi$, $y < \pi$, $z < \pi$. Все устроено абсолютно так же, как в предыдущей попытке в углами. Это и понятно – вписанный угол вдвое меньше меры дуги, на которую опирается.

Способ 3 (отмечаем вершины). Посмотрим на вопрос иначе. Можно зафиксировать на плоскости две из трех вершин треугольника. А третью вершину будем выбирать случайным образом и смотреть, как часто тройка вершин будет образовывать острые и тупые треугольники. Пусть

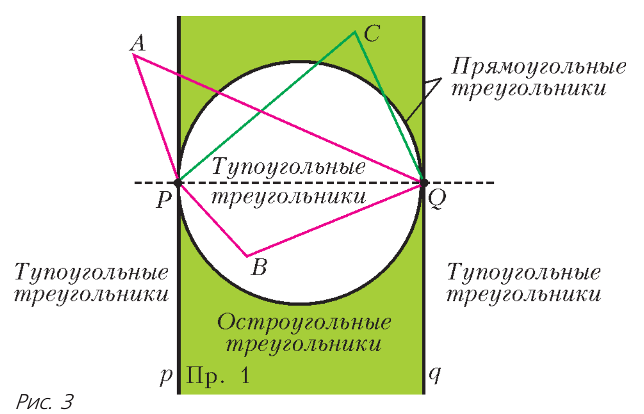

Рис. 3

[1] В такой формулировке задача рассматривалась в замечательной статье Н.Васильева «Геометрические вероятности» («Квант» №1 за 1991 г.). Там же приводятся два решения: одно идейно близкое к изложенному во второй попытке, другое – изящное, позволяющее решить и обобщение данной задачи про вписанные многоугольники, содержащие центр описанной окружности.

фиксированные точки – P и Q (рис.3). Через P и Q проведем прямые p и q, перпендикулярные прямой PQ.

Точки A, лежащие вне полосы между прямыми p и q, дадут «тупые» треугольники: угол APQ либо AQP тупой. Тот же результат получится для точек B внутри окружности, построенной на PQ как на диаметре: здесь тупым будет

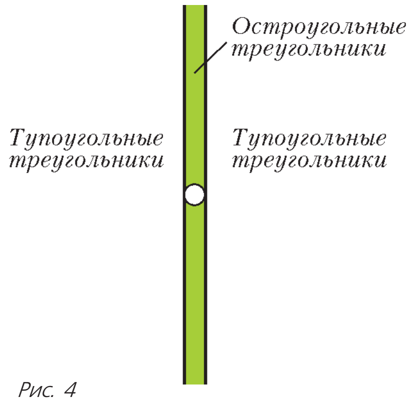

Рис. 4

угол PBQ. «Острые» же треугольники дадут только те точки (как точка C на рисунке), которые попадают в выделенную зеленым цветом область. Слева и справа от полосы, а также внутри круга, треугольники «тупые». Если посмотреть на картинку с огромного расстояния, когда зеленая область превратится в исчезающее тонкую полосочку, а слева и справа от нее все будет белым, то станет понятно, что «тупых» треугольников намного больше (рис.4). Если смущает бесконечная область для выбора третьей вершины треугольника, можно выбирать ее, например, лишь из круга большого радиуса R. При увеличении R доля «тупых» будет стремиться к 100 процентам…

Способ 4 (человеческий фактор). А теперь без математики. Просто попросим 100 человек (или все человечество) нарисовать треугольник и подсчитать, сколько из них «тупых», а сколько «острых». Нетрудно догадаться, что тут «острые» наконец-то получат преимущество. Если взять все треугольники с картинок из книг для маленьких детей, где рассказывают о разных фигурах, и из всех учебников по геометрии для старшеклассников, то кажется, что «острые» опять одерживают уверенную победу. В нашей последней попытке и правильные, и прямоугольные посоревнуются с тупоугольными (подумайте, каков был бы результат этого соревнования в первых трех попытках)!

Итак, **у нас ЧЕТЫРЕ разных ответа** (читатель может придумать и другие способы ответа на вопрос об «острых» и «тупых»). В трех попытках лидируют «тупые», правда с разным преимуществом: и на 30%, и в 3 раза, и даже в бесконечно большое число раз. Как такое могло произойти? Ведь мы, кажется, не допускали ошибок в рассуждениях? Предлагаем читателю подумать над этим вопросом, прежде чем читать приведенное ниже объяснение.

Объяснение от редакции

Один и тот же вопрос (например, вопрос, рассматриваемый в статье) может быть разными способами интерпретирован в терминах вероятности – можно строить разные *вероятностные пространства*. (Это происходит в классическом «парадоксе Бертрана» при подсчете вероятности того, что длина случайной хорды окружности единичного радиуса больше $\sqrt{3}$; см. например, упомянутую статью Н.Васильева «Геометрические вероятности» в «Кванте» №1 за 1991 г.).

Проанализируем, например, второй способ выбора треугольника. В нем негласно предполагалось, что значения углов треугольников *распределены равномерно*, т.е., скажем, вероятность выбрать треугольник с двумя меньшими углами из интервалов $(1°, 2°)$ и $(30°, 33°)$ предполагается равной вероятности выбрать треугольник с двумя меньшими углами из интервалов $(10°, 11°)$ и $(40°, 43°)$. Это условие не будет выполняться для первой и третьей попыток! И различие в ответах закономерно.

Вероятностное пространство – не просто абстракция. Оно может являться моделью для вполне конкретной практической серии испытаний. Например, закрутим волчок со стрелкой (как в игре «Что? Где? Когда?») и проведем прямую, параллельную конечному положению стрелки. Так поступим три раза, и в результате получим треугольник (почти всегда!) в пересечении трех проведенных прямых (будем избегать пересечения прямых в одной точке). Это испытание вполне соответствует модели, описанной во втором способе.

А вот третий способ, строго говоря, нереализуем. В наших рассуждениях мы неявно предполагали, что вероятность пропорциональна площади. Это значит, что вероятность для точки A попасть, скажем, в квадрат единичного размера должна быть одной и той же, где бы на плоскости ни был расположен этот квадрат. Но тогда эта вероятность не может равняться положительному числу – иначе мы разобьем плоскость на квадраты и получим, что вероятность для точки A просто оказаться на плоскости равна бесконечности – а должна равняться 1. Остается единственная возможность – вероятность попадания в любой единичный квадрат равна 0. Но тогда, аналогично, и вероятность для точки A просто оказаться на плоскости тоже равна 0 – снова противоречие. Так что надо отказываться либо от всего этого способа, либо от требования «равноправия» точек – и, например, строить вероятностное пространство так, чтобы вероятность попасть в «далекие» квадраты была меньше, чем в «ближние».

Отметим, что в четвертом способе представлена не математическая модель, а пример реальной серии испытаний. Как создать правильную модель по статистическим данным реального процесса – задача обычно сложная. Однако для практически значимых вопросов очень важно иметь правильную модель, так как она дает основания для верных выводов и прогнозов. Раздел математики, в котором решаются задачи такого сорта, называется математической статистикой.