

# Геометрическая алгебра

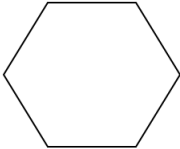
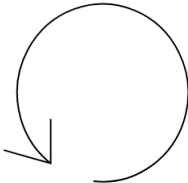
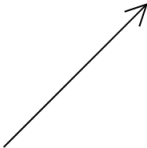
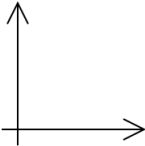
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все повороты</p>	<p>конечные группы</p>	<p>понятие группы, базиса</p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все повороты</p>	<p>конечные группы, группы типа <math>\mathbb{Z}</math> по сложению</p>	<p>число пи и арифметика остатков <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math></p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все сдвиги</p>	<p>группы типа <math>\mathbb{Z}, \mathbb{R}</math> по сложению</p>	<p>гомотетии и кольцо <math>(\mathbb{R}, +, \times)</math></p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все переносы + все повороты</p>	<p>группа типа <math>\mathbb{C}</math> по сложению, группа корней из 1</p>	<p>поворотные гомотетии и кольцо <math>(\mathbb{C}, +, \times)</math> число e</p>
<p>Евклидовы кольца</p>	<p>Норма и деление с остатком, алгоритм Евклида</p>	<p>ОТА</p>	<p>числа Гаусса и Эйзенштейна</p>

Рис. 1.1: Вехи арифметики.

## 1.1 Диэдральные группы

---

### Аннотация.

Цель: знакомство с языком алгебры.

---

#### План:

1. Группа симметрий правильного треугольника, ее таблица Кэли.
2. Группа симметрий ромба (четверная группа Клейна), ее таблица Кэли.
3. Группа симметрий правильного многоугольника (снежинки).
4. *Почему можно обойтись только одной симметрией для описания всех движений?*
5. Понятие группы  $(G, \circ)$  и подгруппы, смежные классы, порядок элемента.
6. Несколько слов о базисе группы, порождающие элементы, эквивалентные базисы.
7. Базисы  $S_3$  и  $V_4$ .

## 1.2 Движения окружности

---

### Аннотация.

Цель: разобраться с группой  $O(2)$  и ее подгруппами.

---

**Определение:** преобразование пространства (прямой/плоскости), сохраняющее размеры (попарные расстояния), называется **движением** (изометрией).

#### План:

1. Классификация движений окружности: лемма о гвоздях.
  2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция вращений и одной выделенной симметрии.
  3. Эквивалентность базисов группы движений: все вращения + одна симметрия, все симметрии.
  4. Конечные подгруппы, соответствующие диэдральным и циклическим группам.
-

5. Бесконечные подгруппы: иррациональность числа  $\pi$  и группа  $(\mathbb{Z}, +)$  (вращение на несоизмеримый с  $\pi$  угол).
6. Арифметика остатков: конечные циклические группы и факторизация  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## 1.3 Движения и гомотетии вещественной прямой

---

### Аннотация.

Цель: найти кольцо  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

---

### План:

1. Классификация движений прямой: аналог теоремы Шаля.
2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция смещений и одной выделенной симметрии (умножение на  $-1$ ).
3. Эквивалентность базисов: все сдвиги  $+$  одна симметрия, все симметрии.
4. Все сдвиги образуют группу, изоморфную  $(\mathbb{R}, +)$ .
5. Действие группы  $\mathbb{Z}$  на прямой. Понятие орбиты.
6. **Определение:** гомотетией с заданным центром и коэффициентом называется преобразование пространства (прямой/плоскости), при котором все векторы с началом в этом центре удлиняются на заданный коэффициент. Подобие на прямой — это гомотетия  $+$  сдвиг.
7. Подобия на прямой можно описать с помощью кольца  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .

## 1.4 Движения и подобия на плоскости

---

### Аннотация.

Цель: найти кольцо  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

---

### План:

1. Классификация движений плоскости: теорема Шаля.

2. Почему можно обойтись только одной симметрией? Все движения есть композиция параллельных переносов, поворотов и одного выделенного отражения (умножение на  $-1$  вдоль одной оси).
3. Эквивалентность базисов: все параллельные переносы + все повороты + одна симметрия, все отражения.
4. Все параллельные переносы образуют группу, изоморфную  $(\mathbb{C}, +)$ .
5. Формула Эйлера и число  $e$ . Группа корней из 1. Связь умножения комплексных чисел со сложением в группе вычетов.
6. Мультипликативная группа  $|z| = 1$ , ее действие на комплексной плоскости. Орбиты.
7. Подобия на плоскости — это поворотные гомотетии + параллельные переносы.
8. Подобия на плоскости описываются арифметикой кольца  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

## 1.5 Делимость в евклидовых кольцах

---

### Аннотация.

Цель: общий вывод основной теоремы арифметики и ее следствий.

---

### План:

1. Понятие кольца.
2. Понятие нормы и обратимых элементов кольца.
3. Алгоритм Евклида деления с остатком.
4. Представление НОД двух чисел в виде линейной комбинации этих чисел.
5. Основная теорема арифметики. Факториальное кольцо.
6. Приложение к кольцам: многочленов, гауссовых чисел.
7. Примеры нефакториальных колец.
8. Несколько теорем теории делимости: МТФ, РТФ,...