Листок №16 | Перечислительная комбинаторика – 3 | 07.03 – 21.03 /2018
32/27/22 з. на 5/4/3

Шары и перегородки

Задача 1. **а)** На полоске написано слово «снегопад». Сколькими способами её можно разрезать на 5 частей, если резать можно только между буквами? **б)** Сколькими способами можно раздать 8 одинаковых орехов 5-ти разным детям так, чтобы каждый что-то получил? **в)** А если можно давать орехи не всем?

Задача 2. Сколько букетов из пяти роз можно составить, если имеются розы трёх сортов?

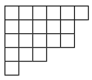
Определение 1. *Числом сочетаний с повторениями из n элементов по k* называется число способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. Обозначение: $\overline{C}_n^k$.

Задача 3. **а)** Докажите, что $\overline{C}_n^k = \overline{C}_{n-1}^k + \overline{C}_n^{k-1}$. **б)** Найдите формулу для $\overline{C}_n^k$.

Задача 4. Сколькими способами натуральное число n можно представить как сумму **а)** k натуральных; **б)** k неотрицательных целых; **в)** нескольких натуральных слагаемых? (Порядок слагаемых учитываем!)

Задача 5. Автобусный билет называется *счастливым,* если сумма первых трёх цифр его шестизначного номера равна сумме трёх последних цифр его номера. **а)** Сколько имеется последовательностей из 6 неотрицательных целых чисел с суммой 27? **б)*** Сколько существует счастливых билетов?

Диаграммы Юнга

Определение 2. Фигура типа  (из выровненных по левому краю клетчатых горизонтальных полос, длина которых невозрастает сверху вниз) называют *диаграммой Юнга*. Число клеток в ней — её *вес*.

Задача 6. Сколько существует диаграмм Юнга **а)** веса 6; **б)** веса 7, имеющих не более 3 строк; **в)** произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов?

Задача 7. Имеются 4 различных чашки, 4 одинаковых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 7 соломинок разного цвета. Сколькими способами можно разложить: **а)** соломинки по чашкам; **б)** сахар по чашкам; **в)** сахар по стаканам; **г)*** соломинки по стаканам. **д)*** Как изменятся ответы в предыдущих пунктах, если потребовать, чтобы после раскладывания пустых ёмкостей не оставалось?

Повторение и разные задачи

Задача 8. Коля и Гриша учатся в классе из 26 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Коля и Гриша не входили в команду одновременно?

Задача 9. После уроков 12 школьников хотят разделиться на две группы: одна пойдёт на футбол, а другая — на дополнительное занятие по географии. Сколькими способами они могут сделать такое разделение?

Задача 10. **а)** Сколько одночленов степени d от n переменных? **б)** В $(a+b+c)^3$ раскрыли скобки. Сколько будет одночленов и с какими коэффициентами, если не приводить подобные? А если привести?

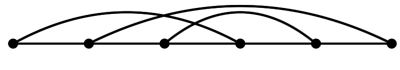
Задача 11. **а)** Сколькими способами из 15 разных цветков можно составить 3 букета: из 3, 5 и 7 цветков? **б)** Сколько есть способов дать 11 разных цветков трём девушкам: какой-то — 5, остальным — по 3?

Задача 12. На окружности отмечены 10 различных точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

Задача 13. Сколькими способами можно переставить буквы в слове `НЕПОНИМАНИЕ` так, чтобы и гласные, и согласные (по отдельности) появлялись в алфавитном порядке?

Задача 14. Между какими из множеств ниже имеется взаимно-однозначное соответствие? Постройте их явно. Сколько элементов в каждом множестве? **а)** горящие 12 лампочек на прямоугольном табло 5×4; **б)** способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам; **в)** слова, получающиеся при перестановке букв в слове `ааааааааббббббббббббб`; **г)** пути по линиям сетки в клетчатом прямоугольнике 12×8 из левого нижнего угла в правый верхний; **д)** одночлены a^8b^{12}, получающиеся, если раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные; **е)** диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

Задача 15. На прямой отмечены $2n$ точек. Разобьём их произвольно на пары, в каждой паре соединим точки дугой, как показано на рисунке. Получившийся объект назовем *дуговой диаграммой.* Сколько существует различных дуговых диаграмм на этих точках?



Задача 16. Сколькими способами на трёхмерной доске $3 \times 3 \times 3$ можно расставить 9 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга? (Ладья держит под боем свои строку, столбец и вертикаль.)

Задача 17*. Натуральные числа k и l оба меньше n. Докажите, что числа C_n^k и C_n^l не взаимно просты.

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	14 в	14 г	14 д	14 е	15	16	17