0

2 3

Задача 1 $^{\varnothing}$. Докажите, что если zw=0, то либо z=0, либо w=0.

Задача 2[©]. Докажите, что если и сумма, и произведение двух комплексных чисел вещественны, то либо оба этих числа вещественны, либо сопряжены.

Задача 3. Решите уравнения:

а)
$$z^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$$
; б) $z^2 = 5 - 12i$; в) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$; г) $\overline{z} = z^2$; д) $\overline{z} = z^3$; $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Задача 4. Пусть z и w — ненулевые различные комплексные числа. Верно ли, что точки $z, w, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}$ лежат на одной окружности?

Задача 5. Даны два комплексных числа a и b. Опишите множество таких $z \in \mathbb{C}$, что (z-a)/(z-b) —

- а) вещественное число;
- б) чисто мнимое число.
- в) Каков геометрический смысл аргумента этого числа?
- г) Докажите, что треугольники $\triangle z_1 z_2 z_3$ и $\triangle w_1 w_2 w_3$ подобны тогда и только тогда, когда простые отношения точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 равны или сопряжены.

Задача 6. Опишите геометрически преобразование плоскости, заданное формулой:

- а) $z \mapsto z + w$, где w комплексное число;
- **б)** $z \mapsto kz$, где k вещественное число;
- $\mathbf{B)} \ z \longmapsto 2z+1;$
- r) $z \longmapsto \bar{z};$
- д) $z \longmapsto e^{i\alpha}z$, где $0 \leqslant \alpha < 2\pi$;
- e) $z \mapsto wz$, где w произвольно.

Задача 7. Запишите как функцию комплексной переменной (можно использовать переменную z, комплексные числа и операции сложения, вычитания, умножения, деления, сопряжения)

- **a)** симметрию относительно оси y;
- $\mathbf{6}$) ортогональную проекцию на ось x;
- **в)** центральную симметрию с центром A;
- Γ) поворот на угол φ относительно точки A;
- д) гомотетию с коэффициентом k и центром A;
- е) скользящую симметрию относительно прямой y = 3 со сдвигом на 1 влево;
- ж) поворот, переводящий ось x в прямую y = 2x + 1;
- з) симметрию относительно прямой y = 2x + 1.

Задача 8. Карту местности положили на карту той же местности в меньшем масштабе так, что меньшая карта попала полностью внутрь большей. Докажите, что найдётся точка, которая изображает одну и ту же точку на местности в обеих картах.

Задача 9. Нарисуйте, куда отображение $z \longmapsto z^2$ переводит

- а) декартову координатную сетку;
- б) полярную координатную сетку (см. рис.);
- **в)** окружность |z + i| = 1;
- **г)** кошку (см. рис.)?
- д) (Инверсия) пункты а-в для отображения $z \longmapsto 1/\bar{z}$.

Задача 10^{\varnothing} . Докажите с помощью комплексных чисел, что

- а) композиция двух поворотов является поворотом или параллельным переносом;
- б) композиция поворота на ненулевой угол и параллельного переноса является поворотом.

	2	3 a	3	3 B	3 Г	3 Д	4	5 a	5 6	5 B	5 Г	6 a	6 6	6 B	6 Г	6 Д	6 e	7 a	7 6	7 B	7 г	7 д	7 e	7 ж	7	8	9 a	9 6	9 B	9 Г	9 Д	10 a	10 6