Определение 1. Граф задан, если задан конечный набор его вершин, и для каждой пары разных вершин известно, связаны они ребром или нет (если связаны, эти вершины называются концами этого ребра). Иногда граф удобно изображать как множество точек (вершин) на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями (рёбрами). Бывают графы с кратными рёбрами (пару вершин могут соединять несколько рёбер) и петлями (вершина может соединяться сама с собой).

**Примеры:** а) граф знакомств: вершины – школьники, рёбра – знакомства; б) карта: вершины – страны, ребра – пары стран с общим участком границы; в) города и дороги; г) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных одним ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

Задача 1<sup>©</sup>. В шахматном турнире участвовали семь школьников. Известно, что Миша сыграл 6 партий, Коля − 5, Илья и Гриша − по три, Андрей и Сева − по две, а Максим − одну. С кем сыграл Илья?

Задача 2. а) Идёт Петя, а навстречу ему 5 человек. Докажите, что среди них найдутся либо трое, знакомых с Петей, либо трое, незнакомых с Петей. б) Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых человека. в) А если есть всего 5 человек?

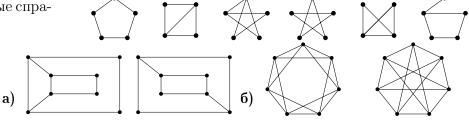
Задача 3. Выпишите в ряд цифры 0, ..., 9 так, чтобы любые две соседние давали число, кратное 7 или 13.

**Определение 2.** Два графа (без петель и кратных рёбер) называются *изоморфными* («одинаковыми»), если можно занумеровать вершины каждого графа одним и тем же набором различных номеров так, что будет выполнено условие: если две вершины в первом графе соединены ребром, то и во втором графе вершины с этими же номерами соединены ребром, и наоборот.

**Задача 4.** Разбейте графы, изображённые справа, на группы изоморфных.

**Задача 5.** Нарисуйте все неизоморфные друг другу графы с не более чем четырьмя вершинами.

Задача 6. Изоморфны ли графы:



Определение 3. Полный граф — граф, в котором каждые две разные вершины соединены одним ребром.

**Задача**  $7^{\varnothing}$ . Сколько рёбер в полном графе с n вершинами? (Такой граф обозначается  $K_n$ .)

**Задача 8.** На листе даны **a)** 178; **б)** 179 точек. Играют двое: каждый в свой ход соединяет две точки линией. Нельзя соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после чьего хода из любой точки можно пройти в любую другую по линиям (и проходя их целиком). Кто может обеспечить себе победу?

**Определение 4.** Cmenehb  $\deg V$  вершины V — число выходящих из неё рёбер (петли считаем дважды).

**Задача 9.** Сколько всего рёбер в графе **a)** ладьи; **б)** короля (на доске  $8 \times 8$ ).

Задача 10. а) Как связаны сумма степеней вершин любого графа и количество его рёбер?

б) Верно ли, что число вершин нечётной степени любого графа чётно?

**Задача 11<sup>©</sup>.** В классе 27 ребят. **а)** Докажите, что хотя бы двое из них имеют поровну друзей в классе. **6)** Ученик Ян заметил: у остальных 26-ти разное число друзей в классе. Сколько из них дружат с Яном?

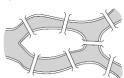
**Определение 5.** Путь (длины n) — это последовательность вершин и соединяющих соседние вершины рёбер:  $V_1, e_1, V_2, e_2, \ldots, e_n, V_{n+1}$ . Если  $V_1 = V_{n+1}$ , путь называют *циклическим*, а если и рёбра различны — *циклом*. Путь без повторяющихся рёбер — *цепь*, а без повторяющихся вершин — *простой путь*.

**Задача 12**. Турист приехал на вокзал и пошёл гулять по улицам. Докажите, что он в любой момент может вернуться на вокзал, проходя лишь те участки улиц, которые он уже прошёл нечётное число раз.

**Определение 6.** Граф называется *связным*, если каждые две его вершины соединены путём.

**Задача 13.** В графе n вершин, степень каждой не менее  $\frac{n-1}{2}$ . Докажите, что он связен.

**Задача 14.** Кёнигсберг располагался на берегах реки и 2-х островах, соединённых 7-ю мостами (см. рис.). Можно ли было там прогуляться, пройдя каждый мост ровно раз?



Задача 15. (Эйлеровы графы) Дан связный граф, степень любой его вершины чётна. Докажите, что а) в графе есть простой цикл; б) рёбра графа можно разбить на циклы (возможно, с общими вершинами, но без общих рёбер); в) условие равносильно тому, что в графе есть цикл, содержащий все рёбра.

1	2 a	2 6	2 B	3	4	5	5 a	5 6	7	8 a	8 6	9 a	9 6	10 a	10 б	11 a	11 б	12	13	14	15 a	15 б	15 B