

Геометрическая алгебра

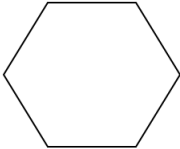
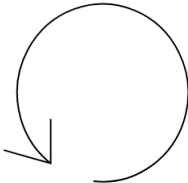
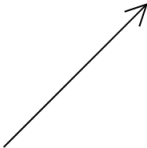
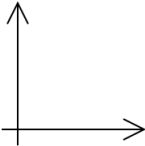
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все повороты</p>	<p>конечные группы</p>	<p>понятие группы, базиса</p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все повороты</p>	<p>конечные группы, группы типа \mathbb{Z} по сложению</p>	<p>число пи и арифметика остатков $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все сдвиги</p>	<p>группы типа \mathbb{Z}, \mathbb{R} по сложению</p>	<p>гомотетии и кольцо $(\mathbb{R}, +, \times)$</p>
	<p>Базис группы движений:</p> <p>1 симметрия + все переносы + все повороты</p>	<p>группа типа \mathbb{C} по сложению, группа корней из 1</p>	<p>поворотные гомотетии и кольцо $(\mathbb{C}, +, \times)$ число e</p>
<p>Евклидовы кольца</p>	<p>Норма и деление с остатком, алгоритм Евклида</p>	<p>ОТА</p>	<p>числа Гаусса и Эйзенштейна</p>

Рис. 1.1: Вехи арифметики.

1.1 Диэдральные группы

Аннотация.

Цель: знакомство с языком алгебры.

1.1.1 План

1. Группа симметрий правильного треугольника, ее таблица Кэли.
2. Группа симметрий ромба (четверная группа Клейна), ее таблица Кэли.
3. Группа симметрий правильного многоугольника (снежинки).
4. *Почему помимо вращений можно обойтись только одной симметрией для описания всех движений?*
5. Понятие группы (G, \circ) и подгруппы, смежные классы, порядок элемента.
6. Несколько слов о базисе группы, порождающие элементы, эквивалентные базисы.
7. Базисы S_3 и V_4 .

1.1.2 Группа симметрий правильного треугольника

Представим себе, что есть дверь и в ней замок треугольной формы (треугольник правильный). Вершины треугольника пронумерованы числами 1, 2, 3. Чтобы открыть дверь, нужно вставить в замок ключ (формы треугольной призмы) в правильном положении. Углы ключа также пронумерованы цифрами 1, 2, 3, но это не означает корректного соответствия цифрам замка. Вставить ключ можно как с одной стороны двери, так и с другой. Каковы шансы открыть дверь с первого раза?

Чтобы это описать математическим языком, рассмотрим все возможные соединения ключа и замка, которые сводятся к следующим действиям:

- а) вставить ключ так, что его бородка вертикальна,
- б) вынуть и повернуть ключ до совмещения следующих углов, снова вставить, и так далее,
- с) те же действия с другой стороны двери.

Таким образом, на треугольнике вводятся следующие элементарные операции, переводящие треугольник в себя (со сменой номеров вершин):

- id — тождественное преобразование (ничего не меняем),
- R_φ — поворот на угол φ , где $\varphi \in \{120^\circ, 240^\circ\}$,
- S_1 — симметрия относительно биссектрисы, проходящей через 1-ю вершину треугольника (верхнюю).

Итого имеем 4 преобразования. Вопрос: *могут ли быть еще какие-то преобразования и сколько их?*

Сразу же очевидно, что симметрию можно выполнять относительно двух оставшихся биссектрис, т.е. у нас добавляются симметрии S_2 и S_3 .

Теорема 1.1. *Преобразования правильного треугольника, при которых вершины переходят в вершины, а ребра в ребра с сохранением инцидентности (т.е. без разрушения треугольника), исчерпываются списком $\text{id}, R_{120}, R_{240}, S_1, S_2, S_3$.*

Доказательство. Заметим, что при указанных преобразованиях разные вершины всегда остаются разными и, кроме того, все вершины всегда переходят во все вершины (никакая не выпадает). Это значит, что всякое такое преобразование осуществляет перестановку вершин. Но все различные перестановки вершин таковы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что эти перестановки в точности соответствуют преобразованиям $\text{id}, R_{120}, R_{240}, S_1, S_2, S_3$. \square

Предполагая, что только одно положение ключа с одной стороны двери и одно — с другой стороны соответствуют открыванию замка, мы теперь можем ответить на поставленный в начале вопрос: у нас ровно 2 шанса из 6, что замок будет открыт.

Предположим теперь, что ключом пользуется сразу несколько человек (например, этот ключ весит 100 кг, поэтому приходится меняться), и каждый из них проделывает строго одно из указанных преобразований (свое любимое). Назовем этих людей «операторами». Какое преобразование получится, если два оператора подряд произведут одно из указанных преобразований?

Ясно, что ничего нового мы не получим, но мы хотим знать, сколько и каких операторов нужно, чтобы, чередуя их действия, получить все преобразования треугольника. Для этого составим таблицу Кэли (сначала выполняется преобразование в столбце, затем — в строке):

id	R_{120}	R_{240}	S_1	S_2	S_3
R_{120}	R_{240}	id	S_2	S_3	S_1
R_{240}	id	R_{120}	S_3	S_1	S_2
S_1	S_3	S_2	id	R_{240}	R_{120}
S_2	S_1	S_3	R_{120}	id	R_{240}
S_3	S_2	S_1	R_{240}	R_{120}	id

Таблица 1.1: Таблица Кэли для треугольника.

Таблица Кэли является аналогом таблицы умножения, если под умножением понимать композицию отображений, т.е. последовательное применение операторов. Заметим, что, в отличие от обычного умножения, операторы не коммутируют, т.е. результат их действий зависит от того, в каком порядке они работают. Например, $R_{120}S_1 \neq S_1R_{120}$ (таблица не симметрична относительно главной диагонали).

Раскрывая эту таблицу, мы можем получить результат последовательного применения 3-х, 4-х и т.д. операторов. При этом, мы можем заметить, что произведение трех одинаковых поворотов подряд (их третья степень) дает id, а произведение двух одинаковых симметрий подряд также дает id. Условимся последовательное применение какого-либо оператора k раз записывать как его степень.

Кроме того, можно заметить что $R_{120}^2 = R_{240}$, что уже говорит о том, что один оператор R_{240} можно заменить на степень R_{120} . Верно и обратное: $R_{240}^2 = R_{120}$. Кроме того, все симметрии можно получить как комбинации одной симметрии и поворотов: $S_2 = S_1R_{120}$, $S_3 = S_1R_{240} = S_1R_{120}^2$.

Итак, видим, что для осуществления всех видов операций поворота и симметрии треугольника нам достаточно иметь двух операторов (одного поворота и одной симметрии) и применять их в различной последовательности. Любая пара поворот-симметрия образует базис всех преобразований треугольника в себя.

При этом, невозможно уменьшить базис, т.е. невозможно ограничиться только одной симметрией или только одним или двумя поворотами. Однако, композиция двух разных симметрий дает поворот ($R_{240} = S_1S_2$), а это значит, что в качестве базисных операторов можно брать и любые две различные симметрии!

30 минут |

1.1.3 Группа симметрий ромба

Аналогично треугольнику рассмотрим ромб, не являющийся квадратом. Нетрудно видеть, что его симметриями будут следующие преобразования:

$$\text{id}, \quad R_{180}, \quad S_1, \quad S_2, \quad (1.1)$$

где S_k — симметрии относительно диагоналей ромба.

Теорема 1.2. *Списком (1.1) исчерпываются все возможные преобразования ромба (с различными диагоналями) в себя, сохраняющие фигуру (т.е. расстояния между точками).*

Доказательство. Пронумеруем вершины ромба цифрами 1,2,3,4 (1 и 3 противоположны). Предположим, что при некотором преобразовании 1 переходит в 1. В этом случае 3 не может перейти ни в 1, ни в 2 или 4, иначе произойдет потеря инцидентности - вершина 3 либо совпадет с 1, либо будет соседней. Стало быть, 3 также останется на месте. Но тогда остается ровно два преобразования: id и симметрия относительно оси 13 (обозначим ее S_1).

Очевидно также, что 1 не может перейти в 2 или 4, т.к. в противном случае расстояние 1-3 перейдет в расстояние 2-4, а это невозможно для ромба с различными диагоналями. Остается вариант перехода 1 в 3, который дает два оставшихся преобразования: поворот на 180° и симметрию относительно диагонали 24 (обозначим ее S_2).

Если провести аналогичный анализ для остальных вершин, то мы получим те же самые преобразования. \square

Отметим, что уже в случае ромба преобразований, сохраняющих его, сильно меньше, чем количество всех перестановок вершин (4 и 24).

Таблица Кэли для ромба:

id	R_{180}	S_1	S_2
R_{180}	id	S_2	S_1
S_1	S_2	id	R_{180}
S_2	S_1	R_{180}	id

Таблица 1.2: Таблица Кэли для ромб.

Легко видеть также, что и в данном случае в качестве базисных преобразований можно выбрать либо пару вращение–симметрия, либо пару из двух симметрий.

10 минут |

1.1.4 Группа симметрий правильного многоугольника

Наконец, рассмотрим еще один случай преобразований фигуры в себя (по-научному: автоморфизмов). Пусть имеется правильный n -угольник. Тогда очевидными преобразованиями, сохраняющими форму и размеры фигуры, будут:

$$R_{360k/n}, \quad S_1, \dots, S_k, \quad k = \overline{1, n}$$

В случае четного n в многоугольнике все вершины разбиваются на пары противоположных, лежащих на общей оси симметрии, поэтому имеется $n/2$ осей симметрии, проходящих через вершины, и $n/2$ осей, проходящих через середины сторон. В случае нечетного n на каждую вершину приходится своя ось симметрии.

Как и в предыдущих случаях, несложно показать, что этими $2n$ преобразованиями исчерпываются все преобразования правильного многоугольника в себя, что, как видим, сильно меньше общего числа перестановок вершин, которое равно $n!$ (совпадение получается только при $n = 3$).

Однако и в этом случае в качестве базисных можно выбрать всего два преобразования: $R_{360/n}$ и S_1 , либо две симметрии, оси которых являются соседними.

Следует заметить, что в общем случае, когда мы рассматриваем движения плоскости, в базис достаточно включать вращения и всего лишь одну симметрию, т.к. они отвечают за смену ориентации фигуры, ее переворачивание на другую сторону плоскости.

5 минут |

1.2 Движения окружности

Аннотация.

Цель: разобраться с группой $O(2)$ и ее подгруппами.

Определение: преобразование пространства (прямой/плоскости), сохраняющее размеры (попарные расстояния), называется **движением** (изометрией).

План:

1. Классификация движений окружности: лемма о гвоздях.
2. Почему помимо вращений можно обойтись только одной симметрией? Все движения есть композиция вращений и одной выделенной симметрии.

3. Эквивалентность базисов группы движений: все вращения + одна симметрия, все симметрии.
4. Конечные подгруппы, соответствующие диэдральным и циклическим группам.
5. Бесконечные подгруппы: иррациональность числа π и группа $(\mathbb{Z}, +)$ (вращение на несоизмеримый с π угол).
6. Арифметика остатков: конечные циклические группы и факторизация $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.3 Движения и гомотетии вещественной прямой

Аннотация.

Цель: найти кольцо $(\mathbb{R}, +, \times)$.

План:

1. Классификация движений прямой: аналог теоремы Шаля.
2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция смещений и одной выделенной симметрии (умножение на -1).
3. Эквивалентность базисов: все сдвиги + одна симметрия, все симметрии.
4. Все сдвиги образуют группу, изоморфную $(\mathbb{R}, +)$.
5. Действие группы \mathbb{Z} на прямой. Понятие орбиты.
6. **Определение:** гомотетией с заданным центром и коэффициентом называется преобразование пространства (прямой/плоскости), при котором все векторы с началом в этом центре удлиняются на заданный коэффициент. Подобие на прямой — это гомотетия + сдвиг.
7. Подобия на прямой можно описать с помощью кольца $(\mathbb{R}, +, \times)$.

1.4 Движения и подобия на плоскости

Аннотация.

Цель: найти кольцо $(\mathbb{C}, +, \times)$.

План:

1. Классификация движений плоскости: теорема Шаля.
2. *Почему можно обойтись только одной симметрией?* Все движения есть композиция параллельных переносов, поворотов и одного выделенного отражения (умножение на -1 вдоль одной оси).
3. Эквивалентность базисов: все параллельные переносы + все повороты + одна симметрия, все отражения.
4. Все параллельные переносы образуют группу, изоморфную $(\mathbb{C}, +)$.
5. Формула Эйлера и число e . Группа корней из 1. Связь умножения комплексных чисел со сложением в группе вычетов.
6. Мультипликативная группа $|z| = 1$, ее действие на комплексной плоскости. Орбиты.
7. Подобия на плоскости — это поворотные гомотетии + параллельные переносы.
8. Подобия на плоскости описываются арифметикой кольца $(\mathbb{C}, +, \times)$.

1.5 Делимость в евклидовых кольцах

Аннотация.

Цель: общий вывод основной теоремы арифметики и ее следствий.

План:

1. Понятие кольца.
2. Понятие нормы и обратимых элементов кольца.
3. Алгоритм Евклида деления с остатком.
4. Представление НОД двух чисел в виде линейной комбинации этих чисел.
5. Основная теорема арифметики. Факториальное кольцо.
6. Приложение к кольцам: многочленов, гауссовых чисел.
7. Примеры нефакториальных колец.
8. Несколько теорем теории делимости: МТФ, РТФ,...