Листок №9д | Фокусы с бесконечностью: геометрия | 12.2018
17/13/9 з. на 5/4/3

Задача 1. Замостите плоскость
а) квадратами, среди которых ровно два одинаковых;
б) квадратами, среди которых нет одинаковых;
в) треугольниками, среди которых нет одинаковых.

Задача 2. Можно ли покрыть плоскость
а) конечным числом полос;
б) внутренностями любого счётного набора углов;
в) конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше 360°;
г) счётным числом внутренностей парабол;
д) конечным числом внутренностей парабол?

Задача 3*. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно с различными коэффициентами подобия).

***

Задача 4. Можно ли разбить бесконечную клетчатую доску на домино так, чтобы
а) каждая линия сетки разрезала пополам бесконечно много доминошек;
б) каждая линия сетки разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

Задача 5. Клетки бесконечной клетчатой плоскости окрашены в 2 цвета. Найдётся ли бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

Задача 6. а) На клетчатой стене закрашены некоторые клетки. Известно, что ладья может подняться по закрашенным клеткам сколь угодно высоко, не наступая ни на какую клетку дважды. Верно ли, что существует бесконечный путь по закрашенным клеткам, при прохождении которого ладья не наступает повторно ни на какую клетку и поднимается сколь угодно высоко?
б) На клетчатой плоскости закрашено некоторое множество клеток. Известно, что ладья может проделать по закрашенным клеткам путь сколь угодно большой длины, не наступая ни на какую клетку дважды. Верно ли, что ладья может двигаться по закрашенным клеткам бесконечно долго так, чтобы никогда не наступить повторно ни на какую клетку?
в)* Из клетчатой плоскости вырезаны некоторые клетки. Для любого конечного набора оставшихся клеток часть плоскости можно замостить доминошками так, чтобы все клетки этого набора были покрыты доминошками. Верно ли, что тогда и всю плоскость можно замостить доминошками?

***

Задача 7. В этой задаче разрешается поворачивать фигуры, накладывать их друг на друга.
а) Существуют ли такие 100 прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть остальными 99-ю?
б) Существует ли бесконечно много таких прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть никаким конечным набором остальных?
в) Существует ли бесконечно много таких прямоугольников, что ни один из них нельзя покрыть остальными?

Задача 8. В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Всегда ли ими можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

Задача 9*. Дано бесконечно много квадратов. Всегда ли ими можно покрыть плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдется конечное число квадратов суммарной площади больше N?

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	8	9