179 школа, 7Б.
Листок №1д

Игры

09.2017

Если в задаче ничего не спрашивают, ответьте, какой игрок может всегда выигрывать, как бы ни играл другой. Играют (кроме задачи 2,б) всегда двое, ходят по очереди. Проигрывает (если не сказано иное) тот, кто не может сделать ход.

I. Симметрия.

Иногда игрок выигрывает с помощью «симметричной стратегии»: например, дублирует ход предыдущего игрока.

Задача 1. Есть 2 кучи камней: **а)** в каждой по 20; **б)** в одной — 30, в другой — 20. Двое по очереди берут любое число камней из любой кучи (но не из двух сразу). **в)** А если есть 3 кучи (или 4 кучи) по 20 камней?

Задача 2. **а)** Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы те не накладывались друг на друга. **б)** Пусть игроков трое. Докажите, что 1-й и 3-й могут сговориться и играть так, чтобы 2-й всегда проигрывал.

Задача 3. У ромашки **а)** 12; **б)** 11 лепестков. В свой ход игрок обрывает 1 или 2 рядом растущих лепестка.

Задача 4. Двое играют на доске $m \times n$. В первом столбце стоят фишки первого, а в последнем столбце стоят фишки второго. На своём ходу игрок может передвинуть свою фишку в строке вперёд, не отрывая её от доски.

II. Ответный ход и анализ с конца.

Чтобы найти выигрышную стратегию, полезно бывает сначала упростить задачу (решить для меньшей доски и т.п.).

Задача 5. На крайней правой клетке доски 1×20 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов.

Задача 6. Есть 100 слив. Двое по очереди берут по **а)** 1 или 2; **б)** 1 или 3; **в)** 1 или m; **г)** 1, 10 или 11 слив.

Задача 7. Дана полоска 1×2017. **а)** В двух; **б)** в трёх; **в)** в n самых правых клетках стоит по фишке. Игрок своим ходом переставляет одну из фишек влево на любую незанятую клетку.

Назовём позиции, начиная с которых игрок может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник, *выигрышными,* остальные — *проигрышными.* Все ходы с проигрышной позиции ведут в выигрышные, а если есть ход в проигрышную, то позиция выигрышная. Находя выигрышные и проигрышные позиции, *начиная с конца,* можно узнать, кто выиграет.

Задача 8. В коробке 300 спичек. За ход игрок берёт из коробка не более половины имеющихся в нём спичек.

Задача 9. Ферзь стоит в левом нижнем углу клетчатой доски 10×12. За один ход его можно передвинуть на любое число клеток вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх».

III. Геометрия.

Задача 10. В клетчатом квадрате 100×100 двое по очереди ставят фигурки. Первый ставит квадрат 2×2, второй — уголок из трёх клеток (так, что фигурки занимают целое число клеток и не перекрываются).

Задача 11. На клетчатой доске 2017×2017 в центре стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку на одну из соседних (по стороне) клеток, если эта клетка ранее ни разу не была занята фишкой.

Задача 12. На бесконечной доске играют в крестики-нолики. Выиграет тот, кто поставит 5 своих знаков в ряд по вертикали или горизонтали. Докажите, что при правильной игре второй **а)** не выиграет; **б)** не проиграет.

IV. Передача хода.

В этих задачах можно, не указывая стратегию, узнать, кто сможет всегда выигрывать, как бы ни играл другой.

Задача 13. Двое играют в шахматы, но делают по два хода сразу. Есть ли у второго выигрышная стратегия?

Задача 14. (*«Щёлк»*) Дана шоколадка $m \times n$. Двое по очереди выбирают любую дольку 1×1 и съедают вместе со всеми дольками, лежащими от выбранной не ниже и не левее. Съевший последнюю дольку проигрывает.

Задача 15. Написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1000$. За ход игрок вычеркивает какое-нибудь число и все его делители.

Задача 16. Фома и Ерёма делят 25 монет в $1, 2, \ldots, 25$ алтынов. За ход один выбирает монету, а другой говорит, кому её отдать. Сначала выбирает Фома, далее — тот, у кого больше алтынов, при равенстве — тот, кто и в прошлый раз. Может ли Фома играть так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерёма?

V. Разное.

Задача 17. Король за ход ставит по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход ставит нолик в любую свободную клетку. Сможет ли король поставить 100 крестиков в ряд?

Задача 18. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Нельзя ставить в соседние клетки два крестика или два нолика.

Задача 19. (*Ним*) Есть 3 кучи камней: **а)** 7, 8 и 9; **б)** любые. За ход берут любое число камней из одной кучи.

Задача 20. Выписаны через запятую числа $1, 2, \ldots, 2017$. Двое по очереди заменяют какую-нибудь запятую на $+$ или $\times$. Если после замены всех запятых результат будет чётным, выигрывает первый, иначе — второй.

Задача 21. Сначала на доске написано число $2017!$. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа любое натуральное число, которое делится не более чем на 20 разных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	3 а	3 б	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	8	9	10	11	12 а	12 б	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б	20	21