Пусть имеются две величины x и y (скажем, радиус круга и его площадь), связанные функциональной зависимостью: зная одну, можно вычислить другую. Изменим их немного $x \to x + \Delta x, y \to y + \Delta y,$ сохраняя зависимость. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (точнее, его предел, когда изменения бесконечно малы) называется производной y по x и обозначается $\frac{dy}{dx}$. Если связь задаётся функцией f, то есть y = f(x), то говорят о производной функции f g точке g и обозначают эту производную g0.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Задача 1. Пользуясь этим определением, вычислите производные функций

a)
$$f(x) = x^2$$
; 6) $f(x) = (x+3)^2$; B) $f(x) = x^2 + 3$; r) $f(x) = 1/x$; A) $f(x) = \sqrt{x}$.

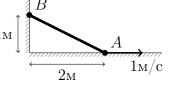
Задача 2. Заполните пробелы как в примере:

Скорость точки на прямой есть производная её (координаты) по (времени).

- **a)** Ускорение точки на прямой есть производная $\langle ... \rangle$ по $\langle ... \rangle$.
- **б)** Теплоёмкость тела есть производная его внутренней $\langle ... \rangle$ по $\langle ... \rangle$.
- в) Ток через конденсатор есть производная его $\langle \ldots \rangle$ по $\langle \ldots \rangle$.
- \mathbf{r}) Длина окружности (границы круга) есть производная $\langle \ldots \rangle$ этого круга по $\langle \ldots \rangle$.
- д) Площадь поверхности шара есть производная его $\langle ... \rangle$ по $\langle ... \rangle$.
- **e)** Тангенс угла наклона касательной к графику есть производная $\langle ... \rangle$ по $\langle ... \rangle$.

Задача 3. Ширина прямоугольника равна 2 м и растёт со скоростью 1 мм/с. Высота прямоугольника равна 1 м и растёт со скоростью 3 мм/с. Чему равны и с какой скоростью растут периметр и площадь этого прямоугольника?

Задача 4. Палка AB соскальзывает вниз по стене. Чему равна скорость точки B?



Задача 5*. Собаки находятся в вершинах квадрата со стороной 100 м и начинают бежать со скоростью 1 м/c, причём каждая всё время бежит в сторону следующей (по часовой стрелке). Когда и где они встретятся?

Задача 6*. Два корабля одновременно отходят по прямого берега. Оба движутся с постоянной по величине скоростью, но первый всё время движется перпендикулярно берегу, а второй — в направлении первого корабля. Какое расстояние будет между кораблями на бесконечности, если изначально было расстояние d?

Задача 7*. Эллипс — множество точек, для которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) фиксирована. Докажите, что любой луч, выходящий из одного фокуса эллипса и отражающийся от него по законам геометрической оптики (угол падения равен углу отражения), придёт в другой фокус. Объясните это же в терминах волновой оптики.

Задача 8*. Две черепахи выползли из A и приползли в B. Первая черепаха выползла раньше и ползла произвольным образом (с произвольной скоростью и по произвольному пути), а вторая выползла позже и всё время двигалась в направлении первой (с произвольной скоростью). Докажите, что путь ведомой черепахи не может быть длиннее пути ведущей.

Задача 9. Найдите h'(x), если **a)** h(x) = f(x) + g(x); **б)** $h(x) = f(x) \cdot g(x)$; **в)** h(x) = f(g(x)). Как записать это в традиционных обозначениях? (Скажем, в п.а) это d(u+v) = du + dv.)

Задача 10. Найдите h'(x), если **a)** h(x) = 1/g(x); **6)** h(x) = f(x)/g(x).

Задача 11. Точка X движется по единичной окружности с единичной скоростью: в момент t её координаты равны ($\cos t$, $\sin t$). Куда направлена и чему равна (какие координаты имеет) её скорость?

1 a	1 6	1 B	1 Г	1 д	2 a	2 6	2 B	2 Г	2 д	2 e	3	4	5	6	7	8	9 a	9 6	9 B	10 a	10 б	11