Листок №28

Счётные и несчётные множества

08.12 – 26.12.2018
22/18/14 з. на 5/4/3

Задача 1. **а)** Докажите, что в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество.
(*Указание:* выберите сначала первый элемент в подмножество, потом второй, …)
б) Докажите, что множество M бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 2. Равномощны ли следующие множества точек:
а) интервал и отрезок; **б)** полуокружность и прямая; **в)** интервал и прямая; **г)** два круга; **д)** окружность и треугольник; **е)** квадрат с внутренностью и плоскость; **ж)** квадрат с внутренностью и круг; **з)** отрезок и счётное объединение непересекающихся отрезков?

Задача 3. Из бесконечного множества M удалили некоторое счётное множество и получили бесконечное множество M'. Докажите, что M и M' равномощны.

Задача 4. Равномощно ли множество иррациональных чисел множеству всех действительных чисел?

Задача 5. Равномощно ли множество всех лучей множеству всех окружностей (на плоскости)?

Задача 6. Докажите, что множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1, множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество бесконечных вправо и вниз таблиц из 0 и 1 равномощны.

Задача 7. **а)** Дана бесконечная вправо и вниз таблица из 0 и 1. Покажите, как по этой таблице составить бесконечную строку из 0 и 1, которая не совпадёт ни с одной из строк таблицы.
(*Указание:* надо, чтобы новая строка отличалась от каждой строки таблицы хотя бы в одном месте.)
б) Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 *несчётно:* бесконечно, но не является счётным. (Говорят, что множества из предыдущей задачи имеют мощность *континуум).*

Задача 8. Пусть S — множество из задачи 6. Докажите, что множества S и $S \times S$ равномощны.

Задача 9. Докажите, что множество всевозможных прямых на плоскости равномощно множеству точек этой плоскости.

Задача 10. Докажите, что множество точек любого отрезка равномощно множеству
а) S задачи 6; **б)** точек квадрата с внутренностью; **в)** точек куба с внутренностью.

Задача 11. (*Теорема Кантора–Бернштейна*) Если множество A равномощно подмножеству множества B и множество B равномощно подмножеству множества A, то A и B равномощны.
(*Указание:* вам поможет задача 11 листка 27.)

Задача 12. Число $x \in (0;1)$ назовём *вычислимым,* если есть конечный алгоритм (например, программа на Питоне), который позволяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ определить n-ый знак после запятой в десятичной записи x. **а)** Докажите, что множество вычислимых чисел из интервала $(0;1)$ счётно. **б)** Выпишем десятичные записи всех вычислимых чисел в таблицу, и диагональным методом (как в задаче 7) построим вычислимое число, не входящее в таблицу. (Это можно сделать, написав программу на Питоне, которая последовательно будет перебирать программы, дающие вычислимые числа, и менять у n-го числа n-ю цифру.) Объясните это противоречие.

Задача 13*. Отрезок представлен в виде объединения двух множеств. Докажите, что одно из этих множеств равномощно отрезку. (*Указание:* отрезок равномощен квадрату с внутренностью.)

Задача 14*. Докажите, что множества задачи 6 равномощны
а) множеству взаимно однозначных соответствий между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$;
б) множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 15. Найдётся ли бесконечное количество попарно неравномощных бесконечных множеств?

Задача 16*. Пусть A — счётное множество, M — некоторое множество подмножеств A. Известно, что из любых двух элементов M один есть подмножество другого. Обязательно ли M счётно?

Интересный трудный факт. *Из любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.*

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	2 з	3	4	5	6	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б	15	16