Листок №27

Фокусы с бесконечностью: последовательности, дроби, графы

17.11 – 05.12.2018
14/10/6 з. на 5/4/3

Последовательности и бесконечные десятичные дроби

Задача 1. Число вкладчиков МегаБанка счётно, причем каждый вложил хотя бы 1 р. Докажите, что деньги можно перераспределить между вкладчиками так, чтобы у каждого стало не менее 1 000 000 р.

Задача 2. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (возможно, с предпериодом).

Задача 3. Докажите, что из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Задача 4. Можно ли в последовательности $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots$ выделить
а) бесконечно длинную; **б)** сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?

Задача 5. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

Задача 6. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что любая другая получается из неё вычёркиванием **а)** некоторого конечного числа членов; **б)** некоторых членов?

Задача 7*. Докажите, что любое действительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 8.

Задача 8*. Два джинна по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 9*. Найдётся ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно по разу и для каждого $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ сумма первых k членов последовательности делится на k?

Задача 10*. Найдутся ли такие два бесконечных подмножества A и B целых неотрицательных чисел, что каждое целое неотрицательное число однозначно представляется в виде $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$?

Бесконечные графы

Задача 11. В некой Думе **а)** конечное; **б)** бесконечное число депутатов. Каждый депутат дал пощёчину ровно одному другому депутату, причём каждый депутат получил не более одной пощёчины. Докажите, что Думу можно разбить на три палаты, внутри каждой из которых никто никого не бил.

Задача 12. Рассмотрим связный граф, в котором бесконечно много вершин, но степень каждой вершины — какое-то конечное число. Докажите, что в нём счётное число вершин.

Задача 13. Найдите ошибку в «доказательстве» леммы Кёнига (формулировку см. в задаче 14 а).
«Возьмём любую вершину A дерева. Так как дерево бесконечно и связно, можно найти простой путь любой сколь угодно большой конечной длины, идущий из A. (Ведь иначе все пути, идущие из A, имеют длину не больше какого-то числа n, но из A выходит конечное число рёбер, из их концов — тоже конечное число, и т.д. (так как степени вершин конечны), и не позже чем через n шагов мы получим всё дерево, то есть оно окажется конечным.) Но если в дереве есть простой путь длины 1, длины 2, длины 3, и т. д., то есть и простой путь бесконечной длины.» (Исправив ошибку, вы решите задачу 14 а.)

Задача 14. **а)** (*Лемма Кёнига*) Дано бесконечное дерево, в котором степень каждой вершины конечна. Докажите, что в нём есть бесконечный простой путь. **б)** А если в дереве есть вершина бесконечной степени?

Задача 15. Дан язык с конечным алфавитом (можете считать, что букв две: 0 и 1). Любая последовательность букв (конечная или бесконечная) из алфавита этого языка называется *словом*. Часть слов конечной длины в языке — *неприличные*. Слово называется *цензурным*, если в нём нет неприличных подслов. Пусть существуют сколь угодно длинные цензурные слова.
а) Докажите, что найдётся бесконечное цензурное слово.
б) Верно ли, что можно любое приличное слово продолжить до бесконечного приличного слова?
в) Верно ли, что если w и v приличные слова, то существует приличное слово, содержащее и w, и v?
г) Пусть неприличных слов конечное число. Докажите, что есть бесконечное периодическое цензурное слово.
д)* Верно ли утверждение предыдущего пункта, если неприличных слов бесконечно много?

Задача 16*. Каждое конечное слово в неком языке либо хорошее, либо нехорошее. Докажите, что в любом бесконечном слове можно откинуть несколько начальных букв так, что оставшееся бесконечное слово можно будет нарезать либо только на хорошие слова, либо только на нехорошие.

1	2	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8	9	10	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	15 а	15 б	15 в	15 г	15 д	16