Задача 1. Что больше: **а)** 2^{100} или 10^{30}; **б)** 2^{40} или 3^{25}; **в)** 31^{11} или 17^{14}; **г)** $2^{100}+3^{100}$ или 4^{100}?

Задача 2. **а)** Докажите, что $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$. **б)** Каково наименьшее значение $a+\dfrac{9}{a}$ при $a>0$?

Задача 3. Докажите, что **а)** при фиксированной сумме произведение двух чисел максимально, когда они равны; **б)** при фиксированном произведении сумма двух неотрицательных чисел минимальна, когда они равны; **в)** из прямоугольников с данным периметром наибольшая площадь у квадрата; **г)** из прямоугольников с данной площадью наименьший периметр у квадрата.

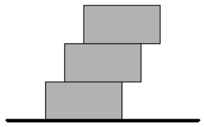
Задача 4. Докажите, что $x^{n_1}-x^{n_2}+x^{n_3}-\ldots+x^{n_{2k+1}}\geqslant 0$ при $x\geqslant 0$ и натуральных $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_{2k+1}$.

Задача 5. На отрезке длиной 1 дано n точек. **а)** Докажите, что сумма расстояний $S(x)$ от некоторой точки x отрезка до данных точек не меньше $n/2$. **б)** А для каких x из отрезка $S(x)$ минимальна?

Задача 6. Найдите первые **а)** 9; **б)** 10; **в)*** 18 знаков после запятой у числа $\sqrt{0,999\,999\,999}$.

Задача 7. **а)** Докажите, что $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}$ при любом $n\in\mathbb{N}$. **б)** *(Гармонический ряд)* Для любого ли числа C найдется такое $n\in\mathbb{N}$, что будет верно неравенство $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant C$? **в)** Тот же вопрос для неравенства $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\geqslant C$ (оно у нас было :)).

Задача 8*. Есть сколько угодно одинаковых кирпичей (прямоугольных параллелепипедов). Их кладут друг на друга со сдвигом, чтобы не падали, как на рисунке справа, получая что-то вроде крыши. Крышу какой наибольшей ширины можно так получить?



***

Задача 9. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет (5/12)% раз в месяц?

Задача 10. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных x выполнены неравенства **а)** (*неравенство Бернулли*) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$; **б)** $(1+x)^n\geqslant 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Задача 11. Укажите такое целое $n>1$, что **а)** $1,001^n>10^5$; **б)** $0,999^n<10^{-5}$.

Задача 12. Докажите, что **а)** $2^n>n$; **б)** $2^n>\frac{n(n-1)}{2}$; **в)** если $n>2000$, то $2^n\geqslant 1000n$.

Определение 1. Говорят, что неравенство верно «при всех достаточно больших n» или «при n много больше нуля», если найдётся такое k, что оно верно при всех $n>k$. Обозначение: «верно при $n\gg 0$».

Задача 13. **а)** Докажите, что $0,001n^2>100n+179$ при $n\gg 0$.
б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n>m$. Докажите, что $x^n>Cx^m$ при $x\gg 0$.
в) Докажите, что $kx^k>c_{k-1}x^{k-1}+\ldots+c_1x+c_0$ при $x\gg 0$ для любых чисел $c_{k-1},\ldots,c_0$.
г) Дан многочлен $P(x)=p_kx^k+p_{k-1}x^{k-1}+\ldots+p_1x+p_0$, где $p_k>0$. Докажите, что $P(x)>0$ при $x\gg 0$.

Задача 14. Пусть $b>1$, C любое, $k\in\mathbb{N}$. Докажите при $n\gg 0$: **а)** $b^n>C$; **б)** $b^n>Cn$; **в)** $b^n>Cn^k$.

Задача 15. Пусть надо доказать неравенство $2^n\geqslant n^{100}$ при $n\gg 0$. Запишем n в виде $n=100k+r$ (поделив n на 100 с остатком). Тогда надо доказать неравенство

$$2^r\cdot\underbrace{2^k\cdot\ldots\cdot 2^k}_{\text{100 штук}}\geqslant\underbrace{(100k+r)\cdot\ldots\cdot(100k+r)}_{\text{100 штук}}.$$

Выведите его, доказав, что $2^k>100(k+1)$ при $k\gg 0$.

Задача 16. Пусть надо доказать, что $2^{\sqrt{n}}\geqslant n^{20}$ при $n\gg 0$. Каждое n лежит между точными квадратами: $(k-1)^2\leqslant n<k^2$. Тогда достаточно доказать, что $2^{k-1}\geqslant k^{40}$ при $k\gg 0$. Сделайте это.

***

Задача 17. **а)** Пусть $q>1$ и последовательность положительных чисел (x_n) такова, что $x_{n+1}/x_n>q$ при $n\gg 0$. Докажите, что $x_n>1$ при $n\gg 0$. **б)** Останется ли верным это утверждение, если $q=1$?

Задача 18. Докажите, что для любого a неравенство $n!>a^n$ выполнено при $n\gg 0$.

Задача 19. Докажите, что $2^n>n^{50}$ при $n\gg 0$, с помощью задачи 17.

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	3 г	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	13 г	14 а	14 б	14 в	15	16	17 а	17 б	18	19