# 项目报告

项目名称	基于 C++的任意精度科学计算器						
项目简介	本项目实现了一个基于 C++的任意精度科学计算器,包括对整数和浮点数的运算,所述整数是任意精度的,可表达的值的范围仅取决于可用的内存¹;所述运算包括四则运算、乘方、阶乘、取余、条件判断等,还包括这些运算的任意复合;同时支持用户自定义变量等,功能强大,效率优良。						
小组成员	姓名	班级	联系方式(电话及邮箱)				
	倪可塑	软 1712	15641135117	nks5117@mail.dlut.edu.cn			
分享地址	https://pan.baidu.com/s/1dJVg0CHI0a022aa0N99IeA 密码: 69aj						

## 评分细则及标准

考察项目	总分	评分细则	得分
项目创意	20分	立意新颖,创意独特	
问题规模	20分	程序具有一定规模, 能解决实际问题	
技术难度	20分	图形界面友好,功能实用,注重效率	
实现程度	20分	系统设计与实现的吻合程度	
报告质量	10分	文档与图文规范,清晰展示设计思路	
视频展示	10分	生动全面展示系统的实现效果	
总分	100分		

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> 理论上可表示的整数最大值是 $(2^{30})^{\text{SIZE\_MAX}}$  - 1,其中 SIZE\_MAX 是 size\_t 类型的最大值。但由于性能的限制,在可接受的时间内能处理的数据是有限的。测试时计算过的最大整数为梅森数  $M_{44497}$ ,即  $2^{44497}$  - 1,这是第一个超过一万位的梅森素数,共有 13,395 位。

## 目 录

1	开发礼	背景		2
2	需求分	}析		2
3	总体设	}计		2
4	详细说	设计与组	实现	4
	4.1	Big]	[nt 类的设计和实现	4
		4.1.1	适用于 BigInt 的四则运算的设计和实现	4
		4.1.2	BigInt 类的格式化输入输出方法的设计和实现	6
	4.2	式的解析和处理模块的设计和实现	8	
		4.2.1	词法分析过程	9
		4.2.2	语义分析过程	9
		4.2.3	表达式的求值过程	10
5	部分	程序界	君面展示	12
6	设计	总结		13
	6.1	项目	总体完成情况	13
	6.2	技术	难点及其解决	13
	6.3		及下阶段目标	
陈	∄ <b>Α:</b>	梅森舞	数 <b>M</b> 44497 的值	14
陈	<b>∄ B:</b>	4.2.2	节调度场算法的流程图	16

## 1 开发背景

在平时的计算中,常常有高精度的大数计算的需求,但大部分常用的计算器的精度不高。以 Windows 10 自带的计算器为例,最多仅能保留 32 位有效数字,计算范围最高至 1e10000,而 C 和 C++所提供的数据类型同样只能表示有限范围的数,以整型为例,一个 32 位的无符号整数最大仅能表示 4,294,967,295,即便是 64 位的无符号整数也只能表示到 18,446,744,073,709,551,615,进行大数计算时常常会捉襟见肘。为此,设计了一个基于 C++的任意精度的科学计算器。

## 2 需求分析

大整数类的功能需求:

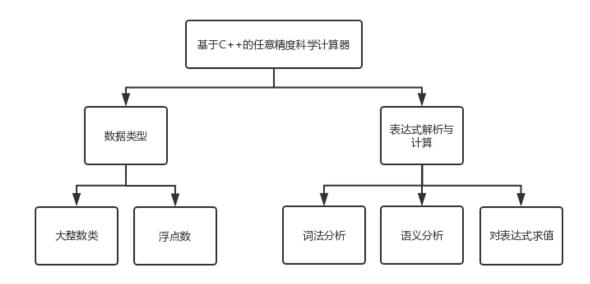
- 能表示任意精度的整数:
- 能进行加减乘除等运算;
- 能与系统内置整数类型相互转化;
- 能与给定进制字符串相互转化;
- 能进行赋值等操作;
- 通过重载各运算符,使其使用方法与内置整数类型无异;
- 能高效地完成上述各操作。

表达式分析和计算模块的功能需求:

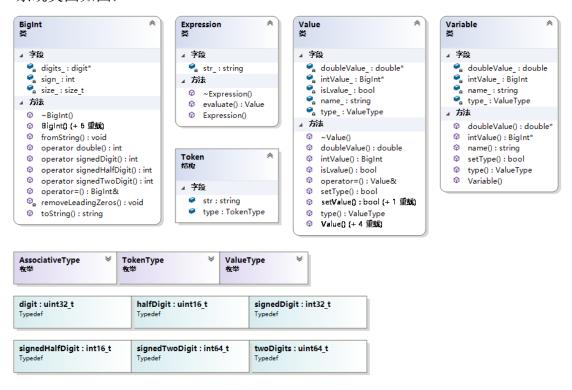
- 能对输入的表达式进行词法分析,以识别各运算符、标识符和字面量;
- 能根据运算符的优先级和结合性,判断表达式的计算顺序;
- 能根据对表达式的分析结果,对表达式求值并输出结果;
- 能识别非法的表达式,并给出相应的错误提示;
- 内置如 $e \times \pi$ 等多个可直接使用的科学常数;
- 能存储用户自定义的变量;
- 能识别不同类型的值,并根据需要进行类型转换。

## 3 总体设计

功能模块图如图:



#### 系统类图如图:



## 4 详细设计与实现

## 4.1 BigInt 类的设计和实现

BigInt 类为大整数类,为在实现存储任意大的整数的功能的同时兼顾效率,采用了 $2^{30}$ 进制来存储数据,即每"位"数字的范围是 $0\sim2^{30}-1$ 。Bigint 类使用一个数组维护各位上的数字,另用两个整数分别表示数字的位数和符号,如下:

```
digit * digits_; // pointer to array of digits, nullptr for zero
size_t size_; // digits in array, 0 for zero
int sign_; // 0 for positive or zero, 1 for negative number
```

其中,digit为uint32\_t的类型别名。

经此定义,一个 BigInt 类的对象 n 所表示的数字的绝对值为

$$\sum_{i=0}^{\text{n.size}\_-1} \text{n.digits}_{[i]} \times (2^{30})^i \ .$$

为 BigInt 类定义了各种方法,包括构造与析构、赋值、类型转换、四则运算、格式化输入和输出、关系运算等。每个方法都经过精心设计,以达到更高的效率。下面选取部分方法详细介绍其设计和实现。

#### 4.1.1 适用于 BigInt 的四则运算的设计和实现

BigInt 类重载了运算符+, -, \*, /以实现大整数的四则运算:

```
friend BigInt operator-(const BigInt &l);
friend BigInt operator+(const BigInt &l, const BigInt &r);
friend BigInt operator-(const BigInt &l, const BigInt &r);
friend BigInt operator*(const BigInt &l, const BigInt &r);
friend BigInt operator/(const BigInt &l, const BigInt &r);
```

令这些函数为 BigInt 的友元函数主要是为了左操作数可以为内置的数据类型,以实现诸如 int 和 BigInt 类型的变量互相加减的功能。

加、减、乘法的设计与列竖式计算无异,以加法为例,函数自低位起逐步取出两位数字相加,得到和和进位,再将进位加到下一位上,如此循环往复,部分代码如下:

```
digit fullAdder(digit n1, digit n2, digit carryIn, digit *carryOut)
{
  digit s = n1 + n2 + carryIn;
   *carryOut = s >> SHIFT;
  s &= MASK;
  return s;
}
```

其中,fullAdder()是全加器,返回 n1, n2, carryIn 的和,并将进位存到 carryOut 所指的变量。

减法和乘法类似,不再赘述。

BigInt 的除法是程序的难点。最初考虑使用被除数反复减去除数来求商,但这样做的效率太低。优化方案之一是逐步放大再减少每次相减的倍数,同时将除以二优化为移位操作:

```
BigInt operator/(const BigInt & l, const BigInt & r)
 // some conditional statements
 // ...
 if (r == TWO) {
   BigInt res = l;
   for (size_t i = 0; i < res.size_; i++) {</pre>
     res.digits_[i] >>= 1;
     if (i + 1 < res.size_) {</pre>
       res.digits_[i] |= res.digits_[i + 1] & static_cast<digit>(1);
   }
   res.removeLeadingZeros();
   return res;
 BigInt res = ZERO, n = abs(l), d = abs(r), step = ONE;
 while (1) {
   if (n - step * d >= ZERO) {
     n = n - step * d;
     res = res + ONE * step;
     step = step \star TWO;
   else {
     if (step == ONE) {
      break;
     }
     else {
       step /= TWO;
```

```
}
}
if (l.sign_ != r.sign_) {
  res = -res;
}
return res;
}
```

经测试,这种方案相比于每次只减去一倍的除数的方法有了很大的进步,大幅度提高了效率,但事实上,如后文所述,照此算法,程序运行时常常把绝大部分时间都花在了除法运算上,故本算法仍需要改进。

#### 4.1.2 BigInt 类的格式化输入输出方法的设计和实现

BigInt 类内部将数表示为2<sup>30</sup>进制,故需要专门的函数将其转换为十进制字符串才能输出,同样当从用户获取输入时,也需要进行转换才能够存储到 BigInt 类内。为此设计了 fromString()方法和 toString()方法。

#### 4.1.2.1 fromString()方法的设计和实现

BigInt 类的 fromString()方法能将十进制字符串转化为 BigInt 类的对象。 首先将长度为 n 的十进制字符串转换为一个 int 数组 a[n],其中每一个 int 表示十进制的一位数字,低位在前高位在后,则该字符串所代表的数字即为

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \times 10^i ,$$

计算这个和,并将其存储到 BigInt 对象中即可。

观察这个和式,对其进行如下转化:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \times 10^i = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_{n-2} \times 10^{n-2} + a_{n-1} \times 10^{n-1}$$

$$= a_{n-1} \times 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

$$= (a_{n-1} \times 10^{n-2} + a_{n-2} \times 10^{n-3} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) \times 10 + a_0$$

$$= ((a_{n-1} \times 10^{n-3} + a_{n-2} \times 10^{n-4} + \dots + a_2) \times 10 + a_1) \times 10 + a_0$$

$$\vdots$$

$$= ((\dots (a_{n-1} \times 10 + a_{n-2}) \times 10 + \dots + a_2) \times 10 + a_1) \times 10 + a_0$$

这便是所谓的秦九韶算法(西方称霍纳规则),fromString()方法使用该算法计算这个多项式的值,能大大减少所需要计算的乘法次数。具体地讲,以一般方法计算一个n次多项式,需要进行 $\frac{1}{2} \times (n^2 + n)$ 次乘法和n次加法,而采用秦九韶算法只需要n次乘法和n次加法,从而大幅提高了效率。

此外,fromString()方法首先使用 strtoll()函数尝试将字符串转换为一个 long long,如果成功,则不需要使用我们编写的方法进行处理,考虑到在实际使用过程中,用户输入的数字很可能大部分都在 long long 可以表示的范围内,这样做也可以提高效率。

fromString()方法和使用秦九韶算法对多项式求值的 polynomialEvaluate() 函数代码如下:

```
void BigInt::fromString(const string &s)
 long long num = strtoll(s.c_str(), nullptr, 10);
 if (errno != ERANGE) {
   delete[] digits_;
   digits_ = nullptr;
   *this = BigInt(num);
   return;
 vector<int> a;
 for (auto iter = s.crbegin(); iter!=s.crend(); ++iter) {
  a.push_back(*iter - '0');
 if (a.back() + '0' == '-' - '0' + '0') {
   a.pop_back();
 delete[] digits_;
 digits_ = nullptr;
 *this = polynomialEvaluate(a, 10);
 return;
// use Qin Jiushao's Algorithm
BigInt polynomialEvaluate(const std::vector<int>& a, int n)
 BigInt r, x(n);
 for (auto iter = a.crbegin(); iter != a.crend(); ++iter) {
   r = BigInt(*iter) + x * r;
 }
 return r;
```

经测试, fromString()方法和 polynomialEvaluate()函数均可良好地工作。

#### 4.1.2.2 toString()方法的设计和实现

BigInt 类的 toString()方法能将 BigInt 内存储的数字转换为对应的十进制字符串,原理为反复对十取余并除以十。鉴于将进行取余运算时需要先进行除法运算,

一个常数级别的优化是将前述的除法运算的中间结果存储起来,以节省一半的除法计算量,代码如下:

```
std::string BigInt::toString() const
{
   if (*this == ZERO) {
      return "0";
   }
   std::string str;
   auto cpy = abs(*this);
   while (cpy > ZERO) {
      auto tem = cpy / TEN;
      str += static_cast<char>('0' + static_cast<int>(cpy - tem * TEN));
      cpy = tem;
   }
   if (this->sign_ == 1) {
      str += '-';
   }
   return std::string(str.rbegin(), str.rend());
}
```

需要注意的是,toString()方法进行了大量的除法运算,尤其是当数很大时,用十除的操作本身就较为耗费时间,这也导致了程序在输出结果时所耗时间很长。举例来讲,我们曾于 2018 年 8 月 14 日在测试版的系统上计算2<sup>44497</sup> – 1,计算这个幂的过程本身仅消耗 0.15s,然而将结果转化为十进制输出却消耗了 12,193s 的时间,这是难以接受的。为此,不仅要对除法算法进行改进,还要对 toString()方法进行改进。

## 4.2 表达式的解析和处理模块的设计和实现

为处理输入的表达式,设计了一个表达式类 Expression, Expression 类的设计较为简单,仅使用一个 string 存储字符串形式的表达式,使用 evaluate()方法对表达式求值:

```
class Expression {
private:
   std::string str_;
public:
   Expression(const std::string &str) :str_(str) {};
   ~Expression() {};
   Value evaluate();
};
```

evaluate()方法是解析并处理表达式的核心,对输入的表达式,evaluate()方法首先进行词法分析,识别各标识符、字面量和运算符,将字符串转化为记号(token)串。此后对记号串进行语义分析,根据各运算符的优先级和结合性确定计算顺序,接着对表达式求值,并根据需要输出结果。

#### 4. 2. 1 词法分析过程

最初的表达式是一个字符串,这个字符串中的每个字符,有的是字面量或标识符,有的是运算符,还有的是上述三种的一部分。字面量、标识符和运算符统称为记号(token),词法分析过程便是将字符串转换为记号串的过程。

为此,首先设计了一个结构 Token,这样每个记号就都可用一个 Token 类型的变量表示,方便统一处理:

```
struct Token {
  std::string str;
  TokenType type;
};
```

其中, str 存储记号的字符串形式(如"+", "123", "abc"等), type 存储记号的 类型。TokenType 是枚举类型,为每种记号指定了一个整数。

将字符串转换为记号串的过程是通过 getTokenStream()函数实现的:

```
vector<Token> getTokenStream(const string & s)
{
  vector<Token> r;
  string t = removeBlank(s);
  for (size_t i = 0; i < t.size();) {
    r.push_back(getToken(t, i));
    i += r.back().str.size();
  }
  return r;
}</pre>
```

getTokenStream()函数首先移除字符串 s 的空格,接着反复从字符串中读取并存储下一个记号,以完成词法分析过程。

getToken()函数原型如下:

```
Token getToken(const std::string & s, size_t i);
```

其中, s 是字符串, getToken()识别并返回以 s[i]为起始的一个记号。

#### 4. 2. 2 语义分析过程

由于程序一次只处理用户输入的一行表达式,故不需要语法分析过程,直接对表达式进行语义分析即可。

语义分析主要解析表达式的含义,并检查用户输入的表达式是否有语法上的错误, 比如括号不匹配、操作数类型不匹配、运算符过多等。部分错误直到真正对表达式开始 求值时才能发现,我们的语义分析过程主要检查括号不匹配的错误,同时根据运算符的 优先级和结合性确定表达式的求值顺序。 为此,语义分析过程使用 infixToPostfix()函数将记号串由中缀记法转换为后缀记法,即操作数在前,运算符在后的形式,如"3 + 4 × (2 - 1)"将被转换成"3 4 2 1 - × +"。这种记法不需要括号来注明运算顺序,便于编写求值算法:

```
vector<Token> infixToPostfix(const vector<Token>& a);
```

infixToPostfix()函数使用调度场算法(Shunting Yard Algorithm)完成转换,该算法的流程图见附录 B。

#### 4.2.3 表达式的求值过程

一个表达式的值,可能是一个整数(BigInt),也可能是一个浮点数(double);可能是左值(如用户自定义的变量等),也可能是右值(如字面量等)。故设计了一个类 Value 来作为值的统一表示:

```
enum ValueType {
 V_BIGINT, V_DOUBLE, V_NA
class Value {
private:
 ValueType type_;
 BigInt *intValue_;
 double *doubleValue_;
 bool isLvalue_;
public:
 Value(ValueType type = V_NA, BigInt *intValue = nullptr,
       double *doubleValue = nullptr, bool isLvalue = false);
 Value(const BigInt &n);
 Value(const double &n);
 Value(const bool &n);
 Value(const Value &n);
 ~Value();
 Value & operator = (const Value &n);
 ValueType type() const;
 BigInt intValue() const;
 double doubleValue() const;
 bool isLvalue() const;
 bool setValue(const BigInt &n);
 bool setValue(const double &n);
};
Value toValue(const Token &n);
```

此外,对于各种运算符,都应有相应的函数,这些函数的参数和返回值的类型都是 Value:

```
Value factorial(const Value &n);
Value power(const Value &lhs, const Value &rhs);
Value assign(Value &lhs, const Value &rhs);
Value plus(const Value &lhs, const Value &rhs);
```

```
Value comma(const Value &lhs, const Value &rhs);
// ...
```

做好这些准备后,就可以开始编写对表达式求值的代码了。对已经转换为后缀记法的表达式求值较为简单,伪代码如下:

```
while 记号串非空
 读入下一个记号,记为X
 if X是一个操作数
  X入栈
 else // X是一个运算符
  确定X需要n个操作数
  if 栈中操作数不足n个
    (出错) 用户没有输入足够的操作数
  else
   n个操作数出栈
   计算运算符
   将结果入栈
if 栈内只有一个值
 将该值作为结果返回
else // 栈内多于一个值
 (出错) 用户输入了过多的操作数
```

以上就是表达式求值的全过程。

## 5 部分程序界面展示

此处展示的是于 2018 年 8 月 24 日编译的 1.3.1 版程序,运行于 Windows 系统。

```
MyCalc v1.3.1
[Type "exit" to exit]
$ 1+1
ans =
$ (1+5*(45+3*(5+59*6/3))^4321)%1000000000
ans =
      201592321
$ (2^44497-1)%100000000000000000000000
ans =
      844867686961011228671
$ a=2^1279-1;
$ a>205!
ans =
$ a-205!
ans =
      -261433802762527950471329738615494560554436484014615254726038016838321332
1689831665599561170931859217822600622784102810504378576272273629163241803298236
9891777206408605179303801978933005027273310856030680488663274487917024068157005
6176367394208417373866229510967004111827816144945601981403095918089782088479761
129318877338294986207464133667041971121949130263813099285279289444296831270913
$ a=2, b = 63, c=a*5, d=41;
$ avg=(a+b+c+d)/4
ans =
      29
$ var=((a-avg)*(a-avg)+(b-avg)*(b-avg)+(c-avg)*(c-avg)+(d-avg)*(d-avg))/4
```

## 6 设计总结

#### 6.1 项目总体完成情况

本项目创意产生自小学期,立意新颖,创意独特;问题规模大,自立项至本报告的完成共历时约一个月,以 1.3.1 版为例,共有超过 1,600 行代码,实现了强大的任意精度科学计算的功能,程序具有一定规模,能解决实际问题;技术难度高,界面经精心设计,格式美观,程序功能强大,采取多种方法对算法进行优化,界面友好,功能实用,注重效率;实现程度好,基本实现了系统设计时的各个需求,系统设计与实现的吻合程度高;本报告逻辑清晰,图表规范,排版美观,语言简练,文档与图文规范,清晰展示设计思路;随附视频经精心剪辑,生动全面展示了系统的实现效果。

#### 6.2 技术难点及其解决

本项目的技术难点之一是大整数类的实现。为此查阅了各种资料,阅读了包括 CPython等在内的众多开源项目对任意精度整数的实现代码,学习了包括秦九韶算法在 内的各种算法以提升效率。

此外,对内存的管理也是难点,首先是要小心处理分配的内存,确保其在合适的地方释放,否则极易造成内存泄漏;另一方面更要时刻注意指针是否有效,避免访问或释放已被释放的内存。在项目的编写过程中曾在内存管理的问题上导致很多 bug,举例来讲,在测试刚编写 fromString()完成的方法时,发现其只能正常工作一次,第二次调用该方法就会出现问题。通过漫长的单步调试发现问题出在当 digits\_在 fromString()内被释放后,其会在下一行的赋值操作时再一次被释放。由于测试代码中第一次调用fromString()时该 BigInt 对象是使用默认构造函数初始化为零的,其digits\_为nullptr,就导致释放两次没有问题,而第二次调用 fromString()时 digits\_已经不是空指针了,于是当赋值操作尝试释放一个已经释放的指针就会出错。

#### 6.3 不足及下阶段目标

对于错误处理,现阶段的程序表现不好,当遇到诸如表达式括号不匹配等的错误时,程序能给出正确的提示,但不能继续运行,计划下一步尝试使用异常机制完善错误提示和处理功能。

对于程序的效率,在大整数除法等方面也需要进一步提高。

最后,虽然经过力求完善的设计,但由于时间紧,程序仍存在一些待修复的 bug。

## 附录 A: 梅森数 M44497 的值

形如 $2^n$  – 1的数被称为梅森数,记为 $M_n$ 。如果一个梅森数为素数,那么称它为梅森素数。当n为合数时, $M_n$ 一定为合数;但当n为素数时, $M_n$ 不一定均为素数。对于梅森素数的探寻难度极大,人类目前为止仅发现 50 个梅森素数,第五十个梅森素数 $M_{77232917}$ 是于 2017 年 12 月 26 日被发现的,这个超大素数共有 23,249,425 位数,如果全部打印出来需要一本 700 多页的书。

在编写本项目的过程中,我们也使用本系统计算了一些梅森素数的值,以测试系统能否给出正确的结果,以及测试系统的计算效率。在测试时计算过的最大的数为 $M_{44497}$ ,这是第 27 个梅森素数,也是第一个位数超过一万的梅森素数,共有 13,395 位,最初是在 1979 年 4 月由美国克雷公司计算机专家史洛温斯使用 Cray-1 型超级计算机花费一个半月的时间发现的,在 3 年内为当时已知的最大素数。如前所述,测试时本系统计算并输出这个结果共耗时约 3 小时 20 分钟,其中计算这个值本身耗时不足 1s,将结果转化为十进制并输出花费了绝大部分时间。

除了 $M_{44497}$ ,我们还使用了较小的梅森素数如 $M_{1279}$ (共 386 位)、 $M_{4423}$ (共 1,332 位)、 $M_{11213}$ (共 3,376 位)和 $M_{21701}$ (共 6,533 位)等进行了测试,程序计算并输出这些结果分别耗时约 3s、40s、360s 和 1830s。这些测试的成功意味着我们的程序能够在可接受的时间内处理大至数千位的大整数,在现实中具有很好的实用性。

作为证明,下面给出使用本项目计算得到的M44497的结果:

附录 B: 4.2.2 节调度场算法的流程图

