Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

>load geometry

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang

koordinat

setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r

plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"

plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d

plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d

plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"

plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.

ax+by=c.

lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v

getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g

getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g

getPointOnLine(g): titik pada garis g

perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g

parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g

lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h

projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g

distance(A, B): jarak titik A dan B

distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B

quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B

areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC

computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC

angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC

circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r

getCircleCenter(c): pusat lingkaran c

getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c

circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C

middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB

lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c

circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2

planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan

y dengan titik A pada

sisi positif (kanan/atas) garis

quad(A,B): kuadrat jarak AB

spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)ˆ2 dengan

alpha sudut yang menghadap sisi a.

crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.

triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga

doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)ˆ2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5): // mendefinisikan bidang koordinat baru

Menggambar titik dan ruas garis

Sekarang tetapkan tiga titik dan gambarkan plotnya.

>A=[1,0]; plotPoint(A,“A”): // definisi dan gambar tiga titik

>B=[0,1]; plotPoint(B,“B”):

>C=[2,2]; plotPoint(C,“C”):

Lalu tiga segmen.

>plotSegment(A,B,“c”);

>plotSegment(B,C,“a”); // a=BC

>plotSegment(A,C,“b”): // b=AC

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garisnya adalah [a,b,c] yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

Menggambar garis yang melalui 2 titik

>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C

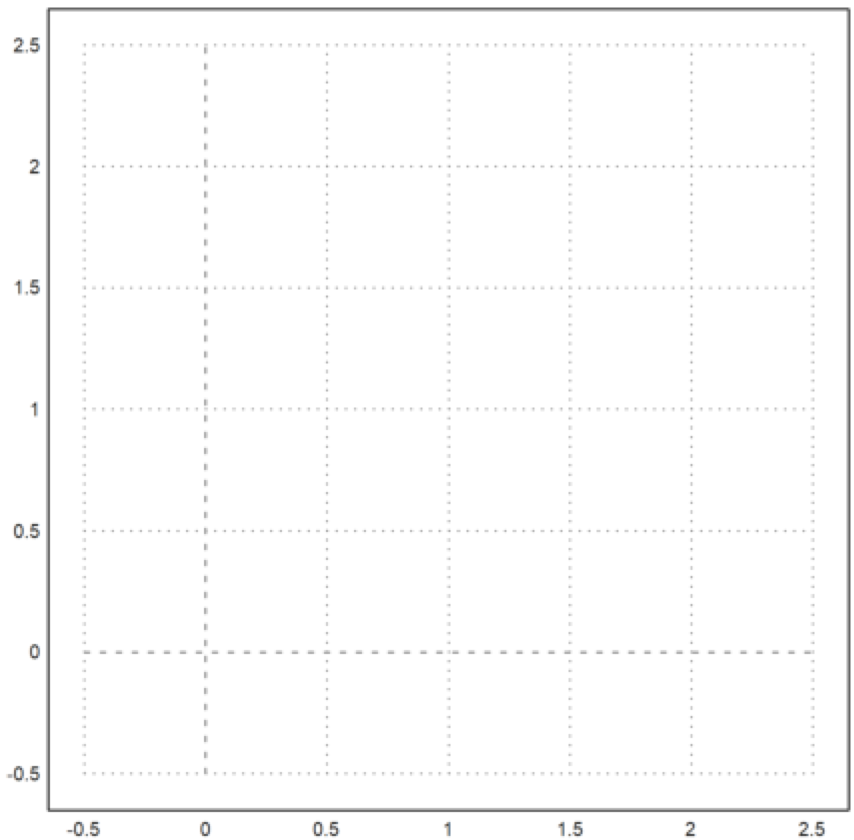

Figure 1: images-001.png

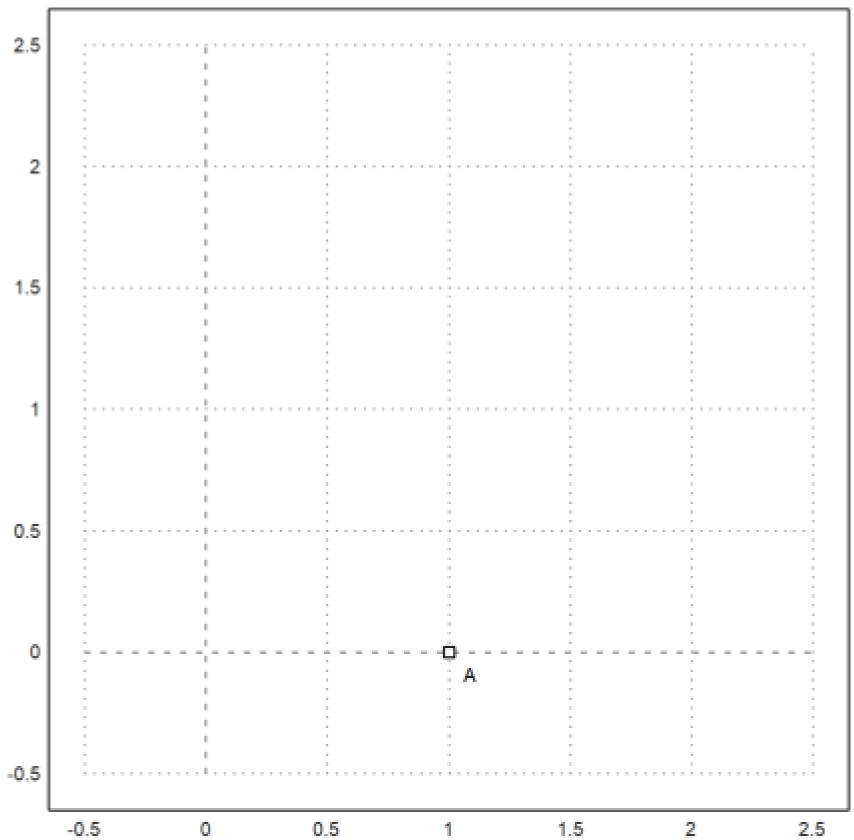

Figure 2: images-002.png

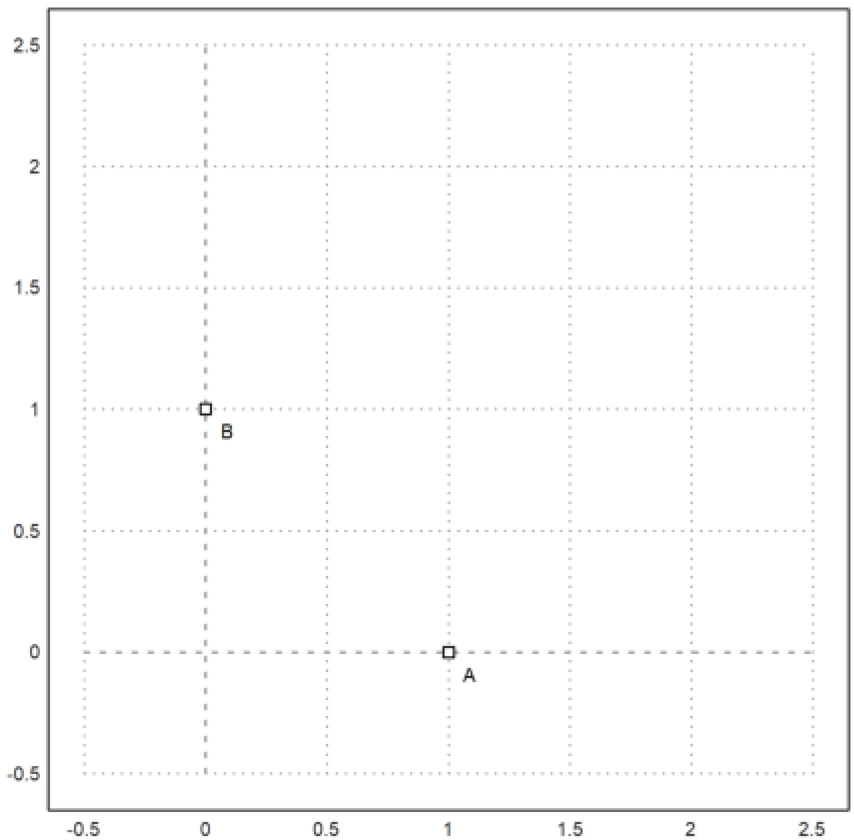

Figure 3: images-003.png

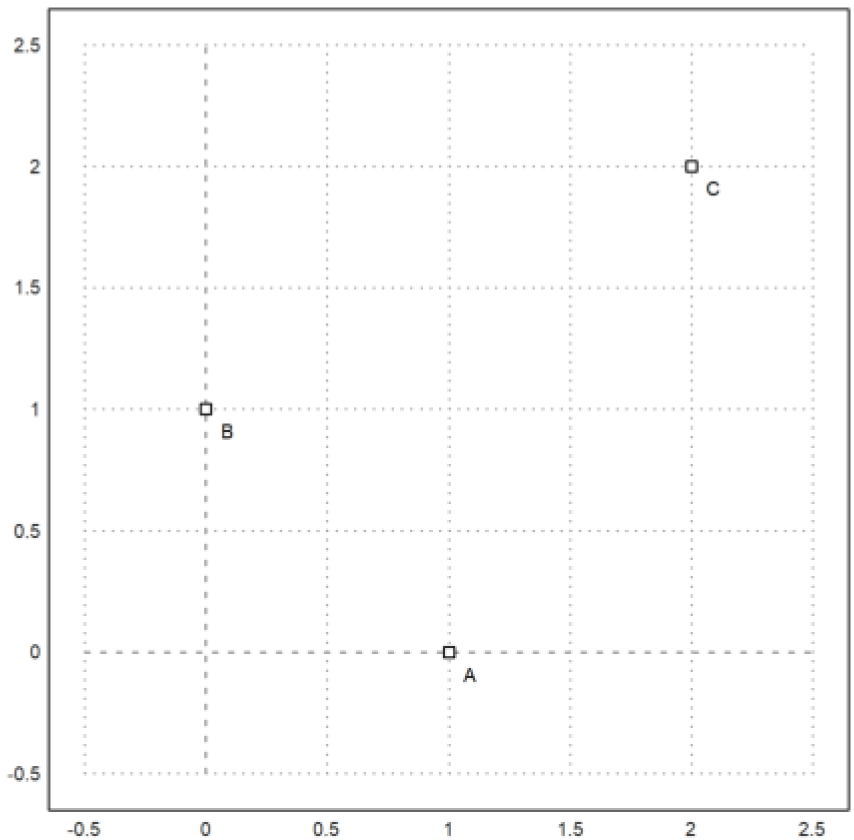

Figure 4: images-004.png

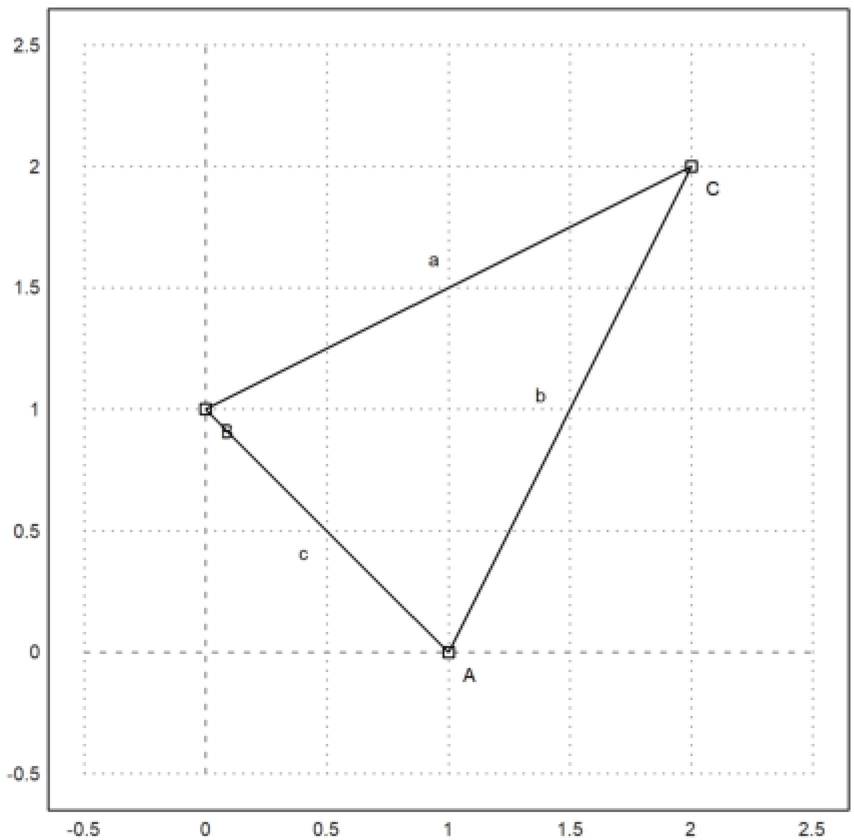

Figure 5: images-005.png

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A di BC.

>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A

Dan persimpangannya dengan BC.

Menggambar titik potong

>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC

Buat plotnya.

>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan

>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot. . . ()

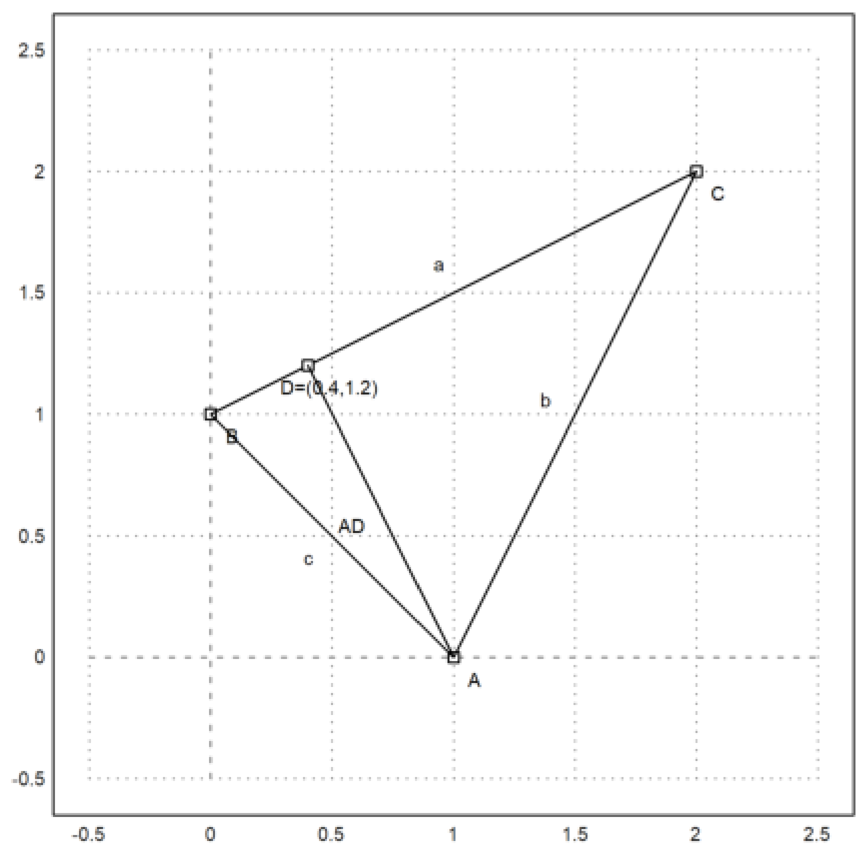

Figure 6: images-006.png

Menghitung luas segitiga ABC

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan dari 3 titik yang sudah diketahui, yaitu A(1,0), B(0,1), C(2,2), dengan rumus:

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

>distance(A,D)*distance(B,C)/2

```
1.5
```

Menentukan besar sudut

Sudut di C.

>degprint(computeAngle(B,C,A))

```
36°52'11.63''
```

Menggambar lingkaran luar segitiga

>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC

>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar

>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c

>plotPoint(O,“O”); // gambar titik “O”

>plotCircle(c,“Lingkaran luar segitiga ABC”):

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

>O, R

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

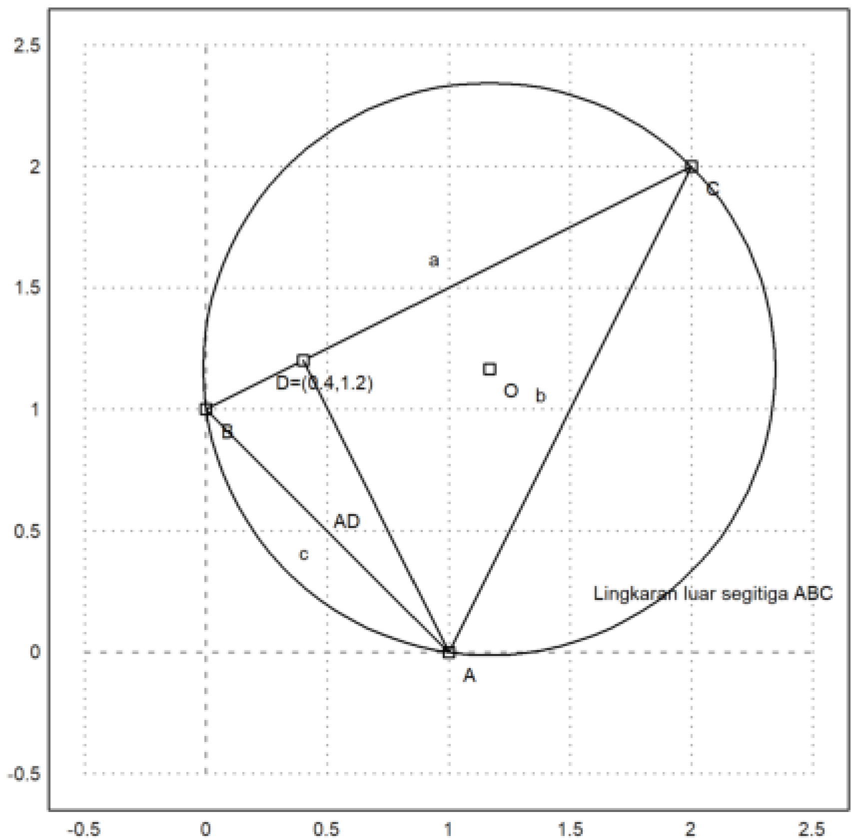

Figure 7: images-009.png

Menggambar lingkaran dalam segitiga

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
```

```
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
```

```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
```

```
>plotPoint(P,“P”); // gambar titik potongnya
```

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>S= circleWithCenter(P,r), “Lingkaran dalam segitiga ABC”;
```

```
[0.86038,  0.86038,  0.509654]
```

```
>plotCircle(S): // gambar lingkaran dalam
```

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);
```

```
>A=[-2,1]; plotPoint(A,“A”);
```

```
>B=[1,-2]; plotPoint(B,“B”);
```

```
>C=[4,4]; plotPoint(C,“C”);
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

```
>plotSegment(A,B,“c”)
```

```
>plotSegment(B,C,“a”)
```

```
>plotSegment(A,C,“b”)
```

```
>aspect(1):
```

Dapat dilihat bahwa segitiga tersebut adalah segitiga sama kaki.

3. Hitung luas segitiga tersebut.

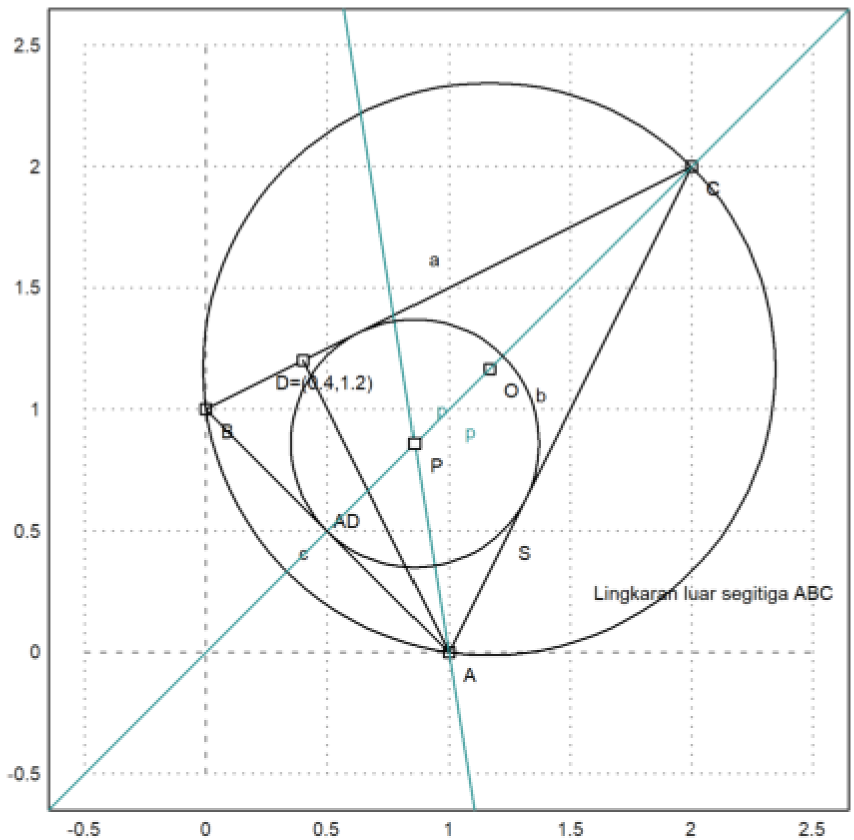

Figure 8: images-010.png

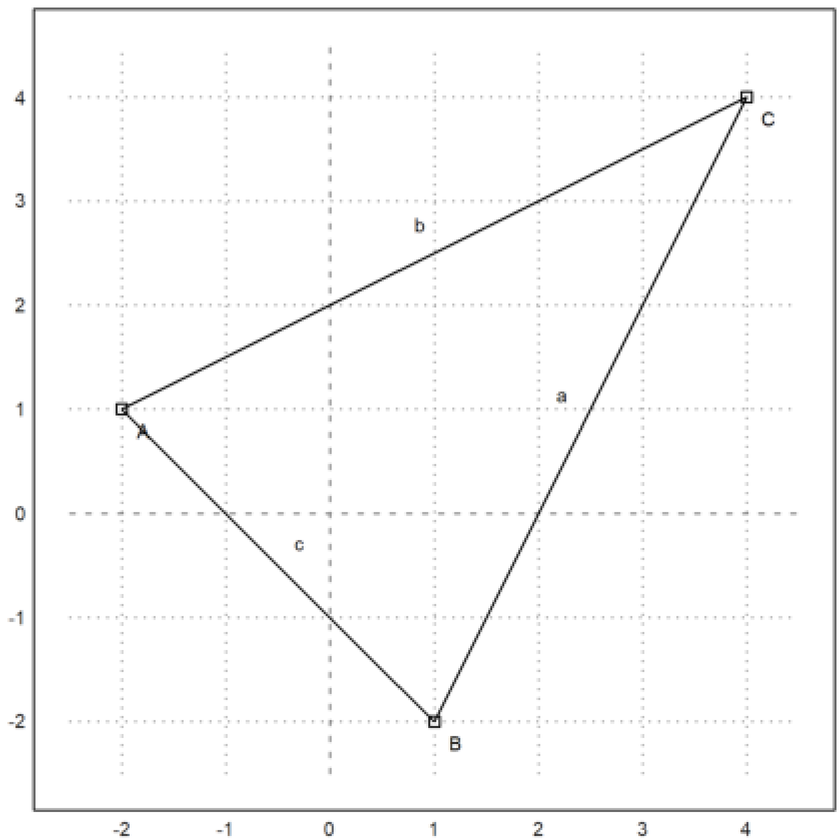

Figure 9: images-011.png

>areaTriangle(A,B,C)

```
13.5
```

4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

>l=angleBisector(A,C,B);

>g=angleBisector(C,A,B);

>P=lineIntersection(l,g)

```
[0.581139,  0.581139]
```

>color(3); plotLine(l); plotLine(g); color(1);

>plotPoint(P,“P”);

>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))

```
1.52896119631
```

>plotCircle(circleWithCenter(P,r),“Lingkaran dalam segitiga ABC”):

Terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))

```
1.52896119631
```

>plotCircle(circleWithCenter(P,r),“Lingkaran dalam segitiga ABC”):

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Luas lingkaran luar

>C=pi*(Rˆ2)

```
4.36332312999
```

Luas lingkaran dalam

>c=pi*(rˆ2)

```
7.34417132895
```

Luas segitiga ABC

>areaTriangle(A,B,C)

```
14.58996939
```

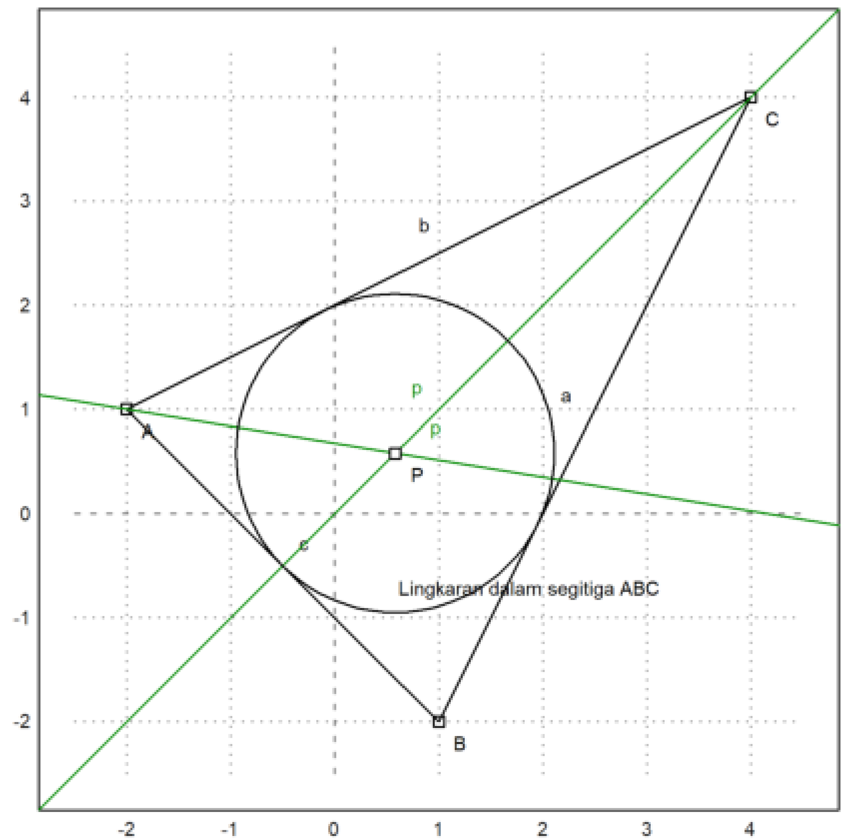

Figure 10: images-012.png

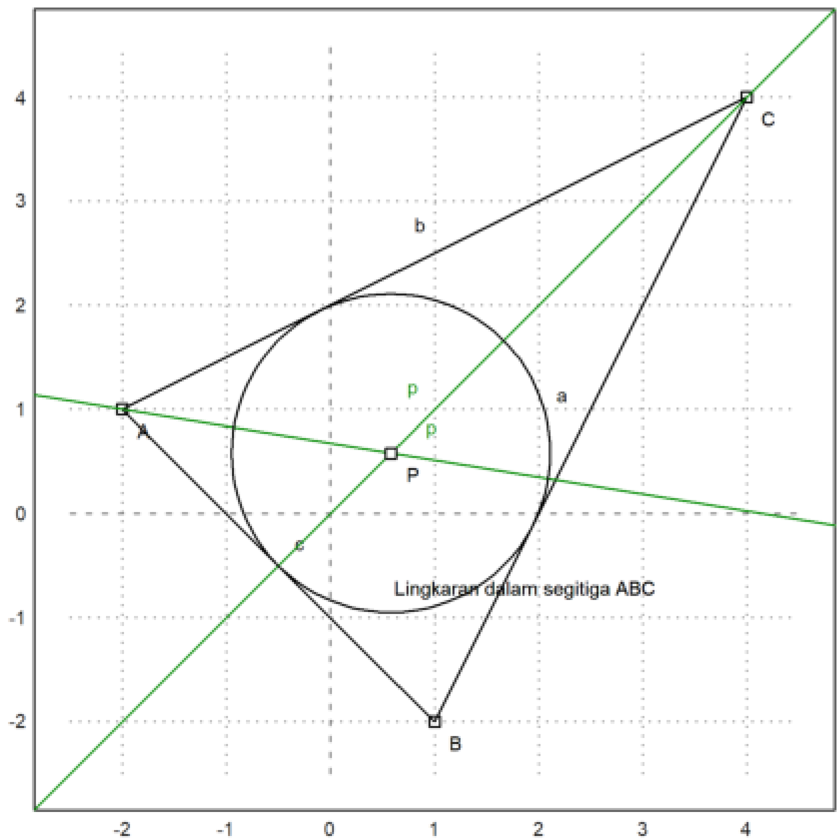

Figure 11: images-013.png

Kesimpulan:

-Luas lingkaran dalam dan luar bergantung pada ukuran segitiga dan posisi titik pusat lingkaran.

- Tidak ada rumus tunggal yang menghubungkan ketiga luas tersebut secara langsung.

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, sekarang kita dapat menggunakan perhitungan simbolik.

Menentukan persamaan garis yang melalui 2 titik

>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C

Fungsi garis dan lingkaran berfungsi sama seperti fungsi Euler, namun menyediakan komputasi simbolik.

>c &= lineThrough(B,C) // c=BC

```
[- 1, 2, 2]
```

Mencari persamaan garis

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y2)

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

Mencari garis yang tegak lurus BC dan melalui titik A

>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC

```
[2, 1, 2]
```

Mencari titik potong garis h dengan garis BC

>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h

```
 2  6
[-, -]
 5  5
```

>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

Mencari panjang garis AD

>$distance(A,Q) // jarak AQ

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Menentukan titik pusat dan jari-jari

>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right]$$

>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari

$$1.178511301977579$$

1.178511301977579

Mencari nilai sudut ACB

>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

Mencari persamaan garis bagi dan titik potong sudut ACB

>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB

$$y = x$$

Mencari titik potong 2 garis tersebut

>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi sudut

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya

```
[0.86038,  0.86038]
```

Perpotongan Garis dan Lingkaran

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);

>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);

>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l,“l”); plotPoint(A,“A”); plotPoint (B,“B”), plotPoint (C,“C”):

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

Mencari titik koordinat P1 dan P2 dalam (x,y)

>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);

>P1, P2, f

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

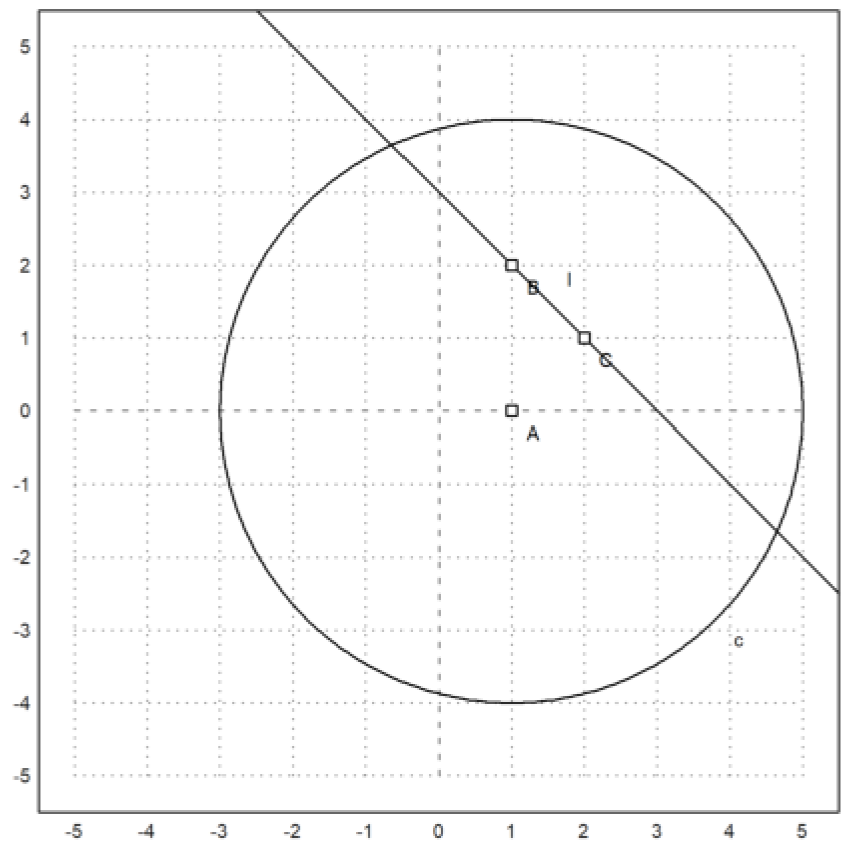

Figure 12: images-027.png

>plotPoint(P1); plotPoint(P2):

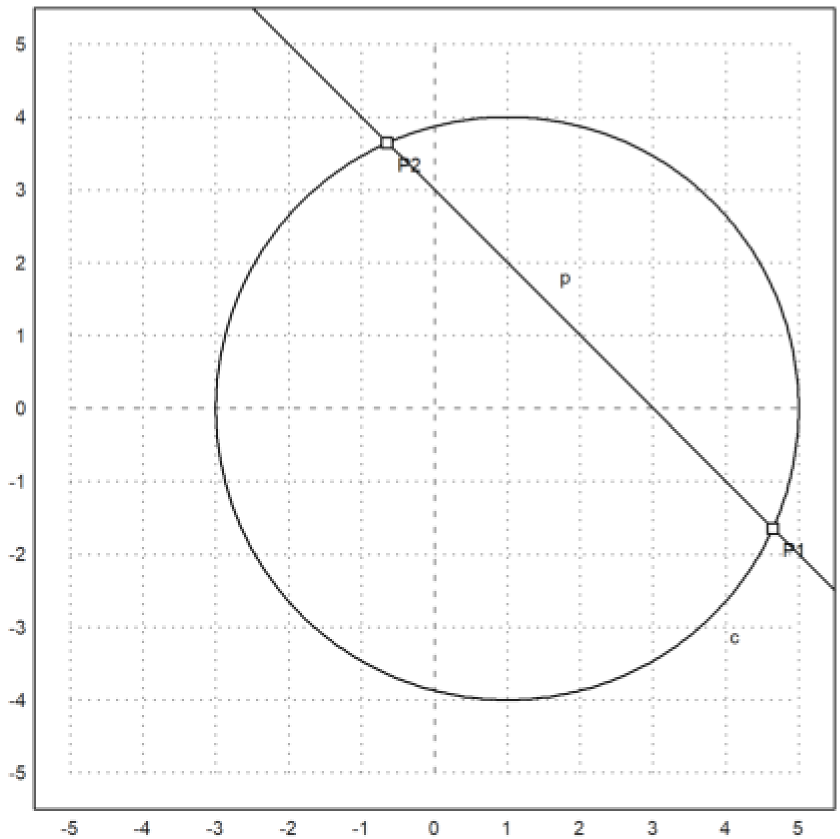

Figure 13: images-028.png

Hal yang sama di Maxima.

Menampilkan titik pusat dan jari-jari

>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4

```
[1, 0, 4]
```

Menampilkan persamaan garis l yang melalui garis BC

>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C

```
[1, 1, 3]
```

Mencari titik potong antara sebuah garis l dan sebuah lingkaran c

>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l

$$\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

```
69°17'42.68''
```

>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

```
69°17'42.68''
```

>insimg;

Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

Definisikan titik A dan titik B

>A=[2,2]; B=[-1,-2];

Membuat lingkaran C1 dan C2

>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));

>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));

Mencari titik potong antara dua lingkaran

>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);

Garis yang melalui P1 dan P2

>l=lineThrough(P1,P2);

Mengatur rentang, titik, dan membuat plot lingkaran

>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);

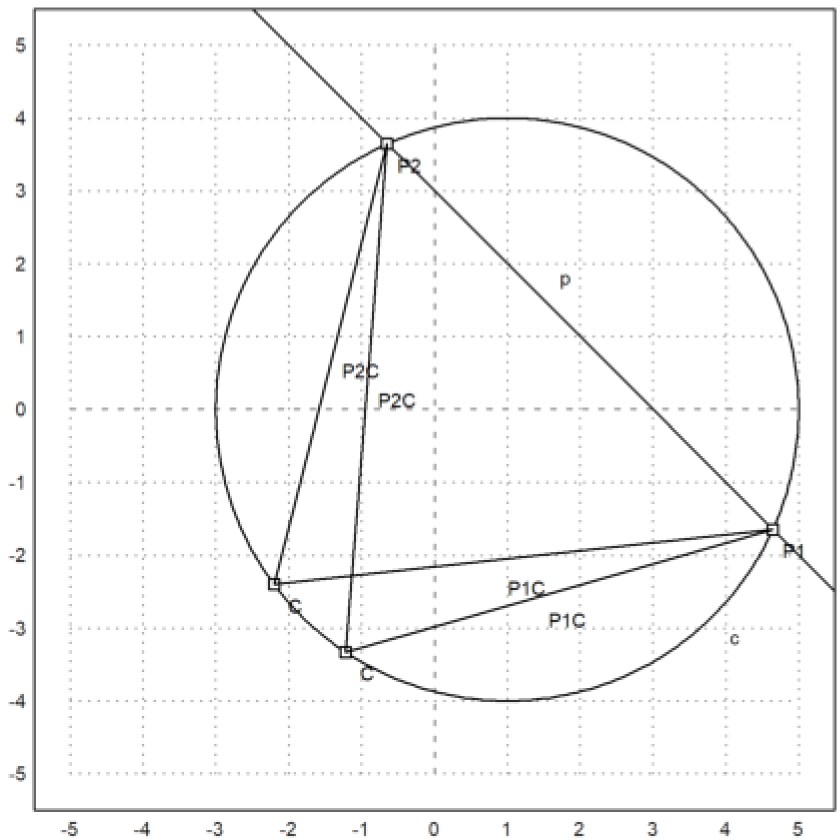

Figure 14: images-030.png

>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):

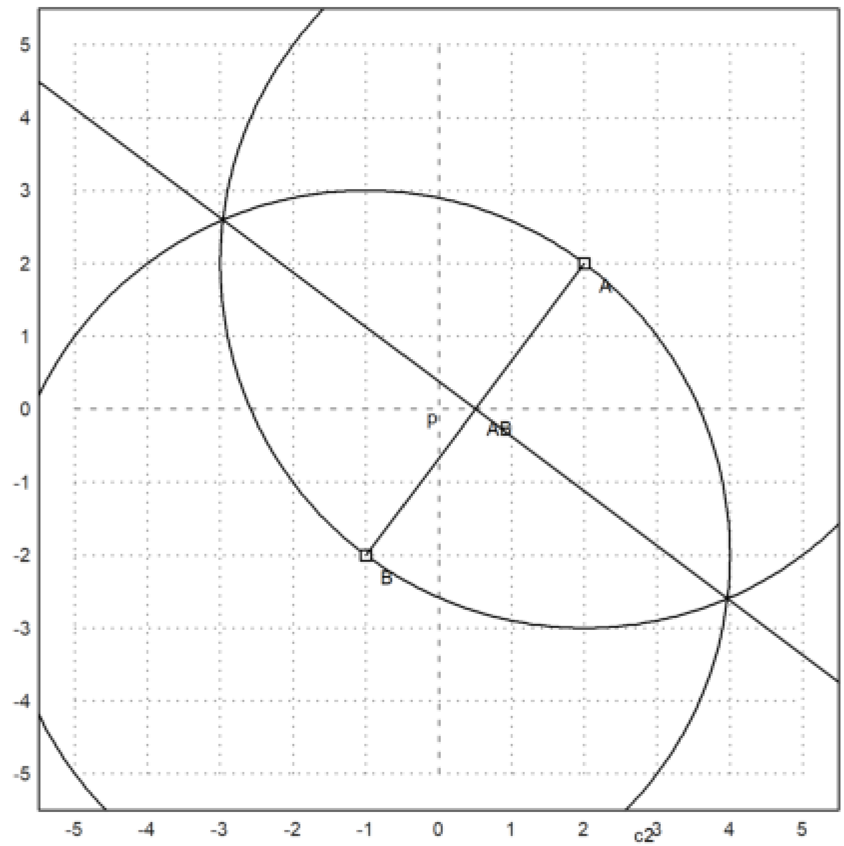

Figure 15: images-031.png

Selanjutnya kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

Membuat lingkaran dan mencari titik potong

>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];

>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));

>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));

>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tapi kita bisa menyederhanakannya jika kita mencari y.

>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);

>$solve(g,y)

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Persamaan ini biasanya berbentuk linear, y=mx+by dengan m sebagai gradien

Ini memang sama dengan garis tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Menentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B:

>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);

>$solve(h,y)

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

>

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = \frac{(a+b+c)}{2},$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. berikut visualisasi bentuk dari segitiga tersebut.

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5,0], "B(a,0)");...
> plotPoint([7,6], "A(x,y)");
```

```
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15); ...
> plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
```

```
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```

Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dari langkah-langkah berikut:

$$AC = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$b = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$b^2 = x^2 + y^2$$

atau

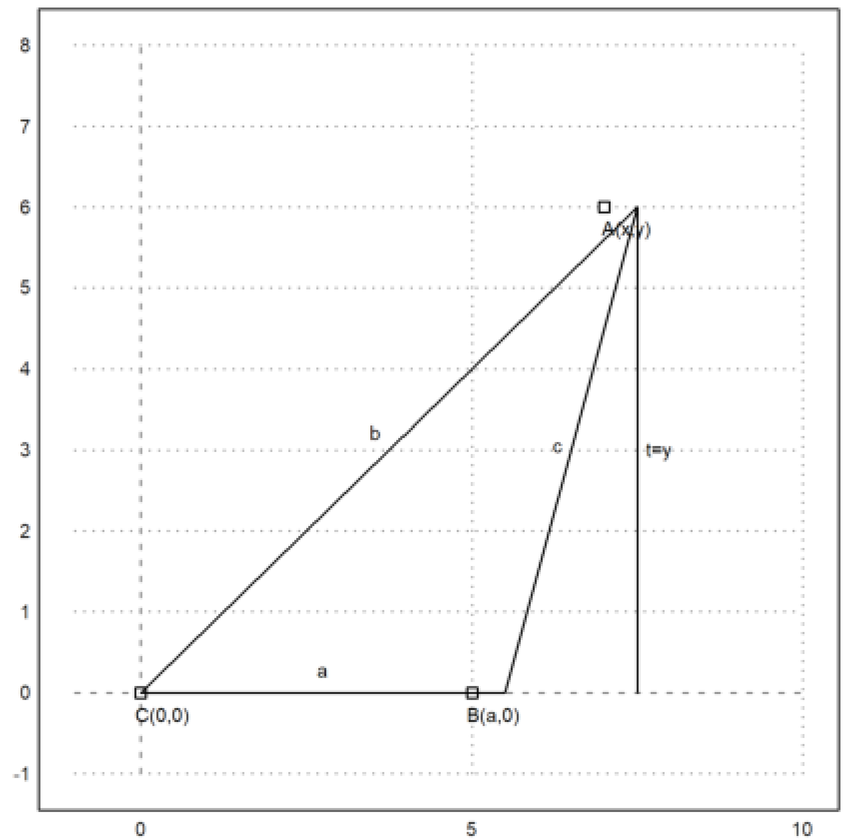

Figure 16: images-038.png

$$AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$
$$c = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$
$$c^2 = (x-a)^2 + y^2$$

kita akan memperoleh persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2$$

persamaan tersebut menyatakan bahwa titik (x,y) berjarak dari titik C(0,0)

$$(x-a)^2 + y^2 = c^2$$

persamaan tersebut menyatakan bahwa titik A(x,y) berjarak c dari titik B(a,0)

>&assume(a>0); sol &= solve([x^{2+y}2=b$^{2,(x-a)}$2+y$^{2=c}$2],[x,y])

```
                 2    2    2
              - c  + b  + a
       [[x = --------------, y = 
                   2 a
         4      2  2      2  2    4      2  2    4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
- -------------------------------------------------],
                          2 a
        2    2    2
     - c  + b  + a
[x = --------------, y = 
          2 a
        4      2  2      2  2    4      2  2    4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
---------------------------------------------------]]
                        2 a
```

Masukkan solusi dari y.

>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}}{2\,a}$$

Didapatkan rumus Heron.

>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)

$$H\,(a,b,c) = \frac{\sqrt{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}}{4}$$

>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6

$$Luas = \frac{3\sqrt{39}}{4}$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5

```
6
```

Dan jelas juga bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga dengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)

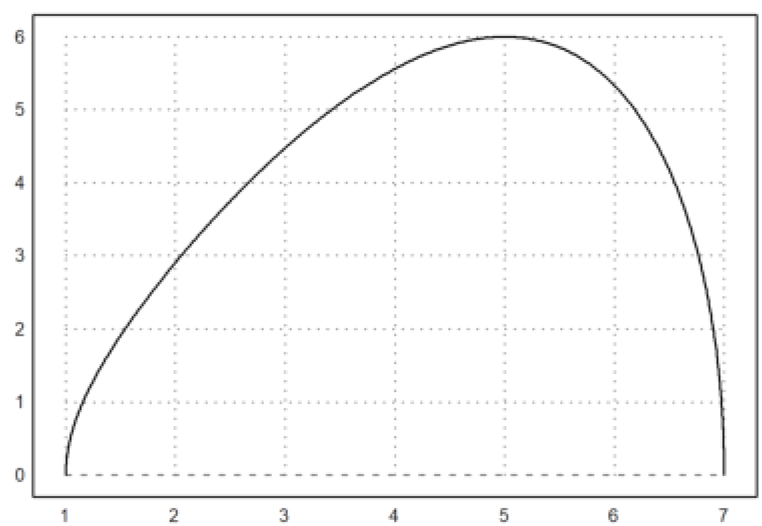

Figure 17: images-051.png

Kasus umum juga berhasil.

Menggambar ellips dengan subtitusi

>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)

$$\left[\frac{d}{d\,c}\,H\left(a,b,c\right)=0,H\left(a,b,c\right)=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); \$s1

$$\left[x=\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a},y=\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Buat suatu fungsi dari hasil subtitusi tersebut

>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); \$fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); \$fy(a,c,d)

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita bisa menggambar plotnya. Ambil sisi b dengan rentang dari 1 sampai 4. Diketahui bahwa kita memperoleh elips.

>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):

Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

dimana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

>\$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)$^{2/\mathrm{u}}$2+fy(a,c,d)$^{2/\mathrm{v}}$2 with [u=d/2,v=sqrt(d$^{\mathrm{2-a}}$2)/2])

$$1$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal jika segitiga tersebut sama sisi. Kami ingin memperolehnya secara analitis.

>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))$^{\mathrm{2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))}}$2,b)=0]; \$eqns

$$\left[\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,b)}{8}=0,\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,a)}{8}=0\right]$$

Kita mendapatkan nilai minimum yang dimiliki oleh segitiga dengan salah satu sisinya 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

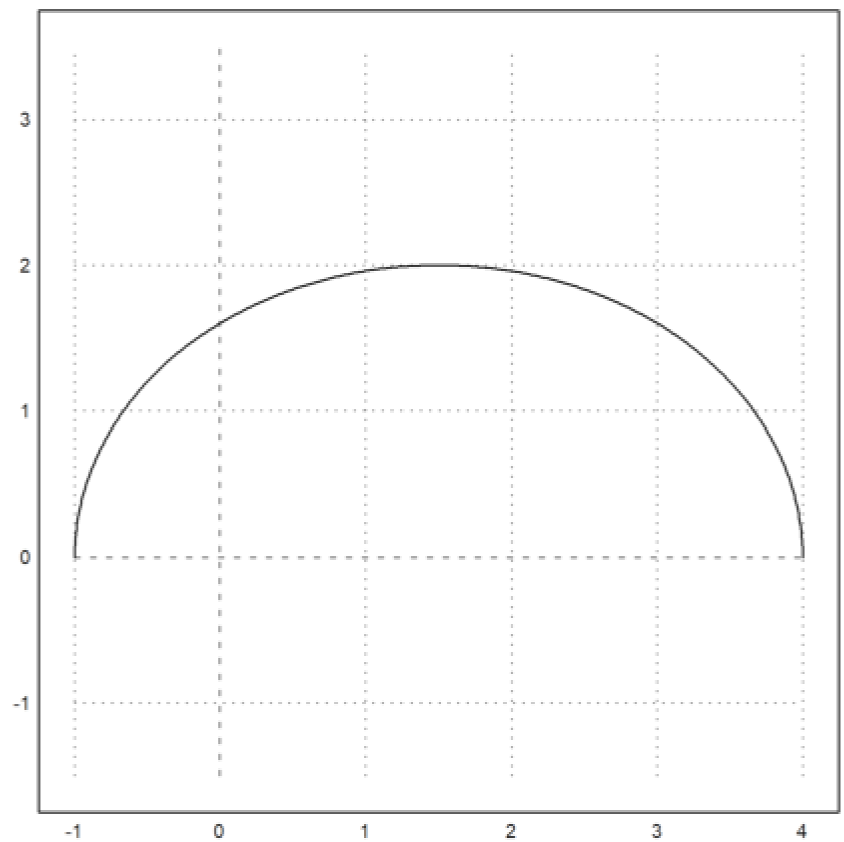

Figure 18: images-056.png

>$solve(eqns,[a,b])

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

>&solve([diff(H(a,b,c)$^{2,a)=la,diff(H(a,b,c)}$2,b)=la, ...
> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])

```
                 d       d                 d              d
    [[a = 0, b = -, c = -, la = 0], [a = -, b = 0, c = -, la = 0],
                 2       2                 2              2
                                                                 3
         d       d                          d       d       d       d
    [a = -, b = -, c = 0, la = 0], [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
         2       2                          3       3       3      108
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama atur titik di Maxima.

>A &= at([x,y],sol[2]); $A

$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C

$$[a,0]$$

$[a, 0]$

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
> a=4; b=3; c=2; ...
> plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
> plotPoint(mxmeval("A"),"A"):

Plot segmennya.

>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
> plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):

Hitung garis tengah tegak lurus di Maxima.

>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);

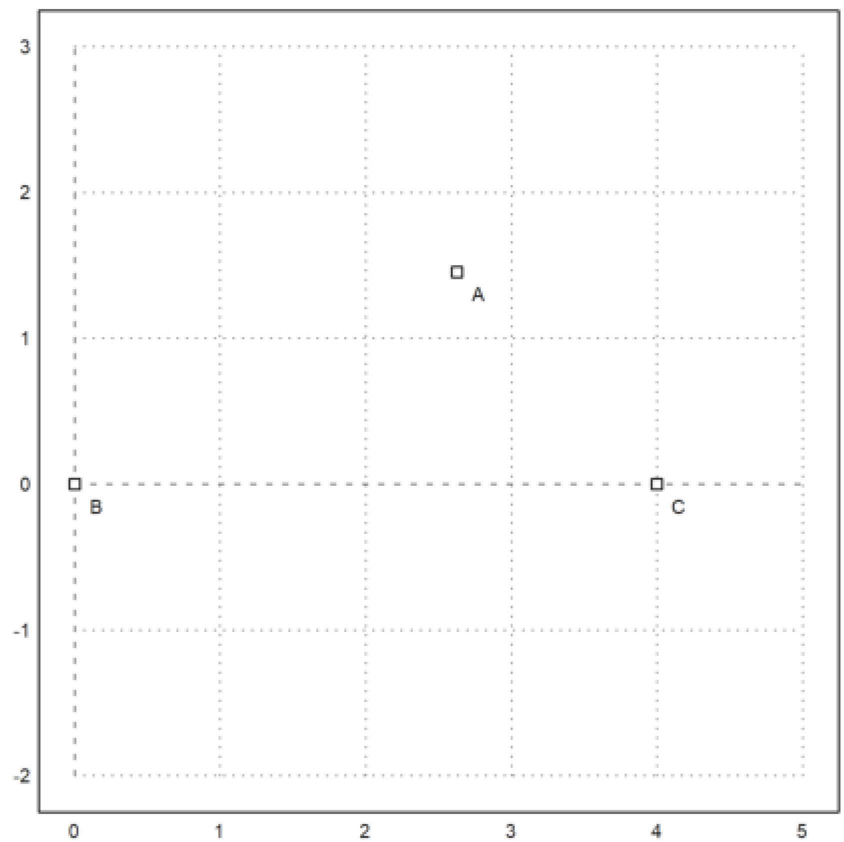

Figure 19: images-064.png

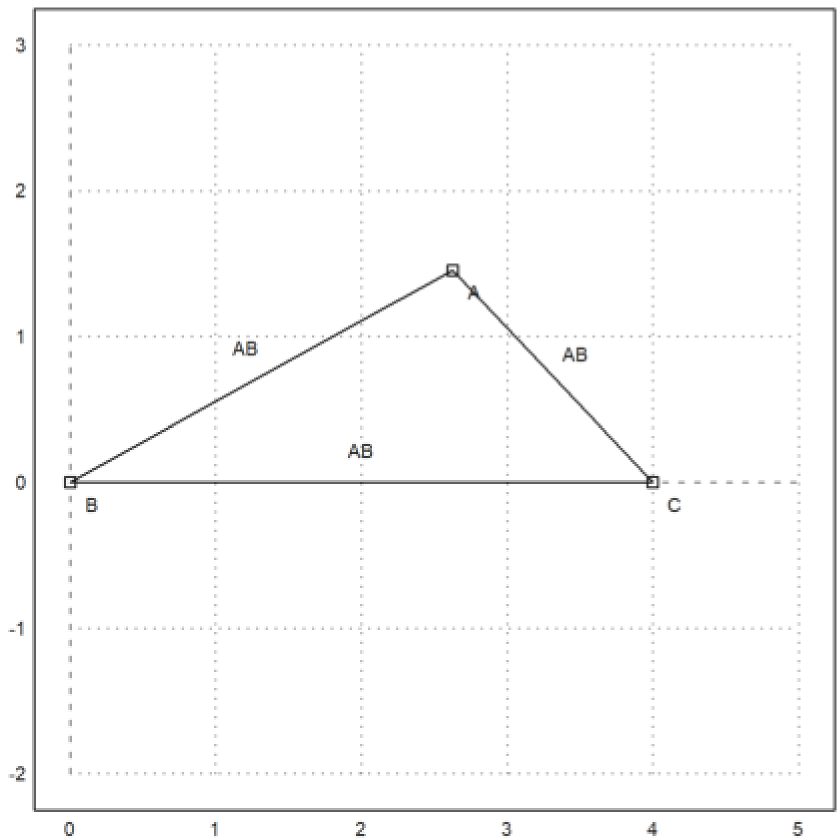

Figure 20: images-065.png

Dan pusat lingkarannya.

>U &= lineIntersection(h,g);

Kita mendapatkan rumus jari-jari lingkaran luar.

>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

>plotPoint(U()); ...
> plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):

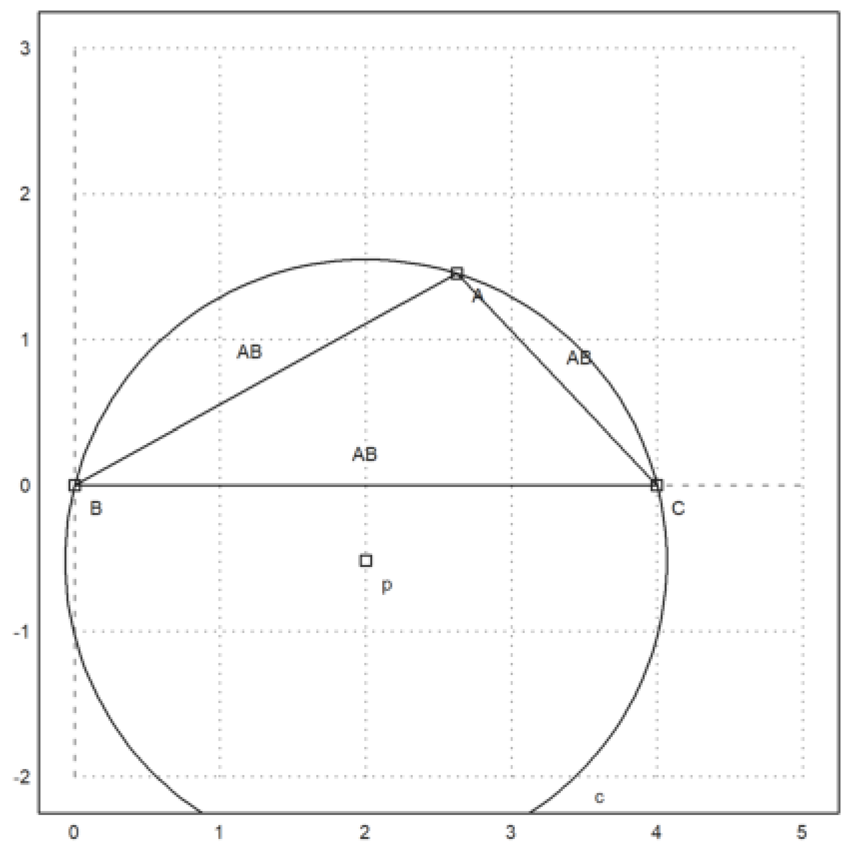

Figure 21: images-067.png

Dengan menggunakan geometri, kita memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa cek, apakah ini benar adanya pada Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

>c^{2/\sin(\mathrm{computeAngle}(A,B,C))}$2 | factor

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

orthocenter : titik perpotongan garis tinggi

circumcenter : titik pusat lingkaran luar segitiga

centroid : titik berat atau pusat massa segitiga

titik Exeter : titik istimewa yang terletak pada sumbu Euler

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

>setPlotRange(3); plotPoint(A,“A”); plotPoint(B,“B”); plotPoint(C,“C”);

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

>plotSegment(A,B,“ “); plotSegment(B,C,”“); plotSegment(C,A,” “):

Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja kami harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

>$areaTriangle(A,B,C)

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

>c &= lineThrough(A,B)

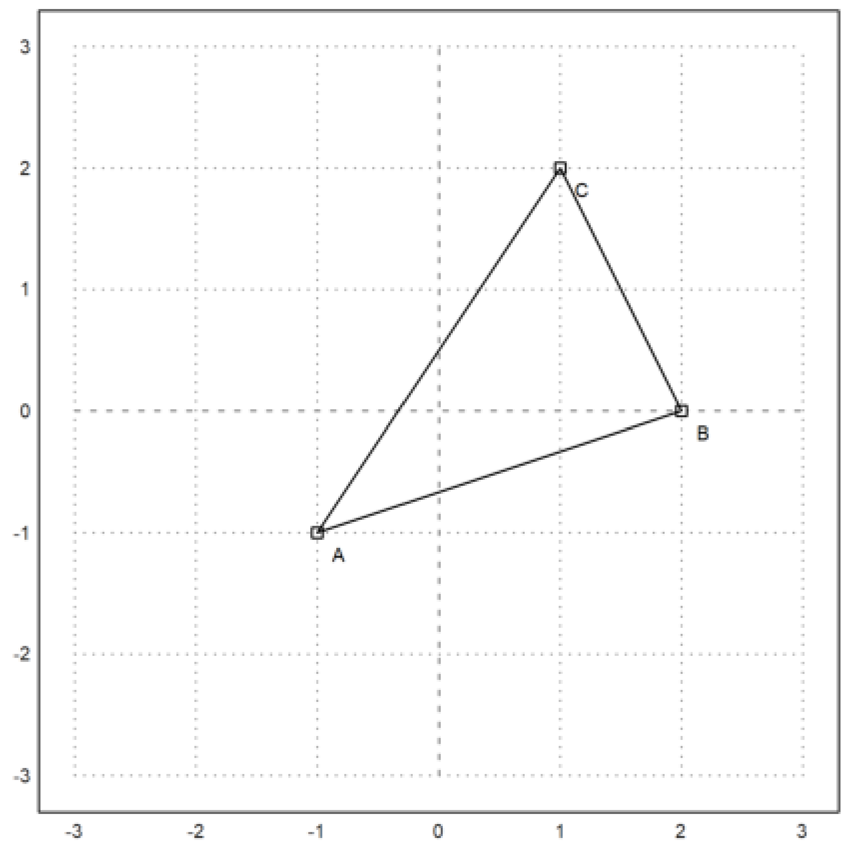

Figure 22: images-070.png

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan dapatkan juga rumus untuk baris ini.

>$getLineEquation(c,x,y)

$$3\,y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$\frac{7}{\sqrt{10}}$

Lingkaran luar dan lingkaran dalam

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)

$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

>O &= getCircleCenter(LL); $O

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),“O”):

Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

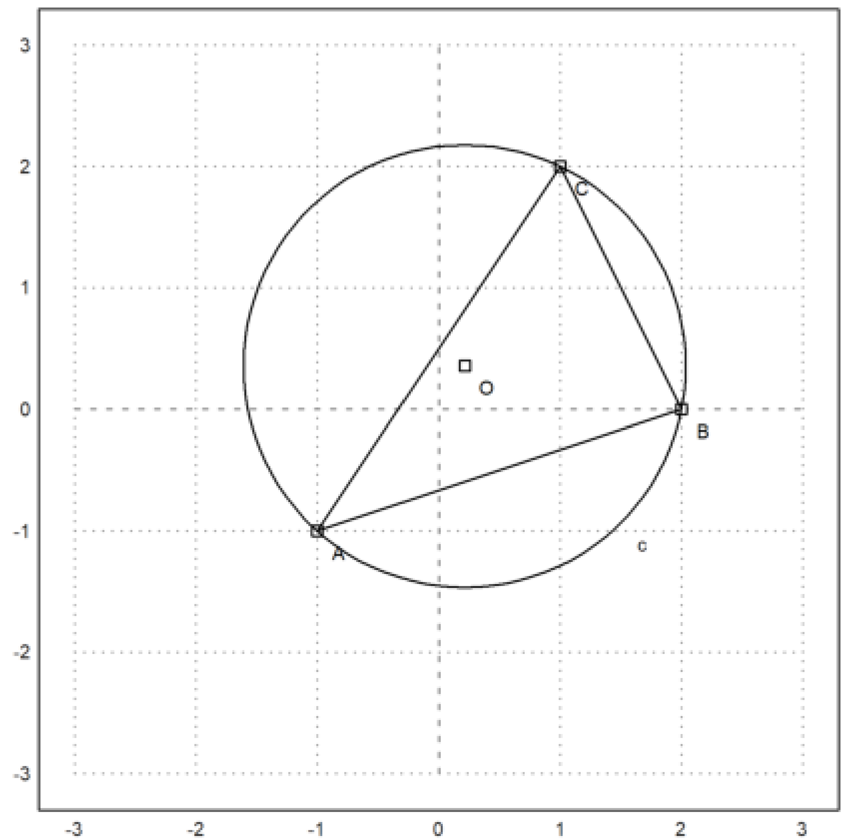

Figure 23: images-077.png

>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ini ke plot.

>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):

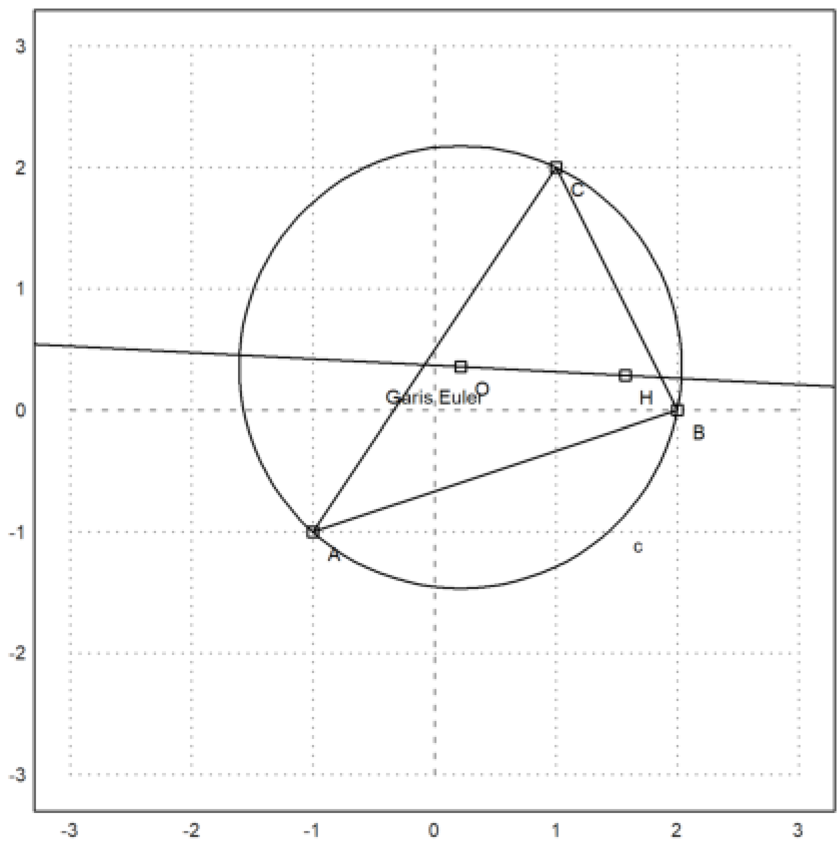

Figure 24: images-080.png

Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

>plotPoint(M(),"M"): // titik berat

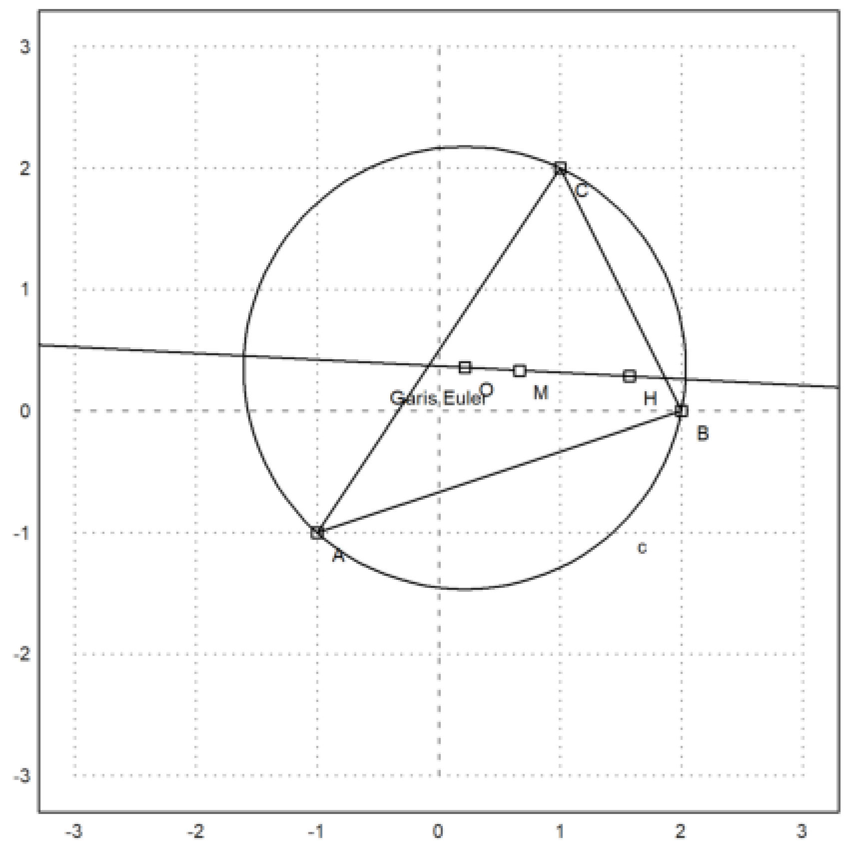

Figure 25: images-082.png

Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan

$$2$$

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

60°15'18.43''

Persamaan pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14}, \frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

>color(5); plotCircle(LD()):

Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):

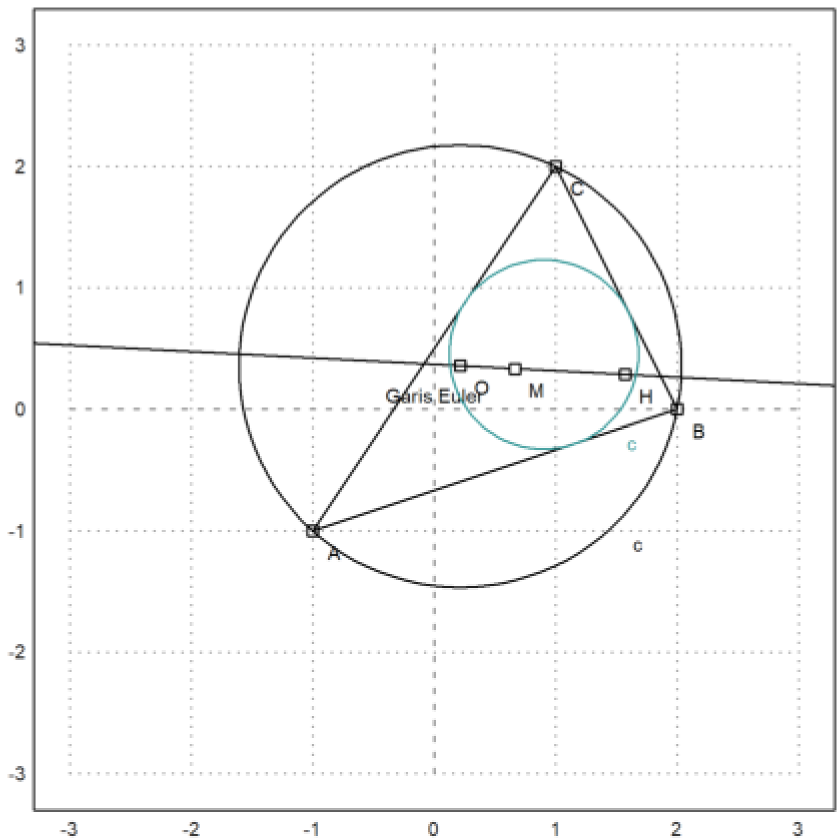

Figure 26: images-087.png

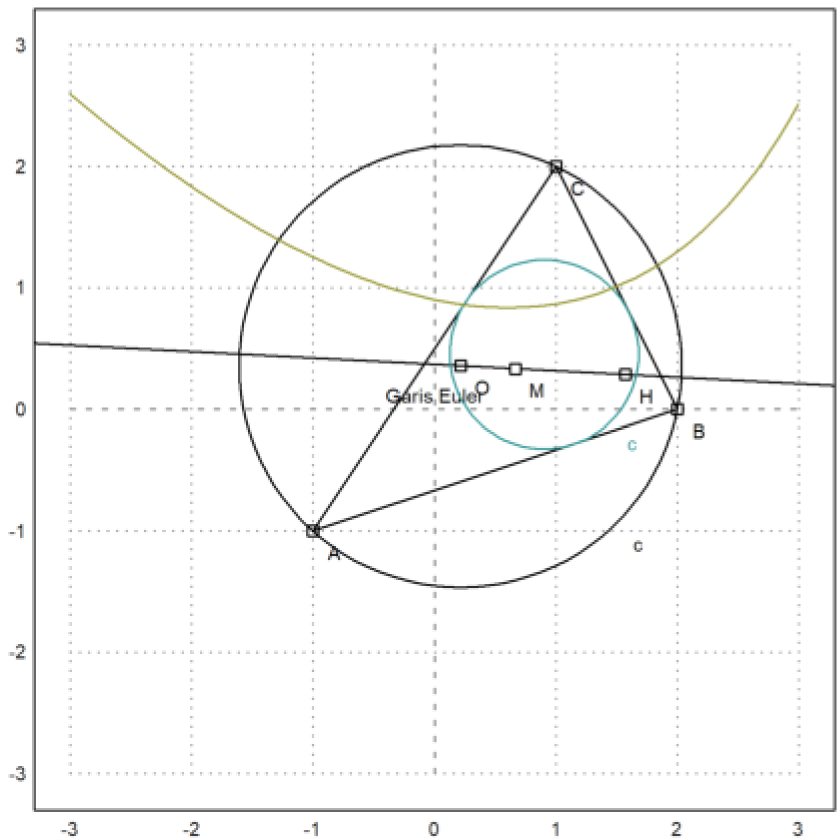

Figure 27: images-089.png

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)$^{\text{2-distance([x,y],C)}}$2,y)

```
        [y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                              y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

$$akar_1$$

Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):

>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut

>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C

$$2.135605779339061$$

2.135605779339061

>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB

$$2.135605779339061$$

2.135605779339061

Kesimpulan: jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Perhitungan ini menunjukkan bahwa proyeksi titik T pada garis AB menghasilkan jarak yang sama dengan jarak langsung antara T dan C, sehingga memperlihatkan bahwa titik C terletak pada garis AB.

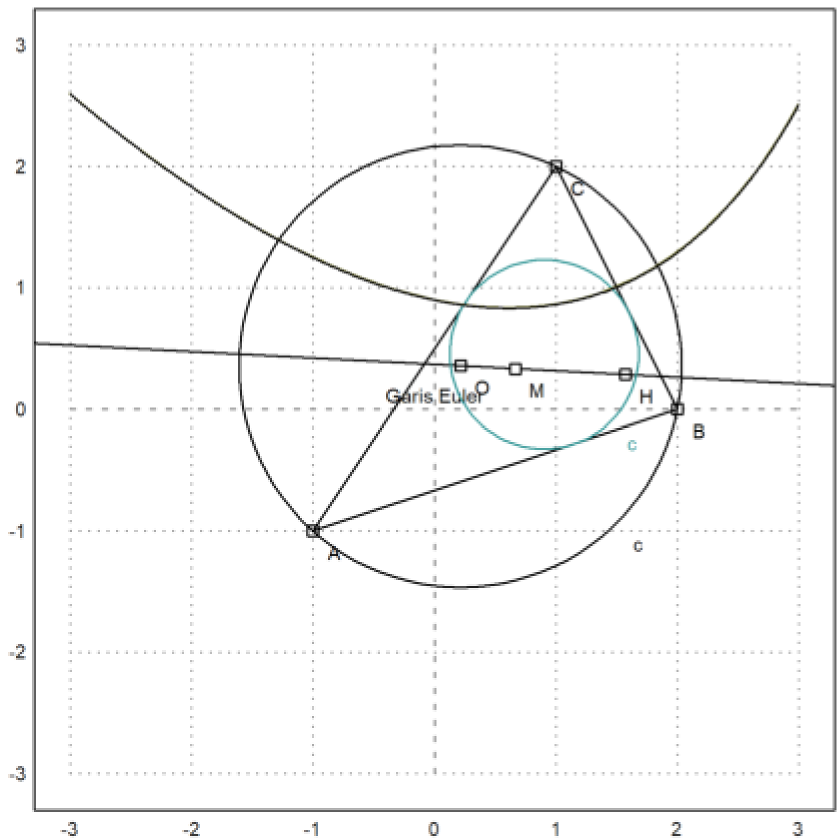

Figure 28: images-091.png

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan penyebaran. Dengan menggunakan hal ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keunggulan utama trigonometri rasional yaitu perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah perhitungan rasional simbolik seringkali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg(30);
```

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

dimana wa adalah sudut di A. Cara umum untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak

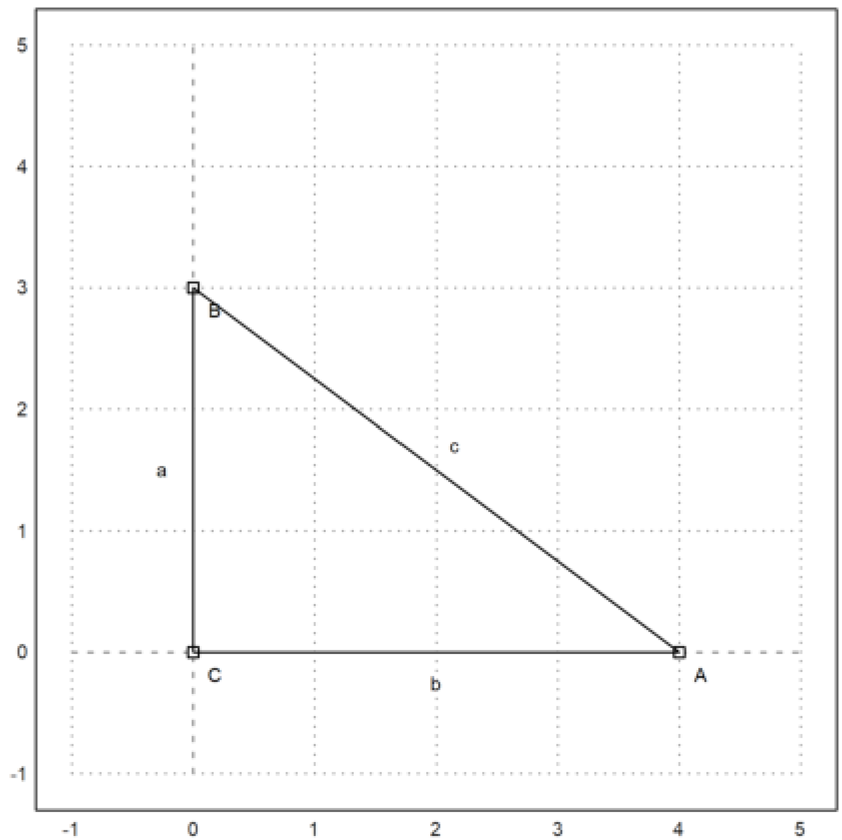

Figure 29: images-098.png

dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara kasar.

>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama tentang trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanyalah jarak yang dikuadratkan. Di bawah ini, a, b, dan c menyatakan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

$$a + b = c$$

$$(3^2) + (4^2) = 5^2$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c

```
25 = 25
```

Pengertian trigonometri rasional yang kedua adalah penyebaran. Penyebaran mengukur pembukaan antar garis. Nilainya 0 jika garisnya sejajar, dan 1 jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Luas garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

dimana a dan c adalah kuadran suatu segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya berada di A.

>sa &= a/c; $sa

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja ini lebih mudah dihitung daripada sudutnya. Namun Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

>fracprint(sin(wa)^2)

```
9/25
```

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan menjadi “hukum silang” berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah jarak di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diterapkan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)

$$(cc+bb-aa)^2 = 4\,bb\,cc\,(1-saa)$$

Dalam kasus kita, didapatkan

>$crosslaw(a,b,c,sa)

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk mencari penyebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk penyebaran yang tidak diketahui sa.

Anda bisa melakukannya dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari crosslaw. Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut sebuah segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)

$$\left[x = \frac{-cc^2 - (-2\,bb - 2\,aa)\;cc - bb^2 + 2\,aa\,bb - aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

>$spread(a,b,c)

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya adalah rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

>$spread(a,a,4*a/7)

Ini adalah sudut dalam derajat.

>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))

```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju. Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
> setPlotRange(-1,5,1,7); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;

Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan fungsi jarak dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

>$distance(A,B)

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadransi antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.

>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,

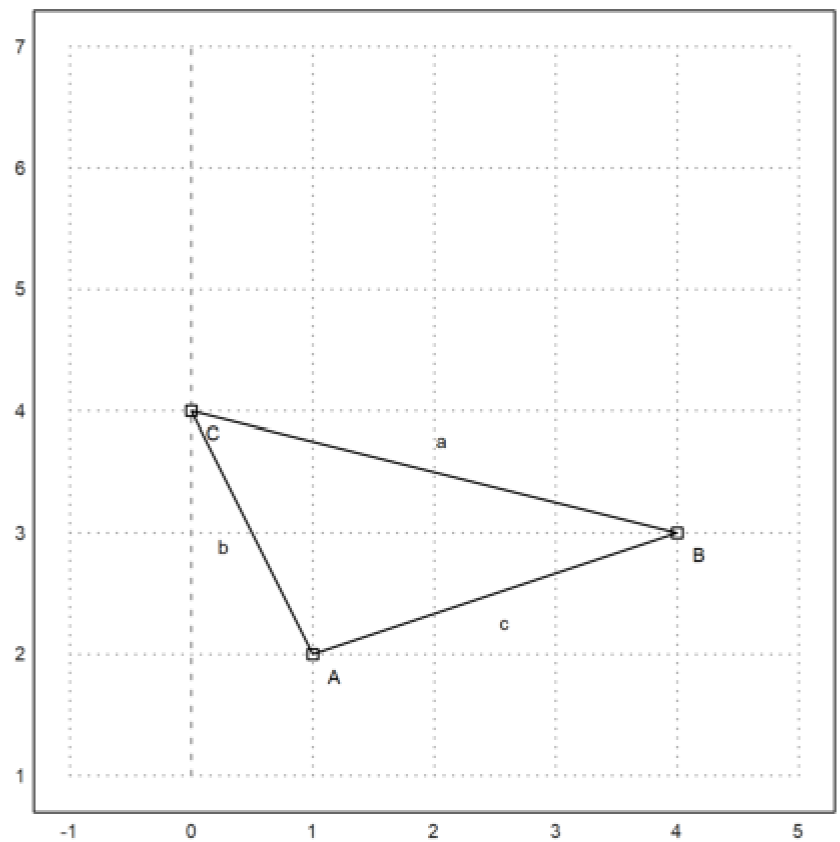

Figure 30: images-114.png

17

Figure 31: images-118.png

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang

$$A =< 1,2 > \quad B =< 4,3 >, \quad C =< 0,4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4,1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3,-1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam "geometry.e".

>sb &= spread(b,a,c); $sb

$$\frac{16}{25}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

>$sin(computeAngle(A,B,C))^2

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

>ha &= c*sb; $ha

$$16$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Secara definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadran.

>$sqrt(ha)

$$4$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2

$$6$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

>$areaTriangle(B,A,C)

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

>&remvalue(a,b,c,sb,ha);

Pertama-tama kita menghitung luas di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

>$spread(b^{2,c}2,a^2), $factor(%*c^{2*a}2/4)

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

$$\frac{(-c+b+a)\ (c-b+a)\ (c+b-a)\ (c+b+a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan seperti sudut. Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut ini.

>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena spread dari

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Contohnya, kita bisa menghitung penyebaran sudut 60°. Ini adalah 3/4. Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.

>$solve(triplespread(x,x,x),x)

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Penyebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke 90°, penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan a + b = 1.

>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)

$$\left[x=1-y\right]$$

$[x=1-y]$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))

$$\left[x = 4\,a - 4\,a^2, x = 0\right]$$

- 4 (a - 1) a

Sudut Pembagi

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

>&remvalue(a,b,c);

Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi dua 180°-wa.

>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2

$$\frac{-\sqrt{b^2 + a\,b} + b + a}{2\,b + 2\,a}$$

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b^2 + a\,b} + b + a}{2\,b + 2\,a}, x = \frac{\sqrt{b^2 + a\,b} + b + a}{2\,b + 2\,a}\right]$$

Mari kita periksa persegi panjang Egyptian.

>$sa2 with [a=$3^{2,b=4}$2]

$$\frac{1}{10}$$

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

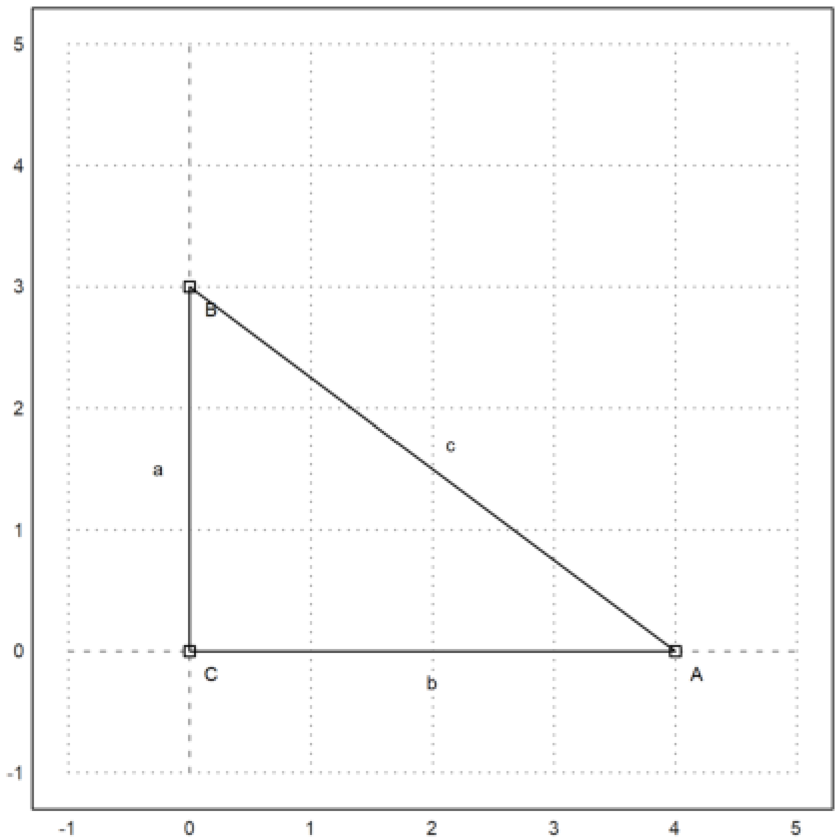

Figure 32: images-144.png

$$\frac{-\sqrt{b^2 + a\,b} + b + a}{2\,b + 2\,a}$$

Figure 33: images-147.png

>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)

```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

>P := [0,tan(wa2)*4]

```
[0,  1.33333]
```

>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):

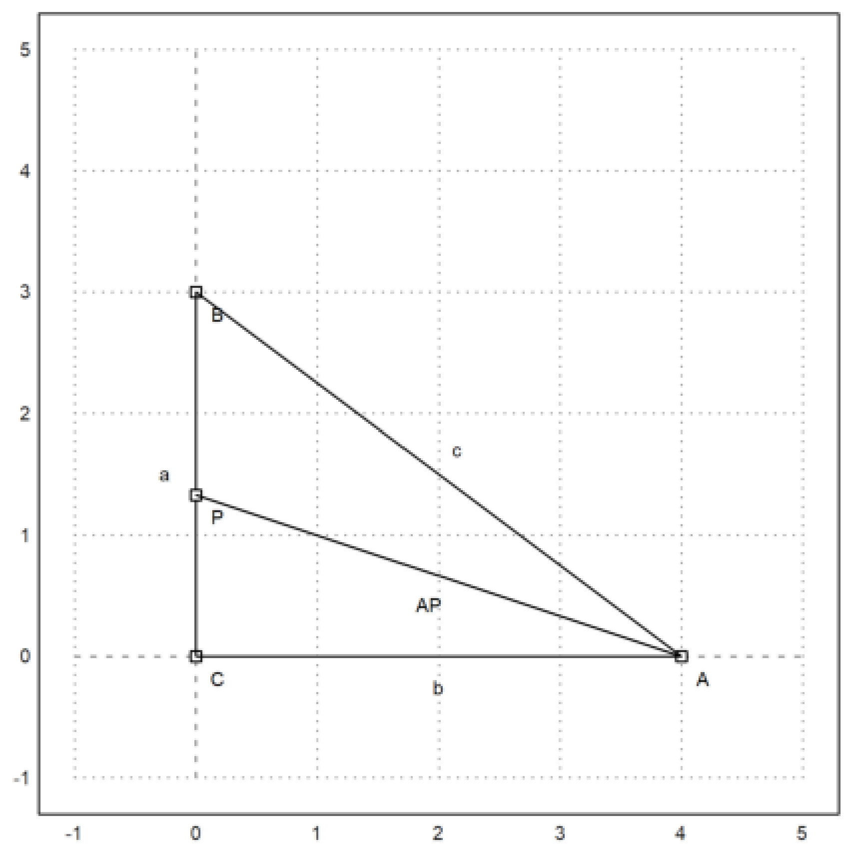

Figure 34: images-149.png

Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut “hukum penyebaran”

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c menunjukkan qudrah.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita mendapatkan bisa/1=b/(1-sa2) dan bisa menghitung bisa (kuadran dari pembagi sudut).

>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b\,\left(b+a\right)}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Egyptian kita.

>sqrt(mxmeval(“at(bisa,[a=3$^{2,b=4}$2])”)), distance(A,P)

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus penyebaran.

>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b\,\left(b+a\right)}-b-a\right)}{\sqrt{b\,\left(b+a\right)}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

>sqrt(mxmeval(“at(py,[a=3$^{2,b=4}$2])”))

```
1.33333333333
```

Sudut Akor

Lihatlah situasi berikut ini.

>setPlotRange(1.2); . . .
> color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); . . .

> A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
> plotPoint(A,“A”); plotPoint(B,“B”); plotPoint(C,“C”); ...
> color(3); plotSegment(A,B,“c”); plotSegment(A,C,“b”); plotSegment(C,B,“a”); ...
> color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,“0”); ...
> plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,“r”); ...
> insimg;

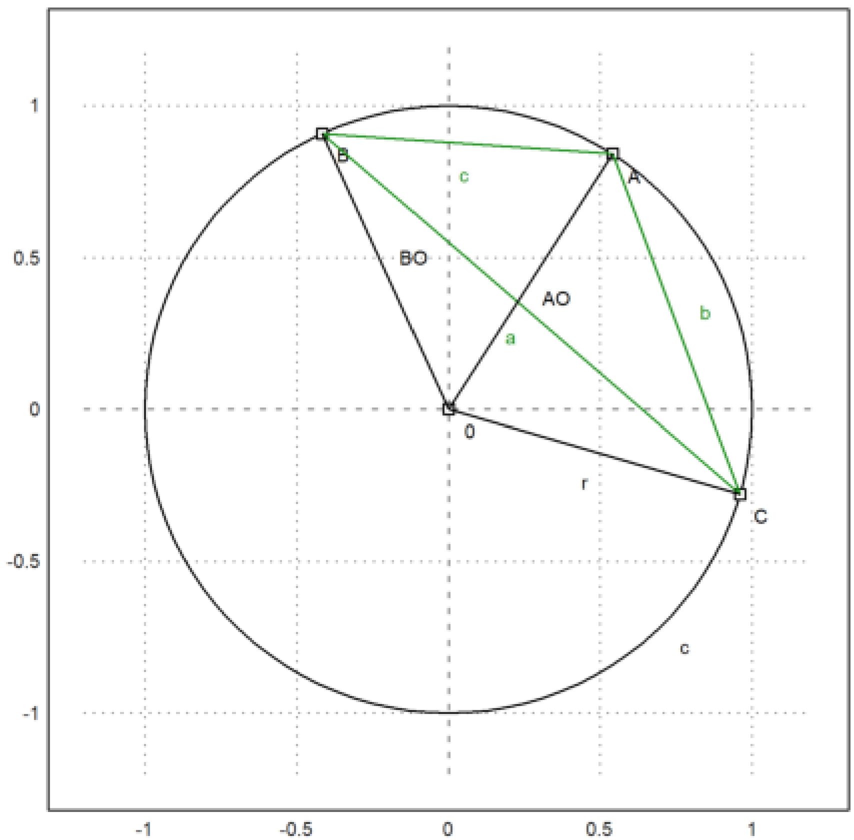

Figure 35: images-154.png

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga kali lipat untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru

>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

>function periradius(a,b,c) &= rabc;

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A, B, C.

>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);

Radiusnya memang 1.

>periradius(a,b,c)

```
1
```

Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp

$$\frac{b}{4}$$

Pada kenyataannya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp

$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Komentar awal

Fungsi pada titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis-garis level yang agak sederhana: lingkaran yang berpusat di A.

>&remvalue();

>A=[-1,-1];

>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])$^{2+(\text{y-A[2]})}$2)

>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, . . .
> title="If you see ellipses, please set your window square"):

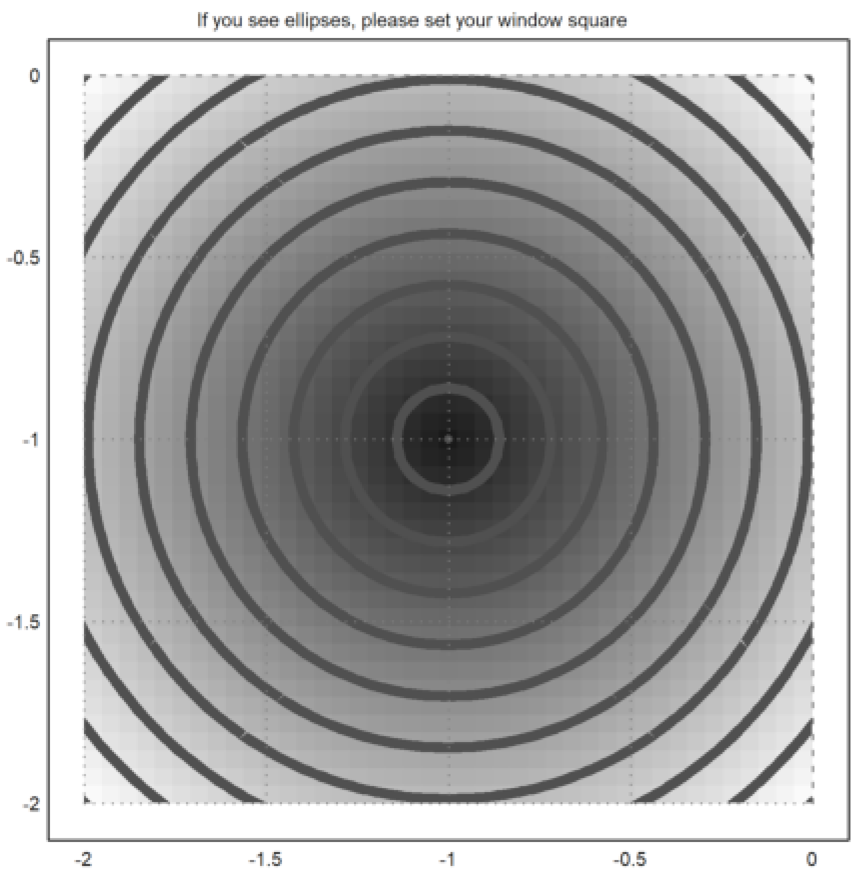

Figure 36: images-158.png

dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):

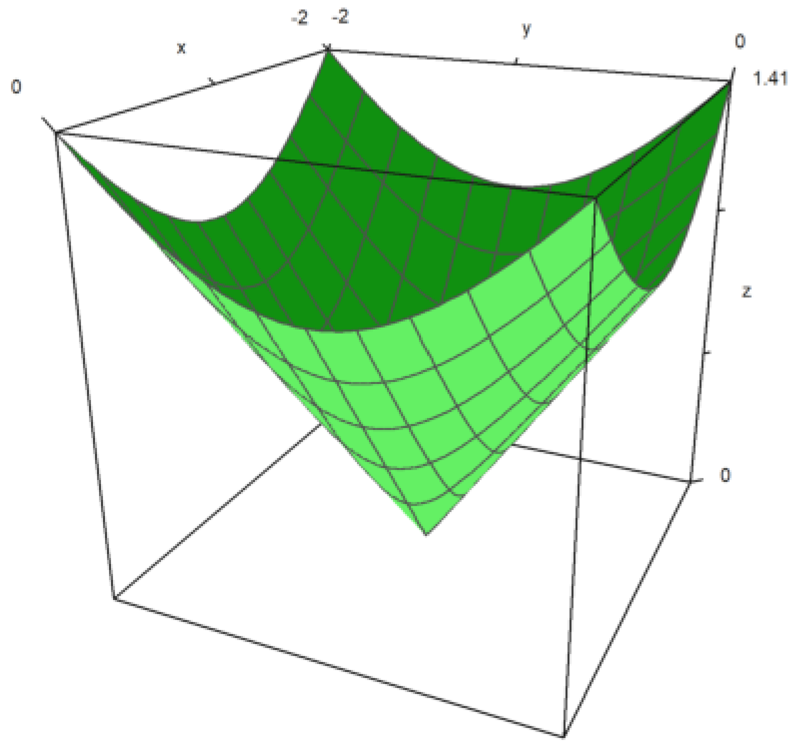

Figure 37: images-159.png

Tentu saja nilai minimum 0 dicapai di A.

Dua titik

Sekarang kita lihat fungsi MA+MB di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang terkenal" bahwa kurva tingkat adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

>B=[1,-1];

>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])$^{2+(y-B[2])}$2)

>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):

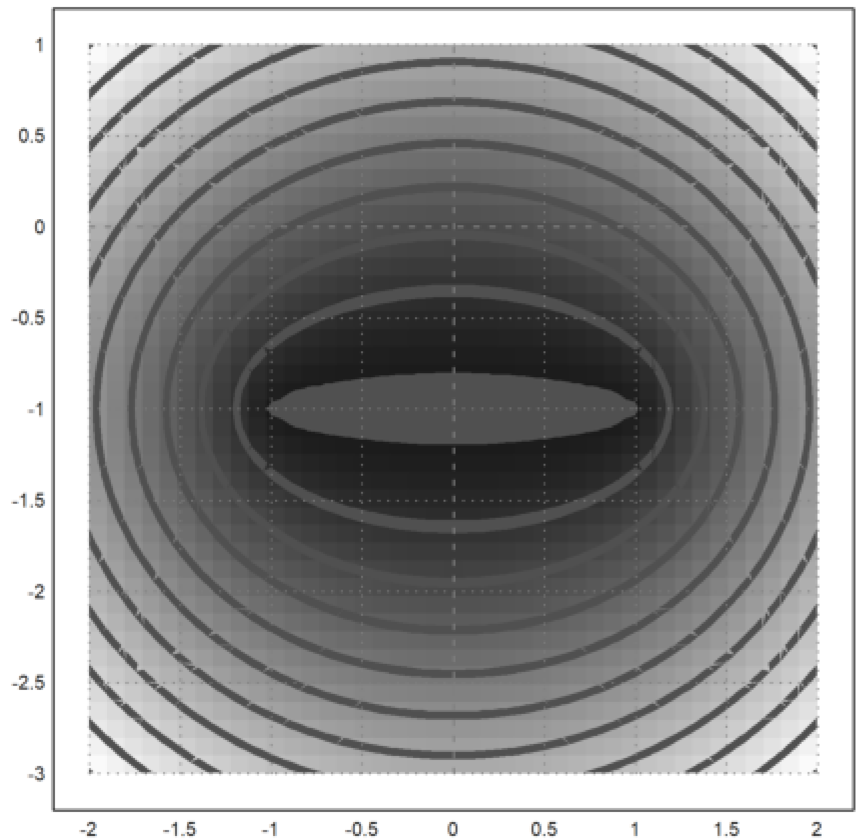

Figure 38: images-160.png

Grafiknya lebih menarik:

>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):

Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):

Tiga titik

Sekarang, hal-hal menjadi tidak terlalu sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik bidang, tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:

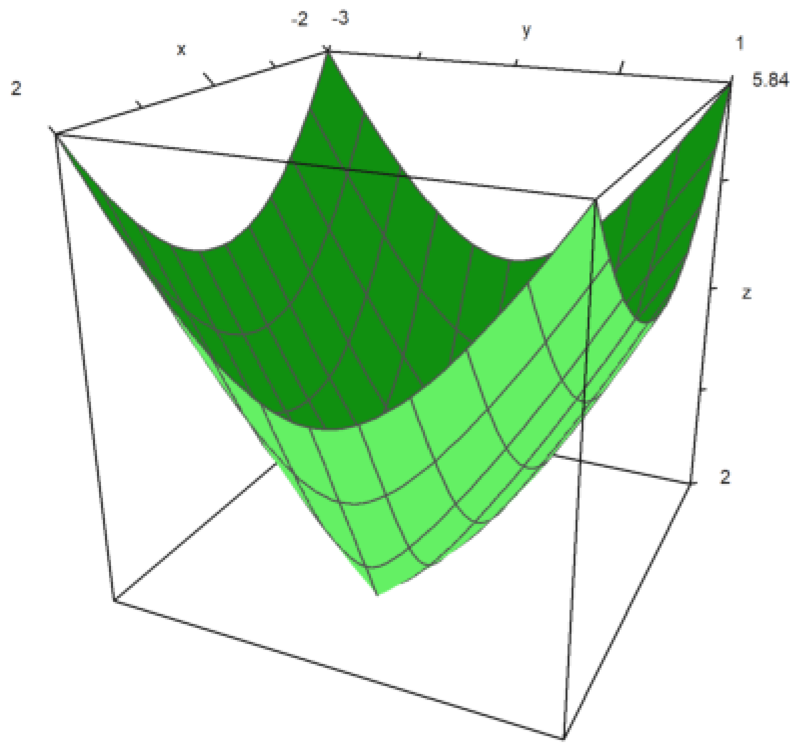

Figure 39: images-161.png

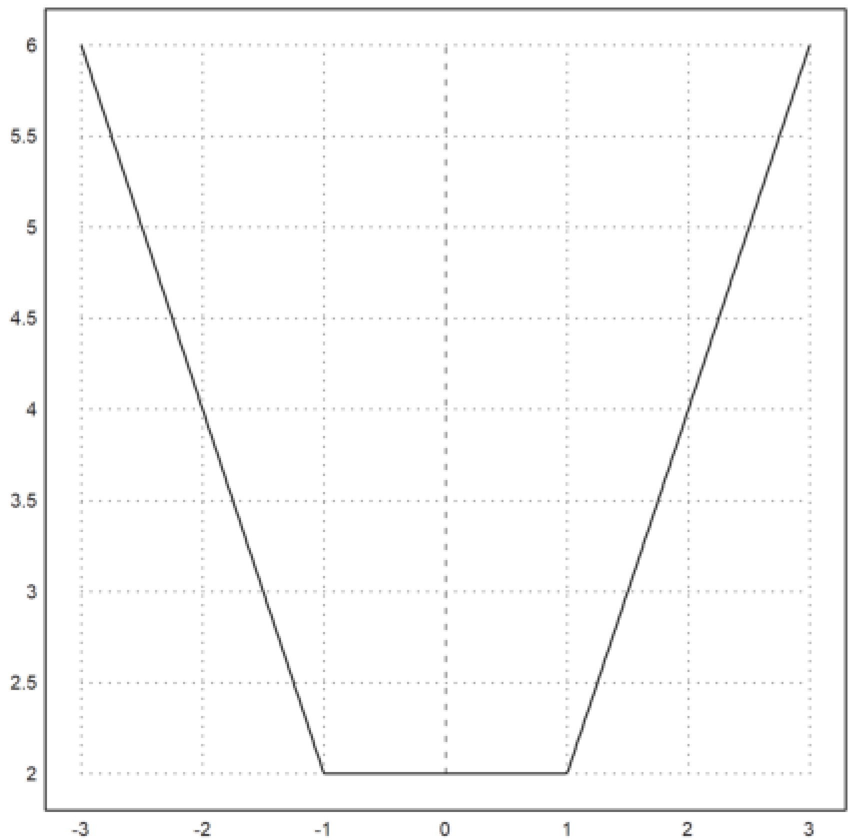

Figure 40: images-162.png

1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

>C=[-4,1];

>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])$^{2+(y-C[2])}$2)

>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);

>insimg;

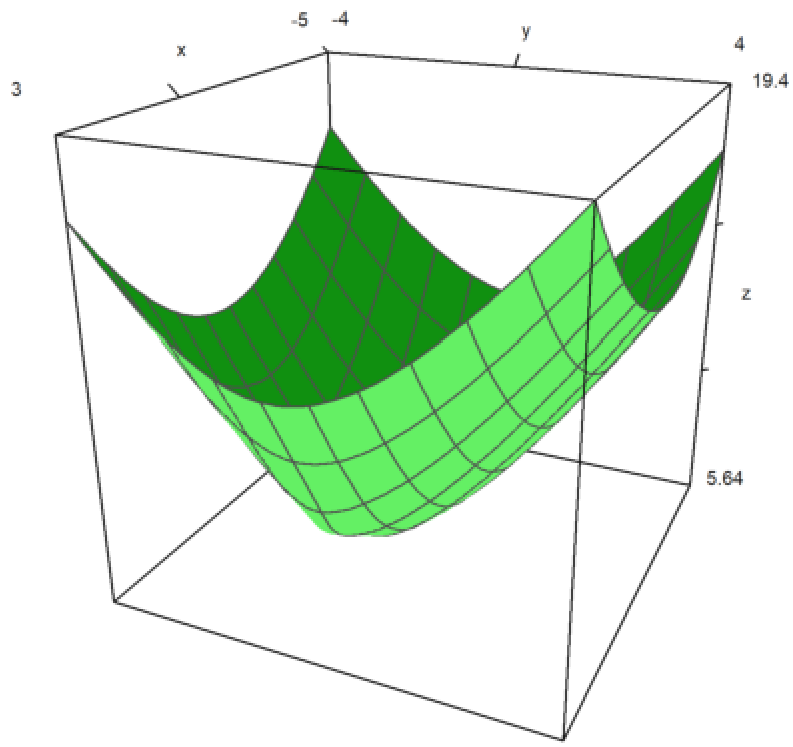

Figure 41: images-163.png

>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");

>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);

>insimg;

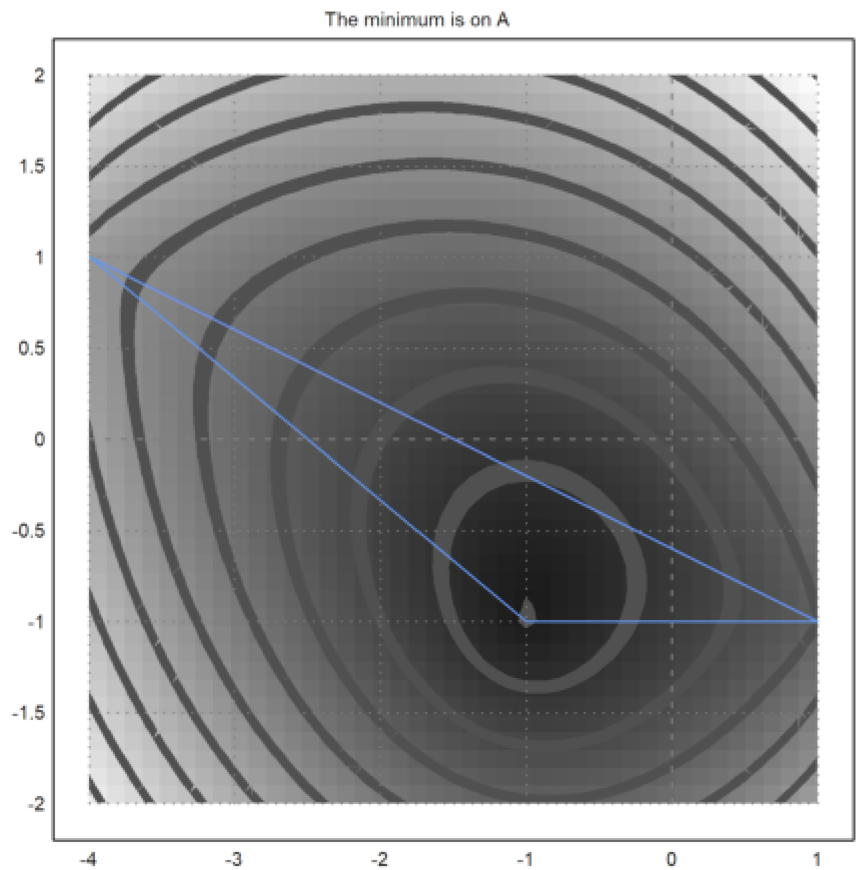

Figure 42: images-164.png

2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing 120°):

>C=[-0.5,1];

>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):

>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");

>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);

>insimg;

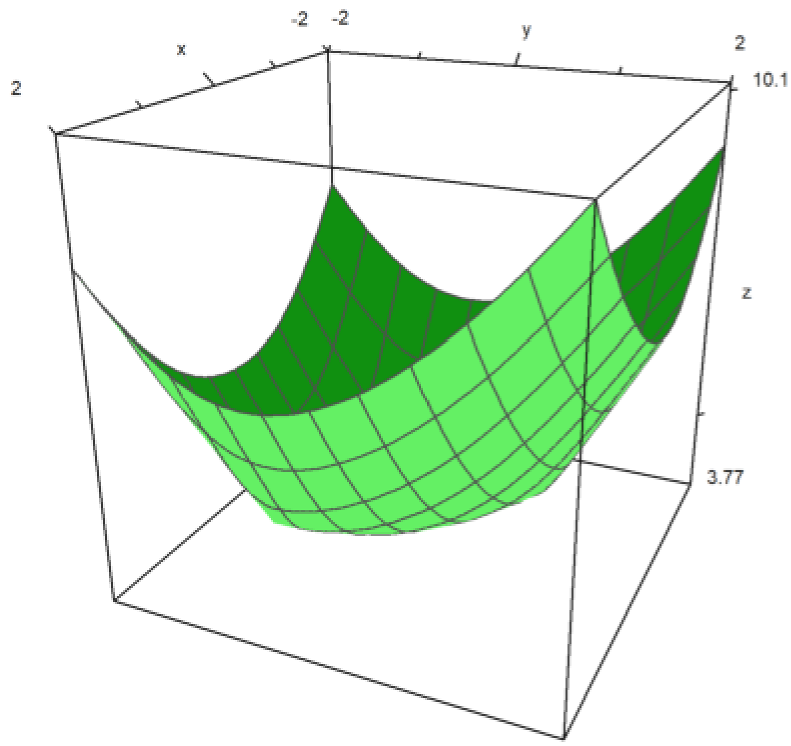

Figure 43: images-165.png

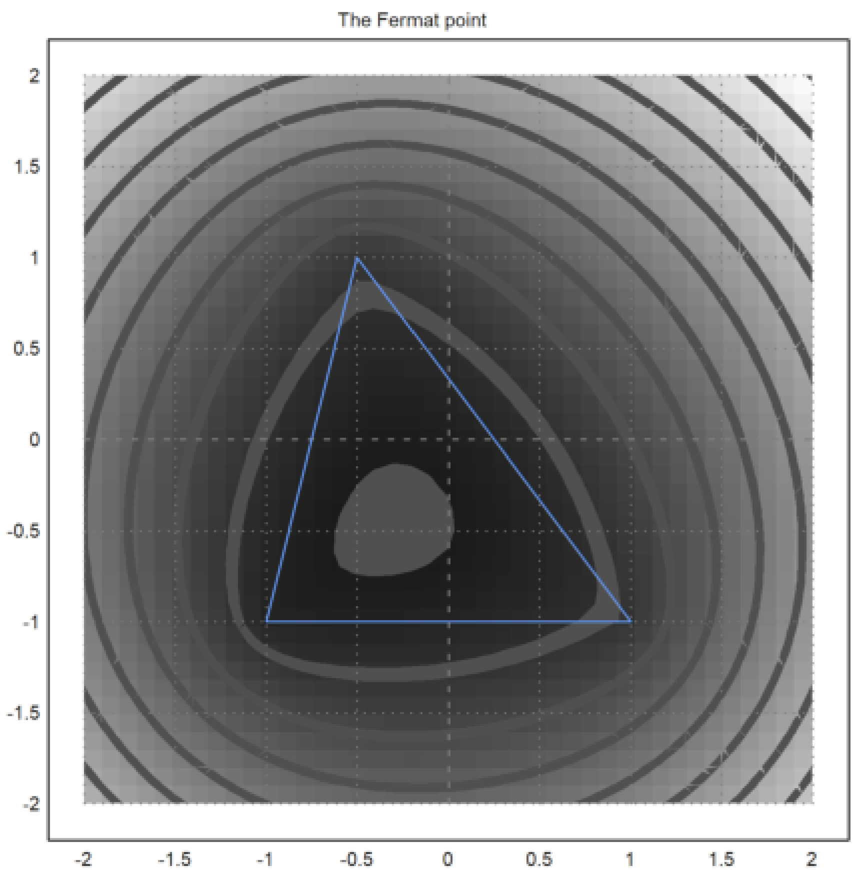

Figure 44: images-166.png

Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para ahli lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Tradisi yang berlaku adalah mencatat titik F ini...

Optmasi Titik pada Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena Anda sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

>D=[1,1];

>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])$^{2+(y-D[2])}$2)

>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):

>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);

>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);

>insimg;

Masih ada nilai minimum dan tidak ada simpul A, B, C atau D yang tercapai:

>function f(x):=d4(x[1],x[2])

>neldermin("f",[0.2,0.2])

```
[0,  0]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, maka kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

>C=[-1,1];

>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):

>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);

>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);

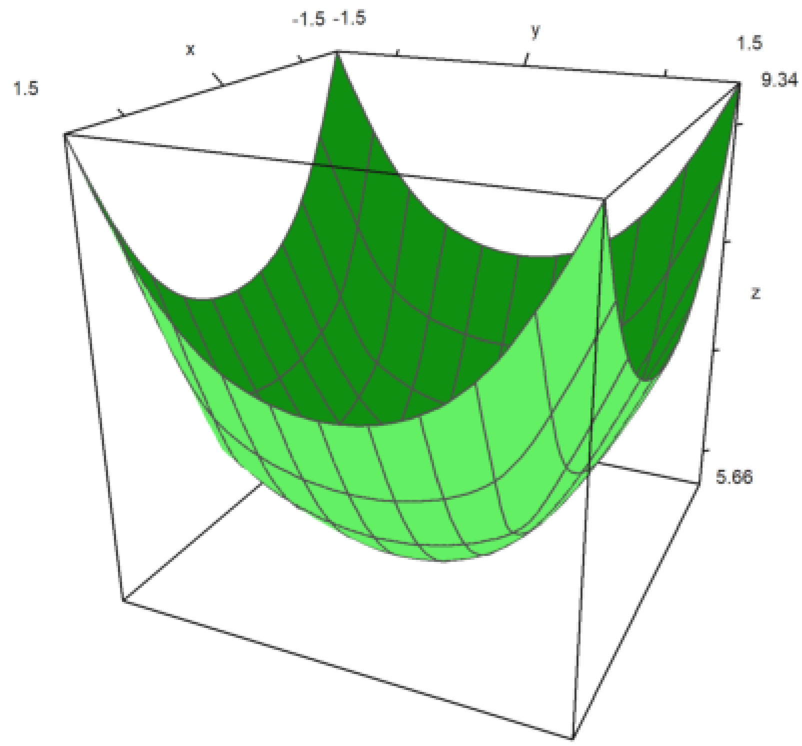

Figure 45: images-167.png

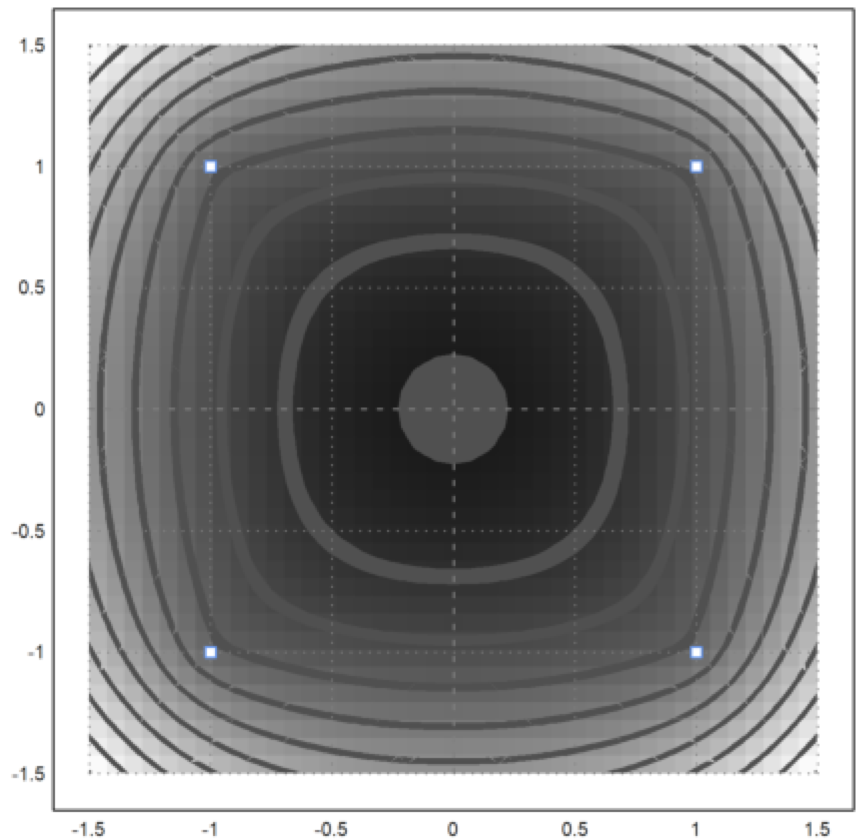

Figure 46: images-168.png

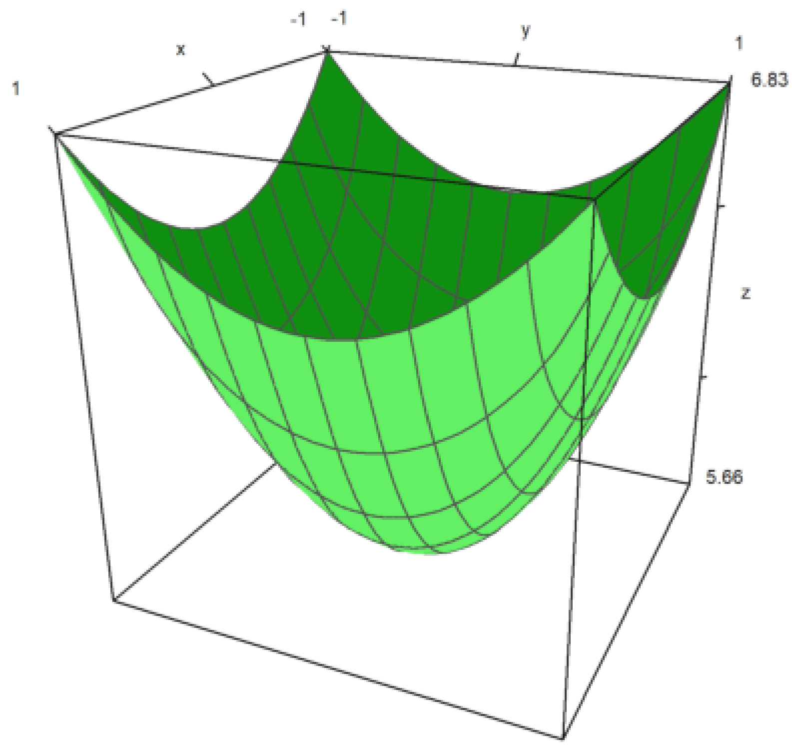

Figure 47: images-169.png

>insimg;

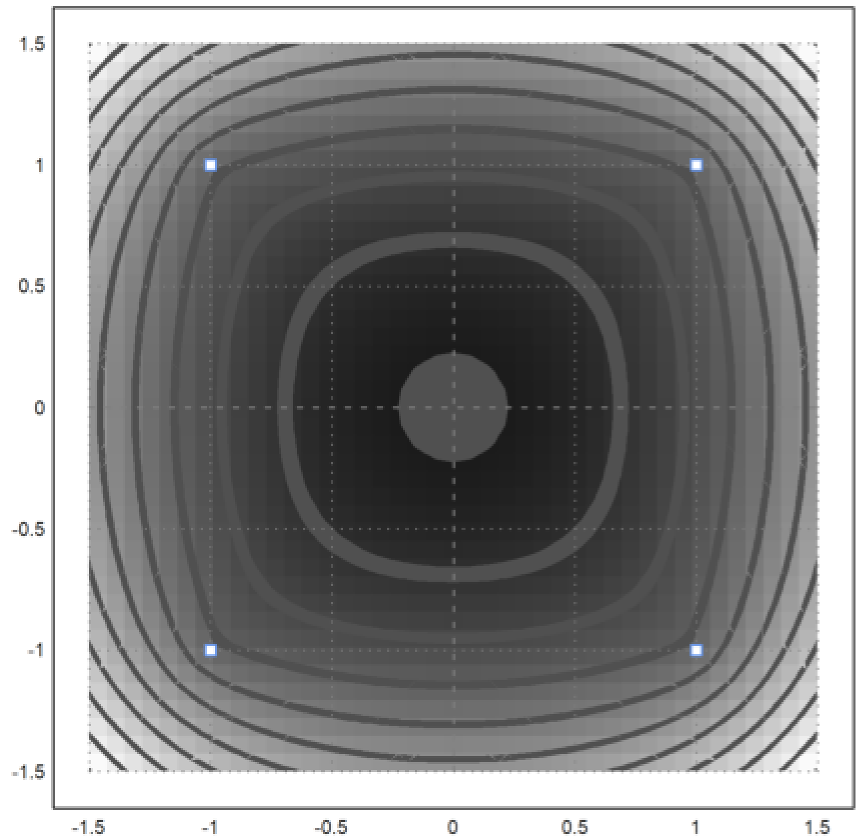

Figure 48: images-170.png

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe pada jalur program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua buah lingkaran yang bersinggungan dengan dua buah garis yang membentuk kerucut, dan satu buah garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kita menggunakan file geometri.e dari Euler untuk hal ini.

>load geometry;

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])

```
[- a, 1, 0]
```

>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])

```
[- a, - 1, 0]
```

Kemudian baris ketiga.

>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

>setPlotRange(-1,1,0,2);

>color(black); plotLine(g(),“ “)

>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),“ “), plotLine(g2(),” “):

Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

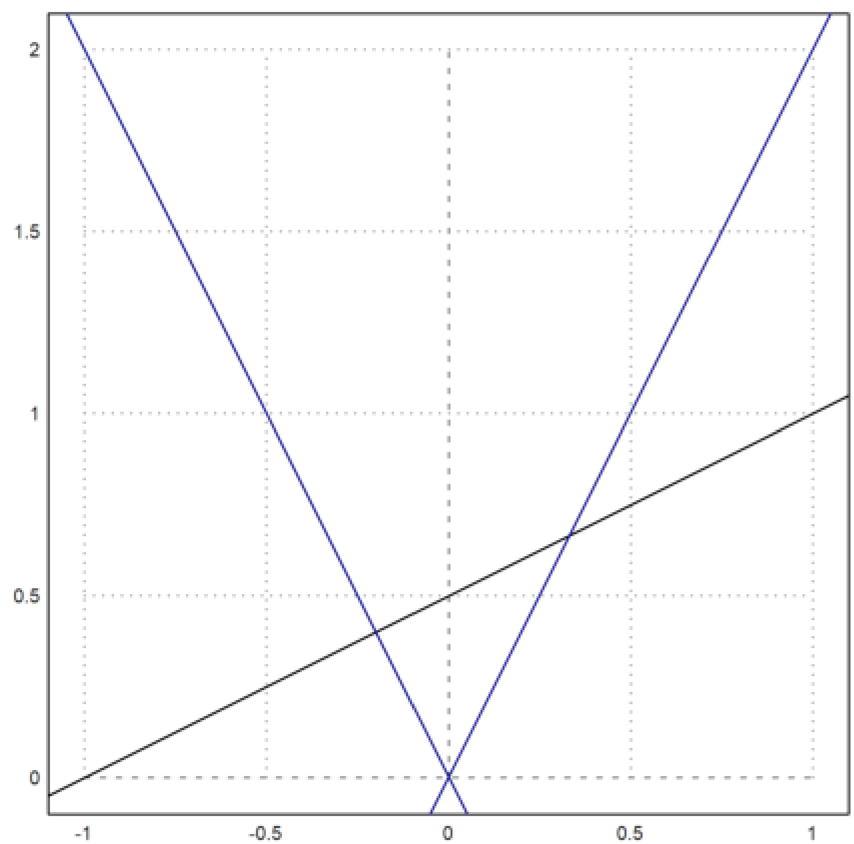

Figure 49: images-171.png

>P &= [0,u]

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

>sol &= solve(d1$^{2=\mathrm{d}}$2,u); $sol

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

>u := sol()

```
[0.333333,  1]
```

>dd := d()

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

>color(red);

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");

>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");

>insimg;

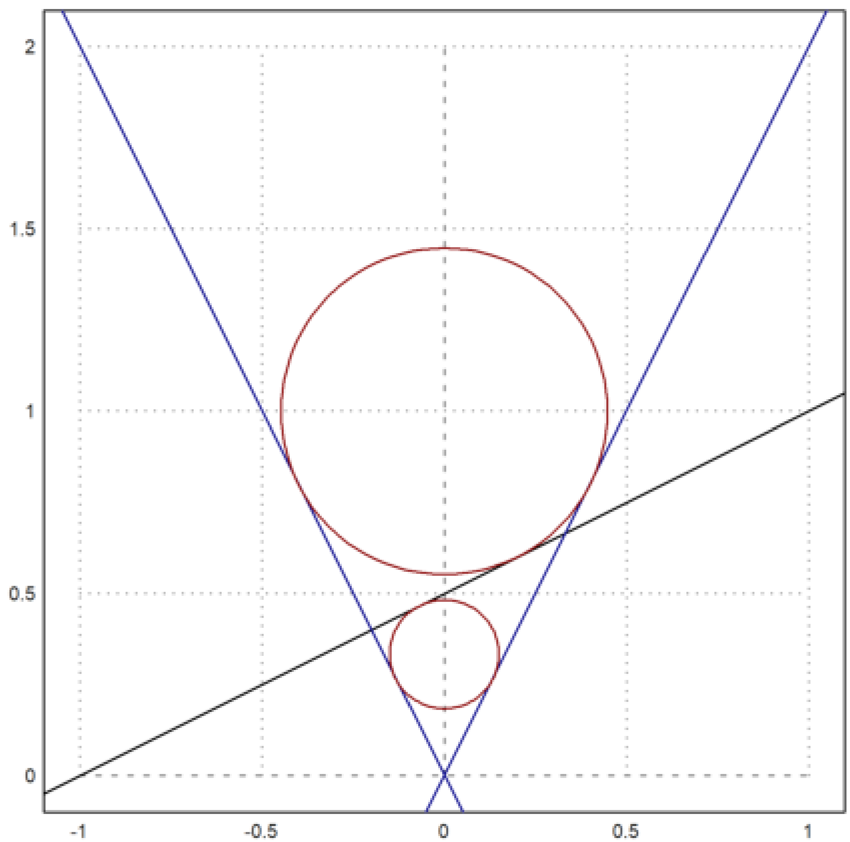

Figure 50: images-175.png

Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

>load povray;

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan pemandangan dengan tepat.

>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);

Selanjutnya kita menulis dua bola ke file Povray.

>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));

>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));

Dan kerucutnya, transparan.

>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));

Kami menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

>gp=g();

>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");

>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];

>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

>function turnz(v) := return

>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);

>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));

>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);

>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];

>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));

>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];

>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);

>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));

>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));

>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);

>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);

>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));

>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);

>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));

Mulai program Povray.

>povend();

Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu menempatkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

>function scene () ...

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

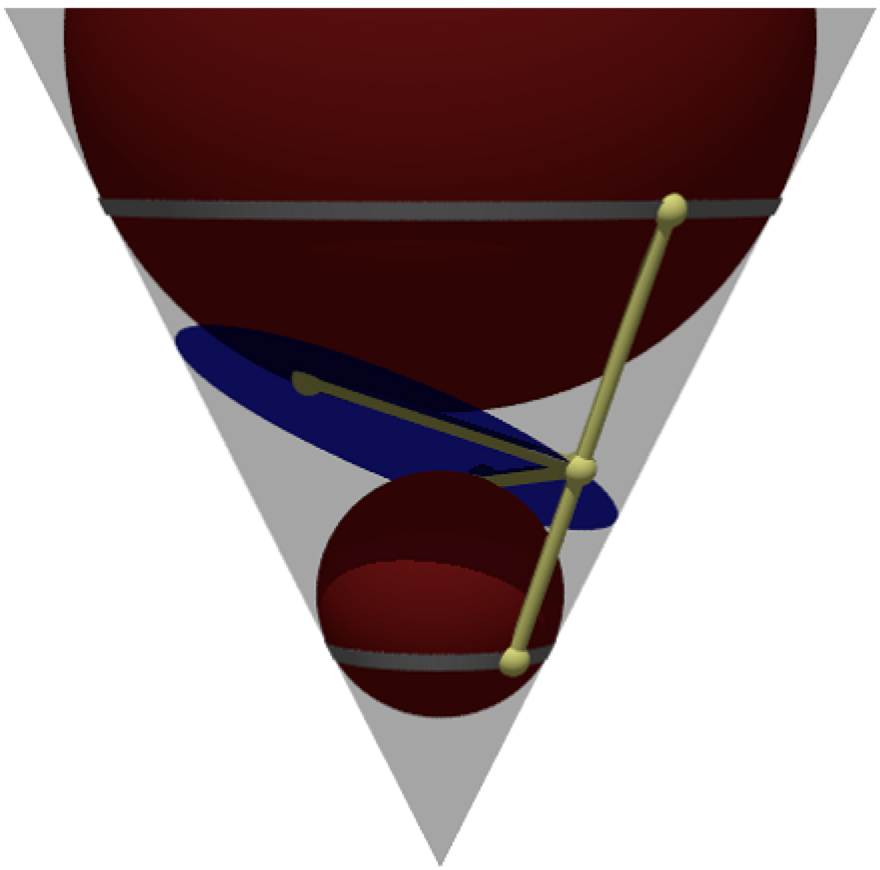

Figure 51: images-176.png

```
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk mengapresiasi efek berikut ini.

>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);

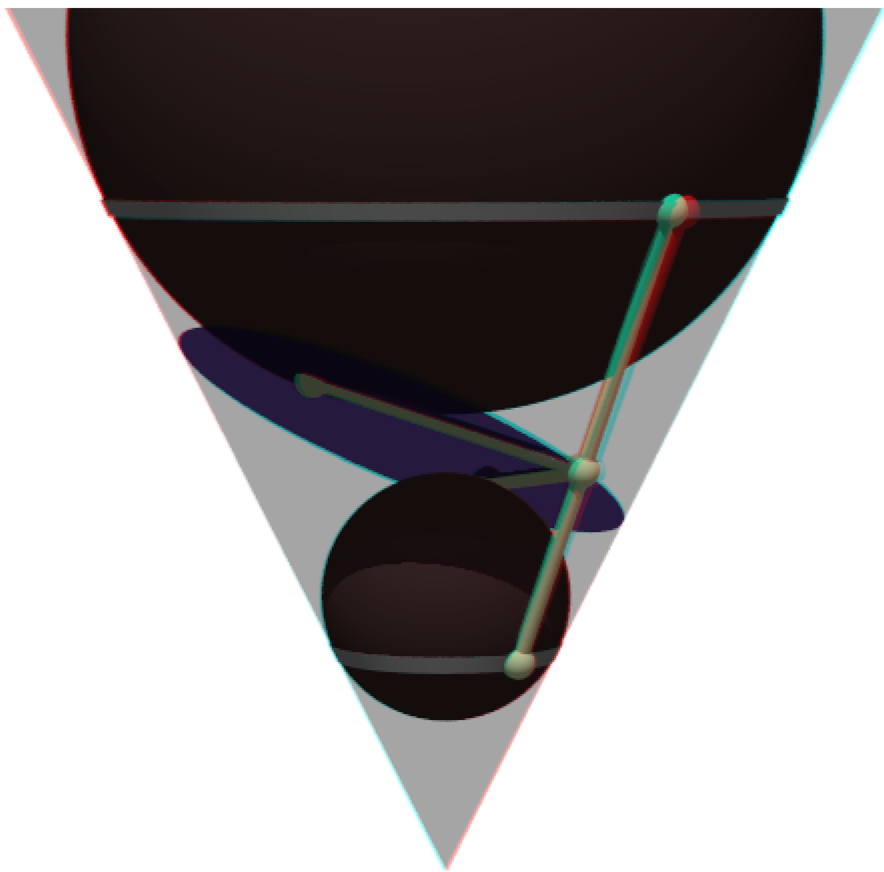

Figure 52: images-177.png

Contoh 8: Geometri Bumi

Pada buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file “spherical.e” pada folder contoh. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

>load “spherical.e”;

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];

>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk pos, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))

```
      65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(asum)

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang

```
2116.02948749 km^2
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];

>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

>esdist(Tugu,Monas)-> "km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta

```
431.565659488km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

>degprint(esdir(Tugu,Monas))

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

>sposprint(Monas),

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita akan melenceng dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;

Hasilnya berbeda jauh.

>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

>sdegprint(esdir(P1,P2))

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti judul yang sama terlalu lama.

>skmprint(esdist(p,P2))

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;

>skmprint(esdist(p,Monas))

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran HI menuju Monas dengan fungsi navigate.

>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang memetakan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

>function testplot …

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):

Atau, gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph-nya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):

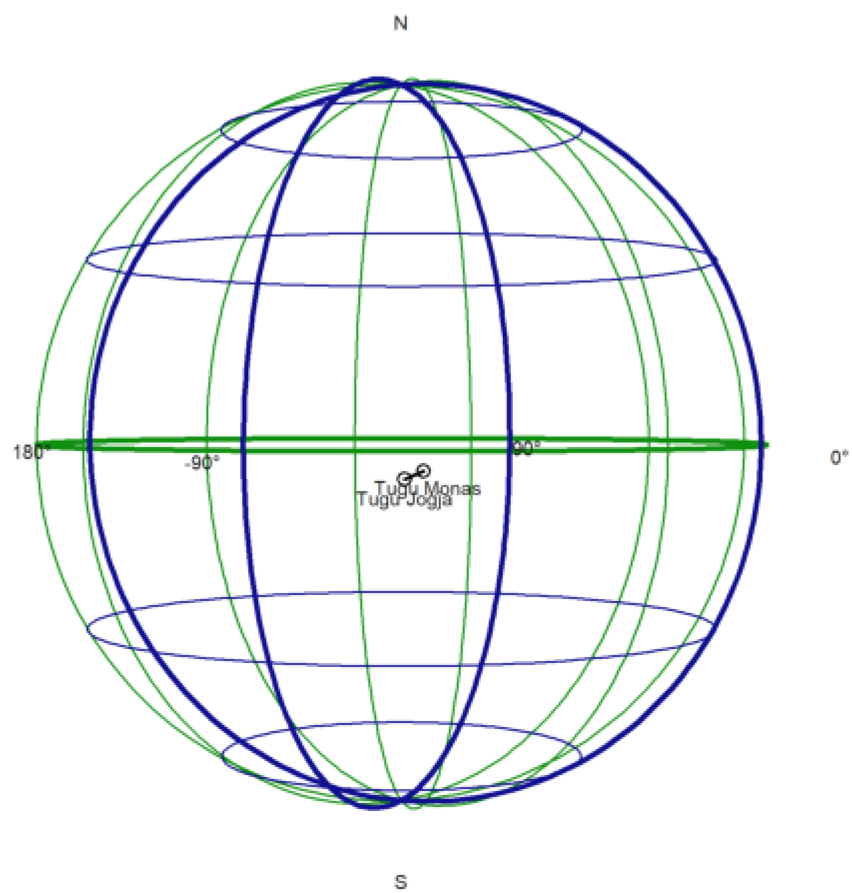

Figure 53: images-178.png

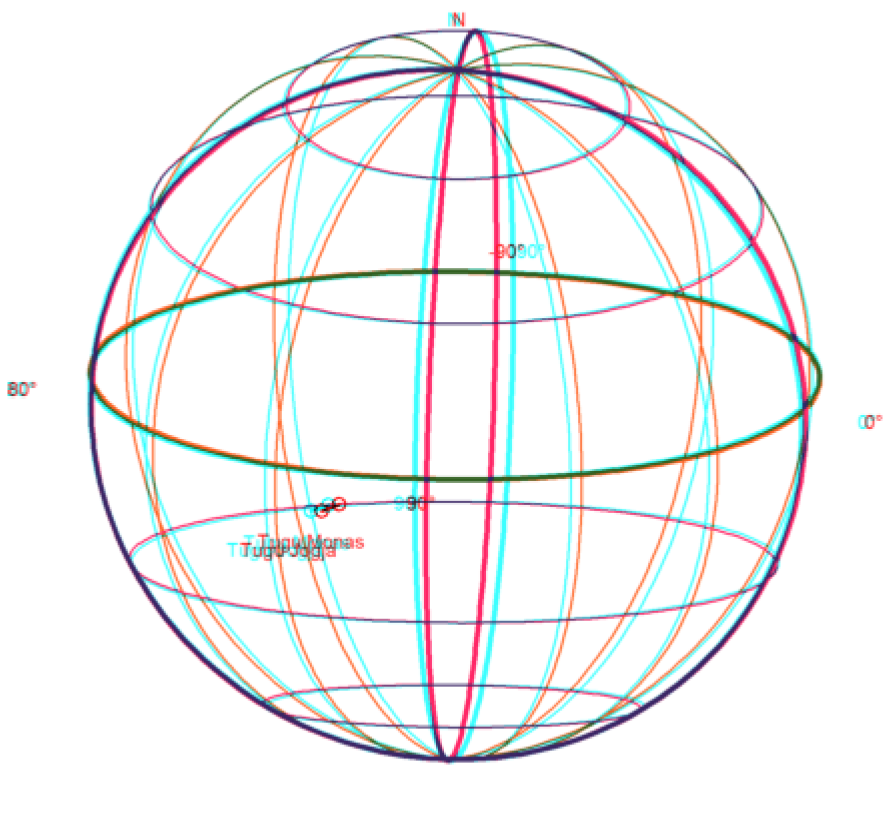

Figure 54: images-179.png

Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah
- (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n
- dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar
- kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik
- pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

>load geometry

```
Numerical and symbolic geometry.
```

>setPlotRange (-5,5,-5,5);

>A = [-3,-3]; plotPoint(A,“A”):

>B = [3, -3]; plotPoint(B,“B”):

>C = [0, 4] ; plotPoint(C,“C”):

>plotSegment(A, B,“c”);

>plotSegment(B, C, “a”);

>plotSegment(A, C, “b”);

>aspect(1):

>c=circleThrough(A,B,C);

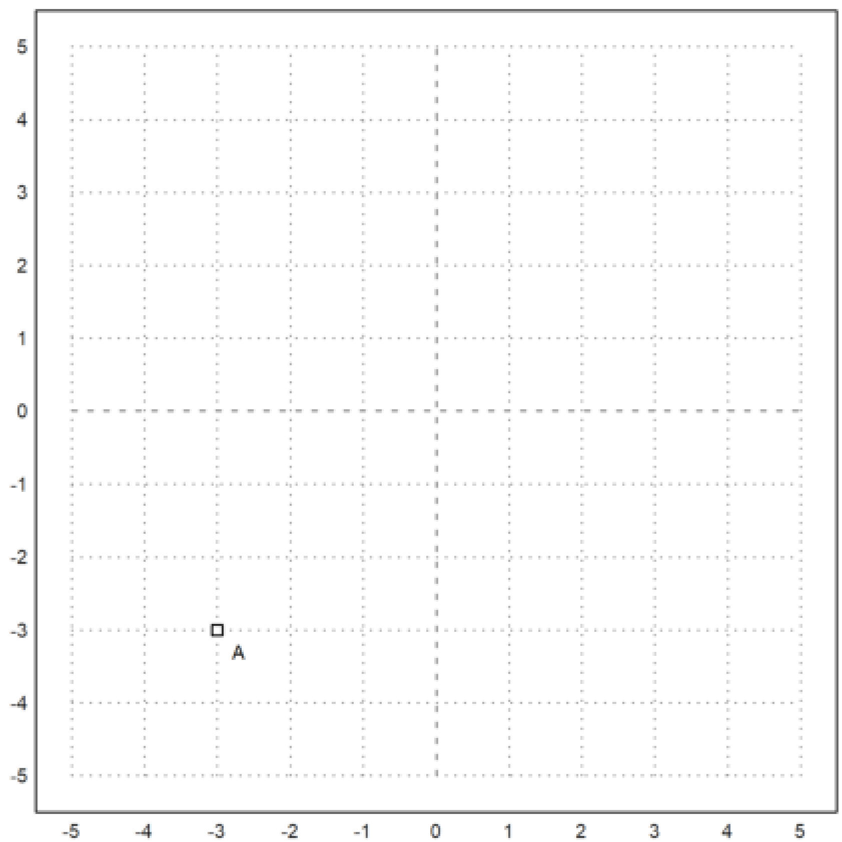

Figure 55: images-180.png

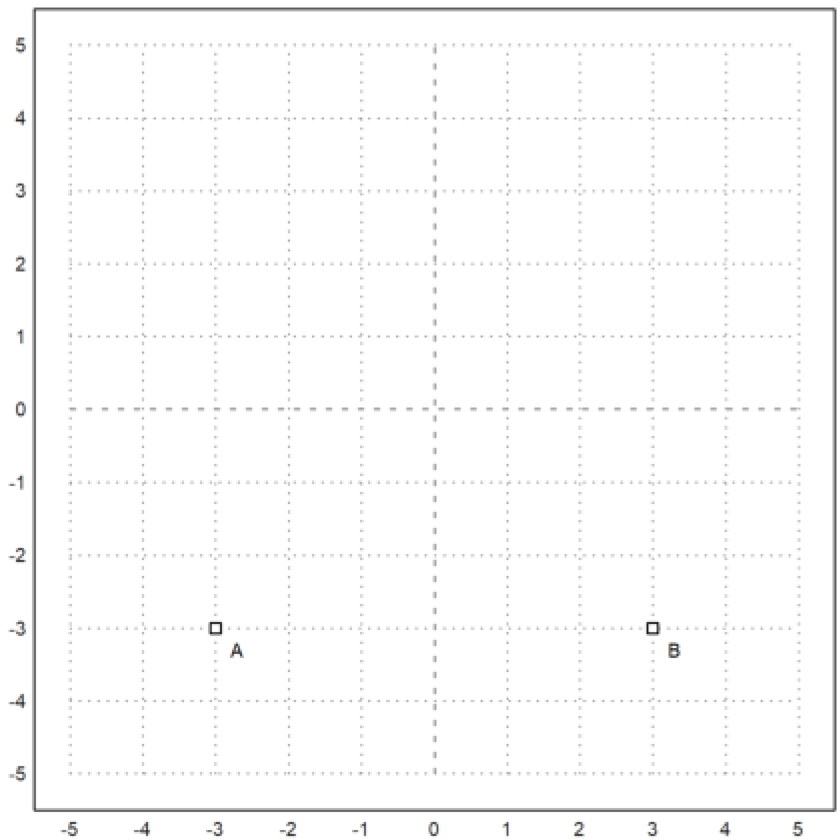

Figure 56: images-181.png

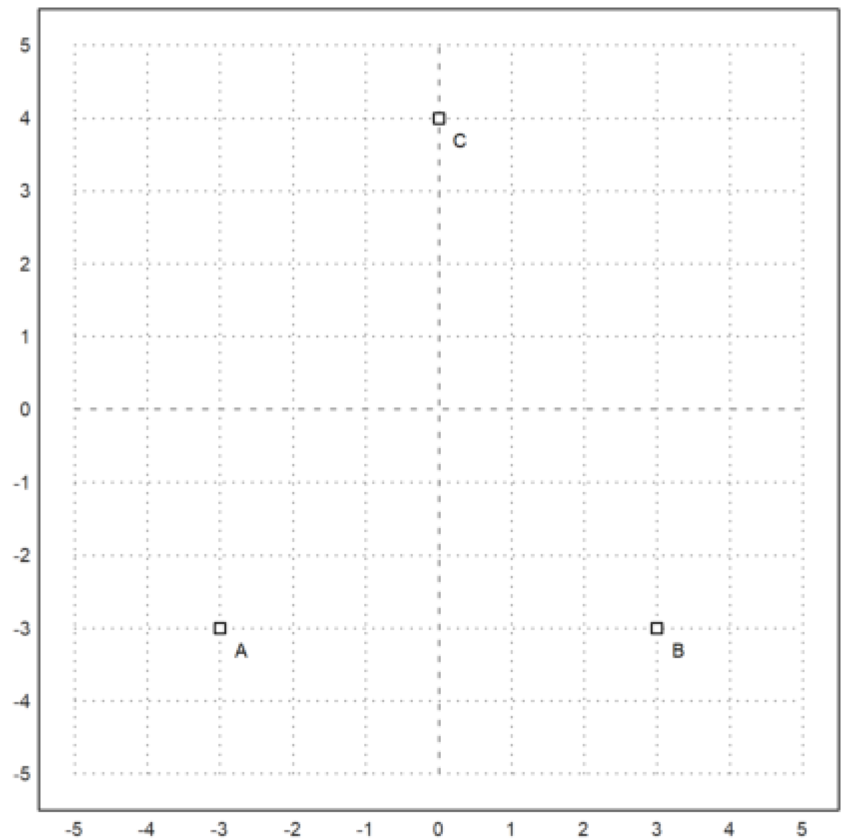

Figure 57: images-182.png

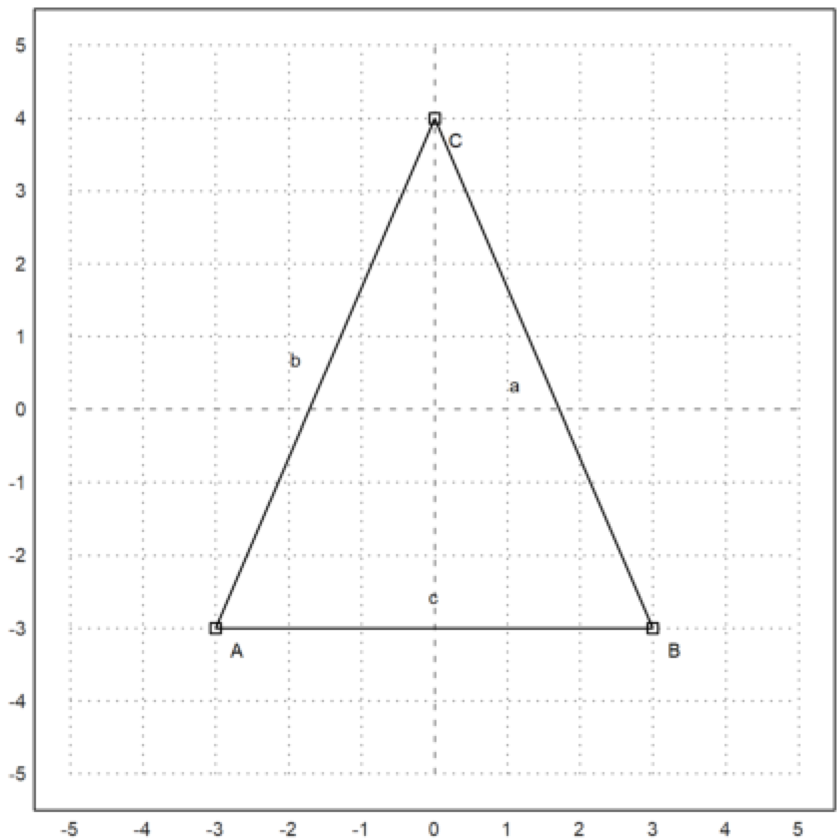

Figure 58: images-183.png

>R=getCircleRadius(c);

>O=getCircleCenter(c);

>plotPoint(O,“O”);

>l=angleBisector(A,C,B);

>color(5); plotLine(l); color(1);

>plotCircle(c, “Lingkaran luar Segitiga ABC”):

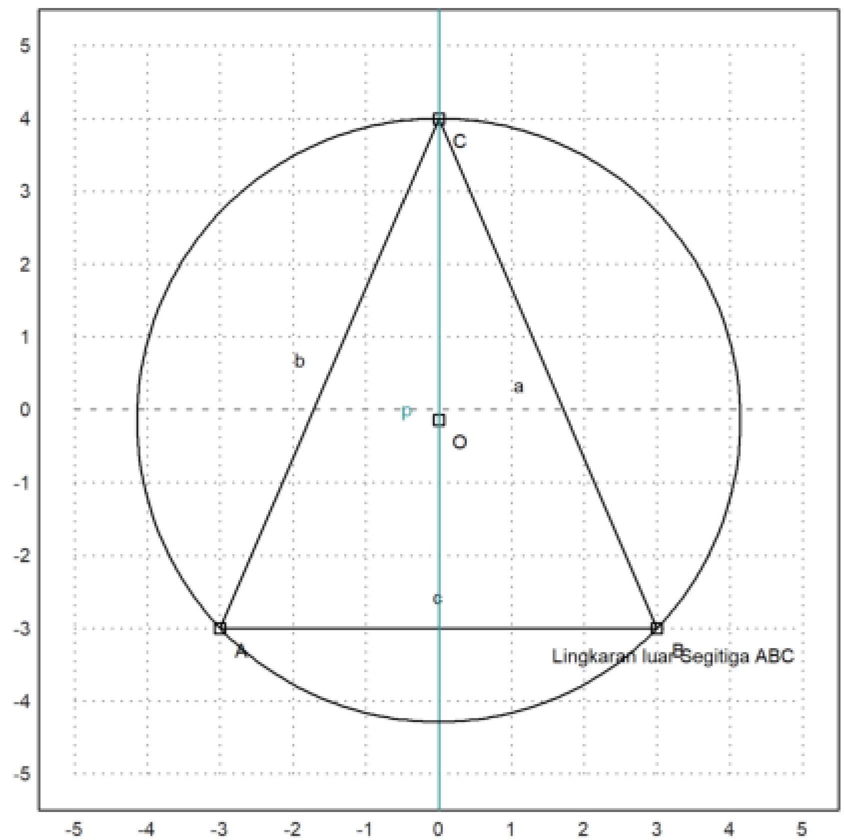

Figure 59: images-184.png

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya y= axˆ2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.

- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

>setPlotRange(5); D=[-1,0]; E=[-4,0]; F=[0,-4];

>plotPoint(D,“D”); plotPoint(E, “E”); plotPoint(F,“F”):

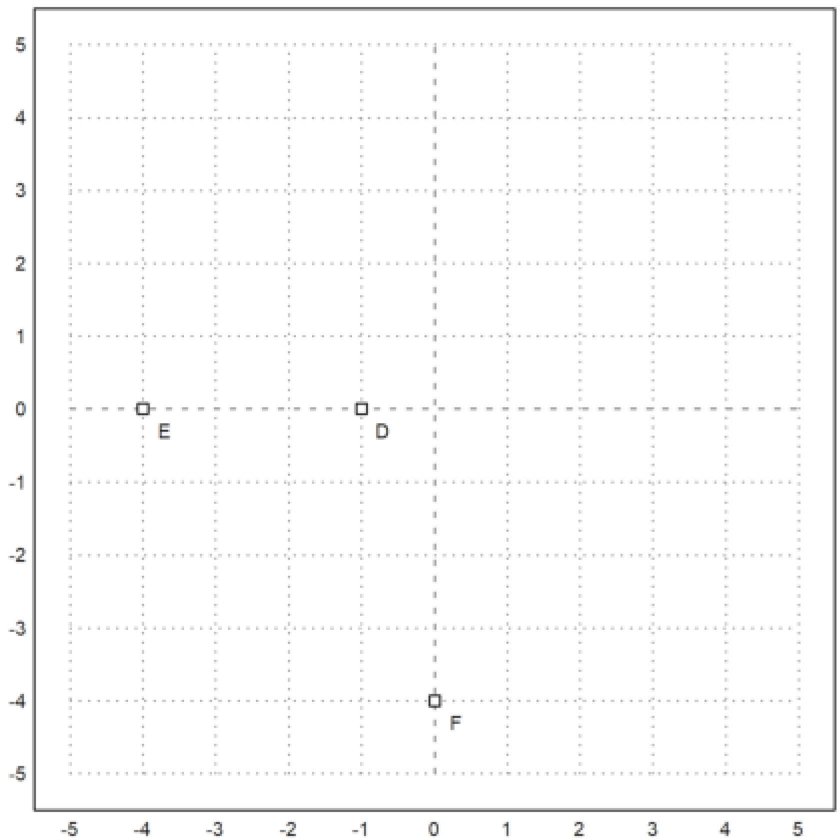

Figure 60: images-185.png

>sol &= solve ([a+b=-c, 16*a+4*b=-c, c=-4], [a, b, c])

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

>function y(x) &= -xˆ2-5*x-4

```
   2
- x  - 5 x - 4
```

>plot2d(“y”,-5,5,-5,5):

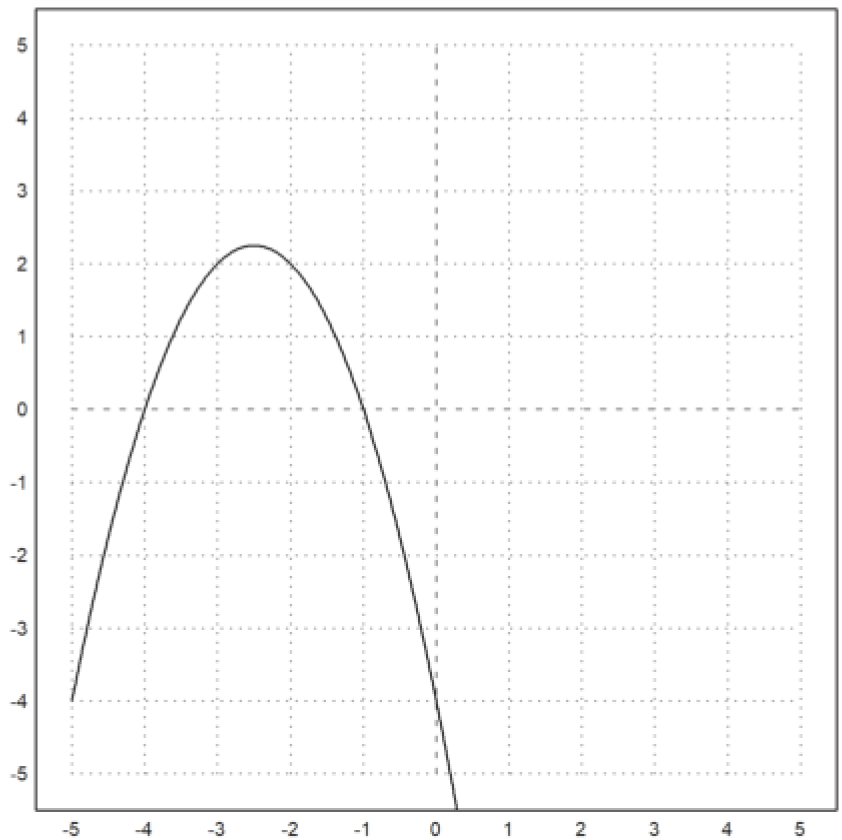

Figure 61: images-186.png

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.
    - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
    - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
    - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
    - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

>load geometry

```
Numerical and symbolic geometry.
```

>setPlotRange(-5,5,-5,5);

>A=[-4,-4]; plotPoint(A,“A”);. . .
> B=[4,-4]; plotPoint(B,“B”);. . .
> C=[4,4]; plotPoint(C,“C”);. . .
> D=[-4,4]; plotPoint(D,“D”);

>plotSegment(A,B,“ “);. . .
> plotSegment(B,C,”“);. . .
> plotSegment(C,D,”“);. . .
> plotSegment(A,D,” “);

>aspect(1):

>l=angleBisector(A,B,C); m=angleBisector(B,C,D);

>P=lineIntersection(l,m);

>color(3); plotLine(l); plotLine(m); color(1);

>plotPoint(P,“P”):

Karena keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik, yaitu titik P, maka segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung

>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));

>plotCircle(circleWithCenter(P,r),“Lingkaran dalam segiempat ABCD”):

Terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama, yaitu lingkaran dalam segi-4

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB

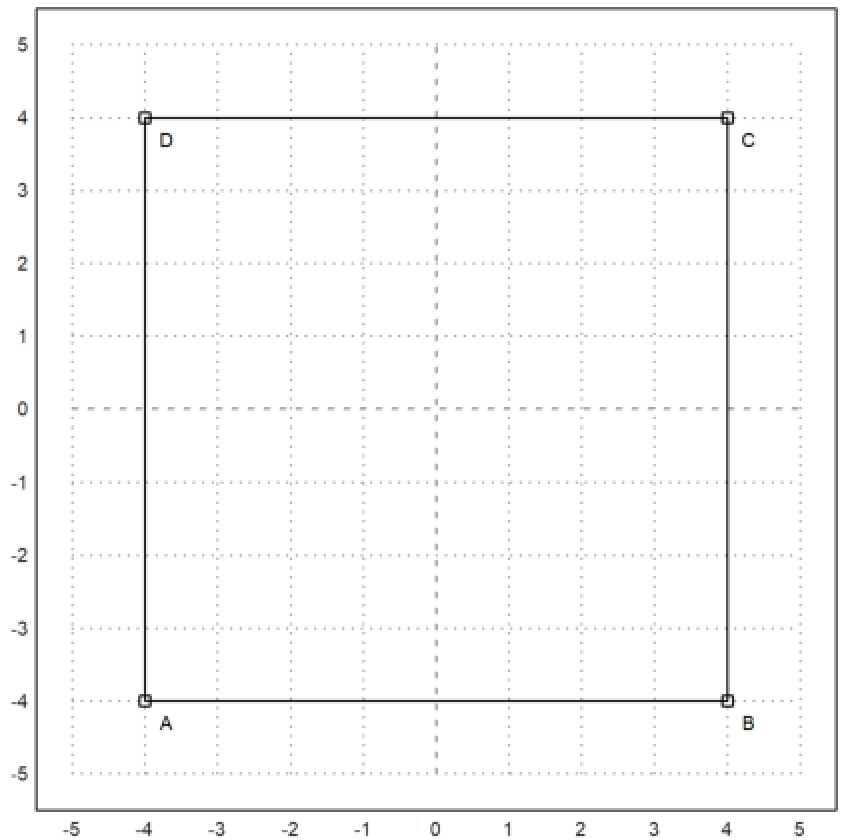

Figure 62: images-187.png

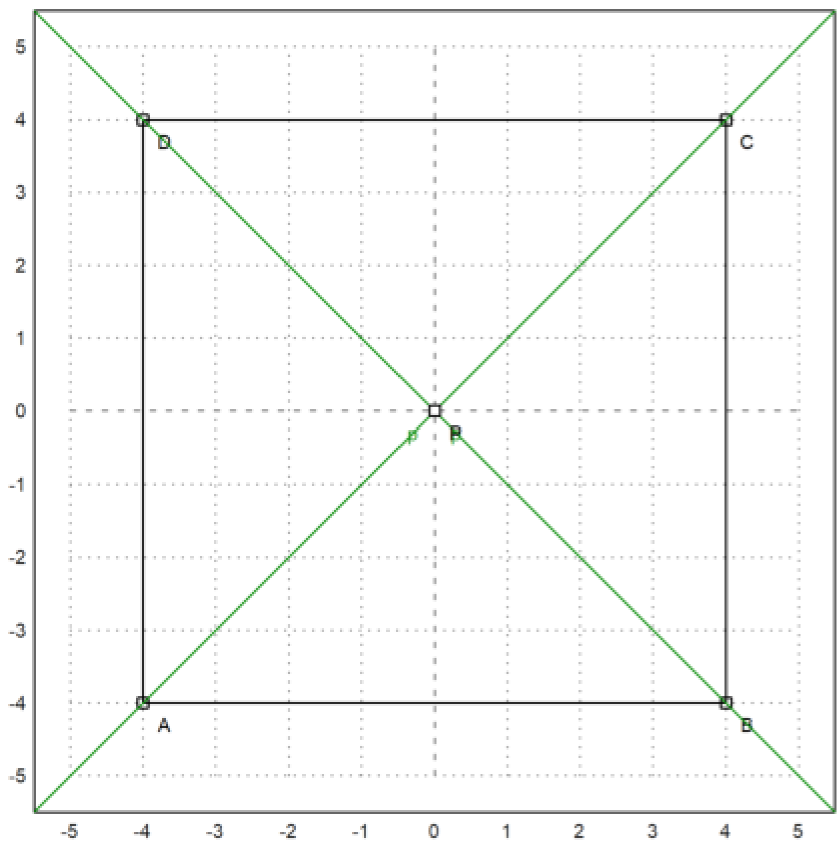

Figure 63: images-188.png

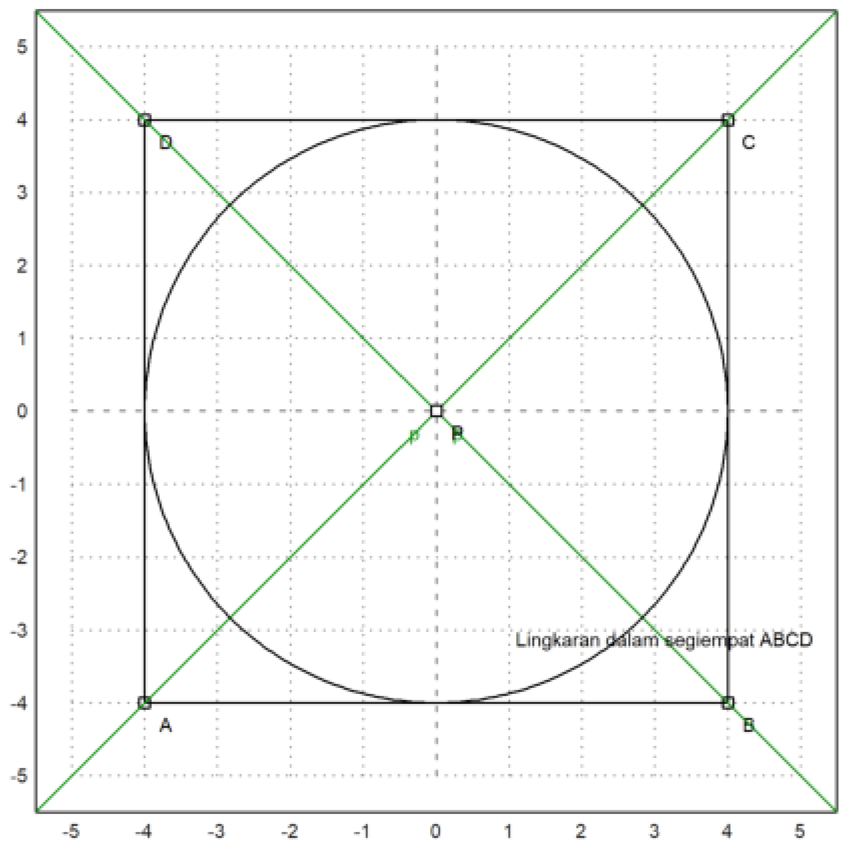

Figure 64: images-189.png

8

>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD

8

>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD

8

>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC

8

>AB.CD

64

>AD.BC

64

Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

Maka terbukti bahwa segi-4 tersebut adalah segi-4 garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

   Penyelesaian:
   Diketahui kedua titik fokus P=[-1,-1] dan Q=[1,-1]

>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];

>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])$^{2+(y-P[2])}$2)

>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])$^{2+(y-P[2])}$2)+sqrt((x-Q[1])$^{2+(y-Q[2])}$2)

>fcontour(“d2”,xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1);

>insimg;

Grafik yang lebih menarik

>plot3d(“d2”,xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1);

>insimg;

Batasan ke garis PQ

>plot2d(“abs(x+1)+abs(x-1)”,xmin=-3,xmax=3);

>insimg;

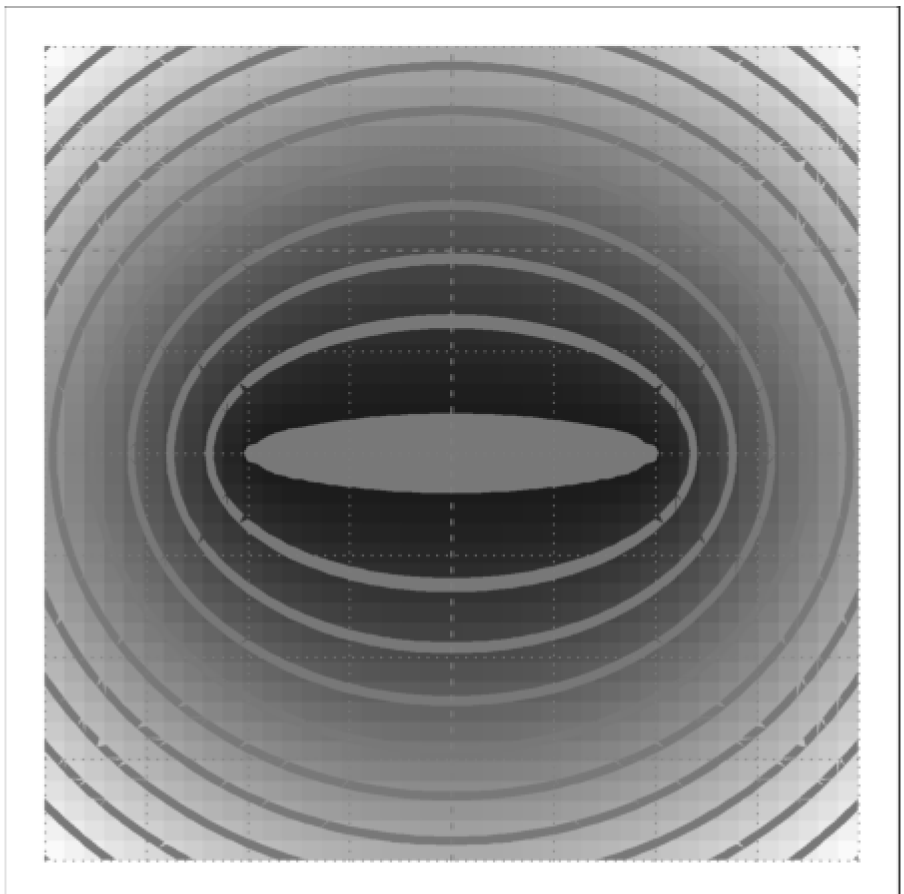

Figure 65: images-190.png

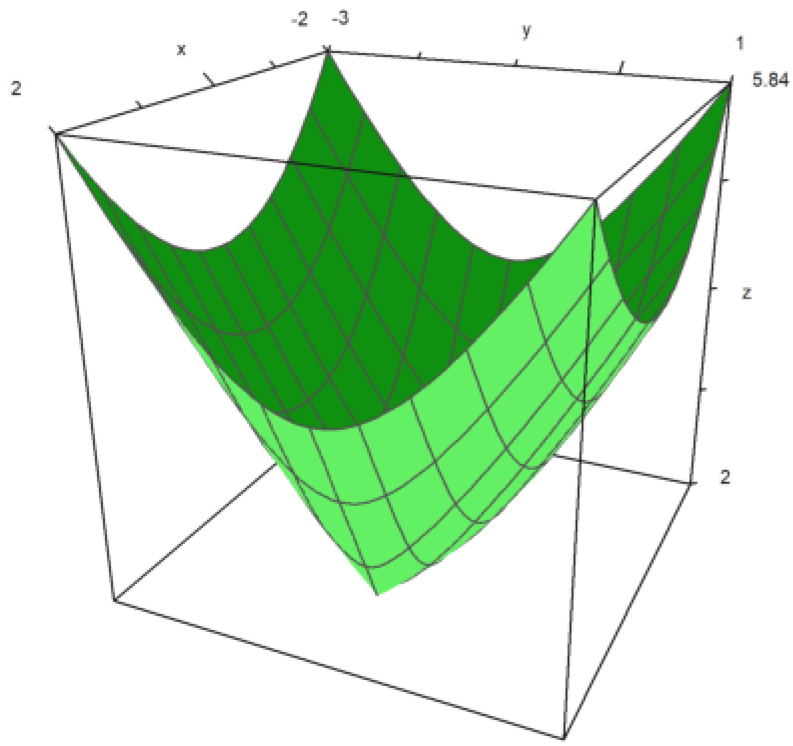

Figure 66: images-191.png

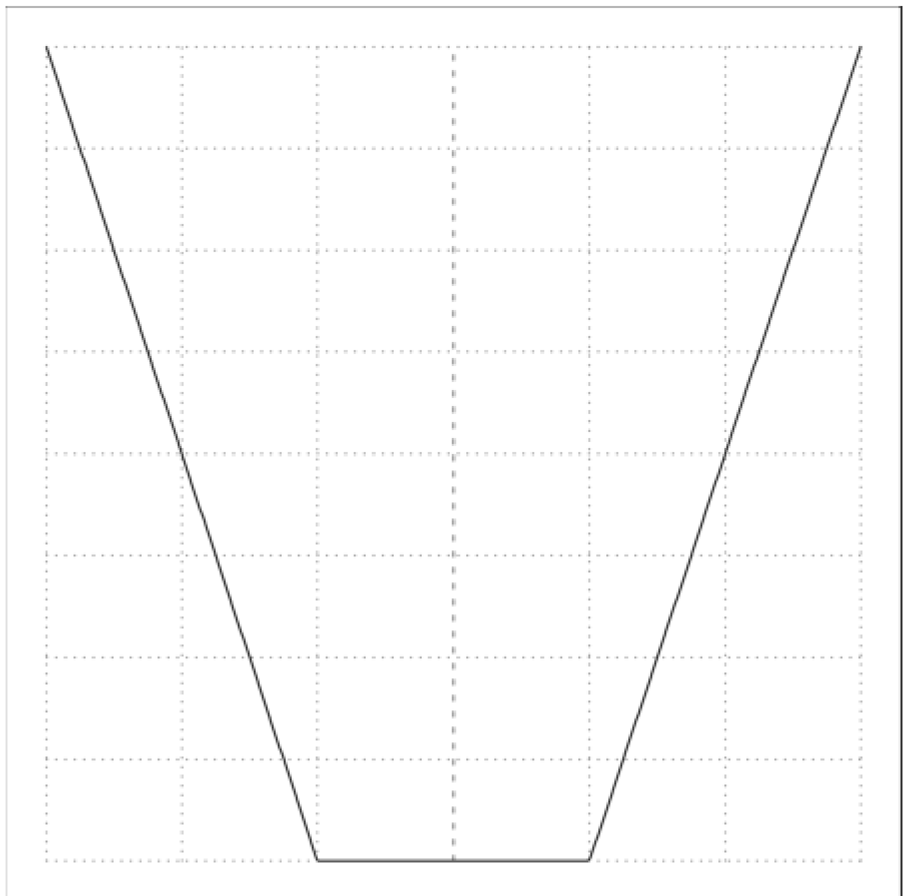

Figure 67: images-192.png

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];

>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])$^{2+(y-p[2])}$2)

>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])$^{2+(y-P[2])}$2)+sqrt((x+Q[1])$^{2+(y+Q[2])}$2)

>fcontour(“d2”,xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1);

>insimg;

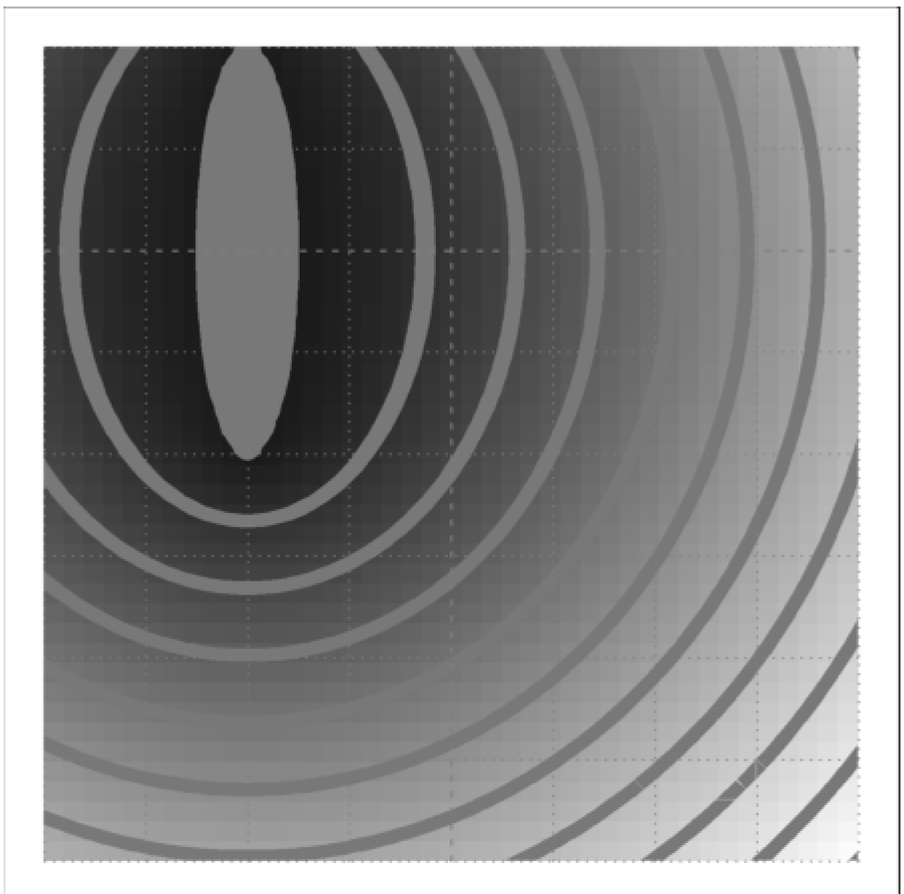

Figure 68: images-193.png

>plot3d(“d2”,xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1);

>insimg;

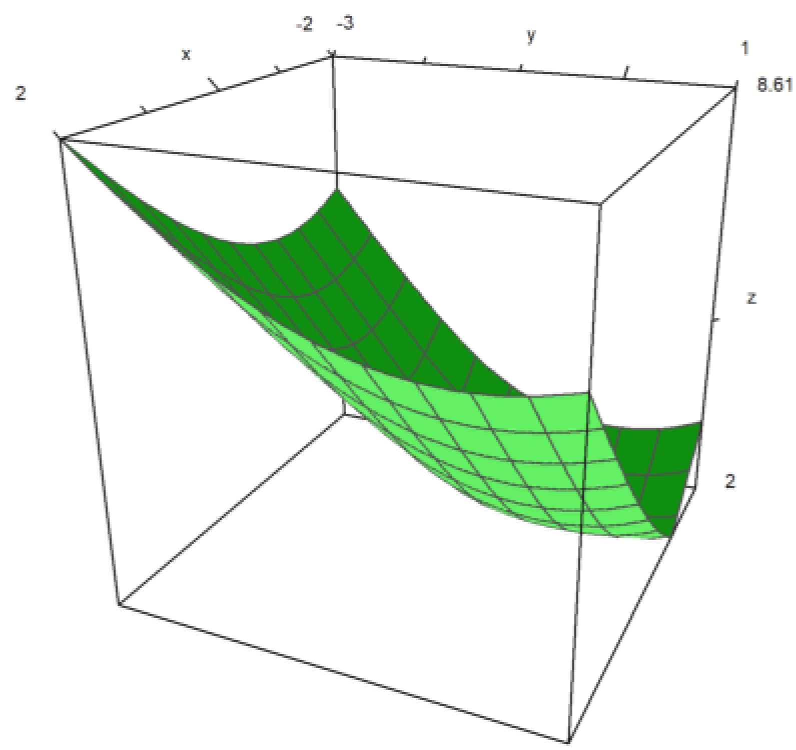

Figure 69: images-194.png