

# Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

1. Fungsi(fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
2. Limit Fungsi
3. Turunan Fungsi
4. Integral Tak Tentu
5. Integral Tentu
6. Barisan dan Deret
7. Fungsi multivariabel

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).



# 1. Fungsi

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota dari suatu himpunan (domain) dengan tepat satu anggota himpunan lain (kodomain). Secara sederhana, fungsi dapat dipandang sebagai mesin yang menerima input (nilai  $x$ ) dan menghasilkan output (nilai  $y$ ).

$$f : A \rightarrow B$$

## Sifat-sifat Fungsi

## 1. Injektif (satu-satu)

Fungsi injektif adalah fungsi dengan tiap elemen kodomain tidak memiliki lebih dari satu elemen domain. Fungsi injektif disebut juga dengan “fungsi satu-satu” karena tiap elemen kodomain hanya boleh berelasi satu kali.

## 2. Surjektif

Fungsi surjektif adalah fungsi dengan semua elemen kodomain berelasi dengan elemen domain. Fungsi surjektif juga disebut fungsi “on-to”.

## 3. Bijektif

Fungsi bijektif adalah fungsi yang memenuhi sifat injektif dan surjektif. Fungsi bijektif juga disebut fungsi korespondensi satu-satu, karena elemen domain dan kodomain semuanya berelasi satu-satu.

## Jenis Fungsi yang akan dipelajari

### 1. Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar adalah jenis fungsi matematika yang dibentuk dengan menggunakan operasi-operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat. Secara umum, fungsi aljabar merupakan fungsi yang dapat dinyatakan dengan ekspresi aljabar yang melibatkan variabel dan konstanta. Fungsi ini termasuk di dalam kategori fungsi elementer karena bisa dinyatakan dalam bentuk dasar.

## 2. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang menghubungkan sudut suatu segitiga siku-siku dengan rasio panjang sisi-sisinya. Fungsi ini sangat penting dalam matematika, khususnya dalam geometri, analisis, dan aplikasi di bidang fisika, teknik, dan astronomi. Fungsi-fungsi trigonometri yang paling umum adalah sinus, kosinus, tangen, serta turunan dan kebalikannya seperti secan, kosekan, dan kotangen.

## 3. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi matematika di mana variabel independen (biasanya dilambangkan dengan  $x$ ) berada di eksponen. Bentuk umum fungsi eksponensial adalah:

$$f(x) = a^x$$

\*  $a$  adalah bilangan positif (basis) dan tidak sama dengan 1

- $x$  adalah variabel eksponen

Fungsi eksponensial yang paling umum adalah fungsi eksponensial alami dengan basis bilangan euler ( $e = 2.718$ ). Fungsi ini sering digunakan dalam berbagai aplikasi ilmiah yang dinyatakan sebagai:

$$f(x) = e^x$$

## 4. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah kebalikan atau invers dari fungsi eksponensial. Fungsi logaritma dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \log a(x)$$

## 5. Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah operasi matematika di mana dua fungsi digabungkan sehingga output dari satu fungsi menjadi input dari fungsi yang lain.

Misal, diketahui  $f$  dan  $g$  dua fungsi sebarang maka fungsi komposisi  $f$  dan  $g$  ditulis

$$g \circ f$$

didefinisikan sebagai:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

sehingga fungsi  $f$  dikerjakan terlebih dahulu daripada  $g$ .

## Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama\_fungsi := rumus fungsi (fungsi numerik),
- Menggunakan format nama\_fungsi &= rumus fungsi (fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama\_fungsi &&= rumus fungsi(fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT (Mendefinisikan fungsi yang lebih kompleks dengan beberapa langkah atau percabangan)

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
```

fungsi ini mendefinisikan nilai dari  $f(x)$  dan untuk fungsi  $\exp(\cos(x))$  merupakan dua fungsi dimana:

$\cos(x)$  digunakan untuk menghitung nilai  $\cos$  di sudut  $x$  dan  $\exp()$  digunakan untuk mendefinisikan fungsi eksponensial ( $e$  pangkat)

```
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
```

```
4.31977682472
```

```
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya karena bukan fungsi numerik
```

```
Variable or function a not found.
```

```
Error in:
```

```
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya karena bukan fungsi nume ...
^
```

```
>function f(x) := 3*x^3+exp(cos(x))
```

```
>f(1)
```

```
4.71652569955
```

```
>f(2)
```

```
24.6595834124
```

```
>f(-2:2)
```

```
[-23.3404, -1.28347, 2.71828, 4.71653, 24.6596]
```

```
>f(-2)-f(2)
```

```
-48
```

```
>plot2d("f(x)",-2,2):
```

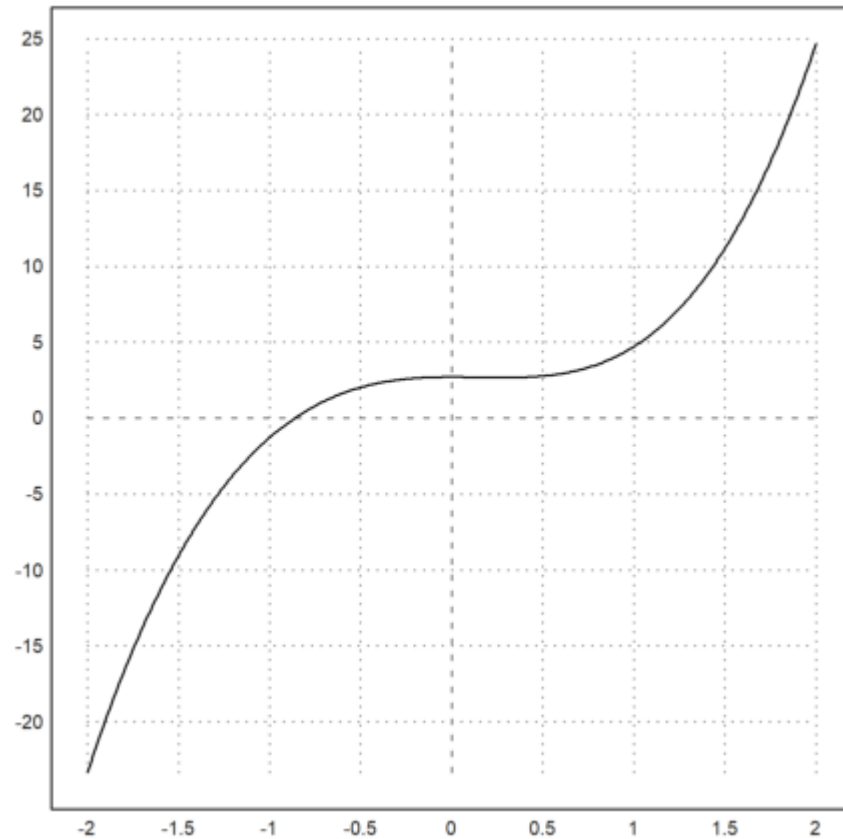


Figure 1: images-008.png

plot2d : fungsi ini digunakan untuk perintah membuat plot dua dimensi

"f(x)" : memanggil fungsi f(x)

-2,2 : grafik akan ditampilkan pada sb x dari rentang -2 sampai 2

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}$$

```

>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(5)
0.527046276695
>g(20)
0.878051853076
>g(21)
0.883737367965
>g(20:25)
[0.878052, 0.883737, 0.888915, 0.89365, 0.897998, 0.902003]
Silakan Anda plot grafik fungsi di atas!
>aspect(1.5); plot2d("g(x)",20,25):

```

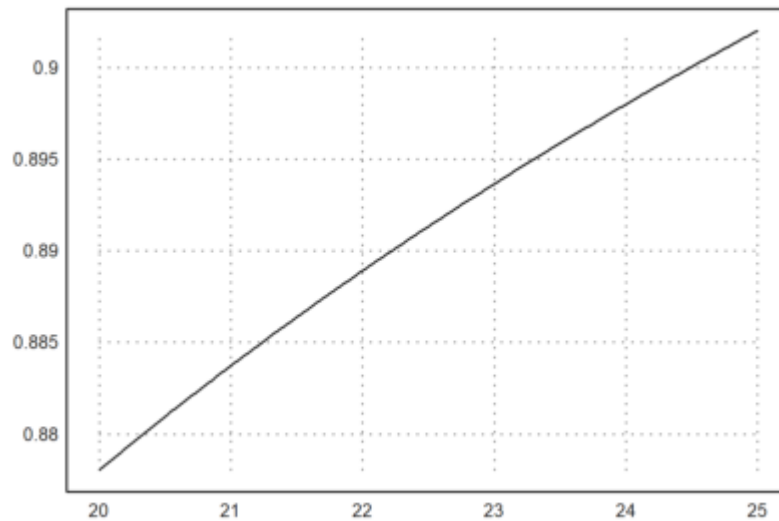


Figure 2: images-010.png

```

>f(g(5)) // komposisi fungsi
2.81254111152

```

$f(g(5))$  adalah notasi yang menunjukkan komposisi fungsi.

Ini berarti kita akan melakukan dua langkah perhitungan:

Hitung  $g(5)$ : Pertama, kita mencari nilai dari fungsi  $g$  ketika  $x = 5$ .

Hasilnya akan kita sebut sebagai a.

Hitung  $f(a)$ : Selanjutnya, kita masukkan nilai a yang kita dapatkan dari langkah 1 ke dalam fungsi f.

Hasil akhir dari perhitungan ini adalah nilai dari  $f(g(5))$ .

```
>g(f(5))
```

```
0.993366510057
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
```

```
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.81254111152
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[2.71828, 4.71653, 24.6596, 81.3716, 192.52, 376.328, 650.612,
1031.13, 1536.86, 2187.4, 3000.43]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[2.71828, 4.71653, 24.6596, 81.3716, 192.52, 376.328, 650.612,
1031.13, 1536.86, 2187.4, 3000.43]
```

```
>gmap(20:25)
```

```
[0.878052, 0.883737, 0.888915, 0.89365, 0.897998, 0.902003]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara “inline” menggunakan format  $:=$ , melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata “map” digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata “map” fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x)
```



```

    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
endfunction
>f(4)
64
>f(-2)
4
>f(-5:5)
[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):

```

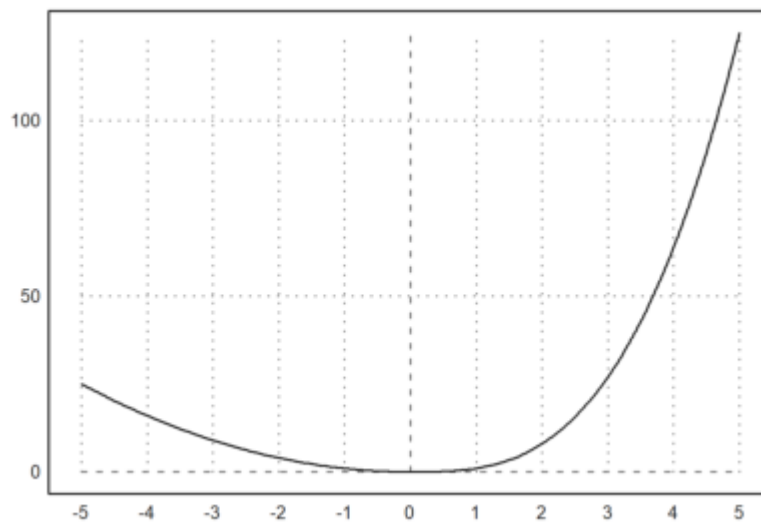


Figure 3: images-014.png

$$f(x) = 2e^x$$

```

>function f(x) &= 2*E^x; // fungsi simbolik
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik

```

$$2e^a$$

```

>function a:=12

```

```
>f(a)
325509.582838
> f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
30.308524483
```

$$g(x) = 3x + 1$$

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3x + 1$$

```
>g(50)
```

```
151
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$\frac{3x + 1}{2} E$$

```
> plot2d("h(x)",-1,1):
```

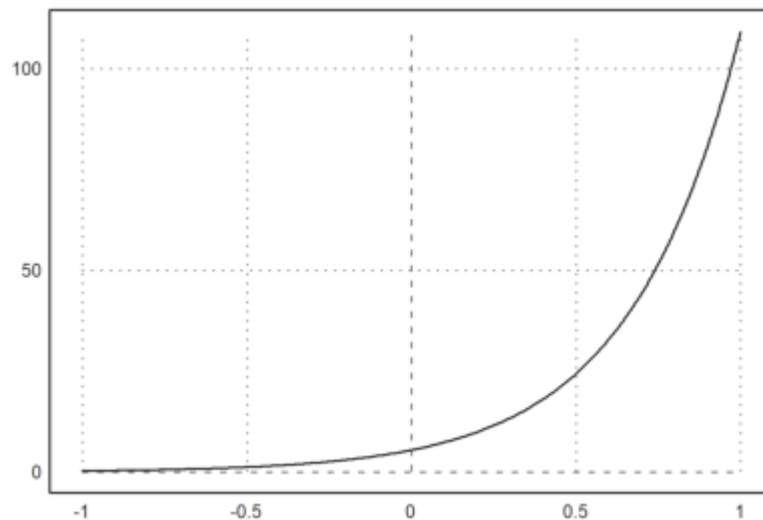


Figure 4: images-018.png

## Contoh Fungsi Aljabar

1. Diberikan fungsi:

$$f(x) = 6x^3 + 12\sqrt{x}$$

Tentukan nilai  $f(1)$  dan  $f(4)$  kemudian cari nilai  $f(4)-2f(1)$

Gambarkan juga grafiknya di  $f(1:4)$ !

```
>function f(x) := 6*x^3+12*sqrt(x)
```

```
>f(1)
```

```
18
```

```
>f(4)
```

```
408
```

```
>f(4)-2*f(1)
```

```
372
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f",1,4):
```

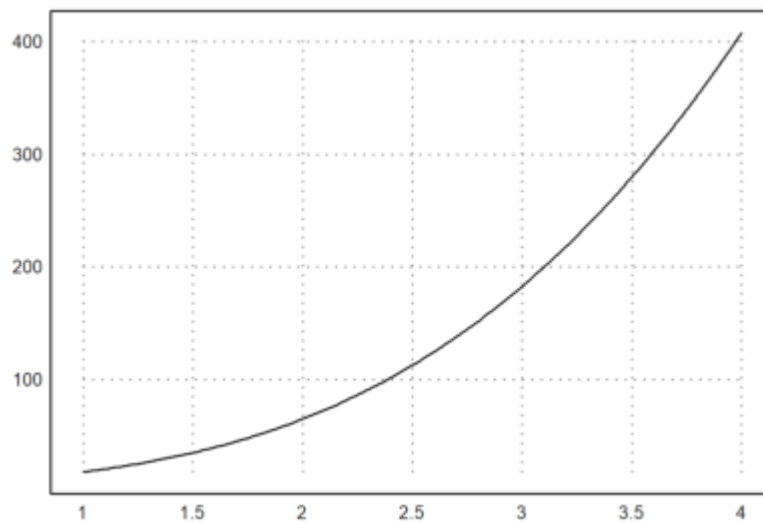


Figure 5: images-020.png

2. Diberikan fungsi:

$$k(x, y) = 12x^3 + 4y^2 - 3x + 2$$

Tentukan nilai  $k(1,1)+k(2,3)$ !

```
>function k(x,y):= 12*x^3+4*y^2-3*x+2
```

```
>k(1,1)
```

```
15
```

```
>k(2,3)
```

```
128
```

```
>k(1,1)+k(2,3)
```

```
143
```

3. Diketahui suatu fungsi  $f(x,y,z)$  didefinisikan sebagai berikut

$$f(x, y, z) = (3x - 1) + \sqrt{x^3 - y^2 - z + 6}$$

Tentukan nilai  $f(3,4,5)$ !

```
>function f(x,y,z):= (3*x-1)+ sqrt(x^3-y^2-z+6)
```

```
>f(3,4,5)
```

```
11.4641016151
```

## Contoh Fungsi Trigonometri

1. Suatu fungsi trigonometri didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{2x + 3x^2}$$

Tentukan nilai dari  $f(6)-f(7)$ !

```
>function f(x):= tan(x)/2*x+3*x^2
```

```
>f(6)-f(7)
```

```
-42.9230865137
```

2. Diberikan fungsi:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + \sin(y)}{xy}$$

Tentukan nilai  $f(4)$ !

```
>function f(x,y) := x^2+sin(x)/x*y
```

```
>f(4,2)
```

```
15.6215987523
```

```
>plot3d("f",-4,4):
```

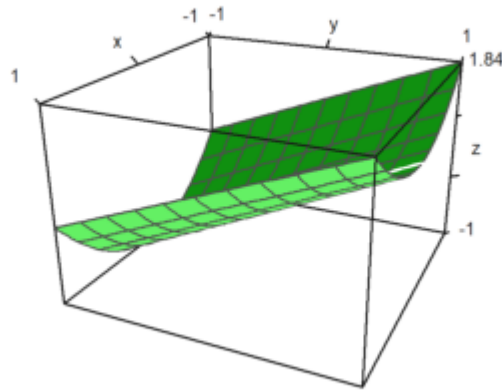


Figure 6: images-025.png

3. Diberikan suatu fungsi

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(x)}{\cos(z) + \sin(x)} + \tan(y)$$

tentukan nilai  $f(x, y, z)$  bila  $x=1$ ,  $y=2$ , dan  $z=-3$ !

```
>function f(x,y,z)&= sin(x)/(sin(x)+cos(z))+tan(y); $f(x,y,z)
```

$$\frac{\sin x}{\cos z + \sin x} + \tan y$$

```
>f(1,2,-3)
```

```
-7.85069041214
```

## Contoh Fungsi Eksponensial

1. Diberikan sebuah fungsi  $f(x)$  sebagai berikut:

$$f(x) = 3^x$$

Tentukan nilai  $f(x+1)-f(x)$ !

```
>function f(x)&= 3^x;
```

```
>$f(x+1)
```

$$3^{x+1}$$

```
>$f(x)
```

$$3^x$$

```
>$f(x+1)-f(x)
```

$$2 \cdot 3^x$$

2. Fungsi  $f(m)$  didefinisikan sebagai:

$$f(m) = 27 + 8^m$$

Tentukan nilai dari  $f(3)$ ,  $2f(5)$ , dan  $f(3)/2f(5)$

```
>function f(m)&=27+8^m;
```

```
>$f(3)
```

$$539$$

```
>$2*f(5)
```

$$65590$$

```
>$f(3)/(2*f(5))
```

$$\frac{77}{9370}$$

3. Diketahui nilai  $y$  dari fungsi di bawah ini adalah 1

$$f(x) = 2^{4x-12y}$$

Tentukan nilai  $f(3)$ ,  $f(8)$ , dan buat grafiknya di  $f(3:5)$ !

```
>function f(x):=2^(4*x-12*y)
```

```
>function y:=1
```

```
>f(8)
```

$$1048576$$

```
>f(3)
```

$$1$$

```
>f(3:5)
[1, 16, 256]
>aspect(1.3); plot2d("f",3,5):
```

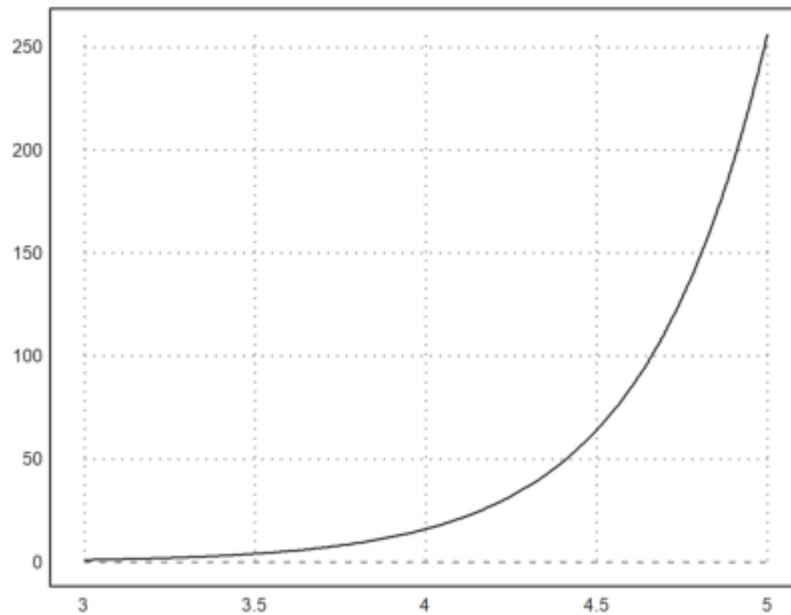


Figure 7: images-037.png

## Contoh Fungsi Logaritma

1. Diberikan fungsi di bawah ini:

$$f(x) = e^2 \cdot \left( \frac{1}{3 + 4\log(x)} + \frac{1}{7} \right)$$

Tentukan nilai  $f(0.6)$ !

```
>function f(x):= E^2*(1/(3+4*log(x))+1/7)
>f(0.6)
8.77908249441
>plot2d("f",-0.6,0.6):
```

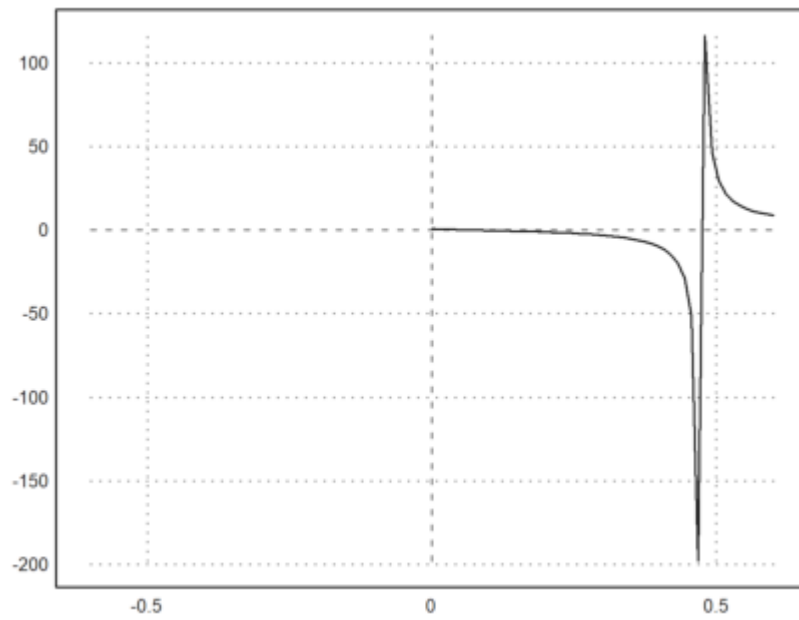


Figure 8: images-039.png



## Contoh Komposisi Fungsi

1. Untuk fungsi:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$g(x) = 3x + 5$$

cari nilai

$$f \circ g(-2), g \circ f(0)$$

```
>function f(x) := x^2-3*x+2; $f(x)
```

```
>function g(x) := 3*x+5; $g(x)
```

```
>f(g(-2)), g(f(0))
```

```
6
```

```
11
```

```
> plot2d("(3*x+5)^2-3*(3*x+5)+2",-2,2):
```

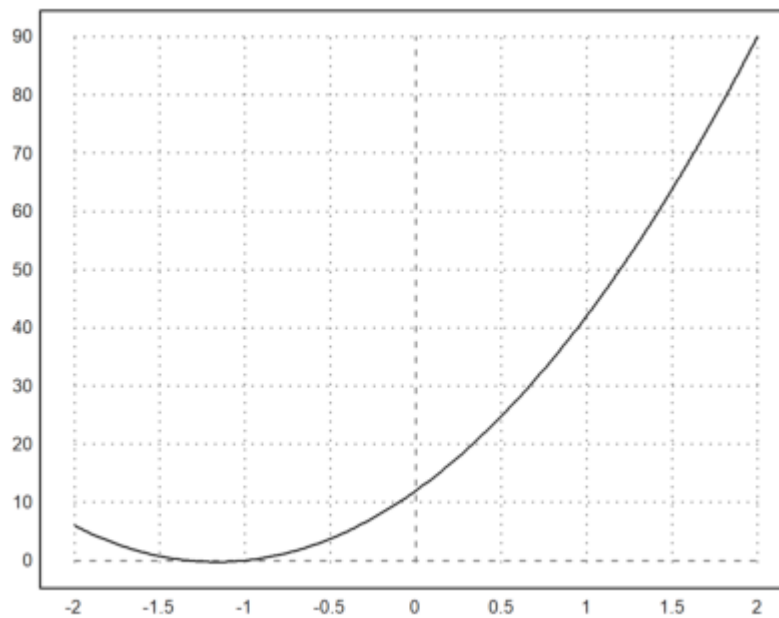


Figure 9: images-043.png



# Latihan

1. Diberikan fungsi:

$$b(x) = \frac{12x^3}{7x^2 - 3x}$$

Cari nilai  $b(1)$ , vektor  $b(1:4)$ , dan buatlah grafiknya!

```
>function b(x) := 12*x^3/(7*x^2-3*x); $b(x)
```

```
>b(1)
```

```
3
```

```
>b(1:4)
```

```
[3, 4.36364, 6, 7.68]
```

```
>plot2d("b",-2,2):
```

2. Diketahui suatu fungsi  $f(x)$  sebagai berikut:

$$f(x, y) = \frac{3(x-1)(y-2)}{2} + \frac{(y-2)(x-3)}{2} - 2(x-1)(y-3)$$

Tentukan nilai dari  $f(20,10)$  dan buat grafiknya di  $f(20,10:30,20)$ !

```
>function f(x,y) := 3*(x-1)*(y-2)/2+(y-2)*(x-3)/2 - 2*(x-1)*(y-3); $f(x,y)
```

```
>f(20,10)
```

```
30
```

```
>plot3d("f", 20,30,10,20):
```

3. Sketsakan grafik fungsi dibawah ini pada  $[-\pi, 2\pi]$

$$y(t) = \sin(5t)$$

```
>function y(t) := sin(5*t)
```

```
>plot2d("y",-pi,pi):
```

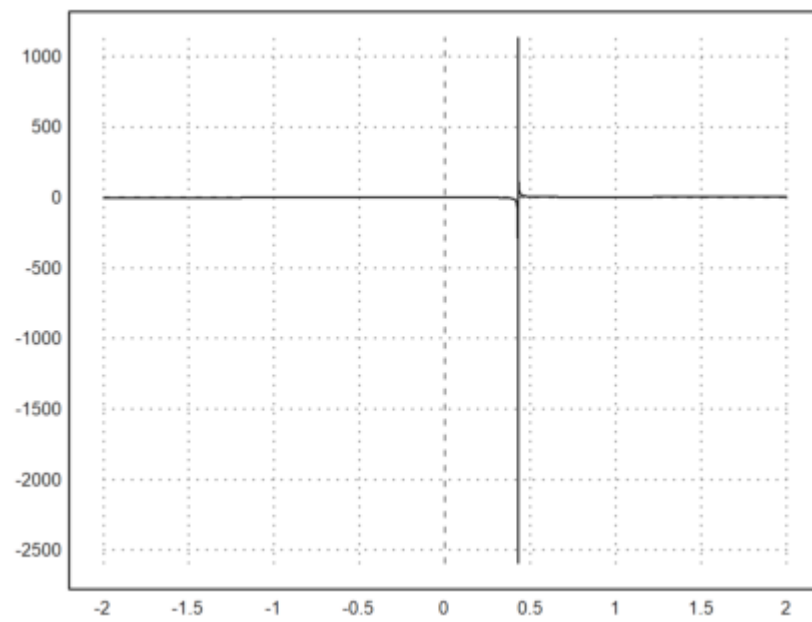


Figure 10: images-045.png

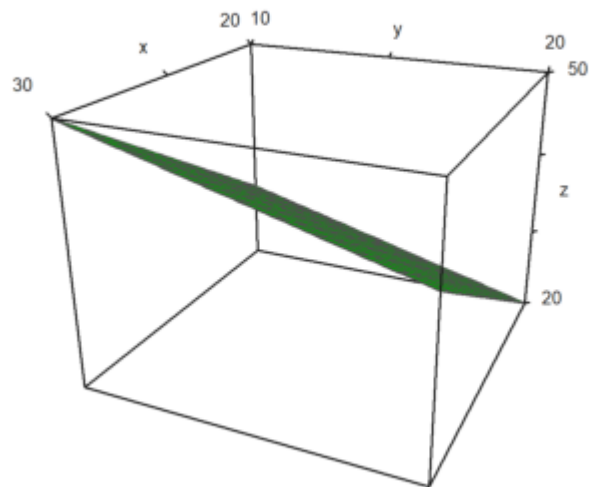


Figure 11: images-047.png

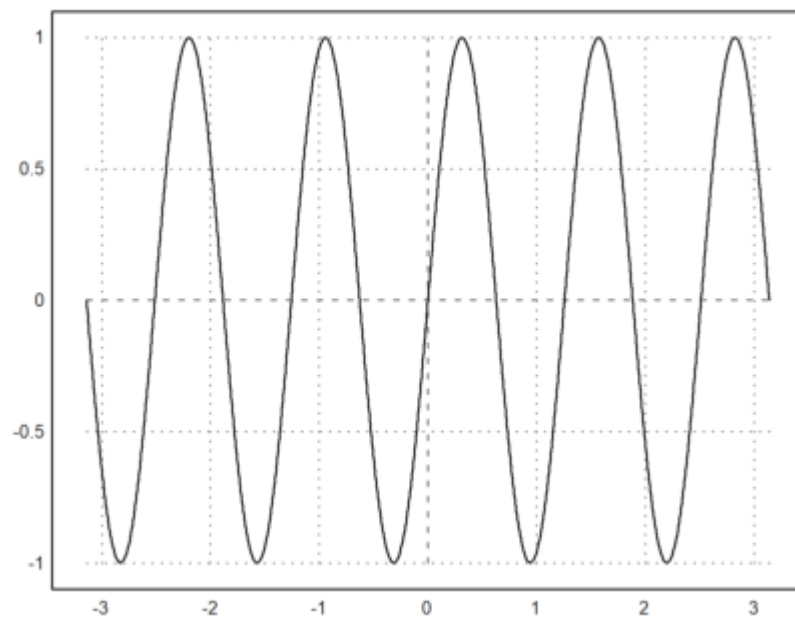


Figure 12: images-049.png

4. Diketahui suatu fungsi  $f(x)$ :

$$f(x) = 3^x$$

Tentukan nilai  $f(a+2^b-c)$  jika nilai  $a=1$ ,  $b=2$ , dan  $c=5$ !

```
>function f(x) := 3^x
```

```
>a:=1; b:= 2; c :=5; f(a+2^b-c)
```

```
1
```

5. Untuk fungsi:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 20$$

$$g(x) = 3x - 5$$

cari nilai

$$f \circ g(5), g \circ f(8)$$

```
>function f(x):= 2*x^2-3*x+20
```

```
>function g(x):= 3*x-5
```

```
>f(g(5))
```

```
190
```

```
>g(f(8))
```

```
367
```





## 2. Limit

### Definisi limit

Pada dasarnya, limit digunakan untuk menyatakan sesuatu yang nilainya mendekati nilai tertentu. Limit dapat diartikan sebagai menuju suatu batas, sesuatu yang dekat namun tidak dapat dicapai. Mengapa nilainya hanya mendekati? Karena suatu fungsi biasanya tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu. Walaupun suatu fungsi seringkali tidak terdefinisi untuk titik tertentu, namun masih dapat dicari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu semakin didekati yaitu dengan limit.

Bentuk umum dari limit sendiri dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = L$$

Notasi tersebut menyatakan bahwa  $f(x)$  untuk nilai  $x$  mendekati  $c$  sama dengan  $L$ .  $F(x)$  disini dapat berupa bermacam-macam jenis fungsi. Dan  $L$  dapat berupa konstanta, ataupun “und” (tak terdefinisi), “ind” (tak tentu namun terbatas), “infinity” (kompleks tak hingga). Begitupun dengan batas  $c$ , dapat berupa sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf).

Sebuah fungsi dapat dikatakan memiliki limit apabila limit kanan dan limit kirinya memiliki nilai yang sama. Dimana, limit dari fungsi tersebut adalah nilai dari limit kanan dan limit kiri fungsi yang bernilai sama tadi.

### Sifat-sifat Limit

Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah fungsi yang memiliki limit di  $c$ ,  $n$  merupakan bilangan bulat positif, dan  $k$  adalah konstanta.

1.

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k$$

>\$showev('limit(5,x,2))

$$5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$$

2.

maxima: 'limit(x,x,c)=c

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c$$

&gt;\$showev('limit(x,x,3))

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

3.

maxima: 'limit(kf(x),x,c)= k\*maxima: 'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \left( \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27 \right)$$

&gt;\$showev('limit(4\*x^2,x,1))

$$4 \left( \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \right) = 4$$

4.

maxima: 'limit([g(x)+f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) + maxima:  
'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x \rightarrow c} [8^x + 3x + 28] = \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27 + \lim_{x \rightarrow c} 3x + 1$$

&gt;\$showev('limit(x^3+2\*x,x,1))

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 2x = 3$$

5.

maxima: 'limit([g(x)-f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) - maxima:  
'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x \rightarrow c} [-8^x + 3x - 26] = \lim_{x \rightarrow c} 3x + 1 - \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27$$

&gt;\$showev('limit(x^2-4\*x,x,5))

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 4x = 5$$

6.

maxima: 'limit([g(x)\*f(x)],x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) \* maxima:  
'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x \rightarrow c} [(3x + 1)(8^x + 27)] = \left( \lim_{x \rightarrow c} 3x + 1 \right) \left( \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27 \right)$$

>\$showev('limit((x-1)\*(x+4),x,3))

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)(x + 4) = 14$$

7.

maxima: 'limit(g(x)/f(x),x,c)= maxima: 'limit(g(x),x,c) / maxima:  
'limit(f(x),x,c)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{3x + 1}{8^x + 27} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} 3x + 1}{\lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27}$$

>\$showev('limit((x+5)/(x+1),x,0))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 5}{x + 1} = 5$$

8.

maxima: 'limit(f(x)^n,x,c)=maxima:'limit(f(x),x,c)\_n

$$\lim_{x \rightarrow c} (8^x + 27)^n = \left( \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27 \right)^n$$

>\$showev('limit((x+3)^2,x,1))

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)^2 = 16$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow c} (8^x + 27)^{\frac{1}{n}} = \left( \lim_{x \rightarrow c} 8^x + 27 \right)^{\frac{1}{n}}$$

>\$showev('limit((x^2+3\*x+1)(1/2),x,2))

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 3x + 1} = \sqrt{11}$$

## Limit pada EMT

Pada EMT cara mendefinisikan limit yaitu dengan format :

\$showev('limit(f(x),x,c))

Format tersebut akan menampilkan limit yang dimaksud dan hasilnya. Jika kita ingin menampilkan hasilnya saja dari sebuah limit tanpa menampilkan limitnya, kita bisa menggunakan format :

```
$limit(f(x),x,c)
```

Sedangkan, untuk limit kanan dan limit kiri seperti pada definisi dapat ditampilkan di EMT dengan cara menambah opsi “plus” atau “minus” :

```
$showev('limit(f(x),x,c, plus)) atau 'limit(f(x),x,c, minus)
```

```
>$showev('limit(x^2+3*x+4,x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x + 4 = 14$$

```
>$limit(x^2+3*x+4,x,2)
```

14

### ## Menghitung dan Visualisasi Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni “limit”. Fungsi “limit” dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi “plus” atau “minus”. Hasil limit dapat berupa nilai, “und” (tak definisi), “ind” (tak tentu namun terbatas), “infinity” (kompleks tak hingga).

Limit dapat divisualisasikan menggunakan plot 2 dimensi. Pada EMT sendiri, format yang bisa digunakan untuk memvisualisasikan limit adalah :

```
plot2d(“f(x)”, -c, c):
```

Dengan f(x) adalah fungsi pada limit yang dicari, dan c berupa bilangan real menyesuaikan batas dari limit itu sendiri.

## Limit Aljabar

1. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x - 1$$

```
>$showev('limit(x^2+x-1,x,0,minus))
```

$$\lim_{x \uparrow 0} x^2 + x - 1 = -1$$

>\$showev('limit(x^2+x-1,x,0,plus))

$$\lim_{x \downarrow 0} x^2 + x - 1 = -1$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

>\$showev('limit(x^2+x-1,x,0))

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x - 1 = -1$$

2. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1}$$

>\$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3,minus))

$$\lim_{x \uparrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

>\$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3,plus))

$$\lim_{x \downarrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

>\$showev('limit(sqrt(x^2+x-1),x,3))

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{11}$$

3. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|}{x+3}$$

>\$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3,minus))

$$\lim_{x \uparrow -3} \frac{|x+3|}{x+3} = -1$$

>\$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3,plus))

$$\lim_{x \downarrow -3} \frac{|x+3|}{x+3} = 1$$

Karena nilai limit kiri tidak sama dengan nilai limit kanan. Maka fungsi diatas tidak memiliki limit di  $x=-3$

```
>$showev('limit(abs(x+3)/(x+3),x,-3))
```

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|}{x+3} = \text{und}$$

```
>$limit(x^3+4*x+5,x,2)
```

21

```
>plot2d("x^3+4*x+5",1.8,2.2); plot2d(2,21,>points,style="ow",>add):
```

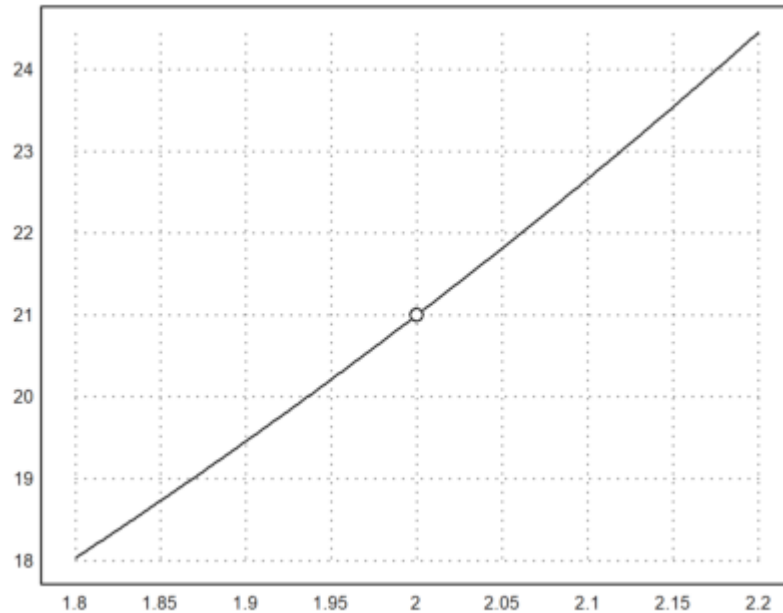


Figure 13: images-089.png

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah 21.

5. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

```
maxima: 'limit((abs(x-5))/(x-5),x,5)
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$

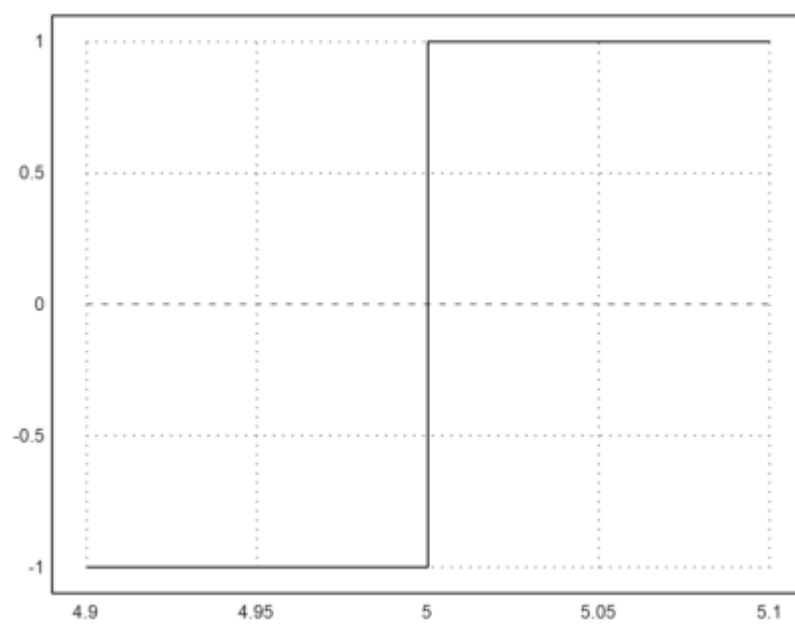


Figure 14: images-091.png

>plot2d("abs(x-5)/(x-5)",4.9,5.1):

Karena nilai limit kiri tidak sama dengan limit kanan. maka nilai limit fungsi tersebut tidak ada.

6. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^3 + x^2 - 9}{4x^5 - 7x^4 + 2x - 1}$$

>\$showev('limit((x^5-3\*x^3+x^2-9)/(4\*x^5-7\*x^4+2\*x-1),x,inf))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^3 + x^2 - 9}{4x^5 - 7x^4 + 2x - 1} = \frac{1}{4}$$

7. Tunjukkan nilai limit fungsi berikut dengan grafik!

maxima: 'limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

>plot2d("sqrt(x^2+x)-x",0,10):

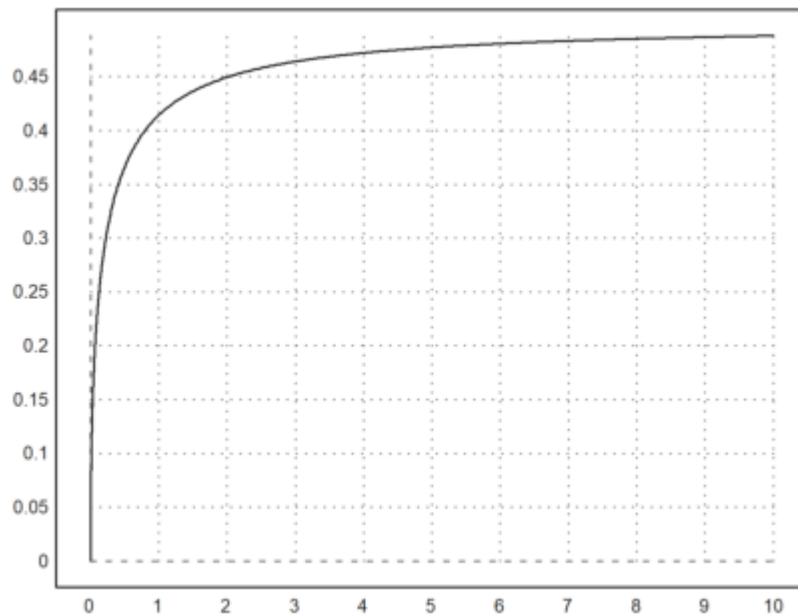


Figure 15: images-095.png



Dengan menggunakan grafik diperlihatkan bahwa nilai limit mendekati 0.5. Mari kita buktikan di baris perintah

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$

## Limit Trigonometri

1. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \sin x$$

```
>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0,minus))
```

$$\lim_{x \uparrow 0} \cos x \sin x = 0$$

```
>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0,plus))
```

$$\lim_{x \downarrow 0} \cos x \sin x = 0$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu :

```
>$showev('limit(cos(x)*sin(x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \sin x = 0$$

2. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi/4,pi/4); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```

3. Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama. Berapakah nilai limitnya?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

```
>$showev('limit(3*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0,minus))
```

$$3 \left( \lim_{x \uparrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

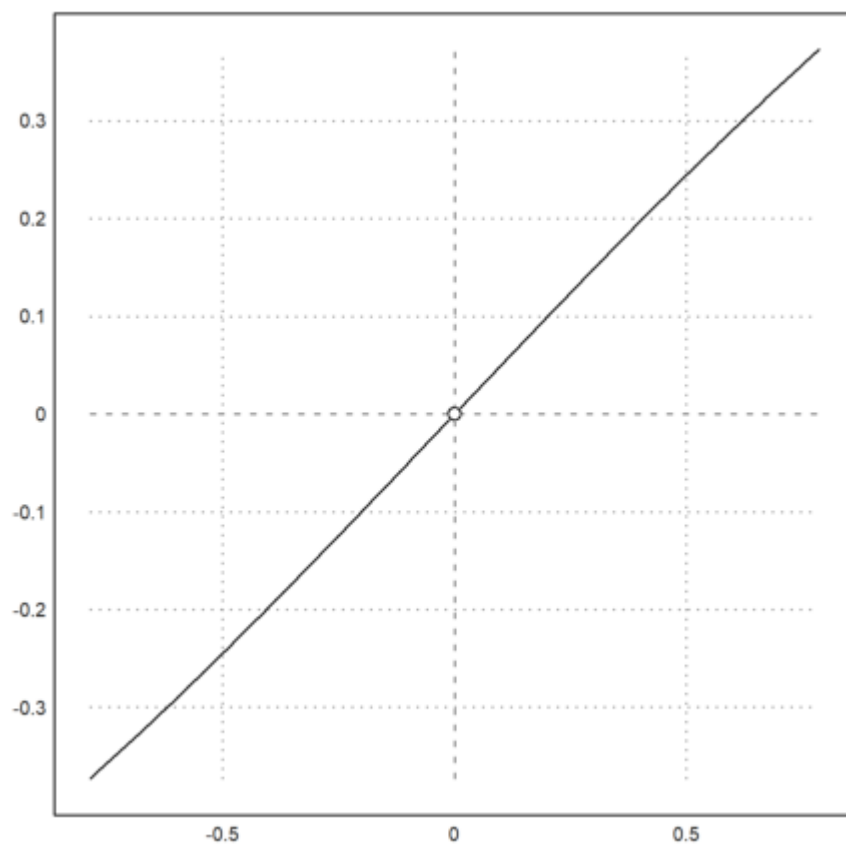


Figure 16: images-102.png

>\$showev('limit(3\*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0,plus))

$$3 \left( \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu

>\$showev('limit(3\*sin(x)^2/(1-cos(x)),x,0))

$$3 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right) = 6$$

4. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(2x)| - \cos x$$

>\$limit(abs(sin(2\*x))-cos(x),x,0)

$$-1$$

>plot2d("abs(sin(2x))-cos(x)",-pi/2,pi/2); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah -1.

5. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

maxima: 'limit(2\*sin(x)\*cos(x)-tan(x),x,pi/3)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} 2 \cos x \sin x - \tan x$$

>\$limit(2\*cos(x)\*sin(x)-tan(x),x,pi/3)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

>plot2d("2\*cos(x)\*sin(x)-tan(x)",0,pi/2.9); plot2d(pi/3,-(3)^(1/2)/2,>points,style="ow",>add):

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah -0.866.

6. Berapakah nilai limit dari fungsi berikut? Tunjukkan dengan menggunakan grafik!

$$2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \sec x \right)$$

>\$limit(2\*sec(x),x,0)

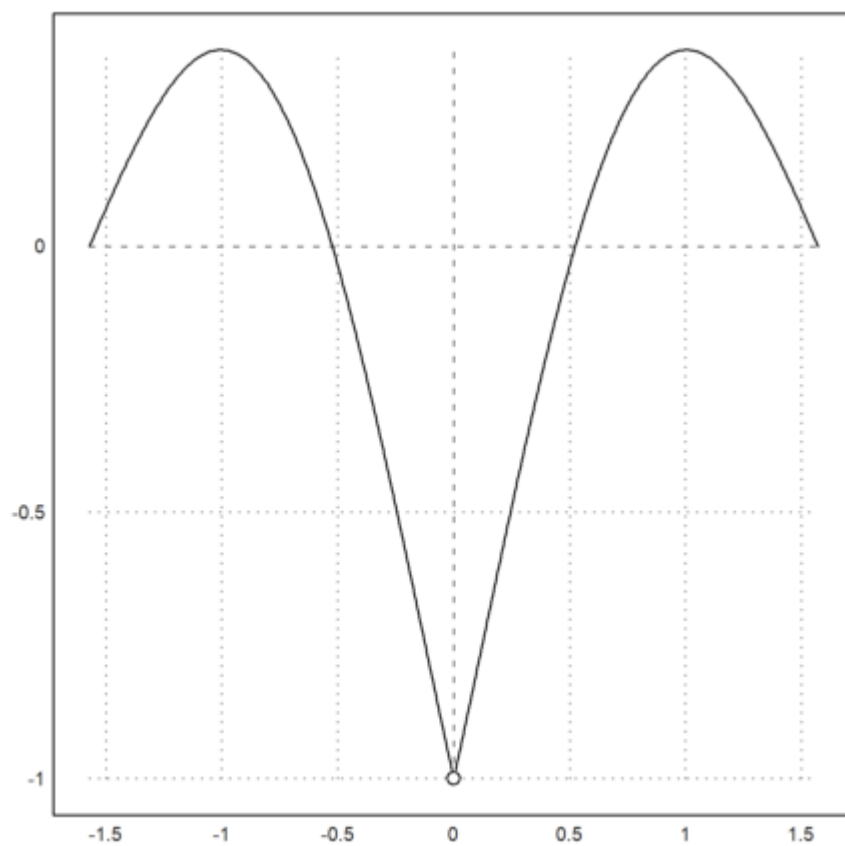


Figure 17: images-109.png

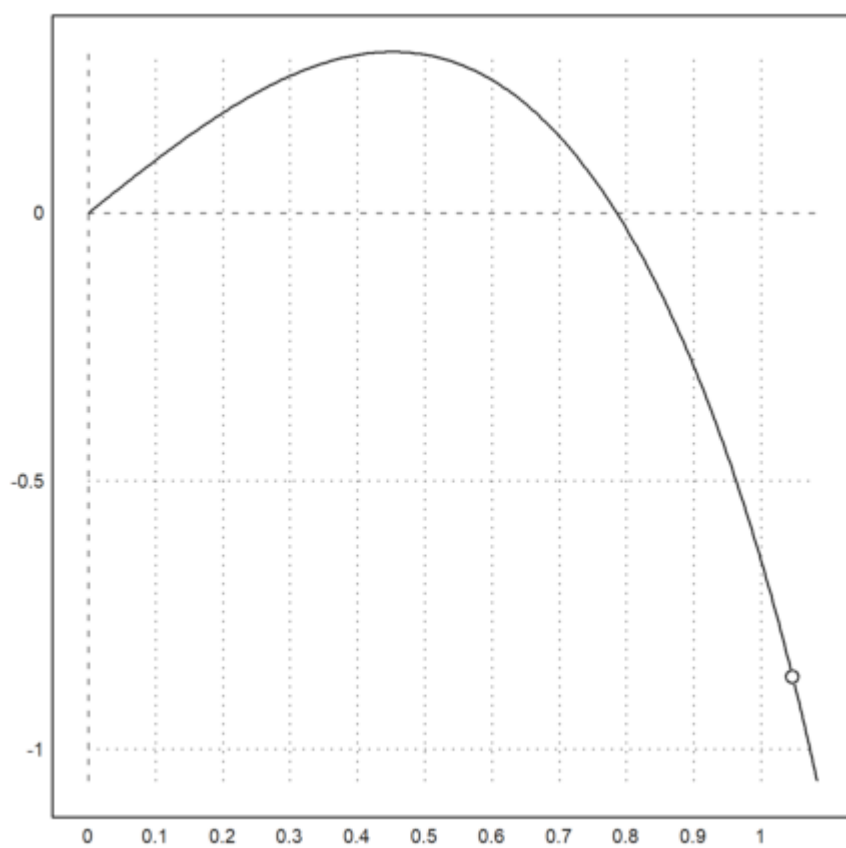


Figure 18: images-112.png

2

```
>plot2d("2*sec(x)",-pi/3,pi/3); plot2d(0,2,>points,style="ow",>add):
```

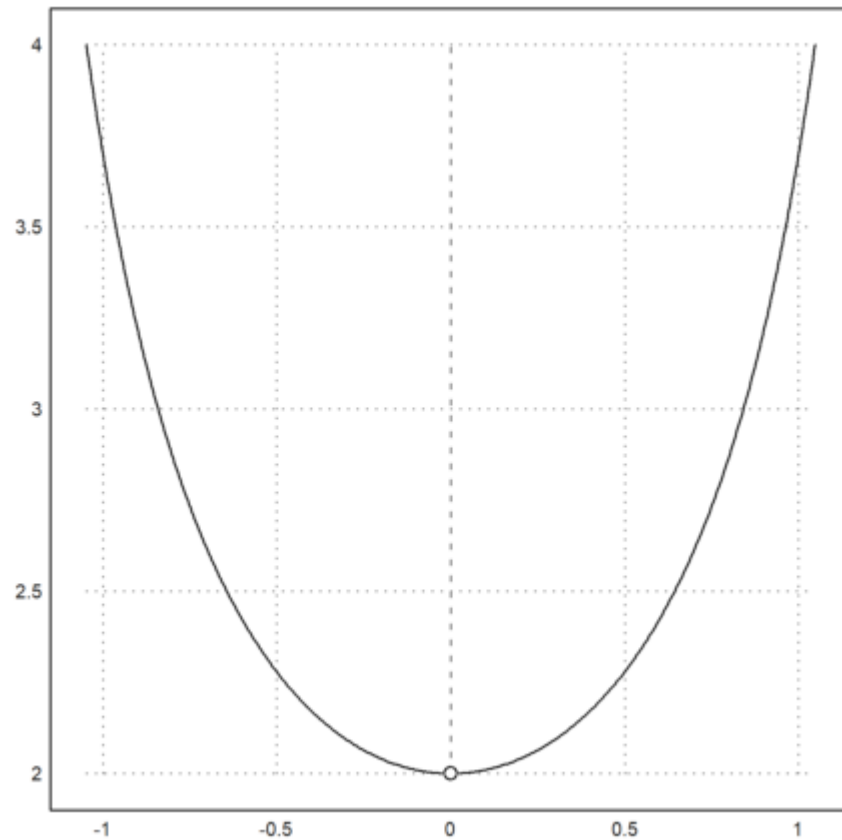


Figure 19: images-115.png

Jadi berdasarkan grafik, nilai limit tersebut adalah 2.

## Latihan

Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari fungsi berikut bernilai sama!

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) |x^3 + 5x + 8|}{\cos x}$$

```
>$limit(abs(x^3+5*x+8)/cos(x)*(x-3),x,3)
```

0

Tunjukkan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan grafik!

$$\lim_{x \rightarrow 0.8} \frac{(x^2 + 6x + 1) \sin(3x)}{\cos x}$$

>\$\text{limit}((x^2+6\*x+1)\*\sin(3\*x)/\cos(x),x,0.8)\$

6.243635699770241

### # 3. Turunan Fungsi

Turunan adalah pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring

perubahan nilai yang dimasukkan, atau secara umum turunan menunjukkan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Proses dalam menemukan turunan disebut diferensiasi.

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan beberapa cara.

## Turunan fungsi Aljabar

Mencari turunan dari

$$f(x) = x^n$$

>\$\text{showev}(\text{limit}(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) \text{ // turunan } x^n\$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Bukti:

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^{n-0} h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} x^{n-n} h^n$$

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$$

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Mencari turunan dari

$$f(x) = x^2$$

>\$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; \$p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$2hx + h^2$$

>q &=ratsimp(p/h); \$q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan

$$2x + h$$

>\$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$2x$$

>plot2d(["x^2", "2x"], color=[black,red]):

Mencari turunan dari

$$f(x) = x^x$$

>function f(x) &= x^x

$$\frac{x}{x}$$

>\$showev('limit(f(x+h)-f(x)/h,h,0))

$$\lim_{h \rightarrow 0} (x+h)^{x+h} - \frac{x^x}{h} = infinity$$

Di sini Maxima bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.



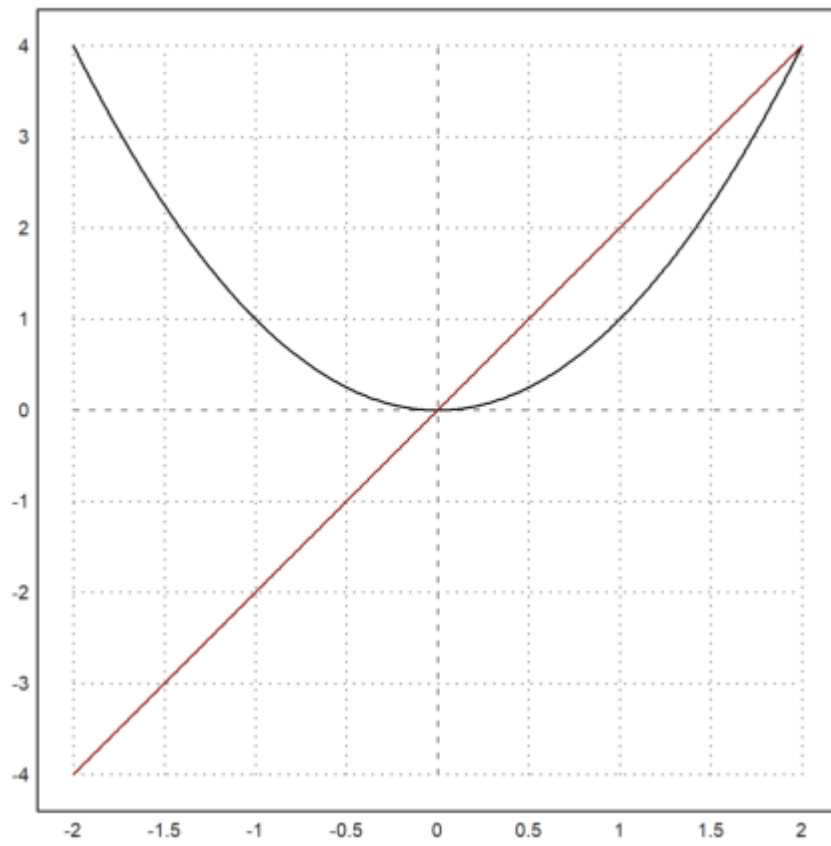


Figure 20: images-133.png

>&assume(x>0); \$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=f(x)^x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula

$$[x \geq 0]$$

>&forget(x<0)

$$[x \leq 0]$$

>&facts()

$$\square$$

Mencari turunan dari

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

>\$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

>plot2d("-x^(-2)", color=red):

>

## Turunan fungsi trigonometri

Mencari turunan dari

$$\sin(x)$$

>\$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Bukti:

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

$$\sin(x+h) - \sin(x) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)$$

$$\sin(x+h) - \sin(x) = \cos(x)\sin(h) - \sin(x) + \sin(x)\cos(h)$$

$$\sin(x+h) - \sin(x) = \cos(x)\sin(h) - \sin(x)(1 - \cos(h))$$

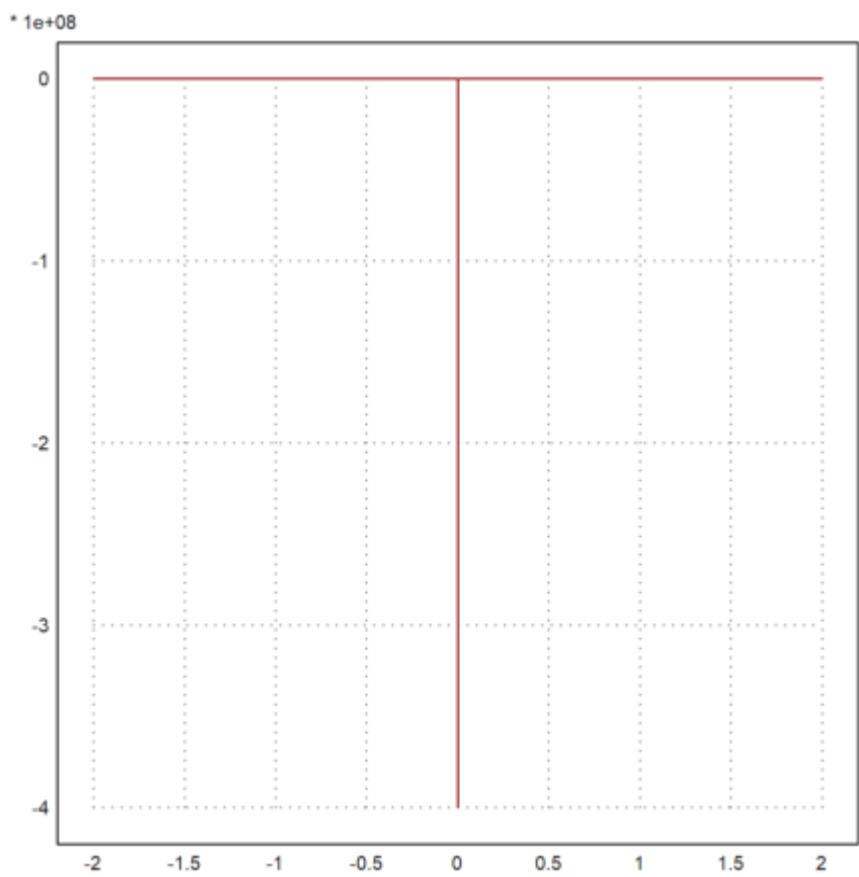


Figure 21: images-140.png

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(1 - \cos(h))}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h} \\ &= \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0 = \cos(x)\end{aligned}$$

>p &= expand((sin(x+h)-sin(x)))/simplify; \$p

$$\sin(x+h) - \sin x$$

>q &= ratsimp(p/h); \$q

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

>\$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\cos x$$

>plot2d(["sin(x)", "cos(x)"], 0, 2\*pi, color=[blue, green]):

Mencari turunan dari

$$\tan(x)$$

>\$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\tan(x+h) &= \frac{\tan(x) + \tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)} \\ \tan(x+h) - \tan(x) &= \frac{\tan(x) + \tan(h) - \tan(x) + \tan^2(x)\tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)} \\ \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h} &= \frac{\frac{\tan(x) + \tan(h) - \tan(x) + \tan^2(x)\tan(h)}{1 - \tan(x)\tan(h)}}{h} \\ &= \frac{\tan(h) + \tan^2(x)\tan(h)}{h(1 - \tan(x)\tan(h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h) + \tan^2(x)\tan(h)}{h(1 - \tan(x)\tan(h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(x)}{1 - \tan(x)\tan(h)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h)}{h}\end{aligned}$$

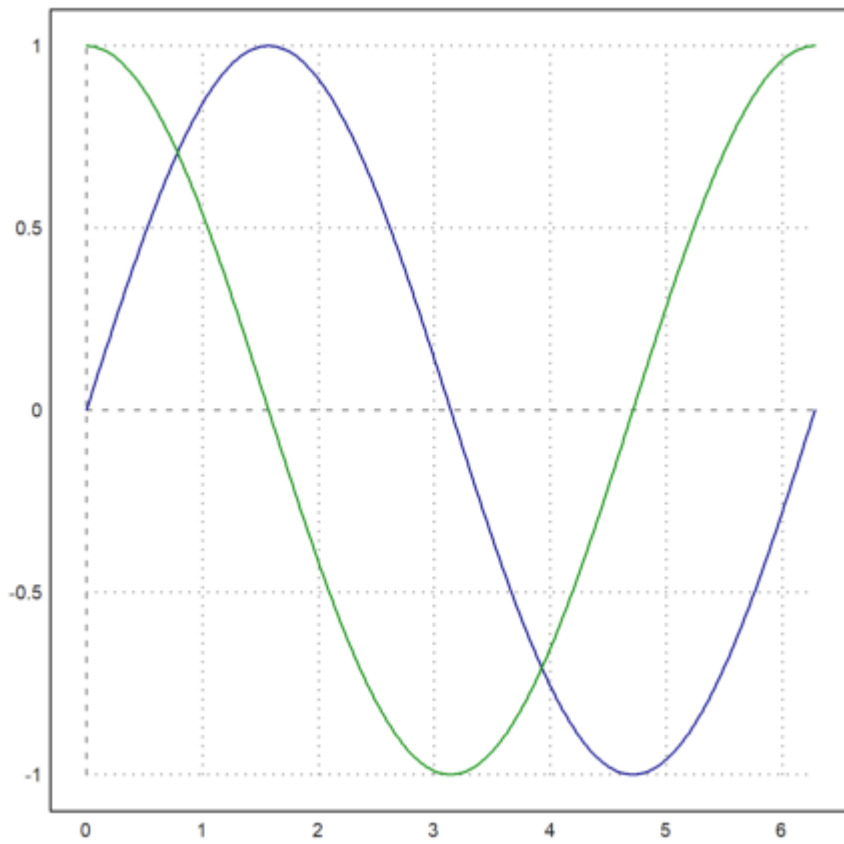


Figure 22: images-153.png

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + \tan^2(x)}{1 - \tan(x)\tan(0)} \cdot 1 \\
 &= 1 + \tan^2(x) \\
 1 + \tan^2(x) &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{1}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

>p &= expand((tan(x+h)-tan(x)))|simplify; \$p

$$\tan(x+h) - \tan x$$

>q &=ratsimp(p/h); \$q

$$\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

>\$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mencari turunan dari

$$\begin{aligned}
 &\arcsin(x) \\
 f'(x) &= \lim_{A-B \rightarrow 0} \frac{A-B}{2\sin[\frac{A-B}{2}]\cos[\frac{A+B}{2}]} \\
 f'(x) &= \lim_{A-B \rightarrow 0} \frac{\frac{2(A-B)}{2}}{2\sin[\frac{A-B}{2}]\cos[\frac{A+B}{2}]}
 \end{aligned}$$

ingat bahwa

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} &= 1 \\
 f'(x) &= \lim_{A-B \rightarrow 0} \frac{\frac{(A-B)}{2}}{\sin[\frac{A-B}{2}]} \cdot \frac{2}{2\cos[\frac{A+B}{2}]} \\
 f'(x) &= 1 \cdot \frac{2}{2\cos[\frac{B+B}{2}]} \\
 f'(x) &= \frac{1}{\cos(B)}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(B)}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(B)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

>\$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin(x)}{h}$$

Misalkan  $\arcsin(x+h)=A$  dan  $\arcsin(x)=B$

Sehingga  $\sin A = x+h$  dan  $\sin B = x$

Kurangkan persamaan kedua dengan persamaan pertama

$$\begin{aligned}\sin(A) - \sin(B) &= (x+h) - x \\ \sin(A) - \sin(B) &= h\end{aligned}$$

karena

$$h \rightarrow 0, \sin(A) - \sin(B) \rightarrow 0$$

maka

$$\sin(A) \rightarrow \sin(B), A \rightarrow B, A - B \rightarrow 0$$

sehingga  $f'(x)$  menjadi

$$f'(x) = \lim_{A-B \rightarrow 0} \frac{A - B}{\sin A - \sin B}$$

Identitas trigonometri

$$\sin(A) - \sin(B) = 2\sin\left[\frac{A-B}{2}\right]\cos\left[\frac{A+B}{2}\right]$$

>p &= expand((asin(x+h)-asin(x)))/simplify; \$p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$\arcsin(x+h) - \arcsin x$$

>q &=ratsimp(p/h); \$q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan

$$\frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h}$$

>\$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

>plot2d(["asin(x)","1/(sqrt(1-x^2))"],0,2\*pi,color=[blue,red]):

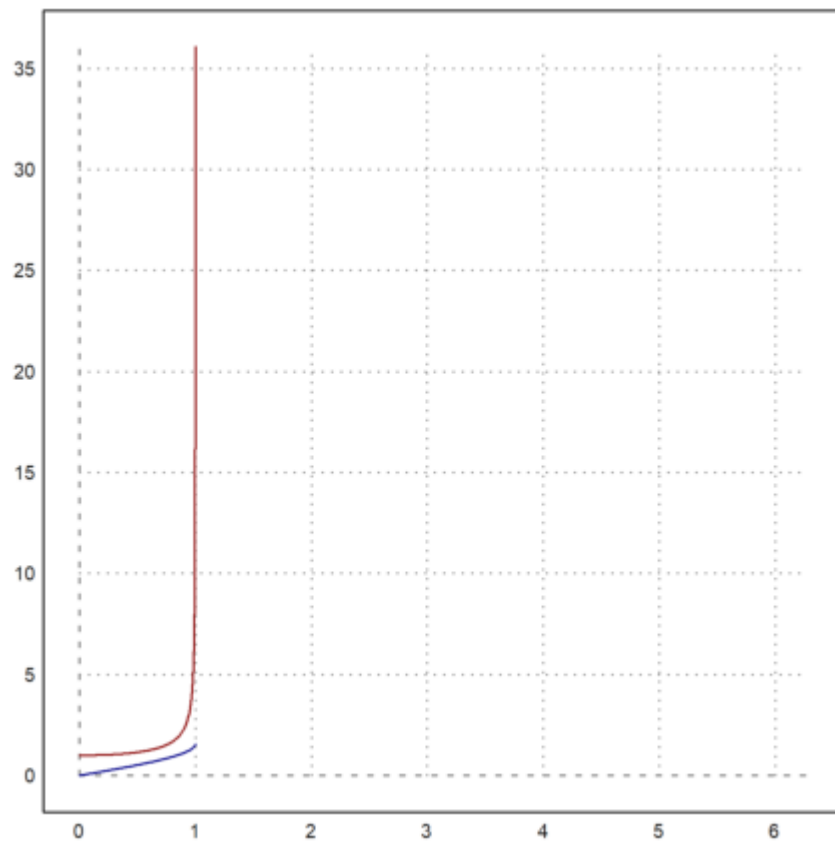


Figure 23: images-190.png

Mencari turunan dari

$$x^2 + 10$$

di titik  $x=5$



```
>function f(x) &x= x^2+10 // definisikan f(x)=x^2+10
```

$$x^2 + 10$$

```
>function df(x) &x= showev('diff(f(x),x)); $df(x)
```

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 10) = 2x$$

```
>$% with x=5
```

$$\%at \left( \frac{d}{dx} (x^2 + 10), x = 5 \right) = 10$$

```
>diff(f,5), diffc(f,5)
```

```
9.999999999997
10
```

Mencari turunan dari

$$\sinh(x)$$

```
>function f(x) &x= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

$$\sinh(x)$$

```
>function df(x) &x= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah  $\cosh(x)$ , karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

```
>$% with x=3
```

$$\%at \left( \frac{d}{dx} \sinh x, x = 3 \right) = \cosh 3$$

```
>$float(%)
```

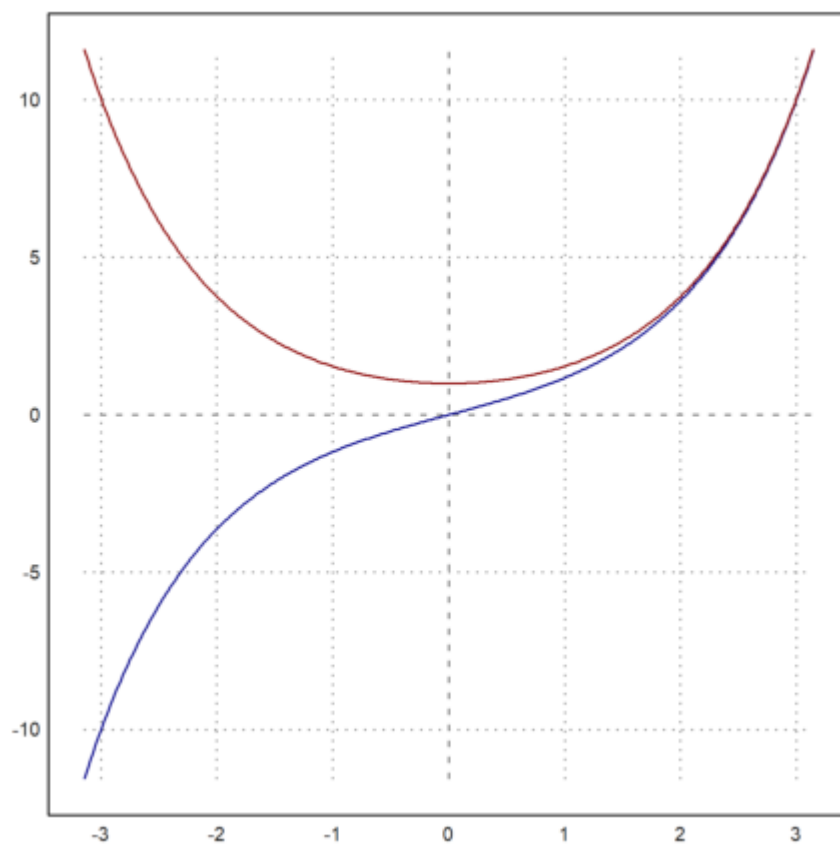


Figure 24: images-197.png

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} \sinh x, x = 3.0\right) = 10.06766199577777$$

>plot2d(f,0,3.1):

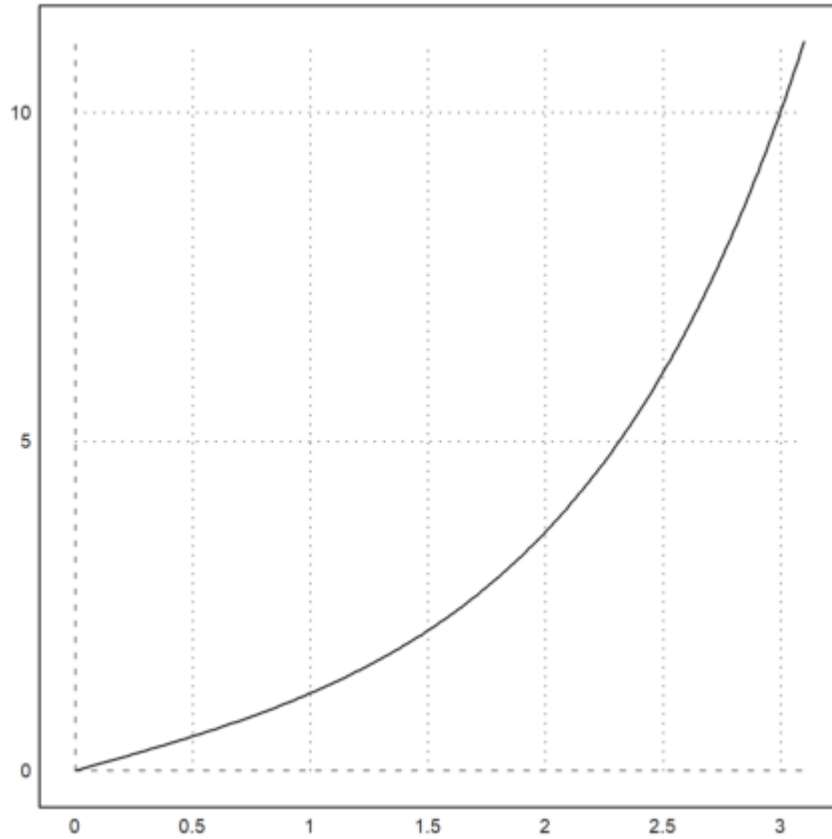


Figure 25: images-201.png

Mencari turunan dari

$$f(x) = \sin(3x^5 + 7)^2$$

>function f(x) &= sin(3\*x<sup>5</sup>+7)<sup>2</sup>

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

>\$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7) = 30x^4 \cos(3x^5 + 7) \sin(3x^5 + 7)$$

Kita akan mencari nilai turunan tersebut ketika  $x=2$

>% with  $x = 2$

$$\%at \left( \frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7), x = 2 \right) = 480 \cos 103 \sin 103$$

>\$float(%)

$$\%at \left( \frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} \sin^2(3.0x^5 + 7.0), x = 2.0 \right) = -233.9140567500984$$

>diff(f,2), diffc(f,2)

>plot2d(f,0,3.1) :

Mencari turunan dari

$$a(x) = 5\cos(2x) - 2x\sin(2x)$$

>function a(x) &=5\*cos(2\*x)-2\*x\*sin(2\*x) // mendefinisikan fungsi a

$$5 \cos(2x) - 2x \sin(2x)$$

>function da(x) &=diff(a(x),x); \$da(x) // da(x) = a'(x)

$$-12 \sin(2x) - 4x \cos(2x)$$

>\$'a(1)=a(1), \$float(a(1)), \$'a(2)=a(2), \$float(a(2)) // nilai a(1) dan a(2)

$$-0.2410081230863468$$

**-0.2410081230863468**

>xp=solve("da",1,2,0) // solusi a'(x)=0 pada interval [1, 2]

1.35822987384

>da(xp), a(xp) // cek bahwa a'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut

0

-5.67530133759

>plot2d(["a(x)","da(x)"],0,2\*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya

Pada titik puncak grafik  $a(x)$ , nilai turunan  $a'(x)$  akan selalu sama dengan nol. Ini karena gradien garis singgung pada titik puncak adalah nol.

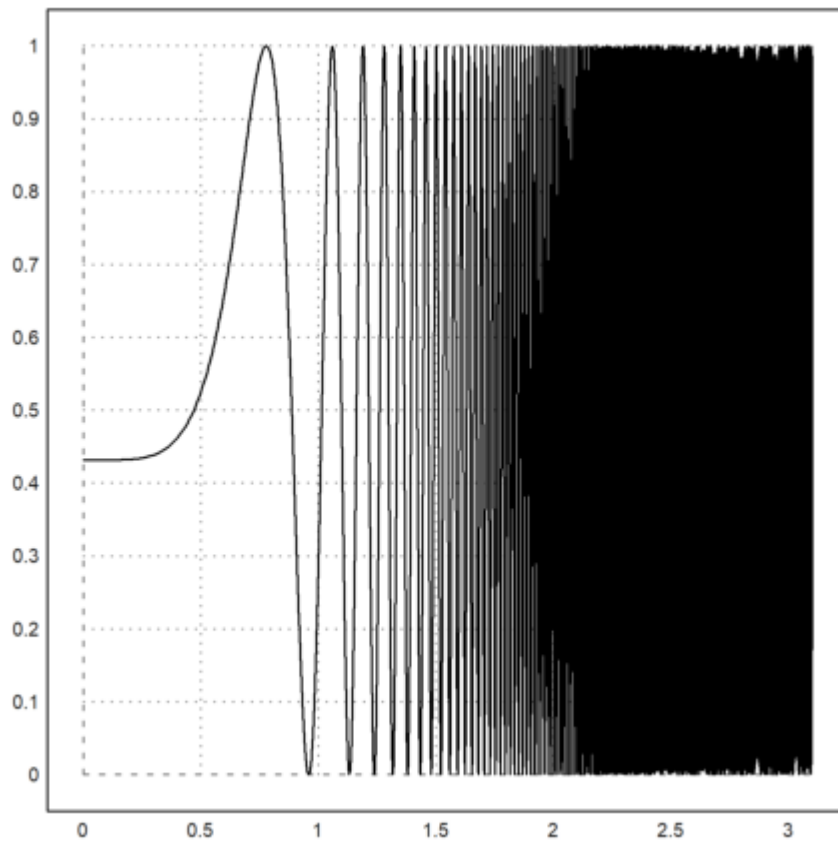


Figure 26: images-206.png

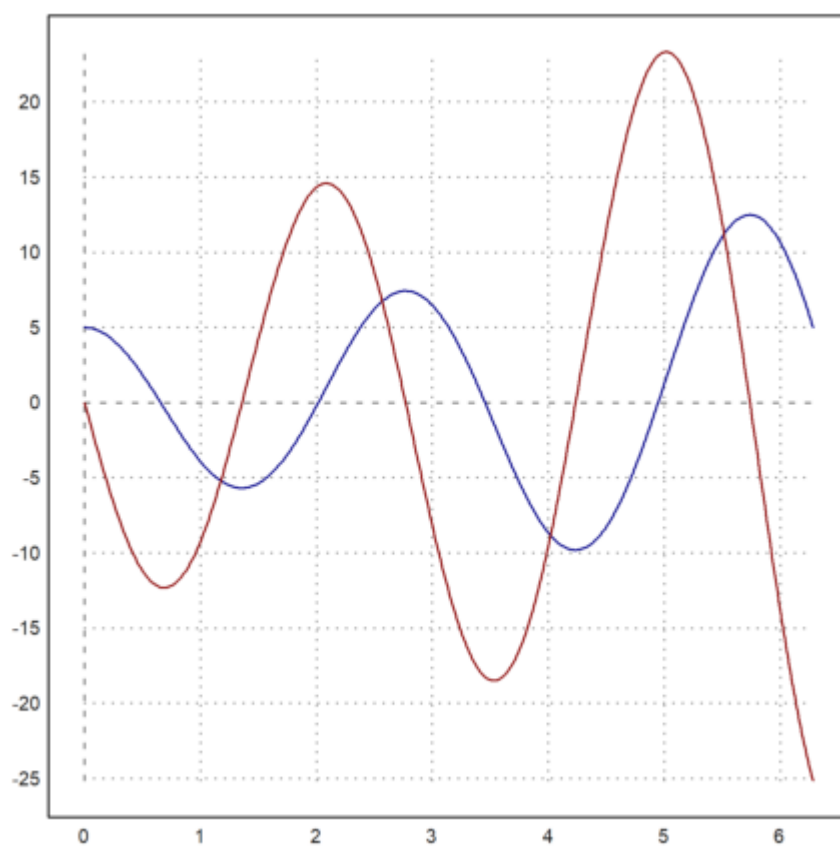


Figure 27: images-211.png

## Turunan fungsi logaritma

Mencari turunan dari

$$f(x) = \log(x)$$

>\$showev('limit((log(x+h)- log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

ingat bahwa

$$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

misalkan  $h/x = n$  sehingga  $h = nx$

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(1+n)}{nx}$$

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{nx} \cdot \log(1+n)$$

ingat bahwa

$$a \log b = \log b^a$$

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log \lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log e$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((log((x+h)/(x)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit(((h/x))/h,h,0))//menggunakan identitas logaritma, sisanya  
adalah hasil turunan
```

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

```
>plot2d(["log(x)", "1/x"],-1,1, color=[red,lightgreen]):
```

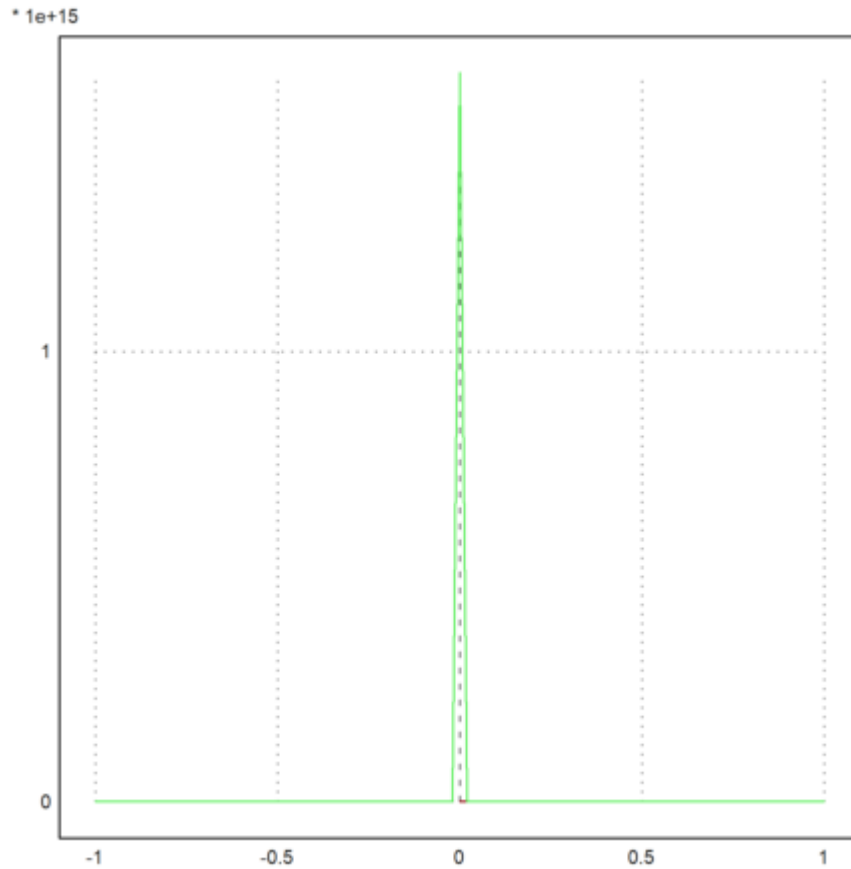


Figure 28: images-228.png



## Turunan fungsi eksponensial

Mencari turunan dari

$$f(x) = e^x$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Maxima is asking
```

```
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
```

```
Is x an integer?
```

```
Use assume!
```

```
Error in:
```

```
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$\text{factor}(e^{x+h} - e^x) = (e^h - 1) e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

## Sifat- sifat Turunan

1. Jika  $f(x)=k$  dengan  $k$  suatu konstanta maka untuk sebarang  $x$ ,  $f'x = 0$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. Jika  $f(x)=x$ , maka  $f'(x)=1$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

3. Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka  $(kf)'(x) = kf'(x)$

Bukti:

Andaikan  $F(x) = kf(x)$ , maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= kf'(x) \end{aligned}$$

4. Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi yang terdiferensial, maka  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Bukti:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) + g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

5. Andaikan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat didiferensialkan, maka  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Bukti:

Andaikan  $F(x) = f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

6. Andaikan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat didiferensialkan dengan  $g(x)$  tidak sama dengan 0, maka:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Bukti:

Andaikan  $F(x) = f(x)/g(x)$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] \cdot \frac{1}{g(x)g(x)} \\
&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

## Aplikasi turunan

1. Persamaan gerak suatu partikel dinyatakan dengan rumus

$$s = f(t) = (3t + 1)^{\frac{1}{2}}$$

( $s$  dalam meter dan  $t$  dalam detik).

Kecepatan partikel tersebut pada saat  $t=8$  adalah ... m/detik.

Penyelesaian:

```
>function f(t) &= (3*t+1)^(1/2); $f(t)
```

```

>function df(t) &= diff(f(t),t); $df(t)

```

```

>$df(8); fraction %

```

$$\frac{3}{10}$$

Jadi, kecepatan partikel tersebut pada saat  $t=8$  adalah  $3/10$  m/detik.

2. Sebuah pabrik baju memerlukan  $x$  meter kain untuk diproduksi yang dinyatakan dengan fungsi:

$$P(x) = \frac{1}{3}x^2 - 12x + 150$$

(dalam juta rupiah).

Berapa biaya produksi minimum yang dikeluarkan oleh pabrik baju tersebut?

Penyelesaian:

```

>function P(x) &= (1/3)*x^2-12*x+150; $P(x)

```

$$\frac{x^2}{3} - 12x + 150$$

```

>function dP(x) &= diff(P(x),x); $dP(x)

```

$$\frac{2x}{3} - 12$$

$P(x)$  akan bernilai minimum jika  $P'(x)=0$ , maka:

```

>$dP(x)=0

```

$$\frac{2x}{3} - 12 = 0$$

```

>$&solve(dP(x),x)

```

$$[x = 18]$$

Dengan demikian, biaya produksinya adalah:

```

>P(18)

```

42

Jadi, biaya produksi minimum yang dikeluarkan oleh pabrik tersebut adalah 42 juta rupiah.

3. Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Jika tinggi  $h$  meter setelah  $t$  detik dirumuskan dengan

$$h(t) = 120t - 5t^2$$

maka berapa tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut?

Penyelesaian:  
Diketahui:

$$h(t) = 120t - 5t^2$$

Turunan pertama fungsi  $h$  adalah

```
>function h(t) &= 120*t-5*t^2; $h(t)
```

$$120t - 5t^2$$

```
>function dh(t) &= diff(h(t),t); $dh(t)
```

$$120 - 10t$$

Nilai  $t$  akan maksimum saat

$$h'(t) = 0$$

```
>$dh(t)=0
```

$$120 - 10t = 0$$

```
>$&solve(dh(t),t)
```

$$[t = 12]$$

Ketinggian maksimum yang dapat dicapai peluru saat  $t=12$ , yaitu

```
>$h(12)
```

$$720$$

Jadi, ketinggian maksimum peluru adalah 720 meter.

## Soal-soal Latihan

1. Cari  $f'(4)$  dari fungsi

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

```
>function f(x) &= (2*x-1)/(x^2-x); $f(x)
```

$$\frac{2x-1}{x^2-x}$$

```
>function df(x) &= diff(f(x), x); $df(x)
```

$$\frac{2}{x^2-x} - \frac{(2x-1)^2}{(x^2-x)^2}$$

```
>df(4); fraction %
```

```
-25/144
```

2. Cari turunan dari

$$g(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

```
>function g(x) &= x^2*sin(x); $g(x)
```

$$x^2 \sin x$$

```
>function dg(x) &= diff (g(x), x); $dg(x)
```

$$2x \sin x + x^2 \cos x$$

3. Cari turunan dari

$$(4x-7)^2(2x+3)$$

```
>function f(x) &= (4*x-7)^2*(2*x+3); $f(x)
```

$$(2x+3)(4x-7)^2$$

```
>function df(x) &= diff(f(x), x); $df(x)
```

$$2(4x-7)^2 + 8(2x+3)(4x-7)$$

```
>F &= expand(df(x))|simplify; $F
```

$$96x^2 - 128x - 70$$

4. Temukan turunan dari

$$f(x) = \ln(x^3 + 3x - 4)$$

```
>function f(x) &= ln(x^3+3*x-4); $f(x)
```

$$\log(x^3 + 3x - 4)$$

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{dx} \log(x^3 + 3x - 4) = \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 4}$$

5. Tentukan turunan dari

$$f(x) = \cos(5x) + \sin(2x)$$

```
>function f(x) &= cos(5*x)+sin(2*x); $f(x)
```

$$\cos(5x) + \sin(2x)$$

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{dx} (\cos(5x) + \sin(2x)) = -5 \sin(5x) + 2 \cos(2x)$$

6. Sebuah kembang api diluncurkan ke udara. Ketinggian kembang api  $h(t)$  (dalam meter) pada  $t$  sekon dimodelkan dengan

$$f(t) = 16t^2 + 200t + 4$$

Tentukan kecepatan luncur kembang api saat  $t = 3$  sekon.

Penyelesaian:

```
>function f(t) &= 16*t^2+200*t+4; $f(t)
```

$$16t^2 + 200t + 4$$

```
>function df(t) &= diff(f(t),t); $df(t)
```

$$32t + 200$$

```
>$df(3); fraction %
```

$$296$$

Jadi, kecepatan kembang api saat  $t=3$  sekon adalah 296 m/s





## 4. Integral Tak Tentu

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu.

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif).

### CAKUPAN PEMBAHASAN

Definisi

Cara menulis integral pada EMT

Sifat-sifat

Rumus

Kurva

### DEFINISI

Integral Tak Tentu adalah bentuk integral yang variabel integrasinya tidak memiliki batas sehingga integrasi dari sebuah fungsi akan menghasilkan banyak kemungkinan dan hanya dinyatakan sebagai penyelesaian umum. Istilah tak tentu berarti bentuk fungsi  $F(x)$  memuat konstanta real sebarang.

Misalkan diketahui suatu fungsi  $F(x)$  yang merupakan fungsi umum yang memiliki sifat  $F'(x)=f(x)$ , maka integral tak tentu merupakan himpunan anti turunan  $F(x)$  dari  $f(x)$  pada interval negatif tak hingga sampai positif tak hingga yang dinotasikan :

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

## ## MENULIS INTEGRAL PADA LATEX

Untuk menulis dengan Latex menggunakan fungsi  $\int$

$$f(x) = \int x^3 dx$$

$$\int 15x^7 dx$$

$$\int x^4 dx$$

$$\int 7x^3 dx$$

$$\int 5x dx$$

## ## SIFAT INTEGRAL TAK TENTU

## 1. Sifat Pangkat

Jika  $n$  adalah sembarang bilangan rasional kecuali -1, maka integral tak tentu dari  $x^n$  ditulis :

$$\int x^n dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Contoh:

$$\int x^2 dx + c = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

## 2. Penjumlahan dan Pengurangan

$$\int [g(x) + f(x)] dx = \int g(x) dx + \int f(x) dx$$

$$\int [x^2 + 4x] dx = \int x^2 dx + \int 4x dx$$

$$\int [g(x) - f(x)] dx = \int g(x) dx - \int f(x) dx$$

$$\int [x^7 - 3x] dx = \int x^7 dx - \int 3x dx$$

## 3. Perkalian

Bayangkan  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah dua fungsi yang bisa kita hitung integral tak tentu (artinya kita mencari antiturunannya), dan anggap  $k$  adalah suatu angka tetap (konstanta). Maka aturannya berlaku:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int 4x^2 dx = 4 \int x^2 dx$$

### ## RUMUS INTEGRAL TAK TENTU

Integral tak tentu berarti nilai atau batasannya belum pasti, sehingga ada nilai konstanta(c) di dalamnya. Jadi rumus dasar integral tak tentu adalah :

```
>$showev('integrate(x^n,x)+c)
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

```
>$showev('integrate(x^-1,x)+c)
```

$$\int \frac{1}{x} dx + c = \log x + c$$

Integral dari fungsi

$$f(x) = x^{-1}$$

menghasilkan fungsi ln karena berasal dari teorema kalkulus

## KURVA FUNGSI INTEGRAL/ANTITURUNAN

Kurva fungsi antiturunan adalah kurva yang menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan antiturunannya. Antiturunan, juga dikenal sebagai integral.

Jangan lupa untuk menuliskan terhadap variabel apa suatu fungsi tersebut diintegrasikan

1. kurva antiturunan dari fungsi aljabar

$$f(x) = 4x^3 dx$$

```
>$showev('integrate(4*x^3,x)+c)
```

$$4 \int x^3 dx + c = x^4 + c$$

```
>plot2d(["4*x^3", "x^4", "x^4+1"]):
```

2. kurva antiderivatif fungsi trigonometri dengan

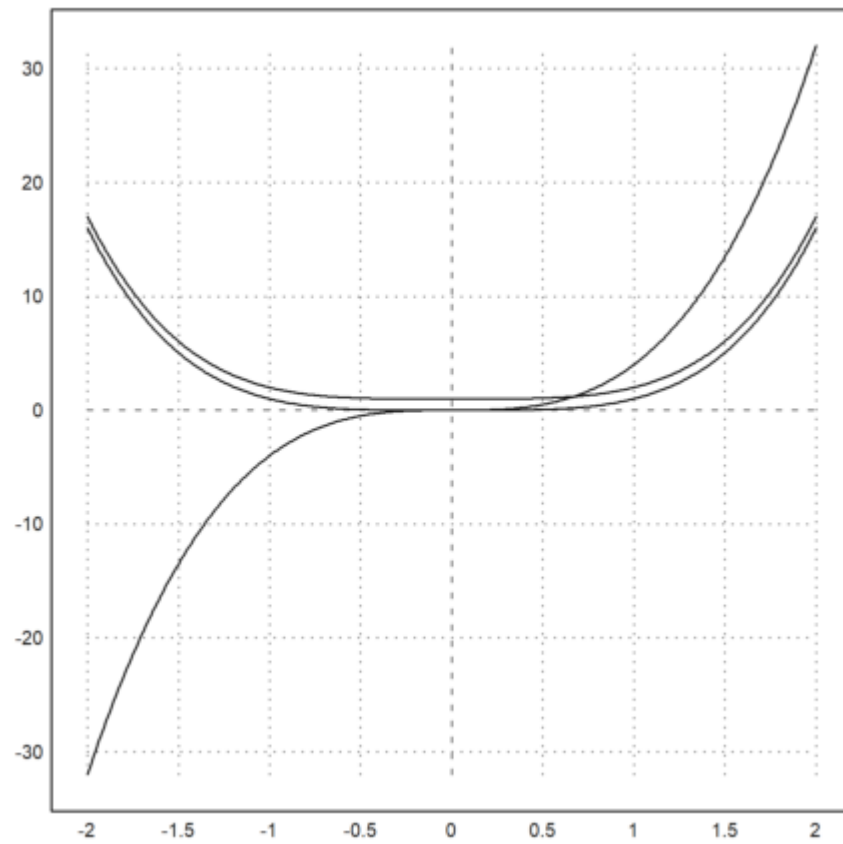


Figure 29: images-312.png

$$f(x) = \cos(x)$$

```
>$showev('integrate(cos(x),x)+c)
```

$$\int \cos x \, dx + c = \sin x + c$$

```
>plot2d(["cos(x)", "sin(x)", "sin(x)+1"]):
```

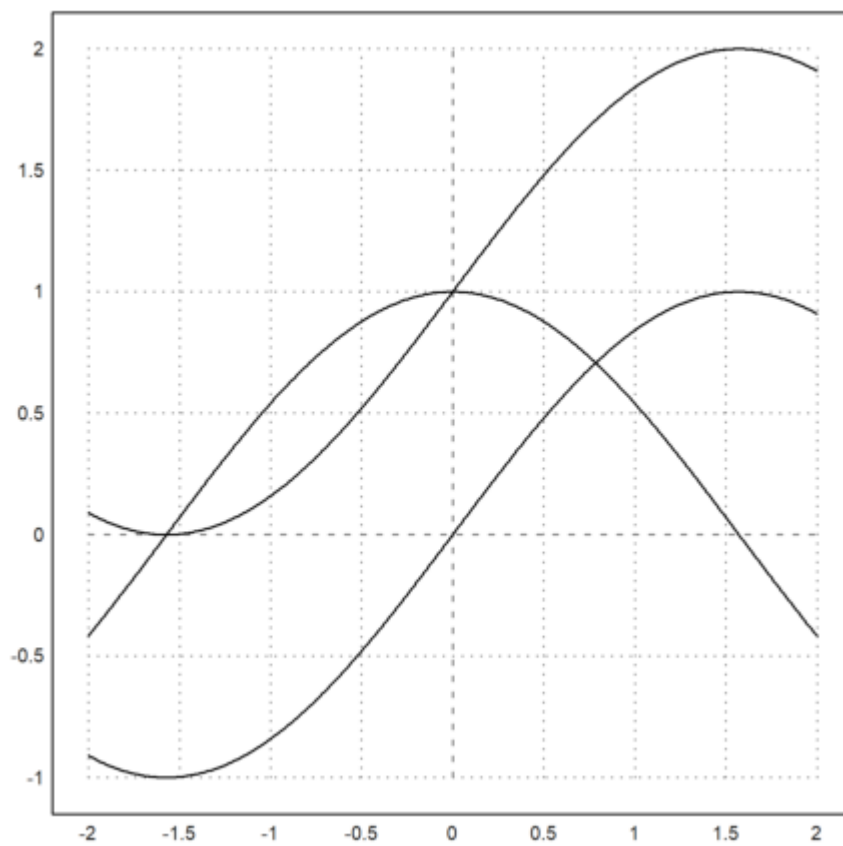


Figure 30: images-315.png

### 3. kurva antiderivatif dari fungsi eksponensial dengan

$$f(x) = xe^x$$

```
>$showev('integrate(x*E^x,x)+c)
```

$$\int x e^x dx + c = (x - 1) e^x + c$$

```
>plot2d(["x*E^x","(x-1)E^x+1","(x-1)E^x+2","(x-1)E^x+3","(x-1)E^x+4"]):
```

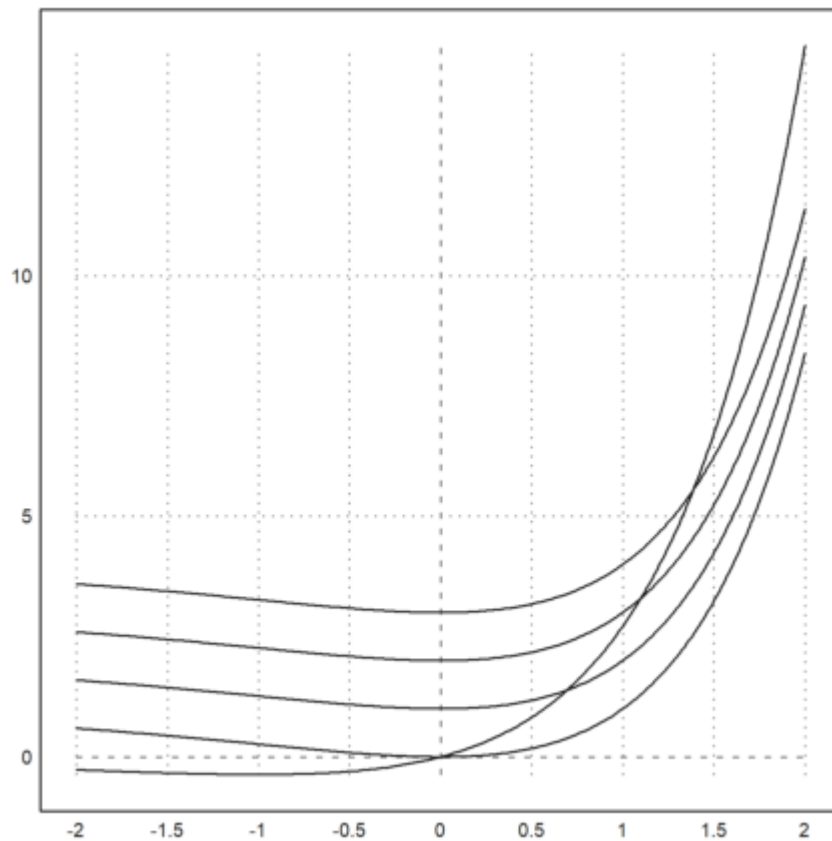


Figure 31: images-318.png

4. kurva antiderivatif dari fungsi logaritma dengan

$$f(x) = \log(4x)$$

```
>$showev('integrate(log(4*x),x)+c)
```

$$\int \log(4x) dx + c = \frac{4x \log(4x) - 4x}{4} + c$$

```
>plot2d(["log(4*x)","(4*x)log(4*x)-4*x/4+1","(4*x)log(4*x)-4*x/4+2","(4*x)log(4*x)-4*x/4+3"]):
```

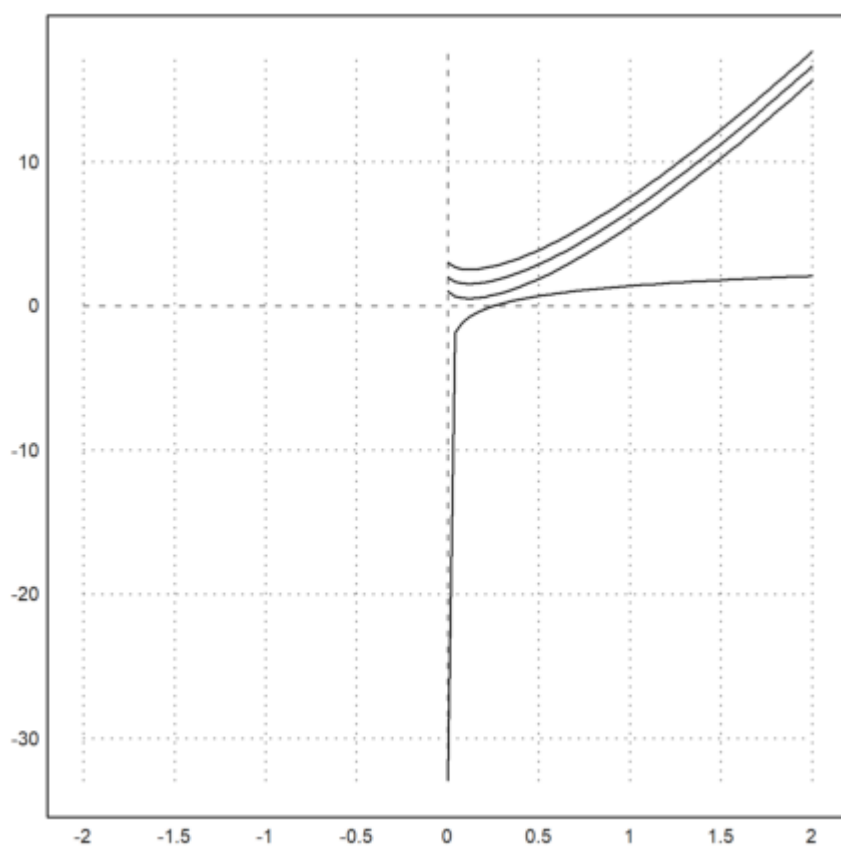


Figure 32: images-321.png

## LATIHAN SOAL

1. Tuliskan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut serta buatlah grafiknya :

$$f(x) = x^5$$

```
>$showev('integrate(log(4*x),x)+c)
```

$$\int \log(4x) dx + c = \frac{4x \log(4x) - 4x}{4} + c$$

```
>plot2d(["4*x^3", "x^4", "x^4+1"]):
```

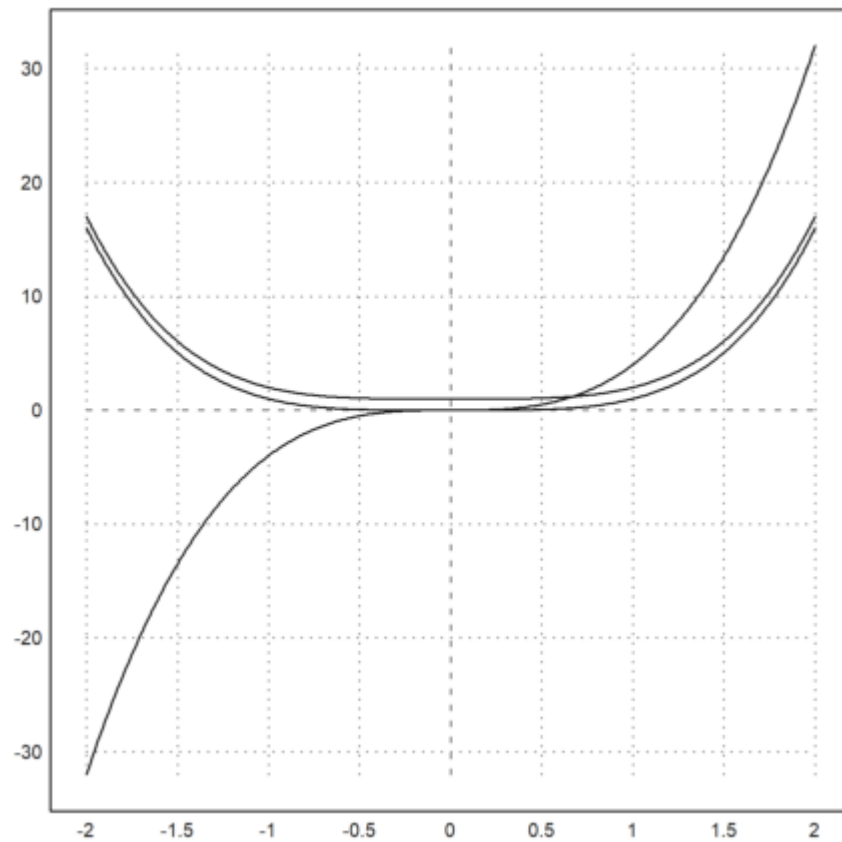


Figure 33: images-324.png

2. tentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut :



$$f(x) = 9x^2$$

> \$showev('integrate(9\*x^2,x)+c)

$$9 \int x^2 dx + c = 3x^3 + c$$

3. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :

$$f(x) = 2\sin x$$

> \$showev('integrate(2\*sin(x),x)+c)

$$2 \int \sin x dx + c = c - 2 \cos x$$

4. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

>\$showev('integrate(sin(x)-cos(x),x)+c)

$$\int \sin x - \cos x dx + c = -\sin x - \cos x + c$$

5. tentukan integral tak tentu dari fungsi eksponensial berikut :

$$f(x) = e^{2x}$$

>\$showev('integrate(E^(2\*x),x)+c)

$$\int e^{2x} dx + c = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

6. tentukan integral tak tentu dari fungsi eksponensial berikut :

$$f(x) = xe^x$$

>\$showev('integrate(x\*E^x,x)+c)

$$\int x e^x dx + c = (x - 1) e^x + c$$

7. Tentukan integral tak tentu dari fungsi

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx$$

```
> $showev('integrate(sin(x)/x,x)+c)
```

$$\int \frac{\sin x}{x} dx + c = c - \frac{i \operatorname{gamma\_incomplete}(0, i x) - i \operatorname{gamma\_incomplete}(0, -i x)}{2}$$

Jawaban dari integral tersebut melibatkan fungsi gamma tidak lengkap (incomplete gamma function) dengan bilangan kompleks. Hasil ini muncul karena fungsi dari

$$\frac{\sin(x)}{x}$$

tidak memiliki antiturunan dalam bentuk fungsi elementer, sehingga pada software Euler Mat Toolbox mengembalikan solusi dalam bentuk fungsi khusus yang lebih umum, seperti fungsi gamma tidak lengkap dalam kasus ini.

## 5. Integral Tentu

### Pengertian Integral Tentu

Kata “tentu” di sini bermakna sudah pasti atau sudah ditentukan. Oleh karena itu, Integral tentu adalah integral yang sudah ditentukan batasan nilai awal dan akhirnya. Batas dari integral tentu adalah  $a$  sampai  $b$  atau batas atas sampai batas bawah.

### Rumus Integral Tentu

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Contoh:

carilah

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, dx$$

>\$showev('integrate(sin(x),x,a,b))

$$\int_a^b \sin x \, dx = \cos a - \cos b$$

>\$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

>plot2d(“sin(x)”,0,pi):

Carilah

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx$$

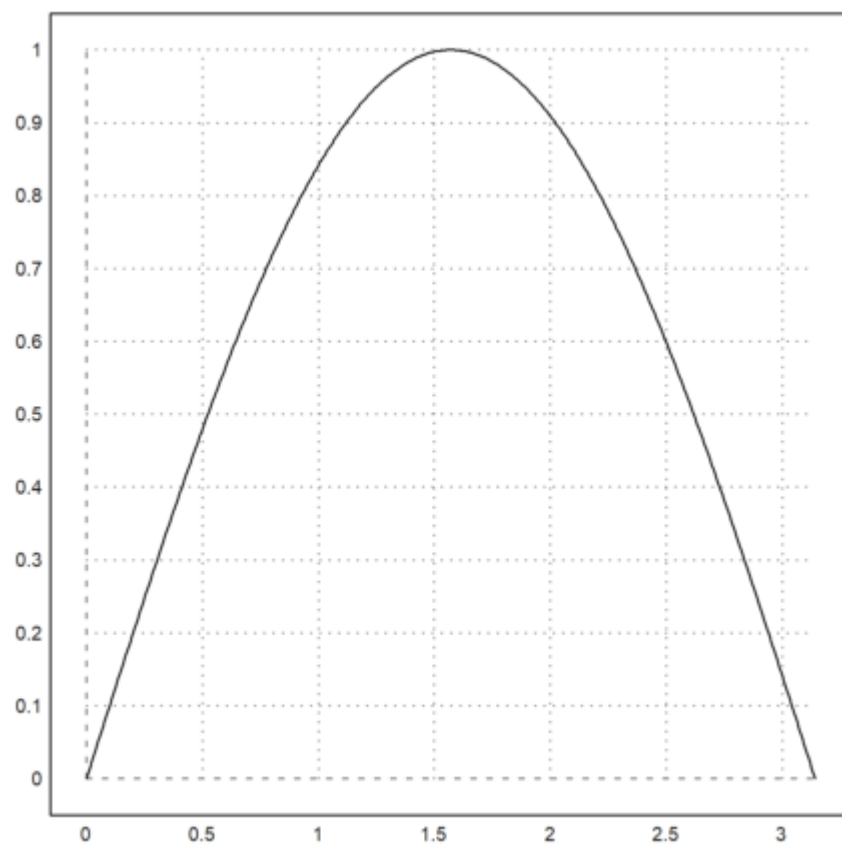


Figure 34: images-342.png

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi/2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = (-e^{\pi} - 1) \sin a + (e^{\pi} + 1) \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = (-e^{\pi} - 1) (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x) &z= E^(-x/2)
```

$$\frac{e^{-x/2}}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi  $f$  tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \, dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```

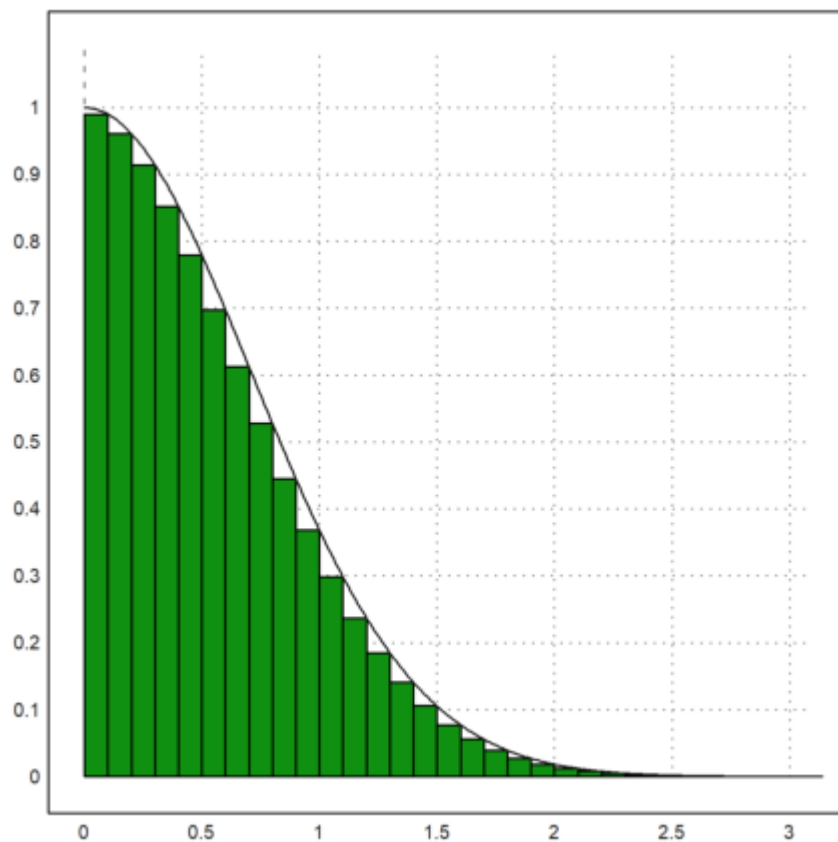


Figure 35: images-352.png

Integral tentu

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx$$

dapat dihamperi dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva  $y=f(x)$  tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1);
```

mendefinisikan t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x

```
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t));
```

simpan nilai-nilai  $f(x)$  dan jangan menggunakan  $x$  sebagai list

Hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx = 0.1950839272901491$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval ( $=0.1$ ) dan jumlah nilai-nilai  $f(x)$  untuk  $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$ .

```
>0.1*sum(f(x+0.1))
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval  $0.001$ .

```
>x=0:0.001:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

```
>function f(x) &= x^x
```

x  
x

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

Karena maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah `integrate`. Untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut kita lakukan seperti contoh sebelumnya.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
```

```
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_0^1 \sin^2(3x^5 + 7) dx = 0.7834935879025506$$

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2; $f(x)
```

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

```
>integrate(f,0,1)
```

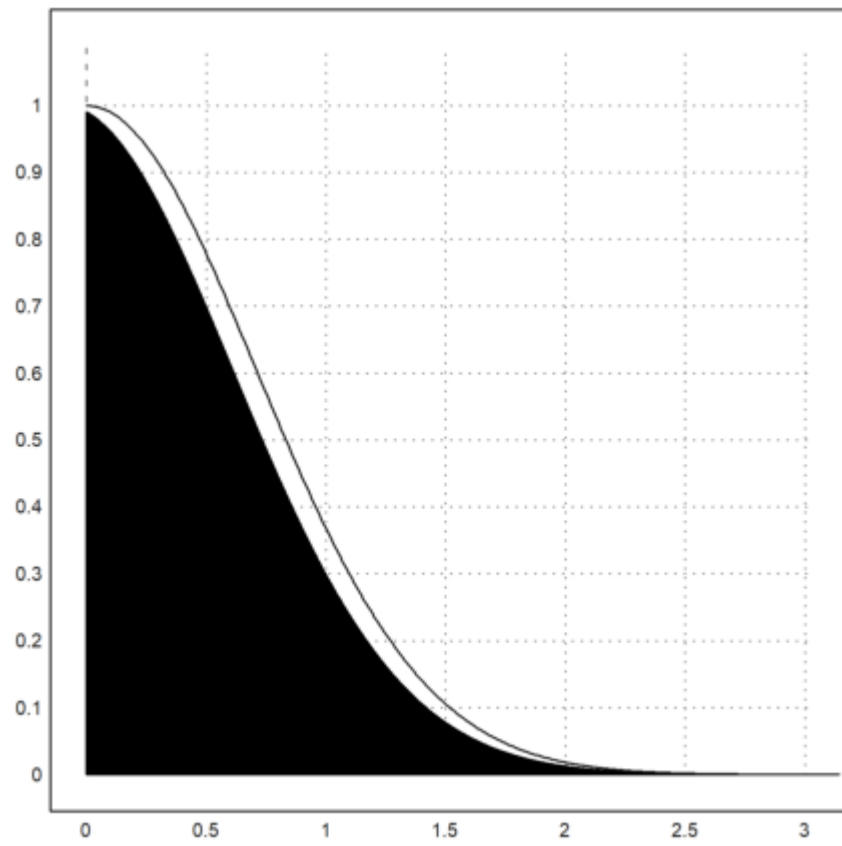


Figure 36: images-355.png



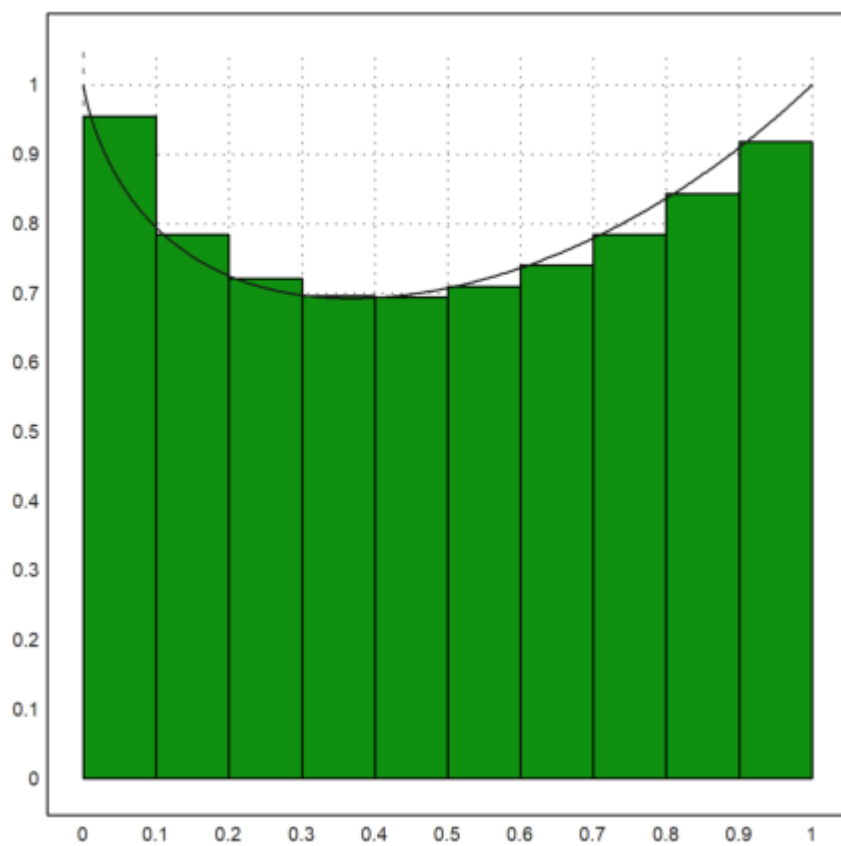


Figure 37: images-357.png

0.542581176074

## Sifat - Sifat Integral Tentu

### 1. Linearitas

sifat 1: Jika  $c$  adalah konstanta, maka:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

Sifat 2: Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah dua fungsi yang terintegralkan pada interval  $[a, b]$ , maka:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

### 2. Interval

Sifat 3: Jika  $a < c < b$ , maka:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

### 3. Fungsi Genap dan Ganjil

Fungsi Genap: Jika  $f(x)$  adalah fungsi genap (yaitu,  $f(-x) = f(x)$ ), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Fungsi Ganjil: Jika  $f(x)$  adalah fungsi ganjil (yaitu,  $f(-x) = -f(x)$ ), maka:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

### 4. Batas Integral Bertukar

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

&gt;

## Aplikasi Integral Tentu

### Aplikasi Integral Tentu pada Panjang Kurva

Sebuah jalan tol memiliki bentuk lengkungan yang dapat dimodelkan dengan persamaan  $y = x^2$  dari titik  $x = 0$  hingga  $x = 2$  (dalam kilometer). Berapakah panjang jalan tol tersebut

Penyelesaian:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

```
>$showev('integrate(sqrt(1 + (2*x)^2),x,0,2))
```

$$\int_0^2 \sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{asinh} 4 + 4\sqrt{17}}{4}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{2.0} \sqrt{4.0x^2 + 1.0} dx = 4.646783762432936$$

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
> plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurjanya
terlebih dahulu
```

```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $r(t)=r(t)
```

$$r(t) = \frac{\sin(3t)}{2} + 1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $fx(t)=fx(t)
```

$$fx(t) = \cos t \left( \frac{\sin(3t)}{2} + 1 \right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $fy(t)=fy(t)
```

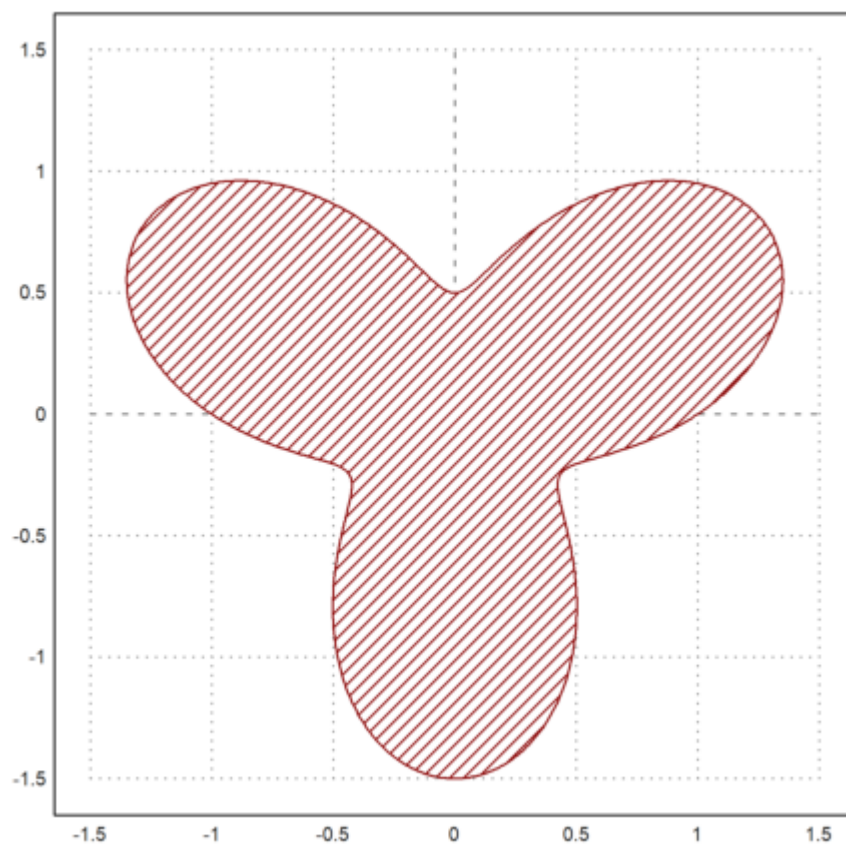


Figure 38: images-371.png

$$f_y(t) = \sin t \left( \frac{\sin(3t)}{2} + 1 \right)$$

```
>function ds(t) &:= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2)));
$'ds(t)=ds(t)
```

$$ds(t) = \frac{\sqrt{4 \cos(6t) + 4 \sin(3t) + 9}}{2}$$

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\frac{\int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos(6x) + 4 \sin(3x) + 9} dx}{2}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

Berikut kita hitung integralnya secara numerik dengan perintah EMT.

```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

9.0749467823

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax} \cos x, \quad y = e^{ax} \sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```

```
>&kill(a) // hapus ekspresi a
```

done

```
>function fx(t) &:= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$f_x(t) = e^{at} \cos t$$

```
>function fy(t) &:= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$f_y(t) = e^{at} \sin t$$

```
>function df(t) &:= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2)));
$'df(t)=df(t)
```

$$df(t) = \sqrt{a^2 + 1} e^{at}$$

```
>S &:=integrate(df(t),t,0,2*pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

$$\sqrt{a^2 + 1} \left( \frac{e^{2\pi a}}{a} - \frac{1}{a} \right)$$

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

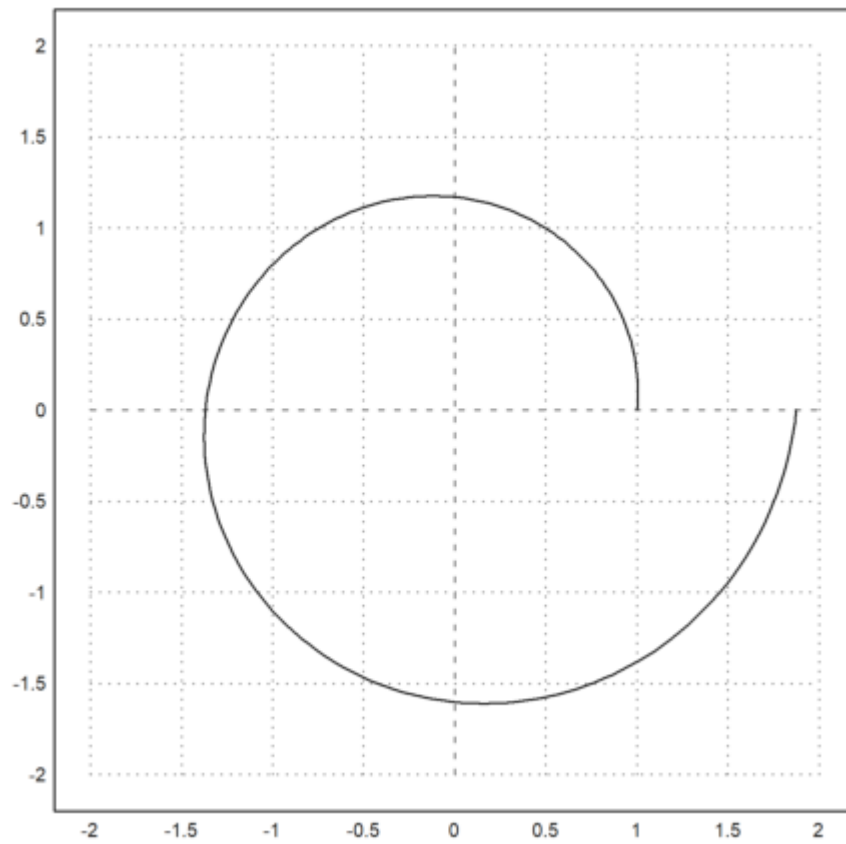


Figure 39: images-378.png

8.78817491636

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari  $r$  adalah  $K=2\pi r$ .

Penyelesaian:

Lingkaran dalam Koordinat Kartesius: Kita dapat merepresentasikan suatu lingkaran dengan pusat di titik asal  $(0,0)$  dan jari-jari  $r$  dengan persamaan parametrik berikut:

$$x(t) = r \cos(t)$$

$$y(t) = r \sin(t)$$

di mana  $t$  adalah parameter yang bervariasi dari 0 hingga  $2\pi$ .

Panjang Kurva Parametrik: Panjang kurva parametrik  $(x(t), y(t))$  dari  $t=a$  hingga  $t=b$  dapat dihitung dengan integral:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

1. Mencari Turunan

$$x(t) = r \cos(t)$$

```
>&showev('diff(r*cos(t),t))
```

$$\frac{d}{dt} (r \cos(t)) = -r \sin(t)$$

$$y(t) = r \sin(t)$$

```
>&showev('diff(r*sin(t),t))
```

$$\frac{d}{dt} (r \sin(t)) = r \cos(t)$$

2. Substitusi ke Rumus Panjang Kurva:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt$$

Karena

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1,$$

maka:

$$s = \int_0^{2\pi} r dt$$

### 3. Integral

$$s = r \int_0^{2\pi} dt = r[t]_0^{2\pi} = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{asinh} 2 + 2\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0} \sqrt{4.0x^2 + 1.0} dx = 2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y); ...
```

```
> plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```

Panjang tersebut dapat dihipir dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

## Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:



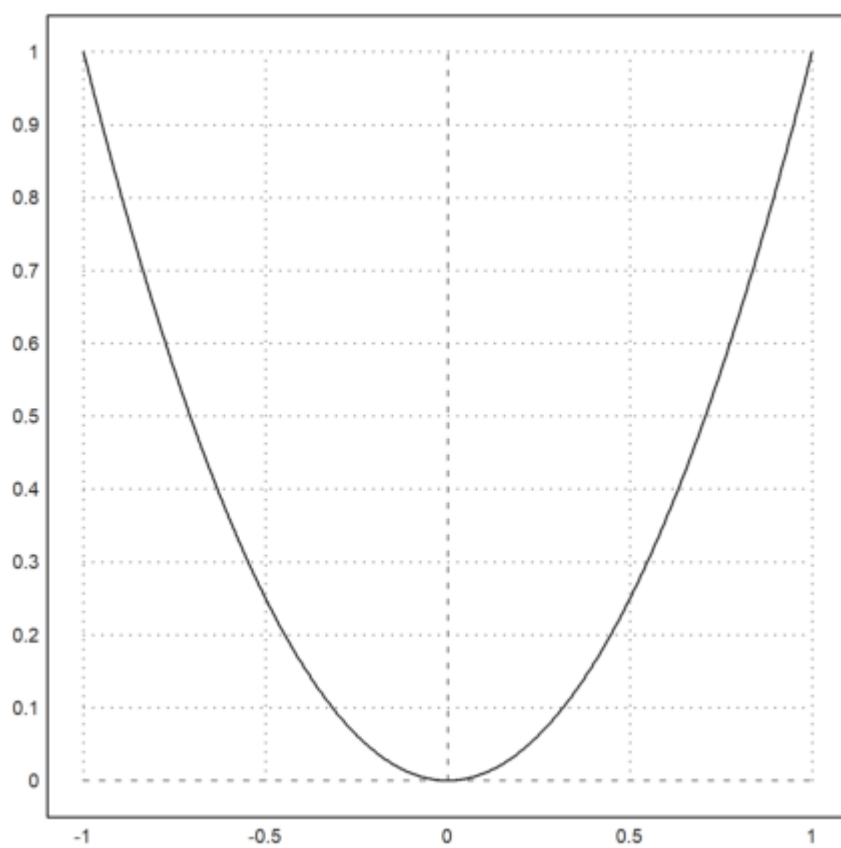


Figure 40: images-393.png

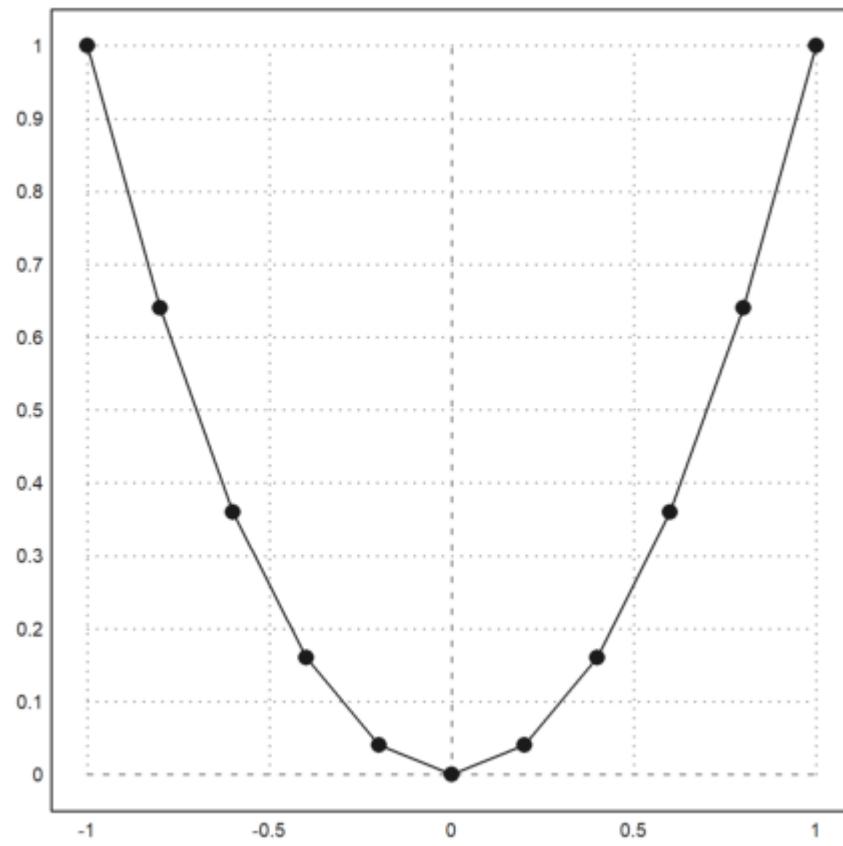


Figure 41: images-396.png

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &z= x3+y3-3*x*y; $z
```

$$y^3 - 3xy + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```

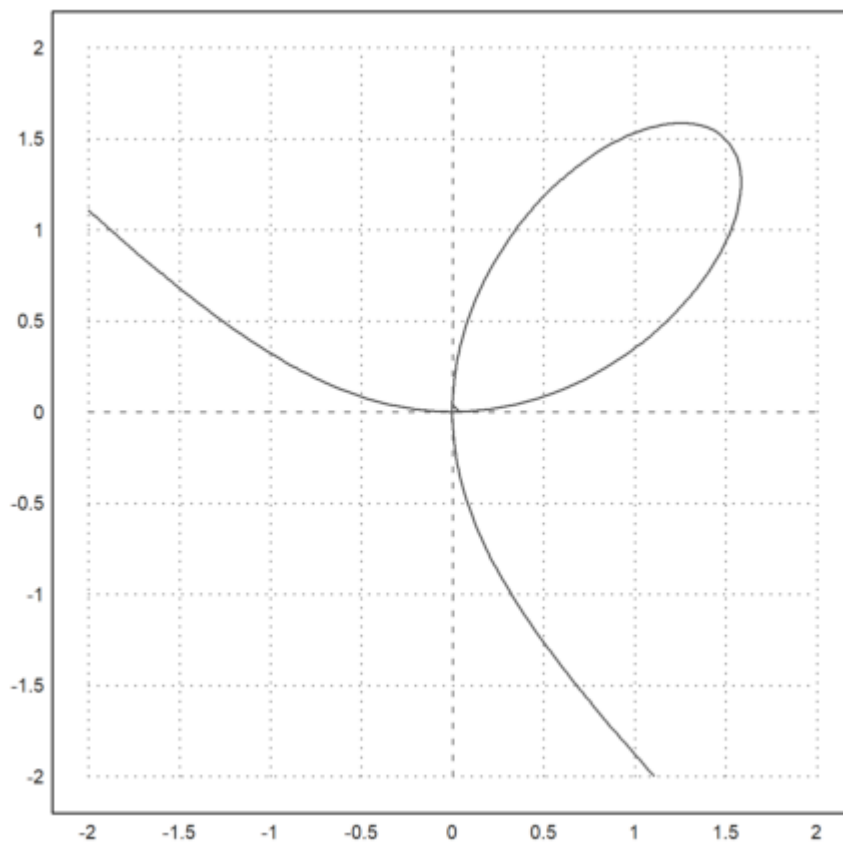


Figure 42: images-399.png

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

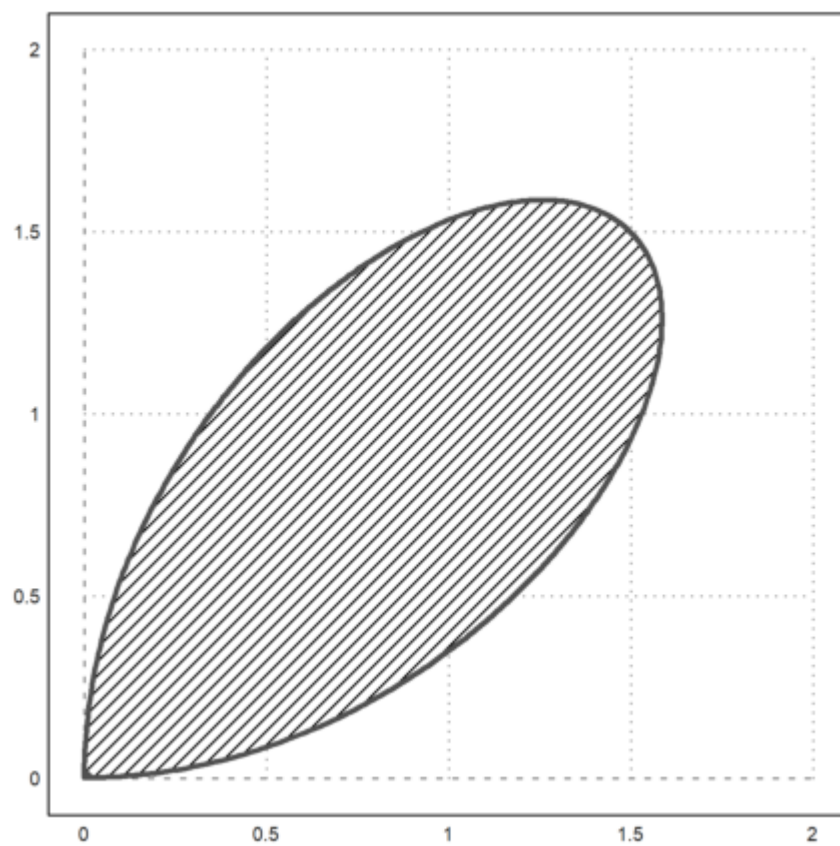


Figure 43: images-400.png

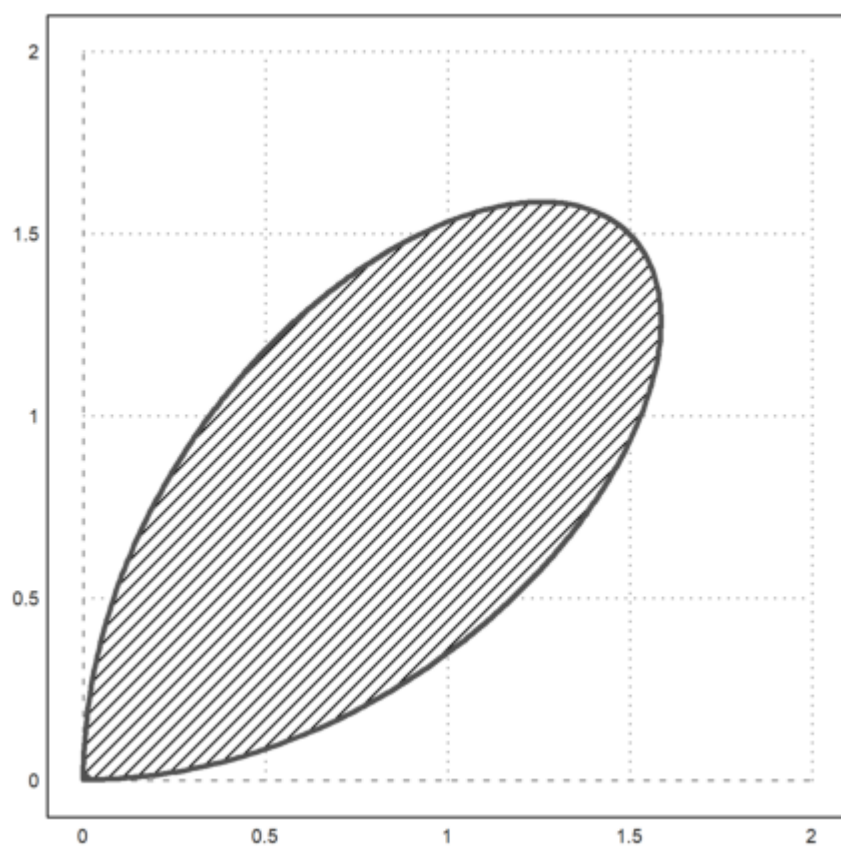


Figure 44: images-401.png

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[ x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

$$\left[ x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f(l) = \frac{3l}{l^3 + 1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai  $y=lx$ , yakni  $x=f(l)$  dan  $y=lf(l)$ .

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```

Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds(l) = \frac{\sqrt{9l^8 + 36l^6 - 36l^5 - 36l^3 + 36l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4l^9 + 6l^6 + 4l^3 + 1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9l^8 + 36l^6 - 36l^5 - 36l^3 + 36l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4l^9 + 6l^6 + 4l^3 + 1}} dl$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral tersebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral
```

```
4.91748872168
```

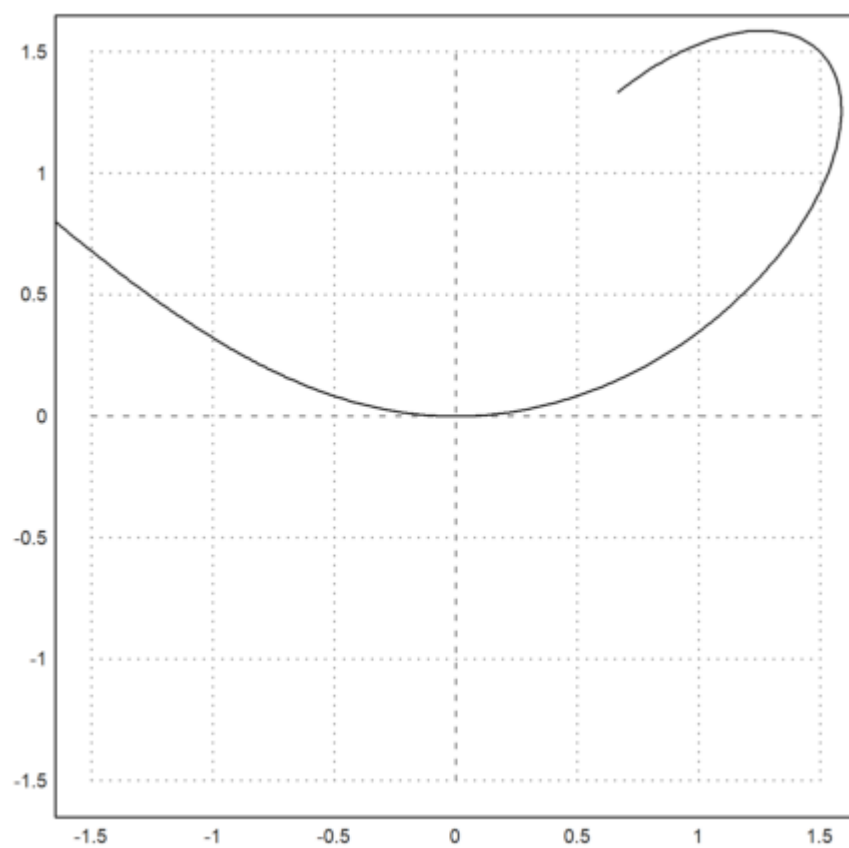


Figure 45: images-405.png

Perhitungan di atas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi  $x$  dan  $y$  dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction

>panjangkurva("x","x^2",-1,1)
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1)
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)

done

>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
sqrt(diff (fy, x) + diff (fx, x))

>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang
kurva terak
```

$$\sqrt{(\cos x - x \sin x)^2 + (\sin x + x \cos x)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

```
21.2562941482
```



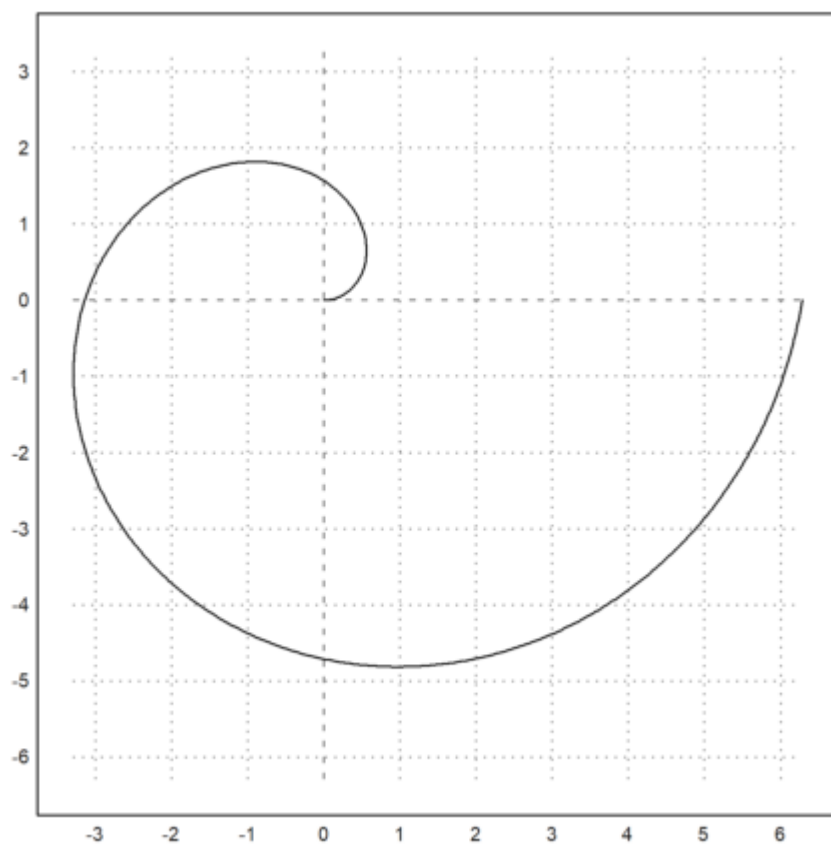


Figure 46: images-409.png

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```

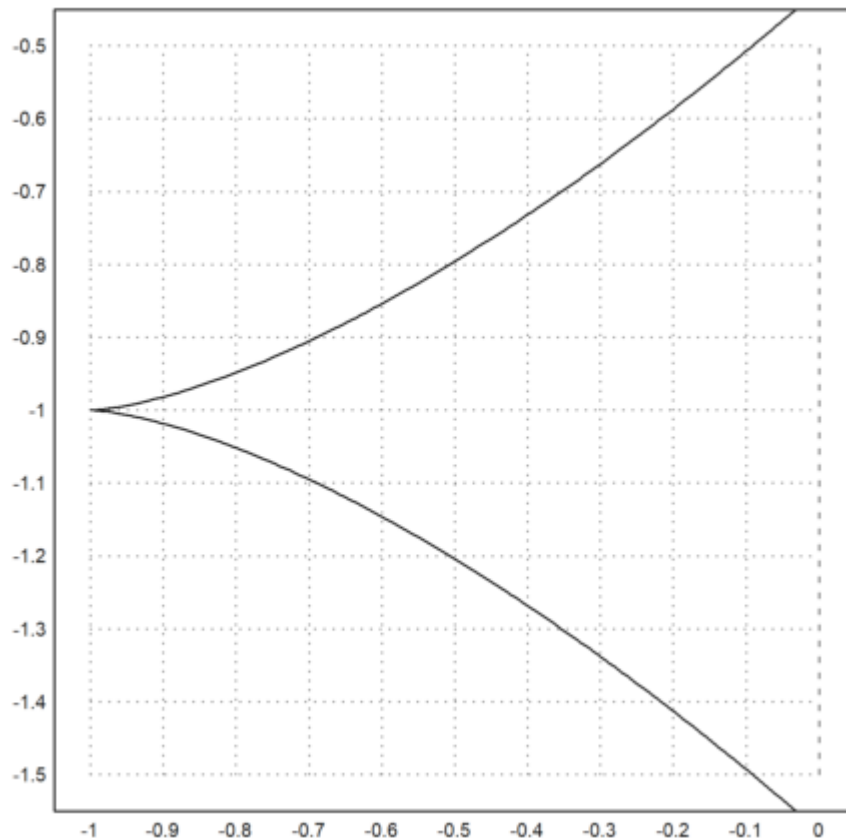


Figure 47: images-413.png

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3x\sqrt{9x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0 x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0 x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

## Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah  $r$ . Posisi titik pusat lingkaran pada saat  $t$  adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula  $(0,0)$  dan posisinya pada saat  $t$  adalah:

$$(r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika  $t=0$ ,  $t=\pi/2$ ,  $t=r*\pi$ .

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
      r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
      r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk  $r=1$ .

```
> ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
```

```
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
```

```
> plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
```

```
> plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
```

```
> plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
```

```
> plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
```

```
> plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add); ...
```

```
> plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid
```

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x + 1} = \sqrt{2 - 2 \cos x}$$

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

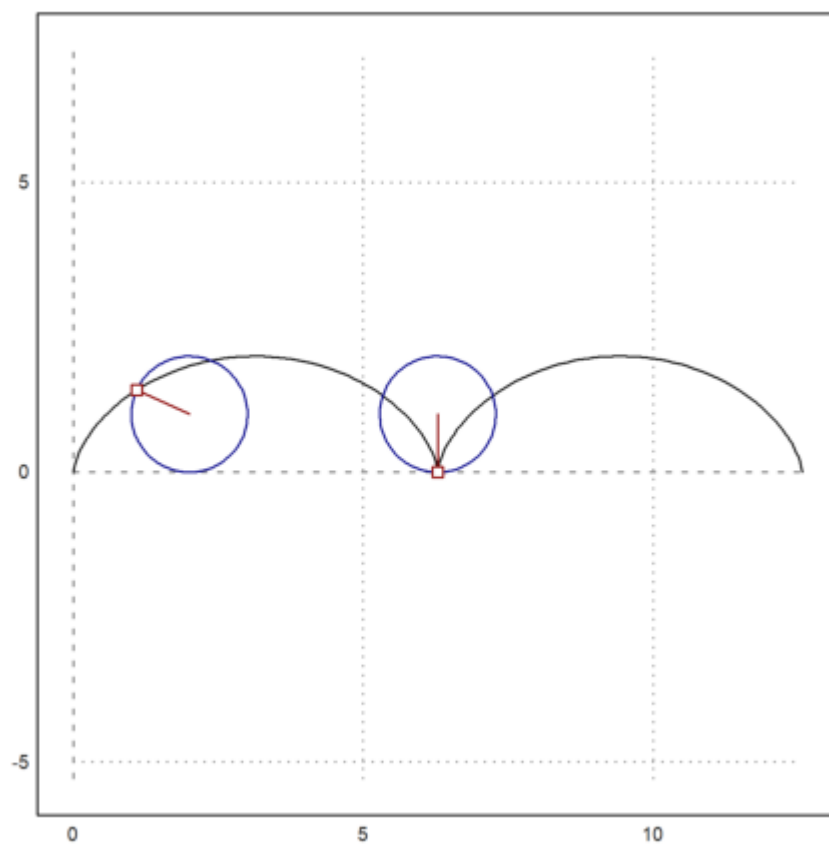


Figure 48: images-419.png

$$\sqrt{2 - 2 \cos x}$$

>\$showev('integrate(ds,x,0,2\*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos x} \, dx = 8$$

>integrate(mxm("ds"),0,2\*pi) // hitung secara numerik

8

>romberg(mxm("ds"),0,2\*pi) // cara lain hitung secara numerik

8

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

## Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

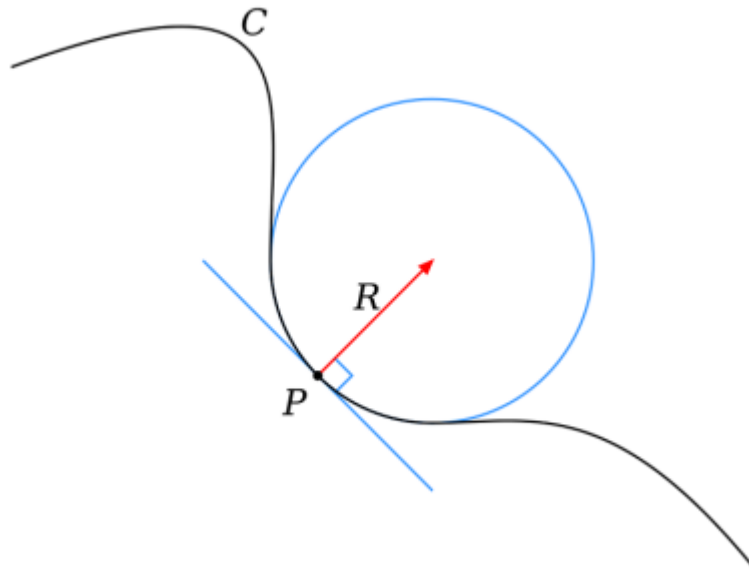


Figure 49: images-424.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar

P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar  $2\pi$  sejauh  $2\pi R$ .)

Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekuivalen.

## 6. Barisan dan Deret

Barisan adalah susunan bilangan yang memiliki pola atau karakteristik tertentu, sedangkan deret adalah hasil penjumlahan dari anggota-anggota dalam barisan tertentu.

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- menggunakan titik dua “:”, sama seperti saat mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan
- menggunakan perintah “sequence” dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah “iterate” atau “niterate”;
- menggunakan fungsi Maxima “create\_list” atau “makelist” untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) “sum”. Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

### Menggunakan titik dua

```
>1:15
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]
```

```
>1:3:30
[1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28]
>sum(1:3:30)
145
>cumsum(1:3:30)
[1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145]
```

## Menggunakan perintah “sequence” dan rumus barisan (suku ke -n)

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi “sequence()”. Fungsi ini menghitung nilai-nilai  $x[n]$  dari semua nilai sebelumnya,  $x[1], \dots, x[n-1]$  yang diketahui.

Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence(“x[n-1]+x[n-2]”,[1,1],15) //suku ke satu :1, suku ke dua :1
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610]
>plot2d(sequence(“x[n-1]+x[n-2]”,[1,1],15)):
>sequence(“x[n-1]+x[n-2]”,[1,1],250)^(1/(1:250))
[1, 1, 1.25992, 1.31607, 1.37973, 1.41421, 1.44256, 1.46311,
1.47967, 1.49292, 1.50389, 1.51309, 1.52091, 1.52765, 1.53352,
1.53867, 1.54323, 1.54729, 1.55094, 1.55422, 1.5572, 1.55992,
1.5624, 1.56468, 1.56678, 1.56872, 1.57052, 1.57219, 1.57375,
1.57521, 1.57657, 1.57785, 1.57905, 1.58019, 1.58126, 1.58227,
1.58322, 1.58413, 1.58499, 1.58581, 1.58659, 1.58733, 1.58804,
1.58871, 1.58936, 1.58997, 1.59057, 1.59113, 1.59168, 1.5922,
1.5927, 1.59319, 1.59365, 1.5941, 1.59453, 1.59495, 1.59535,
1.59574, 1.59611, 1.59648, 1.59683, 1.59717, 1.5975, 1.59782,
1.59813, 1.59843, 1.59872, 1.599, 1.59927, 1.59954, 1.5998,
1.60005, 1.6003, 1.60053, 1.60077, 1.60099, 1.60121, 1.60143,
1.60164, 1.60184, 1.60204, 1.60223, 1.60242, 1.60261, 1.60279,
1.60296, 1.60314, 1.60331, 1.60347, 1.60363, 1.60379, 1.60394,
1.60409, 1.60424, 1.60439, 1.60453, 1.60467, 1.6048, 1.60494,
1.60507, 1.60519, 1.60532, 1.60544, 1.60556, 1.60568, 1.6058,
1.60591, 1.60602, 1.60613, 1.60624, 1.60635, 1.60645, 1.60655,
1.60665, 1.60675, 1.60685, 1.60694, 1.60704, 1.60713, 1.60722,
1.60731, 1.6074, 1.60748, 1.60757, 1.60765, 1.60773, 1.60781,
1.60789, 1.60797, 1.60805, 1.60813, 1.6082, 1.60827, 1.60835,
```



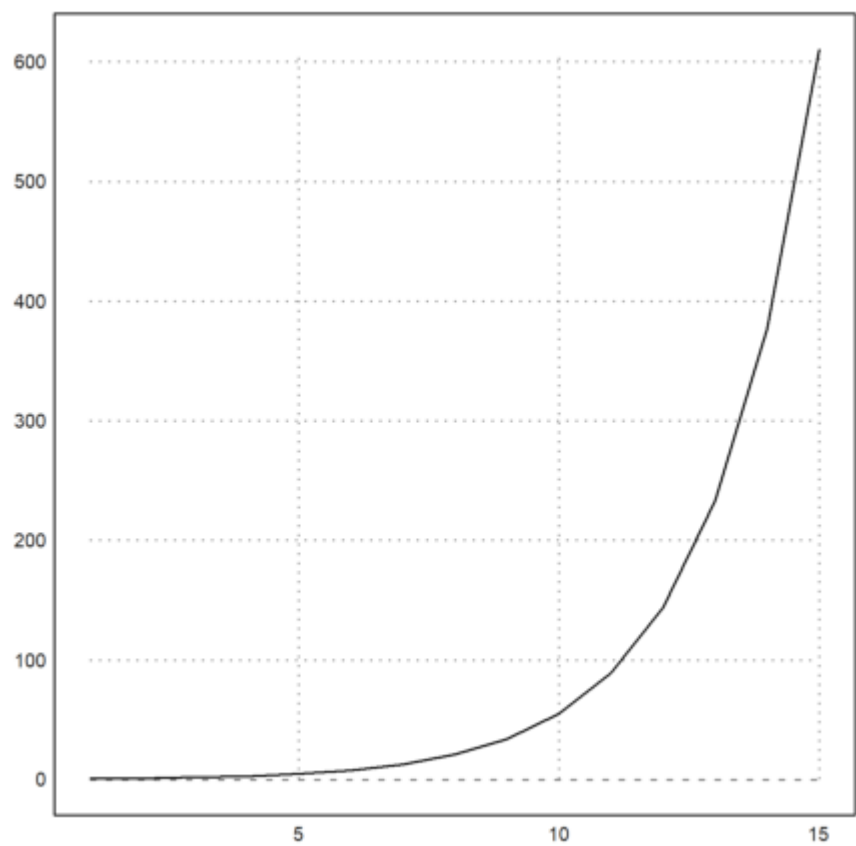


Figure 50: images-427.png

```
1.60842, 1.60849, 1.60856, 1.60863, 1.60869, 1.60876, 1.60883,
... ]
```

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```

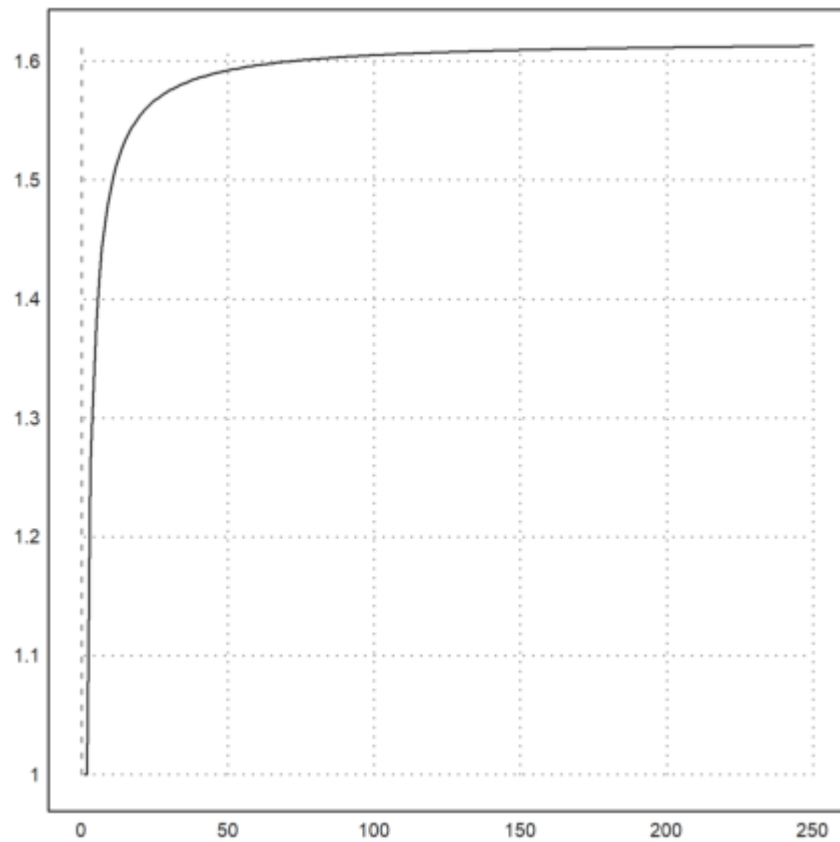


Figure 51: images-428.png

## Menggunakan perintah “iterate” atau “niterate”

EMT menyediakan fungsi `iterate("g(x)", x0, n)` untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 = x_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Berikut contoh penggunaan iterasi

Contoh : Menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertumbuhan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate(“x*q”,1000,n=10)
```

```
1000  
1050  
1102.5  
1157.63  
1215.51  
1276.28  
1340.1  
1407.1  
1477.46  
1551.33  
1628.89
```



# Spiral Theodorus

konstruksi segitiga siku-siku yang berkesinambungan menjadi spiral atau dalam kata lain sebuah spiral yang dibangun dari segitiga siku-siku yang berurutan. Setiap segitiga siku-siku yang baru dibuat dengan menghubungkan sisi miring segitiga sebelumnya dengan sisi alas yang panjangnya 1 satuan.

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,20); plot2d(x,r=3.5);...  
> textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```

Selanjutnya dihubungkan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```

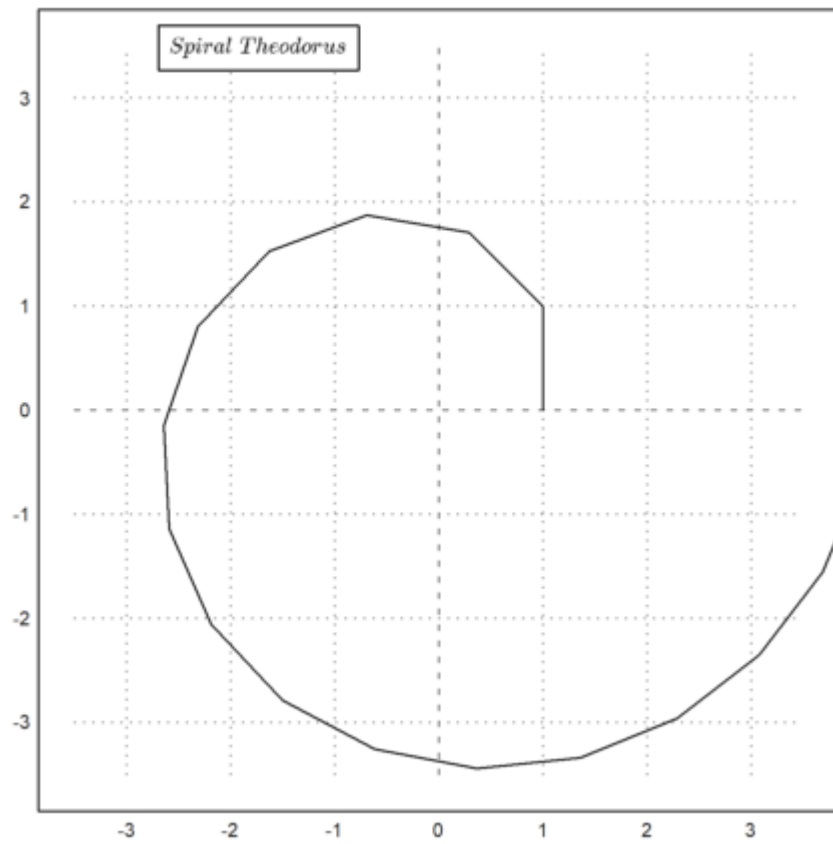
```
>function gstep (v) ...
```

```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```

## Limit Barisan

Limit dari suatu barisan ( $x_n$ ) saat ( $n$ ) mendekati tak hingga adalah nilai yang didekati oleh elemen-elemen barisan tersebut seiring dengan bertambahnya ( $n$ ).



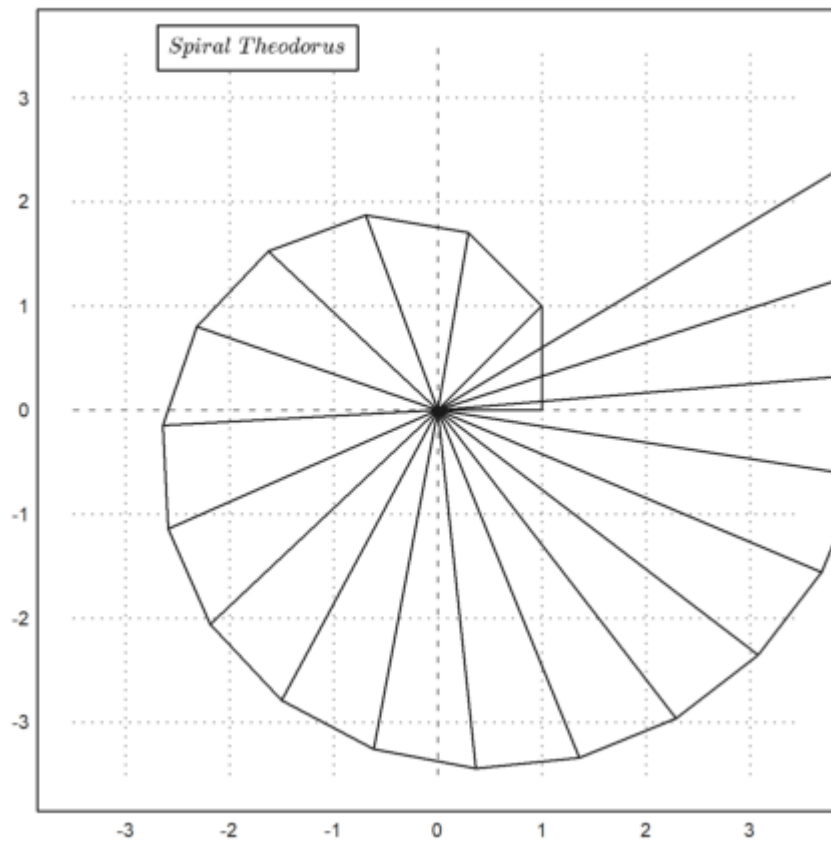


Figure 53: images-432.png

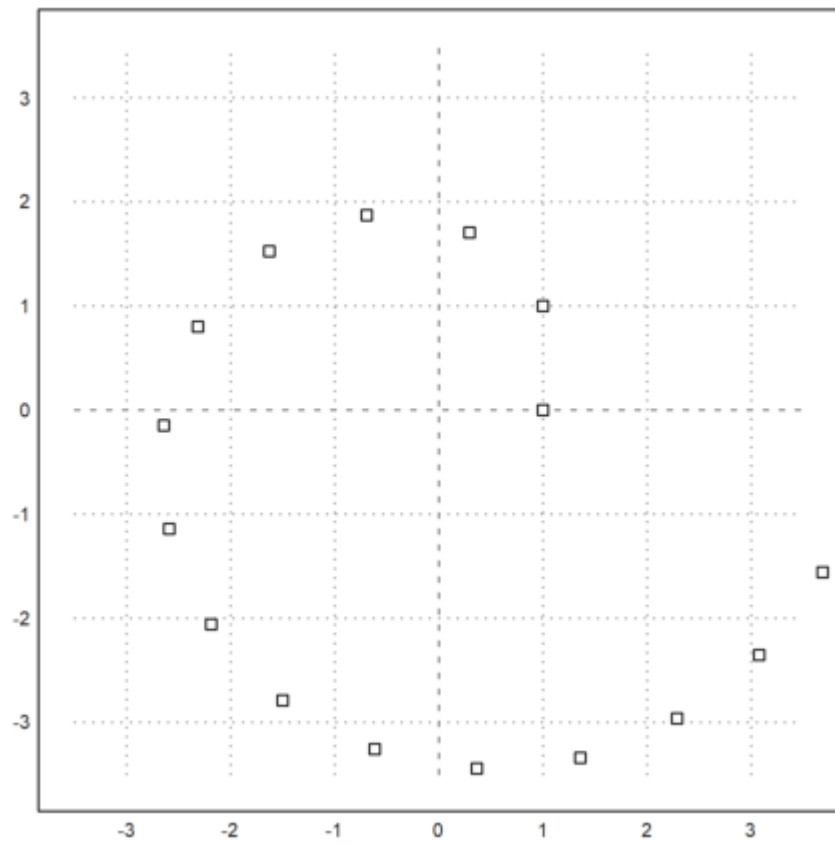


Figure 54: images-433.png



Secara formal, kita mengatakan bahwa barisan  $(x_n)$  memiliki limit  $(L)$ .

Definisi formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \implies |x_n - L| < \varepsilon)$$

Dapat dinotasikan sebagai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$$

Contoh:

1.

$$x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$

>\$showev('limit(1/n,n,inf))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

>\$x\_n := 1/n

$$\frac{1}{n}$$

>\$limit(x\_n,n,inf)

$$0$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 5}$$

>\$showev('limit((2\*n^2-1)/(n^2+5),n,inf))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 5} = 2$$

# Kekonvergenan

Iterasi sampai konvergen merupakan proses yang terus berulang sampai mendapat nilai yang stabil atau tidak berubah secara signifikan. Tetapi, apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Kita dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

>iterate("cos(x)",1) // iterasi  $x(n+1)=\cos(x(n))$ , dengan  $x(0)=1$ .

0.739085133216

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

>hasil := iterate("cos(x)",1,2) //iterasi  $x(n+1)=\cos(x(n))$ , dengan interval awal (1, 2)

~0.739085133211,0.7390851332133~

>h=expand(hasil,100), cos(h) « h

~0.73908513309,0.73908513333~

1

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

>function f(x) := (x+2/x)/2

Iterasi  $x(n+1)=f(x(n))$  akan konvergen ke akar kuadrat 2.

>iterate("f",2), sqrt(2)

1.41421356237

1.41421356237

# Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi  $f$  yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar  $x=a$  adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Diberikan contoh fungsi eksponensial yang didekati dengan Deret Taylor

> \$e^x = \text{taylor}(\exp(x), x, 0, 10)\$

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

> x := 4; k := 10; hasil := round(exp(x), k)

54.5981500331

Bukti :

$$e^x = \frac{(x)^{10}}{(3628800)} + \frac{(x)^9}{(362880)} + \frac{(x)^8}{(40320)} + \frac{(x)^7}{(5040)} + \frac{(x)^6}{(720)} + \frac{(x)^5}{(120)} + \frac{(x)^4}{(24)} + \frac{(x)^3}{(6)} + \frac{(x)^2}{(2)} + x + 1$$

untuk  $x=4$

$$e^4 = \frac{(4)^{10}}{(3628800)} + \frac{(4)^9}{(362880)} + \frac{(4)^8}{(40320)} + \frac{(4)^7}{(5040)} + \frac{(4)^6}{(720)} + \frac{(4)^5}{(120)} + \frac{(4)^4}{(24)} + \frac{(4)^3}{(6)} + \frac{(4)^2}{(2)} + 4 + 1$$

$$e^4 = \frac{(4)^{10}}{(3628800)} + \frac{(4)^9}{(362880)} + \frac{(4)^8}{(40320)} + \frac{(4)^7}{(5040)} + \frac{(4)^6}{(720)} + \frac{(4)^5}{(120)} + \frac{(4)^4}{(24)} + \frac{(4)^3}{(6)} + \frac{(4)^2}{(2)} + 5$$

$$e^4 = 54,4431$$

# Soal Latihan

1. Tentukan barisan dengan a=5 dengan beda sebanyak 25

> (5:3:25)

[5, 8, 11, 14, 17, 20, 23]

2. Tentukan jumlah elemen dan jumlah kumulatif dari barisan no 1

>sum(5:3:25)

98

>cumsum(5:3:25)

[5, 13, 24, 38, 55, 75, 98]

3. Hitunglah limit barisan dari

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{5x+3}{x}}$$

>\$showev('limit((5\*x^2+1)/(x),x,inf))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+1}{x} = \infty$$

4. Buatlah deret taylor log(x) di sekitar x=1 yang dipotong pada k=3

>\$'log(x)=taylor(log(x),x,1,3)

$$\log x = x + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

5. Buatlah barisan kompleks dengan X1=1 dan X2=2 sebanyak 10 suku

>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,2],10) //suku ke satu :1, suku ke dua :1

[1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89]

## 7. Fungsi Multivariabel

Fungsi multivariabel adalah sebuah konsep dalam matematika yang menggambarkan hubungan antara satu variabel output dengan dua atau lebih variabel input. Berbeda dengan fungsi satu variabel yang hanya melibatkan satu variabel bebas, fungsi multivariabel melibatkan beberapa variabel bebas yang secara bersama-sama menentukan nilai dari variabel terikat. Fungsi multivariabel biasanya digunakan untuk menggambarkan hubungan yang kompleks dalam bidang seperti fisika, ekonomi, teknik, dan berbagai ilmu lainnya.

Secara umum, jika  $f$  adalah sebuah fungsi multivariabel, maka bentuk umumnya dapat dinyatakan sebagai:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dimana  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel bebas (input) menunjukkan jumlah variabel dan  $z$  adalah variabel terikat (output).

contoh :

Luas Persegi Panjang: Luas persegi panjang ( $L$ ) adalah fungsi dari panjang ( $p$ ) dan lebar ( $l$ ). Kita dapat menuliskannya sebagai  $L(p, l) = p * l$ . Di sini,  $L$  adalah variabel terikat, sedangkan  $p$  dan  $l$  adalah variabel bebas.

Diberikan fungsi:

$$x^2 + 2xy + y^2$$

```
>function f(x,y) &= x^2 + 2*x*y + y^2
```

$$y^2 + 2xy + x^2$$

diff(f,x): Bagian ini untuk menghitung turunan numerik.

$f$ : Merupakan representasi dari fungsi yang ingin kita turunkan. Fungsi ini bisa berupa fungsi anonim, fungsi yang telah didefinisikan sebelumnya, atau bahkan persamaan matematika yang kompleks.

x: Menunjukkan variabel terhadap mana kita akan menurunkan fungsi f. Artinya, kita akan mencari laju perubahan fungsi f terhadap perubahan nilai x.

&=: mendefinikan fungsi, seperti yang sudah dijelaskan kemarin

```
>fx &= diff(f(x,y),x)
```

$$2y + 2x$$

ini merupakan fungsi simbolik jadi harus didefinisikan dengan &=

```
>fy &= diff(f(x,y),y)
```

$$2y + 2x$$

```
>plot3d("f", -2,2, -2,2) :
```

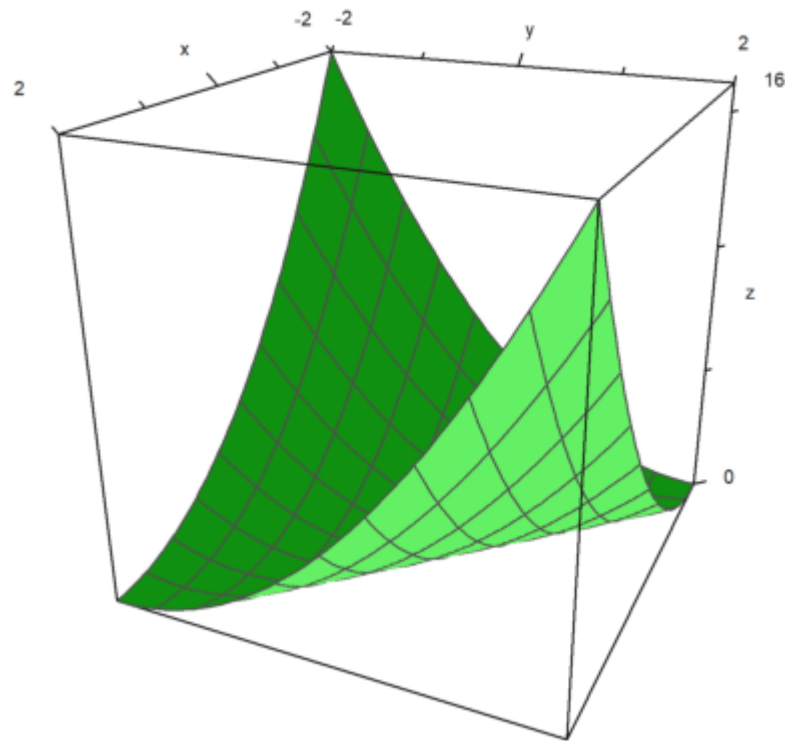


Figure 55: images-454.png

menggunakan fungsi f yang telah didefinisikan di atas.

# Turunan fungsi multivariabel

Diberikan fungsi:

$$\sqrt{x} + y^2 + 2xz$$

```
>function f(x,y,z)&= sqrt(x)+y^2+2*x*z
```

$$2xz + y^2 + \sqrt{x}$$

```
>fx &= diff(f(x,y,z),x)
```

$$2z + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

```
>fy &= diff(f(x,y,z),y)
```

$$2y$$

```
>fz &= diff(f(x,y,z),z)
```

$$2x$$

Diberikan fungsi

$$x^3 + 4y^2 - 3x + 2$$

```
>function g(x,y) &= x^3+4*y^2-3*x+2
```

$$4y^2 + x^3 - 3x + 2$$

menentukan dg/dx

```
>gx &= diff(g(x,y),x)
```

$$3x^2 - 3$$

menentukan  $dg/dy$

```
>gy &= diff(g(x,y),y)
```

$$8y$$

```
>grad &= [diff(g(x,y),x), diff(g(x,y),y)]
```

$$[3x^2 - 3, 8y]$$

Contoh Trigonometri

Diberikan fungsi:

$$\frac{2\sin(x)^2}{\sin(x) + \cos(x)} + \tan(y)^3$$

tentukan  $df/dx$ ,  $df/dy$ , dan  $df/dz$ !

```
>function f(x,y,z)&= 2*sin(x)^2/(sin(x)+cos(z))+tan(y)^3;
```

```
>$fx := diff(f(x,y,z),x)
```

$$\frac{4 \cos x \sin x}{\cos z + \sin x} - \frac{2 \cos x \sin^2 x}{(\cos z + \sin x)^2}$$

```
>$fy := diff(f(x,y,z),y)
```

$$3 \sec^2 y \tan^2 y$$

```
>$fz := diff(f(x,y,z),z)
```

$$\frac{2 \sin^2 x \sin z}{(\cos z + \sin x)^2}$$

# Grafik

Grafik fungsi multivariabel adalah representasi visual dari fungsi yang memiliki dua atau lebih variabel input. Untuk fungsi dua variabel  $f(x, y)$ , grafiknya berupa permukaan dalam ruang tiga dimensi.

Bidang  $z = 2x + 3y$

```
>plot3d("2*x + 3*y", -2,2, -2,2):
```

```
>title("Kontur z = 2x + 3y"):
```

Paraboloid  $z = x^2 + y^2$

```
>plot3d("x^2 + y^2", -8,2, -8,2):
```



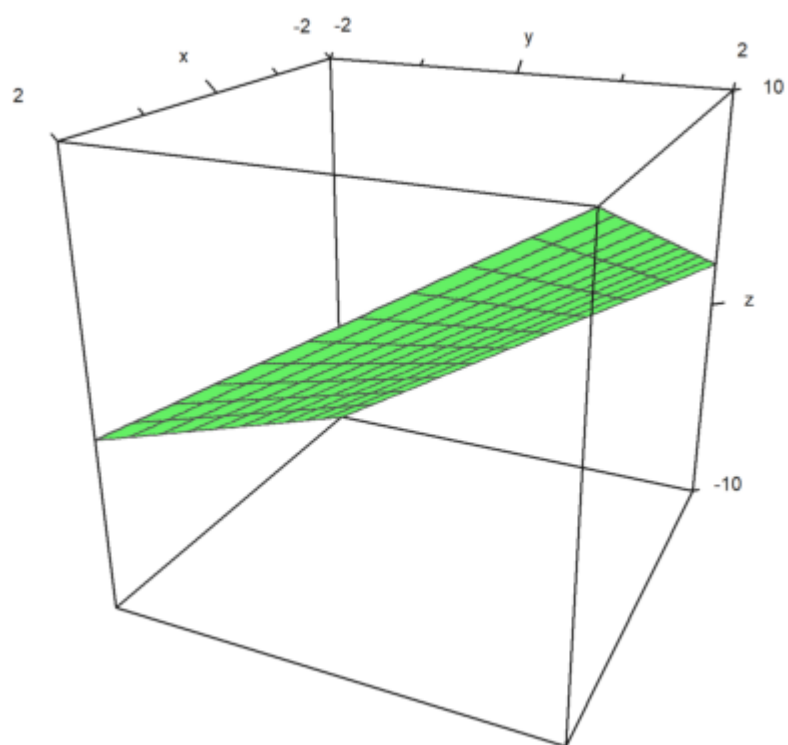


Figure 56: images-461.png

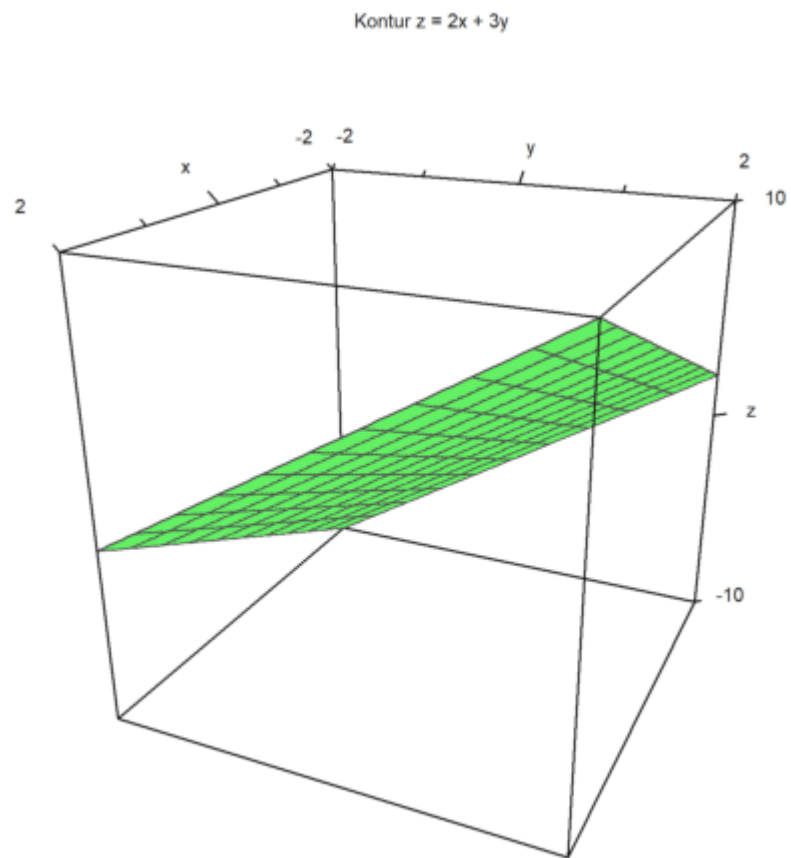


Figure 57: images-462.png

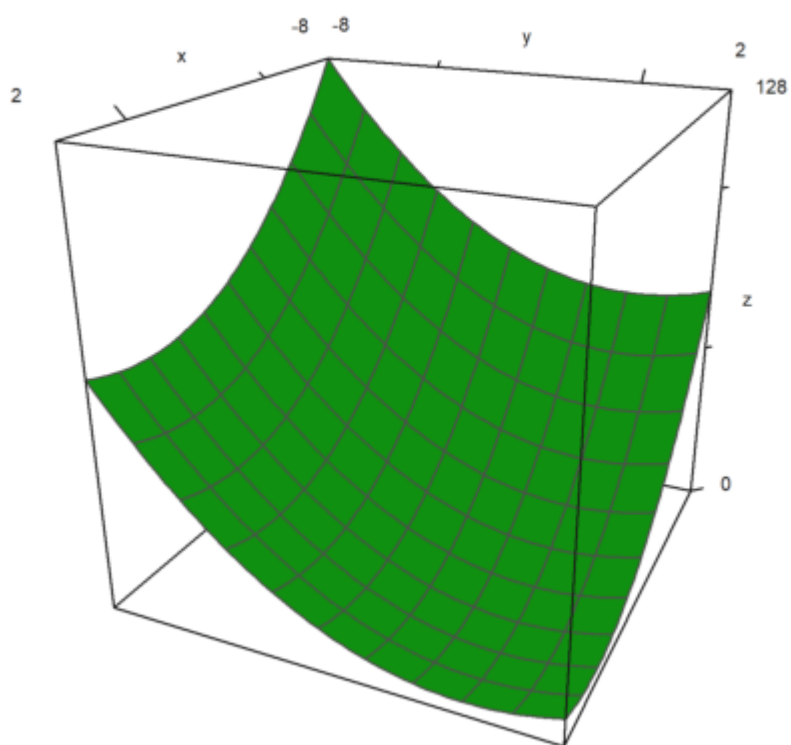


Figure 58: images-463.png

Hyperbolic Paraboloid

$$z = x^2 - y^2$$

```
>plot3d("x^2 - y^2", -2,2, -2,2):
```

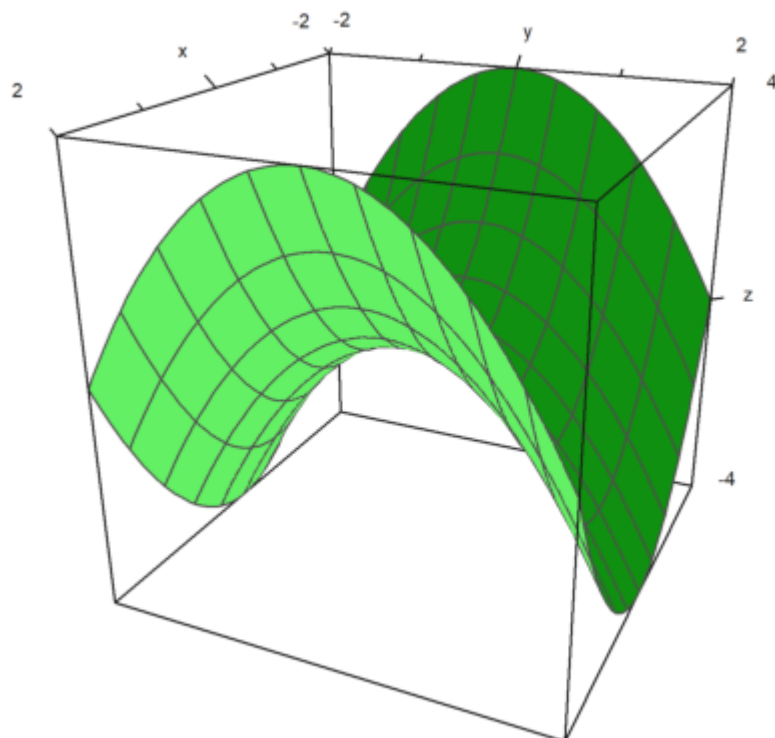


Figure 59: images-465.png

$$z = \sin(x)\cos(y)$$

```
>plot3d("sin(x)*cos(y)", -pi,pi, -pi,pi):
```

$$z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

```
>plot3d("sin(sqrt(x^2 + y^2))", -4*pi,4*pi, -4*pi,4*pi):
```

$$z = \sin(x)\sin(y)$$

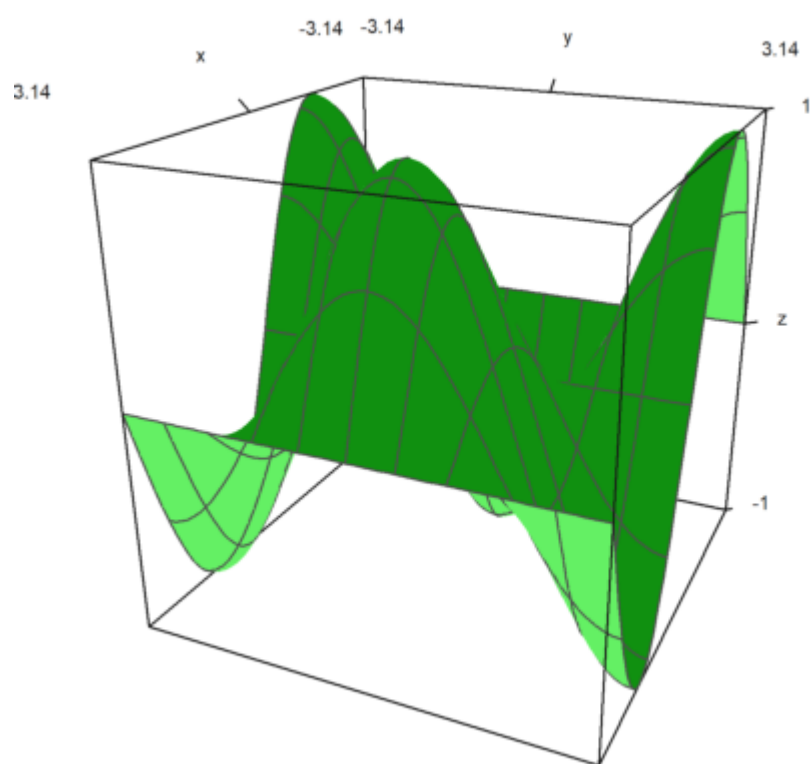


Figure 60: images-466.png

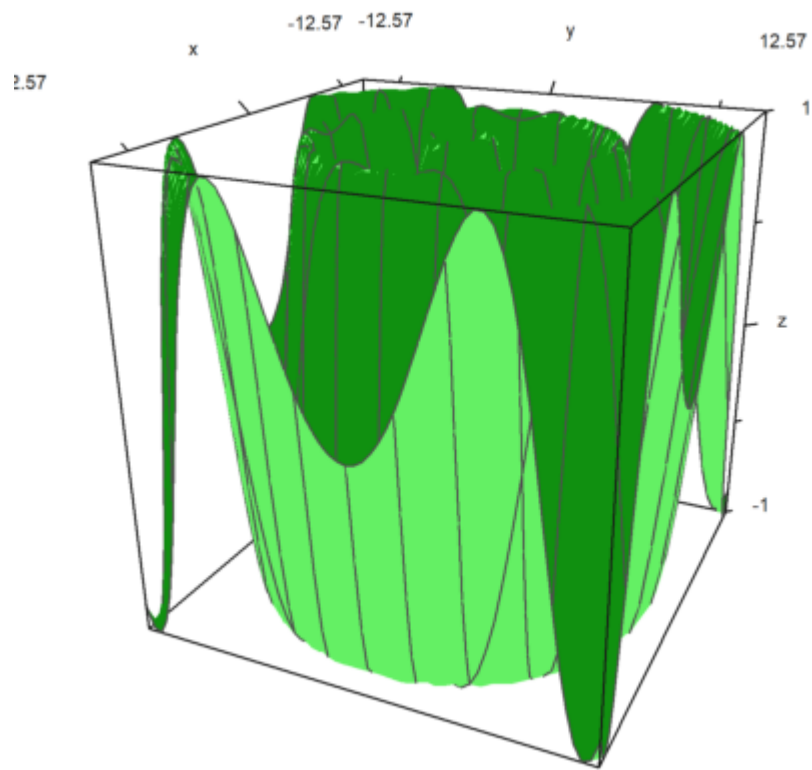


Figure 61: images-468.png

```
>plot3d("sin(x)*sin(y)", -pi,pi, -pi,pi):
```

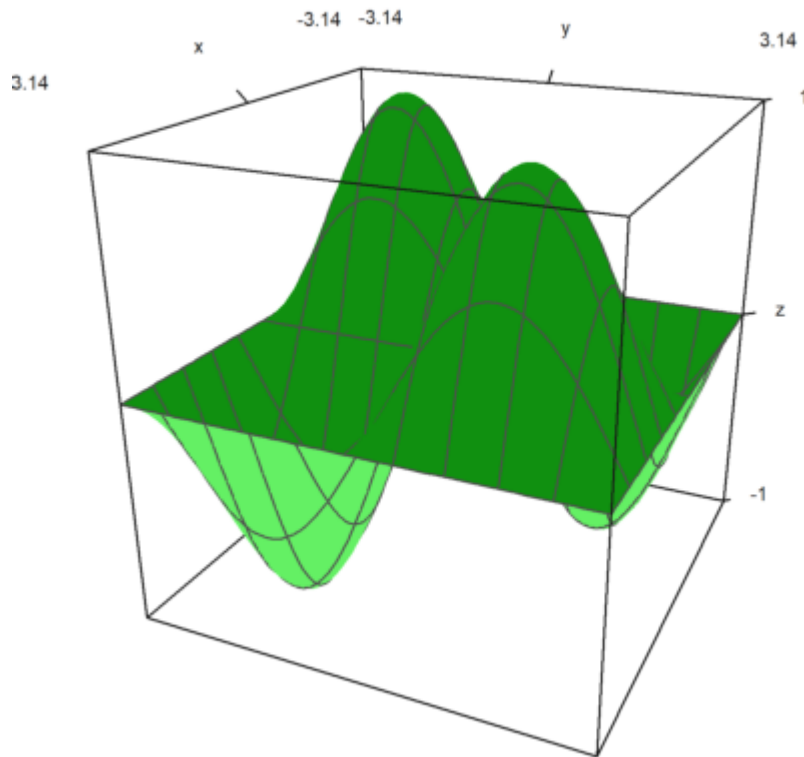


Figure 62: images-470.png

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)", -2,2, -2,2):
```

Distribusi normal bivariat

```
>plot3d("(1/(2*pi))*exp(-(x^2+y^2)/2)", 1,3, 1,3):
```

Potensial elektrostatis

```
>plot3d("1/sqrt(x^2+y^2+1)", -1,3, -1,3):
```

```
>title("Potensial Elektrostatis"):
```

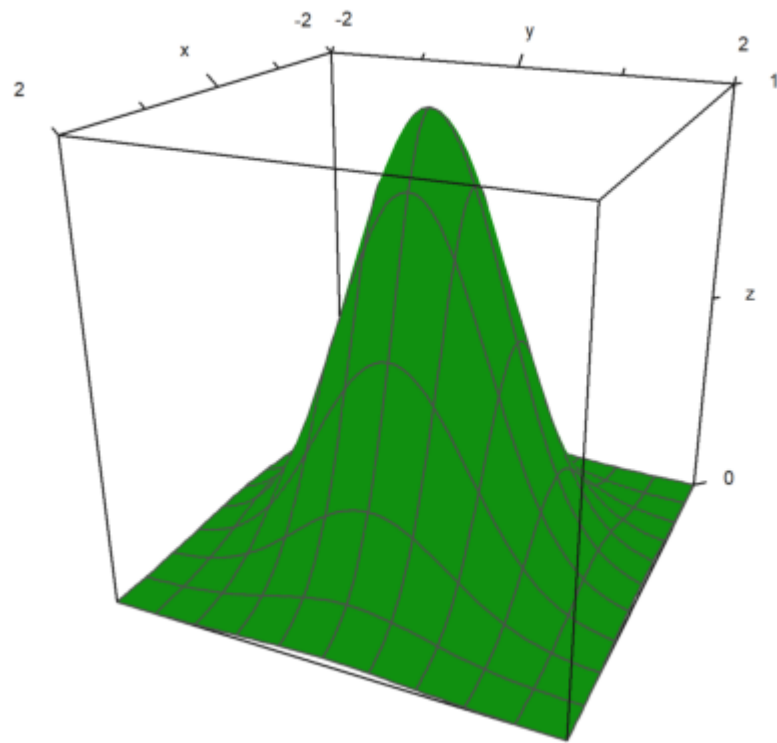


Figure 63: images-472.png



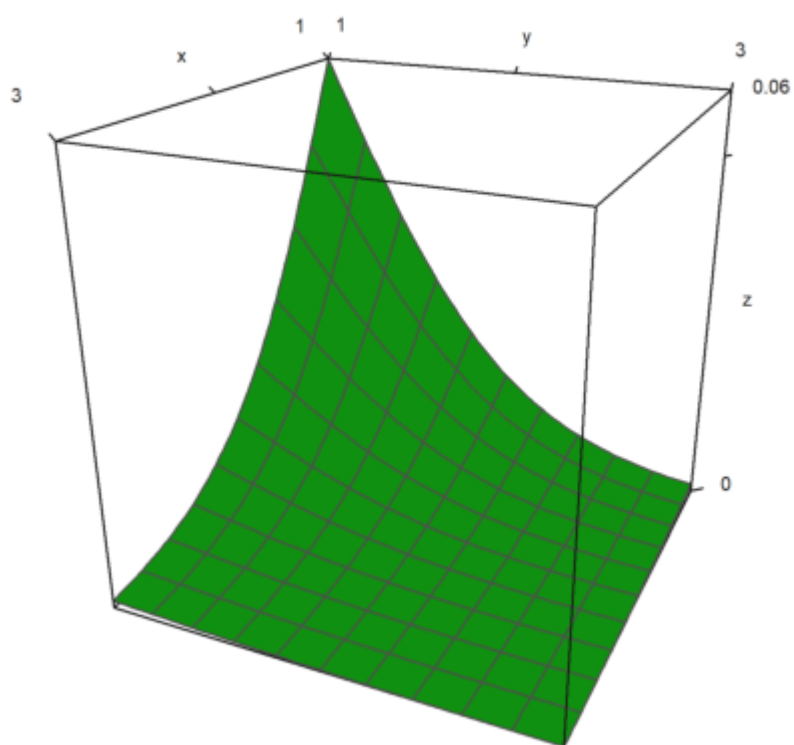


Figure 64: images-473.png

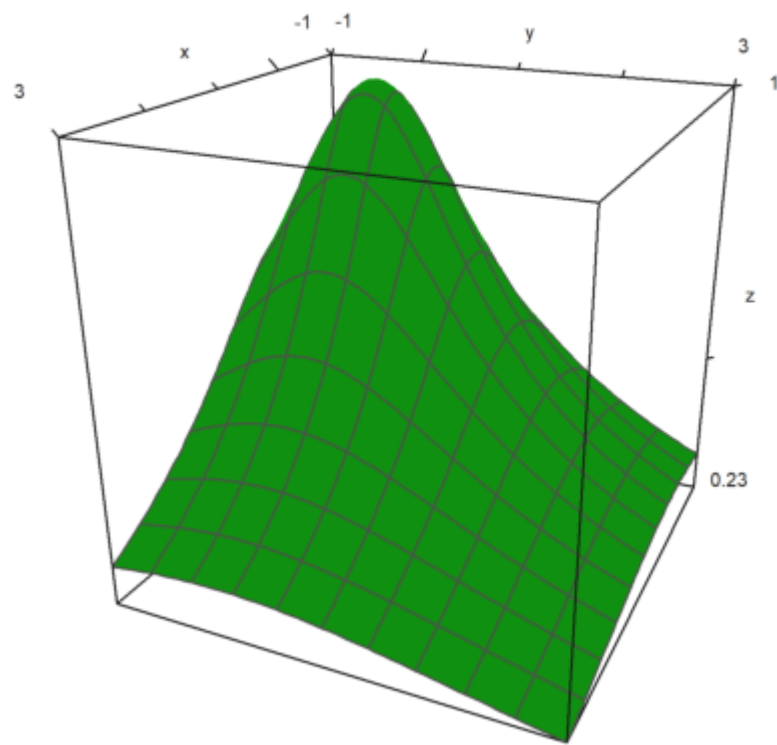


Figure 65: images-474.png

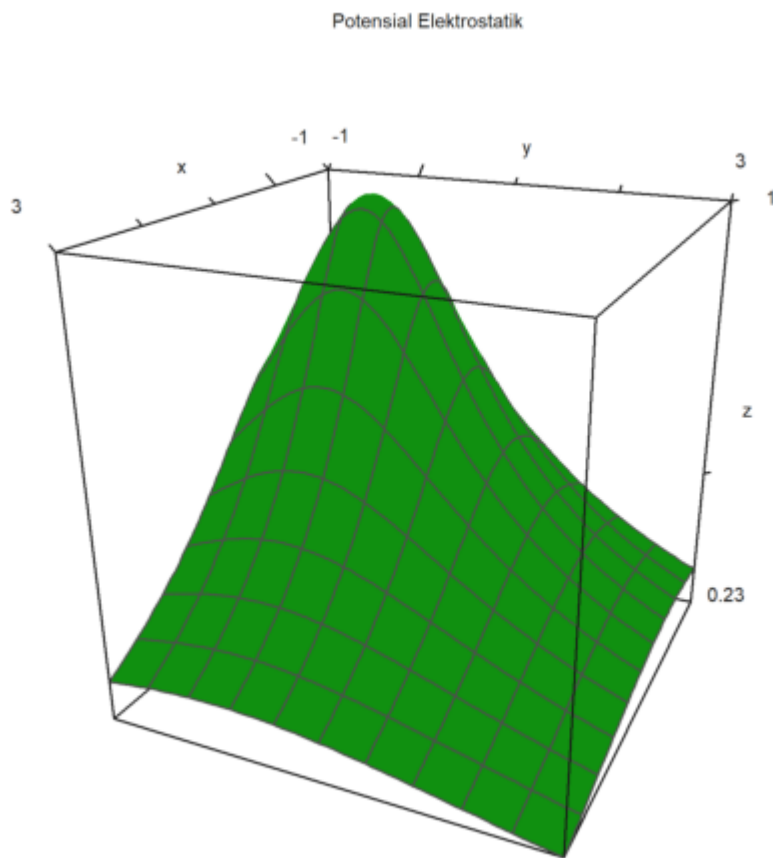


Figure 66: images-475.png



# Turunan

Turunan fungsi multivariabel merupakan perluasan konsep turunan dari fungsi satu variabel ke fungsi dengan dua atau lebih variabel.

menghitung turunan parsial

```
>f &= x^4 + 6*x*y + y^3
```

$$y^3 + 6xy + x^4$$

```
>plot3d("x^4 + 6*x*y + y^3", -5.2, -5.2):
```

```
>f &= x^2 + y^2
```

$$y^2 + x^2$$

```
>grad &= [diff(f,x), diff(f,y)]
```

$$[2x, 2y]$$

Turunan berarah dalam arah  $u=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

```
>Dir &= grad[1]/sqrt(2) + grad[2]/sqrt(2)
```

$$\sqrt{2}y + \sqrt{2}x$$

Menghitung turunan parsial kedua

```
>f &= x^7 + 3*x*y + y^4
```

$$y^4 + 3xy + x^7$$

```
>fxy &= diff(diff(f,x),y)
```

$$3$$

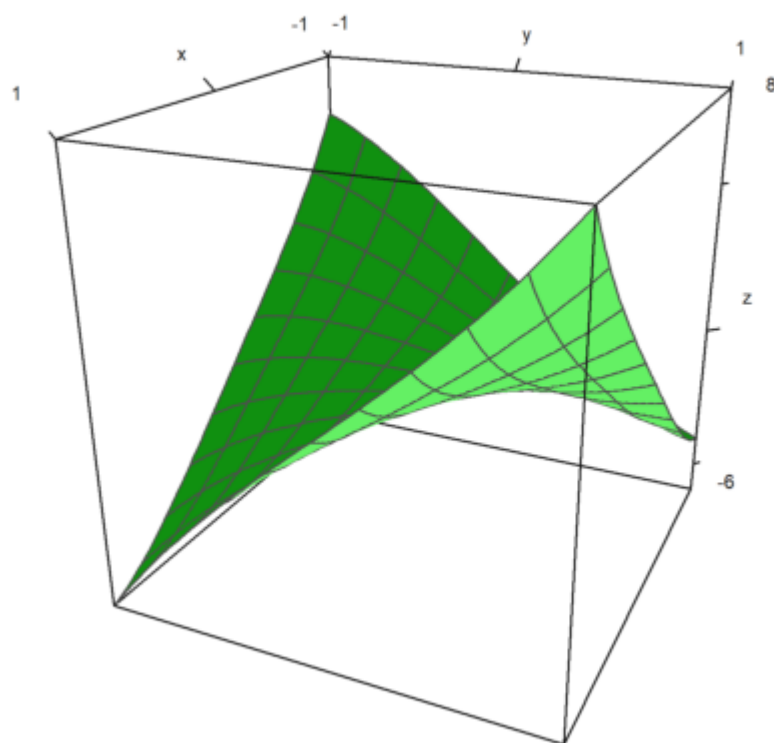


Figure 67: images-476.png

# Integral

Integral fungsi multivariabel adalah perluasan konsep integral dari fungsi satu variabel ke fungsi dengan dua atau lebih variabel.

Contoh sederhana integral lipat dua

```
>$showev ('integrate(integrate(x^2 + y^2, x, 0, 1), y, 0, 2))
```

$$\frac{\int_0^2 3y^2 + 1 \, dy}{3} = \frac{10}{3}$$

Hasil dari integral ganda ini akan memberikan nilai total area di bawah permukaan fungsi

$f(x,y)=x^2+y^2$  di daerah persegi yang ditentukan.

```
>$showev ('integrate(integrate(3*x^2*y - 2*x*y^2, x, 0, 1), y, 1, 2))
```

$$\int_1^2 y - y^2 \, dy = -\frac{5}{6}$$

Contoh ini menunjukkan bagaimana integral ganda bekerja pada fungsi multivariabel.

Integral Ganda: Fungsi Eksponensial

```
>$showev ('integrate(integrate(exp(x) * exp(y), x, 0, 1), y, 0, 2))
```

$$\int_0^2 e^{y+1} - e^y \, dy = e^3 - e^2 - e + 1$$

Integral Ganda: Fungsi Trigonometri

```
>$showev ('integrate(integrate(sin(x) * cos(y), x, 0, pi), y, 0, pi/2))
```

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy = 2$$

Integral Ganda: Fungsi Kuadrat

```
>$showev('integrate(integrate(x^2 + y^2, x, 0, 2), y, 1, 3))
```

$$\frac{\int_1^3 6y^2 + 8y \, dy}{3} = \frac{68}{3}$$

Integral Ganda: Fungsi Campuran

```
>$showev('integrate(integrate(x * y^2 - 3*x*y, x, 0, 2), y, 1, 2))
```

$$\int_1^2 2y^2 - 6y \, dy = -\frac{13}{3}$$

Integral Ganda: Fungsi Logaritma

```
>$showev('integrate(integrate(log(x+1) + log(y+1), x, 0, 1), y, 0, 2))
```

$$\int_0^2 \log(y+1) + 2\log 2 - 1 \, dy = 3\log 3 + 4\log 2 - 4$$

## Aplikasinya

1. Misalkan medan listrik di suatu daerah diberikan oleh

$$E(x, y) = x^2 - y$$

Hitung fluks medan listrik melalui permukaan persegi panjang  $[0,1] \times [0,2]!$

```
>$showev('integrate(integrate(x^2 - y, x, 0, 1), y, 0, 2))
```

$$-\frac{\int_0^2 3y - 1 \, dy}{3} = -\frac{4}{3}$$

kita diberikan medan listrik dalam bentuk vektor

$$E(x, y) = x^2 - y$$

dan diminta untuk menghitung fluks dari medan listrik melalui permukaan tersebut.

$$y = 0 - 2$$

2. Misalkan sebuah perusahaan memproduksi dua jenis barang,  $x$  dan  $y$ .

Fungsi keuntungan perusahaan dinyatakan sebagai:

tentukan banyak barang  $x$  dan  $y$  yang harus diproduksi agar keuntungan maksimal!

```
>function p(x,y) &= 50*x+80*y-2*x^2-3*y^2-4*x*y
```



```

      2      2
    - 3 y  - 4 x y + 80 y - 2 x  + 50 x
>grad &= [diff(p(x,y),x), diff(p(x,y),y)]=0
      [- 4 y - 4 x + 50, - 6 y - 4 x + 80] = 0
>n &= [diff(px,x), diff(py,y), diff(px,y)]
      [0, 0, 0]

>&sol := 'solve(grad, n)
      solve([- 4 y - 4 x + 50, - 6 y - 4 x + 80] = 0, [0, 0, 0])
>$x_optimal:= sol(1):
>$y_optimal:= sol(2):
>$Keuntungan_maksimal := p(x_optimal, y_optimal)

-3 solve([-4 y - 4 x + 50, -6 y - 4 x + 80] = 0, [0, 0, 0]) (2)^2-4 solve([-4 y - 4 x + 50, -6 y - 4 x + 80] = 0, [0, 0, 0]) (
>$print(nilai_x_optimal := %f\n, x_optimal)

      solve([-4 y - 4 x + 50, -6 y - 4 x + 80] = 0, [0, 0, 0]) (1)

```

