线 性 代 数

杨荫华 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 杨荫华编著 .—北京:北京大学出版社,2004 .3
(21 世纪高等院校经济与管理类继续教育教材)
ISBN 7-301-06954-5

Ⅰ.线… Ⅱ.杨… Ⅲ.线性代数-成人教育:高等教育-教材
Ⅳ.O151 .2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 007027 号

书　　　名: 线性代数
著作责任者: 杨荫华　编著
责 任 编 辑: 刘云艳　梁鸿飞
标 准 书 号: ISBN 7-301-06954-5/ F·0781
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址: http:// cbs .pku .edu .cn　电子信箱: em@pup .pku .edu .cn
电　　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　经管事业部 62752926
排　版　者: 北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:
经　销　者: 新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　12 印张　330 千字
2004 年 3 月第 1 版　2004 年 3 月第 1 次印刷
定　　　价: 20 .00 元

21世纪高等院校经济与管理类继续教育教材

编　委　会

内 容 提 要

本书是高等成人教育、继续教育经济与管理类本科“线性代数”课程教材.本书按照教育部颁布的《线性代数自学考试大纲》,并结合作者多年从事教学实践的经验编写而成.全书共分七章.内容包括行列式、线性方程组、n 维向量空间、矩阵、矩阵的相似、二次型,以及线性空间与线性变换等.每节后配有适量练习题,每章后附有复习提纲和综合性习题,书末有习题参考答案与提示,供教师和学生参考.本书叙述深入浅出、通俗易懂、论证严谨、便于自学,也可作为参加经济与管理类自学考试本科段考生的自学教材或参考书.

作 者 简 介

杨荫华,副教授,毕业于原北京师范学院.长期在该院和中央财政金融学院、北京工业大学计算机学院从事基础数学教学工作.

早年在推广线性规划工作中经济效益显著,曾出席全国第一届运筹学现场会.曾与学部委员王湘浩教授合编《线性代数》一书,被多所高校采用.

近年在北京大学成人教育学院、北京科技研修学院、中新企业管理学院和吉利大学等高校任教,并从事远程教学.课堂教学受到学生普遍欢迎.2002年所授课班参加国家统考,通过率达100%.

前　　言

数学是研究客观世界空间形式与数量关系的科学.线性(一次)代数是研究经济学和从事经济管理工作的工具之一.计算机的出现使矩阵论的方法得到广泛应用."线性代数"已成为经济类本科继续教育的必修课程.本书就是在远程教学实践基础上写成的.前六章涵盖了教育部线性代数自学考试大纲,第七章是前六章内容的深化和提高,可供经济理论工作者阅读.

本书的预备知识含和号"$\sum$"、数域、充分必要条件、逆否命题和数学归纳法,供有需要的读者参阅.

为了便于自学,每一章开篇都从已有知识出发,说明本章学习目的.数学来源于实践,服务于实践.关于矩阵、线性空间和线性变换等重要概念都从实际引入.重要定理,采用分析方法引导读者自己证明.为了使读者掌握消元法、矩阵运算、初等变换和行列式计算,在详细说明算法原理的基础上,本书举了各种类型的例题.例题的解答过程可供读者做习题时参考.

数学的高度抽象性决定了它具有广泛的应用性.例如数字"1",在宏观经济学和微观经济学中都用,因为"1"的本质是"单位".为了使读者学起来不感到抽象,行文采用系统、重点、启发式讲解的书面语言,并配有平面和三维几何空间图形.

实践是认知的基础.学数学就得动手做题,因此要求(不是建议)

读者每学完一节就做后面的练习.做完练习后再学下一节.每章后有复习提纲和复习题,书后有习题参考答案和解法提示.

线性代数比较抽象.为适应网络教学的需要,作者尝试写出这本书奉献给读者,企盼得到读者意见和同行指正.

本书在出版过程中得到熊汉富、崔建华、林君秀、刘勇、周月梅和梁鸿飞同志的鼎力相助,在此深表谢意.

杨荫华

2003年12月于畅春园

目　　录

预 备 知 识

1 . **和号“ $\sum$ ”(读作西格玛)**

定义 1 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

性质 1 $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

证
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)\\ &= a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_n + b_n\\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n\\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i .\end{aligned}$$

性质 2 $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$ (k **为常数**) .

证
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ka_i &= ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n\\ &= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\\ &= k\sum_{i=1}^{n} a_i .\end{aligned}$$

性质 3 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ $(1 < k < n)$.

证 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i .$$

本课程还要用到双重和号.$s \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,n)$ 之和

$$\begin{aligned} S = a_{11} &+ a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ &+ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ &+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ a_{s1} + a_{s2} + \cdots + a_{sn} . \end{aligned}$$

先将上式每一行用和号缩写.如第 1 行为 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$, 第 2 行为 $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$, $\cdots$, 第 s 行为 $\sum_{j=1}^{n} a_{sj}$.于是

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{sj} = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) . \tag{1}$$

由于加法有交换律和结合律,因此求和 S 也可先将每一列用和号缩写.如第 1 列为 $\sum_{i=1}^{s} a_{i1}$, 第 2 列为 $\sum_{i=1}^{s} a_{i2}$, $\cdots$, 第 n 列为 $\sum_{i=1}^{s} a_{in}$.于是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{s} a_{i1} + \sum_{i=1}^{s} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{s} a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\right) . \end{aligned} \tag{2}$$

显然(1) 和(2) 都表示 S.故得

性质 4 $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\right)$.

一般地,可以省略括号,记作

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} a_{ij} .$$

称双重和号可交换.

2.数域

讨论数学问题首先要明确所用数的范围,才能有确定的结论.例如,方程 $2x+1=0$ 在整数范围内无解;在有理数范围内有解.

定义 2　如果数集 P 中包含 0 和 1,且 P 对四则运算封闭,即任意 $a, b\in P$ 都有 $a\pm b, a\cdot b\in P$,当 $b\neq 0$ 时,$\frac{a}{b}\in P$ 则称 P 是数域.

例 1　有理数全体 Q 构成数域.

有理数也称有比数,即能够表示成两个整数之比的数(分数).显然,$0=\frac{0}{1}\in Q$;$1=\frac{1}{1}\in Q$;任意$\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in Q$,

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}\in Q,$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\in Q;$$

当$\frac{c}{d}\neq 0$ 时,

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\in Q,$$

所以 Q 是数域.

例 2　实数全体 R 构成数域.

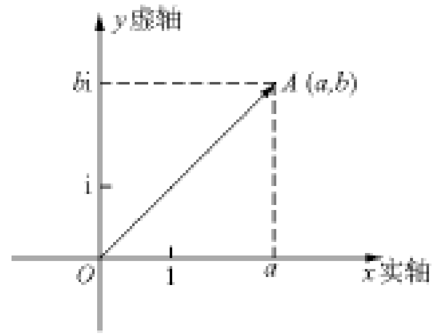
R 包括全体有理数和全体无理数(即无比数,亦即无限不循环小数).把规定了原点、方向和单位的直线称为实数轴,如下图所示:

实数与实数轴上的点一一对应.实数具有有序性(可以比较大小)、稠密性(任意两个实数之间有无穷多实数)和连续性.

例 3　$C=\{a+bi \mid a, b\in R, i=\sqrt{-1}\}$ 是复数域.

复数 $a+bi$ 中,a 称为实部,bi 称为虚部,$a+bi=c+di$ 当且

仅当 $a = c$, $b = d$.平面直角坐标系,当 y 轴以虚数 i 为单位时,称为复平面.如下图所示.



复数与复平面上的点一一对应:

$$a + bi \backslash \quad A(a, b).$$

复数 $a + bi$ 中如果 $b = 0$,则为实数 a.因此 $R \quad C$.如果 $a = 0$, $b \neq 0$,称 bi 为纯虚数.

复数的绝对值定义为

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

即向量 $\overrightarrow{OA}$ 的长度,因此也称为复数的模.

$a - bi$ 称为 $a + bi$ 的共轭复数.如果记 $z = a + bi$,那么记 $a - bi =$ 瑢.例如

$$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i; \quad \overline{2 - 3i} = 2 + 3i.$$

一般地,璕= z.又如

$$\overline{2i} = -2i, \quad \overline{-3i} = 3i, \quad \overline{3} = \overline{3 + 0i} = 3 - 0i = 3,$$

即实数 a 的共轭仍为 a.今后要证明 z 是实数,只需证明瑢= z 就可以了.

$z = a + bi$ 与瑢= $a - bi$ 还有如下关系:

(1) z + 瑢 $= (a + bi) + (a - bi) = 2a$;

(2) z · 瑢 $= (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

本课程主要在一般数域 P 上讨论,有些内容限定在实数域或复数域上讨论.

思考题 有理数域是最小的数域.

3.逆否命题

逆否命题是对原命题而言.例如,

原命题:如果 z 是实数,则 瑏$= z$.

逆否命题:如果 瑏$\neq z$,则 z 不是实数.

逆否命题与原命题是等价的.

4.充分条件,必要条件

能充分保证结论成立的条件称为充分条件.

例4 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$,当 $a = c$,且 $b = d$ 时,则(充分保证) $z_1 = z_2$.

这里“$a = c$ 且 $b = d$”是使“$z_1 = z_2$”成立的充分条件.

必要条件是指结论成立必不可少的条件.换句话说,缺了这个条件结论就不成立.

例5 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, $z_1 = z_2$ 的必要条件是 $a = c$;

例6 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, $z_1 = z_2$ 的必要条件是 $b = d$.

例7 对于复数 $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, $z_1 = z_2$ 的必要充分条件是 $a = c$ 且 $b = d$ 或者说:$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$,当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$.

5.数学归纳法

对于自然数 n 成立的命题,一般用数学归纳法证明.例如,

命题 对于任意自然数 n,恒有等式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$$

成立.

证 当 $n = 1$ 时,上式左边 $= 1^2 = 1$;右边 $= \frac{1}{6} \times 1(1 + 1)(2 \times 1 + 1) = 1$,因此等式成立.

假设 $n=k$ 时等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\
&=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]\\
&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1].
\end{aligned}$$

因此当 $n=k+1$ 时,等式也成立.这就证明了等式对任意自然数 n 都成立.

6.反证法

有些命题由已知条件推证结论比较麻烦,这时可以考虑用反证法,即否定命题结论,引出与已知条件或理论的矛盾.这就从反面证明了原命题成立.

例 8 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数,则 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq 0$.

证 假设 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<0$,则至少有一项 $a_k^2<0$ $(1\leq k\leq n)$.此时

$$a_k=\pm|a_k|\sqrt{-1}=\pm|a_k|\mathrm{i},$$

此与已知 a_k 是实数矛盾.

第一章

行　列　式

行列式是一种特定的算式,它是我们今后学习线性代数常用的一个工具.本章要告诉你什么是行列式?它有什么性质?怎么计算出行列式的值?最后把中学求二元一次方程组和三元一次方程组解的公式推广到 n 元一次方程组情形.

§1.1　2 阶与 3 阶行列式

用消元法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 , & ① \\ a_2 x + b_2 y = c_2 . & ② \end{cases} \tag{1}$$

b_2 × ① - b_1 × ② 得

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) x = c_1 b_2 - b_1 c_2 .$$

如果 $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$,那么

$$x = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2};$$

$a_1 \times$ ② $- a_2 \times$ ① 得

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) y = a_1 c_2 - c_1 a_2 .$$

如果 $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$,那么

$$y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} .$$

这是二元一次方程组求解公式.为了便于记忆这个公式,我们引入 2 阶行列式概念.

定义 1.1.1 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$,称为 2 阶行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} .$$

2 阶行列式中横排称为行,竖排称为列,称 a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素,简称(i, j)元,$(i, j = 1, 2)$.a_{11},a_{22} 称为主对角线上的元素,a_{12},a_{21} 称为次对角线上的元素.这样,2 阶行列式的算法很容易记,即 2 阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积.例如,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - (-3) \times 0 = 20;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 5 \times 2 = -10 .$$

定理 1.1.1 方程组(1)当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

时有惟一解

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

例 1.1.1　解方程组

$$\begin{cases} x-3y=5, \\ 2x+4y=0. \end{cases}$$

解　系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\neq 0,$$

有惟一解:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{10}=\frac{20}{10}=2;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{10}=\frac{-10}{10}=-1.$$

用消元法解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, & ② \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. & ③ \end{cases} \tag{2}$$

$a_{23}\times$ ① $-\ a_{13}\times$ ② 得

$$(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})x_1+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23}-b_2a_{13}; \quad ④$$

$a_{33}\times$ ② $-\ a_{23}\times$ ③ 得

$$(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})x_1+(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})x_2 = b_2a_{33}-b_3a_{23}. \quad ⑤$$

④⑤联立是 x_1, x_2 的二元一次方程组.如果它的系数行列式不等于零,则有惟一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1a_{23}-b_2a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13} \\ b_2a_{33}-b_3a_{23} & a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13} \\ a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23} & a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23} \end{vmatrix}};$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} & b_1a_{23}-b_2a_{13} \\ a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23} & b_2a_{33}-b_3a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} & a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13} \\ a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23} & a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23} \end{vmatrix}}.$$

把 x_1, x_2 值代入原方程组(2),可求得

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

为了便于记忆三元一次方程组(2)的解公式,我们引入3阶行列式概念.

定义1.1.2 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

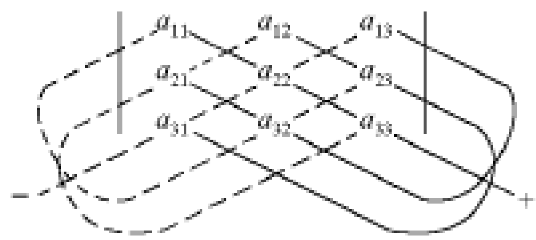
表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

称为3阶行列式.

3阶行列式是6项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的3个元素的乘积.主对角线方向的3项前面带正号,次对角线方向的3

项前面带负号 如下图



例如

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\times2\times(-2)+5\times(-1)\times3+(-3)\times1\times0$$
$$-4\times(-1)\times0-5\times1\times(-2)-(-3)\times2\times3$$
$$=-3;$$

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6\times2\times(-2)+5\times(-1)\times0$$
$$+(-3)\times(-3)\times0-(-6)\times(-1)\times0$$
$$-5\times(-3)\times(-2)-(-3)\times2\times0$$
$$=-6;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\times(-3)\times(-2)+(-6)\times(-1)\times3$$
$$+(-3)\times1\times0-4\times(-1)\times0$$
$$-(-6)\times1\times(-2)-(-3)\times(-3)\times3$$
$$=3;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\times2\times0+5\times(-3)\times3+(-6)\times1\times0$$
$$-4\times(-3)\times0-5\times1\times0-(-6)\times2\times3$$
$$=-9.$$

定理 1.1.2　**三元一次方程组(2),当系数行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时,有惟一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

例 1.1.2 **解方程组**

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2-3x_3=-6, \\ x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 3x_1-2x_3=0. \end{cases}$$

解 **系数行列式**

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

方程组有惟一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-6}{-3}=2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3}{-3} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3 .$$

练　习　1.1

1 . **计算下列行列式**:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & \mathrm{i} & \sqrt{3} \\ 0 & -3 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ \mathrm{e} & \pi & \sqrt{2} \end{vmatrix}$.

2 . **证明下列等式**(* **表示任意数**):

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ * & b_1 & b_2 \\ * & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b_1 & * & b_2 \\ c_1 & * & c_2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b_1 & b_2 & * \\ c_1 & c_2 & * \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$.

3. **解方程**:

(1) $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda + 5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$.

4. **解方程组**:

(1) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 2y = 12; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1, \\ x + 5y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z = -5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 9. \end{cases}$

§1.2 n阶排列

当自然数 $n > 3$ **时**, n **元一次方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

当其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,有惟一解,且有与二元一次方程组、三元一次方程组类似的解公式(见 §1.6 克莱姆(Cramer)法则).那么 n 阶行列式表示怎样的代数和呢?为了认识 n 阶行列式定义,先介绍预备知识——n 阶排列.

定义 1.2.1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数列称为一个 n 阶排列.

例如,由自然数 1,2 可以组成 12 和 21 两个 2 阶排列;由自然数 1,2,3 可以组成

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321$$

6 个 3 阶排列;由自然数 1,2,3,4 可以组成 $4! = 24$ 个 4 阶排列:

$$\begin{array}{llllll} 1234, & 1243, & 1324, & 1342, & 1423, & 1432, \\ 2134, & 2143, & 2314, & 2341, & 2413, & 2431, \\ 3124, & 3142, & 3214, & 3241, & 3412, & 3421, \\ 4123, & 4132, & 4213, & 4231, & 4312, & 4321. \end{array}$$

一般地,由 $1,2,\cdots,n$ 可以组成 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

n 阶排列中都有一个从小到大的排列 $12\cdots n$,称为自然顺序排列.其他 n 阶排列中都有较大的数排在较小的数前面的情形.例如 3 阶排列 132 中,3 排在 2 前面,我们称这是一个逆序.

定义 1.2.2　在一个 n 阶排列中,两个数比较,如果前面的数大于后面的数,就称这两个数构成一个逆序.这个排列中逆序数的总

和,称为这个 n 阶排列的逆序数.

例如在4阶排列2413中,21,41,43都构成逆序,而且只有这3个逆序,所以说2413的逆序数等于3,记作 $N(2413)=3$.

一般地,用 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 表示一个 n 阶排列.这个排列的逆序数记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例 1.2.1 全部2阶排列和3阶排列的逆序及逆序数列表如下:

排列	逆序	逆序数
1 2	无	0
2 1	21	1
1 2 3	无	0
1 3 2	32	1
2 1 3	21	1
2 3 1	21 31	2
3 1 2	31 32	2
3 2 1	32 31 21	3

例 1.2.2 求 $N(54321)$ 及 $N(n\,n-1 \cdots 2\,1)$.

解 对于5阶排列54321从左至右看:5大于后面的4,3,2,1共4个数,即5与后面的数构成4个逆序;然后看4大于后面的3,2,1,所以4与后面的数构成3个逆序;3与后面的数2,1构成2个逆序;2与后面的1构成1个逆序.把所有逆序数相加,得 $N(54321)=4+3+2+1=10$.

用同样的方法考察 n 阶排列 $n\,n-1 \cdots 2\,1$,其中每一个数 $i\,(>1)$ 与后面的 $i-1$ 个数构成逆序.所以

$$N(n\,n-1 \cdots 2\,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.2.3　设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是一个 n 阶排列.如果 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数,则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇排列;如果 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是偶数,则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是偶排列.

例如,因为 $N(2413) = 3$,所以 2413 是奇排列;因为 $N(54321) = 10$,所以 54321 是偶排列.

观察例 1.2.1 中表的最后一列,可以看出:全部 2 阶排列共有 $2! = 2$ 个,其中一个是奇排列,另一个是偶排列.全部 3 阶排列共有 $3! = 6$ 个,其中奇排列和偶排列各有 3 个.我们猜想:当 $n > 3$ 时,全部 $n!$ 个 n 阶排列中,奇排列和偶排列是否也各占一半呢?事实确是如此.为了证明这一事实,我们先介绍一个名词——对换,并给出一个引理.

定义 1.2.4　把一个 n 阶排列中某两个数对调,而其余的数都不动.这就叫对这个 n 阶排列作了一次对换.

例如,把 24351 中的 4 和 1 对调,得排列 21354.可记作

$$24351 \xrightarrow{(4,1)} 21354.$$

就这个例我们观察一下:因为 $N(24351) = 5$,24351 是奇排列.经过一次对换,得到的 21354 却是偶排列(因为 $N(21354) = 2$).这一现象有普遍性.下面我们来证明.

引理 1.2.1　对换改变排列的奇偶性.

证　先看对换排列中相邻两个数的情形.排列

$$\cdots ij \cdots, \tag{1}$$

经过对换 (i, j) 得排列

$$\cdots ji \cdots, \tag{2}$$

其中"$\cdots$"表示不动的数.现在比较(1),(2)的逆序数.(1)中不动的数彼此构成多少个逆序,在(2)中也构成多少个逆序.i 在(1)中与不动的数构成多少个逆序,i 在(2)中与不动的数也构成多少个逆序,j 在(1),(2)中与不动的数构成的逆序数相等.最后看 i, j,它们在(1)中若构成逆序,则在(2)中不构成逆序,它们在(1)中若不构成逆序,

则在(2)中构成逆序.总之,(2)的逆序数比(1)的逆序数不是少一个就是多一个.所以(1)与(2)的奇偶性相反.

再看一般情形.设排列

$$\cdots ik_1 k_2 \cdots k_s j \cdots, \tag{3}$$

经过对换(i, j)得排列

$$\cdots jk_1 k_2 \cdots k_s i \cdots, \tag{4}$$

由(3)得(4)也可用一系列相邻两数对换实现.先将(3)中i依次与$k_1, k_2, \cdots, k_s, j$作$s+1$次对换,得排列

$$\cdots k_1 k_2 \cdots k_s j i \cdots, \tag{5}$$

再将(5)中j依次与$k_s, k_{s-1}, \cdots, k_2, k_1$作$s$次对换,就得到(4)了.总之,由(3)到(4)共作了$2s+1$次相邻两数的对换.根据证明的前半部分知道(3)与(4)奇偶性相反.

定理 1.2.1 当$n \geq 2$时,全部$n!$个n阶排列中,奇、偶排列各占一半.

证 假设$n!$个排列中有s个奇排列,t个偶排列.此时$s+t=n!$,欲证$s=t$.

先将所有奇排列的头两个数都作一次对换,这样就得到了s个不同的偶排列.已知偶排列共有t个,所以$s \leq t$.同理,将所有偶排列的头两个数都作一次对换,这样就得到了t个不同的奇排列.已知奇排列共有s个,所以$t \leq s$.故$s=t$,这就证明了全部$n!$个n阶排列中,奇偶排列各有$n!/2$个.

练 习 1.2

1. 写出全部4阶排列,并计算各排列的逆序数.

2. 判断下列各排列的阶数,计算逆序数,并判断其奇偶性.

(1) 273198465;

(2) 38521476.

3. 计算

(1) $N(n\ 1\ 2\ \cdots\ n-1)$;

(2) $N(n-1\ n-2\ \cdots\ 2\ 1\ n)$.

4．求 i, j 使

(1) $29i146j73$ 为偶排列;

(2) $3i4625j7$ 为奇排列.

5．判断下列排列的奇偶性;并用若干次对换将其变成自然顺序排列.

(1) 31524;

(2) 34512.

§1.3　n 阶行列式定义

观察 2 阶行列式和 3 阶行列式表示的代数和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

2 阶行列式共有 2 !项,每一项都是位于不同行不同列的两个元素的乘积,前面带正号或负号.乘积两个元素的行标按自然顺序排列时,看列标排列的奇偶性;如果是奇排列,乘积前面带负号;如果是偶排列,乘积前面带正号.即 $a_{11}a_{22}$ 前面冠以$(-1)^{N(12)}$; $a_{12}a_{21}$ 前面冠以$(-1)^{N(21)}$.3 阶行列式共有 3 ! = 6 项.每一项都是位于不同行不同列的 3 个元素的乘积,前面带正号或负号.乘积的 3 个元素的行标按自然顺序排列时,看列标排列的奇偶性:如果是奇排列,乘积前面带负号;如果是偶排列,乘积前面带正号.例如,乘积 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 前面冠以$(-1)^{N(231)}$;又如乘积 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 前面冠以$(-1)^{N(321)}$.把 2 阶行列式和 3 阶行列式表示的代数和加以推广,得到 n 阶行列式定义.

定义 1.3.1 **记号**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它表示 n!项代数和.每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

前面冠以$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$**.即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

例 1.3.1 **设** $abcd \neq 0$,**按定义计算行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 **这是一个 4 阶行列式,共有 $4!=24$ 项,每一项都是位于不同行不同列的 4 个数的乘积.如果这 4 个数中有一个是"0",则这个乘积为零.因此这个行列式只有一个乘积** $abcd\neq 0$.$abcd$ **行标为自然顺序,列标排列为 4321.所以**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(4321)}abcd$$

$$= (-1)^6 abcd$$

$$= abcd.$$

在 2 阶行列式和 3 阶行列式中, 次对角线元素乘积 $a_{12}a_{21}$ 和 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 前面都带负号, 但从上面例可以看出, 4 阶行列式中次对角线上 4 个元素的乘积却带正号. 这说明 2 阶行列式和 3 阶行列式的算法对于 $n \geq 4$ 阶行列式已不适用.

例 1.3.2 按定义计算下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 n 阶行列式. 按定义先取所有位于不同行不同列的 n 个元素的乘积, 然后冠以符号. 如果这 n 个元素中有一个是"0", 那么这个乘积等于零. 现在按行的自然顺序取元素: 第 1 行只能取 a_{11}; 第 2 行不能取 a_{21} 了, 因为 a_{21} 与 a_{11} 位于同一列, 而只能取 a_{22}; $\cdots$ 如此继续下去, 这个行列式只有主对角线上元素乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项, 前面冠以符号 $(-1)^{N(12\cdots n)}$, 所以下三角行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可知, 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

数的乘法满足交换律.以3阶行列式为例,a_{12},a_{21},a_{33}无论按什么次序相乘,前面都带负号.当3个元素不按行标自然顺序相乘时,又该如何确定该项符号呢?看下表:

乘积	$a_{12}a_{21}a_{33}$	(a_{12}, a_{21})	$a_{21}a_{12}a_{33}$	(a_{21}, a_{33})	$a_{33}a_{12}a_{21}$
行标	1 2 3	(1 2)	2 1 3	(2 3)	3 1 2
列标	2 1 3	(2 1)	1 2 3	(1 3)	3 2 1

乘积中两个元素作一次对换,相应的行标排列和列标排列也各作一次对换.这时行标排列的奇偶性与列标排列的奇偶性同时改变.因此,行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和的奇偶性不会改变.这样一来,三个乘积的符号都可以用行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和来确定:

$a_{12}a_{21}a_{33}$ 前面乘以 $(-1)^{N(123)+N(213)} = (-1)^{0+1} = -1$;

$a_{21}a_{12}a_{33}$ 前面乘以 $(-1)^{N(213)+N(123)} = (-1)^{1+0} = -1$;

$a_{33}a_{12}a_{21}$ 前面乘以 $(-1)^{N(312)+N(321)} = (-1)^{2+3} = -1$.

一般地,在 n 阶行列式中,每一项 n 个元素如果按行(列)标自然顺序排列相乘,前面按列(行)标排列的逆序数确定符号;如果 n 个元素按任意次序相乘,前面按行标排列的逆序数与列标排列的逆序数之和来确定.因此,n 阶行列式还可以用下面两种方式定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} .$$

练　习 1.3

1．**确定下列乘积前面的正负号**:

(1) $a_{13} a_{21} a_{34} a_{42}$;

(2) $a_{21} a_{42} a_{13} a_{34}$;

(3) $a_{42} a_{13} a_{21} a_{34}$.

2．**求** k, l **使乘积** $a_{41} a_{k3} a_{12} a_{35} a_{l4}$ **在 5 阶行列式中前面带负号**．

3．**如果** n **阶行列式中“0”元素多于** $n^2 - n$ **个．证明：行列式值为零**．

4．**按定义计算下列行列式值**:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5．**按定义计算下列** n **阶行列式**:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \text{Y} & \cdots & \cdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & ⋰ & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

§1.4 行列式性质

按定义计算一个 n 阶行列式,每一项 n 个元素要作 $n-1$ 次乘法,$n!$项要作$(n-1)n!$次乘法.随着 n 的增大,$(n-1)n!$是一个惊人的数字.即使用计算机作乘法也是相当费时的,这还未计入确定每一项正负号的工作量.何况在解决实际问题过程中,计算行列式只是一部分工作.本节介绍一些行列式的性质,它们在简化行列式计算方面起着重要作用.为了方便,有时用 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$ 表示行列式.

将行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行和列互换,得行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称后者为 $|A|$ 的转置行列式,记作 $|A^T|$.例如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

读者可以动手计算一下这两个行列式都等于 -24.其实 $|A| = |A^T|$ 是一个普遍的事实.

性质 1　行列式 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$ 与其转置行列式 $|A^T|$ 相等.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　$|A|$ 中元素 a_{ij} 位于 $|A^T|$ 中 j 行 i 列.$|A^T|$ 按列的自然顺序展成代数和

$$|A^T| = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

这恰是 $|A|$ 按行的自然顺序展成的代数和.所以 $|A| = |A^T|$.

这个性质说明行列式的行有什么性质,列也有什么性质.后面对行(列)证明的性质,对列(行)也成立.

性质 2　用数 k 乘 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$ 的某一行(列),等于 $k|A|$.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

例如

$$6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 2 .$$

性质 2 **证明** **按行列式定义**,(1) **式的等号**

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

这个性质告诉我们,在计算行列式的过程中,若某一行(列)有公因子 k,**可以提到行列式前面,从而简化计算.若用数** k **乘行列式的某一行(列),相当于求行列式值的** k **倍.**

推论 1.4.1 **行列式有一行(列)元素全为零,则行列式值为零.**

性质 3 **行列式可按某一行(列)"拆"成两个行列式之和.即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{i1}+d_{i1} & c_{i2}+d_{i2} & \cdots & c_{in}+d_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2}
$$

例如,

$$
\begin{aligned}
6 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+2 & 2+4 & 3+6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2+4.
\end{aligned}
$$

性质 3 **证明**　**按行列式定义**, (2) **式的等号**

$$
\begin{aligned}
\textbf{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (c_{ij_i} + d_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} (a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots d_{ij_i} \cdots a_{nj_n}) \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} [(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&\quad + (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots d_{ij_i} \cdots a_{nj_n}] \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots d_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= \textbf{右边}.
\end{aligned}
$$

根据性质3可以把一个 n 阶行列式按某一行(列)拆成 n 个行列式之和.以3阶行列式为例:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+0+0 & 0+a_2+0 & 0+0+a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

性质4 对换行列式的两行(列),行列式值反号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jl} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

例如,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

交换第1行与第3行后,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 .$$

交换原行列式第 2 列与第 3 列后,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 .$$

性质 4 证明　**将**(3) **式等号左边按行标自然顺序排列展成代数和 .一般项为**

$$(-1)^{N(12\cdots i\cdots j\cdots n)+N(j_1\cdots l\cdots k\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{il}\cdots a_{jk}\cdots a_{nj_n} .$$

其中 a_{il} **位于**(3) **式右边第** j **行第** l **列**, a_{jk} **位于**(3) **式右边第** i **行第** k **列 .乘积在**(3) **式右边按行标自然顺序排列**

$$a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{jk}\cdots a_{il}\cdots a_{nj_n}$$

前面应带符号

$$(-1)^{N(12\cdots i\cdots j\cdots n)+N(j_1 j_2\cdots k\cdots l\cdots j_n)},$$

排列 $j_1 j_2\cdots l\cdots k\cdots j_n$ **与** $j_1 j_2\cdots k\cdots l\cdots j_n$ **奇偶性相反,所以左边一般项与右边一般项符号相反 .故**(3) **式左边展开式** n **!项与右边展开式对应的** n **!项均反号 .**

推论 1 .4 .2　**行列式若有两行(列) 相同,则行列式值为零 .**

证　**设行列式** $|A|$ **的第** i **行(列) 与第** j **行(列) 相同 .交换第** i **行(列) 与第** j **行(列),得** $-|A|$ **.由** $|A| = -|A|$ **得** $|A| = 0$.

推论 1 .4 .3　**若行列式中有两行(列) 成比例,则行列式值为零 .**

证

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ 第\ i\ 行 \\ \\ 第\ j\ 行 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= k\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0 .
$$

性质 5　将行列式某一行(列) 的 k 倍加到另一行(列) 上去, 行列式值不变 .

证　设 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$ **.将** $|A|$ **的第** i **行的** k **倍加到第** j **行上去:**

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$= | A | + 0$$
$$= | A | .$$

在§1.3我们曾用行列式定义算出上(下)三角形行列式的值.它就等于主对角线上所有元素的乘积.这启发我们想到,对一个较复杂的行列式,能否用行列式性质把它化成三角形行列式,从而算出行列式的值?事实上是可以的.

例1.4.1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　由行列式的性质,对本题所给行列式可作如下运算[注]:

$$\text{原式} \xlongequal{\frac{1}{2}③} 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①②]{} -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{③-①\\④-①}} -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

注　当 $c \neq 0$ 时,$\frac{1}{c}$ⓘ表示第 i 行(列)提出公因子 c;ⓘⓙ表示交换第 i 行(列)和第 j 行(列);ⓙ$+k$ⓘ表示将第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去;以上记号写在等号上面表示对行变换,写在等号下面表示对列变换.

$$\xlongequal[④+②]{③+5②} -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{③④} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④-9③} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = -50 .$$

例 1 .4 .2 **计算行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} .$$

解 **行列式中有分数 .为便于计算,先将第** 4 **列提出公因子**$\frac{1}{2}$;**然后将第** 3 **行提出公因子**$\frac{1}{3}$.

$$\text{**原式**} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\frac{1}{2}$⑤

$$\frac{1}{6}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

③ + ①
④ + ①

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

③ - 2②
④ - 4②
⑤ - ②

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

③ - 2④

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

④ + 2③
⑤ - 2③

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 10 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

④ + ⑤

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\textcircled{4}\textcircled{5}}{=} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\textcircled{5}+5\textcircled{4}}{=} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 26 \end{vmatrix} = \frac{26}{3}.$$

例 1.4.3 **计算** n **阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 **将第** 2, 3, …, n **列都加到第** 1 **列**,

$$\textbf{原式} = \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ a+(n-1) & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a+(n-1) & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{\textcircled{2}-\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-\textcircled{1} \\ \cdots \\ \textcircled{n}-\textcircled{1}}}{=} [a+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)](a-1)^{n-1}.$$

例 1.4.4　计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　从第1列开始,第1列加到第2列;新的第2列加到第3列,……,最后将新的第 $n-1$ 列加到第 n 列.

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix} = (n+1)a_1a_2\cdots a_n.$$

n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$ 中,如果 $a_{ij} = -a_{ji}$,则称 $|A|$ 为反对称行列式.

例 1.4.5　证明: 奇数阶反对称行列式值为零.

证　设

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

其中 n 是奇数.将 $|A|$ 的每一行提出一个公因子(-1),得

$$|A| = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -|A^{\mathrm{T}}| = -|A|,$$

所以 $|A| = 0$.

练 习 1.4

1.计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2．如果 3 阶行列式 $|A| = |a_{ij}| = a$,求下列行列式值．

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - a_{12} & 2a_{11} + a_{13} \\ a_{23} & a_{21} - a_{22} & 2a_{21} + a_{23} \\ a_{33} & a_{31} - a_{32} & 2a_{31} + a_{33} \end{vmatrix}.$$

3．设 5 阶行列式 $|a_{ij}| = 12$.依下列次序运算:交换第 1 列与第 4 列;然后转置;用 2 乘以所有元素;把第 5 行的(-3)倍加到第 2 行上去;再用$\frac{1}{4}$乘以第 3 行每一个元素.求最后这个行列式的值．

4．利用行列式性质证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} b + c & c + a & a + b \\ a + b & b + c & c + a \\ c + a & a + b & b + c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ * & * & b_{11} & b_{12} \\ * & * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

(其中“ * ”为任意数).

5 . **计算行列式**:

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix};$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix};$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{2n\text{阶}};$$

(5) $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$ (**其中** $a_0 a_1 \cdots a_n \neq 0$) .

6 . 解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & x^2-1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & x^2-3 & 8 \\ -1 & 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$;

(3) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} = 0$.

§1 .5 行列式按一行(列) 展开

本节介绍行列式的另一种算法 —— 降阶法 .先看 3 阶行列式如何降为 2 阶行列式计算的 .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

定义 1.5.1 在 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ 中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

利用余子式、代数余子式的概念,3 阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$+ a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

例 1.5.1 设

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

求余子式 M_{11}, M_{12}, M_{13};代数余子式 A_{11}, A_{12}, A_{13};并求 $|A|$ 值.

解 由余子式、代数余子式的定义得:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-1,$$

$$|A|=3\cdot A_{11}+4\cdot A_{12}+2\cdot A_{13}=-7.$$

对例 1.5.1 读者可以任意取其中一行(列),把该行(列)每一个元素与其代数余子式相乘后求和,都得 -7.一般地,我们有

定理 1.5.1(行列式按一行(列)展开公式) 设

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leq i\leq n),\tag{1}$$

或

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(1\leq j\leq n).\tag{2}$$

证　先证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{nn}A_{nn}.$$

据行列式定义

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1\,j_{n-1}}a_{nn}\\&=a_{nn}\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1\,j_{n-1}}\\&=a_{nn}M_{nn}\end{aligned}$$

$$= a_{nn}A_{nn}.$$

然后证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1j} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{nj} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}A_{ij}.$$

将左边第 i 行依次与第 $i+1$ 行、第 $i+2$ 行、…、第 n 行对换;然后将第 j 列依次与第 $j+1$ 列、第 $j+2$ 列、…、第 n 列对换,得

$$左边 = (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} & a_{i-1\,j} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} & a_{i+1\,j} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

$$= a_{ij}A_{ij}.$$

最后证一般情形 将 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ 第 i 行写成如下形式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+0\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1 \leq i \leq n) .$$

至于(2)**式证明,留给读者**.

例 1.5.2　**计算行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} .$$

解法 1　**按第** 3 **列展开**

$$\textbf{原式} = 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 27 - 4 \times (-28)$$

$$= 58 .$$

解法 2

$$\text{原式}\overset{④-2②}{=}\begin{vmatrix}1&-1&0&3\\-1&1&2&1\\2&5&0&1\\3&1&0&2\end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&5&1\\3&1&2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}1&0&0\\2&7&-5\\3&4&-7\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}7&-5\\4&-7\end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-29)=58.$$

例 1.5.3 **证明** Vandermonde **行列式**

$$|V|=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j).\tag{3}$$

即 $|V|$ **等于** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **这** n **个元素所有可能差的乘积**.

分析证法 **这是计算性证明题,只需算出等式左边等于右边即可.先看左边是** 4 **阶的情形,即欲算出**

$$|V|_{44}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot(a_4 - a_1)\cdot(a_3 - a_2)\cdot(a_4 - a_2)\cdot(a_4 - a_3).$$

解

$$|V|_{44} \xlongequal[\textcircled{2} - a_1\textcircled{1}]{\substack{\textcircled{4} - a_1\textcircled{3}\\ \textcircled{3} - a_1\textcircled{2}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ 0 & a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & a_4^2 - a_1 a_4 \\ a_2^3 - a_1 a_2^2 & a_3^3 - a_1 a_3^2 & a_4^3 - a_1 a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\textcircled{2} - a_2\textcircled{1}]{\textcircled{3} - a_2\textcircled{2}} (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_3 - a_2 & a_4 - a_2 \\ 0 & a_3^2 - a_2 a_3 & a_4^2 - a_2 a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\cdot\begin{vmatrix} a_3 - a_2 & a_4 - a_2 \\ a_3^2 - a_2 a_3 & a_4^2 - a_2 a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot(a_4 - a_1)\cdot(a_3 - a_2)\cdot(a_4 - a_2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)\cdot(a_3 - a_1)\cdot(a_4 - a_1)\cdot(a_3 - a_2)\cdot(a_4 - a_2)\cdot(a_4 - a_3).$$

因为要证等式(3)对任意自然数 n 成立,所以用数学归纳法.

证 当 $n=2$ 时,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 .$$

等式(3)成立.假设等式(3)对 $n-1$ 阶 Vandermonde 行列式成立,下面看 n 阶情形:

将(3)左边第 $n-1$ 行的 $-a_1$ 倍加到第 n 行;第 $n-2$ 行的 $-a_1$ 倍加到第 $n-1$ 行;…;第 1 行的 $-a_1$ 倍加到第 2 行,得

$$|V|_{nn} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

由归纳假设

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\cdots(a_n - a_2)\\
&\qquad\qquad (a_4 - a_3)\cdots(a_n - a_3)\\
&\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\quad (a_n - a_{n-1}).
\end{aligned}
$$

所以(3) 式成立.

定理 1.5.1 给出了行列式按某一行(列) 展开公式.其实行列式也可以按 k 行(列) 展开($1 < k < n$).

定义 1.5.2 在 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ 中任取 k 行 k 列($1 < k < n$),例如第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行,第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列,位于这 k 行, k 列交点的 k^2 个元素组成一个 k 阶行列式 M_k,称为 $|A|$ 的一个 k 阶子式,划去这 k 行, k 列,余下的元素组成一个 $n - k$ 阶行列式 M_{n-k},前面冠以符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$ 后称为 M_k 的代数余子式.

定理 1.5.2* (拉普拉斯定理) n 阶行列式等于其任意 k 行(列) ($1 < k < n$) 的所有 k 阶子式,分别与其代数余子式的乘积之和(证明略).

例 1.5.4 计算行列式

$$
\begin{vmatrix}
1 & -1 & 0 & 3\\
-1 & 1 & 2 & 1\\
2 & 5 & 0 & 1\\
1 & 3 & 4 & 4
\end{vmatrix}.
$$

解 按第 1 行和第 3 行展开.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = &\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 5\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3+1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}(-1)^{1+3+1+4}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}-1 & 3\\5 & 1\end{vmatrix}(-1)^{1+3+2+4}\begin{vmatrix}-1 & 2\\1 & 4\end{vmatrix}\\
= &\ 58.
\end{aligned}
$$

特别地,利用拉普拉斯定理可将练习 1.4 第 4(4) 题推广到一般的行列式情形.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ * & * & \cdots & * & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & * & b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(其中“ * ”为任意数) .

一般地,设 $|A_i|$ 是 n_i 阶行列式($i = 1,2,\cdots, s$) ,那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & A_s \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

(其中“ 0 ”处元素全为零;“ * ”处是任意数) .

作为学习下一节的准备,我们回过头去看定理 1 .5 .1 行列式的两个展开公式(1) 和(2) .以(1) 为例 .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} . \quad (4)$$

左边按第 i 行展开时,右边代数余子式 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 中没有第 i 行元素.换句话说,无论 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 取什么数,等式(4) 都成立.我们取 $a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \cdots, a_{in} = a_{jn}$,等式

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in}$$

也成立.此时,左边行列式中有两行元素相同,因此左边等于零,右边也等于零.

定理 1.5.3　设 $|A| = |a_{ij}|$ 是 n 阶行列式.当 $i \neq j$ 时,

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0.$$

同理,当 $k \neq l$ 时,有

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

通俗地说:行列式某一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和等于零.

练　习　1.5

1.设

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ -1 & b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 1 & d & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

求元素 a, b, c, d 的余子式和代数余子式,并求行列式值.

2．**计算下列行列式**:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

3．计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n阶}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

§1.6　克莱姆(Cramer)法则

本节将§1.1定理1.1.1推广到 n 个方程 n 个未知量的线性方程组情形.

定理 1.6.1 (Cramer 法则)　含有 n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,有惟一解: $x_j=\dfrac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n)$,其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

分析证法　已知线性方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$.要证:①方程组有解;②只有一个解;③解是 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$.先将 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$代入方程组(1)每一个方程的左边.如果都等于右边的常数项,这就证明了①③.然后假设 $x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 是(1)的一个解.如果能推出 $c_1=\dfrac{D_1}{D},c_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,c_n=\dfrac{D_n}{D}$,就证明了②.

证　将 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$代入(1)的第 i 个方程左边$(i=1,2,\cdots,n)$:

$$\begin{aligned} & a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D} \\ &\quad =\frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1}) \\ &\quad\quad +a_{i2}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_iA_{i2}+\cdots+b_nA_{n2}) \\ &\quad\quad +\cdots\cdots \\ &\quad\quad +a_{in}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_iA_{in}+\cdots+b_nA_{nn})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{D}[b_1(a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n})\\
&\quad +b_2(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+\cdots+a_{in}A_{2n})\\
&\quad +\cdots\cdots\\
&\quad +b_i(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})\\
&\quad +\cdots\cdots\\
&\quad +b_n(a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+\cdots+a_{in}A_{nn})]\\
&= \frac{1}{D}[b_1\times 0+b_2\times 0+\cdots+b_iD+\cdots+b_n\times 0]\\
&= b_i \quad (i=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

这就证明了方程组(1) **有解**, $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$ **就是一个解.下面证明解的惟一性.设** $x_1=c_1, x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ **是**(1) **的一个解,则有恒等式组**

$$
\begin{cases}
a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1j}c_j+\cdots+a_{1n}c_n=b_1,\\
a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2j}c_j+\cdots+a_{2n}c_n=b_2,\\
\cdots\\
a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nj}c_j+\cdots+a_{nn}c_n=b_n
\end{cases}
$$

成立.用 A_{1j} **乘以第** 1 **个恒等式两边;用** A_{2j} **乘以第** 2 **个恒等式两边;** $\cdots$**;用** A_{nj} **乘以第** n **个恒等式两边,得**

$$
\begin{cases}
c_1a_{11}A_{1j}+c_2a_{12}A_{1j}+\cdots+c_ja_{1j}A_{1j}+\cdots+c_na_{1n}A_{1j}=b_1A_{1j},\\
c_1a_{21}A_{2j}+c_2a_{22}A_{2j}+\cdots+c_ja_{2j}A_{2j}+\cdots+c_na_{2n}A_{2j}=b_2A_{2j},\\
\quad\cdots\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\quad\cdots\\
c_1a_{n1}A_{nj}+c_2a_{n2}A_{nj}+\cdots+c_ja_{nj}A_{nj}+\cdots+c_na_{nn}A_{nj}=b_nA_{nj}.
\end{cases}
$$

然后将这些恒等式相加:

$$
\begin{aligned}
&c_1(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})\\
&\qquad +c_2(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\cdots+a_{n2}A_{nj})\\
&\qquad +\cdots\cdots\\
&\qquad +c_j(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \cdots\cdots \\
&+ c_n(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \cdots + a_{nn}A_{nj}) \\
= {}& b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj},
\end{aligned}
$$

即

$$c_1 \times 0 + c_2 \times 0 + \cdots + c_j D + \cdots + c_n \times 0 = D_j .$$

因为已知 $D \neq 0$,所以

$$c_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) .$$

故(1) 只有一个解 .

例 1 .6 .1 解线性方程组

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10, \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 .
\end{cases}
$$

解 系数行列式

$$
\begin{vmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1
\end{vmatrix} = -16 \neq 0 .
$$

方程组有惟一解 .

$$
D_1 = \begin{vmatrix}
4 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & 1 & 1 \\
10 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1
\end{vmatrix} = -32,
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
-1 & 4 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 10 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1
\end{vmatrix} = -48,
$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -64,$$

解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-32}{-16} = 2,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-48}{-16} = 3,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{16}{-16} = -1,$$

$$x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-64}{-16} = 4 .$$

读者可将解代入原方程组验算之 .

如果线性方程组(1) 的常数项全为零,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

称为齐次线性方程组 .齐次线性方程组一定有解: $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ 称为零解 .

推论 1 .6 .1　方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组, 如果它的系数行列式不等于零则只有零解 .

这个推论的逆否命题是: 方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组,如果有非零解, 则它的系数行列式等于零 .

以后, 定理 2 .3 .3 还将证明: 如果系数行列式等于零, 则齐次线

性方程组(2) **有非零解**.

例 1.6.2 **判定齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

是否只有零解?

解 **这是方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组**.**系数行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 34 \neq 0.$$

所以齐次线性方程组只有零解.

例 1.6.3 **下列齐次线性方程组有非零解**,**求** λ**值**.

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

解 **这是方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组**,**因为它有非零解**,**所以系数行列式等于零**.**即**

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \overset{③+②}{} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda - 1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②-③}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-3) = 0 .$$

所以 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{3}, \lambda_3 = -\sqrt{3}$.

练　习　1.6

1 . 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 11 . \end{cases}$$

2 . 证明下列齐次线性方程组只有零解 .

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$$

3 . 下列齐次线性方程组有非零解,问 λ 取何值 ?

$$\begin{cases} (\lambda-1)x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + (\lambda+2)x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + (\lambda-5)x_4 = 0 . \end{cases}$$

本章复习提纲

1 . n 阶排列

(1) 基本概念: n 阶排列、逆序 .$N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 算法 .奇排列、偶排列、对换 .

(2) 基本原理: 当 $n \geq 2$ 时,全部 n 阶排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列各占一半 .对换改变排列奇偶性 .两个 n 阶排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 作同样位置的两个元素对换,它们的逆序数之和的奇偶性不变 .

2 . n 阶行列式概念

n 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的本质是 $n!$ 项代数和,是一个数 .每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$,前面冠以符号

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} .$$

当 n 个元素行(列) 标排列是自然顺序 $123\cdots n$ 时,可按列(行) 标排列的逆序数确定符号 .因此, n 阶行列式可记作

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \\ &= \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n}} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} . \end{aligned}$$

3 . 行列式性质

(1) 行列式与其转置行列式值相等 .

(2) 用数 k 乘以行列式的某一行(列) 所有元素等于用 k 乘以行列式的值 .

(3) 如果行列式有一行(列) 元素全为零,则行列式值为零 .

(4) **行列式可按某一行(列)“拆”成两个或多个行列式之和.**

(5) **对换行列式某两行(列)后,行列式值变号.**

(6) **如果行列式有两行(列)元素对应相同,则行列式值为零.**

(7) **如果行列式有两行(列)元素对应成比例,则行列式值为零.**

(8) **将行列式某一行(列)元素的若干倍加到另一行(列)上去,行列式值不变.**

4 . **行列式按一行(列)展开**

设 $|A| = |a_{ij}|_{nn}$,**则**

(1) a_{ij} **的余子式** M_{ij}; a_{ij} **的代数余子式** $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

(2) $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (1 \leq i \leq n)$;

$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (1 \leq j \leq n)$.

(3) $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$;

$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0 \quad (k \neq l)$.

5 . **行列式的计算**

(1) **用行列式定义.**

(2) **用行列式性质将行列式化成上(下)三角形.**

(3) **按一行(列)展开.**

(4) **用下列公式计算:**

① $$\begin{vmatrix} A_{rr} & 0 \\ * & B_{ss} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|,$$

$$\begin{vmatrix} A_{rr} & * \\ 0 & B_{ss} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|,$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_s|,$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_s|,$$

其中 * 表示任意数,0 表示均为零;

② Vandermonde 行列式;

③ 奇数阶反对称行列式值为零 .

(5) 数学归纳法 .

6 . Cramer 法则

(1) Cramer 法则: 方程个数等于未知量个数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n . \end{cases}$$

当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,有惟一解 .

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

(2) Cramer 法则的推论:方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

当其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,只有零解.

(3) Cramer **法则推论的逆否命题:方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组,如果有非零解,则其系数行列式等于零.**

复 习 题 一

1. **计算行列式:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

2. **计算下列行列式:**

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & * & \cdots & * \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & * & \cdots & * \end{vmatrix}$ (* 为任意数);

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$;

(6) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n + x \end{vmatrix}$.

3．用 Cramer 法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 4, \\ x_2 = -2x_3 + x_4 + 2, \\ x_3 = -4x_1 + x_2 - 2x_4 + 6, \\ x_4 = -3x_1 + 4x_2 . \end{cases}$$

4．设齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + (\lambda - 3)x_2 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 = 0 . \end{cases}$$

问 λ 取何值，齐次线性方程组只有零解？若齐次线性方程组有非零解，λ 应取何值？请写出全部解．

第二章

线性方程组

线性方程组就是一次方程组.我们在实践中遇到的线性方程组,其方程个数未必等于未知量个数;即使方程个数等于未知量个数的线性方程组,也未必有惟一解,有可能无解或有无穷多解.例如,在平面直角坐标系中,讨论两条直线

$$l_1:\ a_1x+b_1y=c_1$$

与

$$l_2:\ a_2x+b_2y=c_2$$

的相互关系,需要考虑方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

的解.方程组若有惟一解 $x=x_0$, $y=y_0$,表明 l_1 与 l_2 相交于一点 (x_0, y_0);若无解,表明 l_1 与 l_2 平行;若有无穷多解,表明 l_1 与 l_2 重合.

本章讨论一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示未知量; $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个方程 x_j 的系数; $b_i(i = 1,2,\cdots,s)$ 表示第 i 个方程的常数项.

一般线性方程组用消元法求解.

§2.1　消元法原理

定义 2.1.1　如果分别用数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代替 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使(1)中每一个方程都成为恒等式, 则称 n 元有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程组(1)的一个解. 解方程组就是求出(1)的全部解.

定义 2.1.2　设线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{t1}x_1 + c_{t2}x_2 + \cdots + c_{tn}x_n = d_t. \end{cases} \tag{2}$$

如果线性方程组(1)的解都是(2)的解, 并且(2)的解也都是(1)的解, 则称这两个方程组同解或等价.

定理 2.1.1　对线性方程组(1)施行以下三种变换, 所得方程组与(1)同解.

(1) 对换两个方程(换法变换);

(2) 用非零数 c 乘以某一个方程(倍法变换);

(3) 把某一个方程的 k 倍加到另一个方程上去(消法变换).

证　因为(1)的解代入(1)后, 使每个方程变成恒等式. 对换(1)中两个方程的次序, 也就使代入解后的恒等式对换了次序. 故解

集合不变.

因为方程组的解与方程次序无关.因此,不妨用非零数 c 乘以(1)的第1个方程,得方程组

$$\begin{cases} ca_{11}x_1+ca_{12}x_2+\cdots+ca_{1n}x_n=cb_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{3}$$

如果$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是(1)的解,那么也是(3)中第 $2,3,\cdots,s$ 个方程的解.将恒等式

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1$$

两边同乘以非零数 c,得恒等式

$$ca_{11}c_1+ca_{12}c_2+\cdots+ca_{1n}c_n=cb_1.$$

所以$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$也是(3)中第1个方程的解.这就证明了(1)的解都是(3)的解.反之,如果$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是(3)的解,那么也是(1)中第 $2,3,\cdots,s$ 个方程的解.将恒等式

$$ca_{11}d_1+ca_{12}d_2+\cdots+ca_{1n}d_n=cb_1$$

两边乘以$\frac{1}{c}$,得恒等式

$$a_{11}d_1+a_{12}d_2+\cdots+a_{1n}d_n=b_1.$$

所以$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$也是(1)中第1个方程的解.这就证明了(3)的解都是(1)的解.故(1)与(3)同解.

今不妨将(1)中第2个方程的 k 倍加到第1个方程上去,得方程组

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n=b_1+kb_2, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{4}$$

如果$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是(1)的解,那么也是(4)中第 $2,3,\cdots,s$ 个方程

的解.将恒等式

$$a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2$$

两边乘以数 k 后加到恒等式

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1$$

上去,得恒等式

$$(a_{11}+ka_{21})c_1+(a_{12}+ka_{22})c_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})c_n=b_1+kb_2.$$

这表明$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$也是(4)中第1个方程的解.所以(1)的解都是(4)的解.如果$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$是(4)的解,那么也是(1)中第2,3,$\cdots$,s个方程的解.将恒等式

$$a_{21}d_1+a_{22}d_2+\cdots+a_{2n}d_n=b_2$$

两边乘以 $-k$ 后加到恒等式

$$(a_{11}+ka_{21})d_1+(a_{12}+ka_{22})d_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})d_n=b_1+kb_2$$

上去,得恒等式

$$a_{11}d_1+a_{12}d_2+\cdots+a_{1n}d_n=b_1.$$

这表明$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$也是(1)中第1个方程的解,所以(4)的解都是(1)的解,故(1)与(4)同解.

今后称定理2.1.1中的三种变换为线性方程组的同解变换.

用消元法解线性方程组,就是对方程组施行一系列同解变换,使每一个方程保留一个未知量,消去其余方程中这个未知量,直到能判断出解为止.

例 2.1.1　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0, & ①\\ 9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1, & ②\\ 3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1, & ③\\ 4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2. & ④\end{cases}$$

解 将①的$\left(-\dfrac{9}{2}\right)$倍加到②上;将①的$\left(-\dfrac{3}{2}\right)$倍加到③上;将①的$(-2)$倍加到④上,得同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, & ① \\ \dfrac{7}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 - 7x_4 = 1, & ②' \\ \dfrac{7}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 - 7x_4 = 1, & ③' \\ 7x_2 + x_3 - 14x_4 = 2. & ④' \end{cases}$$

将②′的(-1)倍加到③′上;将②′的(-2)倍加到④′上,得同解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, & ① \\ \dfrac{7}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 - 7x_4 = 1. & ②' \end{cases}$$

由此可见方程组有解,且有无穷多解.为了容易写出解,用$\left(\dfrac{1}{2}\right)$乘以①;用$\left(\dfrac{2}{7}\right)$乘以②′,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 + x_4 = 0, & ①' \\ x_2 + \dfrac{1}{7}x_3 - 2x_4 = \dfrac{2}{7}. & ②'' \end{cases}$$

将②″的$\left(\dfrac{1}{2}\right)$倍加到①′上,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{11}{7}x_3 = \dfrac{1}{7}, \\ x_2 + \dfrac{1}{7}x_3 - 2x_4 = \dfrac{2}{7}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7} - \dfrac{11}{7}x_3, \\ x_2 = \dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{7}x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

全部解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7} - \dfrac{11}{7}c_1, \\ x_2 = \dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{7}c_1 + 2c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 **为任意数**.

例 2.1.2　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, & ① \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, & ② \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. & ③ \end{cases}$$

解　**交换 ①,② 得同解方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, & ② \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, & ① \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. & ③ \end{cases}$$

将 ② 的(-3) **倍加到 ① 上去;将 ② 的**(-5) **倍加到 ③ 上去,得同解方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, & ② \\ 11x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 7, & ①' \\ 11x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 13. & ③' \end{cases}$$

将 ①′的(-1) **倍加到 ③′上,得同解方程组**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, & ② \\ \quad 11x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 7, & ①' \\ \quad 0 = 6. & ③'' \end{cases}$$

③″是矛盾方程,无解.所以最后一个方程组无解,因而原方程组无解.

练　习 2.1

用消元法解下列线性方程组:

1. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

§2.2　用分离系数消元法解线性方程组

定义 2.2.1　由 $s\times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的矩形表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为 s 行 n 列矩阵.a_{ij} 称为矩阵的(i,j)元.通常用大写字母 A, B, $\cdots$ 或$(a_{ij})_{sn}$表示.如果 $s = n$ 称 A 是 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

例如,一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

称

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

是方程组(1) 的系数矩阵;称

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

是方程组(1) 的增广矩阵 .

定义 2 .2 .2　对矩阵施行以下三种变换称为矩阵的初等变换:

(1) 对换矩阵的两行(列),称为换法变换;

(2) 用非零数 c 乘矩阵的某一行(列),称为倍法变换;

(3) 把矩阵某一行(列) 的 k 倍加到另一行(列) 上去,称为消法变换 .

增广矩阵可以看成线性方程组的简便记法 .用消元法解线性方程组就是对增广矩阵施行一系列初等行变换 .

例 2 .2 .1　用分离系数消元法解线性方程组

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_3 - x_4 = -6. \end{cases}$$

解 分离出方程组的增广矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -6 \end{array}\right] . \end{array}$$

为了区别未知量的系数与常数项可在常数列前画一条线.系数矩阵第 j 列就是 x_j 的系数($j = 1,2,3,4$),然后对增广矩阵施行初等行变换.

$$A \xrightarrow{\text{①②}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{④}+3\text{①}]{\text{③}-2\text{①}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 6 & 11 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{④}-6\text{②}]{\text{③}+5\text{②}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 17 & -7 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc|c} & & x_4 & x_3 & \end{array} \\ \xrightarrow{\text{③④}} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & -7 & 17 & -24 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{④+③}\begin{array}{cccccc} & & x_4 & x_3 & & \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -8 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{③④}\begin{array}{cccccc} & & x_4 & x_3 & & \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -10 & 16 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{④+6③}\begin{array}{cccccc} & & x_4 & x_3 & & \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -32 \end{array}\right] \end{array}.$$

最后增广矩阵表示线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \qquad + 3x_3 = 2, & ① \\ \qquad x_2 + x_4 - x_3 = 4, & ② \\ \qquad\qquad -x_4 + 7x_3 = -8, & ③ \\ \qquad\qquad\qquad 32x_3 = -32. & ④ \end{cases}$$

由④得 $x_3=-1$;将 $x_3=-1$ 代入③得 $x_4=1$;将 $x_3=-1$, $x_4=1$ 代入②得 $x_2=2$;将 $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=1$ 代入①得 $x_1=1$,所以方程组有惟一解$(1,2,-1,1)$.

其实未知量回代过程也可用初等变换实现.这只需对上面最后一个增广矩阵继续施行分离系数消元法:

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & x_4 & x_3 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 7 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 32 & -32
\end{array}\right]
\xrightarrow[\frac{1}{32}\times ④]{(-1)\times ③}
\begin{array}{cccc|c}
 & & x_4 & x_3 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -7 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{①-2②}
\begin{array}{cccc|c}
 & & x_4 & x_3 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -2 & 5 & -6 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -7 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[②-③]{①+2③}
\begin{array}{cccc|c}
 & & x_4 & x_3 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & -9 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 6 & -4 \\
0 & 0 & 1 & -7 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\substack{②-6④ \\ ③+7④}]{①+9④}
\begin{array}{cccc|c}
 & & x_4 & x_3 & \\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right],
$$

由此可以直接写出惟一解

$$
\begin{cases}
x_1 = 1, \\
x_2 = 2, \\
x_3 = -1, \\
x_4 = 1.
\end{cases}
$$

注意 **消元过程中为了避免出现分数,可交换系数列,但要在上方注明未知量.显然对增广矩阵施行初等列变换是没有意义的.**

例 2.2.2 **用分离系数消元法解线性方程组**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

解 $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -4 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{①②} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[③-5①]{②-3①} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 11 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 11 & -7 & 14 & 13 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{③-②} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 11 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$

最后这个增广矩阵的第 3 行表示矛盾方程

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 6.$$

这个方程无解,因此原方程组无解.

例 2.2.3　用分离系数消元法解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

解 $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{④-③}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①④}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{③-3① \\ ④-2①}]{②-9①}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -28 & -4 & 56 & -8 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}②}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[④+②]{③+②}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -14 & 2 \end{array}\right]$$

$$x_3 \qquad x_2$$

$$\xrightarrow{②③}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -14 & 2 \end{array}\right]$$

$$x_3 \qquad x_2$$

$$\xrightarrow{①-2②}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & 22 & -3 \\ 0 & 1 & 7 & -14 & 2 \end{array}\right].$$

最后一个增广矩阵表示方程组

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 11x_2 - 22x_4, \\ x_3 = 2 - 7x_2 + 14x_4 . \end{cases}$$

方程组有无穷多解, x_2, x_4 **为自由未知量 .全部解为**

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 11c_1 - 22c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 2 - 7c_1 + 14c_2, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意数.

一般地,通过对增广矩阵施行初等行变换或适当交换系数列,解线性方程组的步骤如下:首先从线性方程组(1)分离出增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right].$$

假设 $a_{11} \neq 0$ (如果 $a_{11} = 0$, $a_{i1} \neq 0$, $2 \leq i \leq s$,可交换第 1 行与第 i 行).用 $\frac{1}{a_{11}}$ 乘以第 1 行,得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{array}\right], \tag{2}$$

将矩阵(2)第 1 行的 $-a_{i1}$ 倍加到第 i 行上去($i = 2, 3, \cdots, s$)得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & & & & * \\ \cdots & & A_1 & & \cdots \\ 0 & & & & * \end{array}\right]. \tag{3}$$

如果 A_1 中元素全为零,则消元法结束.否则对(3)施行初等行变换或适当交换系数列(注明未知量),使 A_1 左上角变成 1,仿上将(3)变成

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & & & & * \\ \cdots & \cdots & & A_2 & & \cdots \\ 0 & 0 & & & & * \end{array}\right]. \tag{4}$$

如果 A_2 中元素全为零,则消元法结束.否则对(4) 继续进行变换,最终化为如下形式

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_{j_1} & x_{j_2} & \cdots & x_{j_r} & x_{j_{r+1}} & \cdots & x_{j_n} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1\,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2\,n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{r\,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_s \end{array}\right] \end{array}, \tag{5}$$

其中$0 \leq r \leq \min\{s, n\}$.(5) **顶端** $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n}$ **表示对换系数列后的未知量** $x_1, x_2, \cdots, x_n$.(5) **表示线性方程组**

$$\begin{cases} x_{j_1} \qquad\qquad + c_{1\,r+1}x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{1\,n}x_{j_n} = d_1, \\ \quad x_{j_2} \qquad\quad + c_{2\,r+1}x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{2\,n}x_{j_n} = d_2, \\ \qquad \ddots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\qquad x_{j_r} + c_{r\,r+1}x_{j_{r+1}} + \cdots + c_{rn}x_{j_n} = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = d_s. \end{cases} \tag{6}$$

因而方程组(6) **与方程组**(1) **同解.所以就**(6) **讨论方程组**(1) **的解的情况**:

(1) **若** $r < s$,**而** $d_{r+1}, d_{r+2}, \cdots, d_s$ **不全为零,则方程组**(6) **无解**;

(2) 若 $r < s$ 且 $d_{r+1} = \cdots = d_s = 0$ 或 $r = s$,又分两种情况:

① 当 $r = n$ 时,方程组(6) 有惟一解

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1, \\ x_{j_2} = d_2, \\ \cdots \\ x_{j_n} = d_n. \end{cases}$$

② 当 $r < n$ 时,方程组(6) 有无穷多解 .令 $x_{j_{r+1}} = c_1$, $x_{j_{r+2}} = c_2$, $\cdots$, $x_{j_n} = c_{n-r}$,由(6) 得(1) 的全部解:

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1\,r+1}c_1 - \cdots - c_{1\,n}c_{n-r}, \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2\,r+1}c_1 - \cdots - c_{2\,n}c_{n-r}, \\ \cdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r\,r+1}c_1 - \cdots - c_{rn}c_{n-r}, \\ x_{j_{r+1}} = c_1, \\ \cdots \\ x_{j_n} = c_{n-r}, \end{cases}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意数 .

下面给出矩阵秩数概念,以便对线性方程组有解的条件及解的判断进行理论概括 .

定义 2.2.3　如果矩阵 $A = (a_{ij})_{sn}$ 中有一个 r 阶子式不等于零,而所有 $r+1$ 阶子式(如果还有的话) 全等于零,则称矩阵 A 的秩数等于 r,记作秩$(A) = r$,或行列式秩$(A) = r$.

换句话说, 矩阵 A 中不等于零的子式最高阶数称为矩阵的秩数 .

例如,例 2.2.1 解过程最后一个矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

其中有一个 4 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

而没有 5 阶子式,就说这个矩阵的秩数等于 4 .

又如,例 2 .2 .2 解过程最后的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 11 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 11 & -7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

系数矩阵中有一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

而所有 3 阶子式全为零,所以系数矩阵的秩数等于 2 .增广矩阵有一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 66 \neq 0,$$

而没有 4 阶子式,所以增广矩阵秩数为 3 .

定理 2 .2 .1 矩阵经初等变换,秩数不变 .

分析证法 从求证入手 .设矩阵 A 经过初等变换得到 B,如果 A 中不等于零的子式最高阶数是 r,欲证明 B 中不等于零的子式最高阶数也是 r,那就要看矩阵的初等行(列) 变换对矩阵的各阶子式的值有什么影响 .回顾行列式的性质: 交换矩阵的两行(列),含这两

行(列)的子式值反号;用非零数 c 乘矩阵的某一行(列),含这行(列)的子式值要乘以 $c\neq 0$;将矩阵某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去,含这两行(列)的子式值不变.因此,矩阵 A 中有 r 阶子式不等于零,矩阵 B 中也有 r 阶子式不等于零.A 中所有 $r+1$ 阶子式全为零,那么 B 中所有 $r+1$ 阶子式也全为零.

证　根据行列式性质,对矩阵施行初等变换不会改变矩阵中不为零子式的最高阶数.所以说对矩阵施行初等变换,矩阵的秩数不变.

定理 2.2.2　设线性方程组(1)的系数矩阵为 A,增广矩阵为 A,则

(1) 当秩$(A)\neq$秩(A)时,方程组(1)无解;

(2) 当秩$(A)=$秩$(A)=r$时,方程组(1)有解:

① 若 $r=n$,则方程组(1)有惟一解;

② 若 $r<n$,则方程组(1)有无穷多解,解中有 $n-r$ 个自由未知量.

用定理 2.2.2 观察

例 2.2.1　系数矩阵秩数等于 4,增广矩阵秩数也等于 4,所以方程组有解.又因为系数矩阵秩数等于未知量个数 4,所以方程组有惟一解.

例 2.2.2　系数矩阵秩数等于 2,增广矩阵秩数等于 3,二者不相等,所以方程组无解.

例 2.2.3　系数矩阵秩数等于 2,增广矩阵秩数也等于 2,所以方程组有解.由于秩数 2 小于未知量个数 4,所以方程组有无穷多解,有 $4-2=2$ 个自由未知量.

最后再举一个例子,企图说明在消元过程中可以不交换系数列.

例 2.2.4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5=4, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+4x_4+x_5=5, \\ -x_1-x_2+x_3-3x_4+2x_5=3. \end{cases}$$

解
$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4\\
3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 5\\
-1 & -1 & 1 & -3 & 2 & 3
\end{array}\right]
\xrightarrow[\text{④}+\text{①}]{\substack{\text{②}-2\text{①}\\ \text{③}-3\text{①}}}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\\
0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 4
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\text{④}-2\text{②}]{\text{③}-\text{②}}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] = A_1 .
$$

上面第 2 个矩阵的(2,2),(3,2),(4,2) 元均为零.可用(2,3) 元 1 继续进行消元.1 称为第 2 行的首非零元.第 3 个矩阵称为阶梯形矩阵.由此可以看出系数矩阵秩数(即非零行数或阶梯数) 等于 3,增广矩阵秩数也等于3,故方程组有解.在知道有解后继续对阶梯形 A_1 施行初等行变换:

$$
A_1 \xrightarrow[\frac{1}{2}\text{③}]{\text{①}-\text{②}}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\text{②}+\text{③}]{\text{①}-2\text{③}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
 & x_2 & & & x_5 &
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

因为系数矩阵秩数等于 3,未知量个数等于 5,所以方程组有无穷多解,有 5 - 3 = 2 个自由未知量.最后一个矩阵称为约化阶梯形.由此可以看出 x_2, x_5 可以作自由未知量.直接写出全部解

$$\begin{cases} x_1 = -1 - c_1 + c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 2 - c_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 是任意数.

练　习　2.2

用分离系数消元法解下列线性方程组:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 + x_6 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 8x_5 - 2x_6 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 13x_5 + x_6 = 9. \end{cases}$

§2.3　齐次线性方程组

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

称为齐次线性方程组.齐次线性方程组恒有解.因为至少 $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\cdots, x_n = 0$ 是一个解,称为零解或平凡解.如果齐次线性方程组除零解外,还有其他解: $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$,即 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为零,称为非零解.

因为齐次线性方程组的增广矩阵最后一列全为零,所以系数矩阵秩恒等于增广矩阵秩,即齐次线性方程组恒有解.因此只需讨论齐次线性方程组在什么条件下有惟一解(只有零解);在什么条件下有无穷多解(非零解).而这个问题在上节定理2.2.2已经回答.

定理2.3.1 齐次线性方程组(1)有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵秩数小于未知量个数.

证 充分性,定理2.2.2已经证明.现在证必要性,用反证法.假设齐次线性方程组(1)系数矩阵秩数等于未知量个数,则有惟一解,即只有零解,这与已知(1)有非零解矛盾.

定理2.3.2 如果齐次线性方程组(1)的方程个数 s 小于未知量个数 n,则必有非零解.

证 因为齐次线性方程组(1)的系数矩阵秩数 $r \leq \min\{s, n\}$.如今已知 $s < n$,自然有 $r < n$,据定理2.3.1知(1)必有非零解.

定理2.3.3 方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

证　定理的必要性就是推论 1 .6 .1 的逆否命题 .以下证明充分性 .

已知齐次线性方程组(2) 的系数行列式等于零 .根据矩阵秩数定义 2 .2 .3, (2) 的系数矩阵秩数小于矩阵阶数 n,即小于未知量个数 n .由定理 2 .3 .1 知齐次线性方程组(2) 必有非零解 .

解齐次线性方程组也用分离系数消元法 .不过因为它的常数项全为零,所以只需对它的系数矩阵施行初等行变换 .

例 2 .3 .1　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 . \end{cases}$$

解
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{③ - ① \\ ④ - 4①}]{② - 2①} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$
\xrightarrow{②④}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 6 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{③+2② \\ ④+3② \\ ⑤+5②}]{①-2②}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 16 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{8}③}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 16 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{②-2③ \\ ④-8③ \\ ⑤-16③}]{①+5③}
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].
$$

因为齐次线性方程组肯定有解,因此可直接将系数矩阵化成约化阶梯形.从最后一个矩阵看出本题系数矩阵秩数等于 3, **它小于未知量个数** 4,**所以有非零解.令自由未知量** $x_4 = c$,**得全部解**

$$
\begin{cases}
x_1 = -c, \\
x_2 = 0, \\
x_3 = 0, \\
x_4 = c,
\end{cases}
$$

其中 c **为任意数.**

例 2.3.2　**解齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_5=0, \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+4x_3+2x_4+7x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+4x_5=0. \end{cases}$$

解　**因为这个齐次线性方程组的方程个数少于未知量个数,所以必有非零解.**

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&2&0\\ 1&2&2&1&3&0\\ 3&4&4&2&7&0\\ 2&1&1&1&4&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{④-2①}]{\substack{②-①\\ ③-3①}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&1&1&0&2&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&2&1&0\\ 0&-1&-1&1&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{④+②}]{\substack{①-②\\ ③-②}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&-1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{④-2③}]{\substack{①+③\\ ②-③}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{①-④\\ ②-④}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right].$$

系数矩阵秩数等于 4,**未知量个数等于** 5,**所以有** $5-4=1$ **个自由未知量.令** $x_3=c$,**得全部解**

$$\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=-c, \\ x_3=c, \\ x_4=0, \\ x_5=0, \end{cases}$$

其中 c 为任意数.

例 2.3.3 讨论 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-2)x_1 - x_2 - x_3 = 0,\\ -x_1+(\lambda-2)x_2 - x_3 = 0,\\ -x_1 - x_2+(\lambda-2)x_3 = 0\end{cases}$$

有非零解,并求出全部解.

解 因为这个齐次线性方程组的方程个数等于未知量个数,所以系数行列式等于零时,有非零解.以下令系数行列式等于零,解方程求 λ 值.

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix} \xlongequal[①+③]{①+②} \begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & -1\\ \lambda-4 & \lambda-2 & -1\\ \lambda-4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda-2 & -1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[③+①]{②+①} (\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-1)^2 = 0.$$

当 $\lambda=4$ 或 $\lambda=1$ 时,齐次线性方程组有非零解.

当 $\lambda=4$ 时,原方程组为

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\\ -x_1+2x_2 - x_3 = 0,\\ -x_1 - x_2+2x_3 = 0,\end{cases}$$

全部解为

$$\begin{cases}x_1 = c,\\ x_2 = c,\\ x_3 = c,\end{cases}$$

其中 c 为任意数.

当 $\lambda = 1$ 时,原方程组为

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

全部解为

$$\begin{cases} x_1 = -c_1 - c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 为任意数.

练　习　2.3

1.解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = 0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

$$(4)\begin{cases} x_2+2x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+4x_4+x_5=0, \\ 4x_1+x_2-x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$$

2. **设齐次线性方程组**

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+kx_2+x_3=0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

问 k 取何值时,方程组只有零解?又 k 取何值时,方程组有非零解?并求解.

本章复习提纲

1. **一般线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **是未知量**, $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,n)$ **是第** i **个方程** x_j **的系数**. $b_i(i=1,2,\cdots,s)$ **是第** i **个方程的常数项**.

如果将 $x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_n=c_n$ **代入**(1),**使**(1)**的每个方程都变成恒等式,则称** n **元有序数组**$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$**是**(1)**的一个解**.

2. **设线性方程组**

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{t1}x_1+c_{t2}x_2+\cdots+c_{tn}x_n=d_t. \end{cases} \tag{2}$$

如果(1)**的解都是**(2)**的解**,(2)**的解也都是**(1)**的解,称**(1),(2)**同**

解.

3. 由 $s\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的矩形表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵,简记作 $A=(a_{ij})_{sn}$.如果 $s=n$,称 A 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

4. 对矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 施行以下三种变换称为矩阵的初等变换:

(1) 对换矩阵的两行(列),称为换法变换;

(2) 用非零数 c 乘以矩阵的某一行(列),称为倍法变换;

(3) 将矩阵某一行(列) 的 k 倍加到另一行(列) 上去,称为消法变换.

5. 称

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

为线性方程组(1) 的系数矩阵;称

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

为线性方程组(1) 的增广矩阵.

对增广矩阵施行行的初等变换,是同解变换.

6. 若矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 中有一个 r 阶子式不等于零,而所有 $r+1$ 阶子式(如果还有的话) 全等于零,则称矩阵 A 的秩数为 r.记作秩

$(A)=r$.换句话说,A 中不等于零的子式最高阶数称为矩阵的秩数.

矩阵经过初等变换,秩数不变.

7.线性方程组(1)解的判定:

(1) 系数矩阵秩数 $\neq$ 增广矩阵秩数,则无解;

(2) 系数矩阵秩数 $=$ 增广矩阵秩数 $=r$,则有解:

① 秩数 $r=$ 未知量个数 n,则有惟一解;

② 秩数 $r<$ 未知量个数 n,则有无穷多解,解中有 $n-r$ 个自由未知量.

8.线性方程组(1)的常数项全为零时,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{3}$$

称为齐次线性方程组.

(1) 齐次线性方程组恒有解:$x_1=0$, $x_2=0$, $\cdots$, $x_n=0$,称为零解或平凡解.

(2) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩数小于未知量个数.

(3) 方程个数少于未知量个数的齐次线性方程组必有非零解.

(4) 方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零.

9.分离系数消元法.

(1) 解一般线性方程组,先用初等行变换将增广矩阵化成阶梯形.当有解时,进而化成约化阶梯形,由此写出全部解.

(2) 解齐次线性方程组,只需用初等行变换将系数矩阵化成约化阶梯形,由此写出全部解.

复习题二

1.解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+3x_2+2x_3+2x_4=4; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x_1+5x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=-2, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=-5, \\ x_2+2x_3-x_4=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=1, \\ 2x_1+4x_2+x_4+4x_5=-1, \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ 3x_1+6x_2+2x_3+x_4+8x_5=-2. \end{cases}$

2．**解下列齐次线性方程组**:

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2+6x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_2+x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_4=0, \\ 4x_1+3x_2-x_3+4x_4=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+5x_3+7x_4+3x_5=0, \\ -3x_1+3x_2-5x_3-8x_4-2x_5=0, \\ -x_1+x_2-3x_3-4x_4-2x_5=0. \end{cases}$

3．**讨论** a, b **为何值时,线性方程组**

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1+ax_2+x_3=b, \\ 3x_1+x_2-2x_3=7 \end{cases}$$

有惟一解?有无穷多解?无解?当有解时,求出解.

4.**讨论 λ 为何值时,齐次线性方程组**

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?并求全部解.

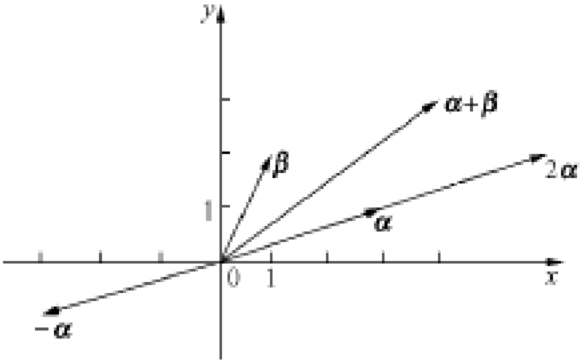
第三章

n 维向量空间

给定一个线性方程组,它有没有解?若有解,是有惟一解?还是有无穷多解?若有无穷多解,全部解构成的集合是如何构造的?这些问题的答案在用消元法解线性方程组之前已经客观存在.换句话说,它们已完全由线性方程组的增广矩阵决定.本章欲以向量为工具,研究线性方程组的理论问题.

§3.1 n 维向量及其线性运算

物理学称具有大小和方向的量为向量.例如:力、速度、加速度.几何学用有向线段表示向量.在平面直角坐标系中,以原点为起点,所有向量都与终点坐标一一对应.如右图.



例如,向量 $\alpha=(3,1)$,$\beta=(1,2)$,那么

$$\alpha+\beta=(3+1,1+2)=(4,3),$$
$$2\alpha=(2\times3,2\times1)=(6,2),$$
$$-\alpha=(-3,-1).$$

对应坐标相加反映了平行四边形法则;数乘每一个坐标反映了数与向量的乘法.在空间直角坐标系中,用三元有序实数组(x,y,z)表示向量.要描述空间中不同时刻t的向量则需要用4元有序实数组(x,y,z,t).今有n个未知量的线性方程$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$.可用$n+1$元有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n,b)$表示.方程的一个解$x_j=c_j(j=1,2,\cdots,n)$可用$n$元有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$表示.再看下面的物流配置表:

供给量 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
A_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	a_{sn}

n元有序数组$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,s)$表示第$i$个产地$A_i$向各销地的物资供给量.$s$元有序数组$(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{sj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$表示第$j$个销地$B_j$从各产地的进货量.总之,"用$n$元有序数组表示研究对象"的方法已在各个领域被广泛应用着.一般地,我们有

定义3.1.1 n元有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$称为$n$维向量.前者称为行向量,后者称为列向量.本书用希腊字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示向量.$a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为向量的第$i$个分量.

分量全为零的向量称为零向量,记作O,$(0,0,\cdots,0)$或$(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.如果$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,称$(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$为$\alpha$的负向量,记作$-\alpha$.

定义3.1.2 如果向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$对应分量都相等,即$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则称这两个向量

相等,记作 $\alpha = \beta$.

定义 3.1.3　n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的和等于向量

$$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

记作 $\alpha + \beta$.这种运算称为向量的加法.

利用负向量可定义向量的减法: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

定义 3.1.4　数 k 与向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的乘积等于向量

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n),$$

记作 $k\alpha$.这种运算称为数与向量的乘法,简称数量乘法.

向量的加法和数量乘法统称为向量的线性运算.我们把数域 P 上所有 n 维向量作成的集合记作 P^n.下面考察 P^n 中向量的线性运算有哪些规律.

由定义可以推出向量的加法满足以下运算律:

交换律

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \tag{1}$$

结合律

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \tag{2}$$

对于任意向量 α 与零向量 O 恒有

$$\alpha + O = \alpha; \tag{3}$$

$$\alpha + (-\alpha) = O; \tag{4}$$

数量乘法满足

$$1 \cdot \alpha = \alpha; \tag{5}$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha; \tag{6}$$

数量乘法和加法满足

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta; \tag{7}$$

$$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha. \tag{8}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in P^n$，$k,l\in P$.

定义 3.1.5 数域 P 上所有 n 维向量作成的集合 P^n，其中定义了加法和数量乘法，且这两种线性运算满足运算律(1) ～ (8)，则称 P^n 是数域 P 上的 n 维向量空间.

例如，平面上所有向量构成实数域 R 上的二维向量空间 R^2.空间解析几何是在实数域上的三维向量空间 R^3 中，用解析的方法，也就是代数的方法研究几何.本章是在数域 P 上 n 维向量空间 P^n 中研究线性方程组理论.

练 习 3.1

1. 在平面直角坐标系中表示出下列向量:

$$\alpha=(1,2),\quad \beta=(3,-1),\quad \alpha+\beta,\quad 2\alpha,\quad -\beta,\quad 2\alpha-\beta.$$

2. 已知向量 $\alpha=(1,2,-1,0)^{T}$，$\beta=(3,0,1,2)^{T}$，$\gamma=(5,4,-1,2)^{T}$.求向量 $\alpha+\beta+\gamma$；$2\alpha+\beta-\gamma$.

3. 已知

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix},$$

$$O=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}9\\-5\\3\end{bmatrix},$$

解向量方程

(1) $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=O$；

(2) $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

4. 设

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

求

$$a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4 .$$

5．证明向量的线性运算满足运算律(1) ～ (8) .

6．用定义证明

(1) $0\alpha = O$;

(2) $(-1)\alpha = -\alpha$;

(3) $kO = O$;

(4) 如果 $k \neq 0$, $\alpha \neq O$, 那么 $k\alpha \neq O$.

§3.2 线性组合(线性表出)

空间解析几何可以在 R^3 中讨论;线性方程组理论可以在 P^n 中研究,都是因为向量可以进行线性运算.本节和 §3.3, §3.4 专门讨论数域 P 上 n 维向量空间 P^n 中向量的线性关系 .

定义 3.2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是一组向量, $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是一组数.称向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合.如果向量 β 等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合,即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$

称向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 .

例 3.2.1 由于向量 $\beta = (3, -4, 2)^T$ 与向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 有关系式

$$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3,$$

就说向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个线性组合;或说 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 .

例 3.2.2 证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每一个向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 本身线性表出.

证 因为

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1 \cdot \alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s$$
$$(i = 1, 2, \cdots, s).$$

证完.

例 3.2.3 证明：零向量是任一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合.

证 因为

$$O = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_s.$$

证完.

例 3.2.4 证明：任一 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 都可由向量组

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1, 0, \cdots, 0), \\ \varepsilon_2 &= (0, 1, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= (0, 0, \cdots, 1) \end{aligned}$$

线性表出.

证 因为

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n.$$

证完.

称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 n 维基本向量组.

判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出的方法是：判断向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$$

是否有解.具体的，设

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1})^T,$$
$$\alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2})^T,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns})^T,$$
$$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

要判断向量方程

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_s\begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

是否有解.亦即判断线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = b_n \end{cases}$$

是否有解.

例 3.2.5　已知向量 $\beta = (-2,4,4)$ 及向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)$, $\alpha_2 = (1, -1,1)$, $\alpha_3 = (-1,1,1)$.试判断向量 β 能否由向量组 α_1, α_2, α_3 线性表出?若能,试写出表达式.

解　设

$$x_1\alpha_1^T + x_2\alpha_2^T + x_3\alpha_3^T = \beta^T.$$

即

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ \quad - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

根据克莱姆法则,线性方程组有惟一解: $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$. 所以向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出:

$$\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

且表示法惟一.

例 3.2.6 已知向量 $\boldsymbol{\beta} = (4,2,3)$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,2)$. 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?

解 设

$$x_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + x_3 \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

即

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ \quad x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

用分离系数消元法解线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&1&1&2\\1&1&2&3\end{array}\right]\xrightarrow{③-①}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&1&1&2\\0&0&0&-1\end{array}\right].$$

因为方程组无解,所以向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

例 3.2.7　已知向量 $\beta=(4,2,6)$ 和向量组 $\alpha_1=(1,0,1)$, $\alpha_2=(1,1,2)$, $\alpha_3=(2,1,3)$.判断 β 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?若能,表示法是否惟一?

解　设

$$x_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+x_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+x_3\alpha_3^{\mathrm{T}}=\beta^{\mathrm{T}}.$$

即

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\ \qquad x_2+x_3=2,\\ x_1+2x_2+3x_3=6.\end{cases}$$

用分离系数消元法解线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&1&1&2\\1&2&3&6\end{array}\right]\xrightarrow{③-①}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&1&1&2\\0&1&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{③-②}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&4\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

因为方程组有解,且有无穷多解,所以 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,且表示法不惟一.

定义 3.2.2　设有两个向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\tag{1}$$

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t,\tag{2}$$

如果向量组(1) 中每一个向量都可由向量组(2) 线性表出,则称向量组(1) 可由向量组(2) 线性表出 .如果向量组(1) 可由向量组(2) 线性表出,且向量组(2) 也可由向量组(1) 线性表出,则称两个向量组等价 .记作$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$.

例 3 .2 .8 已知两个向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

因为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + 0\beta_2 + 0\beta_3 + 0\beta_4,$$
$$\alpha_2 = -\beta_1 + 2\beta_2 + 0\beta_3 + 0\beta_4,$$
$$\alpha_3 = 0\beta_1 - 3\beta_2 + 3\beta_3 + 0\beta_4,$$

所以向量组(3) 可以由向量组(4) 线性表出 .又因为

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + 0\alpha_3,$$
$$\beta_3 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3,$$
$$\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

即向量组(4) 可以由向量组(3) 线性表出 .所以$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$.

线性表出有传递性,即有

定理 3 .2 .1 设有 3 个向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \tag{5}$$
$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t, \tag{6}$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l, \tag{7}$$

如果向量组(5)可由向量组(6)线性表出,向量组(6)可由向量组(7)线性表出,则向量组(5)可由向量组(7)线性表出.

寻找证法:设

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{t1}\beta_t, \\ \alpha_2 = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{t2}\beta_t, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_s = a_{1s}\beta_1 + a_{2s}\beta_2 + \cdots + a_{ts}\beta_t. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = b_{11}\gamma_1 + b_{21}\gamma_2 + \cdots + b_{l1}\gamma_l, \\ \beta_2 = b_{12}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2 + \cdots + b_{l2}\gamma_l, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_t = b_{1t}\gamma_1 + b_{2t}\gamma_2 + \cdots + b_{lt}\gamma_l. \end{cases} \tag{9}$$

只需将(9)代入(8)即可得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 由 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l$ 线性表出的表达式.

证明留给读者.

由以上讨论可以知道,向量组的等价关系具有

(1) 反身性:$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$;

(2) 对称性:如果$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$,则$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$;

(3) 传递性:若$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$,$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} \cong \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l\}$,则$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l\}$.

练　习　3.2

1. 判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.若表示法不惟一,试写出两个表达式.

(1) $\beta = (2,2,2,2)$,

$\alpha_1 = (1,1,1,-1)$,

$\alpha_2 = (1,1,-1,1)$,

$\alpha_3 = (1,-1,1,1)$,

$\alpha_4 = (-1,1,1,1)$;

(2) $\beta = (1,2,3,4)$,

$\alpha_1 = (1,0,0,0)$,

$\alpha_2 = (1,1,0,0)$,

$\alpha_3 = (1,1,1,0)$,

$\alpha_4 = (1,1,1,1)$;

(3) $\beta = (1,1,1,2)$,

$\alpha_1 = (1,1,1,3)$,

$\alpha_2 = (-1,1,1,1)$,

$\alpha_3 = (1,-1,1,1)$,

$\alpha_4 = (1,1,-1,1)$;

(4) $\beta = (0,-2,2,0)$,

$\alpha_1 = (-1,1,1,1)$,

$\alpha_2 = (1,-1,1,-1)$,

$\alpha_3 = (1,1,-1,-1)$,

$\alpha_4 = (1,1,1,-1)$.

2 . **已知向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出 .求证: β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 (其中 $r < s$, $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_s$ 为任意向量) .**

3 . **证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性表出($r < s$) .**

4 . **设**

$$\begin{aligned}
\beta &= (b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1}), & \tilde{\beta} &= (b_1, b_2, \cdots, b_n),\\
\alpha_1 &= (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}, a_{n+1,1}), & \tilde{\alpha}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}),\\
\alpha_2 &= (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}, a_{n+1,2}), & \tilde{\alpha}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}),\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_s &= (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns}, a_{n+1,s}), & \tilde{\alpha}_s &= (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns}).
\end{aligned}$$

已知向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 .求证向量 $\tilde{\beta}$ 可由向量组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_s$ 线性表出 .

5 . 设向量组

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_s$;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_s$;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, c\alpha_i, \cdots, \alpha_s (c \neq 0)$;

(4) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j + k\alpha_i, \cdots, \alpha_s$.

求证: (1) ü (2) , (1) ü (3) , (1) ü (4) .

6 . 证明定理 3 .2 .1 .

7 . 证明向量组的等价关系具有反身性、对称性和传递性 .

§3 .3　线性相关与线性无关

我们知道任何一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都可以表示成零向量的线性组合 .因为至少有

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_s = O .$$

此外,能否找到一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = O$$

呢 ?那就不一定了 .例如,这里有两个向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \tag{1}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{2}$$

它们都可以表示为零向量的线性组合:

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 = O; \quad 0\beta_1 + 0\beta_2 = O .$$

此外,向量组(1) 还可用不全为零的系数组合出零向量:

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = O .$$

但要使

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 = O$$

成立,x_1,x_2 只能为零.按这样区别,我们称向量组(1)是线性相关的;向量组(2)是线性无关的.

定义 3.3.1 对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$,如果有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = O,$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

例 3.3.1 证明:一个向量 α 线性相关的必要充分条件是 $\alpha = O$.

证 先证必要性.如果 α 线性相关,则有非零数 k 使 $k\alpha = O$.因为 $k\neq 0$,所以 $\alpha = O$.

反之,再证充分性.已知 $\alpha = O$.因此对任一非零数 k 都有 $k\alpha = O$.所以 α 线性相关.

这个例题的逆否命题是:一个向量 α 线性无关的必要充分条件是 $\alpha\neq O$.

例 3.3.2 证明:两个向量 α,β 线性相关的必要充分条件是存在数 k 使 $\alpha = k\beta$(即 α,β 成比例).

证 如果向量组 α,β 线性相关,则有不全为零的数 l_1,l_2 使

$$l_1\alpha + l_2\beta = O.$$

不妨设 $l_1\neq 0$,则

$$\alpha = -\frac{l_2}{l_1}\beta.$$

取 $k = -\dfrac{l_2}{l_1}$,则有 $\alpha = k\beta$.

反之,如果 $\alpha = k\beta$,则有 $1\alpha - k\beta = O$ 所以 α,β 线性相关.

这个例题的逆否命题是:两个向量 α,β 线性无关的必要充分条件是 α 与 β 不成比例.

在平面直角坐标系中或空间直角坐标系中,两个向量线性相关

就是指两个向量共线(平行);两个向量线性无关就是指两个向量不共线(不平行).

例 3.3.3　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.求证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s(r<s)$ 也线性相关.

证　已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=O.$$

因而也有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+0\alpha_{r+1}+\cdots+0\alpha_s=O$$

成立.由于系数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 不全为零,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$ 也线性相关.

这个例题的逆否命题是:一个向量组线性无关,则其中任何一个部分组也线性无关.

由定义 3.3.1 得判别法:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关(线性无关),当且仅当方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=O$$

有非零解(只有零解).

例 3.3.4　已知向量组 α,β,γ 线性无关.证明向量组 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$ 也线性无关.

寻找证法:从求证入手.只需证明

$$x_1(\alpha+\beta)+x_2(\beta+\gamma)+x_3(\gamma+\alpha)=O$$

只有零解.

证　设

$$x_1(\alpha+\beta)+x_2(\beta+\gamma)+x_3(\gamma+\alpha)=O,$$

即

$$(x_1+x_3)\alpha+(x_1+x_2)\beta+(x_2+x_3)\gamma=O.$$

已知 α, β, γ 线性无关,所以

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$$

这个齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以只有 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.证完 .

例 3 .3 .5 证明: n 维基本向量组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_1 &= (1,0,\cdots,0), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= (0,1,\cdots,0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= (0,0,\cdots,1) \end{aligned}$$

线性无关 .

证 设

$$x_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}} + x_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + x_n \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mathrm{T}} = O,$$

即

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = 0, \end{cases}$$

显然,齐次线性方程组只有零解.故 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

一般地, n 个 n 维向量

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}),\\ \alpha_2 &= (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{nn})\end{aligned}$$

线性相关(线性无关),当且仅当齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0\end{cases}$$

有非零解(只有零解).而该齐次线性方程组有非零解(只有零解),当且仅当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = 0\ (\neq 0).$$

定理 3.3.1　n 个 n 维向量线性相关(线性无关)的充分必要条件是,它们的分量组成的行列式等于零(不等于零).

定理 3.3.2　s 个 n 维向量,当 $s > n$ 时,必线性相关.

换句话说,向量组所含向量个数 s 大于向量维数 n 时,这个向量组必线性相关.

寻找定理 3.3.2 证法: 设

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}),\\ \alpha_2 &= (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_s &= (a_{1s}, a_{2s}, \cdots, a_{ns}),\end{aligned}$$

其中 $s > n$.从求证入手.设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + x_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}} = O.$$

欲证该向量方程有非零解.具体写出来:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s = 0. \end{cases}$$

因为这个齐次线性方程组的方程个数 n 小于未知量个数 s,所以必有非零解.即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

请读者用自己的话写出定理证明.

这个定理的几何意义是明显的.例如,在一维实向量空间(即实数轴)中任意两个一维向量都共线.在二维实向量空间(即直角坐标平面)中,任意3个二维向量都共面.一般地,有

推论 3.3.1 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 3.3.2 的逆否命题是:向量组线性无关,则它所含向量个数不超过向量维数.

线性相关与线性组合的关系表现为下面的

定理 3.3.3 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$ 线性相关的充分必要条件是,其中至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 \leq i \leq s)$ 可由其余向量线性表出.

寻找证法:先考虑必要性.已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_i\boldsymbol{\alpha}_i + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = O.$$

要想证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表出,只需从上式左边找一个向量移到等式右边即可.自然应找系数不为零的向量,而这样的向量在等式中是存在的.

证 必要性 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_i\alpha_i+\cdots+k_s\alpha_s=O.$$

已知 $s\geq 2$,不妨认为 $k_i\neq 0$,因而有

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\frac{k_2}{k_i}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}\alpha_s$$

成立.这就证明了有一个 $\alpha_i(1\leq i\leq s)$ 可由其余向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出.

充分性　已知 $\alpha_i(1\leq i\leq s)$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出,则有数 $l_1,l_2,\cdots,l_{i-1},l_{i+1},\cdots,l_s$ 使

$$\alpha_i=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{i-1}\alpha_{i-1}+l_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+l_s\alpha_s.$$

移项得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{i-1}\alpha_{i-1}-\alpha_i+l_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+l_s\alpha_s=O.$$

因为上式左边系数不全为零,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

因为一个向量组不线性相关就线性无关,因此定理 3.3.3 还可以叙述为

定理 3.3.3′　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是其中每一个向量都不能由其余向量线性表出.

以上就一个向量组讨论了线性相关与线性组合的关系.下面对两个向量组来讨论.

定理 3.3.4　如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,且 $s>t$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

寻找证法:已知条件可设成

$$\begin{cases}\alpha_1=a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{t1}\beta_t,\\ \alpha_2=a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{t2}\beta_t,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_s=a_{1s}\beta_1+a_{2s}\beta_2+\cdots+a_{ts}\beta_t.\end{cases}\tag{3}$$

从求证入手,欲证

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=O\tag{4}$$

有非零解,只需将(3)代入(4).

证 设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=O.$$

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,设为(3).将(3)代入(4),得

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s)\beta_1\\&\quad+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s)\beta_2\\&\quad+\cdots\\&\quad+(a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{ts}x_s)\beta_t=O.\end{aligned}$$

要使上式成立,只需 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的系数全为零:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{ts}x_s=0.\end{cases}$$

已知 $s>t$,即这个齐次线性方程组的方程个数 t 小于未知量个数 s,因此必有非零解,也就是说(4)有非零解.故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

定理 3.3.4 的逆否命题是:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,则 $s\leq t$.

推论 3.3.2 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相等.

本节最后,我们介绍线性相关、线性无关与线性组合的关系.

定理 3.3.5 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关.则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,且表示法惟一.

证 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关,则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+l\beta=O.$$

今断言 $l \neq 0$.因若不然,上式变为

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = O,$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 不全为零.此与已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关矛盾.既然 $l \neq 0$,则有

$$\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{l}\alpha_r.$$

这就证明了 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出.

假设

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r,$$

$$\beta = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \cdots + t_r\alpha_r.$$

两式相减,得

$$(l_1 - t_1)\alpha_1 + (l_2 - t_2)\alpha_2 + \cdots + (l_r - t_r)\alpha_r = O.$$

因为已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关,所以 $l_i - t_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, r)$,即 $l_i = t_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$.这就证明了表示法惟一.

练　习　3.3

1.下列各向量组是线性相关?还是线性无关?并说明理由:

(1) $\alpha_1 = (1, -2, 3, 4)$,

$\alpha_2 = (2, 0, 1, 3)$,

$\alpha_3 = (1, 2, 1, -1)$;

(2) $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$,

$\alpha_2 = (2, 1, -1, 1)$,

$\alpha_3 = (0, -1, 5, 5)$;

(3) $\alpha_1 = (0, 1, -3, 2)$,

$\alpha_2 = (2, 1, -1, 1)$,

$\alpha_3 = (3, -2, 1, 4)$,

$\alpha_4 = (1, 0, -3, 1)$;

(4) $\alpha_1 = (0,1,-3,2)$,

$\alpha_2 = (2,1,-1,1)$,

$\alpha_3 = (3,-2,1,4)$,

$\alpha_4 = (1,-3,2,3)$;

(5) $\alpha_1 = (1,2,3,4)$,

$\alpha_2 = (2,3,4,1)$,

$\alpha_3 = (3,4,1,2)$,

$\alpha_4 = (4,1,2,3)$;

(6) $\alpha_1 = (1,2,3,4,5)$,

$\alpha_2 = (2,3,4,5,1)$,

$\alpha_3 = (3,4,5,1,2)$,

$\alpha_4 = (4,5,1,2,3)$,

$\alpha_5 = (2,4,6,8,10)$.

2．**已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一个零向量，证明这个向量组线性相关．又，这个命题的逆否命题如何叙述？**

3．**已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_s$ 中，$\alpha_i = k\alpha_j$．求证这个向量组线性相关．又，这个命题的逆否命题如何叙述？**

4．**证明 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关．**

5．**设两个向量组**

$$\alpha_1 = (a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{n+1\,1},\cdots,a_{m1}),$$
$$\alpha_2 = (a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},a_{n+1\,2},\cdots,a_{m2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_s = (a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ns},a_{n+1\,s},\cdots,a_{ms});$$

和

$$\beta_1 = (a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}),$$
$$\beta_2 = (a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_s = (a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ns}).$$

且 $m > n$．证明：

(1) 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_s$ 也线性相关；

(2) 如果 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也线性无关．

6．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．求证：

(1) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关；

(2) $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+4\alpha_3$ 线性相关．

7．已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 线性无关，且向量 α_{i+1} 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 线性表出．求证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\alpha_{i+1}$ 线性无关．

§3.4　极大线性无关组与秩数

例 3.4.1　设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},$$
$$\alpha_4=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_6=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

试找出向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$ 中线性无关的部分组．

解　一个非零向量是线性无关的．所以 $\{\alpha_2\},\{\alpha_3\},\{\alpha_4\},\{\alpha_5\},\{\alpha_6\}$ 都是线性无关部分组．如果两个向量对应分量不成比例，则这两个向量线性无关．所以 $\{\alpha_2,\alpha_4\},\{\alpha_2,\alpha_5\},\{\alpha_2,\alpha_6\},\{\alpha_3,\alpha_4\},\{\alpha_3,\alpha_5\},\{\alpha_3,\alpha_6\},\{\alpha_4,\alpha_5\},\{\alpha_4,\alpha_6\},\{\alpha_5,\alpha_6\}$ 都是线性无关部分组．3 个三维向量，如果它们的分量组成的行列式不等于零，则线性无关．所以 $\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5\},\{\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6\},\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\},\{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6\},\{\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$ 都是线性无关部分组．因为 4 个三维向量必线性相关，所以多于 3 个向量的部分组必线性相关．

以上所有线性无关部分组中，含有向量个数最多的是三个向量的部分组．我们就称这些含有 3 个向量的线性无关部分组都是 $\{\alpha_1,$

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$的极大线性无关部分组.简称极大无关组.一般地,有

定义 3.4.1 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组(集合) S 中的一个线性无关部分组,而 S 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组,简称极大无关组.

例如,开篇例 3.4.1 中,$\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关,$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6\}$ 中任意 4 个向量线性相关.所以 $\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 是向量组 S 的一个极大无关组.

由定义可知,如果向量组 S 线性无关,那么 S 的极大线性无关组就是 S 本身.

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大无关组.根据定义 3.4.1,从 S 中任取一个向量 α_{r+1},都有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 线性相关,又根据定理 3.3.5,α_{r+1} 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.因此,关于“极大线性无关组”还有下面两个等价定义.

定义 3.4.1′ 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 S 的一个线性无关部分组,且 S 中任一个向量 α_{r+1} 添进去,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 都线性相关,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 S 的一个极大线性无关组.

定义 3.4.1″ 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 S 的一个线性无关部分组,且 S 中每一个向量 α_i 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 S 的一个极大线性无关组.

由定义可以知道,向量组 S 可以由它的极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出;反之,由于极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 S 的子集,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 S 线性表出.故得到

定理 3.4.1 向量组 S 的极大线性无关组与 S 等价.

由例 3.4.1 可以看到一个普遍的事实:一个向量组 S 如果有极大线性无关组,可能不只一个.它们都与 S 等价.由等价关系的传递性可以推出:向量组 S 的任意两个极大线性无关组都是等价的.又由 §3.3 推论 3.3.2 得到

定理 3.4.2 向量组 S 的任意两个极大线性无关组所含向量个数相等.

这个定理说明:向量组 S 的极大线性无关组所含向量个数与极大线性无关组的选择无关,而完全由 S 决定.由此我们给出

定义 3.4.2　向量组 S 的极大线性无关组所含向量个数称为向量组 S 的秩数,简称秩.记作秩(S).

本节例 3.4.1 中,秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}=3$.

推论 3.4.1　向量组线性无关的充分必要条件是它的秩等于它所含向量个数.

推论 3.4.2　两个等价的向量组,秩数相等.

注意:推论 3.4.2 的逆不真.例如秩$\{(1,0)\}=1$,秩$\{(0,1)\}=1$,但$(1,0)$与$(0,1)$并不等价.

如果两个向量组秩数相等,且其中一个向量组可由另一个向量组线性表出,则可以证明这两个向量组等价(留作习题).

最后,介绍极大线性无关组的求法——扩充法.

如果向量组 S 中全是零向量,那么 S 中没有线性无关部分组,也就没有极大无关组.这时规定秩(S)$=0$.如果 S 中有非零向量,则一定有极大线性无关组.仍以例 3.4.1 说明极大无关组求法:

$\alpha_1=O$,去掉;

$\alpha_2\neq O$,留下;

α_3 可由 α_2 线性表出,去掉 α_3;

α_4 不能由 α_2 线性表出,留下 α_4;

α_5 不能由 α_2,α_4 线性表出,留下 α_5;

α_6 能由 $\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表出,去掉 α_6.

所以 $\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 就是向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$的一个极大线性无关组.

一个向量组 S 中如果有非零向量,就一定有极大线性无关组.从一个非零向量出发,总在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 线性无关时,考察 α_{i+1} 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 线性表出,即看方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_i\alpha_i=\alpha_{i+1}$$

是否有解,因此只需以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\alpha_{i+1}$ 的分量为列组成矩阵,用

初等行变换将矩阵化成阶梯形即可.例如

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

有3个阶梯,每一个阶梯取一个向量组成的向量组都是极大线性无关组.

例 3.4.2 求下列向量组的极大线性无关组.

$$\alpha_1 = (1,2,1,0,1),$$
$$\alpha_2 = (0,1,2,-1,1),$$
$$\alpha_3 = (-1,-3,4,-6,-2),$$
$$\alpha_4 = (2,3,-3,4,1),$$
$$\alpha_5 = (3,4,0,1,1),$$
$$\alpha_6 = (1,1,2,-2,0).$$

解

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1^T & \alpha_2^T & \alpha_3^T & \alpha_4^T & \alpha_5^T & \alpha_6^T \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-① \\ ⑤-①}]{②-2①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{④+②\\⑤-②}]{③-2②}\begin{bmatrix}1&0&-1&2&3&1\\0&1&-1&-1&-2&-1\\0&0&7&-3&1&3\\0&0&-7&3&-1&-3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+③}\begin{bmatrix}1&0&-1&2&3&1\\0&1&-1&-1&-2&-1\\0&0&7&-3&1&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由最后阶梯形矩阵可以看出: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_6$ 都是$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$的极大线性无关组.

一般地,对一个 n 维向量组 S 来说,无论 S 中含有有限个或无穷多向量,由于 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.所以线性无关部分组不可能无止境地扩充下去.一般的,对于 n 维向量组 S 来说,总有 $0\leq$ 秩$(S)\leq n$.

练　习　3.4

1.求下列各向量组的一个极大线性无关组:

(1) $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}4\\2\\2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-4\\14\end{bmatrix}$.

(2) $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\4\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\5\end{bmatrix}$,

$$\alpha_5=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\ \alpha_6=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

2. 求第 1 题中各向量组的秩数.

3. 已知 $\alpha_1=(1,2,-1,0)$, $\alpha_2=(3,-2,4,1)$, 试给出 α_3,α_4, 使向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

4. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关的充分必要条件是秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}=r$.

5. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.求证: 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leq$ 秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.

6. 已知$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.求证: 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=$ 秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.逆命题成立吗?

7. 已知秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=$ 秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.求证: $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$.

8. 已知秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=r_1$, 秩$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}=r_2$, 求证: 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}\leq r_1+r_2$.

9. 证明: 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=$ 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$.

§3.5 齐次线性方程组解的结构

设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0.\end{cases}\tag{1}$$

齐次线性方程组恒有解.当(1)只有零解时,解集合构造是清楚的,

只含一个 n 维零向量.当(1)有非零解时,解集合又是怎样构造的呢?我们先来了解齐次线性方程组解的性质.

性质 1　如果$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$和$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$都是(1)的解,则$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \cdots, c_n + d_n)$也是(1)的解.

分析　从求证入手.将$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \cdots, c_n + d_n)$代入(1)的每一个方程的左边,看是否都等于零.

证　将$(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \cdots, c_n + d_n)$代入(1)的第 i 个$(i = 1, 2, \cdots, s)$方程左边.

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}(c_1 + d_1) + a_{i2}(c_2 + d_2) + \cdots + a_{in}(c_n + d_n) \\
&\quad = (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n) + (a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{in}d_n) \\
&\quad = 0 + 0 \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

性质 2　如果$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是(1)的解,那么对于任意数 k, $k(c_1, c_2, \cdots, c_n)$也是(1)的解.

证　将 $k(c_1, c_2, \cdots, c_n) = (kc_1, kc_2, \cdots, kc_n)$代入(1)的第 i $(i = 1, 2, \cdots, s)$个方程左边,

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}(kc_1) + a_{i2}(kc_2) + \cdots + a_{in}(kc_n) \\
&\quad = k(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n) \\
&\quad = k \cdot 0 \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

综合以上两个性质,得

定理 3.5.1　如果 n 维向量$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$都是齐次线性方程组(1)的解,那么$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$的任意线性组合

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$$

(即 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 为任意数)都是齐次线性方程组(1)的解.

这个定理启发我们在(1)的无穷多解中找出有限个解$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$,用这有限个解的任意线性组合表示出(1)的全部解.显然要求(1)的任一个解 η 都能用$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$线性表出.因此,$\eta_1, \eta_2,$

$\cdots,\eta_t$ 必须是(1) 的全部解的极大线性无关组 .

定义 3.5.1 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组(1) 的解, 如果

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关;

(2) 齐次线性方程组(1) 的任一个解 η 都能由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出,

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组(1) 的一个基础解系 .

基础解系就是齐次线性方程组解集合的极大线性无关组 .因此, 齐次线性方程组若有非零解,就一定存在基础解系 .

定理 3.5.2 设 n 元齐次线性方程组(1) 的系数矩阵秩数为 r . 如果 $r<n$,则(1) 有基础解系,且基础解系含有 $n-r$ 个解 .

证 根据已知,不妨设(1) 的增广矩阵经初等行变换化为如下形式

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & \end{matrix} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1\,n} & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2\,n} & 0 \\
\cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{r\,n} & 0
\end{array}\right]
\end{array}.$$

得与(1) 同解的方程组

$$\begin{cases}
x_1=-c_{1\,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1\,n}x_n, \\
x_2=-c_{2\,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2\,n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_r=-c_{r\,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{r\,n}x_n .
\end{cases}$$

其中 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为自由未知量,给自由未知量 $n-r$ 组值

$$\begin{array}{cccc}
x_{r+1}, & x_{r+2}, & \cdots, & x_n \\
(1, & 0, & \cdots, & 0), \\
(0, & 1, & \cdots, & 0), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
(0, & 0, & \cdots, & 1) .
\end{array}$$

得 $n-r$ 个解

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= (-c_{1\,r+1}, -c_{2\,r+1}, \cdots, -c_{r\,r+1}, 1, 0, \cdots, 0),\\
\eta_2 &= (-c_{1\,r+2}, -c_{2\,r+2}, \cdots, -c_{r\,r+2}, 0, 1, \cdots, 0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{n-r} &= (-c_{1n}, -c_{2n}, \cdots, -c_{rn}, 0, 0, \cdots, 1).
\end{aligned}$$

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关.

设 $\eta = (d_1, d_2, \cdots, d_r, d_{r+1}, \cdots, d_n)$ 是齐次线性方程组(1)的任一个解.(欲证 η 可由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性表出),作线性组合

$$\begin{aligned}
&d_{r+1}\eta_1 + d_{r+2}\eta_2 + \cdots + d_n\eta_{n-r}\\
&\quad = (e_1, e_2, \cdots, e_r, d_{r+1}, d_{r+2}, \cdots, d_n).
\end{aligned}$$

该线性组合也是(1)的解.它与 η 的自由未知量取值是相同的: $x_{r+1} = d_{r+1}, x_{r+2} = d_{r+2}, \cdots, x_n = d_n$.因此, $d_1 = e_1, d_2 = e_2, \cdots, d_r = e_r$.故 $\eta = d_{r+1}\eta_1 + d_{r+2}\eta_2 + \cdots + d_n\eta_{n-r}$.

定理证明同时给出了求基础解系的方法.

例 3.5.1 求下列齐次线性方程组

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0,\\
x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,\\
2x_1 - 6x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0,\\
3x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0
\end{cases}$$

的一个基础解系,并用基础解系表示出全部解.

解

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 0\\
1 & -3 & -1 & 1 & -3 & 0\\
2 & -6 & 1 & 3 & -3 & 0\\
3 & -9 & 3 & 5 & -3 & 0
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2①\\④-3①}]{②-①}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&2&2&0&0\\0&0&-3&-1&-3&0\\0&0&-3&-1&-3&0\\0&0&-3&-1&-3&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[④-②]{③-②}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&2&2&0&0\\0&0&-3&-1&-3&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}②}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&2&2&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①-2②}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-3&0&\frac{4}{3}&-2&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&1&0\end{array}\right]$$

系数矩阵秩数 $r=2$,未知量个数 $n=5$, $r<n$,有非零解.

$$\begin{cases}x_1=3x_2-\dfrac{4}{3}x_4+2x_5,\\ x_3=\quad\quad -\dfrac{1}{3}x_4-x_5.\end{cases}$$

其中 x_2, x_4, x_5 为自由未知量.

令 $x_2=1, x_4=0, x_5=0$,得 $\boldsymbol{\eta}_1=(3,1,0,0,0)$,

令 $x_2=0, x_4=3, x_5=0$,得 $\boldsymbol{\eta}_2=(-4,0,-1,3,0)$,

令 $x_2=0, x_4=0, x_5=1$,得 $\boldsymbol{\eta}_3=(2,0,-1,0,1)$.

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 就是一个基础解系.全部解为

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3,$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意数.

一般来说,一个向量组(集合) S,如果有极大线性无关组,可能不只一个,但它们都是等价的.现在来证明

例 3.5.2 与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解

系.

寻找证法：设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系；向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关，且与 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 可互相线性表出.(思考：为什么设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 为 t 个向量?)欲证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是基础解系.

从求证入手.根据基础解系定义，只需证明①$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是(1)的解；②$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关；③方程组(1)的任一个解 η 都能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性表出.

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 都是基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 的线性组合.根据定理3.5.1，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 都是(1)的解；$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关，这是已知的；设 η 是齐次线性方程组(1)的任一个解，则 η 可由基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表出.已知 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性表出.由线性表出的传递性推出 η 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性表出.综上所述，按定义3.5.1，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 也是基础解系.

请读者写出证明.

练　习　3.5

1.求下列齐次线性方程组的基础解系，并用它表示出全部解：

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ -5x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

(5) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

2. **已知齐次线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases}$$

其系数矩阵秩数 $r < n$.求证：任意 $n - r$ 个线性无关的解都是基础解系.

§3.6 一般线性方程组解的结构

设一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{1}$$

把(1) **的常数项全换成零,得到齐次线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

称(2) **是**(1) **的导出组.**(1) **的解与**(2) **的解有如下关系:**

关系 1　如果 n 维向量 $\gamma_1 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 和 $\gamma_2 = (d_1,$

$d_2, \cdots, d_n$)都是(1)的解.那么 $\gamma_1 - \gamma_2 = (c_1 - d_1, c_2 - d_2, \cdots, c_n - d_n)$ 必是(2)的解.

证　将 $\gamma_1 - \gamma_2$ 代入(2)的每一个方程的左边

$$\begin{aligned} & a_{i1}(c_1 - d_1) + a_{i2}(c_2 - d_2) + \cdots + a_{in}(c_n - d_n) \\ & \quad = (a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n) \\ & \qquad - (a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{in}d_n) \\ & \quad = b_i - b_i \\ & \quad = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s), \end{aligned}$$

所以 $\gamma_1 - \gamma_2$ 是(2)的解.

关系 2　如果 n 维向量 $\gamma_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 是(1)的一个解;$\eta = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是(2)的一个解.那么 $\gamma_0 + \eta = (e_1 + f_1, e_2 + f_2, \cdots, e_n + f_n)$ 仍是(1)的解.

证　将 $\gamma_0 + \eta$ 代入(1)的每一个方程的左边

$$\begin{aligned} & a_{i1}(e_1 + f_1) + a_{i2}(e_2 + f_2) + \cdots + a_{in}(e_n + f_n) \\ & \quad = (a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n) \\ & \qquad + (a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \cdots + a_{in}f_n) \\ & \quad = b_i + 0 \\ & \quad = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s), \end{aligned}$$

所以 $\gamma_0 + \eta$ 是(1)的解.

齐次线性方程组(2)的解集合结构,我们在§3.5已经讨论清楚.如今按关系 2,因(1)的一个解 γ_0(称为固定解或特解)与(2)的每一个解相加,得到的都是(1)的解.这是否为(1)的全部解呢?我们还需要探讨下面事实.

定理 3.6.1　已知 γ_0 是线性方程组(1)的一个特解.那么(1)的任何一个解 γ 都可以表示成

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

的形式,其中 η 是导出组(2)的一个解.

证　根据关系 1,把(1)的两个已知解 γ 和 γ_0 相减: $\gamma - \gamma_0 =$

η, η 就是导出组(2)的一个解,且满足 $\gamma = \gamma_0 + \eta$.

既然一般线性方程组(1)的任何一个解 γ 都可以表示成它的一个特解 γ_0 与其导出组(2)的一个解 η 之和.那么当 η 取遍(2)的全部解时, $\gamma = \gamma_0 + \eta$ 就是(1)的全部解.这个结论对线性方程组(1)有惟一解或无穷多解时都适用.设(1)的系数矩阵秩为 r.

1. 当线性方程组(1)有惟一解时,必有 $r = n$.这时(1)的导出组(2)只有零解.自然 $\gamma_0 = \gamma_0 + 0$ 就是(1)的全部解;

2. 当线性方程组(1)有无穷多解时,必有 $r < n$.这时(1)的导出组(2)存在基础解系 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$, (1)的全部解 γ 可以表示为 $\gamma = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$,其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意数.

例 3.6.1 求下列线性方程组的一个特解,并用导出组的基础解系表示出全部解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$$

解

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -9 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{④}-3\text{①}]{\substack{\text{②}-\text{①}\\ \text{③}-2\text{①}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{④}-\text{②}]{\text{③}-\text{②}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}②}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&-3&2&0&2\\0&1&0&\frac{1}{3}&1&\frac{7}{3}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①-2②}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&-3&\frac{4}{3}&-2&-\frac{8}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&1&\frac{7}{3}\end{array}\right],$$

$$\begin{cases}x_1=-\frac{8}{3}+3x_3-\frac{4}{3}x_4+2x_5,\\x_2=\frac{7}{3}\qquad\quad-\frac{1}{3}x_4-x_5.\end{cases}\quad x_3,x_4,x_5\text{ 是自由未知量}.$$

令 $x_3=0, x_4=1, x_5=0$ 得一个特解 $\gamma_0=(-4,2,0,1,0)$.

$$\text{导出组}\begin{cases}x_1=3x_3-\frac{4}{3}x_4+2x_5,\\x_2=\qquad-\frac{1}{3}x_4-x_5.\end{cases}\quad x_3,x_4,x_5\text{ 是自由未知量}.$$

令 $x_3=1, x_4=0, x_5=0$,得 $\eta_1=(3,0,1,0,0)$,

令 $x_3=0, x_4=3, x_5=0$,得 $\eta_2=(-4,-1,0,3,0)$,

令 $x_3=0, x_4=0, x_5=1$,得 $\eta_3=(2,-1,0,0,1)$.

η_1,η_2,η_3 是导出组的基础解系.线性方程组的全部解为 $\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意数.

练 习 3.6

1.求下列线性方程组的一个特解,并用导出组的基础解系表示出全部解:

$$(1)\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3+4x_4=2,\\x_1+2x_2\qquad-x_4=-2,\\3x_1+4x_2-2x_3+5x_4=6,\\\qquad x_2-5x_3+2x_4=6.\end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_5=3, \\ 3x_1+5x_2-2x_4+4x_5=10, \\ 2x_1+x_2+x_3-3x_4+2x_5=3, \\ 2x_2+x_4+x_5=4. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4+4x_5=4, \\ x_2+2x_3+3x_4-2x_5=3, \\ 3x_1+3x_2+x_3+4x_4+2x_5=7, \\ 6x_1+3x_2-4x_3-x_4+10x_5=5. \end{cases}$

2. 已知 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 都是一个线性方程组的解，且 $l_1+l_2+\cdots+l_s=1$. 证明：$l_1\gamma_1+l_2\gamma_2+\cdots+l_s\gamma_s$ 也是这个线性方程组的解.

本章复习提纲

1. n 维向量空间

(1) 数域 P 上 n 元有序数组 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 或 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 称为 n 维向量，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量 α 的第 i 个分量.

设 $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 或 $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$. $\alpha=\beta$ 当且仅当 $a_i=b_i, i=1,2,\cdots,n$.

(2) n 维向量的线性运算

① 加法：设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 那么 α 与 β 的和

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n).$$

② 数量乘法：数 k 与向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的乘积

$$k\alpha=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n).$$

(3) n 维向量的线性运算有 8 条运算律：

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③ $\alpha+O=\alpha$;

④ $\alpha+(-\alpha)=O$;

⑤ $1\alpha = \alpha$;

⑥ $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

⑦ $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

⑧ $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

其中 α, β, γ 为数域 P 上任意 n 维向量; k, l 为数域 P 中任意数.

(4) 数域 P 上全体 n 维向量的集合 P^n,在其中定义了加法和数量乘法运算,且这两种运算具有 8 条运算律,称这样的 P^n 为数域 P 上的 n 维向量空间.

直角坐标平面是实数域上的 2 维向量空间 R^2 的几何模型;空间直角坐标系是实数域上 3 维向量空间 R^3 的几何模型.

2. 向量的线性关系

(1) 线性组合(线性表出).

① 向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解.

② 两个向量组可以互相线性表出时,称这两个向量组等价.

(2) 线性相关与线性无关.

① 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关(线性无关)的充分必要条件是 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = O$ 有非零解(只有零解).

② 一个向量 α 线性相关(线性无关)的充分必要条件是 $\alpha = O$ $(\alpha \neq O)$.

③ 两个向量 α, β 线性相关(线性无关)的充分必要条件是存在数 k 使 $\alpha = k\beta$(对任意数 k 都有 $\alpha \neq k\beta$).

④ 向量组 S 的一个部分组线性相关,则 S 线性相关.

逆否命题: 如果向量组 S 线性无关,则 S 的任一个部分组也线性无关.

⑤ n 维基本向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关.

⑥ n 个 n 维向量线性相关(线性无关)的充分必要条件是它们的分量组成的行列式等于零(不等于零).

⑦ s 个 n 维向量,当 $s > n$ 时,一定线性相关.特别地, $n + 1$ 个 n 维向量必线性相关.

逆否命题: 向量组线性无关,则它所含向量个数不超过维数.

⑧ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表出.

逆否命题: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是其中每一个向量都不能由其余向量线性表出.

⑨ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

逆否命题: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $s \leq t$.

推论: 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相等.

⑩ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法惟一.

⑪ 练习 3.3 第 5 题.

⑫ 练习 3.3 第 7 题.

(3) 极大线性无关组与秩.

① 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个线性无关部分组, 且 S 中任意 $r+1$ 个向量线性相关, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组.

或, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个线性无关部分组, 且添上 S 中任一个向量 α_{r+1} 后(如果还有的话), $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 都线性相关, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组.

或, 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个线性无关部分组, 且 S 中每一个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组.

② 向量组 S 的极大线性无关组与 S 等价. 向量组 S 的任意两个极大线性无关组等价.

③ 向量组 S 的极大线性无关组所含向量个数称为向量组 S 的秩数.

④ 向量组线性无关的充分必要条件是它的秩数等于它所含向量个数.

⑤ 等价的向量组秩数相等, 逆不真.

⑥ 用扩充法求向量组的极大线性无关组.

3．线性方程组解结构

(1) 齐次线性方程组解结构．

① 齐次线性方程组解的性质．

② 基础解系概念．

③ 齐次线性方程组，当其系数矩阵秩数小于未知量个数时有基础解系．

④ 基础解系求法．

(2) 一般线性方程组解的结构．

① 何谓线性方程组的导出组？线性方程组的解与其导出组的解有什么关系？

② 会求线性方程组的一个特解，并用导出组的基础解系表示出全部解．

复 习 题 三

1．给向量组

$$\alpha_1 = (1,2,4,3,1),$$
$$\alpha_2 = (2,-1,0,-2,-1),$$
$$\alpha_3 = (-4,3,2,1,2),$$
$$\alpha_4 = (-1,4,6,2,2),$$
$$\alpha_5 = (-2,2,2,-1,1).$$

(1) 判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关或线性无关；

(2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

(3) 将其余向量用极大线性无关组线性表出．

2．设

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2,$$
$$\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2,$$
$$\beta_3 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2.$$

验证 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关．

3．已知 η_1, η_2, η_3 是一个齐次线性方程组的基础解系．判断下

列向量组是否也为基础解系.

(1) $\eta_1+\eta_2,\eta_3-\eta_2,\eta_1+\eta_2+\eta_3$;

(2) $\eta_1+2\eta_2+3\eta_3,2\eta_1-\eta_2+\eta_3,\eta_1+\eta_2+2\eta_3$.

4. 已知 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.证明:任一个 n 维向量 β 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,且表示法惟一.

5. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_4-x_5=0, \\ 3x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5=0, \\ -x_1-x_2+x_3-3x_4+4x_5=0. \end{cases}$$

6. 求下列线性方程组的一个特解;并用导出组的基础解系表示出全部解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=4, \\ 2x_1+2x_2+2x_4-x_5=3, \\ 3x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5=7, \\ -x_1-x_2+x_3-3x_4+4x_5=1. \end{cases}$$

第四章

矩　　阵

我们在§2.2 引进了矩阵的概念,并利用增广矩阵解线性方程组.读者将会看到矩阵作为“数表”,用处远不止于此.矩阵是线性代数研究的主要对象之一.下面先介绍矩阵可以进行哪些有实际意义的运算.

§4.1　矩阵的运算

首先要明确:两个矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$和 $B=(b_{ij})_{sn}$,只有当它们的行数相同、列数相同,且对应位置元素都相等时才能说相等,记作 $A=B$.例如,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1 . **矩阵加法**

先看一个小例子 .下面是每件衣服的价格表:

上衣	大号	中号	小号
女款	a_{11}	a_{12}	a_{13}
男款	a_{21}	a_{22}	a_{23}

裤	大号	中号	小号
女款	b_{11}	b_{12}	b_{13}
男款	b_{21}	b_{22}	b_{23}

要求上衣和裤子一套服装的价格表,只需将两个数表叠加起来:

套	大号	中号	小号
女款	$a_{11}+b_{11}$	$a_{12}+b_{12}$	$a_{13}+b_{13}$
男款	$a_{21}+b_{21}$	$a_{22}+b_{22}$	$a_{23}+b_{23}$

定义 4.1.1 **设矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix},$$

称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{bmatrix}$$

为 A **与** B **的和 .记作** $A+B$.

例如

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 2+1 & (-1)+1 & 3+(-1) \\ 5+(-2) & 0+3 & 4+(-2) \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.
$$

注意　只有当两个矩阵的行数相同,列数也相同时,才能相加,且是对应位置元素相加.

因为矩阵加法归结为对应位置元素——数的加法,所以矩阵加法有

交换律

$$A+B=B+A;$$

结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

元素全为零的矩阵

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{sn}
$$

称为零矩阵,记作 O_{sn},在不至引起混淆的情况下也可以记作 O.显然对任意可加矩阵 A_{sn} 都有

$$A_{sn}+O_{sn}=A_{sn}.$$

把矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 的所有元素都换成相反数,得新的矩阵 $(-a_{ij})_{sn}$ 称为 A 的负矩阵.记作 $-A$.

例如,

$$
A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

的负矩阵

$$-A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ -5 & 0 & -4\end{bmatrix}.$$

显然

$$A+(-A)=O.$$

利用负矩阵可以定义矩阵减法:

$$A_{sn}-B_{sn}=A_{sn}+(-B_{sn}).$$

减法作为加法的逆运算,同样要求两个矩阵的行数相同,列数相同,才能相减.例如

$$\begin{bmatrix}5 & 0\\ 2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-2 & 0-1\\ 2-3 & 3-2\\ -1-0 & 1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

2. 矩阵乘法

例　已知变量 x_1, x_2 与变量 y_1, y_2, y_3 的关系为

$$\begin{cases}x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3,\\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3.\end{cases}\tag{1}$$

变量 y_1, y_2, y_3 与变量 z_1, z_2 的关系为

$$\begin{cases}y_1=b_{11}z_1+b_{12}z_2,\\ y_2=b_{21}z_1+b_{22}z_2,\\ y_3=b_{31}z_1+b_{32}z_2.\end{cases}\tag{2}$$

要求 x_1, x_2 与 z_1, z_2 的关系,只需将(2)代入(1),得

$$\begin{cases}x_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1\\ \qquad +(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2,\\ x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1\\ \qquad +(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}\right) z_1 + \left(\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2}\right) z_2, \\ x_2 = \left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1}\right) z_1 + \left(\sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2}\right) z_2. \end{cases}$$

这个例若用矩阵乘法来算要简单得多.

定义 4.1.2 **设矩阵** $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{ij})_{nt}$, **称矩阵** $C = (c_{ij})_{st}$ **是** A **与** B **的乘积,记作**

$$A_{sn} \cdot B_{nt} = C_{st},$$

其中元素

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,s;\ j = 1,2,\cdots,t).$$

如上面例可用矩阵乘法表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(4) **代入**(3) **得**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

注意 **定义中** A **的列数必须等于** B **的行数时**, AB **才可乘**; **乘**

积 C 的行数等于 A 的行数, C 的列数等于 B 的列数; 乘积 C 的(i, j)元等于 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列元素对应相乘后相加 即

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,s; j = 1,2,\cdots,t). \end{aligned}$$

例 4.1.1 **设**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

那么

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\times 3 + 0\times(-2) + 3\times 0 & 1\times(-1) + 0\times 4 + 3\times 1 \\ 2\times 3 + (-1)\times(-2) + 0\times 0 & 2\times(-1) + (-1)\times 4 + 0\times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\times 1 + (-1)\times 2 & 3\times 0 + (-1)\times(-1) & 3\times 3 + (-1)\times 0 \\ -2\times 1 + 4\times 2 & -2\times 0 + 4\times(-1) & -2\times 3 + 4\times 0 \\ 0\times 1 + 1\times 2 & 0\times 0 + 1\times(-1) & 0\times 3 + 1\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 6 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 4.1.2 **设**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

那么

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&3\\3&6&0\end{bmatrix}.$$

但是 BA **不可乘**.

例 4.1.3

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

例 4.1.4

$$\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16&-32\\8&16\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}2&4\\-3&-6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&4\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

例 4.1.5

$$[a_1\ \ a_2\ \cdots\ \ a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}=\left[\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right];$$

$$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}[a_1\ \ a_2\ \cdots\ \ a_n]=\begin{bmatrix}b_1a_1&b_1a_2&\cdots&b_1a_n\\b_2a_1&b_2a_2&\cdots&b_2a_n\\\cdots&\cdots&&\cdots\\b_na_1&b_na_2&\cdots&b_na_n\end{bmatrix}.$$

例 4.1.6　**一般线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{sn},$$

n **个未知量用矩阵表示为**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n1}.$$

常数列用矩阵表示为

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_s \end{bmatrix}_{s1}.$$

那么线性方程组可用矩阵乘法表示为

$$A_{sn}X_{n1} = b_{s1}.$$

亦称矩阵方程.

注意 1　矩阵乘法没有交换律.**因为** AB **可乘**, BA **未必可乘**(**例** 4.1.2); AB **可乘**, BA **也可乘**, **但** AB **与** BA **阶数未必相同**(**例** 4.1.5); AB **可乘**, BA **也可乘**, AB **与** BA **同阶**, **但可能** $AB \neq BA$(**例** 4.1.4).

注意 2　$A\neq O, B\neq O$,可能 $AB=O$(例 4.1.4),即 $AB=O \backslash A=O$ 或 $B=O$.因此矩阵乘法没有消去律,即 $AB=AC, A\neq O \backslash B=C$.例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},$$

有

$$AB=AC,\quad A\neq O,$$

但

$$B\neq C.$$

矩阵乘法有

结合律

$$(AB)C=A(BC);$$

左分配律

$$A(B+C)=AB+AC;$$

右分配律

$$(A+B)C=AC+BC.$$

先证乘法结合律:设 $A=(a_{ij})_{sn}$, $B=(b_{ij})_{nt}$, $C=(c_{ij})_{tp}$.由矩阵乘法定义知$(AB)C$与$A(BC)$都是 $s\times p$ 矩阵.设 $BC=D=(d_{ij})_{np}$, $AB=E=(e_{ij})_{st}$.于是 $A(BC)=AD$,其中(i,j)元是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{t} b_{kl}c_{lj}\right).\tag{5}$$

另一方面,$(AB)C=EC$,其中(i,j)元是

$$\sum_{l=1}^{t} e_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}.\tag{6}$$

等式(5)和(6)右边的表达式只是求和次序不同.由预备知识知两个和号 $\sum$ 可交换.这就证明了 $A(BC)$与$(AB)C$对应位置元素都相

等.

例 4.1.7 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1&2\\4&3&-1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix},$$

验证矩阵乘法满足结合律.

解

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}0&1&2\\4&3&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-14\end{bmatrix};$$

$$(AB)C=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&2\\4&3&-1\end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&2\\8&5&-4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-14\end{bmatrix}.$$

然后证左分配律: 设 $A=(a_{ij})_{sn}$, $B=(b_{ij})_{nt}$, $C=(c_{ij})_{nt}$, 由矩阵加法、乘法定义知 $A(B+C)$ 是 $s\times t$ 的, $AB+AC$ 也是 $s\times t$ 的. $A(B+C)$ 的 (i,j) 元是

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj},\tag{7}$$

其中 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 是 AB 的 (i,j) 元, $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$ 是 AC 的 (i,j) 元. 所以(7)式最后表示 $AB+AC$ 的 (i,j) 元. 这就证明了 $A(B+C)$ 与 $AB+AC$ 的 (i,j) 元都相等.

最后,右分配律的证明留给读者作为练习.

例 4.1.8　设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

验证矩阵乘法满足右分配律.

解

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \{\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}\}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC + BC &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 2 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 & -11 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

n 阶矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为单位矩阵.记作 I_{nn} 或 I_n.在不至引起混淆的情况下也可以记作 I.由例 4.1.3 可以看出:一般地,对任意矩阵 A_{sn} 都有

$$I_{ss}A_{sn} = A_{sn};$$

$$A_{sn}I_{nn} = A_{sn}.$$

设 A 是一个 n 阶矩阵, m, s 是非负整数.定义

$$A^0 = I;$$

当 $m > 0$ 时,

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{m\text{个}}.$$

因为矩阵乘法有结合律,所以用数学归纳法可以证明

$$A^m \cdot A^s = A^{m+s};$$
$$(A^m)^s = A^{ms}$$

(证明略).因为矩阵乘法没有交换律,所以对于两个同阶矩阵 A, B 来说,一般地

$$(AB)^m \neq A^m B^m.$$

3.数与矩阵乘法

先看一个实例.下面是产品成本表格:

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
A_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	a_{sn}

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 表示产品名称; $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示产品型号; a_{ij}(单位:元)表示 A_i 产品 B_j 型号的生产成本.由于采用先进生产技术和改进生产流程管理,成本普遍下降 20%.那么新的成本表可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0.8a_{11} & 0.8a_{12} & \cdots & 0.8a_{1n} \\ 0.8a_{21} & 0.8a_{22} & \cdots & 0.8a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0.8a_{s1} & 0.8a_{s2} & \cdots & 0.8a_{sn} \end{bmatrix}.$$

简单记作

$$0.8\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}.$$

定义 4.1.3　数 k 乘矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 中每一个元素,所得矩阵

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{bmatrix},$$

称数 k 与矩阵 A 的乘积,记作 kA.

例如,

$$3\cdot\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times(-1) \\ 3\times 0 & 3\times 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

用定义可以证明数与矩阵的乘法(简称数量乘法) 有以下规律:

$$\begin{aligned} 1\cdot A &= A, \\ (k+l)A &= kA+lA, \\ k(A+B) &= kA+kB, \\ k(lA) &= (kl)A, \\ k(AB) &= (kA)B=A(kB). \end{aligned}$$

n 阶矩阵

$$kI=\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

称为数量矩阵.

例如

$$5I_{22}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

是一个 2 阶数量矩阵.设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

那么

$$5I\cdot A=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\4&0&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5&-10&15\\20&0&-5\end{bmatrix}$$
$$=5\begin{bmatrix}1&-2&3\\4&0&-1\end{bmatrix}$$
$$=5A.$$

可见数量矩阵在矩阵乘法中起的作用相当于用数去乘矩阵.对任意矩阵 A_{sn} 都有

$$(kI)_{ss}A_{sn}=kA_{sn};$$
$$A_{sn}(kI)_{nn}=kA_{sn}.$$

特别地,n 阶数量矩阵 kI 与任意 n 阶矩阵 A 相乘,是可交换的.即

$$(kI)A=A(kI).$$

不难证明,同阶数量矩阵还有以下规律:

$$(kI)+(lI)=(k+l)I;$$
$$(kI)\cdot(lI)=(kl)I.$$

4.矩阵的转置

定义4.1.4 把 $s\times n$ 矩阵 A 的行与列互换,得到的 $n\times s$ 矩阵,称为 A 的转置矩阵,简称 A 的转置,记作 A^{T} 或 A'.即如果

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{bmatrix}_{sn},$$

那么

$$A^{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{ns}.$$

例如,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ 的转置 } A^{T}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix};$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{T}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}^{T}=(b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

例 4.1.9　**设**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

验证

$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}.$$

解

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

所以

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

矩阵的转置有以下规律:

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A;$$
$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}};$$
$$(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}};$$
$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

前三条规律用转置定义和矩阵加法、数与矩阵乘法法则可以证明(留给读者) .关于第 4 条规律,例 4.1.9 已经验证 .下面给出一般证明:

设 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{ij})_{nt}$ **.求证**: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

分析　从求证入手,根据矩阵相等定义,只需证明等式两边的矩阵行数相同、列数相同,对应位置元素都相等即可 .

证　AB **是** $s\times t$ **的,所以** $(AB)^{\mathrm{T}}$ **是** $t\times s$ **的** .B^{T} **是** $t\times n$ **的**, A^{T} **是** $n\times s$ **的,所以** $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ **是** $t\times s$ **的 这就证明了** $(AB)^{\mathrm{T}}$ **与** $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ **行数相同,列数也相同 .以下证明它们的** (i, j) **元相等** .$(AB)^{\mathrm{T}}$ **的** (i, j) **元是** AB **的** (j, i) **元 即**

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}. \tag{8}$$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ **的** (i, j) **元等于** B^{T} **的第** i **行元素与** A^{T} **的第** j **列元素对应乘积之和 .而** B^{T} **的第** i **行元素就是** B **的第** i **列元素**; A^{T} **的第** j **列元素就是** A **的第** j **行元素 所以** $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ **的** (i, j) **元等于**

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}. \tag{9}$$

(8) 等于(9),其中 $i=1,2,\cdots,t$, $j=1,2,\cdots,s$.证完.

第 4 条规律可以推广到多个可乘矩阵情形.例如

$$(A_{sn}B_{nt}C_{tp})^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

第 4 条规律称为倒置法则.

定义 4.1.5　如果 $A^{\mathrm{T}}=A$,称 A 为对称矩阵.

例如,
$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$
都是对称矩阵.

由定义可知: n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij}=a_{ji}$.

例 4.1.10　设 A, B 是同阶对称矩阵.求证: $A+B$, kA 也是对称矩阵.

证　根据对称矩阵定义和矩阵转置运算规律,

$$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=A+B;$$
$$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}=kA.$$

注意:同阶对称矩阵 A, B 的乘积 AB,未必是对称矩阵.例如

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\0&-1\end{bmatrix}.$$

最后证明一个很有用的定理.

定理 4.1.1　两个 n 阶矩阵乘积的行列式等于两个矩阵行列式的乘积,即

$$|AB|=|A|\cdot|B|.$$

例如,
$$A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix},$$
$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&2\\2&3\end{bmatrix},$$
$$|AB|=\begin{vmatrix}8&2\\2&3\end{vmatrix}=20;$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad |B| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

确有

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

定理 4.1.1 的证明 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

记

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = C,$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

作一个 $2n$ 阶矩阵

$$D = \begin{bmatrix} A & O \\ -I & B \end{bmatrix}.$$

据定理 1.5.2

$$|D| = \begin{vmatrix} A & O \\ -I & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

以下只需证明 $|C| = |D|$.

$$|D|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

对 $|D|$ **的列用行列式性质** 5: **将第** 1 **列的** b_{11} **倍,第** 2 **列的** b_{21} **倍**, $\cdots$,**第** n **列的** b_{n1} **倍,都加到第** $n+1$ **列上去,这时**

$$|D|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

然后将上面这个行列式第 1 **列的** b_{12} **倍,第** 2 **列的** b_{22} **倍**, $\cdots$, **第** n **列的** b_{n2} **倍,都加到第** $n+2$ **列上去**; $\cdots$.**一般地,将第** 1 **列的** b_{1j} **倍,第** 2 **列的** b_{2j} **倍**, $\cdots$, **第** n **列的** b_{nj} **倍都加到第** $n+j$ **列上去** $(j=1,2,\cdots,n)$.

$$|D|=\begin{vmatrix} A & C \\ -I & O \end{vmatrix}=(-1)^{n^2}\begin{vmatrix} C & A \\ O & -I \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n^2}|C||-I|=(-1)^{n^2}|C|(-1)^n=|C|.$$

这就证明了 $|C|=|D|$ **即** $|AB|=|A|\cdot|B|$.

一般地,对于 n **阶矩阵** $A_1, A_2, \cdots, A_s$ **有**

$$|A_1\ A_2\ \cdots\ A_s| = |A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

练　习　4.1

1. **解矩阵方程** $A + X - 2B = O$,**其中**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. **设**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

验证:

$$B + C = C + B,$$
$$(B + C) + D = B + (C + D),$$
$$A(B - C) = AB - AC,$$
$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

3. **求下列矩阵乘积(空白处元素为“0”)**:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & b_1 & \\ & & c_1 \end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$;

(7) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(9) $\begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(10) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(11) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(12) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(13) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(14) $\begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(15) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(16) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(17) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$;

(18) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(19) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

(20) $(x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

(21) $(1\ 2\ 3\ 4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(22) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}(1\ 2\ 3\ 4)$.

4. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

求$(AB)^2$ 和 A^2B^2.

5. 设

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

求 $Q^{\mathrm{T}}Q$ 和 QQ^{T}.

6. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A^2 和 A^n(n 为正整数).

7. 设 λ 是一个未知数.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

求 $\lambda I - A$.

§4.2　可逆矩阵

一元线性方程 $ax = b$,当 $a \neq 0$ 时有惟一解 $x = a^{-1}b$.在数的运算中,除法可以实施的前提是除数 $a \neq 0$.$a \neq 0$ 是 a 有倒数 a^{-1} 的充要条件.a 的倒数(或称 a 的逆)是指与 a 相乘等于 1(单位)的那个数 a^{-1} 即 $aa^{-1} = 1$.解矩阵方程 $AX = C$.同样要讨论 A 是否可逆,即是否存在一个矩阵 B,使 $AB = BA = I$?

本节介绍可逆矩阵及其逆矩阵.它们在矩阵的理论和应用中起着重要的作用.

定义 4.2.1 对于 n 阶矩阵 A,如果存在 n 阶矩阵 B,使

$$AB = BA = I,$$

则称 A 是可逆矩阵,称 B 是 A 的逆矩阵,简称 A 的逆.

如果 A 可逆,则 A 只有一个逆.这是因为,如果 B_1, B_2 都是 A 的逆,即

$$AB_1 = B_1 A = I, \quad AB_2 = B_2 A = I.$$

那么

$$B_1 = B_1 I = B_1 (AB_2) = (B_1 A) B_2 = IB_2 = B_2.$$

既然可逆矩阵 A 的逆惟一,就将这惟一的逆矩阵记作 A^{-1}.

遇到一个 n 阶矩阵 A,如何判断它是否可逆?若可逆,怎么求 A^{-1}?在探讨这些问题之前先介绍"奇异矩阵","非奇异矩阵"和"A 的伴随矩阵".

每一个 n 阶矩阵 A 都对应一个 n 阶行列式 $|A|$,称为 A 的行列式.行列式 $|A|$ 的值只有等于零或不等于零两种可能.据此将 n 阶矩阵分成两类:如果 $|A| = 0$,则称 A 是奇异矩阵;如果 $|A| \neq 0$,则称 A 是非奇异矩阵.

定义 4.2.2 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$,由 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的矩阵

$$珮 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

称为 A 的伴随矩阵.

根据行列式按一行(列)展开定理 1.5.1 和定理 1.5.3,有

$$
AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix}
$$

$$
= |A| I .
$$

同理,$A^*A = |A| I$.

例 4.2.1　设矩阵

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} .
$$

(1) 判断 A 是奇异矩阵,还是非奇异矩阵?

(2) 求 A 的伴随矩阵 A^*;

(3) 验证 $AA^* = A^*A = |A| I$.

解　(1) 计算

$$
|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,
$$

所以 A 是非奇异矩阵.

(2) $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$$
A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,
$$

$$
A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,
$$

$$
A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,
$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 .$$

A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$(3)\quad AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = -I = |A| I,$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = -I = |A| I .$$

下面我们探讨前面提出的关于可逆矩阵的几个问题 .

分析 对任一 n 阶矩阵 A 总有

$$AA^* = A^*A = |A| I$$

成立 .如果 $|A| \neq 0$,那么就有

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=I$$

成立.可见$\frac{1}{|A|}A^*$就是A^{-1}.

定理4.2.1　n阶矩阵$A=(a_{ij})$可逆的充分必要条件是A为非奇异矩阵,且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*. \tag{1}$$

证　必要性　已知A可逆,则存在A^{-1}使$AA^{-1}=A^{-1}A=I$.由定理4.1.1,

$$|AA^{-1}|=|A^{-1}A|=|I|,$$

即有

$$|A||A^{-1}|=|A^{-1}||A|=1.$$

所以$|A|\neq 0$,即A为非奇异矩阵.

充分性　已知A为非奇异矩阵,则$|A|\neq 0$.可作一个矩阵

$$B=\frac{1}{|A|}A^*.$$

从而使

$$\begin{aligned}AB&=A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\frac{1}{|A|}(AA^*)\\&=\frac{1}{|A|}|A|I=I,\end{aligned}$$

同时,

$$\begin{aligned}BA&=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=\frac{1}{|A|}(A^*A)\\&=\frac{1}{|A|}\cdot|A|I=I.\end{aligned}$$

故A可逆,且$B=\frac{1}{|A|}A^*$就是A^{-1}.

例 4.2.2 **设**

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \quad (a_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n),$$

求证 A **可逆**, **且**

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1} & & & \\ & \dfrac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix}.$$

证 **因为** $a_i \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$, **所以**

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n \neq 0.$$

故 A **可逆** .**又因为**

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1} & & & \\ & \dfrac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_1 \frac{1}{a_1} & & & \\ & a_2 \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.
$$

所以

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}.
$$

例 4.2.3　**判断下列矩阵是否可逆,若可逆,试求其逆**.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.
$$

解　**因为** $|A| = 2 \neq 0$, $|B| = -1 \neq 0$, $|C| = 1 \neq 0$, **所以** A, B, C **都可逆**.**用公式**(1) **求得**

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&\\1&0&\\&&1\end{bmatrix},$$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1&&-k\\&1&\\&&1\end{bmatrix}.$$

因为矩阵乘法没有交换律,所以我们定义 A 为可逆矩阵时,要求 B 既满足 $AB=I$,又满足 $BA=I$.可是在实践上,当我们按公式(1)求出 A^{-1} 时,只要验证 $AA^{-1}=I$ 或 $A^{-1}A=I$ 中一个等式就够了.其道理我们用下面的例题来说明.

例 4.2.4 **已知对 n 阶矩阵 A,存在 n 阶矩阵 B,使 $AB=I$ 或 $BA=I$ 成立.求证 A 可逆,且 $B=A^{-1}$.**

证 **设** $AB=I$,**则** $|AB|=|A|\cdot|B|=|I|=1$,**于是** $|A|\neq0$,**故 A 可逆.记 A 的逆为 A^{-1},则有**

$$B=IB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}I=A^{-1}.$$

同理可证,若 $BA=I$,则也有 $B=A^{-1}$.

可逆矩阵就是其行列式不等于零的矩阵.因此用克莱姆法则解线性方程组将变得很简单.

例 4.2.5 **解线性方程组**

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=11,\\x_1-x_2=3,\\-x_1+2x_2+x_3=-1.\end{cases}$$

解 **记**

$$A=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}11\\3\\-1\end{bmatrix}.$$

那么线性方程组可以表示为矩阵方程

$$A_{33}X_{31}=b_{31}.$$

因为系数矩阵的行列式 $|A|=-1\neq 0$,所以 A 可逆.利用例 4.2.1 求出的 A 的伴随矩阵 A^* 和公式(1) 得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}.$$

方程 $AX=b$ 两边左乘 A^{-1},得

$$X=A^{-1}b,$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}.$$

一般地,对于矩阵方程 $A_{nn}X_{n1}=b_{n1}$,当 A 可逆时,有惟一解 $X=A^{-1}b$.

可逆矩阵的性质:

性质 1　若 A 可逆,则 A^{-1} 也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$.

证　因为 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.由可逆矩阵定义知 A 是 A^{-1} 的逆.

这个性质告诉我们 A 与 A^{-1} 互为逆矩阵.

性质 2　若 A 可逆,则 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

证　因为 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$,所以 $|A||A^{-1}|=|A^{-1}||A|=1$,故 $|A|$ 与 $|A^{-1}|$ 互为倒数.

性质 3　设 A,B 是两个同阶可逆矩阵,那么它们的乘积 AB 也可逆,且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证　因为 A,B 都可逆,所以行列式 $|A|\neq 0$, $|B|\neq 0$.推出 $|AB|=|A|\cdot|B|\neq 0$,故乘积 AB 可逆.又因为存在 A^{-1},B^{-1},所以有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

故$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

一般地，如果 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 是同阶可逆矩阵，则乘积 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆.且

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},$$

称倒置法则.

性质 4 若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，且$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证 因为

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

取转置

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I.$$

由可逆矩阵定义知$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

例 4.2.6 设 A, B, C 是同阶矩阵，且 A 可逆.证明

(1) 若 $AB = AC$，则 $B = C$;

(2) 若 $AB = O$，则 $B = O$.

证 (1) 已知 $AB = AC$，且 A 可逆.两边左乘 A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(AC), \\ (A^{-1}A)B &= (A^{-1}A)C, \\ IB &= IC, \\ B &= C. \end{aligned}$$

(2) 已知 $AB = O$，且 A 可逆.两边左乘 A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}O, \\ (A^{-1}A)B &= O, \\ IB &= O, \\ B &= O. \end{aligned}$$

练　习　4.2

1. **判断下列矩阵是否可逆:**

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ -1 & 3 & & \\ & & 4 & 2 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$.

2. **证明下列矩阵 A 可逆,且 $A^{-1} = A^{T}$.**

(1) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;

(2) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

3. **设矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

问 λ 为何值时,$\lambda I - A$ 为奇异矩阵?

4. **证明下列 n 阶矩阵 A, B, C 均可逆,并验证后者是它的逆.**

$$
(1)\quad A=\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & c & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列} &
\end{array}\ (c\neq 0),
$$

$$
A^{-1}=\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & & & \frac{1}{c} & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行;} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列} &
\end{array}
$$

$$
(2)\quad B=\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\text{第 } i \text{ 列}\qquad\qquad \text{第 } j \text{ 列} &
\end{array},
$$

$$
B^{-1}=B;
$$

$$(3)\quad C=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行},\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \text{第 } j \text{ 列} & \end{array}$$

$$C^{-1}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&-k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}.\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \text{第 } j \text{ 列} & \end{array}$$

5. **解下列矩阵方程**:

(1) $\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}5&0&10\\20&-5&15\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}6\\1\\6\end{bmatrix}$.

6. **已知** n **阶矩阵** A **的行列式** $|A|=a$.**求行列式** $|2A|$ **的值**.

7. **设** A **是** n **阶**$(n\geq 2)$**可逆矩阵**,**飒是** A **的伴随矩阵**.**求证** $|$**飒**$|=|A|^{n-1}$.

§4.3　分 块 矩 阵

在实际工作中常遇到大规模稀疏矩阵.**对这种矩阵常采用分块的办法进行计算**.**例如**,**设**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&-1&1&0\\3&4&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\1&3&3&0\\-1&2&0&3\end{bmatrix}.$$

求 $A+B$.可令

$$A_1=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}.$$

这样 A,B 可写成分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix}I_2&O_2\\A_1&I_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2I_2&O_2\\B_1&3I_2\end{bmatrix}.$$

计算 $A+B$ 可以块为“元素”,作矩阵加法.

$$A+B=\begin{bmatrix}I_2+2I_2&O_2+O_2\\A_1+B_1&I_2+3I_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}3&0&0&0\\0&3&0&0\\\hline 3&2&4&0\\2&6&0&4\end{array}\right].$$

将一个矩阵分成若干块(称为子块或子阵),以块为元素的矩阵称为分块矩阵.

矩阵如何分块,要看实际需要,看元素稀疏分布.不过要注意的是,分块后要以块为元素进行计算.这种计算必须符合矩阵运算可施条件及运算法则.例如两个可加矩阵要分块加,那么两个矩阵分块方法必须一致,以保证对应块可加.分块减法也如是.数量乘法对矩阵分块方法没有要求.因为分块后,数与矩阵相乘转化为数与每一子块相乘.仍以开篇例中 A,B 来说,

$$A-B=\begin{bmatrix}I_2-2I_2&O_2-O_2\\A_1-B_1&I_2-3I_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\\hline 1&-4&-2&0\\4&2&0&-2\end{array}\right],$$

$$kA=k\begin{bmatrix}I_2&O_2\\A_1&I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kI_2&kO_2\\kA_1&kI_2\end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ \hline 2k & -k & k & 0 \\ 3k & 4k & 0 & k \end{array}\right].$$

下面特别来讲一下矩阵分块乘法.先看例,设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{4\times5}.$$

求 AB **.将** A **分块**

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I_{11} & O_{12} \\ A_{21} & I_{22} \end{bmatrix}.$$

为了使 B **分块后,每一子块与** A **的子块可乘.** B **行的分法必须与** A **列的分法一致.至于** B **列的划分可随意.即**

$$B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

A, B **以块为元素,都可视为"2 阶"矩阵,于是可按两个 2 阶矩阵那样作乘法:**

$$AB = \begin{bmatrix} I_{11} & O_{12} \\ A_{21} & I_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11}B_{11} + O_{12}B_{21} & I_{11}B_{12} + O_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + I_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + I_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{21}B_{11} + B_{21} & A_{21}B_{12} + B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{cc|ccc} 5 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 11 & 0 & 6 & 8 & 12 \\ 27 & -6 & -6 & 18 & 3 \end{array}\right].$$

读者可将 4×4 **的** A **与** 4×5 **的** B **直接相乘,结果与分块计算一样**.

需要注意的是,两个可乘矩阵 A_{mn} **与** B_{np} **要分块相乘时,** A **列的分法必须与** B **行的分法一致.一般地,设** $A=(a_{ij})_{mn}$, $B=(b_{ij})_{np}$, **将** A, B **分成一些子块如下:**

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}_{r\times s} \end{array},$$

$$B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \cdots \\ n_s \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}_{s\times t} \end{array}.$$

其中 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ **表示它右边小矩阵块的行数,** $m_1+m_2+\cdots+m_r=m$; A **上方** $n_1, n_2, \cdots, n_s$ **表示它下面小矩阵块的列数,** $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$; B **中** $n_1, n_2, \cdots, n_s$ **表示它右边小矩阵块的行数;** $p_1, p_2, \cdots, p_t$ **表示它下面小矩阵块的列数,** $p_1+p_2+\cdots+p_t=p$, **这时以块为元素,** A **是** $r\times s$ **的,** B **是** $s\times t$ **的.按矩阵乘法规则,** AB **乘积以块为元素是** $r\times t$ **的,即**

$$AB=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix}_{r\times t} \end{array},$$

其中子块 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}(i = 1,2,\cdots, r, j = 1, 2,\cdots, t)$.

例 4.3.1　设 A_i 是 $n_i \times n_i$ 阶可逆矩阵, $i = 1,2,\cdots, s$,则

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

可逆,且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

$s\times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的每一行可以看成一个 n 维行向量 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2},\cdots, a_{in})(i = 1,2,\cdots, s)$; 每一列 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j},\cdots, a_{sj})^{\mathrm{T}}(j = 1,2,\cdots, n)$ 可以看成一个 s 维列向量.将 A 分块记为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

定义 4.3.1　矩阵 A 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩数称为 A 的行秩;列向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的秩数称为 A 的列秩.

例 4.3.2　设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_s \end{bmatrix},$$

其中 $\beta_i=(b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})\ (i=1,2,\cdots,s)$.那么

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{s} a_{1i}\beta_i \\ \sum_{i=1}^{s} a_{2i}\beta_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{s} a_{mi}\beta_i \end{bmatrix}.$$

这说明 AB 乘积的行向量组是 B 的行向量组的线性组合.根据练习 3.4 第 6 题,行秩$(AB)\leq$行秩(B).

如果设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s),$$

其中

$$\alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,s),$$

那么

$$AB=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{s} b_{j1} \alpha_j, \sum_{j=1}^{s} b_{j2} \alpha_j, \cdots, \sum_{j=1}^{s} b_{jn} \alpha_j \right].$$

这说明 AB 乘积的列向量组是 A 的列向量组的线性组合.因此,列秩$(AB) \leq$ 列秩(A).

例 4.3.3 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 分块如下

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),$$

其中 $\beta_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$,那么

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n);$$

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \cdots & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}.$$

例 4.3.4 设 n 阶矩阵 A 分块如下

$$A = \begin{bmatrix} B_{rr} & D \\ O & C_{ss} \end{bmatrix},$$

其中 B 是 $r \times r$ 子矩阵, C 是 $s \times s$ 子矩阵, $r + s = n$.证明 A 是非

奇异矩阵的充分必要条件是 B, C 均为非奇异矩阵.并求 A^{-1}.

证 A 非奇异的充分必要条件是

$$|A| = \begin{vmatrix} B & D \\ O & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0,$$

即同时有 $|B| \neq 0$, $|C| \neq 0$,亦即 B, C 均非奇异.设

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} X & Z \\ W & Y \end{bmatrix}.$$

其中子矩阵 X, Y 分别与 B, C 同阶.于是

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} B & D \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Z \\ W & Y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BX + DW & BZ + DY \\ OX + CW & OZ + CY \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} BX + DW & BZ + DY \\ CW & CY \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{rr} & O \\ O & I_{ss} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由对应块相等得矩阵方程组

$$\begin{cases} BX + DW = I_{rr} & ① \\ BZ + DY = O & ② \\ CW = O & ③ \\ CY = I_{ss} & ④ \end{cases}$$

④两边左乘 C^{-1},得 $Y = C^{-1}$;③两边左乘 C^{-1},得 $W = O$;将 $W = O$ 代入①,得 $BX = I$,继而两边左乘 B^{-1},得 $X = B^{-1}$;将 $Y = C^{-1}$ 代入②,得 $BZ = -DC^{-1}$,继而两边左乘 B^{-1},得 $Z = -B^{-1}DC^{-1}$,由此得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

练 习 4.3

1. 已知

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&0&0&1\\0&3&0&1\\0&0&3&1\\0&0&0&4\\0&0&0&5\end{bmatrix}.$$

用分块方法计算 $A+B$.

2. 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

其中 $\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{nj}\end{bmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n)$,

$$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$$

其中 $\beta_j=\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\cdots\\b_{nj}\end{bmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

用分块方法计算 $A+B$ 和 kA;并证明

$$\text{列秩}(A+B)\leq\text{列秩}(A)+\text{列秩}(B).$$

3. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)$，$\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)$，$\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)$，

$$P_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 P_1A，证明 P_1A 的行向量组与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价；

(2) 求 P_2A，证明 P_2A 的行向量组与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价；

(3) 求 P_3A，证明 P_3A 的行向量组与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价.

4. 设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

其中 $\beta_1=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}}$.

$$Q_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix},\quad Q_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_3=\begin{bmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 AQ_1，证明 AQ_1 的列向量组与向量组 β_1,β_2,β_3 等价；

(2) 求 AQ_2，证明 AQ_2 的列向量组与向量组 β_1,β_2,β_3 等价；

(3) 求 AQ_3，证明 AQ_3 的列向量组与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价 .

5．设 n 阶分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} O & B_{rr} \\ C_{ss} & O \end{bmatrix},$$

其中 $r + s = n$, B, C 均可逆 .证明 A 可逆，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

6．设 n 阶分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} B_{rr} & O \\ D & C_{ss} \end{bmatrix},$$

其中 $r + s = n$.证明 A 可逆的充分必要条件是 B, C 均可逆，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

§4.4　等 价 矩 阵

定义 4.4.1　如果矩阵 A 经过若干次初等变换能够得到矩阵 B，则称矩阵 A 等价于矩阵 B，记作 A ü B .

等价是矩阵间的一种关系 .可以证明这种关系具有

(1) 反身性: A ü A;

(2) 对称性: 若 A ü B，则 B ü A;

(3) 传递性: 若 A ü B, B ü C，则 A ü C

(证明留给读者) .

为了便于讨论矩阵的等价关系，我们把对矩阵的初等变换用矩阵乘法来实现 .先认识初等矩阵 .

定义 4.4.2 将单位矩阵 I 作一次初等变换,得到的矩阵称为**初等矩阵**.

1. 对换单位矩阵的第 i 行(列)与第 j 行(列),得到的矩阵

$$P[i,j]=\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

称为换法矩阵;

2. 用非零数 c 乘以单位矩阵 I 的第 i 行(列),得到的矩阵

$$P[i(c)]=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & c & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

称为倍法矩阵;

3. 把单位矩阵 I 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列上去),得到的矩阵

$$P[i,j(k)] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}, \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

称为消法矩阵.

初等矩阵都是可逆的(因为它们的行列式均不等于零),而且它们的逆矩阵也是初等矩阵:

$$P[i,j]^{-1} = P[i,j],$$

$$P[i(c)]^{-1} = P[i(c^{-1})] \quad (c \neq 0),$$

$$P[i,j(k)]^{-1} = P[i,j(-k)].$$

对矩阵施行初等变换可以用乘上初等矩阵来实现.

定理 4.4.1　设 $A=(a_{ij})$ 是 $s\times n$ 矩阵,对 A 左乘一个 s 阶初等矩阵,相当于对 A 施行一次初等行变换;对 A 右乘一个 n 阶初等矩阵,相当于对 A 施行一次初等列变换.

证　将 A 按行表示为分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix},$$

其中

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \quad (i = 1,2,\cdots,s).$$

那么

$$P[i,j]A=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$P[i(c)]A=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \cdots\\ c\boldsymbol{\alpha}_i\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}\quad (c\neq 0)$$

$$P[i,j(k)]=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_s\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

将 A 按列表示为分块矩阵

$$A=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$$

其中

$$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \cdots\\ a_{sj}\end{bmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

那么

$$AP[i,j] = (\beta_1,\cdots,\underset{\text{第 } i \text{ 列}}{\beta_j},\cdots,\underset{\text{第 } j \text{ 列}}{\beta_i},\cdots,\beta_n),$$

$$AP[i(c)] = (\beta_1,\cdots,\underset{\text{第 } i \text{ 列}}{c\beta_i},\cdots,\beta_n),\ (c\neq 0)$$

$$AP[i,j(k)] = (\beta_1,\cdots \underset{\text{第 } i \text{ 列}}{\beta_i},\cdots,\underset{\text{第 } j \text{ 列}}{\beta_j + k\beta_i},\cdots,\beta_n)$$

推论 4.4.1　矩阵 $A_{sn} \cong B_{sn}$ 的充分必要条件是存在 s 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使

$$P_l \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B.$$

因为初等矩阵是可逆的,且可逆矩阵乘积仍是可逆的.令 $P = P_l \cdots P_2 P_1$, $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$,得

推论 4.4.2　矩阵 $A_{sn} \cong B_{sn}$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P_{ss}, Q_{nn} 使

$$PAQ = B.$$

定理 4.4.2　任一 $s\times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 等价于如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{sn}$$

称为 A 的等价标准形.其中主对角线上元素“1”的个数 $r =$ 秩(A), $0 \leq r \leq \min\{s, n\}$.

证　如果 $A = 0$,则 A 已是等价标准形;如果 $A \neq 0$,总可经行的换法变换,列的换法变换,使 A 左上角元素不等于零.因此不妨设 $a_{11} \neq 0$.将第1行的 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 i 行上去($i = 2,3,\cdots,s$),得

$$A \cong \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \cdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

再将后者第 1 列的 $-a_{1j}a_{11}^{-1}$ 倍加到第 j 列上去($j = 2,3,\cdots,n$),得

$$A \cong \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

其中 A_2 是$(s-1)\times(n-1)$矩阵.如果 $A_2 = 0$,则只需用 a_{11}^{-1} 乘最后这个矩阵第 1 行,即得 A 的等价标准形.如果 $A_2 \neq 0$,仿上继续进行初等变换.由于 s, n 是有限数.因此总有

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{sn} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} r\text{个}$$

基于定理 2.2.1,初等变换不改变矩阵的秩.等价标准形中不为零子式最高阶数为 r.所以秩$(A) = r$.

矩阵 A_{sn} 的秩数 r 是在等价关系下的不变量.数域 P 上 $s\times n$ 矩阵全体按等价分类,共有 $1+\min\{s,n\}$ 类.

例 4.4.1 用初等变换化下列矩阵 A 为标准形,并求 A 的秩数.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -8 & -6 \end{bmatrix}.$$

解

$$A \xrightarrow[\text{④}-\text{①}]{\substack{\text{②}-2\text{①}\\ \text{③}-4\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & -5 & 6 & -12 & -19 \\ 0 & -1 & 3 & -11 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{④}-3\text{①}\\ \text{⑤}-4\text{①}}]{\substack{\text{②}-2\text{①}\\ \text{③}+\text{①}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \\ 0 & -5 & 6 & -12 & -19 \\ 0 & -1 & 3 & -11 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{②④}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -11 & -10 \\ 0 & -5 & 6 & -12 & -19 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 11 & 10 \\ 0 & -5 & 6 & -12 & -19 \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+4\text{②}]{\text{③}+5\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -9 & 43 & 31 \\ 0 & 0 & -9 & 43 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{④}-11\text{②}\\ \text{⑤}-10\text{②}}]{\text{③}+3\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 43 & 31 \\ 0 & 0 & -9 & 43 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④}-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 43 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{9}③}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&43&31\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[⑤-31③]{④-43③}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

最后一个矩阵为 A **的等价标准形;秩**$(A)=3$.

推论 4.4.3 **设** $A=(a_{ij})$ **是** $s\times n$ **矩阵.则**

$$\text{行秩}(A)=\text{列秩}(A)=\text{行列式秩}(A).$$

证 **根据练习** 3.2 **第** 5 **题,矩阵** A **经过初等行变换,行秩不变;** A **经过初等列变换,列秩不变.因为** A **等价于标准形,而标准形的行秩等于列秩,也等于行列式秩.所以**

$$\text{行秩}(A)=\text{列秩}(A)=\text{行列式秩}(A).$$

例 4.3.2 **可叙述为秩**$(AB)\le\min\{$**秩**(A),**秩**$(B)\}$.

定理 4.4.3 n **阶矩阵** A **可逆的充分必要条件为** A **等价于单位矩阵** I.

证 n **阶矩阵** A **可逆**$\longrightarrow A$ **的行列式** $|A|\neq 0\longrightarrow$ **行列式秩**$(A)=n\longrightarrow A\cong I$.

推论 4.4.4 n **阶矩阵** A **可逆的充分必要条件是** A **等于一些初等矩阵的乘积**.

证 n **阶矩阵** A **可逆的充分必要条件是** $A\cong I$ **即** A **经过一系列初等变换可以化成单位矩阵,而初等变换可用乘初等矩阵实现,所以存在** n **阶初等矩阵** $P_1,P_2,\cdots,P_s$ **和** $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$ **使**

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=I.$$

因为初等矩阵可逆,所以由上式可得

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}IQ_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}.$$

而初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵,所以可逆矩阵 A 等于一些初等矩阵乘积 .

推论 4 .4 .5　设 A 是 n 阶可逆矩阵,则对任意矩阵 B_{ns} 和 C_{sn} 都有秩(AB) = 秩(B),秩(CA) = 秩(C) .

在解矩阵方程时,常需要求可逆矩阵 A 的逆 .用 A 的伴随矩阵飒求 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$飒,要计算 n 阶行列式 $|A|$,还要计算 n^2 个 $n-1$ 阶代数余子式 A_{ij} .当矩阵 A 的阶数较高时,求 A^{-1} 的计算工作量是相当大的 .下面我们介绍一种用初等变换求 A^{-1} 的方法:

设 n 阶矩阵 A 可逆,则存在 A^{-1},且 A^{-1} 也可逆 .因此 A^{-1} 等于一些初等矩阵 $P_s, P_{s-1}, \cdots, P_2, P_1$ 的乘积

$$A^{-1} = P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 .$$

原理:

$$A^{-1} A = I$$

$$P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A = I,$$

$$P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 I = A^{-1} .$$

对 A, I 依次左乘同样的初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_{s-1}, P_s$,相当于对 A, I 作一系列同样的初等行变换 .把 A 化为 I 时, I 就化成了 A^{-1} .即有求 A^{-1} 方法:

$$(A \quad I) \xrightarrow{\text{仅作初等行变换}} (I \quad A^{-1}) .$$

例 4.4.2　设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

用初等变换求 A^{-1} .

解

$$
(A \quad I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{①②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{② - 2①\\ ③ + ①}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{②③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{① + ②\\ ③ - 4②}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\substack{① + ③\\ ② + ③}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{(-1)③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right]
$$

$$
= (I \quad A^{-1}),
$$

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.
$$

读者可以验算 $AA^{-1} = I$ **或** $A^{-1}A = I$.

练 习 4.4

1. 数域 P 上全体 4 阶矩阵按等价分类,共有多少个等价类?写出每一类的等价标准形.

2. 总结 n 阶矩阵 A 可逆,有哪些充分必要条件?

3. 用初等变换求下列矩阵的等价标准形,并指出矩阵的秩数.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -2 & -5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$.

4. 用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. **解矩阵方程**:

(1) $AX = B$,**其中**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) $AX + 2B = C$,**其中**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}.$$

本章复习提纲

1. **矩阵运算**

(1) **运算法则**.

① **加法**: $(a_{ij})_{sn} + (b_{ij})_{sn} = (a_{ij} + b_{ij})_{sn}$.

② **乘法**: $(a_{ij})_{sn} \cdot (b_{ij})_{nt} = (c_{ij})_{st}$,**其中** $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i = 1, 2, \cdots, s$; $j = 1, 2, \cdots, t$.

③ **数量乘法**: $k(a_{ij})_{sn} = (ka_{ij})_{sn}$.

④ **转置**: **若** $A = (a_{ij})_{sn}$,**则**

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}_{ns}.$$

(2) **矩阵运算有以下运算律**:

$$A + B = B + A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(AB)C = A(BC),$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC,$$
$$1A = A,$$
$$(k + l)A = kA + lA,$$
$$k(A + B) = kA + kB,$$
$$k(lA) = (kl)A,$$
$$k(AB) = (kA)B = A(kB),$$
$$(A^{T})^{T} = A,$$
$$(A + B)^{T} = A^{T} + B^{T},$$
$$(kA)^{T} = kA^{T},$$
$$(AB)^{T} = B^{T}A^{T}.$$

一般地,**对于可乘矩阵** $A_1, A_2, \cdots, A_s$ **有**

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)^{T} = A_s^{T} \cdots A_2^{T} A_1^{T}.$$

注意　　矩阵乘法没有交换律和消去律 即一般地

$$AB \neq BA,$$
$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \\ A \neq 0 \end{array}\right\} \backslash\ B = C.$$

(3) **几种特殊矩阵的运算**.

① **零矩阵、负矩阵及单位矩阵**:

$$A + O = A,$$
$$A + (-A) = O,$$
$$A - B = A + (-B),$$
$$I_{ss}A_{sn} = A_{sn}I_{nn} = A_{sn}.$$

若 A, B **为同阶方阵**, m, n **为非负整数**, **则**

$$A^0 = I,$$
$$A^m \cdot A^n = A^{m+n},$$
$$(A^m)^n = A^{mn}.$$

但$(AB)^n \neq A^n B^n$.

② **对角矩阵**:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & & & \\ & a_2 + b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n + b_n \end{bmatrix},$$

$$k\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & & & \\ & ka_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & ka_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

③ **数量矩阵** kI: **对任意矩阵** A_{sn}, **有**

$$(kI)_{ss} A_{sn} = kA_{sn},$$

$$A_{sn}(kI)_{nn} = kA_{sn}.$$

④ 上三角形矩阵 A 和下三角形矩阵 B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

kA, kB 仍是三角形矩阵;两个上(下) 三角形矩阵之和或乘积仍是上(下) 三角形矩阵 .

2．几个定理

(1) 若 A, B 是同阶方阵,则 $|AB| = |A|\cdot|B|$.

(2) 对于任一矩阵 A_{sn},有行秩(A) = 列秩(A) = 行列式秩(A) .

(3) 对于可加矩阵 A, B,有秩($A + B$) $\leq$ 秩(A) + 秩(B) .

(4) 对于任意两个可乘矩阵 A_{sn}, B_{nt}, 有秩(AB) $\leq$ min{秩(A),秩(B)} .

(5) 设 A 是 n 阶可逆矩阵 对任意 $n\times s$ 矩阵 B 和 $s\times n$ 矩阵 C,有秩(AB) = 秩(B),秩(CA) = 秩(C) .

3．矩阵的分块运算

两个可加矩阵,分块方法一致,可按对应块相加 .

数 k 与任意分块矩阵相乘,等于用数 k 乘每一个子块 .

A_{sn} 与 B_{nt} 分块相乘, A 列的分法必须与 B 行的分法一致,然后以块为“元素”,按矩阵乘法规则相乘 .

4．可逆矩阵及其逆矩阵

(1) 定义: 对于 n 阶矩阵 A,如果存在 n 阶矩阵 B,使 $AB = BA = I$,则称 A 是可逆矩阵,称 B 是 A 的逆矩阵,记作 $B = A^{-1}$.

(2) **逆矩阵性质**.

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$
$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T},$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

一般地,**对于** n **阶可逆矩阵** $A_1, A_2, \cdots, A_s$,**有**

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

(3) n **阶矩阵** A **可逆的充分必要条件**:

① A **可逆**$\longrightarrow$$A$ **是非奇异矩阵**(**即** $|A| \neq 0$);

② A **可逆**$\longrightarrow$$A$ **的行**(**列**) **向量组线性无关**;

③ A **可逆**$\longrightarrow$$A$ **可经过一系列初等变换化成单位矩阵** I(**即** A ü I);

④ n **阶矩阵** A **可逆**$\longrightarrow$**秩**$(A) = n$;

⑤ A **可逆**$\longrightarrow$$A$ **等于一些初等矩阵乘积**.

(4) **逆矩阵求法**

① **用** A **的伴随矩阵飒求** A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{飒} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

② **用初等行变换求** A^{-1}

$$(AI) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (IA^{-1}).$$

5. **矩阵的等价**

(1) **初等变换与初等矩阵**:

① **单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵**.**其中**

$$P[i,j]=\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&& \text{第 } i \text{ 列} &&&& \text{第 } j \text{ 列} &&& \end{array} &
\end{array}$$

称为换法矩阵;

$$P[i(c)]=\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& c &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array} \quad (c \neq 0)$$

称为倍法矩阵;

$$P[i,j(k)]=\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 && k && \\
&&& \ddots &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} &&&& \text{第 } j \text{ 列} && \end{array} &
\end{array}$$

称为消法矩阵.

初等矩阵是可逆的,其逆矩阵也是初等矩阵:

$$P[i,j]^{-1} = P[i,j];$$

$$P[i(c)]^{-1} = P[i(c^{-1})] \quad (c \neq 0);$$

$$P[i,j(k)]^{-1} = P[i,j(-k)].$$

② 矩阵 A_{sn} 左乘一个 s 阶初等矩阵,相当于对 A 施行一次初等行变换; A_{sn} 右乘一个 n 阶初等矩阵,相当于对 A 施行一次初等列变换.

(2) 如果矩阵 A 经过若干次初等变换得到 B,则称 A 等价于 B,记作 $A \cong B$.

(3) 矩阵的等价关系具有:

① 反身性: $A \cong A$;

② 对称性: 如果 $A \cong B$,则 $B \cong A$;

③ 传递性: 如果 $A \cong B$, $B \cong C$,则 $A \cong C$.

(4) 任一矩阵 A_{sn} 都可经初等变换化成等价标准形

$$\begin{bmatrix} I_{rr} & O \\ O & O \end{bmatrix}_{sn},$$

其中 r = 秩(A).

(5) 矩阵等价的充分必要条件:

① $A_{sn} \cong B_{sn} \longrightarrow$ 存在 s 阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使

$$P_l \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B.$$

② $A_{sn} \cong B_{sn} \longrightarrow$ 存在 s 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使 $PAQ = B$.

③ $A_{sn} \cong B_{sn} \longrightarrow A, B$ 有相同的等价标准形.

④ $A_{sn} \cong B_{sn} \longrightarrow$ 秩(A) = 秩(B).

复 习 题 四

1. **解矩阵方程**:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$;

(2) $X\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

(3) $AX - B = 2C$, **其中**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. **求下列矩阵的等价标准形和秩数**:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. **设**

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,证明 A 可逆,并求 A^{-1}.

4．设 A, D, P 为同阶方阵,且 P 可逆,满足 $P^{-1}AP=D$.求证 $P^{-1}A^nP=D^n$(n 是正整数).

5．设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}12 & -14 & -3\\ 13 & -15 & -3\\ -16 & 20 & 5\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $P^{-1}AP$;

(2) 求 A^{100}.

6．若 A, B 是对称矩阵.证明:乘积 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

7．设 $A^n=O$(整数 $n>1$).求证:$I-A$ 可逆,且 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}$.

8．设 $A=(a_{ij})_{sn}$, $B=(b_{ij})_{nt}$,且 $AB=O$.

(1) 证明:B 的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的解;

(2) 如果秩$(A)=r<n$.证明:秩$(B)\leq n-r$.

9．设 A 是 n 阶矩阵.证明:存在 n 阶非零矩阵 B,使 $AB=O$ 的充分必要条件是 $|A|=O$.

10. 设 A 是 n 阶矩阵, B 是 $n \times t$ 矩阵,秩$(B) = n$.证明:

(1) 如果 $AB = O$,则 $A = O$;

(2) 如果 $AB = B$,则 $A = I$.

第五章

矩阵的相似

我们先以复习题四第 5 题为例,说明本章目的 .给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}12&-14&-3\\13&-15&-3\\-16&20&5\end{bmatrix}.$$

欲求 A^{100} 这显然是一件很繁的事情 .不过就这个矩阵而言,可以找到(或者说存在) 一个可逆矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix},$$

使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}=D.$$

于是

$$A=PDP^{-1}.$$

这样一来,计算 A^{100} 就变得非常简单了:

$$A^{100} = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{100\text{个括号}} = PD^{100}P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}^{100} P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^{100} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

矩阵 A 与 D 的关系称为相似.本章讨论:对于给定的 n 阶矩阵 A,能否找到一个与 A 相似的且比 A 简单的矩阵 D,从而使对较复杂的 n 阶矩阵 A 的研究变得十分简单?

§5.1 相似矩阵

定义 5.1.1 设 A, B 是同阶方阵.如果存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 相似于 B,记作 $A \sim B$.

相似是矩阵间的一种关系.可以证明相似具有:

1. 反身性:$A \sim A$;
2. 对称性:如果 $A \sim B$,则 $B \sim A$;
3. 传递性:如果 $A \sim B$, $B \sim C$,则 $A \sim C$.

证 1. 因为 $I^{-1}AI = A$,所以 $A \sim A$;

2. 因为 $A \sim B$,所以存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$.即有 $PBP^{-1} = A$ 所以 $B \sim A$.

3. 因为 $A \sim B$, $B \sim C$.所以存在可逆矩阵 P, Q,分别使 $P^{-1}AP = B$, $Q^{-1}BQ = C$.于是就有

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ),$$

故 $A \sim C$.

研究矩阵相似关系不仅为了简化矩阵运算,还因为彼此相似的矩阵有许多共同的性质.

性质 1 相似矩阵的秩数相等.

证 如果 $A \sim B$,则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$.这说明 $A \cong B$,所以秩(A) = 秩(B).

性质 2 相似矩阵的行列式相等.

证 如果 $A \sim B$,则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$.于是

$$
\begin{aligned}
|B| &= |P^{-1}AP| = |P^{-1}|\,|A|\,|P| \\
&= |P|^{-1}\,|A|\,|P| = |A|.
\end{aligned}
$$

因为 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是它的行列式不等于零,所以有

性质 3 相似矩阵都可逆或都不可逆.

性质 4 如果 $B_1 = P^{-1}A_1P$, $B_2 = P^{-1}A_2P$.那么

$$
\begin{aligned}
B_1 + B_2 &= P^{-1}(A_1 + A_2)P, \\
B_1B_2 &= P^{-1}(A_1A_2)P, \\
kB_1 &= P^{-1}(kA_1)P.
\end{aligned}
$$

现在的问题是:给定一个 n 阶矩阵 A,是否一定能找到(或者说是否一定存在)一个可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 更简单?最简单的矩阵当属数量矩阵 kI(包括单位矩阵和零矩阵).如果 $P^{-1}AP = kI$,那么 $A = P(kI)P^{-1} = kI$.这就是说,只有数量矩阵才能相似于数量矩阵.简单程度仅次于数量矩阵的是对角形矩阵.复习题四第 5 题表明有的 n 阶矩阵 A 能够相似于对角形矩阵.下面我们来分析:如果 n 阶矩阵 A 相似于对角形矩阵,A 应该具备什么条件:设

$$
P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.
$$

其中 $A = (a_{ij})_{nn}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, α_j 是 n 维列向量,

$j=1,2,\cdots,n$.那么

$$AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n),$$

$$A\alpha_j=\lambda_j\alpha_j\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{1}$$

因为 P 可逆,所以列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.当然 $\alpha_j\neq O$ $(j=1,2,\cdots,n)$.这就是说,如果 A 能相似于对角形矩阵,必须有满足(1)的数 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 和线性无关的 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

练　习　5.1

1. 证明:

(1) 如果 $A\sim O$,则 $A=O$;

(2) 如果 $A\sim I$,则 $A=I$.

2. 如果 n 阶矩阵 $A_1\sim B_1$, $A_2\sim B_2$.能说必有 $A_1+A_2\sim B_1+B_2$ 吗?又, $A_1A_2\sim B_1B_2$, $kA_1\sim kB_1$ 必然成立吗?

3. 设 $B=P^{-1}AP$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.证明 $f(B)=P^{-1}f(A)P$.

4. 证明:如果 $A\sim B$,则 $A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$.

5. 证明:如果 A 可逆,则 $AB\sim BA$.

6. 设 A 是 $r\times r$ 矩阵, C 是 $s\times s$ 矩阵.已知 $A\sim B$, $C\sim D$.证明

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B & O\\ O & D\end{bmatrix}.$$

7. 设

$$A=\begin{bmatrix} 12 & -14 & -3 \\ 13 & -15 & -3 \\ -16 & 20 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2,$

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

验证: $A\alpha_j=\lambda_j\alpha_j\quad(j=1,2,3)$.

8. 设矩阵 A 如第 7 题,求方程 $|\lambda I-A|=0$ 的根.

9. 设矩阵 A 如第 7 题,求下列各齐次线性方程组的基础解系:

(1) $(I-A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(2) $(-I-A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(3) $(2I-A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

§5.2 特征值与特征向量

定义 5.2.1 设 A 是一个 n 阶矩阵, λ_0 是一个数,如果有 n 维列向量 $\alpha\neq O$ 满足

$$A\alpha=\lambda_0\alpha.$$

则称 λ_0 是 A 的一个特征值;称 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

例如,对于 3 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}12&-14&-3\\13&-15&-3\\-16&20&5\end{bmatrix},$$

存在数 $\lambda_0=2$ 和 3 维非零列向量 $\alpha=(-3,-3,4)^{\mathrm T}$ 满足 $A\alpha=\lambda_0\alpha$,所以 $\lambda_0=2$ 是 A 的一个特征值; $\alpha=(-3,-3,4)^{\mathrm T}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_0=2$ 的一个特征向量.

命题 1　如果 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值, α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量.那么,对任意数 $k\neq0$, $k\alpha$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

证

$$A(k\alpha)=k(A\alpha)=k(\lambda_0\alpha)=\lambda_0(k\alpha).$$

命题 2　如果 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值.α_1,α_2 都是 A 的属于 λ_0 的特征向量.则当 $\alpha_1+\alpha_2\neq O$ 时, $\alpha_1+\alpha_2$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

证

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_0\alpha_1+\lambda_0\alpha_2=\lambda_0(\alpha_1+\alpha_2).$$

综合命题 1 和命题 2,得

命题 3　如果 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.那么任意非零线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$ 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

注意　如果 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值.α_1 是 A 的属于 λ_1 的特征向量, α_2 是 A 的属于 λ_2 的特征向量.那么 $\alpha_1+\alpha_2$ 不再是 A 的特征向量.

定理 5.2.1　n 阶矩阵 A 相似于对角形矩阵的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证　必要性　已知

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

则存在可逆矩阵 P **使**

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

将 P **按列表为分块矩阵**: $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, **其中** α_j **是** P **的第** j **列** $(j = 1,2,\cdots, n)$, **那么上式可表为**

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

按矩阵分块乘法, **进而有**

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n).$$

根据矩阵相等定义, **有**

$$A\alpha_j = \lambda_j\alpha_j \quad (j = 1,2,\cdots, n).$$

所以 λ_j **就是** A **的特征值**, α_j **就是** A **的属于** λ_j **的特征向量** $(j = 1,2,\cdots, n)$, **又因为** P **可逆**, **所以** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ **线性无关**.

充分性　已知 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，分别属于 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.即有

$$A\alpha_j = \lambda_j\alpha_j \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列组成一个矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，所以 P 可逆，并且有

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n).$$

按矩阵分块乘法，上式又可表为

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

即

$$AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

亦即有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

这就证明了 A 相似于对角形矩阵.

用定理 5.2.1 可以判断 n 阶矩阵 A 能否相似于对角形矩阵.那么 A 的特征值和特征向量怎么求呢?下面分析求法:

设向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\cdots\\c_n\end{bmatrix}\neq O$$

是矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

的属于特征值 λ_0 的特征向量,那么有等式

$$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\cdots\\c_n\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\cdots\\c_n\end{bmatrix}.$$

按矩阵乘法展开上式,得

$$\begin{cases}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=\lambda_0c_1,\\a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=\lambda_0c_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=\lambda_0c_n.\end{cases}$$

移项有

$$\begin{cases}(\lambda_0-a_{11})c_1-a_{12}c_2-\cdots-a_{1n}c_n=0,\\-a_{21}c_1+(\lambda_0-a_{22})c_2-\cdots-a_{2n}c_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\-a_{n1}c_1-a_{n2}c_2-\cdots+(\lambda_0-a_{nn})c_n=0.\end{cases}$$

这表明特征向量 $\alpha = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda_0 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0, \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_0 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda_0 - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解.既然上面 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式必然等于零:

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

这进而表明 λ_0 是 λ 的 n 次多项式

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

的根.

定义 5.2.2　设 $A = (a_{ij})$ 是数域 P 上的一个 n 阶矩阵.λ 是一个未知量,称矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

是 A 的特征矩阵.它的行列式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

称为 A 的特征多项式 .方程 $|\lambda I - A| = 0$ 在数域 P 中的根,称为 A 的特征根或特征值 .

由上面的分析得出矩阵 A 的特征值,特征向量的求法:

第一步,计算 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$;

第二步,由 $|\lambda I - A| = 0$,求出 A 在数域 P 中的全部不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$(其中可能有重根);

第三步,对每一个 λ_j $(j = 1,2,\cdots, s)$ 求齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = O$ 的基础解系 $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jt_j}$.那么这个基础解系的一切非零线性组合就是 A 的属于特征值 λ_j 的全部特征向量 .

例 5.2.1 **已知矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -14 & -3 \\ 13 & -15 & -3 \\ -16 & 20 & 5 \end{bmatrix}.$$

求 A 的全部不同的特征值和属于不同特征值的全部特征向量 .

解 **先求 A 的特征多项式**

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & 14 & 3 \\ -13 & \lambda + 15 & 3 \\ 16 & -20 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{① - ②}{=} \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\lambda - 1 & 0 \\ -13 & \lambda + 15 & 3 \\ 16 & -20 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & \lambda + 15 & 3 \\ 16 & -20 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②+①}(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-13&\lambda+2&3\\16&-4&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+2&3\\-4&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2),$$

A 有 3 个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

将 $\lambda_1=1$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-11&14&3&0\\-13&16&3&0\\16&-20&-4&0\end{array}\right].$$

求出一个基础解系 $\alpha_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.则 A 的属于特征值$\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$.

将 $\lambda_2=-1$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-13&14&3&0\\-13&14&3&0\\16&-20&-6&0\end{array}\right].$$

求出一个基础解系 $\alpha_2=(4,5,-6)^{\mathrm{T}}$.则 A 的属于特征值$\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

将 $\lambda_3=2$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-10&14&3&0\\-13&17&3&0\\16&-20&-3&0\end{array}\right].$$

求出一个基础解系 $\alpha_3=(3,3,-4)^{\mathrm{T}}$.则 A 的属于$\lambda_3=2$ 的全部特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

例 5.2.2 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

求 A 的全部不同的特征值和属于不同特征值的全部特征向量.

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2.$$

A 有两个不同的特征根: $\lambda_1=0,\lambda_2=2$(2 重).

将 $\lambda_1=0$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-2&0\end{array}\right].$$

求出一个基础解系

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$k\alpha_1(k\neq 0)$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量.

将 $\lambda_2=2$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

求出一个基础解系

$$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

$l_1\beta_1+l_2\beta_2(l_1,l_2$ 不全为零) 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=2$ 的全部特征向量 .

例 5.2.3　已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

求 A 的特征值和特征向量 .

解

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ 2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)^2 .$$

A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$(2 重) .

当 $\lambda_1=3$ 时,解齐次线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

得基础解系 $(3,-1,8)^{\mathrm{T}}$ .A 的属于特征值 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为

$$k\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 8\end{bmatrix}\quad(k\neq 0) .$$

当 $\lambda_2=-1$ 时,解齐次线性方程组

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right].$$

得基础解系 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$ .A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的全部特征向量为

$$l\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (l \neq 0).$$

现在继续介绍相似矩阵的性质.

性质 5 相似矩阵有相同的特征多项式.

证 如果 $A \sim B$,则存在可逆矩阵 P 使

$$B = P^{-1}AP.$$

B 的特征矩阵

$$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P$$

B 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |P|^{-1}|\lambda I - A||P| = |\lambda I - A|. \end{aligned}$$

所以 A, B 有相同的特征多项式.

注意 特征多项式相同的矩阵未必相似,例如,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征多项式都是$(\lambda - 1)^2$.但 A 与 B 不相似.因为 A 是单位矩阵,只有单位矩阵与 A 相似,故 B 不可能与 A 相似.

因为矩阵 A 的特征值就是 A 的特征多项式的根,所以继性质 5 得

性质 6 相似矩阵有相同的特征值.

我们知道,多项式有没有根?有多少根?根是什么?这些问题都与数域有关,请看下例.

例 5.2.4 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

求 A 的特征值和特征向量.

解　A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②}+\text{③}]{\text{①}+\lambda\text{③}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda^2-\lambda+3 & \lambda+3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda^2-\lambda+3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+1).$$

在实数域 R 上, A 只有一个特征值 $\lambda_1 = 0$,将 $\lambda_1 = 0$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

求出一个基础解系 $\alpha_1 = (1, -1, -1)^T$.所以 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1(k_1 \in R, k_1 \neq 0)$.

在复数域 C 上, A 有 3 个特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$.

将 $\lambda_2 = \mathrm{i}$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = O$,得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathrm{i} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \mathrm{i}-1 & 0 \end{array}\right].$$

求出一个基础解系

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1-\mathrm{i} \\ 1 \\ 2-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

将 $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ 代入齐次线性方程组$(\lambda I - A)X = O$,得增广矩阵

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1-i & 0 \end{bmatrix}.$$

求出一个基础解系

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \\ 2+i \end{bmatrix}.$$

所以 A 在复数域 C 上分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ 的全部特征向量为

$$l_1\alpha_1,\ l_2\alpha_2,\ l_3\alpha_3,$$

其中 $l_1, l_2, l_3 \in C, l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$.

练 习 5.2

1．求下列复矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2．设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的一组线性无关的特征向量.证明: 对任意不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_t$, 线性组合 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t$ 也是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

3．设 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.证明: 如果 A 可

逆,则 $\lambda_0 \neq 0$,且 α 是 A^{-1} 的属于特征值 λ_0^{-1} 的特征向量.

4. 设 α_1, α_2 是矩阵 A 的分别属于不同特征值的特征向量.证明: α_1, α_2 线性无关.

§5.3　矩阵可对角化的条件

“矩阵 A 能够相似于对角形矩阵”也说“矩阵 A 可对角化”.定理 5.2.1 告诉我们: n 阶矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.从 §5.2 例题看,不是每个 n 阶矩阵都有 n 个线性无关的特征向量.

例 5.3.1　矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -14 & -3 \\ 13 & -15 & -3 \\ -16 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix},$$

分别属于特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$,以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列组成可逆矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

即

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

例 5.3.2 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量: $\alpha_1 = (1,1,0)^T$ 属于特征值 $\lambda_1 = 0$; $\beta_1 = (0,0,1)^T$, $\beta_2 = (1,-1,0)^T$ 属于特征值 $\lambda_2 = 2$.以 $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ 为列组成可逆矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

使

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

例 5.3.3 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

是 3 阶的, 却只有两个线性无关的特征向量 $(3, -1, 8)^T$ 和 $(1, -1, 0)^T$, 不能组成 3 阶可逆矩阵 P, 所以 A 不能对角化.

例 5.3.4 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

是3 阶的. 在实数域 R 上却只有一个线性无关的特征向量 $(1, -1, -1)^T$,所以 A 在实数域 R 上不能对角化.而在复数域 C 上, A 有 3 个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1-i \\ 1 \\ 2-i \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \\ 2+i \end{bmatrix},$$

分别属于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$,以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为列组成可逆矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & i-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-i & 2+i \end{bmatrix},$$

使

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & i & \\ & & -i \end{bmatrix},$$

即

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & i & \\ & & -i \end{bmatrix}.$$

这里有一个问题: 求矩阵 A 的属于某一个特征值 λ_0 的全部特征向量,先要求出齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = O$ 的一个基础解系.这个基础解系就是 A 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量的一个极大线性无关组.可是把 A 的属于不同特征值的线性无关的特征向量合在一起,还线性无关吗?答案是肯定的.下面我们就来证明.

定理 5.3.1 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 A 的不同特征值; $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{is_i}$ 是 A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i = 1, 2, \cdots, m)$,则向量组

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1s_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2s_2},\cdots,\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{ms_m}$$

也线性无关.

证　对特征值个数 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,由定理已知 $\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1s_1}$ 线性无关.

假设 $m=k$ 时定理成立,即已知

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1s_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2s_2},\cdots,\alpha_{k1},\alpha_{k2},\cdots,\alpha_{ks_k} \tag{1}$$

线性无关.下面证明 $m=k+1$ 时定理成立.设

$$\begin{aligned}&x_{11}\alpha_{11}+x_{12}\alpha_{12}+\cdots+x_{1s_1}\alpha_{1s_1}+x_{21}\alpha_{21}+x_{22}\alpha_{22}\\&\quad+\cdots+x_{2s_2}\alpha_{2s_2}+\cdots+x_{k1}\alpha_{k1}+x_{k2}\alpha_{k2}\\&\quad+\cdots+x_{ks_k}\alpha_{ks_k}+x_{k+1\,1}\alpha_{k+1\,1}+x_{k+1\,2}\alpha_{k+1\,2}\\&\quad+\cdots+x_{k+1\,s_{k+1}}\alpha_{k+1\,s_{k+1}}=O.\end{aligned} \tag{2}$$

等式(2)两边同乘以 λ_{k+1},得

$$\begin{aligned}&x_{11}\lambda_{k+1}\alpha_{11}+\cdots+x_{1s_1}\lambda_{k+1}\alpha_{1s_1}\\&\quad+\cdots+x_{k1}\lambda_{k+1}\alpha_{k1}+\cdots+x_{ks_k}\lambda_{k+1}\alpha_{ks_k}+x_{k+1\,1}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1\,1}\\&\quad+\cdots+x_{k+1\,s_{k+1}}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1\,s_{k+1}}=O.\end{aligned} \tag{3}$$

等式(2)两边左乘 A,由于 $A\alpha_{ij}=\lambda_i\alpha_{ij}(i=1,2,\cdots,k+1)$,得

$$\begin{aligned}&x_{11}\lambda_1\alpha_{11}+\cdots+x_{1s_1}\lambda_1\alpha_{1s_1}\\&\quad+\cdots+x_{k1}\lambda_k\alpha_{k1}+\cdots+x_{ks_k}\lambda_k\alpha_{ks_k}+x_{k+1\,1}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1\,1}\\&\quad+\cdots+x_{k+1\,s_{k+1}}\lambda_{k+1}\alpha_{k+1\,s_{k+1}}=O.\end{aligned} \tag{4}$$

(3)减(4)得

$$\begin{aligned}&x_{11}(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\alpha_{11}+\cdots+x_{1s_1}(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\alpha_{1s_1}\\&\quad+\cdots+x_{k1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\alpha_{k1}+\cdots+x_{ks_k}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\alpha_{ks_k}\\&\quad=O.\end{aligned} \tag{5}$$

由归纳假设，$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1s_1},\cdots,\alpha_{k1},\alpha_{k2},\cdots,\alpha_{ks_k}$ 线性无关，所以(5)式左边所有向量的系数全为零.即

$$x_{ij}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,s_i).$$

已知 $\lambda_{k+1}\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$，所以 $x_{ij}=0(i=1,2,\cdots,k;j=1,2,\cdots,s_i)$，这时(2)式变成

$$x_{k+1\,1}\alpha_{k+1\,1}+x_{k+1\,2}\alpha_{k+1\,2}+\cdots+x_{k+1\,s_{k+1}}\alpha_{k+1\,s_{k+1}}=O.$$

已知 $\alpha_{k+1\,1},\alpha_{k+1\,2},\cdots,\alpha_{k+1\,s_{k+1}}$ 线性无关，所以 $x_{k+1\,1}=x_{k+1\,2}=\cdots=x_{k+1\,s_{k+1}}=0$.这就证明了 $m=k+1$ 时定理成立.根据归纳法原理，定理成立.

在定理5.3.1中，如果 α_i 是 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量 $(i=1,2,\cdots,m)$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.由此得出 A 可对角化的一个充分条件：

定理5.3.2　如果 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定可以对角化.

比如例5.3.1，3阶矩阵 A 有3个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，所以

$$A\sim\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}.$$

矩阵能否对角化，还与所考虑的数域有关.例5.3.4在实数域上不能对角化，而在复数域上，3阶矩阵 A 有3个不同的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=\mathrm{i},\lambda_3=-\mathrm{i}$，所以

$$A\sim\begin{bmatrix}0&&\\&\mathrm{i}&\\&&-\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

在复数域上，n 次多项式有 n 个根.所以由定理5.3.2得

推论5.3.1　复数域上的 n 阶矩阵 A 的特征多项式如果没有重

根,则 A 一定能对角化.

注意 定理 5.3.2 及其推论 5.3.1 只是 A 可对角化的充分条件,而不是必要条件.比如例 5.3.2 的 3 阶矩阵 A 只有两个不同的特征值(其中一个是重根).由于 A 有 3 个线性无关的特征向量,同样可以对角化.

最后我们讨论一下与 A 相似的对角形矩阵之惟一性问题.对于给定的数域 P 上的一个 n 阶矩阵 A 来说,A 的特征多项式是惟一的,因而 A 的特征值也是惟一的.但就每一个特征值求出的极大线性无关特征向量组并不惟一,因而由特征向量组成的可逆矩阵 P 就不止一个.对角矩阵

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

主对角元是 A 的特征值,它们与属于这个特征值的特征向量相对应.因此,如果不计特征值在对角形矩阵主对角线上的排列次序,我们可以这样说:如果矩阵 A 相似于对角形矩阵,那么这个对角形矩阵是惟一的,其主对角元都是 A 的特征值.

练 习 5.3

1. 练习 5.2 第 1 题中各矩阵在复数域上能否对角化?若能,试求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

2. 设对角形矩阵

$$D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

判断下列哪个矩阵与 D 相似?为什么?

(1) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$.

3. 设 α, β 是矩阵 A 的分别属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 的特征向量.求证 $\alpha + \beta$ 必不是 A 的特征向量.

4. 设 A 是一个上(下)三角形矩阵,且主对角元互不相同.证明 A 一定能对角化.

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1$(2 重), $\lambda_2 = 2$.特征向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

其中 α_1, α_2 属于 λ_1, β 属于 λ_2.求矩阵 A.

6. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

利用相似矩阵求 A^{10}.

§5.4　实向量的内积、长度与夹角

§5.3 告诉我们,不是每一个 n 阶矩阵都能对角化的.但 §5.6 将告诉我们,实对称矩阵一定能对角化.作为 §5.6 的预备知识,我们先讲 §5.4, §5.5 这两节的内容.

本节在实数域 R 上讨论,介绍 n 维实向量的内积运算和实向量

的度量概念.

内积的物理背景.

先看例(如图 5.1).

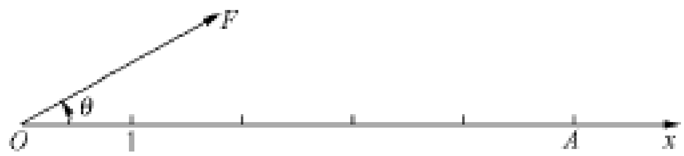


图 5.1

已知力 $\overrightarrow{OF}$ 的大小为 $|\overrightarrow{OF}| = 2$, $\overrightarrow{OF}$ 与 x 轴正向夹角 $\theta = 30°$. 力 $\overrightarrow{OF}$ 将位于原点处的物体沿 x 轴正向拉到 A 的位置.即物体位移为 $\overrightarrow{OA}$ 这时物体移动的距离 $|\overrightarrow{OA}| = 5$.根据物理学原理,力 $\overrightarrow{OF}$ 对物体作的功

$$W = |\overrightarrow{OF}|\cos\theta \cdot |\overrightarrow{OA}| = 2\cdot\cos 30°\cdot 5 = 5\sqrt{3}.$$

代数学称这是两个实向量$(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$到一个实数$(W)$的映射.在平面直角坐标系中,以原点为起点的向量可用终点坐标表示: $\overrightarrow{OF} = (\sqrt{3}, 1)$, $\overrightarrow{OA} = (5, 0)$.用 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OA}$ 表示 W.具体算法是

$$W = \overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OA} = (\sqrt{3} \quad 1)\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5\sqrt{3}.$$

定义 5.4.1 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in R^n$,实数

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

称为 α 与 β 的内积.记作 $\alpha\cdot\beta$.

注意 只有实向量才可以进行内积运算,内积是一个实数.内积也称点积或数量积.$\alpha\cdot\beta$的"·"不能省略.$\alpha\cdot\beta$也可记作(α, β).因为 n 维行向量可以看成 $1\times n$ 矩阵, n 维列向量可以看成 $n\times 1$ 矩阵,所以内积可用矩阵乘法来求:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

因为 1 阶矩阵就是一个数,所以按矩阵乘法求出的内积值可以用一个数表示 .

例 5.4.1　在 R^3 中求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1, -2, 3)$ 与 $\boldsymbol{\beta} = (2, 0, 1)$ 的内积 .

解

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = (1\ \ -2\ \ 3)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 .$$

例 5.4.2　3 维基本向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$ 中两两向量的内积为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = 0,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = 1 .$$

用矩阵运算法则可以证明实向量内积运算有以下性质:

1. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}$;
2. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}$;
3. $(k\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\beta} = k(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})$;
4. $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} \geq 0$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = O$,

以上 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in R^n$, $k \in R$.

证明留给读者 .

在 R^2 中两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角记作 θ .我们定义 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\| \cos\theta$.当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 时,

$$\alpha \cdot \alpha = \|\alpha\|^2 \cos 0 = \|\alpha\|^2 .$$

所以在 R^2 中,向量 α 的长度 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.一般地,在 R^n 中任一向量 α 都有 $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ 所以我们有

定义 5.4.2　实 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的长度是指非负实数

$$\sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} .$$

记作 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$.向量的长度也称范数或模 .

例 5.4.3　在 R^2 中,向量 $\alpha = (-4,3)$ 的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 .$$

如图 5 .2:

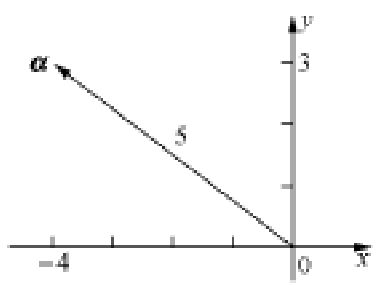


图　5 .2

例 5.4.4　在 R^3 中向量 $\alpha = (2,3,4)$ 的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} .$$

如图 5 .3:

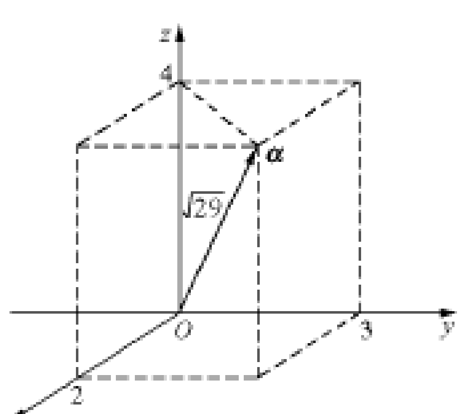


图　5 .3

例 5.4.5 在 R^4 中向量 $\alpha = (1,0,\sqrt{15},-3)$ 的长度

$$\|\alpha\| = \sqrt{1+15+9} = 5.$$

由定义可知,$\|\alpha\| = 0$ 当且仅当 $\alpha = O$.

长度为 1 的向量称为单位向量:例如

$$\alpha = \left(\frac{1}{9},-\frac{8}{9},-\frac{4}{9}\right).$$

因为 $\|\alpha\| = 1$,所以 α 是一个 3 维单位向量.又例如在 R^n 中,n 维基本向量

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0),$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$$

都是单位向量.对于 R^n 中任一非零向量 α,可以作两个单位向量 $\pm\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$.这是因为

$$\left|\pm\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right| = \sqrt{\left(\pm\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right)\cdot\left(\pm\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha\right)}$$
$$= \frac{1}{\|\alpha\|}\sqrt{\alpha\cdot\alpha} = 1.$$

由非零向量 α 作出单位向量$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$,称将 α 单位化.例如,将例 5.4.5 中的向量 $\alpha = (1,0,\sqrt{15},-3)$ 单位化,得单位向量 $\left(\frac{1}{5},0,\sqrt{\frac{3}{5}},-\frac{3}{5}\right)$.

在 R^2 中我们定义了两个向量 α 与 β 的内积为

$$\alpha\cdot\beta = \|\alpha\|\,\|\beta\|\cos\theta \quad (\text{其中 } \theta \text{ 为 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 的夹角}).$$

当 α,β 都是非零向量时,

$$\cos\theta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}.\tag{1}$$

在 R^n 中,如果对于任意两个向量 α,β 都有不等式 $|\alpha\cdot\beta|\leq\|\alpha\|\ \|\beta\|$ 成立.则可仿照(1)定义两个实 n 维非零向量的夹角.而这个不等式确实存在,称为柯西—布涅雅柯夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式.

定理 5.4.1 对任意实向量 α,β 恒有不等式

$$|\alpha\cdot\beta|\leq\|\alpha\|\ \|\beta\|$$

成立.当且仅当 α,β 线性相关时,等号成立.

证 当 α,β 线性相关时,不妨设

$$\alpha=k\beta.$$

于是

$$|\alpha\cdot\beta|=|(k\beta)\cdot\beta|=|k(\beta\cdot\beta)|=|k|\cdot\|\beta\|^2,$$
$$\begin{aligned}\|\alpha\|\ \|\beta\|&=\|k\beta\|\ \|\beta\|=|k|\ \|\beta\|\cdot\|\beta\|\\&=|k|\ \|\beta\|^2.\end{aligned}$$

所以

$$|\alpha\cdot\beta|=\|\alpha\|\ \|\beta\|.$$

当 α,β 线性无关时,对任意实数 k 都有 $\alpha-k\beta\neq O$.从而

$$(\alpha-k\beta)\cdot(\alpha-k\beta)=\alpha\cdot\alpha-2k(\alpha\cdot\beta)+k^2(\beta\cdot\beta)>0.\tag{2}$$

因为 α,β 线性无关,所以 $\beta\neq 0$,因而 $\beta\cdot\beta>0$,取 $k=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}$ 代入(2)得

$$\alpha\cdot\alpha-2\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}(\alpha\cdot\beta)+\left(\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\right)^2(\beta\cdot\beta)>0.$$

即

$$\alpha\cdot\alpha-\frac{(\alpha\cdot\beta)^2}{\beta\cdot\beta}>0.$$

亦即

$$(\alpha\cdot\beta)^2<(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta).$$

开平方,取算术根得

$$|\alpha\cdot\beta|<\|\alpha\|\ \|\beta\|.$$

设 α,β 皆为非零向量,由定理 5.4.1 有

$$\frac{|\alpha\cdot\beta|}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}\leq 1.$$

即

$$-1\leq\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}\leq 1.$$

定义 5.4.3　对非零实向量 α,β 规定其夹角

$$\theta=\arccos\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\ \|\beta\|}.$$

如果 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,称 α 与 β 正交(或垂直),记作 $\alpha\perp\beta$.

例 5.4.6　在 R^2 中求向量 $\alpha=(\sqrt{3},1)$ 与 $\beta=(5,0)$ 的夹角 θ.

解

$$\|\alpha\|=\sqrt{3+1}=2,\quad \|\beta\|=\sqrt{5^2}=5,$$

$$\alpha\cdot\beta=\sqrt{3}\times 5+1\times 0=5\sqrt{3},$$

$$\cos\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2\times 5}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\theta=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

例 5.4.7　在 R^4 中求向量 $\alpha=(1,-1,0,2)$ 与 $\beta=(1,3,4,1)$ 的夹角 θ.

解

$$\alpha \cdot \beta = (1, -1, 0, 2)\begin{bmatrix}1\\3\\4\\1\end{bmatrix} = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|} = 0,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

所以 α **与** β **正交**.

命题 5.4.1 **两个非零实向量正交的充分必要条件是它们的内积等于零**.

证 **设** $\alpha \perp \beta$, **则**

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

所以 $\alpha \cdot \beta = 0$.**反之**, **如果** $\alpha \cdot \beta = 0$, **则**

$$\theta = \arccos\frac{\alpha \cdot \beta}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

即 $\alpha \perp \beta$.

例 5.4.8 **在** R^2 **中** $\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\beta = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.**如图** 5.4:

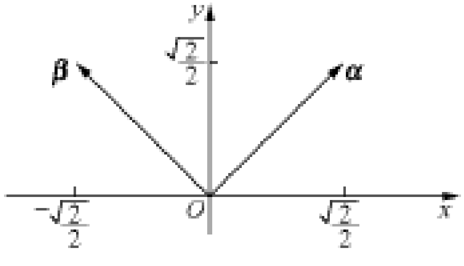


图 5.4

证明 $\alpha \perp \beta$.

证 **因为**

$$\alpha\cdot\beta=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=0.$$

所以 $\alpha\perp\beta$.

定义 5.4.4　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一组非零实向量.如果其中任意两个向量都正交,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是一个正交向量组.

例 5.4.9　n 维基本向量组

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=(1,0,\cdots,0),\\ \varepsilon_2&=(0,1,\cdots,0),\\ &\cdots\cdots\\ \varepsilon_n&=(0,0,\cdots,1)\end{aligned}$$

是正交向量组.

命题 5.4.2　正交向量组线性无关.

证　已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是正交向量组.设

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=O. \tag{3}$$

等式两边与 α_i 作内积

$$\begin{aligned}&\alpha_i\cdot(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_i\alpha_i+\cdots+x_s\alpha_s)\\ &\quad=\alpha_i\cdot O,\\ &x_1(\alpha_i\cdot\alpha_1)+x_2(\alpha_i\cdot\alpha_2)+\cdots+x_i(\alpha_i\cdot\alpha_i)\\ &\quad+\cdots+x_s(\alpha_i\cdot\alpha_s)=0.\end{aligned} \tag{4}$$

因为 $i\neq j$ 时,$\alpha_i\cdot\alpha_j=0$,所以(4)式为

$$x_i(\alpha_i\cdot\alpha_i)=0.$$

因为 $\alpha_i\neq O$,所以 $\alpha_i\cdot\alpha_i\neq0$,推出 $x_i=0(i=1,2,\cdots,s)$,这就证明了(3)只有零解.故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

练 习 5.4

1. 求向量 α 与 β 的内积.

(1) $\alpha=(1,-2,3,2)$, $\beta=(0,3,1,-1)$;

(2) $\alpha=(1,-1,0,2,1)$, $\beta=(0,4,3,1,2)$.

2. 求下列向量长度.

(1) $\alpha=(1,1)$;

(2) $\beta=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

(3) $\gamma=(1,3,-1,0,\sqrt{2})$.

3. 求向量 α 与 β 的夹角:

(1) $\alpha=(\sqrt{3},0,1)$, $\beta=(1,0,-\sqrt{3})$;

(2) $\alpha=(1,0,2,4,-1)$, $\beta=(1,3,-1,0,-1)$.

4. 将下列向量单位化:

(1) $\alpha=(1,1)$;

(2) $\beta=(3,0,-4)$;

(3) $\gamma=(1,2,-3,-2)$.

5. 在 R^4 中求一个单位向量,使它与 $\alpha_1=(1,0,-1,1)$, $\alpha_2=(2,1,3,-2)$, $\alpha_3=(1,-1,2,3)$ 都正交.

6. 证明: 对任意实数 k 与实向量 α, 恒有 $\|k\alpha\|=|k|\,\|\alpha\|$ 成立.

7. 已知 α 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 中每一个向量都正交.求证: α 与任意线性组合 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$ $(k_1,k_2,\cdots,k_s\in R)$ 都正交.

8. 如图 5.5:

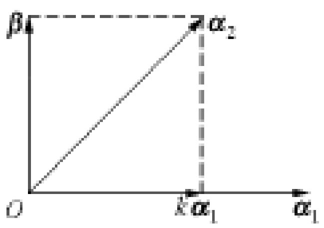


图 5.5

已知平面向量 α_1,α_2 线性无关.$\beta=\alpha_2-k\alpha_1$ 与 α_1 正交,求系数 k.

9. 已知实向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2}\beta_2 .$$

证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是正交向量组.

§5.5　正 交 矩 阵

本节在实数域 R 上讨论.

定义 5.5.1　如果实 n 阶矩阵 A 满足

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I .$$

则称 A 是正交矩阵.

显然,单位矩阵是正交矩阵.此外,例如

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

也是正交矩阵.

正交矩阵有以下性质:

(1) 正交矩阵的行列式等于 1 或 -1.

因为如果矩阵 A 是正交矩阵,则

$$AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I .$$

取行列式

$$|AA^{\mathrm{T}}| = |A^{\mathrm{T}}A| = |I| .$$

即

$$|A||A^{\mathrm{T}}|=|A^{\mathrm{T}}||A|=1.$$

由于 $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$,所以 $|A|^2=1$,故 $|A|=\pm 1$.

(2) 如果 A 是正交矩阵,则 A 可逆,且 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$.

(3) 如果 A 是正交矩阵,则 A^{-1} 也是正交矩阵.

(4) 如果 A,B 是同阶正交矩阵,则乘积 AB 也是正交矩阵.

这些性质可由正交矩阵定义直接证明.证明留给读者.

下面分析正交矩阵行(列)向量组的特点.设正交矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

其中 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,n$.由正交矩阵定义

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}})$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha_1\cdot\alpha_1 & \alpha_1\cdot\alpha_2 & \cdots & \alpha_1\cdot\alpha_n \\ \alpha_2\cdot\alpha_1 & \alpha_2\cdot\alpha_2 & \cdots & \alpha_2\cdot\alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n\cdot\alpha_1 & \alpha_n\cdot\alpha_2 & \cdots & \alpha_n\cdot\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

这表明

$$\alpha_i \cdot \alpha_i = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = 0, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n .$$

即

$$\| \alpha_i \| = 1, \ \alpha_i \perp \alpha_j (i \neq j), \quad i, j = 1, 2, \cdots, n .$$

由此可知正交矩阵 A 的行向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是正交单位向量组 .同理,由 $A^T A = I$ 可知正交矩阵 A 的列向量组也是正交单位向量组 .反之,如果实 n 阶矩阵 A 的行(列) 向量组是正交单位向量组,则 A 是正交矩阵 .(证明留给读者) .故得

定理 5.5.1　实 n 阶矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 的行(列) 向量组是正交单位向量组 .

下面介绍由一组线性无关的实向量作出一组正交单位向量的方法 .

定理 5.5.2　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是一组线性无关的实向量 .那么可由它们作出一组正交向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$,使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i$ 等价 .$i = 1, 2, \cdots, s$.

证　只要取

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3 \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2}\beta_2,$$

$$\cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\alpha_s \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_s \cdot \beta_2}{\beta_2 \cdot \beta_2}\beta_2 - \cdots - \frac{\alpha_s \cdot \beta_{s-1}}{\beta_{s-1} \cdot \beta_{s-1}}\beta_{s-1}$$

即可 .

定理给出的方法称为施密特(Schmidt) 正交化方法 .如果将所得正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 单位化:

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\ \cdots,\ \gamma_s=\frac{1}{\|\beta_s\|}\beta_s.$$

$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 就是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价的正交单位向量组.

例 5.5.1　求与向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

等价的正交单位向量组.

解　先将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化,得

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{4}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3\cdot\beta_1}{\beta_1\cdot\beta_1}\beta_1-\frac{\alpha_3\cdot\beta_2}{\beta_2\cdot\beta_2}\cdot\beta_2$$

$$=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}-\frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}\\\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

将正交向量组 β_1,β_2,β_3 单位化,得

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{30}}\\-\frac{3}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\-\frac{1}{\sqrt{30}}\end{bmatrix},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{30}}\\-\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{4}{\sqrt{30}}\\\frac{3}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}.$$

向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为所求.

练　习　5.5

1. 判断下列矩阵是否为正交矩阵:

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}&i\\i&-\sqrt{2}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}&0\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

2. 设 A 是正交矩阵.证明:

(1) A 可逆;

(2) $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$;

(3) A^{-1} 也是正交矩阵.

3．设 A, B 是同阶正交矩阵.求证:乘积 AB 也是正交矩阵.

4．证明实 n 阶矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 的列(行)向量组是正交单位向量组.

5．求与向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

等价的正交单位向量组.

6．设

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

求与 α_1, α_2, α_3 都正交的单位向量.

7．求一个正交矩阵,它以 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ 为前两列.

§5.6 实对称矩阵的相似标准形

我们知道,不是任何一个矩阵都能对角化的.本节要证明:实对称矩阵 A 一定能对角化;并且一定存在正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.首先来认识实对称矩阵的特征值和特征向量.

引理 5.6.1 设 A 是 n 阶实对称矩阵, α, β 都是实 n 维列向量.那么

$$\beta^{\mathrm{T}} A\alpha = \alpha^{\mathrm{T}} A\beta.$$

证 因为 $A^{\mathrm{T}} = A$,所以

$$\beta^{\mathrm{T}} A\alpha = \beta^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \alpha = (A\beta)^{\mathrm{T}} \alpha = \alpha^{\mathrm{T}} A\beta .$$

引理 5.6.2　**实对称矩阵的特征值是实数**.

证　设 λ_0 是 n 阶实对称矩阵 A 的特征值,

$$\alpha = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq O$$

是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量.于是

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha .$$

取 α 的共轭向量

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \cdots \\ \bar{c}_n \end{bmatrix} .$$

其中 $\bar{c}_i$ 是 c_i 的共轭复数($i = 1, 2, \cdots, n$).则

$$\overline{A\alpha} = \bar{\lambda}_0 \bar{\alpha} .$$

因为 A 是实对称矩阵,所以 $A = A$, $A^{\mathrm{T}} = A$.由引理 5.6.1

$$\bar{\alpha}^{\mathrm{T}} (A\alpha) = \bar{\alpha}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \alpha = (A\bar{\alpha})^{\mathrm{T}} \alpha = (\overline{A\alpha})^{\mathrm{T}} \alpha,$$

上式左边为 $\lambda_0 \bar{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha$,右边为 $\bar{\lambda}_0 \bar{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha$,因此

$$\lambda_0 \bar{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha = \bar{\lambda}_0 \bar{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha .$$

又因为 α 是非零向量,$\bar{\alpha}^{\mathrm{T}} \alpha = \bar{c}_1 c_1 + \bar{c}_2 c_2 + \cdots + \bar{c}_n c_n \neq 0$,所以 $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$,即 λ_0 是实数.

引理 5.6.3　**实对称矩阵的特征向量是实向量**.

证　设 A 是 n 阶实对称矩阵,λ_0 是 A 的特征值.那么

$$(\lambda_0 I - A) X = O$$

是实数域上的齐次线性方程组.所以它的解,特别是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量全是实向量.

引理 5.6.4 实对称矩阵不同的特征值的特征向量必正交.

证 设 A 是实对称矩阵.λ,μ 是 A 的两个不同的特征值,α,β 是 A 的分别属于 λ,μ 的特征向量.即

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad A\beta=\mu\beta,$$
$$(A\alpha)^{\mathrm{T}}\beta=\alpha^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\beta=\alpha^{\mathrm{T}}(A\beta).$$

上式左边等于 $\lambda\alpha^{\mathrm{T}}\beta$;右边等于 $\mu\alpha^{\mathrm{T}}\beta$.即

$$\lambda\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\mu\alpha^{\mathrm{T}}\beta,$$
$$(\lambda-\mu)\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0.$$

因为 $\lambda\neq\mu$.所以 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$,即 $\alpha\cdot\beta=0$,故 $\alpha\perp\beta$.

定理 5.6.1 如果 A 是 n 阶实对称矩阵,则一定存在正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.

证 对 A 的阶数 n 用数学归纳法.$n=1$ 时,A 已是对角形矩阵.定理成立.假设定理对 $n-1$ 阶实对称矩阵成立.现在看 n 阶实对称矩阵 A.

设 λ_1 是 A 的一个特征值.α 是 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量.将 α 单位化:

$$\alpha_1=\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha.$$

α_1 仍是 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量.于是有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1.$$

以 α_1 为第 1 列作一个正交矩阵 T_1,使

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & & & \\ \cdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

因为 $A^{\mathrm{T}}=A$, $T_1^{\mathrm{T}}=T_1^{-1}$.所以

$$(T_1^{-1}AT_1)^{\mathrm{T}}=T_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}T_1=T_1^{-1}AT_1 .$$

这表明 $T_1^{-1}AT_1$ 是对称矩阵.因此 $b_2=b_3=\cdots=b_n=0$,且 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵.即

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & A_{n-1}\end{bmatrix}.$$

根据归纳假设,存在 $n-1$ 阶正交矩阵 T_{n-1} 使

$$T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

取 n 阶正交矩阵

$$T_2=\begin{bmatrix}1 & \\ & T_{n-1}\end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned}T_2^{-1}(T_1^{-1}AT_1)T_2&=\begin{bmatrix}1 & \\ & T_{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & A_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & T_{n-1}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1 & \\ & T_{n-1}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & A_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & T_{n-1}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & T_{n-1}^{-1}A_{n-1}T_{n-1}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

令 $T_1T_2=T$,则有正交矩阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

给定 n 阶实对称矩阵 A,如何找正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵呢 ?下面来分析 .

假设正交矩阵

$$T=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$$

(其中 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 n 维正交单位列向量组) 使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$AT=T\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$A(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$A\gamma_j=\lambda_j\gamma_j\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

这表明 T 的列向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的正交单位特征向量组 .

A 的特征根可能有重根; A 的属于同一特征值的线性无关的特征向量,正交化单位化后仍保持等价; A 的属于不同特征值的特征向量是正交的 据以上分析,给定 n 阶实对称矩阵 A,可按下列方法步骤求正交矩阵 T:

第一步,写出 $|\lambda I - A|$;求出 A 的全部不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$($\lambda_j$ 是 n_j 重根, $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$).

第二步, 对每一个 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, t)$ 解齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A) X = O$,得一个基础解系

$$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jn_j}.$$

第三步,将 $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jn_j}$ 正交化单位化,得正交单位向量组

$$\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \cdots, \gamma_{jn_j}.$$

第四步,写出矩阵

$$T = (\gamma_{11}\ \gamma_{12} \cdots \gamma_{1n_1}, \gamma_{21}\ \gamma_{22} \cdots \gamma_{2n_2}, \cdots, \gamma_{t1}\ \gamma_{t2} \cdots \gamma_{tn_t}).$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 互不相同 所以 T 是正交矩阵,且使

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{n_1个} & & & \\ & \overbrace{\lambda_2 \ddots \lambda_2}^{n_2个} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overbrace{\lambda_t \ddots \lambda_t}^{n_t个} \end{bmatrix}.$$

例 5.6.1　设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

求正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.

解　先求 A 的特征值.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$

A 的全部特征值为 $\lambda_1 = 3$(2 重), $\lambda_2 = 1$.

将 $\lambda_1=3$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=O$，得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

求出一个基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{\beta}_1}{\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\beta}_1}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

将 $\lambda_2=1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=O$，得增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

求出一个基础解系

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

将 α_3 单位化,得

$$\gamma_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

因此

$$T=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

为所求正交矩阵,且有

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{bmatrix}.$$

总之,关于实对称矩阵,我们有以下结论:

1. 特征多项式和特征根是实对称矩阵在相似关系下的不变量;
2. n 阶实对称矩阵必正交相似于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值.如果不计 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 在主对角线上的次序,对角形矩阵是惟一的,称为实对称矩阵的相似标准形.

练　习 5.6

求正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵:

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

§5.7* 若当(Jordan)标准形简介

我们知道数域 P 上的 n 阶矩阵未必能相似于对角形矩阵.本节介绍:复数域上的 n 阶矩阵一定相似于若当形矩阵.本节在复数域

上讨论.先认识一下若当形矩阵.

定义 5.7.1　正方形矩阵

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

(空白处为"0")称为一个若当块.

定义 5.7.2　由若干个若当块组成的准对角形矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

(空白处为"0")称为若当形矩阵.

定理 5.7.1　对于任意 n 阶矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$,总可经初等变换化为对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & \\ & f_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中 $f_i(\lambda)(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 1 或首项系数为 1 的 λ 多项式(证明略).

$$|\lambda I - A| = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\cdots\cdot f_n(\lambda). \tag{2}$$

取 $f_i(\lambda) \neq 1$.将 $f_i(\lambda)$ 在复数域上分解为 1 次因式的乘积:

$$f_i(\lambda) = (\lambda - a_1)^{m_1}(\lambda - a_2)^{m_2}\cdots(\lambda - a_t)^{m_t},$$

其中 $a_1, a_2,\cdots, a_t$ 互不相同, $m_1, m_2,\cdots, m_t$ 是正整数.每一个$(\lambda -$

$a_k)^{m_k}$ 称为 $f_i(\lambda)$ 的一个初等因子.也称为 A 的一个初等因子.把(1)中主对角线上所有不等于 1 的多项式都分解为初等因子的乘积.把所有初等因子汇集到一起:

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}. \tag{3}$$

当 $i\neq j$ 时,$f_i(\lambda)$ 与 $f_j(\lambda)$ 可能有相同的初等因子,照样列入,不合并也不删除重复.(3) 称为 A 的初等因子组.由(2) 有

命题 5.7.1 A 的所有初等因子的乘积等于 A 的特征多项式,即

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}=|\lambda I-A|,$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$.

定理 5.7.2 A 的初等因子组由 A 惟一确定.初等因子组是矩阵在相似关系下的不变量(证明略).

为了寻找矩阵在相似关系下的标准形,先看一个 m 阶矩阵,它只有一个初等因子$(\lambda-\lambda_0)^m$.取 m 阶若当块

$$J_m(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda_0\end{bmatrix}.$$

命题 5.7.2 若当块 $J_m(\lambda_0)$ 的特征矩阵 $\lambda I-J_m(\lambda_0)$,可经过初等变换化为

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-\lambda_0)^m\end{bmatrix}$$

(证明略).

试看由若干个若当块组成的准对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(4) 的特征矩阵为

$$\begin{bmatrix} \lambda I - J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & \lambda I - J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I - J_{n_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

按命题 5.7.2, (5) 可经初等变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{n_1} & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & (\lambda-\lambda_2)^{n_2} & & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & (\lambda-\lambda_s)^{n_s} \end{bmatrix}.$$

因之,矩阵(4) 的初等因子组为(3) .由定理 5.7.2 有

定理 5.7.3　若 A 的初等因子组为(3),则 A 相似于矩阵(4) .(4) 中除若当块的次序外,由 A 惟一确定 .称(4) 是 A 的若当标准形 .

例 5.7.1　求下列矩阵的若当标准形 .

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{2} & -4 & -29 & -3\\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 5 & 1\\
0 & 2 & 3 & -2 & -3 & -4\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4\\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right].$$

解　首先根据定理5.7.1把 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 用初等变换化为如下对角形矩阵(不同的化法可能化成不同的对角形式):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda^3-2\lambda^2-4\lambda+8 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2-4\lambda+4 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2
\end{bmatrix}.$$

分解三个非常数多项式,得

$$(\lambda+2)\cdot(\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda-2\ .$$

因之, A 的初等因子组为

$$(\lambda+2),(\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)^2,\ \lambda-2\ .$$

故 A 的若当标准形为

$$\begin{bmatrix}
-2 & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & \\
 & 0 & 2 & & & \\
 & & & 2 & 1 & \\
 & & & 0 & 2 & \\
 & & & & & 2
\end{bmatrix}.$$

不难看出,如果 A 的所有初等因子都是1次的,那么 A 的若当标准形矩阵就是对角形矩阵.

练　习　5.7

求下列矩阵的若当标准形:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

6. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$;

7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 2 & -1 & 1 \\ & & & 2 & 2 & -1 \\ & & & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

本章复习提纲

1. **相似矩阵**

(1) **矩阵相似定义**.

(2) **相似是矩阵间的一种等价关系**.

(3) **相似矩阵共有的性质**:

① **秩数相等**;

② **行列式相等**;

③ **都可逆或都不可逆**;

④ **若** $B_1 = P^{-1}A_1P$, $B_2 = P^{-1}A_2P$, **则**

$$B_1 + B_2 = P^{-1}(A_1 + A_2)P,$$

$$B_1B_2 = P^{-1}(A_1A_2)P,$$

$$kB_1 = P^{-1}(kA_1)P;$$

⑤ **特征多项式相同(逆不真)**;

⑥ **特征根相同**.

2. **特征值与特征向量**

(1) **特征矩阵、特征多项式、特征根及特征向量定义**.

(2) **矩阵** A **的特征值和特征向量的求法**:

① **求出** A **的特征多项式** $|\lambda I - A|$ **的全部不同的根** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$.

② **对每一个特征值** λ_i **求出齐次线性方程组**$(\lambda_i I - A)X = O$**的一个基础解系**$(i = 1,2,\cdots,t)$.

③ **基础解系的一切非零线性组合,就是** A **的属于特征值**λ_i **的全部特征向量**$(i = 1,2,\cdots,t)$.

注意 A **的属于不同特征值的特征向量线性无关**. A **的属于不**

同特征值的特征向量之和不再是 A 的特征向量 .

3. n 阶矩阵

n 阶矩阵 A 相似于对角形矩阵(可对角化) 的条件及对角化方法 .

(1) 充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量 .

(2) 充分条件是 A 有 n 个不同的特征值 .

(3) 充分条件是在复数域上 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 没有重根 .

(4) 如果 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 则以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为列组成可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 对应的特征值 .

4. 正交矩阵

(1) 实矩阵 T 如果满足 $T^{\mathrm{T}}T = TT^{\mathrm{T}} = I$,即 $T^{\mathrm{T}} = T^{-1}$,则称 T 是正交矩阵 .

(2) 正交矩阵的行(列) 向量组是正交单位向量组 .

5. 实对称矩阵

对于实对称矩阵 A,一定存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT = T^{\mathrm{T}}AT$ 为对角形矩阵 .

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数 . n 阶实对称矩阵有 n 个特征值(重根按重数计) .实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必正交 .

(2) 正交矩阵 T 的求法:

① 求出 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$;

② 把属于同一个特征值的特征向量正交化单位化,得到 n 个正交单位向量 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$.

③ 以 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 为列组成正交矩阵 T,则有

$$T^{-1}AT = T^{\mathrm{T}}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 对应的 A 的特征值.

6．复 n 阶矩阵

复数域上 n 阶矩阵 A 一定相似于若当标准形.初等因子组是 A 在相似关系下的不变量.

复习题五

1．求下列矩阵 A 的特征值和分别属于每一个特征值的全部特征向量.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

2．对第1题中可对角化的矩阵 A,求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

3．对下列实对称矩阵 A,求正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角形矩阵.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. **设** A, B **是同阶实对称矩阵. 证明: 存在正交矩阵** T, **使** $T^{-1}AT = B$ **的充分必要条件是** A, B **有相同的特征多项式.**

第六章

二　次　型

n 元二次齐次多项式称为二次型 .例如 $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ 是一个二元二次型 .研究二次型起源于解析几何用坐标变换化二次曲面方程或二次曲线方程为标准形 .例如在平面直角坐标系中,二次曲线

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1 \tag{1}$$

的图像是什么 ?若将坐标系逆时针旋转 45°, 得新坐标系 $O\bar{x}\bar{y}$ (如图 6 .1)

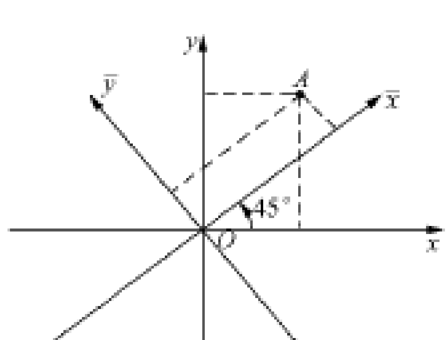


图　6 .1

平面上任一点 A 的新旧坐标关系为

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos 45^\circ - \bar{y}\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}, \\ y = \bar{x}\sin 45^\circ + \bar{y}\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}, \end{cases} \tag{2}$$

(2) 代入(1) 得

$$2\bar{x}^2 + 8\bar{y}^2 = 1,$$

即

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{8}} = 1 .$$

易见曲线是椭圆(如下图 6 .2) .

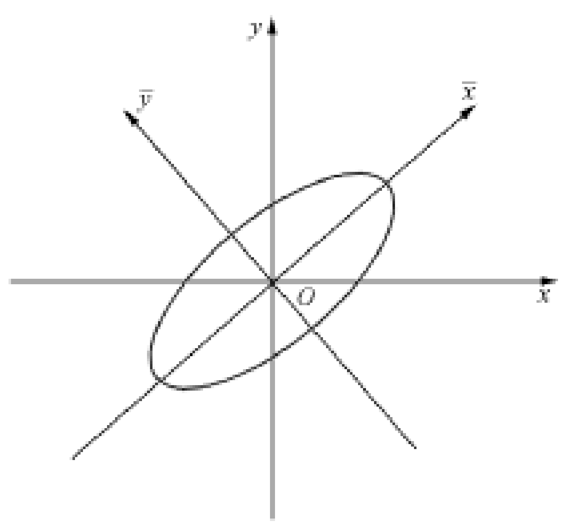


图　6 .2

§6 .1　二次型与对称矩阵

定义 6 .1 .1　数域 P 上 n 元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \cdots + b_{1\,n-1}x_1x_{n-1} + b_{1n}x_1x_n \\
+ a_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 + \cdots + b_{2\,n-1}x_2x_{n-1} + b_{2n}x_2x_n \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ a_{n-1\,n-1}x_{n-1}^2 + b_{n-1\,n}x_{n-1}x_n \\
+ a_{nn}x_n^2 .
\end{aligned}
$$

称为数域 P **上的一个** n **元二次型** .

二次型还可以用矩阵乘积表示 以 3 **元二次型为例**:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 \\
+ a_{22}x_2^2 + b_{23}x_2x_3 \\
+ a_{33}x_3^2 .
\end{aligned}
$$

当 $i \neq j$ **时**,**令** $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}b_{ij}$,**则**

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \\
&\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 \\
&\quad + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} \\
&= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= X^{\mathrm{T}}AX .
\end{aligned}
$$

其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $A = (a_{ij})_{33}$, $a_{ij} = a_{ji}$.

一般地,**数域** P **上** n **元二次型可用矩阵乘积表示为**

$$f = X^{\mathrm{T}}AX .$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $A=(a_{ij})_{nn}$, $a_{ij}\in P$, $A^{\mathrm{T}}=A$.

例 6.1.1

$$\begin{aligned} f &= 2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3 \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 6.1.2

$$\begin{aligned} f &= 5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2 \\ &= (x_1,x_2)\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 6.1.3

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2+5x_2^2-6x_3^2 \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

每一个对称矩阵确定一个二次型.

例 6.1.4 **对称矩阵**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

确定二次型

$$f=2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3.$$

例 6.1.5 **对称矩阵**

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

确定二次型

$$f = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

例 6.1.6 对称矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$$

确定二次型

$$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_3^2.$$

鉴于 n **元二次型** $f = X^{\mathrm{T}}AX$ **与对称矩阵** A **一一对应.今后称** A **的秩就是二次型** $f = X^{\mathrm{T}}AX$ **的秩.**

练习 6.1

1. **将下列各二次型用矩阵乘积表示,并指出二次型的秩数.**

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2$;

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 - x_3x_4$.

2. **写出下列对称矩阵确定的二次型,并指出二次型的秩数.**

(1) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & 3 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. 设 A 是 n 阶对称矩阵.如果对任意 n 维列向量 X 都有 $X^{T}AX = O$,求证 $A = O$.

§6.2　线性替换·合同

定义 6.2.1

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

称为由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性替换.如果矩阵$(c_{ij})_{nn}$ 是非奇异的,就称线性替换是非退化的.

例如

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

是非退化线性替换,将它代入二次型

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}5&-3\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=(y_1,y_2)\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\\&\quad\cdot\begin{bmatrix}5&-3\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\\&=(y_1,y_2)\begin{bmatrix}2&\\&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\\&=2y_1^2+8y_2^2\\&=g(y_1,y_2).\end{aligned}$$

定理 6.2.1　二次型经非退化线性替换后,得到的仍是二次型,且秩数不变.

证　设对二次型 $f=X^{\mathrm{T}}A_{nn}X_{n1}\ (A^{\mathrm{T}}=A)$,施以非退化线性替换 $X_{n1}=C_{nn}Y_{n1}\ (|C_{nn}|\neq 0)$.则

$$f=(CY)^{\mathrm{T}}A(CY)=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY=Y^{\mathrm{T}}BY=g.$$

其中 $B=C^{\mathrm{T}}AC$.因为

$$B^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C=C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

所以 $g=Y^{\mathrm{T}}BY$ 是二次型.因为 C 非奇异,所以 $A\cong B$.故而秩$(A)=$秩(B).即秩$(f)=$秩(g).

定义 6.2.2　对于 n 阶矩阵 A,B,如果存在非奇异矩阵 C 使 $C^{\mathrm{T}}AC=B$,称 A 合同于 B,记作 $A\simeq B$.

例如,因为

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\-6 & 3\end{bmatrix}.$$

所以称

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}5 & -2\\-6 & 3\end{bmatrix}.$$

读者可以证明: n 阶矩阵的合同关系具有

(1) 反身性: $A\simeq A$;

(2) 对称性: 若 $A\simeq B$,则 $B\simeq A$;

(3) 传递性: 若 $A\simeq B$, $B\simeq C$,则 $A\simeq C$.

练　习 6.2

1. 对于 n 阶矩阵证明:

(1) $A\simeq A$;

(2) 若 $A\simeq B$,则 $B\simeq A$;

(3) 若 $A\simeq B$, $B\simeq C$,则 $A\simeq C$.

2. 证明

(1) $\begin{bmatrix}a & \\ & b\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}b & \\ & a\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}a & & \\ & b & \\ & & c\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}c & & \\ & a & \\ & & b\end{bmatrix}$.

3. 若 n 阶矩阵 $A\simeq B$,问 $A\sim B$ 吗?反之,若 $A\sim B$,问必有 $A\simeq B$ 吗?

§6.3　用非退化线性替换化二次型为平方和

本节在数域 P 上讨论.

对于任意给定的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } A^{\mathrm{T}} = A .$$

用非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_{nn} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } | c_{nn} | \neq 0 .$$

可化成 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ **的二次型**

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } B = C^{\mathrm{T}} AC .$$

如果

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} .$$

那么

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2 . \tag{1}$$

称(1)为平方和或标准形.问题是,对任意一个二次型,是否都存在这样的非退化线性替换,使之化成平方和?用矩阵的语言说就是:对任意一个对称矩阵 A**,是否一定存在非奇异矩阵** C**,使** $C^{\mathrm{T}} AC$ **为对角形矩阵?**

定理 6.3.1　任意对称矩阵必合同于对角形矩阵.

证　设 $A=(a_{ij})_{nn}$,其中 $a_{ij}=a_{ji}$.

若 $A=0$,则 A 已是对角形矩阵.若 $A\neq 0$.对 A 的阶数 n 用数学归纳法.$n=1$ 时,定理显然成立.假设 $n-1$ 阶对称矩阵合同于对角形矩阵.试看 n 阶对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

情形 1　$a_{11}\neq 0$

$$\begin{aligned} & P\left[n,1\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)\right]\cdots P\left[2,1\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\right] \\ & \quad \cdot AP\left[1,2\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]\cdots P\left[1,n\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right] \\ & =\left\{P\left[1,2\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]\cdots P\left[1,n\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]\right\}^{\mathrm{T}} \\ & \quad \cdot A\left\{P\left[1,2\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]\cdots P\left[1,n\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]\right\} \\ & =\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$A \simeq \begin{bmatrix} a_{11} & \\ & A_{n-1} \end{bmatrix}.$$

其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶对称矩阵.由归纳假设,存在 $n-1$ 阶非奇异矩阵 C_{n-1} 使

$$C_{n-1}^{\mathrm{T}} A_{n-1} C_{n-1} = \begin{bmatrix} d_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}.$$

所以存在 n 阶非奇异矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & C_{n-1} \end{bmatrix},$$

使

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & C_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a_{11} & \\ & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}.$$

由合同关系的传递性,

$$A \simeq \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}.$$

情形 2　若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{i-1\,i-1} = 0$, $a_{ii} \neq 0$, $1 < i \leq n$. 作

$$\begin{aligned} P(1, i) AP(1\ i) &= P(1, i)^{\mathrm{T}} AP(1\ i) \\ &= \begin{bmatrix} a_{ii} & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

此仍为对称矩阵,归结为情形 1 .

情形 3　若 $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 有一个 $a_{1j} \neq 0$, $2 \leq j \leq n$. 作

$$P[1, j(1)] AP[j, 1(1)] = P[j, 1(1)]^{\mathrm{T}} AP[j, 1(1)]$$

$$
= \begin{bmatrix} 2a_{1j} & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} .
$$

此仍为对称矩阵,归结为情形 1 .

情形 4　**若** $a_{ii} = 0, i = 1,2,\cdots, n, a_{1j} = 0, j = 2,3,\cdots, n$.**即**

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},
$$

其中

$$
A_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & 0 & \ddots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{bmatrix}
$$

是 $n-1$ **阶对称矩阵** .**由归纳假设存在** $n-1$ **阶非奇异矩阵** C_{n-1} ,**使**

$$
C_{n-1}^{T} A_{n-1} C_{n-1} = \begin{bmatrix} d_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix},
$$

所以有 n **阶非奇异矩阵**

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & \\ & C_{n-1} \end{bmatrix}
$$

使

$$
C^{T} AC = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} .
$$

总之,**若** $A^{\mathrm{T}} = A$,**则**

$$A \simeq \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}.$$

继续对

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

作成双换法变换,**得**

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} d_{i1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{ir} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $d_{i1}, d_{i2}, \cdots, d_{ir} \neq 0$, $r =$ **秩**(A) .

定理 6.3.2 (**二次型基本定理**) **对任意一个二次型**

$$f = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (A^{\mathrm{T}} = A)$$

必存在非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = C_{nn} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (|C_{nn}| \neq 0)$$

使

$$f = (y_1, y_2, \cdots, y_n) C^{\mathrm{T}} A C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2,$$

其中 r = 秩(f).

上述两个定理给出了用成双初等变换化二次型为平方和的方法：已知

$$f = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (A^{\mathrm{T}} = A).$$

设所求的非退化线性替换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_{nn} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\mid c_{nn} \mid \neq 0) .$$

那么 $C = P_1 P_2 \cdots P_s$, P_i **是初等矩阵**, $i = 1, 2, \cdots, s$.**于是**

$$C^{\mathrm{T}} AC = P_s^{\mathrm{T}} \cdots P_2^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} AP_1 P_2 \cdots P_s$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} .$$

同时有

$$IP_1 P_2 \cdots P_s = C .$$

得方法:

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{对}\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}\text{作相应的初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 作行的初等变换}} \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ \hline & & & C & & \end{bmatrix} .$$

这种针对对称矩阵 A, **找非奇异矩阵** C, **使** $C^{\mathrm{T}} AC$ **为对角形矩阵的方法亦称对** A **的合同变换** .

例 6.3.1　**用非退化线性替换化下列二次型为平方和, 并写出所用的线性替换** .

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 .$$

解　$f(x_1, x_2, x_3)$ **的矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

用成双初等变换将 A **化成对角形矩阵**:

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{①+②} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{①+②} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-\frac{1}{2}①]{②-\frac{1}{2}①} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-\frac{1}{2}①]{②-\frac{1}{2}①} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{③+5②}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 12 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+5②}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

得非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

将 $f(x_1, x_2, x_3)$ **化成平方和** $2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 12y_3^2$.

例 6.3.2 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

求非奇异矩阵 C,**使** $C^{\mathrm{T}}AC$ **为对角形矩阵**.

解法 1

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+\frac{1}{2}①]{②-\frac{1}{2}①} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+\frac{1}{2}①]{②-\frac{1}{2}①} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{③+2②} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+2②} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

得

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

使

$$C_1^{\mathrm{T}} A C_1 = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & -2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

解法 2

$$
\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\textcircled{1}\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\textcircled{1}\textcircled{3}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\textcircled{3}+2\textcircled{1}]{\textcircled{2}-3\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -10 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\textcircled{3}+2\textcircled{1}]{\textcircled{2}-3\textcircled{1}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\textcircled{3}+\frac{8}{10}\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{64}{10} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{\textcircled{3}+\frac{8}{10}\textcircled{2}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & -3 & -\frac{2}{5} \end{array}\right].
$$

得

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & -3 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

使

$$C_2^{\mathrm{T}} A C_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -10 & \\ & & \frac{32}{5} \end{bmatrix}.$$

练　习　6.3

1. **用非退化线性替换化下列二次型为平方和，并写出所用的线性替换**：

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$；

(2) $-2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$；

(3) $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$；

(4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$.

2. **求非奇异矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角形矩阵**：

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$；

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

§6.4 二次型规范形的惟一性

从例 6.3.2 可以看出，一个对称矩阵可以合同于不同的对角形矩阵．或者说，一个二次型用不同的非退化线性替换可以化成不同的平方和．本节限定在复数域上和实数域上讨论二次型平方和之最简形式．先看例．

练习 6.3 第 1 题中第(3) 小题

$$f = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

经非退化线性替换化成平方和

$$f_1 = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 4y_3^2 .$$

在实数域上继续化简平方和 f_1：

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{②③} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{②③} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{\sqrt{2}}① \\ \frac{1}{2}② \\ \sqrt{2}③}} \left[\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & & \\ & 2 & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{①}\\ \dfrac{1}{2}\text{②}\\ \sqrt{2}\text{③}\end{array}\left[\begin{array}{ccc}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\\ \hline \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0\end{array}\right].$$

f_1 **经非退化线性替换**

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}$$

化成平方和

$$f_2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 .$$

在复数域上还可继续化简平方和 f_2:

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\mathrm{i}\text{③}}\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\mathrm{i}\text{③}}\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{i}\end{array}\right].$$

f_2 **经非退化线性替换**

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

化成平方和

$$f_3 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2.$$

一般地，先看复数域上的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. **设** $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **经非退化线性替换** $X = CY$ **化成平方和**

$$f_1 = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2,$$

$$d_1, d_2, \cdots, d_r \neq 0, \ r = \text{秩}(f).$$

因为在复数域中，非零数总可以开平方，所以有

$$\left[\begin{array}{ccccccc} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{\sqrt{d_1}}① \\ \frac{1}{\sqrt{d_2}}② \\ \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{d_r}}ⓡ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & & & & \\ & \sqrt{d_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{d_r} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ \hline 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{\sqrt{d_1}}① \\ \frac{1}{\sqrt{d_2}}② \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{d_r}}ⓡ}]{} \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 1 \quad \ddots \quad 1}^{r\text{个}} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ \hdashline \frac{1}{\sqrt{d_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{d_2}} \quad \ddots \quad \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

即 f_1 经非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

化成最简平方和

$$f_2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 .$$

称 f_2 是 f 在复数域上的规范形.规范形完全由秩$(f) = r$ 惟一确定.因此有

定理 6.4.1 任一复二次型总可经非退化线性替换化成规范形.规范形是惟一的.用矩阵的语言可叙述为:任一复对称矩阵 A 都合同于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{r\text{个}} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} .$$

称为 A 的合同标准形,其中 $r =$ 秩(A).复对称矩阵的阶数和秩数是它在合同关系下的不变量.

再看实数域上的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 经非退化线性替换 $X = CY$ 化成平方和

$$f_1 = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2 ,$$

其中 $d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, r, r =$ 秩(f).因为在实数域中正数可以开平方,所以有

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
d_1 & & & & & & & & \\
& d_2 & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & \\
& & & d_p & & & & & \\
& & & & -d_{p+1} & & & & \\
& & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & -d_r & & \\
& & & & & & & 0 & \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & 0 \\
\hline
1 & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & & \\
& & & \ddots & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{d_r}}ⓡ]{\frac{1}{\sqrt{d_1}}①\ \frac{1}{\sqrt{d_2}}②\ \cdots}
\left[\begin{array}{cccccccccc}
\sqrt{d_1} & & & & & & & & & \\
 & \sqrt{d_2} & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & \sqrt{d_p} & & & & & & \\
 & & & & -\sqrt{d_{p+1}} & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -\sqrt{d_r} & & & \\
 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 0 \\
\hline
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{\sqrt{d_1}}\text{①}\\ \frac{1}{\sqrt{d_2}}\text{②}\\ \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{d_r}}\text{ⓡ}}]{}
\left[\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
 & 1 \\
 & & \ddots \\
 & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & -1 \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 0 \\
\hline
\frac{1}{\sqrt{d_1}} \\
 & \frac{1}{\sqrt{d_2}} \\
 & & \ddots \\
 & & & \ddots \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} \\
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right].$$

即 f_1 经非退化线性替换

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_2}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{d_r}} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

化成最简平方和

$$f_2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

称 f_2 是 f 在实数域上的规范形.规范形由 r, p 惟一确定.

定理 6.4.2 (惯性定理、惰性律) 任一实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可经非退化线性替换化成规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

其中 $r =$ 秩(f),规范形是惟一的.

证 定理的前一个结论已经证明.以下证明惟一性.设 f 经非退化线性替换 $X = C_1 Y$(其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$)化成规范形

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

而经非退化线性替换 $X = C_2 Z$(其中 $Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$)化成规范形

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2.$$

以下欲证明 $p = q$.

反证法 假设 $p > q$.由以上假设应有

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2, \tag{1}$$

其中

$$Z = C_2^{-1} C_1 Y. \tag{2}$$

令 $C_2^{-1} C_1 = G = (g_{ij})_{nn}$.于是(2) 可具体表示为

$$\begin{cases} z_1 = g_{11} y_1 + g_{12} y_2 + \cdots + g_{1n} y_n, \\ z_2 = g_{21} y_1 + g_{22} y_2 + \cdots + g_{2n} y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = g_{n1} y_1 + g_{n2} y_2 + \cdots + g_{nn} y_n. \end{cases} \tag{3}$$

取齐次线性方程组

$$\begin{cases} g_{11} y_1 + g_{12} y_2 + \cdots + g_{1n} y_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{q1} y_1 + g_{q2} y_2 + \cdots + g_{qn} y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

因为 $p > q$,所以(4) 的方程个数

$$q + (n - p) = n - (p - q)$$

小于未知量个数 n,于是(4) 有非零解 .设

$$(y_1, y_2, \cdots, y_p, y_{p+1}, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} = (k_1, k_2, \cdots, k_p, k_{p+1}, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$$

是(4) 的一个非零解 .显然 $k_{p+1} = \cdots = k_n = 0$.将这个非零解代入(1),左边得

$$k_1^2 + \cdots + k_p^2 > 0.$$

这个非零解通过(3) 代入(1) 的右边,得

$$-z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2 \leq 0.$$

矛盾 .这就证明了 $p \leq q$.

同理可证 $q \leq p$,从而 $p = q$.这就证明了实二次型的规范形是惟一的 .

定义 6.4.1 在实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形中, $r =$ 秩(f),正平方项的个数 p 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 .$r - p$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的负惯性指数 .$p - (r - p) = 2p - r$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的符号差 .

因为 n 元实二次型与 n 阶实对称矩阵一一对应 .定理 6.4.2 和定义 6.4.1 可用矩阵的语言叙述为: 任一 n 阶实对称矩阵 A 合同于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}}_{p个} & \\ & \begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}\end{matrix}}^{r个} & \\ & \begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix} \end{bmatrix} .$$

称为 A 的合同标准形 .

阶数 n,秩数 r 和正惯性指数 p 是实对称矩阵在合同关系下的完备不变量系 .

练 习 6.4

1. 用非退化线性替换化练习 6.3 第 1 题诸二次型为实规范形和复规范形,并写出所用的线性替换 .

2. 求练习 6.3 第 2 题诸对称矩阵在实数域上的合同标准形,并指出其秩数,正、负惯性指数和符号差 .

3. 两个复对称矩阵合同的充分必要条件是什么 ?全体 n 阶复对称矩阵按合同分类共有多少类 ?

4. 两个实对称矩阵合同的充分必要条件是什么 ?全体 n 阶实对称矩阵按合同分类共有多少类 ?

§6.5　正定二次型

本节在实数域上讨论.正定二次型是实二次型中常用的一种.例如 $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$.本节给出正定二次型定义和判别法.

定义 6.5.1　实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

如果对于任意不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$,称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型.也称实对称矩阵 A 是正定矩阵.

例 6.5.1　$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 是正定的.

例 6.5.2　证明实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

正定的充分必要条件是实数 $d_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证　充分性显然成立.现在证必要性.已知 $d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$ 正定,根据定义 6.5.1 代入任意不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有 $d_1 c_1^2 + d_2 c_2^2 + \cdots + d_n c_n^2 > 0$.我们取 $c_i = 1$, $c_j = 0$, $j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$ 代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 得 $d_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

由以上两个例题可见,如果实二次型是平方和或规范形,则很容易判断它是否正定.而对一般的实二次型又如何判断其是否正定呢?我们知道任一实二次型都可经非退化线性替换化成平方和或规范形,问题是非退化线性替换会不会改变实二次型的正定性?

预备定理　正定二次型经非退化线性替换后仍为正定二次型.

证　设实二次型 $f = X^{\mathrm{T}} AX$ 正定,经非退化线性替换 $X = CY$

有

$$f = (CY)^{\mathrm{T}} A(CY) = Y^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} ACY = Y^{\mathrm{T}} BY = g,$$

其中 $C^{\mathrm{T}} AC = B$.任取实 n 维列向量 $Y_0 \neq 0$.因为 C 非奇异,所以有 $CY_0 = X_0 \neq 0$,将 $Y_0 = C^{-1} X_0$ 代入 g:

$$\begin{aligned} g = Y_0^{\mathrm{T}} BY_0 &= (C^{-1} X_0)^{\mathrm{T}} (C^{\mathrm{T}} AC)(C^{-1} X_0) \\ &= X_0^{\mathrm{T}} (C^{-1})^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} ACC^{-1} X_0 \\ &= X_0^{\mathrm{T}} (C^{\mathrm{T}})^{-1} C^{\mathrm{T}} AIX_0 \\ &= X_0^{\mathrm{T}} AX_0 > 0, \end{aligned}$$

故 g 正定.

这样我们得到了用平方和或规范形判定实二次型是否正定的方法:

定理 6.5.1 n 元实二次型正定的充分必要条件是其正惯性指数 $p = n$.

推论 6.5.1 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 $A \simeq I$.

推论 6.5.2 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是存在实非奇异矩阵 C 使 $A = C^{\mathrm{T}} C$(读者自证).

推论 6.5.3 实对称矩阵 A 正定,则 $|A| > 0$(读者自证).

注意 推论 6.5.3 的逆不真.例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

例 6.5.3 判定实二次型 $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2 x_3$ 是否正定?

解 实二次型的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

对 A 的行、列施行成双的初等变换,化 A 为合同标准形:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{②-①}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&2&4\end{bmatrix}\xrightarrow{②-①}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2②}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{③-2②}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

A 的正惯性指数 $p=2\neq$ A 的阶数 3 所以二次型不是正定的 .

例 6.5.4　判定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{bmatrix}$$

是否正定 ?

解　求 A 的合同标准形:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{②-①}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{②-①}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2②}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{③-2②}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

因为 A D I,所以 A 正定 .

下面我们探讨从实二次型本身判断它是否正定的方法,先给出

定义 6.5.2　n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的 k 阶顺序主子式指

$$|A_k|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&3\\4&5&0\end{bmatrix},$$

$$|A_1|=1,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2,\quad |A_3|=|A|=5.$$

为了证明下面的判别定理6.5.2,**先作如下一些准备**:

命题6.5.1 **实二次型**

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}\\&(a_{ij}=a_{ji}),\end{aligned}\tag{1}$$

中置 $x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_n=0$,**得** k **元实二次型**

$$\begin{aligned}&f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)\\&=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_k\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2}$$

命题6.5.2 **若**(1)**正定**,**则**(2)**正定**.**反证法**:**假设有不全为零的实数** $c_1,c_2,\cdots,c_k$ **使** $f_k(c_1,c_2,\cdots,c_k)\leq 0$,**那么再补上** $n-k$ **个零**,**将** $(c_1,c_2,\cdots,c_k,0,\cdots,0)$ **代入**(1),**则** $f(c_1,c_2,\cdots,c_k,0,\cdots,0)\leq 0$ **此与**(1)**正定矛盾**.

命题6.5.3 **若** $A\simeq B$,**且** $|B|>0$,**则** $|A|>0$.**事实上**,**若** $A\simeq B$,**则存在非奇异矩阵** C **使** $A=C^{\mathrm{T}}BC$,**取行列式** $|A|=|B||C|^2>0$.

定理6.5.2 **实二次型** $f=X^{\mathrm{T}}AX$ **正定的充分必要条件是** A **的**

各阶顺序主子式全大于零 .

证　设(1) 是正定二次型, 则(2) 也是正定二次型 .由命题 6.5.3 知 $A_k \simeq I_k$, 故 $|A_k| > 0$, $k = 1,2,\cdots,n$.反之, 设 $A = (a_{ij})_{nn}$ 的各阶顺序主子式都大于零 以下证明: 可以用对行、列作同样初等变换的方法把 A 化为 I .首先, $|A_1| > 0$ 表明 $a_{11} > 0$.以 $a_{11}^{-\frac{1}{2}}$ 乘 A 的第 1 行和第 1 列, 则 A 左上角元素变成 1 .假设对 A 的前 $k-1$ 行, $k-1$ 列作同样初等变换,已把 A 化为下面形式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & b_1 & * & \cdots & * \\ & 1 & & & b_2 & \cdots & & * \\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & 1 & b_{k-1} & \cdots & & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{k-1} & b_{kk} & \cdots & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其左上角是 $k-1$ 阶单位矩阵 I .用第 i 行的 $-b_i$ 倍加到第 k 行;用第 i 列的 $-b_i$ 倍加到第 k 列上($i = 1,2,\cdots,k-1$),(3) 化为下面形式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & 1 & & & 0 & \cdots & & \cdots \\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & 1 & 0 & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & \cdots & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix}, \tag{4}$$

所以(4) 中

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{bmatrix} \simeq A_k .$$

因为 $|A_k| > 0$.由命题 6.5.3 知(4) 中第 k 阶顺序主子式

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{vmatrix} = c > 0 .$$

用 $c^{-\frac{1}{2}}$ 乘(4) 的第 k 行、第 k 列,则(4) 化为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & 1 & & & 0 & \cdots & & \cdots \\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & 1 & 0 & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \cdots \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix} .$$

其左上角是 k 阶单位矩阵 I.如此继续下去, $A \simeq I$.由推论6.5.1 知 A 正定.

例 6.5.5 判定实二次型

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

是否正定.

解　实二次型的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A 的各阶顺序主子式

$$|A_1| = 1 > 0,\quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$|A_3| = |A| = 1 > 0.$$

所以 A 是正定矩阵.二次型是正定的.

例 6.5.6　判定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

是否正定.

解　因为 $|A_3| = |A| = 0$,所以 A 不是正定矩阵.

练　习　6.5

1. 判定练习 6.3 第 1 题诸实二次型是否正定.
2. 判定练习 6.3 第 2 题诸实对称矩阵是否正定.
3. t 取何值时,下列实二次型是正定的?

(1) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(2) $x_1^2 + tx_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4. 已知 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定.求证 $X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 和 X^{T}飒X 也是正定的.
5. 已知 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $X^{\mathrm{T}}BX$ 都是正定的.求证 $X^{\mathrm{T}}(A+B)X$ 也是正定的.

本章复习提纲

1. 二次型及其矩阵

(1) n 元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)(a_{ij})_{nn}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= X^{\mathrm{T}} AX$$

(其中 $A = (a_{ij})_{nn}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$) 称为二次型 .

(2) n元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 与 n 阶对称矩阵 A 一一对应 .A 的秩数称为二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩数 .

2. **线性替换 .合同**

(1)

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

亦即

$$X = CY,$$

其中

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},$$

$$C = (c_{ij})_{nn},$$

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$$

称为线性替换 .如果 C 是可逆矩阵,称 $X = CY$ 是非退化线性替换 .

(2) 二次型经非退化线性替换后得到的仍是二次型,且秩数不变 .

(3) 对于 n 阶矩阵 A, B 如果存在可逆矩阵 C 使

$$C^{\mathrm{T}}AC = B,$$

则称 A 合同于 B .记作 $A \simeq B$.

矩阵的合同关系具有反身性、对称性和传递性 .

3. 二次型基本定理

二次型总可经非退化线性替换化成平方和 .用矩阵的语言表述为: 对称矩阵一定合同于对角形矩阵 .

用成双初等变换化二次型为平方和的方法: 设 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ $(A^{\mathrm{T}} = A)$.

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{对}\left[\begin{smallmatrix} A \\ I \end{smallmatrix}\right]\text{作相应的初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 作行的初等变换}} \left[\begin{array}{ccc} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \\ \hline & C & \end{array}\right].$$

$X = CY$ 为非退化线性替换 .$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 为平方和 .

4. 规范形

(1) n 元复二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 可经非退化线性替换化成规范形

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2,$$

其中 $r =$ 秩(f) .用矩阵的语言表述为: n 阶复对称矩阵 A 合同于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^{r\text{个}} & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $r =$ 秩(A) .

(2) n 元实二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 可经非退化线性替换化成规范形

$$f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

其中 $r=$ 秩(f)(惯性定理).称 p 是 f 的正惯性指数;$r-p$ 是 f 的负惯性指数;$p-(r-p)=2p-r$ 是 f 的符号差.用矩阵的语言表述为:n 阶实对称矩阵 A 合同于对角形矩阵

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\underbrace{1 & & }_{p\text{个}} & & } & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1^{\;r\text{个}} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $r=$ 秩(A).称 p 是 A 的正惯性指数;$r-p$ 是 A 的负惯性指数;$p-(r-p)=2p-r$ 是 A 的符号差.

5.用正交替换化实二次型为平方和

(1) 实二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 与实对称矩阵 A 一一对应.

(2) 对于实对称矩阵 A,一定存在正交矩阵 T 使

$$T^{\mathrm{T}}AT=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.因为正交矩阵 T 有性质 $T^{\mathrm{T}}=T^{-1}$,所以也可以说:实对称矩阵一定正交合同于对角形矩阵.

(3) 如果线性替换 $X=TY$ 中 T 是正交矩阵,则称 $X=TY$ 是正交替换.

(4) 对于实二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$,一定存在正交替换 $X=TY$ 使 f 化成平方和

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.

6.正定二次型与正定矩阵

(1) 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 如果对于任意不全为零的实数

$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$,则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型 如果 $f = X^{\mathrm{T}} AX$ 是正定二次型,则称 A 是正定矩阵 .

(2) 正定二次型(正定矩阵) 判别法(必要充分条件) .

① n 元实二次型 $f = X^{\mathrm{T}} AX$ 的正惯性指数 $p = n$.

② A D I .

③ A 的各阶顺序主子式全大于零 .

④ A 的特征值全大于零 .

复 习 题 六

1. 用非退化线性替换化下列二次型为平方和,并写出所用的非退化线性替换:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$;

(4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_3x_4$.

2. 分别在实数域和复数域上求第 1 题各二次型的规范形及所用的非退化线性替换 .

3. 指出第 1 题中各实二次型的秩数,正、负惯性指数及符号差 . 又问哪个二次型是正定的 ?

4. 判定下列实二次型是否正定 .

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_4 - 2x_3x_4$.

5. 证明: A 是正定矩阵的充分必要条件是存在实可逆矩阵 C, 使 $A = C^{\mathrm{T}}C$.

6. 用正交替换化下列实二次型为平方和,并写出所用的正交替换:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

又问 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定的吗 ?

第七章

线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是线性代数最基本的概念.我们在第三章将几何空间推广到数域 P 上 n 维向量空间 P^n, P^n 就是一个具体的线性空间.第六章中的非退化线性替换就是 P^n 的一个具体的线性变换.但是数学研究的对象远不止是 n 元有序数组.就我们已见过的矩阵、实函数、多项式等都是数学研究的对象,它们在各自所属的集合中都定义有具体的加法和数量乘法.为了对具有线性运算的集合进行统一的研究,本章给出线性空间与线性变换定义,介绍一些简单的性质,这将有助于读者对前六章所学的线性代数知识有更深入的理解和更简捷的把握.

§7.1　线性空间定义与简单性质

加法定义　设 V 是一个非空集合,如果在 V 的元素间存在一个法则:对于 V 中任意两个元素 α, β,按照这个法则都有 V 中惟一确定的元素 γ 与之对应,则称这个法则为加法.称 γ 是 α 与 β 的和,记作 $\gamma = \alpha + \beta$.

数量乘法定义　设 V 是一个非空集合，P 是一个数域.如果在 P 中的数与 V 中的元素间存在一个法则：对于 P 中任意数 k 与 V 中任意元素 α，按照这个法则有 V 中惟一确定的元素 β 与之对应，称这个法则为数量乘法，称 β 是 k 与 α 的乘积，记作 $\beta = k\alpha$.

线性空间定义　设 V 是一个非空集合，其中的元素称为向量.设 P 是一个数域.如果在 V 中存在加法，在 P 与 V 间存在数量乘法，且这两种运算(统称线性运算)满足下面八条公理，则称 V 是数域 P 上的线性空间或向量空间：

1．$\alpha + \beta = \beta + \alpha$；

2．$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；

3．V 中存在零向量 O，即对任意 $\alpha \in V$，恒有 $\alpha + O = \alpha$；

4．对于 V 中每一个向量 α，都有 V 中一个向量 β 使 $\alpha + \beta = O$.称 β 是 α 的负向量.记作 $\beta = -\alpha$；

5．$1 \cdot \alpha = \alpha$；

6．$k(l\alpha) = (kl)\alpha$；

7．$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$；

8．$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$，

其中 α, β, γ 表示 V 中任意向量，k, l 表示 P 中任意数.

根据以上定义，平面上所有向量关于向量的加法和数量乘法构成实数域上的线性空间；几何空间是实数域上的线性空间；数域 P 上全体 n 维向量 P^n 是数域 P 上的线性空间，下面再举几个例.

例 7.1.1　以数域 P 中数为元素的 $s \times n$ 矩阵全体，关于矩阵的加法和数量乘法构成数域 P 上的线性空间.

例 7.1.2　全体实函数关于函数的加法和数与函数的乘法构成实数域上的线性空间.

例 7.1.3　数域 P 上一元多项式

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

的全体 $P[\lambda]$，关于多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域 P 上的线性空间.

例 7.1.4　实数域 R 上无穷序列 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots)$ 的全体记作

V.任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots),\beta=(b_1,b_2,\cdots)\in V,k\in R$ 有线性运算 $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots),k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots)$.$V$ 是实数域 R 上的线性空间.

数学高度的抽象性决定了它广泛的应用性.下面我们摆脱各种各样具体的线性空间,仅从抽象的线性空间定义出发,证明线性空间的一些简单性质.这种证明称为公理化证明.

设 V 是数域 P 上的一个线性空间.

性质1 V 中只有一个零向量.

证 设 O_1,O_2 都是 V 中的零向量.根据公理3

$$O_1+O_2=O_1 \quad 与 \quad O_2+O_1=O_2$$

同时成立.又根据公理1

$$O_1+O_2=O_2+O_1,$$

所以 $O_1=O_2$.

性质2 V 中每一个向量只有一个负向量.

证 设 V 中向量 α 有两个负向量 β_1 与 β_2.由公理4

$$\alpha+\beta_1=O \quad 与 \quad \alpha+\beta_2=O$$

同时成立.那么

$$\begin{aligned}\beta_1&=\beta_1+O=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=(\beta_1+\alpha)+\beta_2\\&=(\alpha+\beta_1)+\beta_2=O+\beta_2=\beta_2+O=\beta_2,\end{aligned}$$

所以 $\beta_1=\beta_2$.

这说明 α 的负向量是由 α 惟一确定的.这就是为什么在公理4中将 α 的负向量记作 $-\alpha$ 的缘故.

利用负向量可以定义向量的减法:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

性质3 $0\alpha=O,kO=O,(-1)\alpha=-\alpha$.

证 先证 $0\alpha=O$,因为

$$\alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=1\alpha=\alpha,$$

上式两边加 $-\alpha$,得 $0\alpha = O$.

然后证 $kO = O$,因为 $0\alpha = O$,所以 $0O = O$.故有

$$kO = k(0O) = (k \cdot 0)O = 0O = O.$$

最后证 $(-1)\alpha = -\alpha$,只需证明 $(-1)\alpha$ 是 α 的负向量即可.因为

$$\begin{aligned}\alpha + (-1)\alpha &= 1\alpha + (-1)\alpha \\ &= (1-1)\alpha = 0\alpha = O,\end{aligned}$$

所以 $(-1)\alpha = -\alpha$.

性质 4　如果 $k\alpha = O$,那么 $k = 0$ 或 $\alpha = O$.

证　如果 $k = 0$,则证完.如果 $k \neq 0$,于是一方面

$$k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}O = O;$$

另一方面

$$k^{-1}(k\alpha) = (k^{-1}k)\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

所以 $\alpha = O$.

练　习　7.1

1. 证明: n 元齐次线性方程组的全部解,关于 n 维向量的加法和数量乘法构成数域 P 上的线性空间.

2. 证明: 全体 n 阶实对称矩阵,关于矩阵的加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

3. P 是数域, V 中只有一个零元素 O,定义加法: $O + O = O$,数量乘法: $kO = O(k \in P)$.证明 V 是数域 P 上的一个线性空间.

4. 利用线性空间定义和性质证明:

(1) $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$;

(2) $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$;

(3) $(k - l)\alpha = k\alpha - l\alpha$;

(4) 若 $k \neq 0$, $\alpha \neq O$ 则 $k\alpha \neq O$.

§7.2 维数·基与坐标

为了弄清楚线性空间的构造,首先要了解其中向量的线性关系,为此重新给出以下定义.设 V 是数域 P 上的线性空间.

定义 7.2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 V 中一组向量,$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是 P 中一组数.则称向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合.如果有向量 β 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s.$$

则称 β 可表为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合,或称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

定义 7.2.2 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中每一个向量都可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出.则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出.如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以互相线性表出,则称这两个向量组等价.记作 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$.

定义 7.2.3 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$,如果有不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = O,$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.否则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

定义 7.2.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 中的一个线性无关部分组.如果 S 中其余任一个向量 α_i(如果还有的话)添进来,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_i$ 都线性相关,则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 S 的一个极大线性无关组,简称极大无关组.

定义 7.2.5 向量组 S 的极大线性无关组所含向量个数称为向量组 S 的秩数或秩.

以上定义,我们在第三章数域 P 上 n 维向量空间 P^n 中已很熟

悉.如今把第三章 P^n 换成一般线性空间 V;把 n 元有序数组换成 V 中的元素.那么第三章有关向量线性关系的定理可以一字不改地搬到 V 中来.例如在数域 P 上线性空间 V 中也有

定理 7.2.1　设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出,且表示法惟一.

故在一般线性空间中有关向量线性关系的定理不再赘述,本章直接使用.

定义 7.2.6　如果数域 P 上线性空间 V 有极大线性无关组,则称这个极大线性无关组是 V 的一个基底,简称基.基底所含向量个数称为 V 的维数,记作维(V).如果 V 中没有非零向量,则称维$(V)=0$,若 V 的线性无关部分组中没有极大者,就称 V 是无限维的.

由这个定义可以看出:线性空间如果有基底,则基底不惟一.

例 7.2.1　在直角坐标平面中(如图 7.1),正交单位向量组 i, j 就是实平面线性空间的一个基.其实平面上任意两个不共线(不平行)的向量都是基底.

例 7.2.2　在空间直角坐标系中(如图 7.2)正交单位向量组 i, j, k 就是几何空间的一个基.其实任意三个不共面的向量都是几何空间的基.

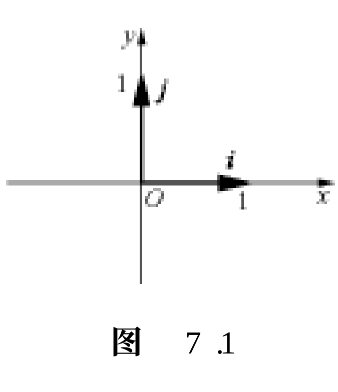


图　7.1

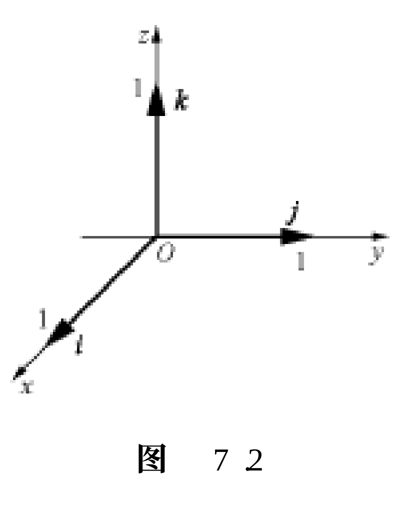


图　7.2

例 7.2.3　P^n 中 n 维基本向量组

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0),$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$$

就是 P^n 的一个基.其实 P^n 中任意 n 个线性无关的向量都是 P^n 的基.

例 7.2.4 齐次线性方程组如果有非零解,那么任一个基础解系都是解空间的基.

由定义 7.2.6 还可以看出:线性空间的维数就是线性空间的秩数.因此线性空间的维数是惟一确定的.例如,直线上所有向量构成实数域上的 1 维线性空间;平面上所有向量构成实数域上的 2 维线性空间;几何空间是实 3 维空间;P^n 是 n 维线性空间.设 n 元齐次线性方程组 $A_{sn}X_{n1} = O_{s1}$ 系数矩阵秩为 $r(< n)$.那么解空间是 $n-r$ 维的.

只含一个零向量的线性空间是零维的.例如只有零解的齐次线性方程组,其解空间是零维的.

下面是一个无限维线性空间的例子.

例 7.2.5 V 是实数域上所有形如 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots)$ 的无穷实数列构成的实数域上的线性空间.以下证明 V 是无限维的.用反证法,假设 V 是有限维的,设维$(V) = n$,取 V 中 $n+1$ 个向量 $\varepsilon_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 其中第 i 个分量为 1,其余分量为 $0(i=1,2,\cdots,n+1)$,如果

$$k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_{n+1}\varepsilon_{n+1} = O,$$

即

$$(k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}, 0, \cdots) = (0,0,\cdots,0,0,\cdots),$$

那么 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n+1} = 0$,这表明 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n+1}$ 线性无关,此与维$(V) = n$ 矛盾.故 V 是无限维的.

本章只讨论有限维线性空间.

设 V 是数域 P 上的线性空间,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基,V 中任一向量 α 都可由这个基线性表示,即

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n, \tag{1}$$

且表示法惟一.我们有

定义 7.2.7　称(1)中$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.

例 7.2.6　在实平面线性空间(如图 7.3)中,因为向量 $\alpha = 2i + j$,所以向量 α 在基 i, j 下的坐标是$(2,1)$.

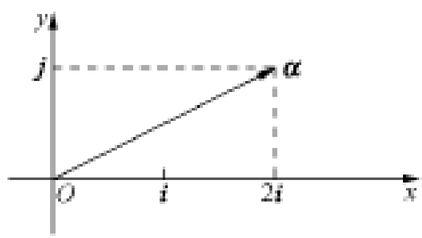


图　7.3

例 7.2.7　R 是实数域,V 是 2 阶实对称矩阵的全体.V 关于矩阵的加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这是 V 的一个基.维$(V) = 3$, V 中任一向量

$$\beta = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

都可由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 惟一线性表出:

$$\beta = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3,$$

(a, b, c)就是 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基,则 V 中向量

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$$

与 P^n 中向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$一一对应,且这种对应保持线性运算.即如果 V 中向量

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n,$$

那么 P^n 中与之对应的向量就是$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$,此时有

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + (a_2 + b_2)\alpha_2 + \cdots + (a_n + b_n)\alpha_n$$

与 P^n 中向量$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$对应,任取数 $k \in P$,那么

$$k\beta = (ka_1)\alpha_1 + (ka_2)\alpha_2 + \cdots + (ka_n)\alpha_n$$

与 P^n 中向量 $k(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$对应.我们把数域 P 上 n 维线性空间 V 与 P^n 的这种对应关系称为同构.

例如,平面向量空间与 R^2 同构,几何空间与 R^3 同构,例 7.2.7 的 2 阶实对称矩阵空间与 R^3 同构.因此,我们把 P^n 作为一切数域 P 上 n 维线性空间的代数模型.研究 n 维线性空间的问题都可以转化为对 P^n 的研究.这对于数字时代各个领域普遍用计算机处理问题具有十分重要的实践意义.这也就是我们在第三章首先向读者介绍 P^n 这一具有代表性的线性空间的缘故.

n 维线性空间的基底不止一个,因此一个向量在不同基下的坐标是不同的.这就引出了基变换与坐标变换问题.

定义 7.2.8 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间的两个基.β_j 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标是$(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T$, $j = 1, 2, \cdots, n$,即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

称 $A = (a_{ij})_{nn}$ 是由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

定理 7.2.2 基的过渡矩阵是可逆的.

证 设 $A = (a_{ij})_{nn}$ 是(2)中基的过渡矩阵.假设

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

将(2)两边右乘$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

得

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = O.$$

因为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$V$的一个基,线性无关,所以$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$,这说明齐次线性方程组(3)只有零解.故秩$(A) = n$,即$A$可逆.

将(2)的两边右乘A^{-1},得

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)A^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

可见基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$到基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的过渡矩阵是$A^{-1}$.

定理 7.2.3　设基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的过渡矩阵是$A$,$V$中任一向量$\alpha$在这两个基下的坐标分别为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$和$(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

证 已知

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A, \tag{4}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

将(4)代入(5)右边:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

由坐标的惟一性得

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{6}$$

或

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

(6)和(7)称为坐标变换公式.

练　习　7.2

1. 设 α, β, γ 是数域 P 上线性空间 V 中的一组线性无关的向量. 求证: 向量组 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也线性无关.

2. 在线性空间 V 中证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是每一个 $\alpha_i (i = 2,3,\cdots, r)$ 都不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

3. V 是数域 P 上全体 $s\times n$ 矩阵构成的线性空间, 求 V 的维数和一个基.

4. V 是数域 P 上全体 n 阶上三角矩阵构成的线性空间, 求 V 的维数和一个基.

5. V 是数域 P 上全体 n 阶反对称矩阵构成的线性空间, 求 V 的维数和一个基.

6. 若 n 维线性空间 V 中每一个向量都可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基.

7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的基. $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ $(r < n)$ 是 V 中一组线性无关的向量. 求证: 从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中可以找到 $n-r$ 个向量补充到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 中, 使其构成 V 的一个基.

8. 在 P^4 中求向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标:

(1) $\alpha = (2,0,4,-2)$,
$\alpha_1 = (1,1,1,1)$,
$\alpha_2 = (1,1,-1,-1)$,
$\alpha_3 = (1,-1,1,-1)$,
$\alpha_4 = (1,-1,-1,1)$.

(2) $\alpha = (4,2,4,10)$,
$\alpha_1 = (1,2,3,4)$,
$\alpha_2 = (2,3,4,1)$,
$\alpha_3 = (3,4,1,2)$,
$\alpha_4 = (4,1,2,3)$.

9. 在 P^3 中求基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 A; 并求向量 $\alpha = (5,15,15)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标. 其中

$$\varepsilon_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_1 = (1,0,3)^{\mathrm{T}},$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_2 = (2,1,2)^{\mathrm{T}},$$
$$\varepsilon_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}; \quad \alpha_3 = (-3,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

§7.3 线性子空间 · 陪集

线性空间中有的子集也可能是一个线性空间.例如,在 3 维几何空间中,过原点的一个平面上的所有向量,关于几何空间中向量的加法和数量乘法构成一个 2 维线性空间.过原点的一条直线上的所有向量关于几何空间中向量的加法和数量乘法构成一个 1 维线性空间.数域 P 上 n 元齐次线性方程组的解集合,关于 P^n 的线性运算,构成线性空间 现引入子空间概念.

定义 7.3.1 设 V 是数域 P 上的线性空间.W 是 V 的一个非空子集.如果 W 关于 V 的线性运算也构成数域 P 上的线性空间,那么称 W 是 V 的一个线性子空间,简称子空间.

W 要构成 V 的子空间必须具备什么条件?因为线性空间都是非空的,所以 $W \neq$;任意 $\alpha,\beta \in W$,必须有 $\alpha+\beta \in W$;任意 $k \in P$,必须有 $k\alpha \in W$ 这些都是明显的必要条件,其实这些条件合起来也是充分的.

定理 7.3.1 设 V 是数域 P 上的线性空间.W 是 V 的子空间之充分必要条件是:

(1) W 是 V 的非空子集;

(2) 任意 $\alpha,\beta \in W$,按照 V 的加法其和 $\alpha+\beta \in W$;

(3) 任意 $k \in P$, $\alpha \in W$,按照 P 与 V 的数量乘法, $k\alpha \in W$.

证 充分性 已知 $W \neq$,且关于 V 的线性运算封闭.所以 W 满足线性空间定义中的公理(1)、(2)、(5)、(6)、(7)、(8).以下只需证明 W 满足公理(3)和(4) 即证明 W 含有零向量; W 中每个向量都有负向量.因为 $W \neq$,取 $\alpha \in W$,又因为 W 关于 V 的线性运算封闭,所以 $0\alpha = O \in W$, $(-1)\alpha = -\alpha \in W$.

显然任何线性空间 V 都至少有两个子空间: V 和 $\{O\}$,后者称为零子空间, V 本身和零子空间统称为 V 的平凡子空间.

例 7.3.1 设 $A_{sn}X_{n1} = O_{s1}$ 是数域 P 上的齐次线性方程组.如果它只有零解,那么这个零解向量就是 P^n 的一个平凡子空间,如果

它有非零解,不妨设秩$(A_{sn}) = r < n$,那么它的解空间就是 P^n 的一个 $n - r$ 维子空间.基础解系就是这个解空间的一个基.

例 7.3.2　由例 7.1.1 已知数域 P 上 n 阶矩阵的全体 $P^{n\times n}$ 关于矩阵的加法和数量乘法构成数域 P 上的 n^2 维线性空间.P 上 n 阶对称矩阵的全体 W_1;P 上 n 阶反对称矩阵的全体 W_2;n 阶上(下)三角形矩阵的全体 W_3 都是 $P^{n\times n}$ 的子空间.读者可以思考 W_1, W_2 和 W_3 各是几维的?分别举出它们的一个基.

例 7.3.3　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是数域 P 上线性空间 V 中的一组向量.由它们作出的一切线性组合记作 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$,可以证明:$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是 V 的一个子空间.

证　因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in W$,所以 $W \neq$,任意 $\beta, \gamma \in W$,即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s,$$
$$\gamma = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s.$$

那么

$$\beta + \gamma = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_s + l_s)\alpha_s \in W.$$

任意 $k \in P$,有

$$k\gamma = (kl_1)\alpha_1 + (kl_2)\alpha_2 + \cdots + (kl_s)\alpha_s \in W.$$

根据定理 7.3.1,$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是 V 的一个子空间,称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

例 7.3.3 不仅给出了一个作子空间的方法,同时还可推出一些关于子空间的重要结论:

推论 7.3.1　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是线性空间 V 中的两组向量.它们生成同一个子空间的充分必要条件是这两个向量组等价.

推论 7.3.2　$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的维数等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩数.

推论 7.3.3　向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的任一个极大线性无关组都

是子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的一个基.

推论 7.3.4 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出,则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \quad L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t);$$

$$\text{维 } L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq \text{维 } L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

推论 7.3.5 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是有限维线性空间 V 中的一组向量.那么,维 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq$ 维 V.

定理 7.3.2 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 $r(< n)$ 维子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 W 的一个基,则一定可以从 V 中找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 构成 V 的一个基.

证 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是子空间 W 的基,所以线性无关.又因为 $W \quad V$,所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V 中的一个线性无关组.已知维 $(V) = n$.所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以扩充成 V 的一个极大线性无关组,即可以从 V 中找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$ 构成 V 的一个基.

最后再介绍一个重要的子空间.

例 7.3.4 设矩阵 $A \in P^{n\times n}$, λ_0 是 A 的一个特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 A 的属于特征值 λ_0 的极大线性无关特征向量组,则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是 P^n 的一个子空间,称为 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间.

我们知道,求 A 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量,就要先求齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = O$ 的一个基础解系,用这个基础解系作一切非零线性组合,就得到 A 的属于特征值 λ_0 的全部特征向量,再添入一个零向量,就构成 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间.

定义 7.3.2 设 W 是线性空间 V 的一个子空间, γ_0 是 V 中一个向量,用 $\gamma_0 + W$ 表示所有向量 $\gamma_0 + \eta$ 作成的集合,其中 η 取遍 W 中的所有向量,称 $\gamma_0 + W$ 是子空间 W 在线性空间 V 中的一个陪集.

例 7.3.5 设 V 是平面上所有以原点为起点的向量作成的线性空间(如图 7.4),直线 l_0 表示由向量 η_0 生成的子空间 $W = L(\eta_0)$, γ_0 是 V 中一个向量.过 γ_0 终点作 l_0 的平行线 l,则陪集 $\gamma_0 + W$ 中

向量的终点恰是直线 l 上所有的点,因而 $\gamma_0 + W$ 可用直线 l 代表.

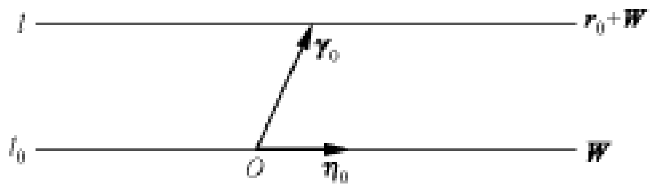


图　7.4

例 7.3.6　设 γ_0 是数域 P 上 n 元线性方程组 $A_{s\times n}X_{n1} = b_{s1}$ 的一个特解.$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是导出组 $A_{s\times n}X_{n1} = O_{s1}$ 的一个基础解系,那么导出组的解空间 $L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t)$ 就是 P^n 的一个子空间,而 $\gamma_0 + L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t)$ 就是子空间 $L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t)$ 在 P^n 中的一个陪集.

练　习　7.3

1. $P^{n\times n}$ 表示数域 P 上全体 n 阶矩阵关于矩阵线性运算构成的线性空间; W_1 表示 P 上 n 阶对称矩阵全体; W_2 表示 P 上反对称矩阵全体; W_3 表示 P 上上(下)三角形矩阵全体.证明: W_1, W_2, W_3 都是 $P^{n\times n}$ 的子空间,并分别求出它们的维数和一个基.

2. 在 R^3 中求下列子空间的维数和一个基:

(1) $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,其中 $\alpha_1 = (1, -2, 3)$, $\alpha_2 = (-1, 2, -3)$, $\alpha_3 = (2, -4, 6)$.

(2) $W_2 = L(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$,其中 $\beta_1 = (1, 2, -1)$, $\beta_2 = (2, 0, 3)$, $\beta_3 = (3, 2, 2)$.

(3) $W_3 = L(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,其中 $\gamma_1 = (1, 2, 3)$, $\gamma_2 = (2, -1, 1)$, $\gamma_3 = (1, 0, 1)$, $\gamma_4 = (3, 1, 2)$.

3. 在 P^5 中求下列齐次线性方程组解空间的维数和一个基:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. 在实数域上,设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 A 的全部不同的特征值;

(2) 对 A 的每一个特征值求出 A 的属于该特征值的特征子空间;

(3) 求每一个特征子空间的维数和一个基 .

§7.4 线性变换及其矩阵

变换是集合 V 到自身的映射,用花体字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \cdots$ 表示,先看几个平面变换的例 .

例 7.4.1 $\mathcal{A}$: 把平面绕原点转一个角度 θ 这样,平面上任一点 $\alpha = (x, y)^{\mathrm{T}}$ 便转到了新的位置 $\alpha' = (x', y')^{\mathrm{T}}$.如图 7.5:

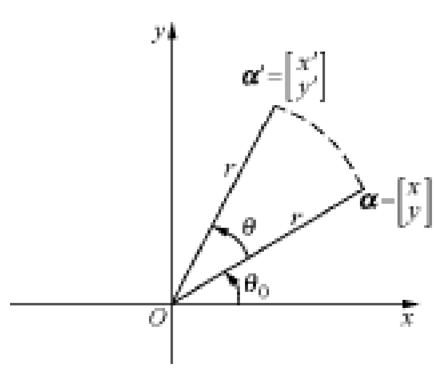


图 7.5

α'是α的影像,记作 $\alpha' = \mathcal{A}\alpha$, α 与 α'的关系为

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta_0 + \theta) = r\cos\theta_0\cos\theta - r\sin\theta_0\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= r\sin(\theta_0 + \theta) = r\cos\theta_0\sin\theta + r\sin\theta_0\cos\theta \\ &= x\sin\theta + y\cos\theta, \end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

例 7.4.2　F: 把平面按 y 轴进行反射, 即平面上任一点 $(x, y)^{\mathrm{T}}$ 变成 $(-x, y)^{\mathrm{T}}$ 如图 7.6:

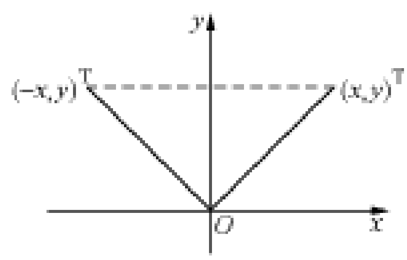


图　7.6

反射变换可具体表示为

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

例 7.4.3

$$C\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ y \end{bmatrix}\quad (c \neq 0).$$

如图 7.7:

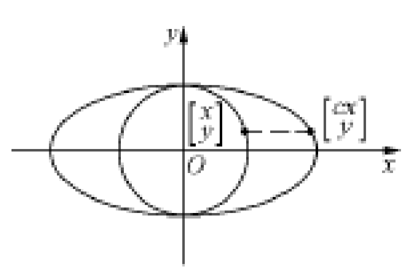


图　7.7

称变换 C 是顺 x 轴的放缩, $c > 1$ 时是顺 x 轴放大; $0 < c < 1$ 时, 顺 x 轴缩小; $c < 0$ 时, 除顺 x 轴放大或缩小, 还有反射.

例 7.4.4

$$N\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda y \\ y \end{bmatrix}.$$

如图 7.8:

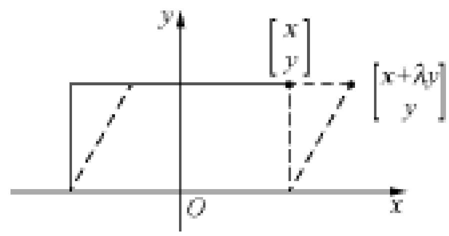


图 7.8

变换 N 称为扭错.

例 7.4.5

$$D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

变换 D 称为投射,它把整个平面投射到 x 轴上.

例 7.4.6

$$O\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

变换 O 称为零变换.它把整个平面变成了原点.

一般地,设 V 是数域 P 上的线性空间.

定义 7.4.1　设 A 是 V 的一个变换.如果对于 V 的任意向量 α, β 和 P 中任意数 k 都有

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta;$$
$$A(k\alpha) = k \cdot A\alpha.$$

则称 A 是 V 的一个线性变换.

换句话说,线性变换是指线性空间的变换,它保持空间中向量的线性运算性质.

读者可以验证以上各例都是 R^2 的线性变换.

例 7.4.7　对于 V 中任意向量 α,

$$I\alpha = \alpha; \quad O\alpha = O,$$

称 I 是 V 的恒等变换或单位变换;称 O 为零变换.读者可以验证恒等变换和零变换都是线性变换.

例 7.4.8　线性空间 $V = P^n$, A 是数域 P 上的一个 n 阶矩阵.对任意向量 $\alpha \in P^n$,变换 A 为:

$$\mathcal{A}\alpha = A\alpha.$$

易证 $\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换,因为再任取 $\beta\in P^n$, $k\in P$,有

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta) = A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = \mathcal{A}\alpha + \mathcal{A}\beta;$$
$$\mathcal{A}(k\alpha) = A(k\alpha) = k\cdot A\alpha = k\cdot\mathcal{A}\alpha.$$

例 7.4.9　设 V 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的所有连续函数作成的实数域上的线性空间,对于任意 $f(x)\in V$ 变换 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}f(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$\mathcal{A}$ 是 V 的一个线性变换.因为

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\in V,$$

所以 $\mathcal{A}$ 是 V 的一个变换.再任取 $g(x)\in V$, $k\in R$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[f(x)+g(x)] &= \int_a^x [f(t)+g(t)]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x);\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(kf(x)) = \int_a^x kf(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = k\mathcal{A}f(x).$$

由定义可以推出线性变换的一些很有用的性质:设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 的线性变换.

性质 1　$\mathcal{A}O = O$; $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}\alpha$.

证　$\mathcal{A}O = \mathcal{A}(0\alpha) = 0\mathcal{A}\alpha = O$;

$$\mathcal{A}(-\alpha) = \mathcal{A}[(-1)\alpha] = (-1)\mathcal{A}\alpha = -\mathcal{A}\alpha.$$

性质 2　如果 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$,那么

$$\mathcal{A}\beta = k_1\mathcal{A}\alpha_1 + k_2\mathcal{A}\alpha_2 + \cdots + k_s\mathcal{A}\alpha_s.$$

(请读者自证)

性质 3　如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则 $\mathcal{A}\alpha_1, \mathcal{A}\alpha_2, \cdots, \mathcal{A}\alpha_s$ 也线性相关.

证　已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,那么就有不全为零的数 l_1,

$l_2, \cdots, l_s$ 使

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_s \alpha_s = O,$$
$$A(l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_s \alpha_s) = AO,$$
$$l_1 A\alpha_1 + l_2 A\alpha_2 + \cdots + l_s A\alpha_s = O.$$

由于 $l_1, l_2, \cdots, l_s$ 不全为零,所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

注意　性质 3 的逆不成立,例如零变换可以把线性无关的向量组都变成零向量.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基,那么 V 中任一向量 β 都可惟一表成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n.$$

其中 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标.β 经线性变换 A,有

$$A\beta = k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \cdots + k_n A\alpha_n.$$

即 β 的影像 $A\beta$ 是基的影像 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n$ 的线性组合,且组合系数(坐标) $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不变.这表明线性变换对任意向量的作用集中体现在对基的作用.

定义 7.4.2　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是数域 P 上线性空间 V 的一个基 A 是 V 的线性变换,那么 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n \in V$,且都可由这个基惟一线性表出:

$$\begin{cases} A\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n, \\ A\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\alpha_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n. \end{cases} \tag{1}$$

称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是线性变换 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵.

(1) 可记为

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

或简记为

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A.$$

例如在 R^2 中取基 $\varepsilon_1 = (1,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1)^T$,那么例 7.4.1 至例 7.4.6 各线性变换在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵可按定义 7.4.2 求出:

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix};$$

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c \neq 0);$$

$$N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$D(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$O(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设 A 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{nn}$ 即

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A.$$

V 中任意向量

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} A\beta &= x_1 A\alpha_1 + x_2 A\alpha_2 + \cdots + x_n A\alpha_n \\ &= (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

可见要求向量 β 在线性变换 A 下的象 $A\beta$,只需用矩阵 A 左乘向量 β 的坐标即可.明白这一点很重要,无论什么元素组成的形形色色的有限维线性空间;也无论线性变换多么复杂,线性变换对向量的作用都可转化为矩阵乘坐标 这就实现了线性变换的可操作性.

仍以 R^2 为例.当取 $\varepsilon_1 = (1,0)^T$, $\varepsilon_2 = (0,1)^T$ 为基时,任一向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$A\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$F\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix},$$

$$C\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} cx \\ y \end{bmatrix} \quad (c \neq 0),$$

$$N\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} x + \lambda y \\ y \end{bmatrix},$$

$$D\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

n 维线性空间的基不惟一,因此一个线性变换在不同基下的矩阵不同.设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的两个基.A 是 V 的一个线性变换.A 在这两个基下的矩阵分别为 A 和 B,即

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A,$$
$$A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)B.$$

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵是 P:

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P,$$

那么可以找到 A 与 B 的关系:

$$\begin{aligned}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)B &= A(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \\ &= A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)AP \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)P^{-1}AP,\end{aligned}$$

所以

$$B = P^{-1}AP.$$

定理 7.4.1　一个线性变换在不同基下的矩阵是彼此相似的.

第五章我们寻求矩阵可对角化条件;证明实对称矩阵一定可以对角化;介绍任一 n 阶复矩阵一定相似于若当标准形,目的都是想在

相似条件下找一个最简单的矩阵,使线性变换变得最容易操作.

练　习 7.4

1. 在线性空间 V 中,下面定义的变换 A 是不是线性变换?

(1) $A\alpha = -\alpha$;

(2) $A\alpha = k_0\alpha$ (k_0 是一个常数);

(3) $A\alpha = \alpha + \gamma_0$ (γ_0 是 V 中一个固定非零向量);

(4) $A\alpha = O$ (O 是 V 中零向量).

2. 在 R^3 中定义

$$A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明 A 是 R^3 的一个线性变换;

(2) 求 A 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)^T$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)^T$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵 A;

(3) 判断 $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (1,1,0)^T$, $\alpha_3 = (1,1,1)^T$ 是不是 R^3 的基?若是,求基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 P;

(4) 求 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 B;

(5) 验证 $A \sim B$;

(6) 设向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $(2, -1, 1)$,求 $A\beta$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

3. 设 W 是线性空间 V 的一个子空间.A 是 V 的一个线性变换.用 AW 表示 $A\alpha(\alpha \in W)$ 的全体.证明 AW 也是 V 的子空间.

§7.5　欧氏空间与正交变换

本节限定在实数域上讨论.

定义 7.5.1　设 V 是实数域上的线性空间;V 中任意两个向量 α, β 对应一个实数,称为 α 与 β 的内积,记作 $\alpha \cdot \beta$;如果内积运算满

足以下运算法则:

(1) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;

(2) $(k\alpha)\cdot\beta=k(\alpha\cdot\beta)$;

(3) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$;

(4) $\alpha\neq O$ 时, $\alpha\cdot\alpha>0$.

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in V$, $k\in R$,则称 V 是欧氏空间.

例 7.5.1　$V=R^n$,任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$,定义内积运算为

$$\alpha\cdot\beta=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

则 R^n 就是一个欧氏空间.

例 7.5.2　设 V 是定义在闭区间$[a,b]$上的连续实函数全体.任意 $f(x),g(x)\in V$,定义内积运算为

$$f(x)\cdot g(x)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

则 V 是一个欧氏空间(留给读者验证).

欧氏空间与一般线性空间比较,它的特点是:它定义在实数域上;故而除线性运算还定义了内积运算.这就有可能定义向量的长度、两个向量的夹角等度量概念.因此也称欧氏空间是度量空间.

命题 7.5.1　如果 W 是欧氏空间 V 的线性子空间,那么按 V 的内积运算, W 也是欧氏空间.

证　首先 W 已是线性空间.按 V 中的内积运算, W 中任意两个向量也有内积,且满足定义 7.5.1 中 4 个条件,因而 W 是欧氏空间.

定义 7.5.1 中(4)规定:当 $\alpha\neq O$ 时, $\alpha\cdot\alpha>0$,那么当 $\alpha=O$ 呢?可以证明 $\alpha\cdot\alpha=0$.事实上,由定义 7.5.1 中(3)有 $\alpha\cdot O=\alpha\cdot(O+O)=\alpha\cdot O+\alpha\cdot O$,因此

$$\alpha \cdot O = 0 .$$

这就是说,两个向量中只要有一个是零向量,它们的内积必为零.

定义 7.5.2 非负实数 $\alpha \cdot \alpha$ 的算术平方根 $\sqrt{\alpha \cdot \alpha}$ 称为向量 α 的长度,记作 $\| \alpha \|$,向量的长度也称向量的模或范数.

由定义,$\| \alpha \| \geq 0$,$\| \alpha \| = 0$ 当且仅当 $\alpha = O$.

命题 7.5.2

$$\| k\alpha \| = | k | \cdot \| \alpha \| .$$

证

$$\begin{aligned} \| k\alpha \| &= \sqrt{(k\alpha) \cdot (k\alpha)} = \sqrt{k^2 (\alpha \cdot \alpha)} \\ &= \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = | k | \cdot \| \alpha \| . \end{aligned}$$

若 $\| \alpha \| = 1$,称 α 是单位向量.当 $\alpha \neq O$ 时,作单位向量 $\dfrac{1}{\| \alpha \|} \alpha$,称为将 α 单位化.

在几何空间,非零向量 α 与 β 夹角 θ 的余弦可用内积表示为

$$\cos \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\| \alpha \| \cdot \| \beta \|} .$$

为了在一般欧氏空间中引入向量夹角概念,先来证明下面的不等式.

定理 7.5.1 (Cauchy-Буняковский 不等式) 对于欧氏空间中任意两个向量 α, β 都有不等式

$$| \alpha \cdot \beta | \leq \| \alpha \| \cdot \| \beta \|$$

成立;当且仅当 α, β 线性相关时,等式成立.

证 α, β 线性相关时,其中必有一个向量可由另一个向量线性表出.不妨设 $\alpha = k\beta$.于是

$$| \alpha \cdot \beta | = | (k\beta) \cdot \beta | = | k(\beta \cdot \beta) | = | k | \cdot \| \beta \|^2 ;$$

$$\| \alpha \| \cdot \| \beta \| = \| k\beta \| \, \| \beta \| = | k | \, \| \beta \| \, \| \beta \| = | k | \, \| \beta \|^2 .$$

所以

$$| \alpha \cdot \beta | = \| \alpha \| \cdot \| \beta \| .$$

今设 α,β 线性无关，于是对任意实数 k，恒有 $\alpha-k\beta\neq O$，从而

$$(\alpha-k\beta)\cdot(\alpha-k\beta)=\alpha\cdot\alpha-2k(\alpha\cdot\beta)+k^2(\beta\cdot\beta)>0, \tag{1}$$

因 α,β 线性无关，故 $\beta\neq O$，因而 $\beta\cdot\beta>0$ 取 $k=\alpha\cdot\beta/\beta\cdot\beta$，代入(1)得

$$\alpha\cdot\alpha-2\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}(\alpha\cdot\beta)+\left[\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\right]^2(\beta\cdot\beta)>0.$$

即

$$\alpha\cdot\alpha-\frac{(\alpha\cdot\beta)^2}{\beta\cdot\beta}>0,$$

亦即 $(\alpha\cdot\beta)^2<(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)$，开平方取算术根即得 $|\alpha\cdot\beta|<\|\alpha\|\|\beta\|$．

定义 7.5.3　欧氏空间中两个非零向量 α 与 β 的夹角

$$\theta=\arccos\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\alpha\|\|\beta\|}.$$

当 $\alpha\cdot\beta=0$ 时，称 α 与 β 正交．记作 $\alpha\perp\beta$．

按定义 7.5.3，零向量与任意向量正交．

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基．那么 V 中任二向量

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n,$$
$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

的内积

$$\alpha\cdot\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$= (a_1, a_2, \cdots, a_n) A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_1 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_1 \cdot \alpha_n \\ \alpha_2 \cdot \alpha_1 & \alpha_2 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \cdot \alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n \cdot \alpha_1 & \alpha_n \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \cdot \alpha_n \end{bmatrix}.$$

可见取定一个基就等于取定一个矩阵 A,这样,求任意两个向量的内积,只需用两个向量在这个基下的坐标夹乘 A 即可.

定义 7.5.4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基,实对称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_1 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_1 \cdot \alpha_n \\ \alpha_2 \cdot \alpha_1 & \alpha_2 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \cdot \alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n \cdot \alpha_1 & \alpha_n \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \cdot \alpha_n \end{bmatrix}$$

称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的内积矩阵.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个基,它们的内积矩阵分别为 A 和 B,且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过

渡矩阵为 C,即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C.$$

于是

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix} (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

$$= C^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C = C^{\mathrm{T}} AC.$$

得

命题 7.5.3　欧氏空间中任意两个基的内积矩阵是合同的.

第六章研究实对称矩阵的合同标准形,目的就是想找一个与内积矩阵 A 合同的更简单的矩阵 B,使内积运算变得非常简单.

定义 7.5.5　非零实向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 中,如果所有向量两两正交,称为正交向量组.

命题 7.5.4　正交向量组线性无关.

证　已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是正交向量组.设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = O.$$

等式两边都与 $\alpha_i(i = 1,2,\cdots, r)$ 作内积,由于 $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0(i \neq j)$,所以有

$$x_i(\alpha_i \cdot \alpha_i) = 0.$$

因为 $\alpha_i \neq O$,有 $\alpha_i \cdot \alpha_i > 0$,故 $x_i = 0(i = 1,2,\cdots, r)$,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

定义 7.5.6　如果 n 维欧氏空间的基是正交向量组,就称为正交基;如果正交基中每一个向量都是单位向量,就称为标准正交基.

由定义 7.5.6 和内积矩阵概念易见：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是正交基，当且仅当它的内积矩阵是对角形矩阵；$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交基，当且仅当它的内积矩阵是单位矩阵．

定理 7.5.2 n 维欧氏空间 V 中必存在标准正交基．

证 任取 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，它有内积矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot \alpha_1 & \alpha_1 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_1 \cdot \alpha_n \\ \alpha_2 \cdot \alpha_1 & \alpha_2 \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \cdot \alpha_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \alpha_n \cdot \alpha_1 & \alpha_n \cdot \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \cdot \alpha_n \end{bmatrix}.$$

因为 A 是实对称矩阵．由第六章 §6.4 知：可以找到一个实可逆矩阵 C 使

$$C^{\mathrm{T}} AC = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

由此得 n 个向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) C.$$

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的内积矩阵是(2)，所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的正交基．由于 $d_i = \beta_i \cdot \beta_i > 0$，所以只需将 β_i 单位化：$\gamma_i = \beta_i / \|\beta_i\|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 就是 V 的一个标准正交基．

定理 7.5.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维欧氏空间的一个标准正交基，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 中 n 个向量，它们的关系是

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) T.$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是标准正交基的充分必要条件是 T 为正交矩阵.

分析　已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准正交基,所以它的内积矩阵

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=I.$$

利用已知条件 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T$ 写出

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdots\\ \beta_n\end{bmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=T^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)T=T^{\mathrm{T}}IT=T^{\mathrm{T}}T.$$

如果 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是标准正交基,由上面等式知它的内积矩阵 $T^{\mathrm{T}}T=I$,所以 T 是正交矩阵.反之,如果 T 是正交矩阵.由上面等式右边 $T^{\mathrm{T}}T=I$ 知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是标准正交基.

定理 7.5.4　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基.V 中任二向量

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n,$$
$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

的内积

$$\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

证

$$\alpha\cdot\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$= (a_1, a_2, \cdots, a_n) I \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n .$$

定理 7.5.4 告诉我们: 无论 n 维欧氏空间由什么具体向量构成,也无论内积运算多么复杂,只要取一个标准正交基,在这个标准正交基下求任二向量的内积,只需用它们的坐标在 R^n 中计算就可以了.

定理 7.5.4 还告诉我们: 取 n 维欧氏空间 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. V 中任意向量 $\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_n \alpha_n$ 与 R^n 中向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 一一对应.这个对应不仅保持线性运算,还保持内积运算.因此有结论: 任意 n 维欧氏空间与 R^n 同构.换句话说: R^n 是一切 n 维欧氏空间的代数模型.

欧氏空间作为线性空间也有各种各样的线性变换.§7.4 已有介绍.下面我们介绍欧氏空间特有的一种线性变换,称为正交变换.

定义 7.5.7 欧氏空间 V 的线性变换 A,如果保持内积不变,即对任意 $\alpha, \beta \in V$,总有

$$(A\alpha) \cdot (A\beta) = \alpha \cdot \beta .$$

则称 A 是 V 的一个正交变换.

关于正交变换,下面几个说法是等价的.

定理 7.5.5 设 A 是欧氏空间 V 的一个线性变换,则下列 4 个命题等价:

(1) A 是正交变换;

(2) A 保持向量长度不变.即 $\| A\alpha \| = \| \alpha \|, \alpha \in V$;

(3) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交基,那么 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n$ 也是标准正交基;

(4) A 在任意标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证 先证(1) 与(2) 等价.如果 A 是正交变换,由定义 7.5.7

$$(A\alpha)\cdot(A\alpha)=\alpha\cdot\alpha.$$

两边开平方取算术根,得 $\|A\alpha\|=\|\alpha\|$,反之,如果 A 保持向量长度不变,即对任意 $\alpha,\beta\in V$,有

$$\|A(\alpha+\beta)\|=\|\alpha+\beta\|.$$

按向量长度定义有

$$[A(\alpha+\beta)]\cdot[A(\alpha+\beta)]=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta).$$

把上面等式展开:

$$\begin{aligned}&(A\alpha)\cdot(A\alpha)+2(A\alpha)\cdot(A\beta)+(A\beta)\cdot(A\beta)\\&=\alpha\cdot\alpha+2(\alpha\cdot\beta)+\beta\cdot\beta.\end{aligned}$$

又因为 $\|A\alpha\|=\|\alpha\|$, $\|A\beta\|=\|\beta\|$.由上式得

$$(A\alpha)\cdot(A\beta)=\alpha\cdot\beta,$$

这就证明了 A 是正交变换.

然后证(1)与(3)等价.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个标准正交基,因为 A 是正交变换,所以当 $i\neq j$ 时($i,j=1,2,\cdots,n$)

$$(A\alpha_i)\cdot(A\alpha_j)=\alpha_i\cdot\alpha_j=0;$$

$$\|A\alpha_i\|=\sqrt{(A\alpha_i)\cdot(A\alpha_i)}=\sqrt{\alpha_i\cdot\alpha_i}=1.$$

这就证明了 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 是标准正交基.反之,如果 A 把标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 变成标准正交基 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$,那么对于 V 中任二向量

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n,$$

$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

和

$$A\alpha=a_1A\alpha_1+a_2A\alpha_2+\cdots+a_nA\alpha_n,$$

$$A\beta=b_1A\alpha_1+b_2A\alpha_2+\cdots+b_nA\alpha_n.$$

得

$$A\alpha \cdot A\beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \alpha \cdot \beta .$$

最后证(3) 与(4) 等价 .设 A 在标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是 A 即

$$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A .$$

由定理 7.5.3 可知: $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n$ 是标准正交基的充分必要条件是 A 为正交矩阵 .

练　习　7.5

1. 设 V 是定义在闭区间$[a, b]$ 上的所有连续函数作成的线性空间,对于 V 中任意两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$,定义内积为

$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d} x .$$

说明 V 是一个欧氏空间,并写出 V 中的柯西-布涅雅柯夫斯基不等式 .

2. 设 $A = (a_{ij})_{nn}$ 是一个正定矩阵,对于任意 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in R^n$,规定内积为

$$\alpha \cdot \beta = (a_1, a_2, \cdots, a_n) A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

说明 R^n 在这样定义的内积下是欧氏空间 .

3. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维欧氏空间 V 的一个标准正交基 .且

$$\beta_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{3}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3) .$$

问 β_1,β_2,β_3 是 V 的标准正交基吗?为什么?

4. 设 W 是由 R^4 中的向量 $\alpha_1=(1,0,1,1),\alpha_2=(1,1,1,-1),\alpha_3=(1,2,3,1)$ 生成的子空间,求 W 的一个标准正交基.

5. 求下列齐次线性方程组解空间的维数和一个标准正交基:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个基.证明:

(1) 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都正交的向量必是零向量;

(2) 如果 α,β 与 V 中任一向量 γ 都有 $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$,则 $\alpha=\beta$.

7. 验证 $\alpha_1=(1,-2,-3,2),\alpha_2=(2,-3,4,2)$ 是 R^4 中的正交向量组,然后把它们扩充成 R^4 的一个正交基,并加以单位化.

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意实数.证明不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

9. 在 n 维欧氏空间 V 中任取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,那么 V 中向量 α 都可表为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

说明 $\alpha\cdot\alpha$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个实二次型.

10. 设 α_0 是 n 维欧氏空间 V 中的一个非零向量,所有与 α_0 正交的向量全体记作 W.证明 W 是 V 的一个子空间;且维$(W)=n-1$.

11. 设 W_0 是 n 维欧氏空间 V 的一个子空间,与 W_0 中所有向量都正交的向量全体记作 W.

(1) 证明 W 是 V 的子空间;

(2) 证明:维(W_0) + 维$(W)=n$.

本章复习提纲

1. 数域 P 上线性空间定义、简单性质、线性空间例

实数域上的线性空间,定义了内积运算后称为欧氏空间,也称度

量空间．

2．线性空间 V 的维数、基

(1) 线性组合、线性表出、线性相关、线性无关、极大线性无关组、秩数定义．

(2) 如果 V 中有极大无关组,则称这个极大无关组是 V 的一个基.基所含向量个数称为 V 的维数．

本章研究有限维线性空间．

3．基变换与坐标变换

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的基.则 V 中任一向量 α 都可惟一表为基的线性组合

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n .$$

称$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的坐标．

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两个基.它们的关系为

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n, \\
\beta_2 &= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n &= a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n .
\end{aligned}$$

即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

其中矩阵 $A = (a_{ij})_{nn}$ 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵．

(3) 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标分别为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$和$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$,那么有

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} .$$

称为坐标变换公式 .

4. 数域 P 上的 n 维线性空间与 P^n 同构 .P^n 是一切有限维线性空间的代数模型

5. 线性子空间

(1) 线性子空间定义及典型示例 .

(2) 线性子空间判别定理 .

(3) 由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$.

(4) 陪集 .

6. 线性变换

(1) 线性变换定义及典型示例 .

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基; A 是 V 的一个线性变换 .那么

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A .$$

称 A 是线性变换 A 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵 .

(3) 设 $\alpha = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_n \alpha_n$ 是 V 中任一向量 .那么

$$A\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} .$$

即取定基后,线性变换对向量的作用表现为矩阵乘坐标.

(4) 线性变换在不同基下的矩阵是彼此相似的.

(5) 欧氏空间的正交变换与正交矩阵.

复 习 题 七

1. R^+ 是全体正实数的集合,任意 $\alpha, \beta \in R^+$, $k \in R$,定义线性运算如下:

$$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta;$$
$$k \circ \alpha = \alpha^k.$$

证明: R^+ 是实数域上的一个线性空间.并找出 R^+ 中的零向量.

2. 数域 P 上全体 2 阶矩阵关于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间 V.

(1) 证明

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是 V 的两个基;

(2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

分别在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的坐标;并验证坐标变

换公式.

3. 求下列齐次线性方程组解空间的维数和一个基:

(1) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(2) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4. 设实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 A 的全部不同的特征值;

(2) 对 A 的每一个特征值 λ_i,求 A 的属于特征值 λ_i 的特征子空间;

(3) 求每一个特征子空间的维数和一个基.

5. 设 η_0 是欧氏空间 V 中的一个单位向量.对任意向量 $\alpha \in V$,定义变换 A 如下:

$$A\alpha = \alpha - 2(\eta_0 \cdot \alpha)\eta_0.$$

(1) 证明 A 是 V 的一个线性变换;

(2) 证明 A 是 V 的一个正交变换(称为镜面反射).

6. 设 $\eta_0 = (1,0,0)$ 是欧氏空间 R^3 中的一个单位向量.

(1) 对任意 $\alpha = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$,写出镜面反射 A;

(2) 求 A 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (0,1,0), \varepsilon_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵 A;

(3) 证明 A 是正交矩阵;

(4) 在几何空间中说明镜面反射的几何意义.

习题参考答案与提示

预 备 知 识

思考题提示: 证明任何数域都包含全部有理数 .

第 一 章

练 习 1 .1

1 . (1) 10 ; (2) 0 ; (3) -30 ; (4) 0 .

2 . 提示: 计算等号两边的行列式 .

3 . (1) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$;

(2) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$(2 重) ;

(3) $\lambda_1 = 1$(2 重) , $\lambda_2 = -2$.

4 . (1) $x = 2, y = -3$;

(2) $x = 2, y = -1, z = 3$;

(3) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = 3$.

练 习 1.2

1. $N(1\,2\,3\,4)=0$; $N(1\,2\,4\,3)=1$;
$N(1\,3\,2\,4)=1$; $N(1\,3\,4\,2)=2$;
$N(1\,4\,2\,3)=2$; $N(1\,4\,3\,2)=3$;
$N(2\,1\,3\,4)=1$; $N(2\,1\,4\,3)=2$;
$N(2\,3\,1\,4)=2$; $N(2\,3\,4\,1)=3$;
$N(2\,4\,1\,3)=3$; $N(2\,4\,3\,1)=4$;
$N(3\,1\,2\,4)=2$; $N(3\,1\,4\,2)=3$;
$N(3\,2\,1\,4)=3$; $N(3\,2\,4\,1)=4$;
$N(3\,4\,1\,2)=4$; $N(3\,4\,2\,1)=5$;
$N(4\,1\,2\,3)=3$; $N(4\,1\,3\,2)=4$;
$N(4\,2\,1\,3)=4$; $N(4\,2\,3\,1)=5$;
$N(4\,3\,1\,2)=5$; $N(4\,3\,2\,1)=6$.

2. (1) 9 **阶排列** **逆序数** = 15 **奇排列**;
(2) 8 **阶排列** **逆序数** = 13 **奇排列**.

3. (1) $n-1$; (2) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

4. (1) $i=5, j=8$; (2) $i=8, j=1$.

5. (1) **偶排列** $(3\ 1)\to(3\ 2)\to(5\ 3)\to(5\ 4)$;
(2) **偶排列** $(3\ 1)\to(4\ 2)\to(5\ 3)\to(5\ 4)$.

练 习 1.3

1. (1) -; (2) -; (3) - .

2. $k=5, l=2$.

3. **提示**: **每一项** n **个元素乘积中至少有一个零**.

4. (1) $abcd$; (2) -1; (3) 0.

5. (1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$;
(2) $(-1)^{n-1}n!$;
(3) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

练 习 1.4

1. (1) 30; (2) 160; (3) $-2(a^3+b^3)$; (4) $a^3(a+4)$; (5) $-\frac{39}{4}$.

2 . $2a$.
3 . -96 .
5 . (1) $n!$;
(2) $b_1 b_2 \cdots b_n$;
(3) $\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - b\right](-b)^{n-1}$;
(4) $(a^2 - b^2)^n$;
(5) $a_0 a_1 \cdots a_n - a_2 a_3 \cdots a_n - a_1 a_3 \cdots a_n - \cdots - a_1 a_2 \cdots a_{n-2} a_n - a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$.
6 . (1) $x = \pm 1, \pm 2$;
(2) $x = 0, 1, 2, \cdots, n-2$;
(3) $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$.

练 习 1.5

1 . $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{22} = -2$, $A_{22} = -2$,
$M_{32} = 2$, $A_{32} = -2$, $M_{42} = -2$, $A_{42} = -2$.
原式 $= -2(b + c + d)$.
2 . (1) 0; (2) 96; (3) 27; (4) $-\dfrac{46}{3}$; (5) 12; (6) 15 .
3 . (1) $(ab)^2$; (2) $a^n + (-1)^{n+1} b^n$; (3) -12; (4) $-2(n-2)!$.

练 习 1.6

1 . **惟一解** . $x_1 = \dfrac{13}{3}$, $x_2 = \dfrac{8}{3}$, $x_3 = -\dfrac{5}{3}$, $x_4 = -2$.
2 . **因为系数行列式** $= -12 \neq 0$.
3 . $\lambda = 0, -1, 2, 3$ **之一时**,**有非零解** .

复 习 题 一

1 . $-\dfrac{305}{4}$.
2 . (1) $a_1 a_2 \cdots a_n \cdot (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)$
$\cdot (a_3 - a_2)\cdots(a_n - a_2)$
$\cdots\cdots$
$\cdot (a_n - a_{n-1})$;

(2) $$(-1)^{rs}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix};$$

(3) 48;

(4) 1875;

(5) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^n+n^{n-1}}{2}$;

(6) $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^{n+1}$.

3. **系数行列式** $=16$, $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

4. **当** $\lambda\neq2$ **时,只有零解;当** $\lambda=2$ **时,有非零解:** $x_1=x_2=0$, $x_3=$ **任意数**.

第 二 章

练 习 2.1

1. **惟一解**. $x_1=\dfrac{-5}{17}$, $x_2=\dfrac{23}{17}$.

2. **无解**.

3. **无穷多解**. $x_1=1+2c_1-c_2$, $x_2=c_1$, $x_3=c_2$, $x_4=1$, c_1, c_2 **为任意数**.

练 习 2.2

1. **惟一解**$\left(0,2,\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$.

2. **惟一解**$(1,1,1,1)$.

3. **无解**.

4. **无穷多解**

$$\begin{cases} x_1=6-c_1-c_2-c_3,\\ x_2=c_1,\\ x_3=c_2,\\ x_4=-2-c_3,\\ x_5=c_3,\\ x_6=3, \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3 **为任意数**.

练 习 2.3

1. (1) **只有零解**;

(2) **有无穷多解**

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + 2c_2 + 3c_3, \\ x_2 = -2c_1 - 3c_2 - 4c_3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3 为任意数;

(3) 只有零解;

(4) 有无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2, \\ x_2 = -c_1, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = -c_1 - c_2, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2 为任意数.

2. $k \neq 3$ 时,只有零解; $k = 3$ 时,有无穷多解: $x_1 = 7c$, $x_2 = -5c$, $x_3 = c$, c 为任意数.

复习题二

1. (1) 无解;

(2) 惟一解: $(1, -1, 1, -1)$;

(3) 无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = -c_2, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2 为任意数.

2. (1) 无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{5}c_1 - \dfrac{1}{5}c_2, \\ x_2 = -\dfrac{3}{5}c_1 + \dfrac{3}{5}c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}$$

c_1, c_2 为任意数;

(2) 只有零解;

(3) 无穷多解

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - c_2 + c_3, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = -c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$$

c_1, c_2, c_3 为任意数.

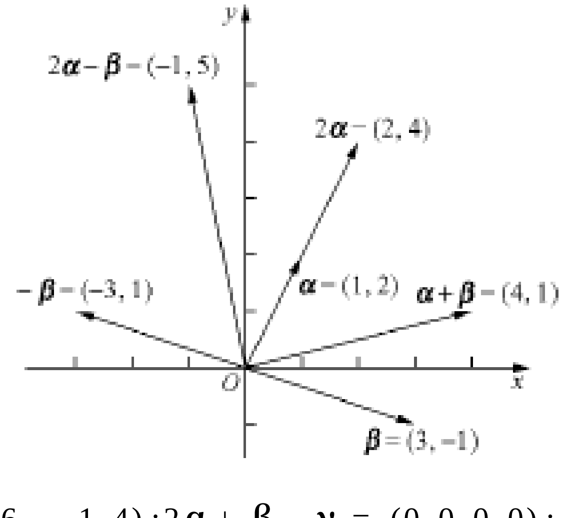
3. $a \neq -\frac{1}{2}$ 时,有惟一解: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2b}{2a+1}$, $x_3 = \frac{b}{2a+1} - 2$; $a = -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$ 时,无解; $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ 时,有无穷多解: $x_1 = 1$, $x_2 = 4 + 2c$, $x_3 = c$, c 为任意数.

4. 当 $\lambda = \pm 1$ 时,有非零解;当 $\lambda = 1$ 时, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $x_3 = 0$, c 为任意数;当 $\lambda = -1$ 时, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = d$, d 为任意数.

第　三　章

练　习　3.1

1.



2. $\alpha + \beta + \gamma = (9, 6, -1, 4)$; $2\alpha + \beta - \gamma = (0, 0, 0, 0)$;

3. (1) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

(2) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$.

4. $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)^T$.

练 习 3.2

1. (1) 表示法惟一

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;$$

(2) 表示法惟一

$$\beta = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 4\alpha_4;$$

(3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

(4) 表示法不惟一

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_3, \quad \beta = -\alpha_1 - 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

练 习 3.3

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性无关;
(4) 线性相关; (5) 线性无关; (6) 线性相关.

7. 提示: 用反证法.

练 习 3.4

1. (1) α_1, α_3; (2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

2. (1) 2; (2) 4.

3. $\alpha_3 = (0,0,1,0), \alpha_4 = (0,0,0,1)$

练 习 3.5

1. (1) 基础解系 $\eta = (0,1,2,1)$,全部解 $\alpha = k\eta$, k 为任意数;

(2) 基础解系

$$\begin{cases} \eta_1 = (-2,1,1,0,0), \\ \eta_2 = (2,-3,0,1,0), \\ \eta_3 = (-1,0,0,0,1), \end{cases}$$

全部解 $\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$, k_1, k_2, k_3 为任意数;

(3) 基础解系

$$\begin{cases} \eta_1 = (-1,1,0,0,0), \\ \eta_2 = (1,0,0,1,0), \end{cases}$$

全部解 $\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, k_1, k_2 为任意数;

(4) 基础解系 $\eta = (-1,1,0,0,0)$,全部解 $\alpha = k\eta$, k 为任意数;

(5) 基础解系

$$\begin{cases} \eta_1 = (-1,1,0,\cdots,0), \\ \eta_2 = (-1,0,1,\cdots,0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n-1} = (-1,0,0,\cdots,1), \end{cases}$$

全部解 $\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}$, $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 为任意数 .

练 习 3.6

1 . (1) 特解 $\gamma_0 = (6, -4, -2, 0)$,

基础解系 $\eta = (-5,3,1,1)$,

全部解 $\alpha = \gamma_0 + k\eta$, k 为任意数;

(2) 特解 $\gamma_0 = (-3,3,0,-2,0)$,

基础解系 $\eta_1 = (3,-1,1,2,0)$, $\eta_2 = (1,-1,0,1,1)$,

全部解 $\alpha = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, k_1, k_2 为任意数;

(3) 特解 $\gamma_0 = (1,1,1,0,0)$,

基础解系 $\eta_1 = (5,-6,3,0,0)$, $\eta_2 = (5,-9,0,3,0)$, $\eta_3 = (-8,6,0,0,3)$,

全部解 $\alpha = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$, k_1, k_2, k_3 为任意数 .

复 习 题 三

1 . (1) 线性相关;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

(3) $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$.

3 . (1) 是基础解系;

(2) 不是基础解系 .

5 . 基础解系

$$\begin{cases} \eta_1 = (-1,1,0,0,0), \\ \eta_2 = (-1,0,2,1,0), \\ \eta_3 = (1,0,-7,0,2) . \end{cases}$$

6 . **特解** $\gamma_0 = (2,0,-1,0,1)$;

基础解系为第 6 题 η_1,η_2,η_3;

全部解 $\alpha = \gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$, k_1,k_2,k_3 **为任意数** .

第 四 章

练 习 4.1

1 . $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$.

3 . (1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix} aa_1 & & \\ & bb_1 & \\ & & cc_1 \end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (10) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(11) $\begin{bmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 \\ b_1 & 2b_2 & b_3 \\ c_1 & 2c_2 & c_3 \end{bmatrix}$; (12) $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(13) $\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{bmatrix}$; (14) $\begin{bmatrix} a_1 + kc_1 & a_2 + kc_2 & a_3 + kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$;

(15) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + ka_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 + kb_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 + kc_1 \end{bmatrix}$; (16) $\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{bmatrix}$;

(17) $\begin{bmatrix} 2a_1 & 3a_2 & 4a_3 \\ 2b_1 & 3b_2 & 4b_3 \\ 2c_1 & 3c_2 & 4c_3 \end{bmatrix}$; (18) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(19) $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$; (20) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(21) (10); (22) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4 . $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

5 . $Q^TQ = QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6 . $A^2 = 4I_{4\times4}$;当 $n = 2k$ 时, $A^n = 4^kI_{4\times4}$;当 $n = 2k+1$ 时, $A^n = 4^kA$. $k = 1, 2, \cdots$.

7 . $\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$.

练 习 4.2

1 . (1) 可逆; (2) 可逆;

(3) $k \neq 0$ 时,可逆; $k = 0$ 时,不可逆 .

3 . $\lambda = 1, 2, 3$ 之一时, $\lambda I - A$ 奇异 .

5 . (1) $X = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

(2) $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

6 . $2^n a$.

7 . 提示: A飒 $= |A| I$ 两边取行列式 .

练 习 4.3

1 . $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2 . $A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$,

$kA = (k\alpha_1, k\alpha_2, \cdots, k\alpha_n)$.

提示: 设 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_1}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的极大无关组; $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \cdots, \beta_{jr_2}$ 是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的极大无关组,

那么, $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n$ 可由 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_1}, \beta_{j1}, \beta_{j2}, \cdots, \beta_{jr_2}$ 线性表出.

3. (1) $P_1A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$; (2) $P_2A = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$;

(3) $P_3A = \begin{bmatrix} \alpha_1 + k\alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$.

4. (1) $AQ_1 = (\beta_1, 2\beta_2, \beta_3)$;

(2) $AQ_2 = (\beta_2, \beta_1, \beta_3)$;

(3) $AQ_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3 + k\beta_1)$.

5. **提示**: $|A| = (-1)^{rs}|B||C| \neq 0$.

6. **提示**: A 可逆 $\longrightarrow |A| = |B||C| \neq 0$.

练 习 4.4

1. 5 类. $\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

2. n 阶矩阵 A 可逆

$$\begin{cases} \longrightarrow A \text{ 非奇异, 即 } |A| \neq 0; \\ \longrightarrow \text{存在 } A^{-1}, \text{使 } AA^{-1} = A^{-1}A = I; \\ \longrightarrow A \text{ 的行(列)向量组线性无关, 即秩}(A) = n; \\ \longrightarrow A \text{ 可经初等变换化成单位矩阵, 即 } A \cong I; \\ \longrightarrow \text{存在可逆矩阵 } P, Q \text{ 使 } PAQ = I; \\ \longrightarrow A \text{ 可表成一些初等矩阵的乘积}. \end{cases}$$

3. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,秩 $= 3$;　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,秩 $= 3$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,秩 $= 3$;　(4) $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$,秩 $= 2$.

4. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$;　(2) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$;　(4) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. (1) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(2) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

复 习 题 四

1. (1) $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(2) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,**秩** = 3;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$,**秩** = 2.

3. $|A| = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

5. (1) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $A^{100} = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2^{100} \end{bmatrix}P^{-1}$.

第 五 章

练 习 5.1

8. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

9 . (1) $\boldsymbol{\eta} = (1,1,-1)$;

(2) $\boldsymbol{\eta} = (4,5,-6)$;

(3) $\boldsymbol{\eta} = (3,3,-4)$.

练　习　5 .2

1 . (1) $\lambda = 1$(2 重), $k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$;

(2) $\lambda_1 = 3$(2 重), $k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 **不全为零**;

$\lambda_2 = 1$, $l\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $l \neq 0$.

(3) $\lambda_1 = -1$, $k_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $k_1 \neq 0$;

$\lambda_2 = 2$, $k_2\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $k_2 \neq 0$;

$\lambda_3 = -2$, $k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k_3 \neq 0$.

(4) $\lambda = 2$(3 重), $k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$.

练　习　5 .3

1 . (2) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2 . (1); (3) .

5 . $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6 . $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{10} = P\begin{bmatrix} 1 & \\ & 2^{10} \end{bmatrix} P^{-1}$.

练 习 5 .4

1 . (1) -5; (2) 0 .

2 . (1) $\sqrt{2}$; (2) 1; (3) $\sqrt{13}$.

3 . (1) $\dfrac{\pi}{2}$; (2) $\dfrac{\pi}{2}$.

4 . (1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(2) $\left(\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{-4}{5}\right)$;

(3) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

5 . $\dfrac{1}{\sqrt{147}}(-3, 11, 1, 4)$.

练 习 5 .5

1 . **不是**;**是** .

5 . $\gamma_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\gamma_2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{-\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$;

$\gamma_3 = \left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6 . $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

7 . $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

练 习 5 .6

1 . $T = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

2. $T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

3. $T=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

4. $T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}$.

5. $T=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$.

6. $T=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$.

练　习 5.7

1. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 7+\sqrt{30} & \\ & & & 7-\sqrt{30} \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon_1 & & & \\ & & \varepsilon_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$,

其中,$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0,1,2,\cdots,n-1$.

复 习 题 五

1. (1) $\lambda_1 = 1$, $k_1(1,-1,0)^T$, $k_1 \neq 0$;

$\lambda_2 = 2$, $k_2(2,-1,0)^T$, $k_2 \neq 0$;

$\lambda_3 = 3$, $k_3(7,-1,2)^T$, $k_3 \neq 0$.

(2) $\lambda_1 = 2$(2 重), $k_1(0,0,1)^T$, $k_1 \neq 0$;

$\lambda_2 = -3$, $k_2(0,-5,3)^T$, $k_2 \neq 0$.

(3) $\lambda_1 = -2$(2 重), $k_1(1,1,0)^T + k_2(-2,0,1)^T$, k_1, k_2 不全为零;

$\lambda_2 = 3$, $k_3(-3,2,0)^T$, $k_3 \neq 0$.

(4) $\lambda_1 = -2$, $k_1(3,2,1)^T$, $k_1 \neq 0$;

$\lambda_2 = 4$(2 重), $k_1(-1,1,0)^T + k_2(-1,0,1)^T$, k_1, k_2 **不全为零**.

2. (1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$;

(3) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$;

(4) $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$.

3. (1) $T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, $T^T AT = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, $T^T AT = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$T^T AT = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}$;

(4) $T = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{T} A T = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$.

第 六 章

练 习 6.1

1. (1) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,**秩** $= 3$;

(2) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,**秩** $= 3$;

(3) $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -2 & & \\ & & 3 & \\ & & & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,**秩** $= 4$;

(4) $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,**秩** $= 4$.

2. (1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$,**秩** $= 3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$,**秩** $= 3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_3^2$,**秩** $= 3$;

(4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_4^2-2x_1x_2-2x_3x_4$,秩 $=4$.

练　习　6.2

2.(1) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\0&a\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}$.

3. $A \simeq B$ 存在可逆矩阵 P,使 $P^TAP=B$ $A \sim B$.反之,实矩阵$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$,但$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \not\simeq \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

练　习　6.3

1.(1) $f=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$, $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2-2y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$;

(2) $f=-2y_1^2-y_2^2-2y_3^2$, $\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=2y_3\\x_3=y_2-2y_3\end{cases}$;

(3) $f=2y_1^2-\dfrac{1}{2}y_2^2+4y_3^2$, $\begin{cases}x_1=y_1-\dfrac{1}{2}y_2-2y_3\\x_2=y_1+\dfrac{1}{2}y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$;

(4) $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2$, $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+y_4\\x_2=y_2\\x_3=y_2+y_3+y_4\\x_4=y_4\end{cases}$.

2.(1) $C=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&-9\end{bmatrix}$;

(2) $C=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$;

(3) $C=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -2\end{bmatrix}$.

练　习 6.4

1. (1) $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \sqrt{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \sqrt{2}\mathrm{i}\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$;

(2) $f=-y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

$f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & -\sqrt{2}\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$;

(3) $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix};$$

(4) $$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}.$$

2 . (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $p = 2$, $r - p = 1$, $2p - r = 1$;

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $p = 3$, $r - p = 0$, $2p - r = 3$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $p = 1$, $r - p = 2$, $2p - r = -1$.

3 . **阶数相同**, **秩数相同**, $n + 1$ **类** .

4 . **阶数相同**, **秩数相同**, **正惯性指数相同** . $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ **类** .

练　习　6 .5

1 . (1) **不正定**;　　(2) **不正定**;　　(3) **不正定**;　　(4) **不正定** .

2 . (1) **不正定**;　　(2) **正定**;　　(3) **不正定** .

3 . (1) $0 < t < \frac{4}{5}$;　　(2) $t > 1$.

复习题六

1．(1) $f = y_1^2 + y_2^2 - 26y_3^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；

(2) $f = 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - 8y_3^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；

(3) $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 3y_4^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$；

(4) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$．

2．(1) $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{26}\sqrt{26} \\ 0 & 1 & \frac{5}{26}\sqrt{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{26}\sqrt{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，

$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{26}\sqrt{26}\mathrm{i} \\ 0 & 1 & \frac{5}{26}\sqrt{26}\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{26}\sqrt{26}\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$；

(2) $f = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix};$$

(3) $$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

$$f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \frac{-2\sqrt{3}}{3} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix};$$

(4) $$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

3. (1) $r = 3, p = 2, r - p = 1, 2p - r = 1$, **不正定**;

(2) $r = 3, p = 1, r - p = 2, 2p - r = -1$, **不正定**;

(3) $r = 4, p = 3, r - p = 1, 2p - r = 2$, **不正定**;

(4) $r = 4, p = 4, r - p = 0, 2p - r = 4$, **正定**.

4. (1) **正定**; (2) **不正定**.

6. $$f = 3y_3^2,\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$ **不正定**.

第 七 章

练 习 7.1

4. (1) $(-k)\alpha = [(-1)k]\alpha = (-1)(k\alpha) = -(k\alpha)$,

$(-k)\alpha = [k(-1)]\alpha = k[(-1)\alpha] = k(-\alpha)$;

(2) $k(\alpha-\beta) = k[\alpha+(-\beta)] = k\alpha + k(-\beta)$

$= k\alpha + (-k\beta) = k\alpha - k\beta$;

(3) $(k-l)\alpha = [k+(-l)]\alpha = k\alpha + (-l)\alpha$

$= k\alpha + [-(l\alpha)] = k\alpha - l\alpha$;

(4) **反证法**.

练 习 7.2

1. **提示**: **设** $x_1(\alpha+\beta) + x_2(\beta+\gamma) + x_3(\gamma+\alpha) = O$, **证明** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
2. **提示**: **用反证法**.
3. **维**$(V) = s\times n$

$$\text{基 } E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array} \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\cdots,s \\ j = 1,2,\cdots,n. \end{array}$$

4. **维**$(V) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **基** E_{ij}, $i\leq j$, $i,j = 1,2,\cdots,n$.
5. **维**$(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$, **基** $E_{ij} - E_{ji}$, $i = 1,2,\cdots,n-1$, $j = 2,3,\cdots,n$, $i<j$.
6. **提示**: **证明向量组** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **与基底等价**.
7. **提示**: **秩**$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\} = n$. $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ **可以扩充成**$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ **的极大无关组**.
8. (1) $(1,0,2,-1)^{\mathrm{T}}$; (2) $(2,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.
9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $(3,7,4)^{\mathrm{T}}$.

练 习 7.3

1．参照练习 7.2 第 4、5 题．

2．(1) 维$(W_1)=1$，基 α_1；

(2) 维$(W_2)=2$，基 β_1,β_2；

(3) 维$(W_3)=3$，基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4$．

3．解空间 2 维．基 $\eta_1=(0,2,-3,4,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(0,-2,3,0,4)^{\mathrm{T}}$．

4．(1) $\lambda_1=2$(2 重)，$\lambda_2=-2$；

(2) $\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$W_{\lambda=2}=L(\alpha_1)$，

$\alpha_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$W_{\lambda=-2}=L(\alpha_2)$；

(3) 维$(W_{\lambda=2})=1$，基 α_1，维$(W_{\lambda=-2})=1$，基 α_2．

练 习 7.4

1．(1) 是；　(2) 是；　(3) 不是；　(4) 是．

2．(1) 提示：任取 $\alpha,\beta\in R^3$，$k\in R$．证明 $A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$；$A(k\alpha)=kA\alpha$；

(2) 提示：先求 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,A\varepsilon_3$，然后求 $A\varepsilon_1,A\varepsilon_2,A\varepsilon_3$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标．$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；

(3) 提示：判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性无关．$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标构成过渡矩阵 P．$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$；

(4) $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$．$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$；

(5) $P^{-1}AP=B$；

(6) $B\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$．

3．提示：先证 $O\in AW$，则 $AW\neq$ ，任取 $\alpha,\beta\in AW$，$k\in P$．证明：$\alpha+\beta\in AW$，$k\alpha\in AW$．

练 习 7.5

1. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x$,

$\int_a^b kf(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,

$\int_a^b f(x)[g(x)+h(x)]\mathrm{d}x$

$=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x$,

$f(x)\neq 0$ 时, $f(x)f(x)>0$, 则 $\int_a^b f(x)f(x)\mathrm{d}x>0$.

柯西 — 布涅雅柯夫斯基不等式:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

2. **提示**: 根据定义 7.5.1 判断.
3. **提示**: 利用定理 7.5.3.
4. **提示**: 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大线性无关组,并加以正交化单位化.
5. **提示**: 维数 = 基础解系所含向量个数,将基础解系正交化、单位化为所求标准正交基.
6. **提示**: (1) 设 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$,由 $\alpha\cdot\alpha_i=0$,得 $a_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$;

   (2) 设 $\gamma=\alpha-\beta$,利用(1)结论证.
8. **提示**: 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in R^n$,定义 $\alpha\cdot\beta=\sum_{i=1}^n a_ib_i$.利用柯西 — 布涅雅柯夫斯基不等式.
9. **提示**: 利用内积矩阵.
10. **提示**: 将 α_0 扩充成欧氏空间的一个正交基 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$.考虑 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$.
11. **提示**: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 W_0 的一个正交基.将其扩充成 V 的一个正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$.考虑 $W=L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$.

复 习 题 七

2. (2) $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$;

(3) $\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

3.(1) $n-1$ 维 基 $\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\\cdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\eta_{n-1}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\\cdots\\1\end{bmatrix}$;

(2) 1 维 基 $\eta=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

4.(1) $\lambda_1=3,\lambda_2=2$(2 重);

(2) $\alpha_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},W_{\lambda=3}=L(\alpha_1)$,

$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},W_{\lambda=2}=L(\alpha_2)$;

(3) 维$(W_{\lambda=3})=1$,基 α_1;维$(W_{\lambda=2})=1$,基 α_2.

5.提示:(1) 任取 $\alpha,\beta\in V,k\in R$.证明$A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta,A(k\alpha)=kA\alpha$;

(2) 利用定理 7.5.5.

6.(1) $A\alpha=(-a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$;

(2) $A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(3) $A^{\mathrm{T}}A=I$;

(4) YOZ 平面是反射镜面.