

# **Отчёт по лабораторной работе №7. Дискретное логарифмирование в конечном поле**

Студент: Ильин Никита Евгеньевич

Группа: НФИмд-01-23

Преподаватель: Кулябов Дмитрий Сергеевич,  
д-р.ф.-м.н., проф.

Москва 2021

# Contents

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>7</b>
3.1	Ро-метод Полларда . . . . .	7
3.2	Постановка задачи дискретного логарифмирования . . . . .	7
3.3	Алгоритм Ро-метода Полларда . . . . .	8
3.4	Сложность алгоритма . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>10</b>
4.1	Ро-метод Полларда . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>14</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>15</b>

# List of Figures

3.1	Постановка задачи дискретного логарифмирования . . . . .	7
3.2	Алгоритм Ро-метода Полларда. 1. . . . .	8
3.3	Алгоритм Ро-метода Полларда. 2. . . . .	8
4.1	Вспомогательная функция, зависящая от $s, u, v$ . . . . .	10
4.2	Вспомогательная функция. Расширенный алгоритм Евклида . . .	11
4.3	Реализация алгоритма Ро-метода Полларда для логарифмирования	12
4.4	Реализация алгоритма Ро-метода Полларда для логарифмирования	13
4.5	Результат реализации Ро-метода Полларда на примере . . . . .	13

## List of Tables

# 1 Цель работы

Целью данной лабораторной работы является ознакомление с алгоритмом, реализующим Ро-метод Полларда для дискретного логарифмирования, а также программное воплощение данного алгоритма.

## 2 Задание

1. Реализовать рассмотренный в инструкции к лабораторной работе алгоритм программно.
2. Подставить численное значение из примера в программный код, проверить правильность полученного ответа.

## 3 Теоретическое введение

В данной лабораторной работе предметом нашего изучения стал Ро-метод Полларда для задач дискретного логарифмирования.

### 3.1 Ро-метод Полларда

Ро-метод Полларда для дискретного логарифмирования ( $\rho$ -метод) — алгоритм дискретного логарифмирования в кольце вычетов по простому модулю, имеющий экспоненциальную сложность. Предложен британским математиком Джоном Поллардом в 1978 году, основные идеи алгоритма очень похожи на идеи ро-алгоритма Полларда для факторизации чисел. Данный метод рассматривается для группы ненулевых вычетов по модулю  $p$ , где  $p$  — простое число, большее 3 [1].

### 3.2 Постановка задачи дискретного логарифмирования

Постановка задачи дискретного логарифмирования представлена следующим образом:

Для заданного простого числа  $p$  и двух целых чисел  $a$  и  $b$  требуется найти целое число  $x$ , удовлетворяющее сравнению:

$$a^x \equiv b \pmod{p},$$

где  $b$  является элементом циклической группы  $G$ , порожденной элементом  $a$ .

Figure 3.1: Постановка задачи дискретного логарифмирования

### 3.3 Алгоритм Ро-метода Полларда

Исходя из теоретических сведений, алгоритм Ро-метода Полларда представлен ниже [2].

Рассматриваются последовательность пар  $\{u_i, v_i\}$  целых чисел по модулю  $p - 1$  и последовательность  $\{z_i\}$  целых чисел по модулю  $p$ , определенные следующим образом :

$$\begin{aligned} & \{u_i\}, \{v_i\}, \{z_i\}, \quad i \in N, \\ & u_0 = v_0 = 0, \quad z_0 = 1; \\ & u_{i+1} = \begin{cases} u_i + 1 \bmod (p-1), & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ 2u_i \bmod (p-1), & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ u_i \bmod (p-1), & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases} \\ & v_{i+1} = \begin{cases} v_i \bmod (p-1), & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ 2v_i \bmod (p-1), & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ v_i + 1 \bmod (p-1), & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases} \\ & z_{i+1} \equiv b^{u_{i+1}} a^{v_{i+1}} \pmod{p} = \begin{cases} bz_i \bmod p, & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ z_i^2 \bmod p, & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ az_i \bmod p, & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases} \end{aligned}$$

Figure 3.2: Алгоритм Ро-метода Полларда. 1.

При этом, важно учесть следующие замечания [3]:

**Замечание:** везде рассматривается наименьшие неотрицательные вычеты.

Далее рассматриваются наборы  $(z_i, u_i, v_i, z_{2i}, u_{2i}, v_{2i})$  и ищется номер  $i$ , для которого  $z_i = z_{2i}$ . Для такого  $i$  выполнено

$$b^{u_{2i}-u_i} \equiv a^{v_i-v_{2i}} \pmod{p}.$$

Если при этом  $(u_{2i} - u_i, p - 1) = 1$ , то

$$x \equiv \log_a b \equiv (u_{2i} - u_i)^{-1} (v_i - v_{2i}) \pmod{p-1}.$$

Figure 3.3: Алгоритм Ро-метода Полларда. 2.



### 3.4 Сложность алгоритма

Эвристическая оценка сложности составляет  $O(p^{1/2})$ .

## 4 Выполнение лабораторной работы

**Примечание:** комментарии по коду представлены на скриншотах к каждому из проделанных заданий.

В соответствии с заданием, была написана программа по воплощению алгоритма Ро-метода Полларда для задач дискретного логарифмирования.

Программный код и результаты выполнения программ представлен ниже.

### 4.1 Ро-метод Полларда

```
def f(c,u,v):  
    '''  
    Ввели функцию, завис. от c,u,v  
    '''  
    if c<53:  
        return 10*c%107,u+1,v  
    else:  
        return 64*c%107,u,v+1
```

Figure 4.1: Вспомогательная функция, зависящая от c,u,v

```

def rasshir_algorithm_Evklida(a,b):
    '''
    расширенный алгоритм Евклида
    '''
    r=[]
    x=[]
    y=[]
    r.append(a)
    r.append(b)
    x.append(1)
    x.append(0)
    y.append(0)
    y.append(1)
    i=1
    while r[i]!=0:
        i+=1
        r.append(r[i-2]%r[i-1])
        if r[i]==0:
            d=r[i-1]
            x=x[i-1]
            y=y[i-1]
        else:
            x.append(x[i-2]-((r[i-2]//r[i-1])*x[i-1]))
            y.append(y[i-2]-((r[i-2]//r[i-1])*y[i-1]))
    return d,x,y

```

Figure 4.2: Вспомогательная функция. Расширенный алгоритм Евклида

```

def Pollard(p,a,r,b,u,v):
    '''
    Метод Полларда для логарифмирования в конечном поле
    '''
    c=a**u*b**v%p
    d=c
    uc=u
    vc=v
    ud=u
    vd=v
    c,uc,vc=f(c,uc,vc)
    c%=p
    d,ud,vd=f(*f(d,ud,vd))
    d%=p

```

Figure 4.3: Реализация алгоритма Ро-метода Полларда для логарифмирования

```

while c%p!=d%p:
    '''
    условие работы цикла
    '''
    c,uc,vc=f(c,uc,vc)
    c%=p
    d,ud,vd=f(*f(d,ud,vd))
    d%=p

v=vc-vd
u=ud-uc

d,x,y=rasshir_algorithm_Evklida(v,r)

while d!=1:
    v/=d
    u/=d
    r/=d
    d,x,y=rasshir_algorithm_Evklida(v,r)

return x*u%r

```

Figure 4.4: Реализация алгоритма Ро-метода Полларда для логарифмирования

Были взяты данные из пояснения к лабораторной работе. Они были подставлены в программу. Получен следующий результат (см. рис. [-4.5).

```
Pollard(107,10,53,64,2,2)
```

20

Figure 4.5: Результат реализации Ро-метода Полларда на примере

## 5 Выводы

Таким образом, была достигнута цель, поставленная в начале лабораторной работы: в результате выполнения данной лабораторной работы нам удалось изучить алгоритм Ро-Полларда осуществить программно алгоритм, рассмотренный в описании к лабораторной работе на языке Python 3. А также получить ответ, совпадающий с ответом из инструкции.

## Список литературы

1. Википедия. По-метод полларда для дискретного логарифмирования [Electronic resource]. Википедия, свободная энциклопедия, 2021. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\\_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0\\_%D0%B4%D0%BB%D1%8F\\_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE\\_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0_%D0%B4%D0%BB%D1%8F_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) (accessed: 25.12.2021).
2. Wikiznanie. По-метод полларда для дискретного логарифмирования [Electronic resource]. Википедия, 2021. URL: [https://www.wikiznanie.ru/wp/index.php/%D0%A0%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\\_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0\\_%D0%B4%D0%BB%D1%8F\\_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE\\_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F](https://www.wikiznanie.ru/wp/index.php/%D0%A0%D0%BE-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0_%D0%B4%D0%BB%D1%8F_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) (accessed: 25.12.2021).

3. Wikiznanie. ☒-метод полларда дискретного логарифмирования [Electronic resource]. Википедия, 2021. URL: [https://mind-control.fandom.com/wiki/%C3%A1-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\\_%D0%9F%D0%BE%D0%B%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0\\_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE\\_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F](https://mind-control.fandom.com/wiki/%C3%A1-%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9F%D0%BE%D0%B%D0%BB%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B0_%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) (accessed: 25.12.2021).