Домашнее задание 2. Курс «Алгебра». 2022–2023 учебный год.
БПИ-227. Вариант 9

1. Пусть $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\dfrac{\sqrt[7]{z^3}}{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}}$ имеет аргумент $\frac{4\pi}{21}$.

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x\,(12-4i) + y\,(1-13i) = 249-121i \\ x\,(9-i) + y\,(9+5i) = 67+195i \end{cases}$$

3. Найти корни многочлена $-5x^6 - 65x^5 - 385x^4 - 905x^3 - 830x^2 + 3410x + 12300$ и разложить его на множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, если известны корни $x_1 = -1+3i$, $x_2 = -5+4i$, $x_3 = 2$.

4. Даны 3 комплексных числа: $1-16i$, $-21i$, $15-25i$. Найти число z, образующее параллелограмм с данными тремя на комплексной плоскости.

5. Даны числа $z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$, $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}i}{2}$ – соседние комплексные корни степени n числа z. Найти степень n и исходное число.

6. На комплексной плоскости нарисуйте область, заданную системой ($arg(z) \in (-\pi, \pi]$):
$$\begin{cases} |z+2i| < 2 \\ |arg(z+3-2i)| < \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

7. Даны 3 некомпланарных вектора $a = (0, 5, 4)$, $b = (3, -3, -1)$, $c = (6, -4, 0)$. Найдите вектор x, удовлетворяющий системе уравнений:
$$(a, x) = \alpha, \quad (b, x) = \beta, \quad (c, x) = \gamma$$

8. Дана точка $A(-9, 9, -15)$ и плоскость $P: 24y - 38z + 224 = 0$. Найти координаты точки A_0, расположенной симметрично точке A относительно плоскости P.

9. Даны точки $A(1, 12, 10)$, $M_1(2, 29, -1)$, $M_2(12, -1, -1)$. Написать каноническое уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2. Найти координаты точки A_0, расположенной симметрично точки A относительно прямой L.

10. Заданы две прямые L_1 и L_2 своими общими уравнениями
$$L_1: \begin{cases} 12x - 22y - 4z + 262 = 0 \\ 4x - 18y + 16z + 318 = 0 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} 8x - 4y - 20z + 2344 = 0 \\ -13x + 7y - z - 774 = 0 \end{cases}$$
Написать каноническое уравнение прямой, являющейся общим перпендикуляром к L_1 и L_2.