Домашнее задание 2. Курс «Алгебра». 2022–2023 учебный год.
БПИ-224. Вариант 23

1. Пусть $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Вычислить значение $\sqrt[4]{z^3}$, для которого число $\dfrac{\sqrt[4]{z^3}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}}$ имеет аргумент $-\frac{7\pi}{12}$.

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x(-2+7i) + y(-8-3i) = -14-81i \\ x(-3-8i) + y(8-13i) = 14-19i \end{cases}$$

3. Найти корни многочлена $x^6 + 5x^5 - 21x^4 - 55x^3 + 684x^2 + 450x - 6264$ и разложить его на множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, если известны корни $x_1 = -5-2i$, $x_2 = 3+3i$, $x_3 = 3$.

4. Даны 3 комплексных числа: $15-2i$, $-2+18i$, $-24-24i$. Найти число z, образующее параллелограмм с данными тремя на комплексной плоскости.

5. Даны числа $z_1 = -2+2\sqrt{3}i$, $z_2 = -2-2\sqrt{3}i$ – соседние комплексные корни степени n числа z. Найти степень n и исходное число.

6. На комплексной плоскости нарисуйте область, заданную системой ($arg(z) \in (-\pi, \pi]$):
$$\begin{cases} |z+4-2i| < 1 \\ |arg(z+3-4i)| < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

7. Даны 3 некомпланарных вектора $a = (3, -1, -4)$, $b = (-3, 0, -4)$, $c = (-1, -1, -10)$. Найдите вектор x, удовлетворяющий системе уравнений:
$$(a, x) = \alpha, \quad (b, x) = \beta, \quad (c, x) = \gamma$$

8. Дана точка $A(-7, 5, -10)$ и плоскость $P: -30x + 14y - 32z + 460 = 0$. Найти координаты точки A_0, расположенной симметрично точке A относительно плоскости P.

9. Даны точки $A(-5, -3, 7)$, $M_1(-1, 10, -5)$, $M_2(25, -3, -5)$. Написать каноническое уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2. Найти координаты точки A_0, расположенной симметрично точки A относительно прямой L.

10. Заданы две прямые L_1 и L_2 своими общими уравнениями
$$L_1: \begin{cases} 9x + 5y - 23z - 277 = 0 \\ 17x - 13y - 13z - 307 = 0 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} -8x + 18y - 10z + 1982 = 0 \\ x + 10y - 4z + 874 = 0 \end{cases}$$

Написать каноническое уравнение прямой, являющейся общим перпендикуляром к L_1 и L_2.