

Modeli fizičkih sistema (Modeliranje i simulacija sistema)

Nikola Kušlaković

<https://github.com/nkusla/miss-dump>

Januar 2022.

Modeli fizičkih sistema

Translatorni mehanički sistemi

Promenljive (sve zavise od vremena):

- x - rastojanje $[m]$
- v - brzina $[\frac{m}{s}]$, važi $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$
- a - ubrzanje $[\frac{m}{s^2}]$, važi $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$
- f - sila $[N]$

Elementi:

- Masa - mera inercije tela $[m]$
- Trenje - javlja se kada se dva tela dodiruju i kreću različitim brzinama (npr. trenje podloge, prigušnica...). Najčešće opisano linearnom formulom: $f_t = c \cdot \Delta v$, gde je c koeficijent trenja $[\frac{Ns}{m}]$, a Δv razlika brzina dva tela.
- Elastičnost - javlja se kod istegnute opruge. Najčešće opisana linearnom formulom: $f_e = k \cdot \Delta x$, gde je k koeficijent elastičnosti $[\frac{N}{m}]$, a Δx razlika pozicija dva tela.

Zakovitosti:

- I Njutnov zakon - svako telo teži da ostane u stanju mirovanja ili kretanja, sve dok ga drugo telo ne primora da to stanje promeni.
- II Njutnov zakon - sila koja deluje na telo jednaka je proizvodu mase i ubrzanja tog tela.

$$f = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

- III Njutnov zakon - svaka sila akcije na neko telo ima svoju silu reakcije koja je istog intenziteta, ali suprotnog smera.
- D'alambertov zakon - suma svih spoljašnjih sila koje deluju na telo i unutrašnje inercijalne sile jednaka je 0.

Rotacioni mehanički sistemi

Promenljive (sve zavise od vremena):

- θ - ugao $[rad]$
- ω - ugaona brzina $[\frac{rad}{s}]$, važi $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
- α - ugaono ubrzanje $[\frac{rad}{s^2}]$, važi $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$
- τ - moment sile $[Nm]$

Elementi:

- Moment inercije - velicina koja oposuje koliko se telo opire rotacionom kretanju. Zavisi od oblika tela, raspodele mase tele i ose oko koje telo rotira. Označava se sa J [kgm^2]

Moment inercije materijalne tačke mase Δm koja rotira na rastojanju r od ose je:

$$J = \Delta m \cdot r^2$$

- Trenje usled rotacije - algebarska veza momenta sile i relativne ugaone brzine između dve površi koje se dodiruju.

$$\tau_t = c \cdot \Delta \omega$$

gde je c - koeficijent trenja [Nms].

- Elastičnost usled uvrtnja - algebarska veza momenta sile i relativnog ugaonog pomeraja.

$$\tau_e = k \cdot \Delta \theta$$

gde je k - koeficijent elastičnosti [Nm].

- Poluga - često uzimamo da je poluga idealna i da nema masu, trenje, moment inercije, unutrašnju energiju. Za male pomeraje krajevi poluge se kreću translatorno.

$$\varphi = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2}$$

gde je φ ugao koji poluga zaklapa sa horizontalom, x je pomeraji, a L dužina dela poluge merene od oslonca poluge.

- Zupčanici - uzimamo da su idealni pa onda važi da nemaju moment inercije, trenje, unutrašnju energiju i zubi im savršeno naležu. Uvodi se veličina zupčastog prenosa N - odnos broja zuba.

$$R_1 \theta_1 = R_2 \theta_2 \implies \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} = N$$

gde je R poluprečnik zupčanika, θ ugaoni pomeraj i z broj zuba zupčanika.

Zakovitosti:

- II Njutnov zakon rotacije - moment sile koji deluje na telo jednak je proizvodu momenta inercije i ugaonog ubrzanja tela.

$$\tau = J \cdot \dot{\omega}$$

- Zakon reakcije momenata sila (posledica III Njutnov zakona) - posmatramo dva tela koja rotiraju oko iste ose. Ako momentom sile jedno telo deluje na drugo onda i drugo telo momentom sile reakcije deluje na prvo telo istom intenzitetom ali suprotnom smerom.
- D'alamberov zakon - isto kao i kod translatorskih sistema...
- Zakon ugaonih pomeraja - suma razlika ugaonih pomeraja duž zatvorene putanje jednak je 0.

$$\sum_i \theta_i = 0$$

Termički sistemi

Promenljive:

- θ - temperatura [K]. Najčešće se smatra da je temperatura u svim delovima tela ista i da je jednaka prosečnoj temperaturi.
- q - količina toplote u sekundi [$\frac{J}{s}$] = [W]

Elementi - 2 pasivna i 1 aktivan element:

- Termička kapacitivnost - daje vezu između temperature tela i akumulirane toplote. Zavisnost se može posmatrati kao linearna:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{C}(q_{in}(t) - q_{out}(t))$$

C - toplotni kapacitet tela $[\frac{J}{K}]$, računa se po formuli $C = m \cdot \sigma$, gde je σ specifična toplota tela.

- Termička otpornost - posmatramo provođenje toplote. Provođenje toplote sa jednog tela na drugo telo je srazmerno razlici temperatura dva tela. Matematički:

$$q(t) = \frac{1}{R}(\theta_2(t) - \theta_1(t))$$

R - termička otpornost $[\frac{Ks}{J}]$, zavisi od karakteristike materijala i računa se po formuli $R = \frac{d}{A\alpha}$, gde su d , A i α redom debljina, površina poprečnog preseka i termička provodljivost (podatak iz tabele).

- Termički izvor - može biti izvor koji dovodi ili odvodi toplotu iz sistema. Uzimamo da je količina toplote koja se dovde pozitivna, a ona koja se odvede negativna.

Zakovitosti: važe zakoni termodinamike...

Sistemi sa fluidima

Promenljive:

- q - zapremnski protok $[\frac{m^3}{s}]$
- V - zapremina $[m^3]$
- h - visina (nivo) tečnosti $[m]$
- p - pritisak $[\frac{N}{m^2}] = [Pa]$. Ponekad se posmatra u odnosu na atmosferski pritisak P_a

Elementi:

- Pumpa
- Ventil

Zakovitosti:

- Bernulijeva jednačina

Električni i elektromehanički sistemi

Promenljive:

- u - napon $[V]$
- i - jačina električne struje $[A]$
- f_e - elektromagnetna sila $[N]$
- v - brzina provodnika u odnosu na magnetno polje $[\frac{m}{s}]$
- l - dužina provodnika u magnetnom polju $[m]$
- ϕ - magnetni fluks $[Wb]$
- B -magnetna indukcija $[\frac{Wb}{m^2}] = [T]$
- ϵ - indukovana elektromotorna sila $[V]$

Pasivni elementi:

- Otpornik otpornosti R [R] - $u(t) = R \cdot i(t)$
- Kalem induktivnosti L [H] - $u(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$
- Kondenzator kapaciteta C [F] - $i(t) = R \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

Aktivni elementi:

- Idealan naponski generator
- Idealan strujni izvor

Zakovitosti:

- Omov zakon
- I Kirhofov zakon - algebarska suma struja koje ulaze i izlaze iz čvora jednaka je 0
- II Kirhofov zakon - algebarska suma napona po zatvorenoj konturi jednaka je 0
- Amperova sila - na pravolinijski provodnik dužine l , kroz koji protiče struja jačine i i koji se kreće u homogenom magnetnom polju indukcije B deluje sila intenziteta:

$$f_e = \vec{i}l \times \vec{B} = ilB \cdot \sin(\theta)$$

gde je θ ugao koje zaklapaju vektori \vec{i} i \vec{B}

- Indukovanje elektromotorne sile - kretanje provodnika brzinom v u homogenom magnetnom indukuje elektromotornu silu:

$$\epsilon = \vec{v}l \times \vec{B} = ilB \cdot \sin(\theta)$$