深蓝学院
shenlanxueyuan.com

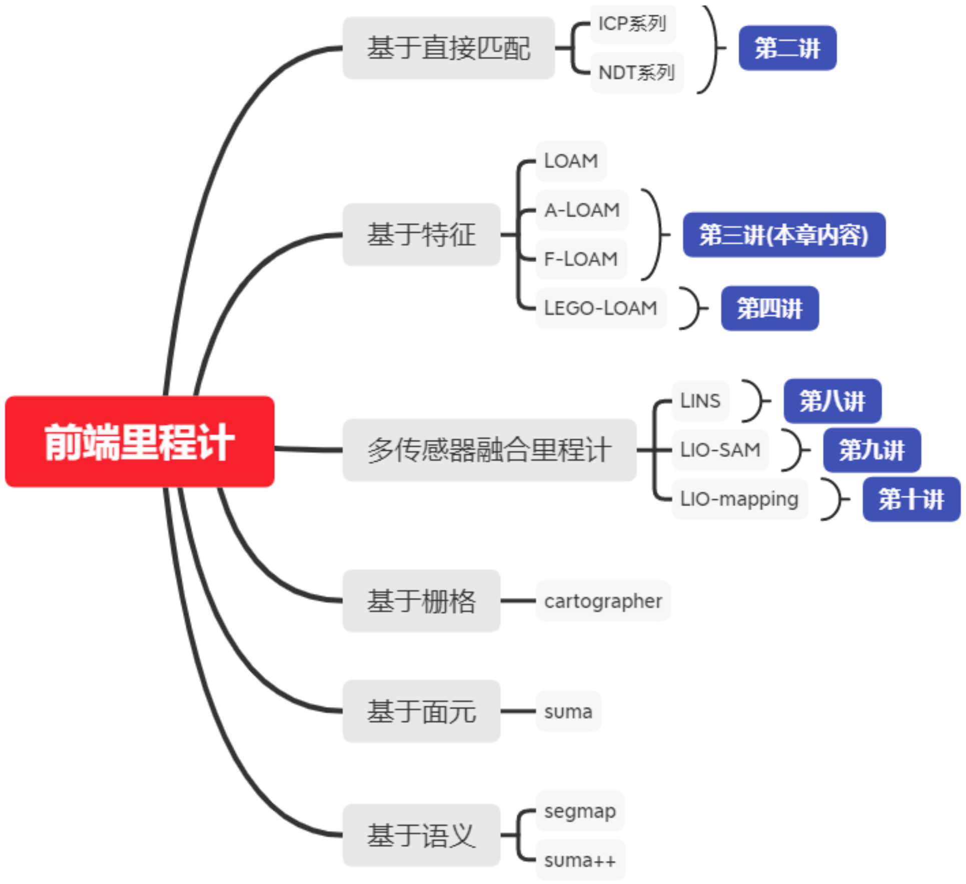
多传感器融合定位

第3讲 3D激光里程计 II

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者

前端里程计概览



前端里程计
基于直接匹配
ICP系列
NDT系列
第二讲
基于特征
LOAM
A-LOAM
F-LOAM
第三讲(本章内容)
LEGO-LOAM
第四讲
多传感器融合里程计
LINS
第八讲
LIO-SAM
第九讲
LIO-mapping
第十讲
基于栅格
cartographer
基于面元
suma
基于语义
segmap
suma++

目录

向量基本运算

1. 向量运算及其几何意义

1) 内积定义

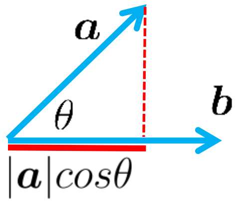
内积，又叫数量积，是向量的点乘。

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

2) 内积几何意义

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\theta$$



当 $\boldsymbol{b}$ 为单位向量时，内积就是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影分量。

向量基本运算

1. 向量运算及其几何意义

3) 外积定义

外积，又叫叉积、向量积，是向量的叉乘。

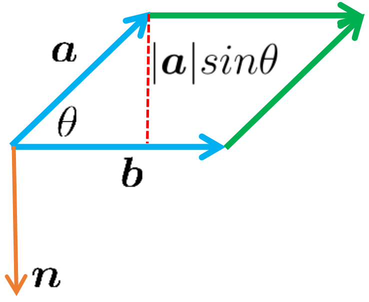
$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= \quad (y_1 z_2 - y_2 z_1)\, i \\
&\quad - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\, j \\
&\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, k
\end{aligned}$$

4) 外积几何意义

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| sin\theta$$



外积模长等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 组成的平行四边形的面积，

外积的方向满足右手定则，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成平面的单位法向量为：$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$

向量基本运算

1. 向量运算及其几何意义

5) 内积微分性质

从内积的定义出发，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}$$

证明：

$$\frac{\partial \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{\partial x_1} = \frac{\partial (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{\partial x_1} = x_2$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{\partial y_1} = \frac{\partial (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{\partial y_1} = y_2$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{\partial z_1} = \frac{\partial (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}{\partial z_1} = z_2$$

6) 外积微分性质

根据外积的定义，有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{a}^{\wedge}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的反对称矩阵

$$\boldsymbol{a}^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

请各位自行证明：

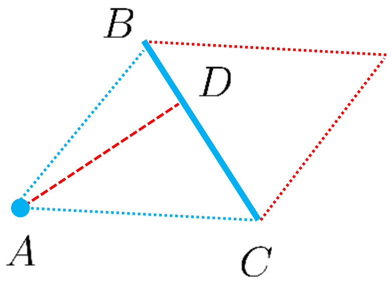
$$\boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}^{\wedge} \boldsymbol{a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{a}} = -\frac{\boldsymbol{b}^{\wedge} \, \partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{a}} = -\boldsymbol{b}^{\wedge}$$

向量基本运算

2. 线面特征运算

1) 点到直线距离

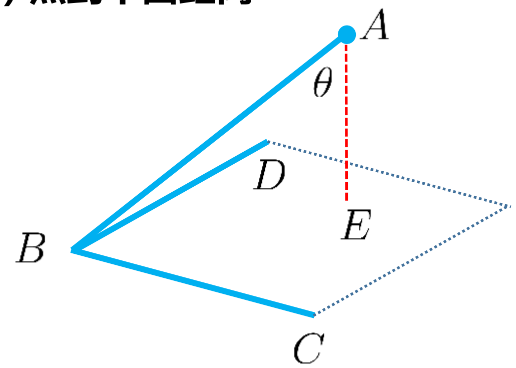


点 A 到直线 BC 的距离为

$$|\overrightarrow{AD}| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

即平行四边形面积除以对角线长度

2) 点到平面距离



平面 BCD 的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}$

点 A 到平面 BCD 的距离为

$$|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{AB}|cos\theta = \overrightarrow{AB} \bullet \boldsymbol{n}$$

目录

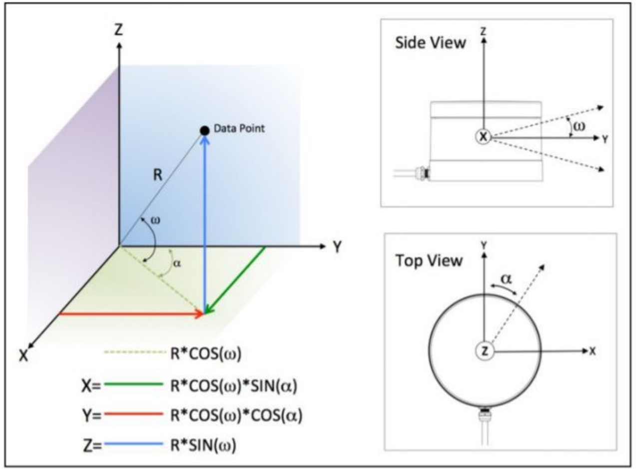
点云线面特征提取

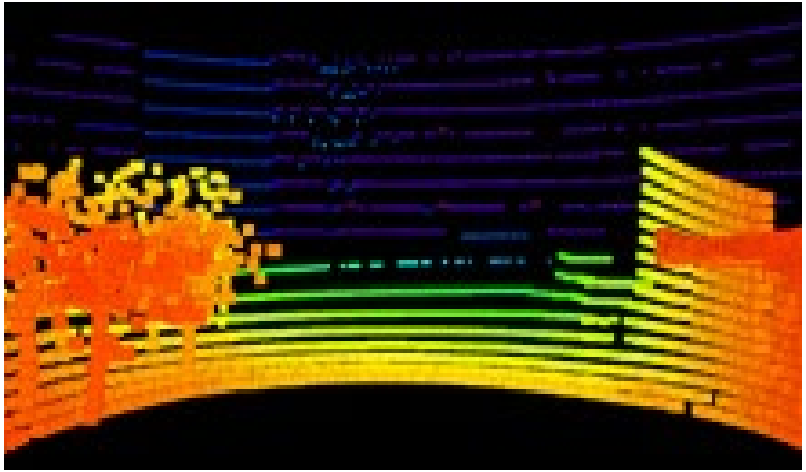
1. 按线数分割

根据激光点坐标，可计算该束激光相比于雷达水平面的倾角 $\omega = arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

根据倾角和雷达内参(各扫描线的设计倾角)，可知雷达属于哪条激光束。

Figure 9-1 VLP-16 Sensor Coordinate System



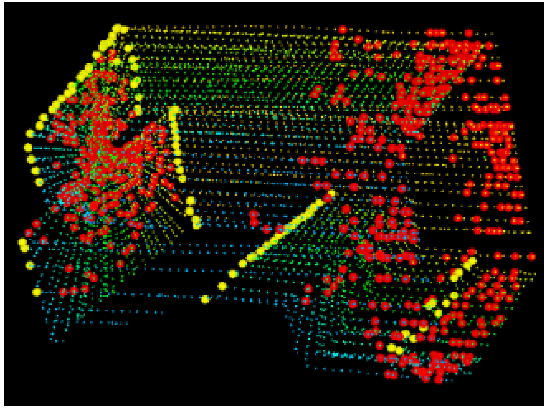


点云线面特征提取

2. 计算曲率

根据前后各5个点与当前点的长度(长度指激光点到雷达的距离)，计算曲率大小。

$$c = \frac{1}{\|X\|} \left\| \sum_{i} (X - X_i) \right\|$$



3. 按曲率大小筛选特征点

共分4类：

a. 曲率特别大的点(sharp)

b. 曲率大的点(less_sharp)

c. 曲率特别小的点(flat)

d. 曲率小的点(less_flat)

实际使用时：

a. sharp 为“点到直线”中的“点”

b. sharp 和 less_sharp 为 “点到直线”中的直线

c. flat 为“点到平面”中的“点”

d. flat 和 less flat 为 “点到平面”中的“平面”

参考文献：LOAM: Lidar Odometry and Mapping in Real-time Ji Zhang and Sanjiv Singh

推荐博客：https://blog.csdn.net/robinvista/article/details/104379087

目录

基于线面特征的位姿优化

1. 帧间关联

1) 点云位姿转换

第 k+1 帧与第 k 帧的相对位姿为

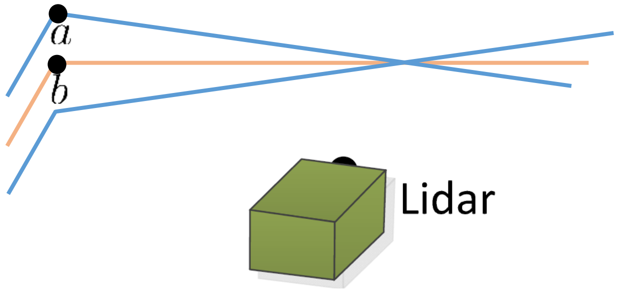
$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第 k+1 帧中的点 p_i 转到第 k 帧坐标系

$$\tilde{p_i} = Rp_i + t$$

2) 线特征关联

当 p_i 为 sharp 时，在上一帧中搜索离 $\tilde{p_i}$ 最近的线特征点，并在相邻线上再找一个线特征点，组成直线。

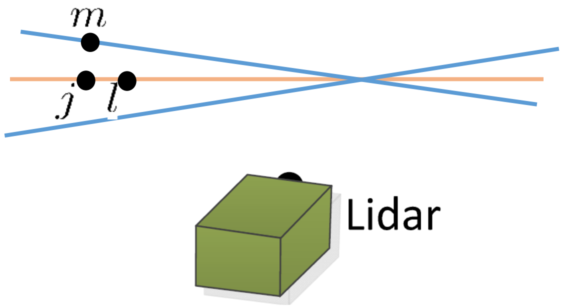


基于线面特征的位姿优化

1. 帧间关联

3) 面特征关联

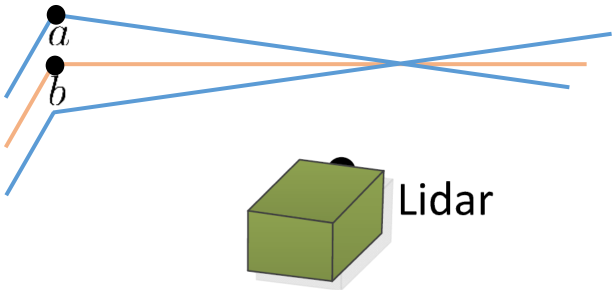
当 p_i 为 flat 时，在上一帧中搜索离 $\tilde{p}_i$ 最近的面特征点，并在相邻线上找两个面特征点，组成平面。



基于线面特征的位姿优化

2. 残差函数

1) 线特征



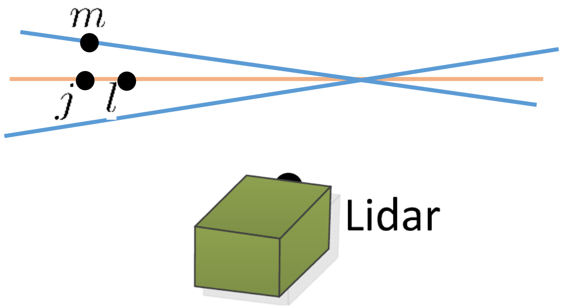
点到直线的距离

$$d_{\mathcal{E}} = \frac{|(\tilde{p}_i - p_b) \times (\tilde{p}_i - p_a)|}{|p_a - p_b|}$$

在实际代码中，使用的是矢量形式

$$d_{\mathcal{E}} = \frac{(\tilde{p}_i - p_b) \times (\tilde{p}_i - p_a)}{|p_a - p_b|}$$

2) 面特征



点到平面的距离

$$d_{\mathcal{H}} = (\tilde{p}_i - p_j) \bullet \frac{(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)}{|(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)|}$$

基于线面特征的位姿优化

3. 位姿优化

按第一章介绍凸优化基础，只要求得残差关于待求变量的雅可比，便可采用高斯牛顿等进行优化。

1) 线特征残差雅可比

$$J_{\mathcal{E}} = \frac{\partial d_{\mathcal{E}}}{\partial T} = \frac{\partial d_{\mathcal{E}}}{\partial \tilde{p}_i} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial T}$$

等号右边第二项与李代数相关，此处直接给出结论，推导过程见《视觉SLAM十四讲》第 4.3 节。

对平移的雅可比： $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial t} = I$

对旋转的雅可比： $\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial R} = -(Rp_i + t)^{\wedge}$

等号右边第一项可以根据外积的微分性质，推导得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_{\mathcal{E}}}{\partial \tilde{p}_i} &= \frac{1}{|p_a - p_b|} \left(\frac{\partial (\tilde{p}_i - p_b)^{\wedge} (\tilde{p}_i - p_a)}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{(\tilde{p}_i - p_b)^{\wedge} \partial (\tilde{p}_i - p_a)}{\partial \tilde{p}_i} \right) \\
&= \frac{1}{|p_a - p_b|} \left(-(\tilde{p}_i - p_a)^{\wedge} + (\tilde{p}_i - p_b)^{\wedge} \right) \\
&= \frac{(p_a - p_b)^{\wedge}}{|p_a - p_b|}
\end{aligned}$$

基于线面特征的位姿优化

3. 位姿优化

2) 面特征残差雅可比

$$J_{\mathcal{H}} = \frac{\partial d_{\mathcal{H}}}{\partial T} = \frac{\partial d_{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_i}\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial T}$$

等号右边第二项与线特征的一致。

由于

$$d_{\mathcal{H}} = (\tilde{p}_i - p_j) \bullet \frac{(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)}{|(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)|}$$

对于等号右边第一项，根据内积的微分性质，有

$$\frac{\partial d_{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)}{|(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)|}$$

物理意义上，它代表的是平面的单位法向量。

目录

位姿优化代码实现

1. ceres 基础知识

1) 基本概念

优化任务一般可以表示成如下形式：

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \sum_i \rho_i \left(\left\| f_i \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \right) \right\|^2 \right)$$
$$\text{s.t.} \quad l_j \leq x_j \leq u_j$$

其中

a. $\rho_i \left(\left\| f_i \left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \right) \right\|^2 \right)$ 称为残差块，即 ResidualBlock；

b. $f_i(\cdot)$ 称为代价函数，对应之前讲的残差函数，即 CostFunction；

c. $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ 这一系列参数称为参数块，即 ParameterBlock；

d. $\rho_i(\cdot)$ 称为损失函数，即 LossFunction。

位姿优化代码实现

2) 自动求导与解析求导

a. 自动求导

以一个简单的例子来说明该问题，假设代价函数为 $f(x) = 10 - x$

则首先编写 CostFunctor 的代码如下：

```
struct CostFunctor {
   template <typename T>
   bool operator()(const T* const x, T* residual) const {
     residual[0] = T(10.0) - x[0];
     return true;
   }
};
```

位姿优化代码实现

随后可直接构建 ceres 优化问题

```
int main(int argc, char** argv) {
  google::InitGoogleLogging(argv[0]);

  // The variable to solve for with its initial value.
  double initial_x = 5.0;
  double x = initial_x;

  // Build the problem.
  Problem problem;

  // Set up the only cost function (also known as residual). This uses
  // auto-differentiation to obtain the derivative (jacobian).
  CostFunction* cost_function =
      new AutoDiffCostFunction<CostFunctor, 1, 1>(new CostFunctor);
  problem.AddResidualBlock(cost_function, NULL, &x);
```

此处的 AutoDiffCostFunction即代表当前模式为自动求导，它使用CostFunctor中的残差公式自动求解出导数，而不需要手动给出导数形式。

位姿优化代码实现

b. 解析求导

解析求导的含义就是直接给出导数的解析形式，而不是ceres去推导。

```
class QuadraticCostFunction : public ceres::SizedCostFunction<1, 1> {
// 定义一个CostFunction或 SizedCostFunction（如果参数和残差在编译时就已知了）的子类。
 public:
  virtual ~QuadraticCostFunction() {}
  virtual bool Evaluate(double const* const* parameters,
                 //输入参数数组
                        double* residuals,
                         //输出残差数组
                        double** jacobians) const {
                            //输出雅可比行列式
    const double x = parameters[0][0];
    residuals[0] = 10 - x;

    // Compute the Jacobian if asked for.
    if (jacobians != NULL && jacobians[0] != NULL) {
      jacobians[0][0] = -1;
    }
    return true;
  }
};
```

- 第一个参数为ResidualBlock维数
- 第二个参数为第一个ParameterBlock维数
- 当有多个ParameterBlock时，此处参数就不只两个

- 给出雅可比时，ceres会直接使用该雅可比
- 不给出雅可比时，ceres就会自动去求导

位姿优化代码实现

随后可构建优化问题

```
int main(int argc, char** argv) {
  google::InitGoogleLogging(argv[0]);

  // 初始化待优化变量
  double x = 0.5;
  const double initial_x = x;

  // 构建问题
  Problem problem;

  // 设置残差函数
  CostFunction* cost_function = new QuadraticCostFunction;
  problem.AddResidualBlock(cost_function, NULL, &x);
```

这种使用方式，就是vio/lio中使用ceres构建优化问题的方式

位姿优化代码实现

c. 自动求导与解析求导的对比

- 自动求导实现方便，但效率会比解析求导低 (比较 A-LOAM 和 F-LOAM)；
- 实际使用中，能够自动求导且效率没有形成障碍的，优先使用自动求导；
- 除这两种方法外，还有数值求导（SLAM问题中不常见，不过多介绍）。

位姿优化代码实现

2. 自动求导实现位姿优化(A-LOAM)

1) 线特征

```
LidarEdgeFactor(Eigen::Vector3d curr_point_, Eigen::Vector3d last_point_a_,
                Eigen::Vector3d last_point_b_, double s_)
    : curr_point(curr_point_), last_point_a(last_point_a_), last_point_b(last_point_b_), s(s_) {}
template <typename T>
bool operator()(const T *q, const T *t, T *residual) const
{
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> cp{T(curr_point.x()), T(curr_point.y()), T(curr_point.z())};
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> lpa{T(last_point_a.x()), T(last_point_a.y()), T(last_point_a.z())};
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> lpb{T(last_point_b.x()), T(last_point_b.y()), T(last_point_b.z())};

    //Eigen::Quaternion<T> q_last_curr{q[3], T(s) * q[0], T(s) * q[1], T(s) * q[2]};
    Eigen::Quaternion<T> q_last_curr{q[3], q[0], q[1], q[2]};
    Eigen::Quaternion<T> q_identity{T(1), T(0), T(0), T(0)};
    // 考虑运动补偿，ktti点云已经补偿过所以可以忽略下面的对四元数slerp插值以及对平移的线性插值
    q_last_curr = q_identity.slerp(T(s), q_last_curr);
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> t_last_curr{T(s) * t[0], T(s) * t[1], T(s) * t[2]};

    Eigen::Matrix<T, 3, 1> lp;
    // Odometry线程时，下面是将当前帧Lidar坐标系下的cp点变换到上一帧的Lidar坐标系下，然后在上一帧的Lidar坐标系计算点到线的残差距离
    // Mapping线程时，下面是将当前帧Lidar坐标系下的cp点变换到world坐标系下，然后在world坐标系下计算点到线的残差距离
    lp = q_last_curr * cp + t_last_curr;

    // 点到线的计算如下图所示
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> nu = (lp - lpa).cross(lp - lpb);
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> de = lpa - lpb;

    // 最终的残差本来应该是residual[0] = nu.norm() / de.norm(); 为啥也分成3个，我也不知
    // 道，从我试验的效果来看，确实是下面的残差函数形式，最后输出的pose精度会好一点点，这里需要
    // 注意的是，所有的residual都不用加fabs，因为Ceres内部会对其求 平方 作为最终的残差项
    residual[0] = nu.x() / de.norm();
    residual[1] = nu.y() / de.norm();
    residual[2] = nu.z() / de.norm();

    return true;
}
```

传入点(p_i)和线(p_a , p_b)

转换点云，并计算残差(与前面推导公式一致)，但不在代码中输入雅可比

位姿优化代码实现

2. 自动求导实现位姿优化(A-LOAM)

2) 面特征

```cpp
struct LidarPlaneFactor {
  LidarPlaneFactor(Eigen::Vector3d curr_point_, Eigen::Vector3d last_point_j_,
                   Eigen::Vector3d last_point_l_, Eigen::Vector3d last_point_m_,
                   double s_)
      : curr_point(curr_point_),
        last_point_j(last_point_j_),
        last_point_l(last_point_l_),
        last_point_m(last_point_m_),
        s(s_) {
    // 点l、j、m就是搜索到的最近邻的3个点，下面就是计算出这三个点构成的平面ljlm的法向量
    ljm_norm = (last_point_j - last_point_l).cross(last_point_j - last_point_m);
    // 归一化法向量
    ljm_norm.normalize();
  }

  template <typename T>
  bool operator()(const T *q, const T *t, T *residual) const {
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> cp{T(curr_point.x()), T(curr_point.y()),
                              T(curr_point.z())};
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> lpj{T(last_point_j.x()), T(last_point_j.y()),
                               T(last_point_j.z())};
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> ljm{T(ljm_norm.x()), T(ljm_norm.y()),
                               T(ljm_norm.z())};

    Eigen::Quaternion<T> q_last_curr{q[3], q[0], q[1], q[2]};
    Eigen::Quaternion<T> q_identity{T(1), T(0), T(0), T(0)};
    q_last_curr = q_identity.slerp(T(s), q_last_curr);
    Eigen::Matrix<T, 3, 1> t_last_curr{T(s) * t[0], T(s) * t[1], T(s) * t[2]};

    Eigen::Matrix<T, 3, 1> lp;
    lp = q_last_curr * cp + t_last_curr;

    // 计算点到平面的残差距离，如下图所示
    residual[0] = (lp - lpj).dot(ljm);

    return true;
  }
```

传入点(p_i) 和面(p_j 、p_l 、p_m)

转换点云，并计算残差(与前面推导公式一致)，但在代码中输入雅可比

位姿优化代码实现

3. 解析求导实现位姿优化(F-LOAM)

1) 线特征

```
bool EdgeAnalyticCostFunction::Evaluate(double const *const *parameters,
                                        double *residuals,
                                        double **jacobians) const {
  Eigen::Map<const Eigen::Quaterniond> q_last_curr(parameters[0]);
  Eigen::Map<const Eigen::Vector3d> t_last_curr(parameters[0] + 4);
  Eigen::Vector3d lp;
  lp = q_last_curr * curr_point + t_last_curr;  // new point
  Eigen::Vector3d nu = (lp - last_point_a).cross(lp - last_point_b);
  Eigen::Vector3d de = last_point_a - last_point_b;

  residuals[0] = nu.x() / de.norm();
  residuals[1] = nu.y() / de.norm();
  residuals[2] = nu.z() / de.norm();

  if (jacobians != NULL) {
    if (jacobians[0] != NULL) {
      Eigen::Matrix3d skew_lp = skew(lp);
      Eigen::Matrix<double, 3, 6> dp_by_so3;
      dp_by_so3.block<3, 3>(0, 0) = -skew_lp;
      (dp_by_so3.block<3, 3>(0, 3)).setIdentity();
      Eigen::Map<Eigen::Matrix<double, 3, 7, Eigen::RowMajor>> J_se3(
          jacobians[0]);
      J_se3.setZero();
      Eigen::Vector3d re = last_point_b - last_point_a;
      Eigen::Matrix3d skew_re = skew(re);

      J_se3.block<3, 6>(0, 0) = skew_re * dp_by_so3 / de.norm();
    }
  }

  return true;
}
```

转换点云，并计算残差(与前面推导公式一致)

手动输入点到线模型的雅可比

位姿优化代码实现

3. 解析求导实现位姿优化(F-LOAM)

2) 面特征

```
bool SurfNormAnalyticCostFunction::Evaluate(double const *const *parameters,
                                            double *residuals,
                                            double **jacobians) const {
  Eigen::Map<const Eigen::Quaterniond> q_w_curr(parameters[0]);
  Eigen::Map<const Eigen::Vector3d> t_w_curr(parameters[0] + 4);
  Eigen::Vector3d point_w = q_w_curr * curr_point + t_w_curr;

  residuals[0] = plane_unit_norm.dot(point_w) + negative_OA_dot_norm;

  if (jacobians != NULL) {
    if (jacobians[0] != NULL) {
      Eigen::Matrix3d skew_point_w = skew(point_w);

      Eigen::Matrix<double, 3, 6> dp_by_so3;
      dp_by_so3.block<3, 3>(0, 0) = -skew_point_w;
      (dp_by_so3.block<3, 3>(0, 3)).setIdentity();
      Eigen::Map<Eigen::Matrix<double, 1, 7, Eigen::RowMajor>> J_se3(
          jacobians[0]);
      J_se3.setZero();
      J_se3.block<1, 6>(0, 0) = plane_unit_norm.transpose() * dp_by_so3;
    }
  }
  return true;
}
```

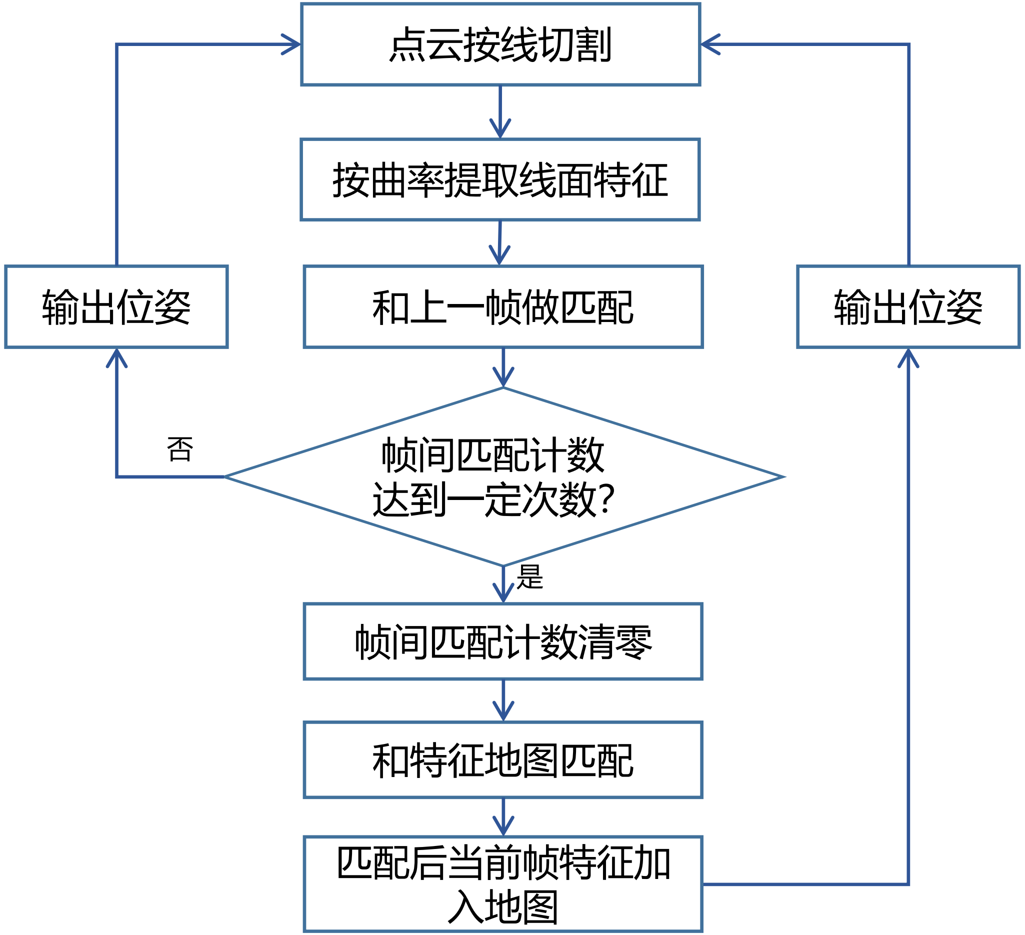
转换点云，并计算残差(与前面推导公式一致)

手动输入点到面模型的雅可比

目录

相关开源里程计

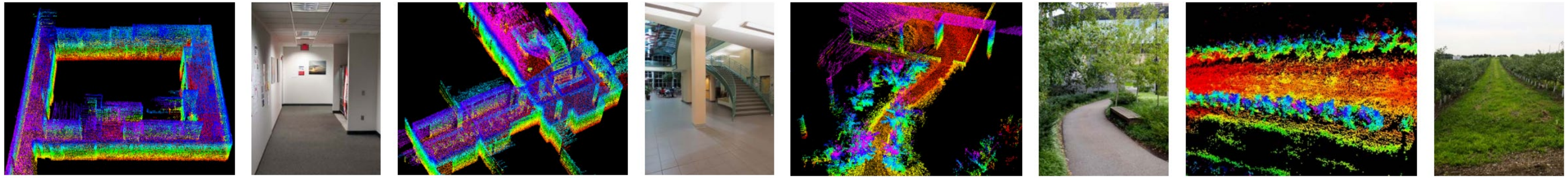
1. 基于特征的里程计实现流程



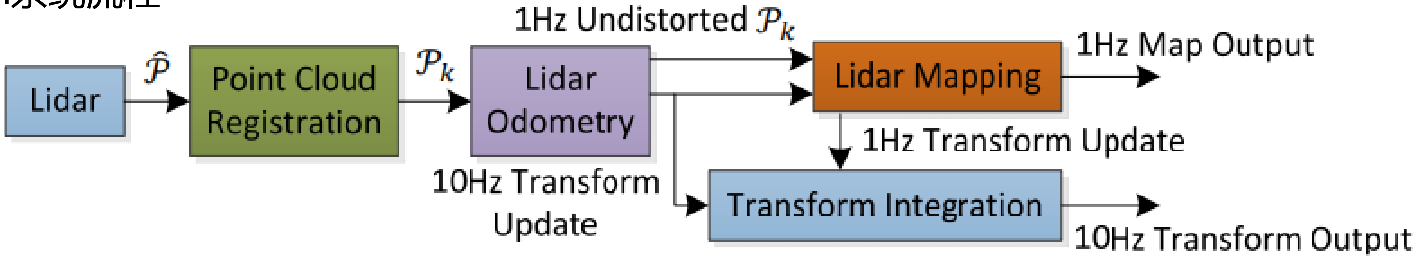
相关开源里程计

1. 基于特征的里程计实现流程

1) LOAM



LOAM系统流程



论文：LOAM: Lidar Odometry and Mapping in Real-time, Ji Zhang and Sanjiv Singh

相关开源里程计

2) A-LOAM

主要特点

1) 去掉了和IMU相关的部分
2) 使用Eigen（四元数）做位姿转换，简化了代码
3) 使用ceres做迭代优化，简化了代码，但降低了效率

代码：https://github.com/HKUST-Aerial-Robotics/A-LOAM
(课程页面也提供下载)

(讲解 A-LOAM 代码)

相关开源里程计

3) F-LOAM

主要特点

1) 整体和ALOAM类似，只是使用残差函数的雅可比使用的是解析式求导

代码：https://github.com/wh200720041/floam

(课程页面也提供下载)

(讲解 F-LOAM 代码)

作业

内容：

请使用以下残差模型，推导相应的雅可比，并在 F-LOAM 或 A-LOAM 基于该模型，实现解析式求导。

线特征残差：
$$d_{\mathcal{E}} = \frac{|(\tilde{p}_i - p_b) \times (\tilde{p}_i - p_a)|}{|p_a - p_b|}$$

面特征残差：
$$d_{\mathcal{H}} = \left| (\tilde{p}_i - p_j) \bullet \frac{(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)}{|(p_l - p_j) \times (p_m - p_j)|} \right|$$

评价标准：

1) 及格：推导雅可比，且结果正确；

2) 良好：在及格的基础上，编程实现新模型的解析式求导，且结果正常；

3) 优秀：在良好的基础上，给出运行结果的精度评测结果(基于evo)。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！

Thanks for Listening