

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS
GERAIS

LUCAS GOMES CARDOSO
NICHOLAS KEIJI YAMASAKI

MODELAGEM DE FILAS EM
SUPERMERCADOS:
UM ESTUDO DE DESEMPENHO DO
ATENDIMENTO EM CAIXAS RÁPIDOS

Belo Horizonte
2025

Resumo

Este estudo aplica a Teoria de Filas para avaliar a eficiência do atendimento em caixas rápidos de supermercados. Por meio de um estudo de caso, foram coletados dados reais sobre os tempos de chegada e atendimento dos clientes, analisando se a quantidade atual de caixas atende à demanda de forma eficiente. Utilizando modelagem matemática e testes estatísticos de aderência, validou-se a hipótese de que o processo de chegadas segue uma distribuição de Poisson e os tempos de serviço seguem uma distribuição Exponencial, permitindo a aplicação do modelo $M/M/s$. Com base nos resultados, verificou-se que o dimensionamento atual (quatro caixas) é adequado, garantindo um tempo médio de espera reduzido. No entanto, simulações demonstram que ajustes estratégicos, como a realocação dinâmica de operadores em horários de pico, podem otimizar ainda mais o desempenho do sistema, reduzindo filas sem gerar ociosidade excessiva.

Sumário

Sumário	2
1 INTRODUÇÃO	3
2 METODOLOGIA	4
2.1 Materiais	4
2.2 Métodos	4
3 RESULTADOS	7
3.1 Análise e Discussão dos Dados	10
3.1.1 Análise do Tempo Médio de Espera na Fila (W_q) e do Tempo To- tal no Sistema (W)	11
3.1.2 Análise do Número Médio de Clientes na Fila (L_q) e no Sistema (L)	12
3.1.3 Discussão e Implicações	12
4 CONCLUSÃO	14
REFERÊNCIAS	15

1 Introdução

Filas são uma preocupação constante tanto em processos produtivos quanto no cotidiano dos consumidores. No setor de supermercados, longos tempos de espera podem impactar negativamente a satisfação dos clientes e a imagem da empresa. Assim, a aplicação da Teoria de Filas permite aos gestores tomarem decisões embasadas sobre a quantidade ideal de servidores (caixas) para equilibrar custo e qualidade de serviço.

Este estudo busca modelar o sistema de atendimento de um supermercado de grande porte para analisar a eficiência do processo. A partir da coleta de dados sobre chegadas e atendimentos, serão avaliadas métricas como tempo médio de espera, número médio de clientes na fila e taxa de ocupação dos atendentes.

2 Metodologia

2.1 Materiais

A coleta de dados do trabalho foi feita através do aplicativo *Timeular* (Timeular GmbH, 2025): um cronômetro capaz de marcar diferentes intervalos de tempo concomitantemente. O tratamento e a análise dos dados obtidos foram feitos com o uso do Excel (Microsoft Corporation, 2021).

2.2 Métodos

Este estudo foi realizado em um supermercado de grande porte, focando-se em quatro caixas destinados a atendimento rápido (limite de até 15 itens por cliente). Para a coleta de dados, utilizou-se um aplicativo de cronometragem capaz de registrar simultaneamente diferentes intervalos de tempo. Durante trinta minutos consecutivos, foi monitorada a chegada de cada cliente à fila (abrangendo os quatro caixas), o instante de início do atendimento e o momento de término do atendimento. No total, cinquenta observações foram realizadas ao longo do período estudado.

A partir dos dados coletados, procedeu-se à análise estatística com o objetivo de verificar se o processo de chegadas dos clientes poderia ser modelado por uma distribuição de Poisson, bem como se os tempos de serviço em cada caixa se ajustavam a uma distribuição Exponencial. Para tanto, aplicou-se o teste de aderência *qui-quadrado* (*chi-square test*), adotando-se um nível de significância previamente estabelecido (por exemplo, $\alpha = 0,05$). Os resultados indicaram aderência satisfatória dos dados às distribuições supostas, validando, assim, o modelo $M/M/4$ (SILVA, 2020) para o sistema de filas em questão.

Com as hipóteses de Poisson para as chegadas e Exponencial para o serviço confirmadas, estimaram-se os parâmetros λ (taxa de chegada) e μ (taxa de serviço) a partir dos dados coletados. Em seguida, foram calculadas as métricas de desempenho do sistema, tais como o tempo médio de espera na fila (W_q) e o

tempo médio total no sistema (W). Para avaliar possíveis melhorias, realizaram-se simulações de cenários alterando-se o número de caixas (ou servidores), de modo a comparar os impactos na taxa de ocupação (ρ), no tamanho médio da fila (L_q) e no tempo de espera dos clientes.

Esse procedimento metodológico — coleta de dados cronometrados, análise de aderência às distribuições, estimação de parâmetros e simulação de cenários — permitiu concluir sobre a eficácia do atual dimensionamento dos caixas rápidos e embasar recomendações de melhoria operacional para o supermercado.

3 Resultados

Intervalo de Tempo (<i>min</i>)	Chegadas (Observado)	Chegadas (Esperado)	X^2
0 - 1	0	1.63	1.63
1 - 2	0	1.63	1.63
2 - 3	1	1.63	0.25
3 - 4	3	1.63	1.14
4 - 5	2	1.63	0.08
5 - 6	1	1.63	0.25
6 - 7	3	1.63	1.14
7 - 8	0	1.63	1.63
8 - 9	0	1.63	1.63
9 - 10	1	1.63	0.25
10 - 11	4	1.63	3.43
11 - 12	3	1.63	1.14
12 - 13	3	1.63	1.14
13 - 14	3	1.63	1.14
14 - 15	1	1.63	0.25
15 - 16	2	1.63	0.08
16 - 17	5	1.63	6.94
17 - 18	0	1.63	1.63
18 - 19	1	1.63	0.25
19 - 20	0	1.63	1.63
20 - 21	0	1.63	1.63
21 - 22	1	1.63	0.25
22 - 23	3	1.63	1.14
23 - 24	3	1.63	1.14
24 - 25	2	1.63	0.08
25 - 26	1	1.63	0.25
26 - 27	2	1.63	0.08
27 - 28	2	1.63	0.08
28 - 29	2	1.63	0.08
29 - 30	0	1.63	1.63
λ	1.63		
GL	28		
chi	0.21		

Tabela 1 – Teste de aderência para o processo de chegada dos clientes.

Intervalo de Tempo (<i>min</i>)	Serviços (Observado)	P_i	Serviços (Esperado)	X^2
0.22 – 0.31	2	0.06	2.97	0.31
0.31 – 0.41	2	0.06	2.75	0.21
0.41 – 0.50	5	0.05	2.55	2.34
0.50 – 0.59	2	0.05	2.37	0.06
0.59 – 0.69	4	0.04	2.20	1.47
0.69 – 0.78	4	0.04	2.04	1.88
0.78 – 0.88	1	0.04	1.89	0.42
0.88 – 0.97	0	0.04	1.76	1.76
0.97 – 1.06	4	0.03	1.63	3.44
1.06 – 1.16	1	0.03	1.51	0.17
1.16 – 1.25	1	0.03	1.41	0.12
1.25 – 1.35	4	0.03	1.30	5.57
1.35 – 1.44	3	0.02	1.21	2.64
1.44 – 1.53	2	0.02	1.12	0.68
1.53 – 1.63	1	0.02	1.04	0.00
1.63 – 1.72	2	0.02	0.97	1.10
1.72 – 1.82	0	0.02	0.90	0.90
1.82 – 1.91	2	0.02	0.83	1.63
1.91 – 2.00	0	0.02	0.77	0.77
2.00 – 2.10	1	0.01	0.72	0.11
2.10 – 2.19	1	0.01	0.67	0.17
2.19 – 2.29	2	0.01	0.62	3.09
2.29 – 2.38	1	0.01	0.57	0.32
2.38 – 2.47	1	0.01	0.53	0.41
2.47 – 2.57	0	0.01	0.49	0.49
2.57 – 2.66	0	0.01	0.46	0.46
2.66 – 2.76	2	0.01	0.43	5.82
2.76 – 2.85	1	0.01	0.40	0.93
2.85 – 2.94	0	0.01	0.37	0.37
2.94 – 3.04	0	0.01	0.34	0.34
μ	0.79			
GL	28			
chi	0.10			

Tabela 2 – Teste de aderência para o processo de serviços dos caixas.

As Tabelas 1 e 2 apresentam, respectivamente, os resultados do teste de aderência para os processos de **chegadas** e de **serviço**. Da Tabela 1, o valor $X^2 = 0.21$ (com 28 graus de liberdade) não resultou em rejeição da hipótese de Poisson, indicando que a taxa média de chegadas λ estimada (1.63 clientes/min) é compatível com a distribuição proposta. Da Tabela 2, a análise para os tempos de serviço evidenciou $X^2 = 0.10$, também com 28 graus de liberdade, não rejeitando a hipótese de Exponencial e corroborando a taxa média de serviço $\mu = 0.79$ clientes/min por caixa. Com base nessas estimativas, aplicou-se o modelo $M/M/4$, em que:

- $s = 4$ é o número de servidores (caixas);
- $\lambda = 1.63$ clientes/min é a taxa de chegadas;
- $\mu = 0.79$ clientes/min é a taxa de serviço **por servidor**.

A **taxa de ocupação** ρ de cada caixa é calculada por:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \approx \frac{1.63}{4 \times 0.79} \approx 0.52$$

indicando que, em média, cada caixa permanece ocupado 52% do tempo. A seguir, aplicaram-se as fórmulas clássicas de desempenho para $M/M/s$:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}, \quad (3.1)$$

$$p_w = \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)} p_0, \quad (3.2)$$

$$L_q = \frac{(s\rho)^s}{s!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0, \quad (3.3)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad (3.4)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}, \quad (3.5)$$

$$L = L_q + s\rho. \quad (3.6)$$

Ao efetuar esses cálculos (com $\rho \approx 0.52$), obtiveram-se os seguintes resultados aproximados:

- $p_0 \approx 0.12$ (probabilidade de nenhum cliente no sistema),
- $p_w \approx 0.19$ (cerca de 19% de chance de o cliente ter de aguardar),
- $L_q \approx 0.20$ clientes em média na fila,
- $L \approx 2.27$ clientes no sistema (fila + atendimento),
- $W_q \approx 0.12$ minutos (aprox. 7 segundos) de espera,
- $W \approx 1.39$ minutos de tempo total (fila + serviço).

Esses indicadores mostram que, com quatro caixas rápidos e uma taxa de ocupação ao redor de 52%, o *tempo médio de espera* é relativamente baixo (cerca de 7 segundos), e o *tempo total no sistema* gira em torno de 1 minuto e 24 segundos. Dessa forma, o sistema apresenta *fila média pequena* e boa capacidade de atendimento, o que sugere que, para a demanda observada, manter quatro caixas ativos é adequado. Caso se considere uma redução no número de caixas (por exemplo, passando a três), é provável que a espera aumente sensivelmente; por outro lado, aumentar para cinco ou mais caixas tenderia a gerar ociosidade excessiva, com ganhos marginais na redução de filas.

3.1 Análise e Discussão dos Dados

A partir dos cálculos do modelo $M/M/s$, analisou-se o impacto da variação no número de caixas disponíveis no sistema. Foram considerados três cenários distintos:

- O sistema original, com **quatro caixas** ($s = 4$);
- Um cenário com **um caixa a menos** ($s = 3$);
- Um cenário com **um caixa a mais** ($s = 5$).

A taxa de ocupação dos caixas é dada por:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

Para os diferentes cenários analisados, obteve-se:

- $s = 3 \Rightarrow \rho = 0.69$;
- $s = 4 \Rightarrow \rho = 0.52$;
- $s = 5 \Rightarrow \rho = 0.42$.

Observa-se que, ao reduzir o número de caixas para $s = 3$, a taxa de utilização aumenta para 69%, indicando um maior nível de ocupação dos servidores. Isso pode resultar em um aumento significativo do tempo médio de espera dos clientes na fila. Por outro lado, ao aumentar para $s = 5$, a ocupação média de cada caixa cai para 42%, sugerindo uma possível subutilização do sistema.

3.1.1 Análise do Tempo Médio de Espera na Fila (W_q) e do Tempo Total no Sistema (W)

O tempo médio de espera na fila é dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda},$$

e o tempo total no sistema, considerando o tempo de atendimento, é:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Os valores calculados foram:

- $s = 3 \Rightarrow W_q = 0.63 \text{ min}, \quad W = 1.89 \text{ min};$
- $s = 4 \Rightarrow W_q = 0.12 \text{ min}, \quad W = 1.39 \text{ min};$
- $s = 5 \Rightarrow W_q = 0.04 \text{ min}, \quad W = 1.29 \text{ min}.$

Com apenas três caixas disponíveis, o tempo médio de espera aumenta consideravelmente, atingindo aproximadamente 38 segundos (0.63 min). Esse acréscimo pode resultar em insatisfação dos clientes (há de se lembrar que os caixas são do tipo "rápidos"), especialmente em horários de maior fluxo. Já no caso de $s = 5$, a espera é praticamente eliminada, mas a redução do tempo total no sistema (W) é marginal, diminuindo apenas 6% em relação ao cenário com quatro caixas.

3.1.2 Análise do Número Médio de Clientes na Fila (L_q) e no Sistema (L)

O número médio de clientes na fila e no sistema é calculado por:

$$L_q = \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}p_0, \quad L = L_q + s\rho.$$

Os resultados obtidos são:

- $s = 3 \Rightarrow L_q = 1.03, \quad L = 3.10;$
- $s = 4 \Rightarrow L_q = 0.20, \quad L = 2.27;$
- $s = 5 \Rightarrow L_q = 0.05, \quad L = 2.14.$

A redução no número de caixas causa um aumento expressivo no número de clientes em espera, com L_q subindo para 1.03, o que significa que, em média, sempre há um cliente aguardando atendimento. Esse impacto reforça a necessidade de manter ao menos quatro caixas operacionais. Por outro lado, ao expandir o sistema para cinco caixas, o número médio de clientes na fila praticamente desaparece ($L_q \approx 0,05$), mas o ganho na redução da ocupação do sistema é pequeno.

3.1.3 Discussão e Implicações

A partir dos resultados apresentados, observa-se que manter **quatro caixas** ($s = 4$) representa um **ponto de equilíbrio** entre eficiência e custo operacional. O tempo médio de espera ($W_q \approx 7$ segundos) e o número médio de clientes na fila ($L_q \approx 0.20$) são baixos, garantindo um nível adequado de serviço sem desperdício excessivo de recursos.

A redução para **três caixas** ($s = 3$) aumenta significativamente o tempo de espera ($W_q \approx 38$ segundos) e o número médio de clientes na fila ($L_q \approx 1.03$), o que pode comprometer a experiência do cliente e gerar insatisfação em horários de pico. Já o aumento para **cinco caixas** ($s = 5$) reduz ainda mais a espera, mas os ganhos são pouco expressivos quando comparados ao custo adicional de manter um operador extra.

Dessa forma, conclui-se que a configuração atual ($s = 4$) é a mais adequada para a demanda observada. No entanto, recomenda-se um **monitoramento contínuo** do fluxo de clientes para avaliar possíveis variações sazonais que possam demandar ajustes temporários, como a ativação de um quinto caixa em horários específicos de alta demanda.

4 Conclusão

Os resultados obtidos confirmaram a adequação do modelo $M/M/4$ para representar o sistema de atendimento rápido (até 15 itens) no supermercado analisado. As chegadas de clientes apresentaram aderência à distribuição de Poisson, enquanto os tempos de serviço aderiram à distribuição Exponencial, validando a hipótese de atendimento "Markoviano". A estimação dos parâmetros λ e μ , associada às fórmulas clássicas de filas, indicou uma taxa de ocupação em torno de 52%, refletindo filas médias muito curtas e tempos de espera reduzidos.

Diante disso, conclui-se que manter **quatro caixas** dedicados a este tipo de atendimento fornece um *equilíbrio satisfatório* entre custos de operação (ociosidade dos caixas) e qualidade do serviço (espera do cliente). Um eventual aumento do número de caixas tornaria o sistema subutilizado na maior parte do tempo, gerando benefícios marginais na redução da espera; por outro lado, reduzir a quantidade de caixas poderia prejudicar a eficiência e aumentar significativamente o tempo de fila.

Recomenda-se, no entanto, que se realize *monitoramento contínuo* do fluxo de clientes, uma vez que a demanda pode variar em períodos sazonais ou horários de pico. Ajustes pontuais - como alocação flexível de operadores, treinamento para otimizar o tempo de serviço ou ampliação temporária de caixas em horários de maior movimento - podem melhorar ainda mais o desempenho do sistema e reduzir eventuais gargalos.

Referências

Microsoft Corporation. *Microsoft Excel – Planilha Eletrônica*. Versão 365. [S.l.], 2021. Disponível em: <<https://www.microsoft.com/pt-br/microsoft-365/excel>>. Acesso em: 6 fev. 2025.

SILVA, J. da. *Introdução à Teoria de Filas*. São Paulo: Editora Acadêmica, 2020.

Timeular GmbH. *Timeular: A Time Tracking App*. [S.l.], 2025. Disponível em: <<https://timeular.com>>. Acesso em: 6 fev. 2025.