

Laboratorio de Métodos Numéricos

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Trabajo Práctico Número 2

Integrante	LU	Correo electrónico
Schmit, Matías	714/11	matias.schmit@gmail.com
Vega, Leandro	698/11	lean_vega1@hotmail.com
Lasso, Nicolás	763/10	lasso.nico@gmail.com

Pratt Truss Sistema Ecuaciones Pilares

1 Introducción Teórica

En el siguiente trabajo se presenta la implementación de una herramienta para calcular el costo total de la construcción de un puente Pratt-Truss a partir de la cantidad de secciones, el alto de cada una y el largo total del mismo. Este trabajo tuvo los siguientes objetivos:

1. Implementación de la factorización LU con pivoteo para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

Este método consiste en descomponer a la matriz A en dos matrices L triangular inferior y U triangular superior mediante el uso de la eliminación Gaussiana con pivoteo. La misma difiere de la eliminación Gaussiana convencional en que para cada columna donde estoy triangulando, busco el máximo absoluto y permuto dicha fila con la de la diagonal, dejando una matriz de permutación P y las matrices LU permutadas. $P \cdot A = L \cdot U$. En este caso dada la particularidad de que nuestra matriz es banda, como veremos mas adelante, tuvimos que tener en cuenta que luego de la factorización nuestras bandas pasarían de ser p y q a p y p+q.

2. Generar una matriz en base al sistema de ecuaciones planteado por las fuerzas que ejercen sobre la estructura. En el desarrollo se explica de que manera se genera esta matriz y como se distribuyen los datos de forma que termine quedando una matriz banda la cual tiene sus ventajas ya que sabemos que el resto de los elementos fuera de la misma será 0 y no necesitaremos lugar para almacenarlos.
3. Experimentar sobre la mejor combinación para obtener la fuerza máxima mejor distribuida y la menor cantidad de pilares.

1.1 Demostración de Matriz banda p, q a Matriz banda p, p+q luego de realizar factorización LU con pivoteo

Dada una matriz banda $A \in \mathbb{R}^{n \times n} / a_{ij} \in A, a \neq 0 \iff j + i > p \wedge j - i > q$, siendo p la cantidad de columnas antes de la diagonal y q la cantidad de columnas después de la diagonal. Quiero ver que luego de aplicar la eliminación Gaussiana con pivoteo $q = p + q$.

Entonces se que por cada paso de la eliminación, la fila por la que voy a poder permutar va a estar entre las filas $i \leq k \leq i + p$. Puesto que $\forall k > i + p, a_{kj} = 0$ por su condición de matriz banda.

$$p = 1, q = 2 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Supongo ahora mi peor caso sería permutar por la fila $k = i + p$ ya que sería la última fila y la más a la derecha por la que podría permutar y mover mis bandas lo más posible. Ahora, $\forall 0 < j < n, a_{ij} = a_{kj}$ pero como la fila k estaba comprendida entre $k - p < j < k + q$ y la fila i antes de la permutación esta comprendida entre $i - p < j < i + q$ y además $k = i + p$, entonces en conclusión la fila i luego de la permutación queda comprendida entre $i < j < i + p + q$ entonces $q = p + q$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Aquí se nota como luego de la permutación entre la fila 2 y 3, la nueva fila 2 está shifteada a la derecha una posición de forma que su primer valor forma parte de la diagonal y todos los elementos de la banda p pasan a estar en la banda q haciendo que se expanda hasta $p + q$ en el peor caso.

2 Desarrollo

2.1 Implementación de Matriz:

Era a libre elección decidir como implementar la matriz, una manera eficiente nos pareció usar punteros a punteros para almacenar los valores de A. Como tenemos un conjunto acotado de valores que no son cero (Banda p,q), por cada fila nos quedamos con los p+q+1 que nos interesan. Sobre el resto de las funciones no queda mucho mas que decir, ya que no presentaron problemas en su implementación. El código se ejecuta, pasando por parámetro h,n,span, los valores que son dato C1..Cn-1, el costo C, y la fuerza máxima límite, en el archivo ayuda.txt se explica mas detalladamente el orden de los parámetros y ejemplos de su uso.

Mediante el uso de memoria dinámica conseguimos que luego en la experimentación se pueda hacer libremente sin tener que estar resguardándonos de estar usando demasiada memoria; Fuimos capaces de experimentar con puentes de gran tamaño.

2.2 Realizacion del TP:

El problema a resolver en el TP, era el de representar un puente Pratt Trauss, estable, en un sistema de ecuaciones, la complejidad que presentaba esto, constaba de distintas cuestiones:

- 1 En principio, como organizar las partes del puente, los links y juntas, para que nos quede un sistema de ecuaciones y de ahí poder despejar las fuerzas que ejercía cada link, dada la cantidad de juntas, y otros datos como el span y la altura. El problema presentado nos indicaba que esto iba a ser posible armando la matriz de $4n \times 4n$, el vector de incógnitas era justo de $4n$ y a partir de las relaciones físicas de las distintas fuerzas un vector b de, también, $4n$, entonces se conseguía un sistema estable $Ax=b$.

Los vectores x y b, eran prácticamente datos del input, la matriz A era un poco mas complicada de construir, o por lo menos, fue necesario ordenar las fuerza, de forma tal que quede un sistema conveniente, una matriz banda. El orden de las fuerzas es fácil de explicar mediante un ejemplo:

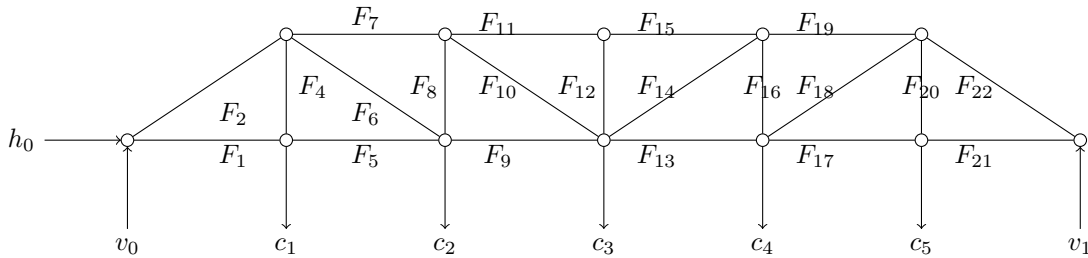


Figure 1: Fuerzas aplicadas sobre la estructura

Este orden es conveniente porque al tomar las filas de A como las ecuaciones de fuerzas horizontales y verticales queda una matriz banda, con p,q acotable a un valor fijo no muy grande. En nuestra implementación con p,q = 6 obtuvimos buenos resultados.

- 2 Una vez que conseguimos $Ax = b$, un algoritmo hace la factorización PLU de A, mediante Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, y con forward y backward substitution obtenemos

el x con los resultados de las fuerzas. Un dato a tomar en cuenta es que en la implementación de la matriz, a pesar de ser eficientes, los arreglos de valores distintos de cero complican hacer el cambio de filas que requiere el pivoteo, para eso nos dimos la libertad de usar un poco mas de memoria dinamica para asegurarnos que no se indefina en algunos casos.(CAMBIABLE)

- 3 La segunda parte del TP, el agregado de pilares, lo resolvimos haciendo que el algoritmo vea que ocurre si se inserta un pilar en donde tenemos la fuerza máxima, de ahí en los dos bloques que quedan se evalúa si las fuerzas máximas de ellos es mayor o no a la fuerza máxima anterior, si se consigue disminuir, la inserción es conveniente, y de ahí se sigue analizando recursivamente en las 2 estructuras hasta conseguir fuerzas máximas menores al parametro FMAX.

2.3 Hipótesis:

- Variando Span: Al variar este parámetro se logra que los links horizontales se agranden y los links colocados como una hipotenusa tambien aumentan su tamaño, creemos que al ocurrir esto el puente será más inestable, osea que va a resistir fuerzas más débiles.
- Variando n: Podemos ver que gracias a este parámetro cambia la cantidad de C_i y por lo tanto podemos notar que los demás links quedarán tirantes produciendo que el link haga más fuerza que antes si este valor aumenta.
- Variando h: Al variar este parámetro obtenemos más altura de la estructura, aumenta el tama no de los links verticales. Y por lo tanto tambien modifica los links colocados de forma hipotenusa. Esto produce modificaciones y analizaremos si podemos conseguir mejorar costos y fuerzas al tomar diferentes valores.
- Variando C_i : Variando este parámetro se consigue tener mas o menos cantidad de fuerza ejercida sobre cada una de las juntas que posee n. Esto puede ocasion variaciones en las fuerzas y por lo tanto analizaremos como se efectuan estos cambios.
- Variando F_{MAX} : Si bien el variar este parámetro no presenta muchas cosas interesantes para analizar, hemos realizado experimentaciones para ver exactamente como varia la inserción de pilares con este valor, ya que se ve a simple viste q disminuyendolo aumentara la cantidad de inserción de pilares y aumentandolo disminuirá la cantidad de pilares.

2.4 Experimentacion:

- 1 En vista de lo mencionado en la seccion hipótesis, hemos optado por experimentar dejando un valor fijo y variando los otros para ver como afecta en los resultados.
- 2 Para las experimentaciones hemos optado por der el mismo valor a todos los C_i y ver como varía al aumentar proporcionalmente de la misma forma cada uno.
- 3 Hemos optado por realizar lo comentado en el enunciado, analizar como varián las fuerzas máximas y luego ver como varían los costos (se observará en los resultados las dos secciones separadas).

3 Resultado

3.1 Resultados de experimentación con diferentes n

- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 10
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 0. No fue necesario.
 - * Fuerza Maxima ejercida subpuente 1: F11 6.75
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 8
 - * c_1 : 0.5
 - * c_2 : 0.5
 - * c_3 : 0.5
 - * c_4 : 0.5
 - * c_5 : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 10
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 0
 - * Fuerza Maxima ejercida: F15 8
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 4
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 10
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 0
 - * Fuerza Maxima ejercida: F7 4
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1

- * n: 90
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 48841.5
 - * Pilares insertados: 7
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F23 9
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 9.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 80
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 41423.8
 - * Pilares insertados: 7
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F19 12.5
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 12.5.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 70
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 34924.3
 - * Pilares insertados: 7
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F19 18.75
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 12.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 50
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 25267.3
 - * Pilares insertados: 4
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F15 8

- * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 4.5.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 40
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 21307.2
 - * Pilares insertados: 3
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F19 18.75
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 18.75.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 10
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 5818.29
 - * Pilares insertados: 2
 - * Fuerza Maxima ejercida el subpuente de la seccion 1: F7 10
 - * Fuerza Maxima ejercida el subpuente de la seccion 2: F6 -5.07544
 - * Fuerza Maxima ejercida el subpuente de la seccion 3: F7 10
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida el subpuente de la seccion 1: F6 -9.04174
 - * Fuerza Maxima ejercida el subpuente de la seccion 2: F7 17

3.2 Resultados de experimentación con diferentes Fuerzas Máximas

- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18

- * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 5
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 4 secciones: F7 3
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 10
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 0
 - * Fuerza Maxima ejercida: F11 6.75
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 3
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 4 secciones: F7 3
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 2
- Resultados:
 - * Costo Final: 4235.54
 - * Pilares insertados: 2
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 2 secciones: F6 -1.76744

- * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 2 secciones: F6 -1.76744
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 18
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 1
- Resultados:
 - * Costo Final: 4235.54
 - * Pilares insertados: 2
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 2 secciones: F6 -1.76744
 - * Obs: En este caso resultó extrao. Con fuerzas máximas muy pequenas no se puede construir el puente. habría que insertar un pilar por cada sección del mismo.

3.3 Resultados de experimentación con Span muy grande:

- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 6
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 2 secciones: F6 -9.04174
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 4 secciones: F7 17
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 57106.7
 - * Pilares insertados: 7
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F27 12.25
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por 9.

- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 100
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 119083
 - * Pilares insertados: 30
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F3 19.0135
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F2 -0.510308.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 50
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 89834.9
 - * Pilares insertados: 30
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F3 19.0163
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F2 -0.510308.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 25
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 50 secciones: F198 12.2598
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 50 secciones: F198 12.2598
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 5
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:

- * Costo Final: 124394
 - * Pilares insertados: 3
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F51 8.45
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F47 7.2.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 8
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
 – Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 1 de 50 secciones: F99 19.5312
 - * Fuerza Maxima ejercida en el subpuente 2 de 50 secciones: F99 19.5312
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 30
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
 – Resultados:
 - * Costo Final: 38136.9
 - * Pilares insertados: 10
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F3 19.761
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F2 -0.517539.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 50
 – Resultados:
 - * Costo Final: 49106.7
 - * Pilares insertados: 3
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F51 42.25
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F47 36.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1

- * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 200
- Resultados:
 - * Costo Final: 2000
 - * Pilares insertados: 1
 - * Fuerza Maxima ejercida en ambos subpuentes: F99 156.25
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 150
- Resultados:
 - * Costo Final: 49106.7
 - * Pilares insertados: 3
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F51 42.25
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F47 36.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 40
- Resultados:
 - * Costo Final: 53106.7
 - * Pilares insertados: 5
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F51 42.25
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F47 36.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 10
- Resultados:
 - * Costo Final: 61106.7
 - * Pilares insertados: 9
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F15 4
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F11 2.25.

3.4 Resultados de experimentación con diferentes Fuerzas C

- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 1
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 61106.7
 - * Pilares insertados: 9
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F15 8
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F11 4.5.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 1.5
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 73106.7
 - * Pilares insertados: 15
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F15 12
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F11 6.75.
- – Parametros de entrada:
 - * Span: 100
 - * h: 1
 - * n: 100
 - * c_i : 0.25
 - * Costo Unitario: 2000
 - * FMax: 20
- Resultados:
 - * Costo Final: 53106.7
 - * Pilares insertados: 5
 - * Fuerza Maxima ejercida en uno de los subpuentes fue: F27 6.125
 - * Obs: Para el resto de la FMáx, estuvieron acotadas por F23 4.5.

3.5 Resultados de experimentación en función del span:

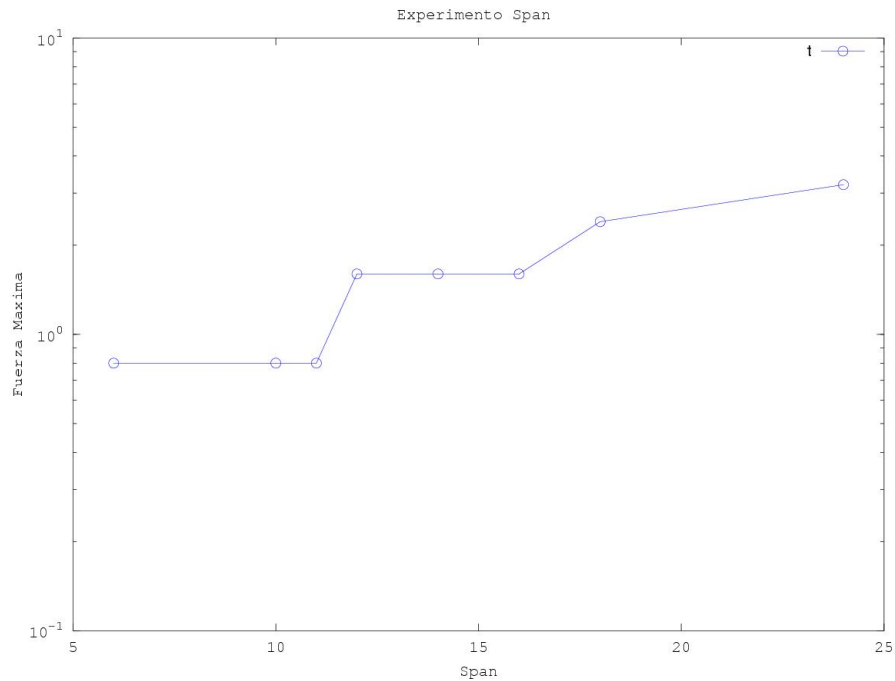
3.5.1 Parametros de entrada Fijos:

los parametros que no varían son:

- h: 1
- n: 6
- c_i : 0.2
- Costo Unitario: 2000
- FMax: 0.5

3.5.2 Resultados segun Span:

- – span: 6
– Fuerza Máxima resultante:0.8
- – span: 10
– Fuerza Máxima resultante:0.8
- – span: 11
– Fuerza Máxima resultante:0.8
- – span: 12
– Fuerza Máxima resultante:1.6
- – span: 14
– Fuerza Máxima resultante:1.6
- – span: 16
– Fuerza Máxima resultante:1.6
- – span: 18
– Fuerza Máxima resultante:2.4
- – span: 24
– Fuerza Máxima resultante:3.2



3.6 Resultados para experimentación variando n para distintas Fuerzas Mximas

3.6.1 Parametros de entrada Fijos:

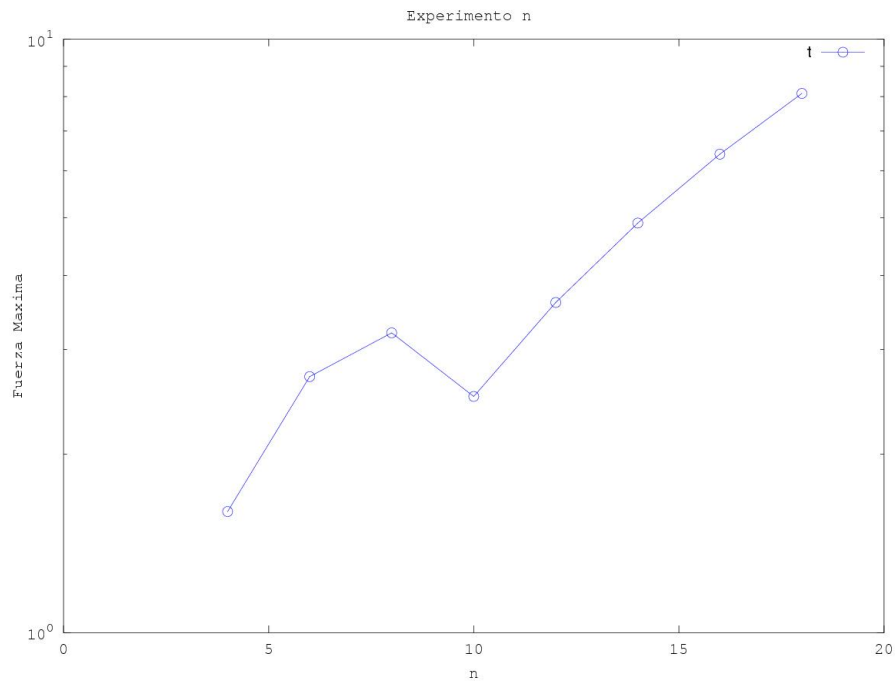
los parametros que no varían son:

- span: 18
- h: 1
- c_i : 0.2
- Costo Unitario: 2000
- FMax: 0.5

3.6.2 Resultados segun n:

- – n: 2
– Fuerza Máxima resultante:F6 -1.83358
- – n: 4
– Fuerza Máxima resultante:F7 1.6
- – n: 6
– Fuerza Máxima resultante:F11 2.7
- – n: 8

- Fuerza Máxima resultante:F15 3.2
- – n: 10
 - Fuerza Máxima resultante:F19 2.5
- – n: 12
 - Fuerza Máxima resultante:F23 3.6
- – n: 14
 - Fuerza Máxima resultante:F27 4.9
- – n: 16
 - Fuerza Máxima resultante:F31 6.4
- – n: 18
 - Fuerza Máxima resultante:F35 8.1



3.7 Resultados para experimentación variando C para distintas Fuerzas Mximas

3.7.1 Parametros de entrada Fijos:

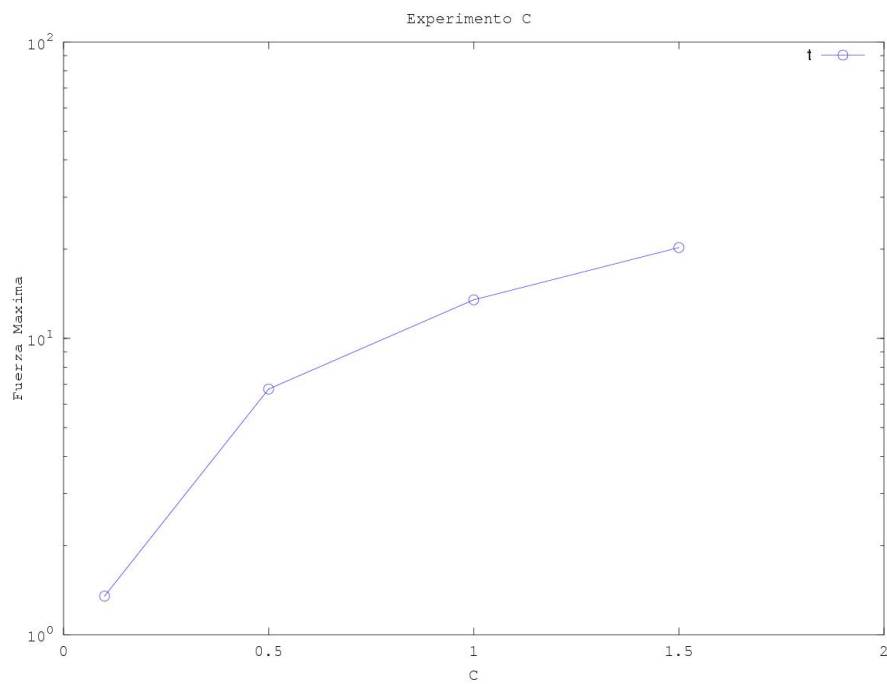
los parametros que no varían son:

- span: 18
- h: 1

- n : 6
- Costo Unitario: 2000
- F_{Max} : 0.5

3.7.2 Resultados segun n :

- – C_i : 0.1
– Fuerza Máxima resultante: F11 1.35
- – C_i : 0.5
– Fuerza Máxima resultante: F11 6.75
- – C_i : 1
– Fuerza Máxima resultante: F11 13.5
- – C_i : 1.5
– Fuerza Máxima resultante: F11 20.25
- – C_i : 15
– Fuerza Máxima resultante: F11 202.5



4 Discusión

4.1 Realizando cambios en los parámetros se observa la variación de la fuerza máxima ejercida:

- Variando Span: Al aumentar dicho valor, la fuerza máxima ejercida en la estructura aumenta. Al disminuir se achica dicha fuerza. Además se aprecia que el aumento es escalonado, repitiéndose valores de fuerza máxima para valores cercanos de diferencia de span. Cabe mencionar que $\text{span} > n$.
- Variando n : Se aprecia en los resultados que en casi todos los casos, al aumentar n , aumentan las fuerzas, mientras que al disminuirlo disminuyen. Además se aprecia un caso particular en el que pasa lo opuesto.
- Variando C_i : Se observa que al aumentar los valores de c_i , también aumentan las fuerzas máximas. En contrapartida se nota la disminución cuando estos valores disminuyen.

4.2 Realizando cambios en los parámetros para observar los cambios en el costo:

- Variando n : Como ya dijimos al aumentar dicho valor, aumentan las fuerzas y por lo tanto a la hora de analizar el costo esto puede producir pérdidas, como se ven en los resultados se insertarán más pilares y el costo de dicha estructura será mucho más elevado.
- Variando h : Al aumentar la altura la fuerza máxima disminuye, en algunos casos se logra cambiar el lugar en donde se encontraba la fuerza máxima y ahora tomara el lugar una fuerza que se encuentra en otro lugar la cual mediante este cambio tuvo un crecimiento. Se observa que en valores muy bajos y muy altos los costos pueden aumentar porque se obtiene una fuerza en módulo mayor y por lo tanto podríamos necesitar la ayuda de pilares en la estructura. El valor más óptimo se logra encontrar en un valor ni muy alto ni muy bajo, que es donde la fuerza máxima es lo menor posible y nos puede ahorrar pilares costosos.
- Variando F_{MAX} : Se observa claramente en los resultados tomados, que al aumentar el F_{MAX} de parámetro se consigue una disminución del costo, ya que se necesitarían menos cantidad de pilares para cubrir. De forma contraria al disminuirlo a muy bajos valores se observa que se deben tomar demasiados pilares e incluso, si F_{MAX} es muy bajo puede que no llegue a cubrir de manera satisfactoria los pilares colocados.
- Variando Span: Como sabíamos por lo mencionado en la sección 4.2 (más arriba), sabemos que al aumentar span, aumentan las fuerzas y como se pueden ver en los resultados que obtuvimos esto puede ocasionar un costo elevado de la estructura puesto a que más probable que tengo que utilizar una mayor cantidad de pilares que son costosos.
- Variando C_i : Se observa en las experimentaciones que al aumentar dicho valor necesitamos a veces más cantidad de pilares, lo cual nos produce más costo. En contrapartida al disminuirlo, se observa que la fuerza máxima disminuye y por lo tanto necesitamos menos pilares para cubrir.

5 Conclusiones

5.1 Realizando cambio en los parametros se observa la variacion de la fuerza maxima ejercida:

- Variando Span: Sabemos por resultado que la fuerza máxima que se ha encontrado es una fuerza horizontal, sabemos que esta fuerza varía dependiendo del valor span, esto se da porque al aumentar span, aumentan los valores de cosenos y disminuyen los de seno, y como coseno afecta a las fuerzas horizontales, la fuerza máxima aumenta. Caso inverso es si span disminuye.
- Variando n: ¿Por qué ocurre que al aumentar n, en general aumentar la fuerza máxima? Esto ocurre por que al aumentar el "n", hay mas cantidad de C_i y entonces todas las demás fuerzas se tensan más y aumentan su fuerza en general. Conclusión: Si deseamos que la fuerza máxima de la estructura no sea muy grande, no es conveniente dividir en gran cantidad de n el span.
- Variando C_i : ¿Por qué cuando aumenta C_i aumenta la fuerza máxima y al disminuir C_i disminuye la misma? Esto se consigue porque si bien la fuerza máxima es horizontal y los C_i interfiere en los links vertiles, los C_i llegan también a afectar los links horizontales. Esto se da por los links que están colocados de forma hipotenusa, estos a través del seno y coseno le afectan y afecta a los links horizontales como verticales. Al aumentar el C_i , por la fórmula $F_j \cdot \sin(\alpha) + F_i + c_i = 0$ se observa que F_j y F_i se hacen más chicos e incluso negativos, y si miramos el otro sector donde conecta el F_j , tendremos $F_h - F_j \cdot \cos(\alpha) - F_k = 0$, siendo F_k la fuerza máxima, como F_j es negativo y disminuía su valor, $-F_j \cdot \cos(\alpha)$ sera positivo y da un valor más grande que antes de recibir el aumento del C_i , por consiguiente F_k va a tener que aumentar para que la igualdad se mantenga y por lo tanto aumentara su fuerza máxima. Mismo caso pero en sentido opuesto ocurrira si C_i disminuye.

5.2 Realizando cambio en los parametros para observar los cambios en el costo:

- Variando n: ¿Por qué el valor n aumenta el costo? Como ya dijimos al aumentar n se aumentan las fuerzas y por lo tanto se necesitarán más pilares para reducirlas, además al aumentar n tendremos más lugares en donde ubicar pilares. Esto último mencionado nos sirve de mucha utilidad porque podremos poner muchos pilares lo que nos permitiría construir una estructura mucho más segura aunque el costo sea muy elevado.
- Variando h: ¿Por qué al aumentar la altura disminuye la fuerza y al disminuirla aumenta? Esto se da porque es exactamente lo opuesto al aumentar span, aca aumenta seno y disminuye coseno, a su vez esto afecta en la insercion de pilares, y en la fuerza máxima que soporta el puente.
¿Conviene tener mucha o poca altura? No conviene tener demasiada altura ni tampoco poca, ya que al variar la altura hay fuerzas que disminuyen y fuerzas que aumentan por lo tanto hay que tratar de encontrar el mejor equilibrio posible que nos permita tener el mejor ahorro en pilares.
- Variando F_{MAX} : ¿Por qué al aumentar o disminuir el parámetro F_{MAX} , cambian los costos de la estructura? Si aumentamos el parámetro F_{MAX} lo que pasa es que estamos permitiendo que la estructura soporte hacer fuerzas demasiado grande y nos evitaremos construir pilares costoso. La desventaja de esto es que es probable que si la fuerza es muy grande los links se rompan haciendo que la estrictura del puente no sea segura y por lo tanto ocasionar

accidentes. Si disminuimos dicho parametro es probable que se inserten mas cantidad de pilares y el puente sera mas costoso, pero tambien mas seguro.

- Variando Span: ¿Por que al aumentar span, aumenta el costo y viceversa? Esto pasa porque al aumentar span, aumentamos la fuerza máxima, y por lo tanto llegará más rapido al rango F_{MAX} y al superarlo se colocaran pilares en la estructura, aumentando el costo del mismo. Mismo caso si disminuimos el span, claro está que el puente será más corto. Es importante destacar que si los cambios no son bruscos es probable que no sea necesaria la insercion de un pilar de más.
- Variando C_i : ¿Por qué al aumentar los valores de C_i aumenta el costo y al disminuirlo ocurre lo opuesto? Como sabemos por lo analizado y explicado en el punto 5.1, al aumentar C_i aumentan las fuerzas y por lo tanto es más probable utilizar más cantidad de pilares para poder neutralizarlas. Esto como sabemos aumenta el costo de toda la estructura como se visualiza en los resultados.

6 Apéndices

6.1 Apéndice A:

Introducción

El Equipo de Consultoría de Métodos Numéricos busca desarrollar un software que pueda ser utilizado durante el proceso de construcción de puentes, otorgando información respecto de la seguridad y los costos involucrados que faciliten la toma de decisiones durante el mismo. Como punto de partida, nos concentraremos en un tipo particular de puentes, llamados *Pratt Truss Bridges*. La Figura 2 muestra un ejemplo de este tipo de puentes.



Figure 2: Puente Pratt Truss

Para realizar el análisis, es posible simplificar el problema y realizar el análisis de la estructura en dos dimensiones suponiendo que el peso se distribuye de forma homogénea en la tercera dimensión. El puente debe tener una determinada longitud (*span*), altura (*h*) y se divide en un número par de secciones (*n*) de igual tamaño. La estructura se representa mediante *links* (que modelan los miembros de la estructura) y juntas (puntos donde se unen los links). La Figura 3 muestra un ejemplo del modelo para la estructura. Las juntas son representadas mediante un círculo blanco y los links mediante una línea recta.

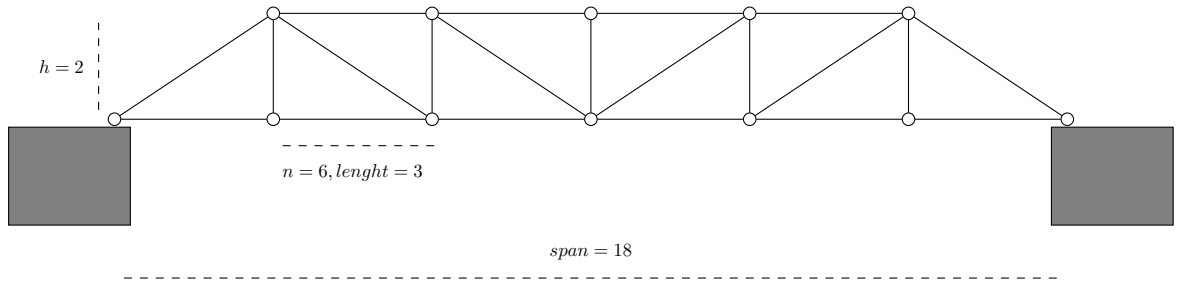


Figure 3: Ejemplo estructura en 2D

La estructura mostrada como ejemplo cuenta un *span* de 18 metros, una altura $h = 2m$ y 6 secciones. Dentro del presente trabajo, analizaremos puentes que tienen exactamente el patrón descrito en el ejemplo en términos de simetría y conformación de la estructura, pero con diferentes valores de *span*, *h* y *n*.

Para que la estructura del puente pueda ser utilizada, debe soportar una carga total (conocida) que se distribuye entre las juntas internas inferiores del puente. Este hecho afecta a toda la estructura

del puente y por lo tanto los links que conforman la misma deben ser lo suficientemente resistentes para mantener estable la estructura. El objetivo del trabajo es realizar este análisis para distintos tipos de estructuras.

El problema

Dado un puente Pratt Truss con n secciones, la estructura cuenta con $4n - 3$ links y $2n$ juntas. A su vez, para cada uno de las $n - 1$ juntas internas inferiores suponemos que se aplica una carga c_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Llamamos F_j a la fuerza ejercida sobre el link j , $j = 1, \dots, 4n - 3$, dada una numeración para los links. Nuestro objetivo es calcular la compresión ($F_i < 0$) o tensión ($F_i > 0$) a cada link de la estructura una vez que las fuerzas se aplican a la estructura.

Además de las fuerzas para cada link, consideramos también otras tres fuerzas soporte que se aplican sobre los extremos inferiores de la estructura. Las llamaremos v_0 , v_1 y h_0 . La Figura 4 muestra como se aplican las definiciones a la estructura.

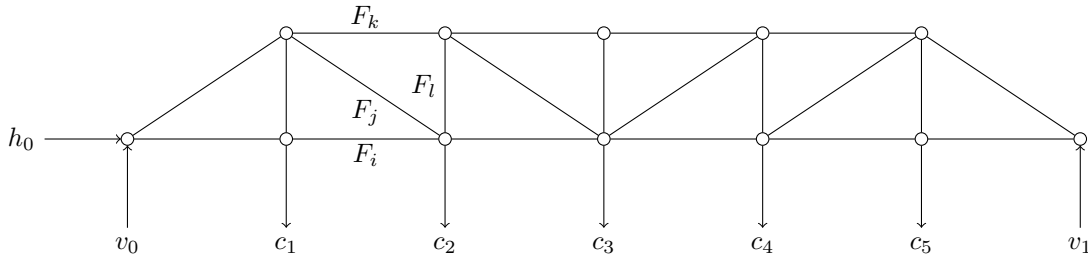


Figure 4: Fuerzas aplicadas sobre la estructura

Para que la estructura se encuentre en equilibrio (es decir, que no se este moviendo) se establece que la fuerza total que se aplica sobre el mismo es cero. Luego, para cada junta, se tienen que cumplir que la suma de las fuerzas que actúan horizontalmente sea cero, y análogamente que la suma de las fuerzas verticales también sea nula, obteniendo dos ecuaciones por cada junta presente en la estructura. Con el objetivo de simplificar el análisis, en este caso suponemos que la carga se aplica solamente sobre las juntas, que los links son perfectamente rectos y que el peso de la estructura es cero.

La Figura 5 muestra el diagrama de fuerzas sobre una junta en particular. Es importante destacar que la fuerza correspondiente al link j , F_j , debe descomponerse en sus componentes vertical y horizontal. Luego, las ecuaciones de equilibrio para la junta son:

$$F_i + F_j \cos(\theta) - F_k = 0 \quad (\text{Horizontal}) \quad (1)$$

$$F_j \sin(\theta) + F_l + c_2 = 0 \quad (\text{Vertical}) \quad (2)$$

Planteando estas ecuaciones para cada junta, obtenemos un total de $4n$ ecuaciones y $4n$ incógnitas ($4n - 3$ correspondientes a las variables F_i y v_0 , v_1 y h_0). Un primer objetivo del trabajo consiste resolver este sistema de ecuaciones utilizando un método directo.

Además de la información sobre la estructura, se tiene como dato un valor máximo de la fuerza que puede resistir cualquier link de la estructura, basándose en los materiales disponibles en el mercado. Se denomina a este valor $fmax$. Una vez calculadas las fuerzas ejercidas sobre cada link, si el valor absoluto de alguna de ellas excediera $fmax$, entonces la estructura no cumple con las condiciones mínimas de seguridad y podría colapsar. Sin embargo, existe la posibilidad de intercalar pilares

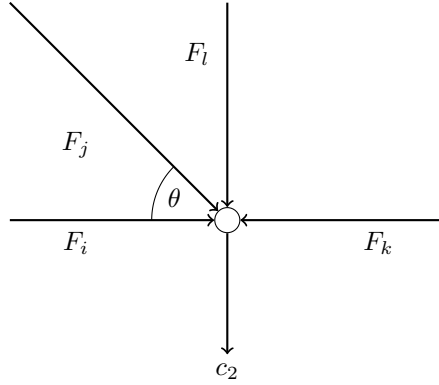


Figure 5: Fuerzas aplicadas sobre una junta

de concreto intermedios (debajo de las juntas internas inferiores) para contrarrestar este efecto, particionando la estructura original en sub-estructuras. Es importante mencionar que las sub-estructuras deben cumplir con las restricciones de la estructura original (por ejemplo, tener un número par de secciones) y, por lo tanto, se puede realizar exactamente el mismo análisis sobre estructuras más pequeñas. Como contraparte, cada uno de estos pilares es muy costoso y se busca minimizar la utilización de los mismos. Las figura 6 y 7 muestra un ejemplo de una partición posible.

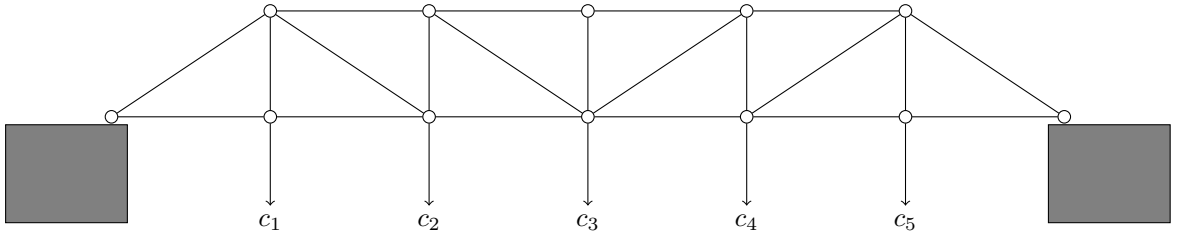


Figure 6: Estructura original

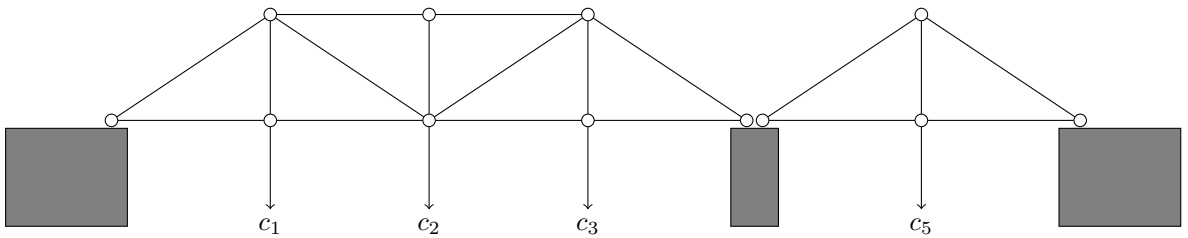


Figure 7: Estructura particionada.

El costo total del puente, que llamaremos c_{total} , se calcula en base a los costos parciales de cada sub-estructura sumado al costo de construcción de los pilares. Dada una sub-estructura e (es decir, un puente Pratt Truss sin pilares en las juntas internas inferiores) el costo parcial, cp_e , será proporcional a la máxima fuerza ejercida y la longitud del mismo. Luego, cp_e se computa como

$$cp_e = \max_{\substack{i \text{ link} \\ i \in e}} |F_i| \left(\sum_{\substack{i \text{ link} \\ i \in e}} l_i \right),$$

donde l_i es la longitud de link i perteneciente a la estructura e . Además, se cuenta con un costo fijo de construcción de pilares, que llamaremos C . Sean e_1, \dots, e_k las sub-estructuras seguras (es decir, ninguna de las fuerzas aplicadas sobre sus respectivos links excede $fmax$), el costo total del puente se calcula como

$$c_{total} = \sum_{i=1}^k cp_{e_i} + (k-1)C.$$

El segundo objetivo del trabajo es, mediante esta técnica de inserción de pilares de concreto, obtener una estructura que sea considerada segura para su utilización buscando minimizar el costo total de la misma.

Enunciado

El trabajo práctico consiste en proveer una herramienta que, dados el $span$, h , y n , formule el sistema de ecuaciones provisto por las condiciones de equilibrio y calcule la fuerza ejercida sobre cada uno de los links de la estructura en dos dimensiones de un puente Pratt Truss.

Los requisitos mínimos a cumplir son los siguientes:

- Formular el sistema lineal de forma tal que la matriz resultante cumpla la propiedad de ser banda p, q , donde estos valores deben estar acotados por una constante.
- Implementar el método de Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial. Para ello, considerar que al aplicar este método sobre una matriz banda p, q , en el peor caso la matriz resultante tendrá bandas $p, q + p$. Demostrar este resultado, y utilizarlo para almacenar el sistema de forma eficiente en términos de memoria utilizada.
- Realizar experimentos computacionales comparativos analizando como evoluciona el valor absoluto de la maxima fuerza ejercida sobre alguno de los links de la estructura en función del $span$ (fijando h y los valores de c_i) y de los valores de c_i (fijando el $span$ y h) para distintos valores de n , además de cualquier otro experimento que considere pertinente.
- Basándose en el análisis anterior, proponer un método heurístico que permita simular el agregado de pilares de concreto mediante la partición de la estructura original en sub-estructuras, de forma tal que el puente sea seguro, buscando minimizar el costo total de construcción del puente.

Competencia

La cátedra realizará una competencia donde se analizarán los resultados obtenidos por los distintos grupos sobre distintas instancias del problema donde la estructura original no es segura. El programa provisto por cada grupo será analizado en la competencia y se armará un ranking en función de los resultados obtenidos. El primer puesto será reconocido con el premio *Listos para usar casco* y también habrá una distinción para el segundo puesto. Las condiciones de la competencia serán publicadas el Lunes 23 de Septiembre de 2013.

Aclaración: La nota de los trabajos es independiente de los resultados de esta competencia y depende únicamente del trabajo realizado.

Fechas de entrega

- *Formato Electrónico:* Domingo 6 de Octubre de 2013, hasta las 23:59 hs, enviando el trabajo (informe + código) a la dirección `metnum.lab@gmail.com`. El subject del email debe comenzar con el texto [TP2] seguido de la lista de apellidos de los integrantes del grupo.
- *Formato físico:* Lunes 7 de Octubre de 2013, de 17 a 18 hs.

Importante: El horario es estricto. Los correos recibidos después de la hora indicada serán considerados re-entrega.

6.2 Apéndice B:

Main.cpp

```
1  int n = atoi(argv[3]);
2  float h = atof(argv[2]);
3  int span = atoi(argv[1]);
4  int pilares = 0;
5  float COST = 0;
6  float C = atof(argv[argc-2]);
7  float FMAX = atof(argv[argc-1]);
8  float len_h = span/n;
9  float len_v = h;
10 float len_t = sqrt((len_v)*(len_v) + (len_h)*(len_h));
11
12
13 Matriz* A = new Matriz(4*n,4*n,6,6);
14 Matriz* b = new Matriz(4*n,1,4*n,4*n);
15
16     for(int i=4;i<argc-2;i++){ // Lleno B
17
18         float val = atof(argv[i]);
19         b->cambiarValor(4*i-13,0,(-1)*val);
20     }
21 //X = (h0,v0,F1,F2,F4,F5,F6,F7,...,F(4n-4),F(4n-3),F(4n-2),vn)
22
23
24 float cos = len_h/len_t;
25 float sen = len_v/len_t;
26
27 func.Llenar_Matriz(A,cos,sen,n);
28
29 //Tengo A y b
30 Matriz* x = func.Resolver_Sistema(A,b);
31 int fm = func.Fuerza_Maxima(x,FMAX,n);
32
33 if(fm == -1){
34
35     cout << "El puente se mantuvo firme, no fue necesario insertar pilar" << endl;
36
37     delete A;
38     delete b;
39     delete x;
40     return 0;
41 }
42
43 else{
44
45     if(n>2){
46
47         cout << "Insertando pilares intermedios.." << endl;
48         pilares++;
49
50         if(div == x->elem(1,n-1)){ div--;} //Casos borde
51         if(div == 0){div=2;}
52         if(div % 2 == 1){div++;}
53
54         int sp = span - ((n-div)*len_h);
55         int sp2 = span - ((div)*len_h);
56
57         tuple<float,float> Pilares_Costo = func.Insertar_Pilar(b,sp,sp2,h,div,(n-div),
58             COST,pilares,FMAX); //matriz con n = div y matriz con n = n-div
59         float Pf = get<0>(Pilares_Costo);
60         float Cf = get<1>(Pilares_Costo);
61         Cf += Pf*C;
```

```

62     cout << "Pilares insertados: " << Pf << endl;
63     cout << "Costo de la obra: " << Cf << endl;
64 }
65 else{ // Val de la estructura unica:
66     float Cf = 2*(n-1)*len_h + (n-1)*len_v + n*len_t;
67     Cf *= fm;
68     cout << "Pilares insertados: " << 0 << endl;
69     cout << "Costo de la obra: " << Cf << endl;
70 }
71 }

```

Funciones.cpp

```

1  Matriz* TP2::Funciones::Resolver_Sistema(Matriz* A, Matriz* b){
2
3      tuple<Matriz*, Matriz*, Matriz*> fact = A->factorizacion_PLU();
4
5      Matriz* P = get<0>(fact);
6      Matriz* L = get<1>(fact);
7      Matriz* U = get<2>(fact);
8
9      Matriz* nB = (*P)*b;
10     Matriz* y = L->F_substitution(nB);
11     Matriz* x = U->B_substitution(y);
12
13
14     Matriz* PL = (*get<0>(fact))*get<1>(fact);
15     Matriz* PLU = (*PL)*U;
16     delete P;
17     delete L;
18     delete U;
19     delete nB;
20     delete y;
21     delete PL;
22     delete PLU;
23     return x;
24 };
25
26
27 int TP2::Funciones::Fuerza_Maxima(Matriz* x, float FMAX, int n){
28
29     int fm = x->buscarMaximo(0);
30     if(fm == 0){
31         cout << "Fuerza Maxima Ejercida: h0 " << x->elem(0,0) << endl << endl;
32     }
33     else{
34         if(fm == 1){
35             cout << "Fuerza Maxima Ejercida: C0 " << x->elem(1,0) << endl << endl;
36         }
37         else{
38             if(fm == 4*n-1){
39                 cout << "Fuerza Maxima Ejercida: Cn " << x->elem(4*n-1,0) << endl << endl;
40             }
41
42             else{
43                 cout << "Fuerza Maxima Ejercida: F" << fm << " " << x->elem(fm,0) << endl <<
44                     endl;
45             }
46         }
47     }
48     if(FMAX < (fabs(x->elem(fm,0)))){
49         cout << "La fuerza ejercida por F" << fm << " supera FMAX = " << FMAX << ", la
50             estructura no es segura!!" << endl << endl;
51     }
52     return fm;
53 }

```

```

51|     return -1;
52| }

```

Matriz.cpp

```

1|
2| Matriz::Matriz(const int n,const int m, int p, int q){
3|
4|     _p = p;
5|     _q = q;
6|     _fil = n;
7|     _col = m;
8|     valores = new float*[_fil];
9|     for(int i=0; i < _fil; i++){
10|         valores[i] = new float [p+q+1];
11|         if(m>1){
12|             valores[i] += p;
13|         }
14|     }
15| };
16|
17| Matriz::~Matriz(){
18|
19|     for(int i=0;i < _fil; i++){
20|         if(_col>1){
21|             valores[i] -= _p;
22|         }
23|         delete [] valores[i];
24|     }
25|     delete [] valores;
26| };
27|
28|
29| tuple<Matriz*, Matriz*, Matriz*> Matriz::factorizacion_PLU(){
30|
31|     int f = _fil;
32|     Matriz* P = P->Identidad(f, _p, _q);
33|     Matriz* L = L->Identidad(f, _p, _q);
34|     L->_p = _p;
35|     L->_q = _q;
36|     Matriz* U = new Matriz (*this, _p, _q);
37|     for(int k=0;k< (_col-1); k++){
38|
39|         Matriz* sub = U->SubMatriz(k,k);
40|         int maxFila = sub->buscarMaximo(0);
41|         maxFila = maxFila+k;
42|         if(maxFila > k){
43|             U->cambiarFilas(maxFila,k);
44|             P->cambiarFilas(k,maxFila); // k o k+1..
45|
46|             if(k > 0){
47|                 for(int l=0;l<k;l++){ // 0 < l < k-1 // l = 0:k-1
48|                     double temp = L->elem(k,l);
49|                     double temp2 = L->elem(maxFila,l);
50|
51|                     L->cambiarValor(maxFila,l,temp);
52|                     L->cambiarValor(k,l,temp2);
53|                 }
54|
55|             }
56|         }
57|         for(int i=k+1;i<_fil;i++){
58|
59|             if(U->elem(k,k) != 0){
60|

```

```

61         float newVal = ((U->elem(i,k)) / (U->elem(k,k)));
62
63         L->cambiarValor(i,k,newVal);           //Valor de la L, multiplicador
64         U->cambiarValor(i,k,0);               //Valor triangulado queda en 0
65     }
66     for(int j= k+1;j< _col;j++){
67         float newVal = U->elem(i,j) - (L->elem(i,k) * U->elem(k,j));
68         //Lleno el resto de la fila
69         U->cambiarValor(i,j,newVal);
70     }
71 }
72
73 delete sub;
74
75 }
76 L->-p = -p;
77 L->-q = 0;
78 return make_tuple (P, L, U);
79 };

```

7 Referencias

- R. Burden y J.D.Faires, Análisis numérico, International Thomson Editors, 1998.

Indice

Apéndices, 22

Conclusiones, 20–21

Desarrollo, 4–5

Discusión, 19

Introducción Teórica, 3

Introducción Teórica, 2

Referencias, 31

Resultado, 6–18