TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 26 Abr 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ________________

---

1 [20] Como você sabe, a rotina da esquerda abaixo implementa a regra do trapézio, cuja fórmula é mostrada à direita.

```
def trapezio(n,a,b,f):
   h = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   for k in range(1,n):
      xk = a + k*h
      Si += f(xk)
   return (Se + 2*Si)*h/2
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

Considere agora a rotina que implementa o *método de Boole* de integração, que é mais acurado:

```
def boole(n,a,b,f):
   h = (b-a)/n
   sab = 7.0*(f(a) + f(b))
   sim = 0.0
   for k in range(1,n,2):
      xk = a + k*h
      sim += f(xk)
   pass
   sim *= 32.0
   sip = 0.0
   for k in range(2,n-1,4):
      xk = a + k*h
      sip += f(xk)
   pass
   sip *= 12.0
   siq = 0.0
   for k in range(4,n-3,4):
      xk = a + k*h
      siq += f(xk)
   pass
   siq *= 14.0
   return (sab+sim+sip+siq)*2.0*h/45.0
```

$$I = ?$$

Escreva a fórmula correspondente para I no lado direito, supondo que n é par.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$I = \frac{2h}{45}\left[7(f(x_0) + f(x_n)) + 32\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 12\sum_{k=1}^{n/4} f(x_{4k-2}) + 14\sum_{k=2}^{n/4} f(x_{4k-4})\right]$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Calcule o determinante de

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
2

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere a base ortonormal dextrógira F dada por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\\
\boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1),\\
\boldsymbol{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).
\end{aligned}$$

Obtenha a matriz de rotação $[C]$ da base canônica E para a base F.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A fórmula geral é

$$C_{ij} = (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{12} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}},\\
C_{13} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\
C_{21} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{22} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}},\\
C_{23} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0,\\
C_{31} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{32} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}},\\
C_{33} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}};
\end{aligned}$$

ou

$$[C] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & +\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

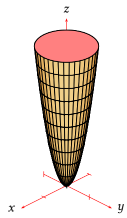
$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i3) a : matrix([1,2,3],[0,3,2],[0,0,1]) ;
                                   [ 1  2  3 ]
                                   [         ]
(%o3)                              [ 0  3  2 ]
                                   [         ]
                                   [ 0  0  1 ]
(%i4) eigenvectors(a);
(%o4)          [[[1, 3], [2, 1]], [[[1, 0, 0]], [[1, 1, 0]]]]
```

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Calcule o volume da região $\mathscr{C}$ delimitada *inferiormente* pelo parabolóide de revolução $z = 5(x^2 + y^2)$ e *superiormente* pelo plano $z = 5$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A projeção do sólido no plano xy é $x^2 + y^2 \le 1$. O volume desejado é

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [5 - 5(x^2 + y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 5 \iint_{(x^2+y^2)\le 1} [1 - (x^2 + y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\
&= 10\pi \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r \\
&= \frac{5}{2}\pi \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uma outra forma é

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{z=0}^{5} \int_{x=-\sqrt{z/5}}^{+\sqrt{z/5}} \int_{y=-\sqrt{z/5-x^2}}^{+\sqrt{z/5-x^2}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \\
&= \int_{z=0}^{5} \int_{x=-\sqrt{z/5}}^{+\sqrt{z/5}} 2\sqrt{z/5 - x^2}\mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \\
&= 2 \int_{z=0}^{5} \frac{\pi z}{10}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{5} \int_{0}^{5} z\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{5} \times \frac{25}{2} = \frac{5\pi}{2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹