

# Solução numérica da espiral de Ekman

19 de setembro de 2018

Em Mecânica dos Fluidos Geofísica, a espiral de Ekman é o padrão de velocidade que resulta do equilíbrio entre a força de Coriolis e as forças de atrito devidas à turbulência. Para a camada-limite atmosférica, um modelo muito simples (Kundu, 1990, seção 13.7) — e irrealista! — postula uma viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_W$  constante. O vetor velocidade é  $(u, v)$ , e as equações do movimento nas direções  $x$  e  $y$  são, respectivamente,

$$0 = fv + \nu_W \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad (1)$$

$$0 = f(U - u) + \nu_W \frac{d^2 v}{dz^2}. \quad (2)$$

O vetor  $(U, 0)$  é denominado *vento geostrófico*, e  $f \cong 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  (a  $45^\circ$  de latitude Norte) é o parâmetro de Coriolis. As condições de contorno do problema são

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(+\infty) = U, \quad v(+\infty) = 0. \quad (4)$$

A solução apresentada por Kundu usa variáveis complexas. Constrói-se uma velocidade complexa

$$W \equiv U + iV \quad (5)$$

( $i = \sqrt{-1}$ ) de tal forma que (1)–(2) podem ser escritas compactamente

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{if}{\nu_W}(W - U) = 0 \quad (6)$$

(Cuidado!  $z$  é *real*!). A equação tem solução

$$W = U \left[ 1 - e^{-(1+i)z/\delta} \right], \quad (7)$$

com

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2\nu_W}{f}}, \quad (8)$$

ou seja:

$$u = U \left[ 1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right], \quad (9)$$

$$v = U e^{-z/\delta} \sin(z/\delta). \quad (10)$$

O seu trabalho é obter uma aproximação numérica para (7) (ou, o que dá no mesmo, para (9)–(10)), resolvendo o problema *transiente*

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{if}{\nu_W}(W - U) = 0. \quad (11)$$

com as condições iniciais e de contorno

$$W(z, 0) = 0, \quad (12)$$

$$W(0, t) = 0, \quad (13)$$

$$W(H, t) = U, \quad (14)$$

observando que  $W(z, \infty)$  (quando  $\partial W/\partial t \rightarrow 0$ ) é a solução de (6). Você utilizará  $H \gg \delta$  para aproximar a solução analítica, que vale para um domínio (semi-)infinito. Valores que dão a ordem de grandeza correta na atmosfera são:  $U = 10 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\nu_W = 50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $f = 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 1000 \text{ m}$ ,  $H = 10000 \text{ m}$ . Embora seja possível resolver diretamente (11) no computador, é muito útil adimensionalizar! Fazemos

$$t = f\tau,$$

$$z = \delta\zeta,$$

$$W = \phi U,$$

e obtemos o problema (já com os valores numéricos indicados acima):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - i(\phi - 1). \quad (15)$$

As condições iniciais e de contorno são

$$\phi(\zeta, 0) = 0, \quad (16)$$

$$\phi(0, t) = 0, \quad (17)$$

$$\phi(10, t) = 1. \quad (18)$$

O problema a ser resolvido numericamente agora é:

- Discretize a equação usando um esquema totalmente implícito para  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}$  e para  $\phi$ . Você deve descrever a discretização e explicar o esquema numérico resultante.
- Resolva a equação numericamente com o esquema obtido acima, usando.  $\Delta\zeta = 0,005$  e  $\Delta\tau = 0,01$  em sua solução.

A sua solução deve gerar pelo menos duas figuras semelhantes às figuras 1 e 2. Elas mostram as partes real e imaginária de  $\phi$  (que correspondem a  $u/U$  e a  $v/U$ ) nos instantes adimensionais  $\tau = 5, 25, 50$  e  $100$ .

*Atenção:* você vai precisar modificar a rotina `triad` (livro-texto) para que ela seja capaz de lidar com números complexos.

## Referências

Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.

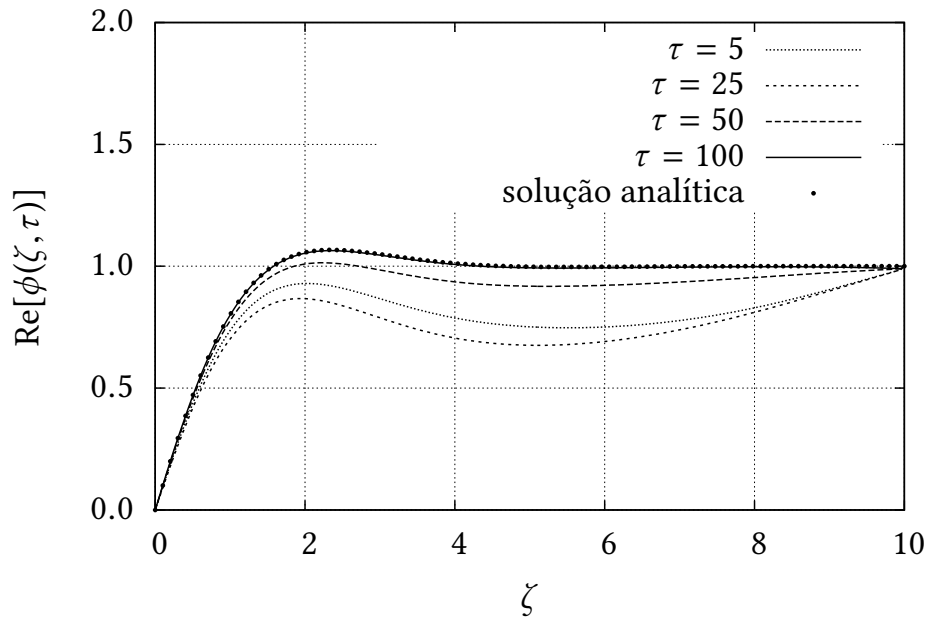


Figura 1: Parte real de  $\phi(\zeta, \tau)$ ,  $\tau = 5, 25, 50, 100$ , e solução analítica.

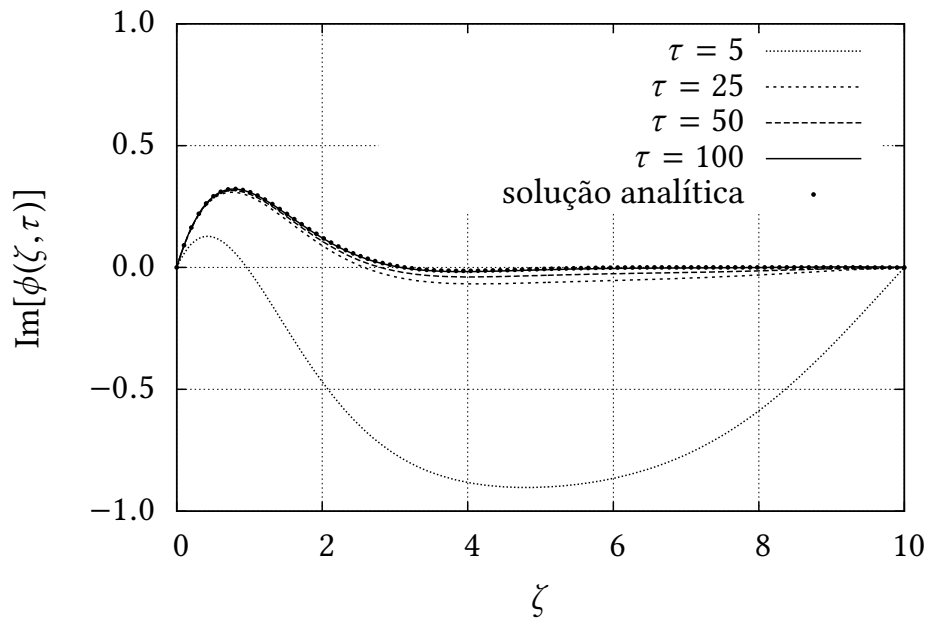


Figura 2: Parte imaginária de  $\phi(\zeta, \tau)$ ,  $\tau = 5, 25, 50, 100$ , e solução analítica.