TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 02 Jul 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] A expressão

$$\mathcal{T}_m = \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A,$$

onde $\mathscr{S}$ é uma superfície fechada que limita uma região $\mathscr{C}$ do $\mathbb{R}^3$, e $\boldsymbol{n} = n_k \boldsymbol{e}_k$ é o vetor unitário normal a $\mathscr{S}$ apontando para fora em cada ponto, é um escalar.

a) Identifique o vetor $\boldsymbol{v}$. Escreva-o da forma mais simples que você conseguir.

b) Agora aplique o teorema da divergência à expressão acima. Não é necessário calcular a divergência que vai aparecer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\boldsymbol{v} = \epsilon_{lim} r_l T_{ki} \boldsymbol{e}_k.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_m &= \oint_{\mathscr{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} \, \mathrm{d}A \\ &= \int_{\mathscr{C}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\epsilon_{lim} r_l T_{ki} \right) \, \mathrm{d}V \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1.$$

Você vai precisar de

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $y = uv$ e substitua:

$$\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2xuv &= 1\\
\underbrace{u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2xv\right]}_{=0} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2xv &= 0\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= 2x\mathrm{d}x\\
\int_{v_0}^{v} \frac{d\eta}{\eta} &= 2\int_0^x \xi d\xi = x^2\\
\ln\frac{v}{v_0} &= x^2\\
v &= v_0\mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow\\
v_0\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1\\
u &= \frac{1}{v_0}\int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\,d\xi + u_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0 \Rightarrow\\
y = uv &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0\right]v_0\mathrm{e}^{x^2}\\
y &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}\operatorname{erf}(x) + K\mathrm{e}^{x^2}; \qquad y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Encontre a solução **geral** de

$$x^2y'' + (x + x^2)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Na forma normal,

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Claramente, $x = 0$ é um ponto singular. Porém,

$$\begin{aligned}
xp(x) &= 1 + x,\\
x^2q(x) &= -1.
\end{aligned}$$

O ponto singular é regular, e o método de Frobenius é aplicável.
Tente:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2},
\end{aligned}$$

e substitua na EDO, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\right] a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Evidentemente devemos fazer

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r + 1,\\
m &= n + 1,\\
n &= m - 1;
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m-1+r)\right] a_{m-1} x^{m-1+r+1} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
[r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1+r)\right] a_{n-1} x^{n+r} &= 0,\\
[r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + \left[(n-1+r)\right] a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

A equação indicial é

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

As raízes diferem por um inteiro; a menor raiz pode levar às duas soluções, ou a nenhuma delas. Tentemos:

$$\begin{aligned}
[(n-1)^2 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
[n^2 - 2n + 1 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
na_n + a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Para $a_0 \neq 0$, esta primeira solução é:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
a_2 &= \frac{1}{2},\\
a_3 &= -\frac{1}{6},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{x}\left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right]\\
&= \frac{e^{-x}}{x}
\end{aligned}
$$

Nosso teorema sobre as soluções nos garante que a menor raiz leva a *duas* soluções, mas não nos diz nada sobre como encontrá-las! No nosso caso, há necessidade de uma certa sutileza ou imaginação. Dois caminhos são possíveis:

1. O mais fácil é procurar a solução gerada por $r = +1$. Ela é

$$
\begin{aligned}
[(n+1)^2 - 1]a_n + na_{n-1} &= 0,\\
(n^2 + 2n + 1 - 1)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
n(n+2)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n+2};
\end{aligned}
$$

   A segunda solução será

$$
y_2 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

   que claramente é linearmente independente de y_1.

2. O mais difícil é encontrar a segunda solução a partir da menor raiz. Suponha então que $a_0 = 0$; neste caso, (lembre-se: para $r = -1$), $a_1 = 0$ necessariamente. A relação de recorrência para o próximo n, 2, fica:

$$
\begin{aligned}
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)a_1 &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)0 &= 0.
\end{aligned}
$$

   Portanto, se $a_0 = a_1 = 0$, a_2 pode ser qualquer. Fazendo, sem perda de generalidade, $a_2 = 1$, teremos então

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -1/3,\\
a_4 &= +1/12,\\
a_5 &= -1/60,\\
a_6 &= 1/360,\\
a_7 &= -1/2520,
\end{aligned}
$$

   etc. Ou, para $n \geq 2$:

$$
a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 3} = \frac{2(-1)^n}{n!}.
$$

   Mudando o índice para que ele comece de 0:

$$
y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+2}x^{m+1}}{(m+2)!} = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

   que é o mesmo resultado obtido para $r = +1$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva

$$
\begin{aligned}
y^{\text{iv}} - y &= \mathrm{e}^{-t},\\
0 &= y(0) = y'(0) = y''(0),\\
1 &= y'''(0).
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^4\overline{y} - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - \overline{y} = \frac{1}{s+1}.$$

Introduzindo as condições iniciais,

$$
\begin{aligned}
(s^4-1)\overline{y} - 1 &= \frac{1}{s+1},\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{1}{s+1} + 1,\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{1}{s+1} + 1,\\
(s^4-1)\overline{y} &= \frac{2+s}{s+1},\\
\overline{y} &= \frac{2+s}{(s^2+1)(s^2-1)(s+1)},\\
\overline{y} &= \frac{2+s}{(s^2+1)(s+1)^2(s-1)}
\end{aligned}
$$

A decomposição em frações parciais da transformada acima é

$$\overline{y} = \frac{s-3}{4(s^2+1)} - \frac{5}{8(s+1)} - \frac{1}{4(s+1)^2} + \frac{3}{8(s-1)}$$

A inversa é :

$$y(t) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen} t + \frac{\cos(t)}{4} + \frac{3\mathrm{e}^t}{8} - \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{4} - \frac{5\mathrm{e}^{-t}}{8} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Fazendo a substituição sugerida, se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} &= \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2 - 1}{2\mathrm{i}z}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\ &= \oint_C \frac{-2\mathrm{d}z}{z^2 - 4\mathrm{i}z - 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = (2 - \sqrt{3})\mathrm{i}$ e $z_2 = (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}c_{-1} \\ &= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) \frac{-2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right] \\ &= 2\pi\mathrm{i} \frac{-2}{z - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹