TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 30 mar 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] O programa abaixo, que calcula a raiz quadrada de 6, está **errado**. Identifique o erro, e explique como corrigi-lo.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import print_function
from __future__ import division
eps = 1.0e-6
h = 1.0
x = 1.0
while h > eps:
   h = (6 - x**2)/(2*x)
   x = x + h
print(x)
print(x**2)
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Onde se lê

`while h > eps:`

leia-se

`while abs(h) > eps:`

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Considere a função $F(x)$ definida pela integral

$$F(x) \equiv \int_0^x \cos(t^3)\, dt, \qquad x \geq 0.$$

Obtenha uma série para o cálculo de $F(x)$. Sugestão: expanda $\cos(t^3)$ em série de Taylor em torno de $t = 0$, e em seguida integre termo a termo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t^3)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{d}t, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{6n}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)(2n)!} x^{6n+1} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] Dada a EDO

$$-y\frac{dy}{dx} + xy = e^{-x}, \qquad y(0) = -1,$$

obtenha um esquema **implícito** de diferenças finitas para ela, envolvendo x_n, x_{n+1}, y_n e y_{n+1}.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Por simplicidade, escreva

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \equiv \overline{x}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{y_{n+1} + y_n}{2}\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \overline{x}\frac{y_{n+1} + y_n}{2} &= \mathrm{e}^{-\overline{x}} \\
-\frac{y_{n+1}^2 - y_n^2}{2h} + \overline{x}\frac{y_{n+1} + y_n}{2} &= \mathrm{e}^{-\overline{x}} \\
-\frac{1}{2h}y_{n+1}^2 + \frac{\overline{x}}{2}y_{n+1} + \left[\frac{1}{2h}y_n^2 + \frac{\overline{x}}{2}y_n - \mathrm{e}^{-\overline{x}}\right] &= 0 \\
\frac{1}{2h}y_{n+1}^2 - \frac{\overline{x}}{2}y_{n+1} - \left[\frac{1}{2h}y_n^2 + \frac{\overline{x}}{2}y_n - \mathrm{e}^{-\overline{x}}\right] &= 0
\end{aligned}$$

Esta é uma equação do 2º grau em y_{n+1}; faça

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2h}, \\
B &= -\frac{\overline{x}}{2}, \\
C &= -\left[\frac{1}{2h}y_n^2 + \frac{\overline{x}}{2}y_n - \mathrm{e}^{-\overline{x}}\right].
\end{aligned}$$

A solução para y_{n+1} é

$$y_{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

É preciso verificar qual dos dois sinais "funciona". Isto pode ser feito por uma análise mais detalhada ou, com mais facilidade, por tentativa e erro no próprio programa de computador.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 27 abr 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Suponha que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

e obtenha um sistema linear 4×4 nas incógnitas a, b, c e d cuja solução dê a fórmula geral para qualquer n. Não é necessário resolver o sistema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= 2,\\
8a + 4b + 2c + d &= 8,\\
27a + 9b + 3c + d &= 20,\\
64a + 16b + 4c + d &= 40.
\end{aligned}$$

A solução do sistema dá

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Considere a transformação linear dada pela reflexão em torno do plano vertical x_2x_3:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= -\boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

Qual é a relação geométrica entre $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ e $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}]$, sendo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (u_1,u_2,u_3) \ \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} = (-u_1,u_2,u_3), &(1)\\
\boldsymbol{v} &= (v_1,v_2,v_3) \ \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} = (-v_1,v_2,v_3). &(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} &= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{e}_2+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{e}_3\\
[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}] &= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1+(u_3(-v_1)-(-u_1)v_3)\boldsymbol{e}_2+((-u_1)v_2-u_2(-v_1))\boldsymbol{e}_3\\
&= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1-(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{e}_2-(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

Portanto, o vetor $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}]$ possui a mesma coordenada 1 de $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, enquanto que as coordenadas 2 e 3 ficam invertidas. Isto significa que $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}]$ representa uma *rotação* de 180° de $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ em torno de Ox_1 ∎

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] **Existe** uma maneira de resolver um sistema linear com autovalores e autovetores sem precisar inverter *explicitamente* nenhuma matriz! — desde que haja n autovetores LI, com seus n autovalores correspondentes. Suponha que este seja o caso, e faça por simplicidade $n = 2$.
Você quer resolver o sistema

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

onde $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{y}$ são conhecidos. Por hipótese, existem 2 autovetores $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ LI associados aos autovalores λ_1 e λ_2, de forma que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{f}_1 &= \lambda_1 \boldsymbol{f}_1, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{f}_2 &= \lambda_2 \boldsymbol{f}_2. \end{aligned}$$

Considere λ_1, $\boldsymbol{f}_1$, λ_2, $\boldsymbol{f}_2$ *conhecidos*. Agora, decomponha $\boldsymbol{y}$ na base de autovetores:

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2;$$

note que β_1 e β_2 são facilmente determináveis, e portanto podem ser considerados *conhecidos*. Finalmente, considere a incógnita $\boldsymbol{x}$ na base dos autovetores também:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2,$$

onde α_1 e α_2 são *desconhecidos*. Substitua no sistema original:

$$\boldsymbol{A} \cdot [\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2] = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2$$
$$\ldots$$

Agora prossiga, e obtenha α_1 e α_2 (e consequentemente $\boldsymbol{x}$) em função dos dados conhecidos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ são autovetores,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot [\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2] &= \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 \\ \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{f}_2 &= \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 \\ \alpha_1 &= \beta_1/\lambda_1, \\ \alpha_2 &= \beta_2/\lambda_2 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Dada a base ortonormal

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, -3),$$
$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(7, -4, 1),$$
$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, -1),$$

seja $\boldsymbol{A}$ uma rotação de α radianos de um vetor qualquer em torno de $\boldsymbol{f}_3$.

a) [15] Obtenha a matriz $[\boldsymbol{A}]_F$ de $\boldsymbol{A}$ na base $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$.

b) [10] Indique a relação entre $[\boldsymbol{A}]_F$ e $[\boldsymbol{A}]_E$ (a matriz de $\boldsymbol{A}$ na base canônica), em função da matriz $[\boldsymbol{C}]$ cujos elementos são $C_{ij} = (\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)$. Não é preciso fazer os cálculos!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A matriz de $\boldsymbol{A}$ na base F é trivial:

$$[\boldsymbol{A}]_F = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\boldsymbol{e}_j = C_{ij}\boldsymbol{f}_i;$$
$$[\boldsymbol{A}]_E = [\boldsymbol{C}]^\top [\boldsymbol{A}]_F [\boldsymbol{C}].$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 28 set 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Encontre a solução **geral** das seguintes EDO's de ordem 1:

a) [10]

$$\frac{dy}{dx} + xy = x.$$

b) [10]

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{e}^{-2x} y = 0.$$

c) [10]

$$\frac{dy}{dx} + y = \mathrm{sen}(2x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i31) 'diff(y,x) + x*y = x ;
                                    dy
(%o31)                              -- + x y = x
                                    dx
(%i32) ode2(%,y,x) ;
                                        2      2
                                       x      x
                                     - --     --
                                       2      2
(%o32)                         y = %e      (%e    + %c)
(%i33) 'diff(y,x) + exp(-2*x)*y = 0 ;
                                 dy      - 2 x
(%o33)                           -- + %e       y = 0
                                 dx
(%i34) ode2(%,y,x) ;
                                           - 2 x
                                         %e
                                         -------
                                            2
(%o34)                            y = %c %e

(%i37) 'diff(y,x) + y = sin(2*x) ;
                                  dy
(%o37)                            -- + y = sin(2 x)
                                  dx
(%i38) ode2(%,y,x) ;
                                 x
                          - x  %e  (sin(2 x) - 2 cos(2 x))
(%o38)            y = %e     (-------------------------- + %c)
                                             5
(%i39)
```

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Encontre a solução geral de

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) edo : x^2*'diff(y,x,2) - 2*x*'diff(y,x) - y ;
                                        2
                                     2 d y        dy
(%o1)                              x   --- - 2 x -- - y
                                         2        dx
                                       dx
(%i2) ode2(%,y,x);
                                 sqrt(13)                    sqrt(13)
                                 -------- + 3/2        3/2 - --------
                                    2                            2
(%o2)            y = %k1 x                     + %k2 x
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule todos os valores possíveis z_n de $(1+i)^{1/7}$. Dê sua resposta na forma $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, onde os r_n's e θ_n's devem ser explicitados.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
z &= (1+i) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)};\\
w &= z^{1/7} = \left[\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\right]^{1/7}\\
&= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)};\\
w_1 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{28}},\\
w_2 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\right)},\\
w_3 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{4\pi}{7}\right)},\\
w_4 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{6\pi}{7}\right)},\\
w_5 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{8\pi}{7}\right)},\\
w_6 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{10\pi}{7}\right)},\\
w_7 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{12\pi}{7}\right)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [30] Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{[z-(2+2\mathrm{i})][z-(5+2\mathrm{i})]}$$

em torno de $z_0 = 2\mathrm{i}$ no anel $2 < |z-2\mathrm{i}| < 5$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Inicialmente, nós separamos em frações parciais:

```
(%i4) z0 : 2*%i ;
(%o4)                              2 %i
(%i5) z1 : 2 + z0 ;
(%o5)                            2 %i + 2
(%i6) z2 : 5 + z0 ;
(%o6)                            2 %i + 5
(%i7) f : 1/((z - z1)*(z-z2)) ;
                                     1
(%o7)                  -----------------------------
                       (z - 2 %i - 5) (z - 2 %i - 2)
(%i8) partfrac(f,z) ;
                           1                  1
(%o8)               ---------------- - ----------------
                    3 (z - 2 %i - 5)   3 (z - 2 %i - 2)
```

$$f(z) = \frac{1}{3([z-2\mathrm{i}]-5)} - \frac{1}{3([z-2\mathrm{i}]-2)}$$

Em seguida, cada uma das frações necessita ser rearranjada de maneira distinta:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{-1}{15\left(1-\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)} - \frac{1}{3[z-2\mathrm{i}]\left(1-\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)} \\
&= -\frac{1}{15}\left[1+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)^2+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)^3+\ldots\right] \\
&\quad -\frac{1}{3}\frac{1}{[z-2\mathrm{i}]}\left[1+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)^2+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)^2+\ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 16 out 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] A função

$$F(x) = \int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$$

possui uma série de Taylor, que pode ser obtida derivando-se sucessivamente o lado direito acima. **Nesta questão, isto é proibido.** Em vez disto, obtenha a série de Taylor de $F(x)$ integrando termo a termo:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

(Note também que o procedimento alternativo é mais rápido e mais fácil do que derivar sucessivamente $F(x)$.)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Com Maxima, os primeiros termos da série são:

```
(%i1) taylor(atan(x),x,0,12);
                                 3    5    7    9    11
                                x    x    x    x    x
(%o1)/T/                    x - -- + -- - -- + -- - --- + . . .
                                3    5    7    9    11
(%i2) integrate(%,x);
                                12    10    8    6    4    2
                               x     x     x    x    x    x
(%o2)                        - --- + --- - -- + -- - -- + --
                               132   90    56   30   12   2
```

ou, como muitos preferiram:

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1};$$

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)(2n-1)} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{[z-(1+\mathrm{i})][z-(2+\mathrm{i})]}$$

em torno de $z_0 = 2+\mathrm{i}$ no anel $|z-(2+\mathrm{i})| < 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
t &= z-(2+\mathrm{i}),\\
z-(1+\mathrm{i}) &= z-1-\mathrm{i} = z-2-\mathrm{i}+1 = z-(2+\mathrm{i})+1 = t+1;\\
f(z) &= \frac{1}{(t+1)}\frac{1}{t}\\
&= \frac{1}{t}\left[1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\ldots\right]\\
&= \frac{1}{t}-1+t-t^2+t^3-t^4+\ldots\\
&= \frac{1}{[z-(2+\mathrm{i})]}-1+[z-(2+\mathrm{i})]-[z-(2+\mathrm{i})]^2+[z-(2+\mathrm{i})]^3-[z-(2+\mathrm{i})]^4+\ldots
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Tente resolver

$$x^2y'' + (1+x)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius: você consegue? Por quê?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Na forma normal,

$$y'' + \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right] y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} xp(x) &= \frac{1}{x} + 1; \\ x^2q(x) &= 1. \end{aligned}$$

Como $xp(x)$ não é analítica em $x = 0$, o método de Frobenius não é aplicável ■

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 22 out 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [30] Para $x(t), y(t) \in \mathbb{C}$; $t \in \mathbb{R}$, resolva (isto é, obtenha a solução geral de):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x - 3y,\\
\frac{dy}{dt} &= x + y.
\end{aligned}
$$

Atenção: resolva o problema do começo ao fim com números complexos. Não se preocupe em obter soluções puramente "reais". Fica mais fácil assim!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.
$$

Os autovalores e autovetores correspondentes da matriz são:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = (1, \mathrm{i}/\sqrt{3});\\
\lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = (1, -\mathrm{i}/\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

Vamos então decompor o vetor com componentes (x, y) na base canônica na base de autovetores:

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= a(1, \mathrm{i}/\sqrt{3}) + b(1, -\mathrm{i}/\sqrt{3});\\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}/\sqrt{3} & -\mathrm{i}/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\\
a &= \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{i}\sqrt{3}y\right),\\
b &= \frac{1}{2}\left(x + \mathrm{i}\sqrt{3}y\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, na base dos autovetores, o sistema é dado por

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
$$

Este sistema está na forma diagonal, e tem solução

$$
\begin{aligned}
a(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t},\\
b(t) &= B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} + B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t},\\
y(t) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left[A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} - B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Obtenha a solução geral de

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i2) eq : 'diff(y,x,2) + 3*'diff(y,x) - 4 * y ;
                                  2
                                 d y      dy
(%o2)                            --- + 3 -- - 4 y
                                   2      dx
                                 dx
(%i3) ode2(eq,y,x);
                                       x           - 4 x
(%o3)                        y = %k1 %e  + %k2 %e
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Encontre a solução geral de

$$x^2y'' + (x + x^2)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius. **(Ou seja: encontre duas soluções LI y_1, y_2 de tal forma que $y = c_1y_1(x) + c_2y(x)$ seja a solução geral.)**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Na forma normal,

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Claramente, $x = 0$ é um ponto singular. Porém,

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1 + x, \\ x^2q(x) &= -1. \end{aligned}$$

O ponto singular é regular, e o método de Frobenius é aplicável.
Tente:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}, \end{aligned}$$

e substitua na EDO, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1]\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)]\, a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Evidentemente devemos fazer

$$\begin{aligned} m + r &= n + r + 1, \\ m &= n + 1, \\ n &= m - 1; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1]\, a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1+r)]\, a_{m-1} x^{m-1+r+1} = 0.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1]\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1+r)]\, a_{n-1} x^{n+r} &= 0, \\ \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(1+n+r-1) - 1]\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1+r)]\, a_{n-1} x^{n+r} &= 0, \\ [r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1+r)]\, a_{n-1} x^{n+r} &= 0, \\ [r^2 - 1]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + [(n-1+r)]\, a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

A equação indicial é

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

As raízes diferem por um inteiro; a menor raiz pode levar às duas soluções, ou a nenhuma delas. Tentemos:

$$\begin{aligned} [(n-1)^2 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0, \\ [n^2 - 2n + 1 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0, \\ n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0, \\ na_n + a_{n-1} &= 0, \\ a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Para $a_0 \neq 0$, esta primeira solução é:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
a_2 &= \frac{1}{2},\\
a_3 &= -\frac{1}{6},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{x}\left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right]\\
&= \frac{e^{-x}}{x}
\end{aligned}
$$

(verificado com Maxima).
Nosso teorema sobre as soluções nos garante que a menor raiz leva a *duas* soluções, mas não nos diz nada sobre como encontrá-las! No nosso caso, há necessidade de uma certa sutileza ou imaginação. Dois caminhos são possíveis:

1. O mais fácil é procurar a solução gerada por $r = +1$. Ela é

$$
\begin{aligned}
[(n+1)^2 - 1]a_n + na_{n-1} &= 0,\\
(n^2 + 2n + 1 - 1)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
n(n+2)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n+2};
\end{aligned}
$$

   A segunda solução será

$$
y_2 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

2. O mais difícil é encontrar a segunda solução a partir da menor raiz. Suponha então que $a_0 = 0$; neste caso, (lembre-se: para $r = -1$), $a_1 = 0$ necessariamente. A relação de recorrência para o próximo n, 2, fica:

$$
\begin{aligned}
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)a_1 &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)0 &= 0.
\end{aligned}
$$

   Portanto, se $a_0 = a_1 = 0$, a_2 pode ser qualquer. Fazendo, sem perda de generalidade, $a_2 = 1$, teremos então

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -1/3,\\
a_4 &= +1/12,\\
a_5 &= -1/60,\\
a_6 &= 1/360,\\
a_7 &= -1/2520,
\end{aligned}
$$

   etc. Ou, para $n \geq 2$:

$$
a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 3} = \frac{2(-1)^n}{n!}.
$$

   Mudando o índice para que ele comece de 0:

$$
y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+2}x^{m+1}}{(m+2)!} = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots
$$

   que é o mesmo resultado obtido para $r = +1$ ■

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$