Nelson Luís da Costa Dias

Uma Introdução aos Métodos Matemáticos para Engenharia

2ª edição (em preparação)

Curitiba
Edição do Autor
2023

Ficha catalográfica

D541
Dias, Nelson Luís da Costa
Uma introdução aos métodos matemáticos para engenharia.
Curitiba: Edição do Autor, 2018.
ISBN Ainda não obtido
1. Matemática I. Título

CDU: 517.9
CDD: 510

Índices para catálogo sistemático:
Matemática: 510

Versão: 2023-09-04T09:40:59

©Nelson Luís da Costa Dias, 2023. Todos os direitos deste documento estão reservados. Este documento não está em domínio público. Cópias para uso acadêmico podem ser feitas e usadas livremente, e podem ser obtidas em http://nldias.github.io. Este documento é distribuído sem nenhuma garantia, de qualquer espécie, contra eventuais erros aqui contidos.

Dedico este livro a todos os meus professores e a todas as minhas professoras, sobretudo àqueles que me ensinaram com amor à causa e dedicação.

Como este livro foi preparado

Este livro foi composto usando LaTeX 2_ε (https://latex-project.org/), e diagramado pelo próprio autor. O tipo utilizado é Linux Libertine 11pt. O tipo sem-serifa é Linux Biolinum 11pt, e o tipo monoespaçado é Latin Modern Typewriter 11pt.

A página tem tamanho A4 com margens de 2,5 cm à esquerda, 6,0 cm à direita, 3,0 cm no topo e 2,0 cm na base. O livro foi preparado para ser impresso apenas na página de frente. A margem generosa à direita é para permitir que os alunos tomem notas com facilidade.

As figuras foram desenhadas com pstricks (http://tug.org/PSTricks/main.cgi/), e os gráficos foram gerados com GnuPlot (http://www.gnuplot.info/).

O autor agradece imensamente a Donald Knuth, Leslie Lamport, e tantos outros que desenvolveram os pacotes e as ferramentas de código livre que tornaram a feitura deste livro possível, e prazeirosa.

Sumário

Prefácio **18**

0 Formalismos matemáticos **20**
0.1 Aritmética e Álgebra 20

1 Uma breve introdução à análise dimensional **22**
1.1 Primeiros exemplos 22
1.2 Definição formal de Dimensão 24
1.3 Análise dimensional 26
1.4 O significado de dimensão fundamental 28

2 Revisão de variáveis complexas **33**
2.1 Números complexos 33
2.2 Conjugado de um número complexo 35
2.3 A fórmula de de Moivre 37
2.4 A fórmula de Euler 38
2.5 Desigualdades 40
2.6 Álgebra com números complexos 41

3 Ferramentas computacionais **44**
3.1 Antes de começar a trabalhar, ... 44
3.2 Python 45
3.3 Maxima 55

4 Métodos numéricos para o Cálculo de uma variável **60**
4.1 Integração numérica: motivação 60
4.2 A regra do trapézio 64
4.3 Aproximação de integrais com séries: a função erro 72
4.4 Solução numérica de equações diferenciais ordinárias 78
4.5 Solução numérica; o método de Euler de ordem1 78
4.6 Um esquema de diferenças centradas, com tratamento analítico . . . 82
4.7 A forma padrão $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x, y)$ 84
4.8 O método de Runge-Kutta multidimensional 93
4.9 Trabalhos computacionais 104

5 Geometria e Álgebra **120**
5.1 Vetores 120
5.2 Álgebra Linear 125
5.3 Aplicações geométricas 127
5.4 O determinante 139
5.5 Funções e funcionais lineares, e o teorema da representação 142

5.6 Transformações lineares 144
5.7 Sistemas de equações lineares 155
5.8 Teorema dos Πs 159
5.9 Autovalores e autovetores 163
5.10 Invariantes de uma transformação linear 167
5.11 Transformações simétricas 170

6 Métodos de solução de sistemas de equações lineares 178
6.1 Eliminação de Gauss 178
6.2 Diagonalização 187

7 Funções no $\mathbb{R}^n$ 194
7.1 Ordem de derivação 194
7.2 A regra da cadeia 195
7.3 Séries de Talor multivariadas 196
7.4 O teorema da função implícita 197
7.5 A regra de Leibnitz 204
7.6 Comprimentos, áreas e volumes 208
7.7 Divergência, rotacional, gradiente 219
7.8 Os teoremas de Gauss e Stokes 230
7.9 Máximos e mínimos de funções de mais de uma variável 236

8 Equações diferenciais ordinárias 239
8.1 Introdução 239
8.2 Classificação 241
8.3 Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1 244
8.4 Equações de ordem 1 linearizáveis 252
8.5 Equações diferenciais exatas no $\mathbb{R}^2$ 257
8.6 Equações diferenciais lineares de ordem 2 a coeficientes constantes . 260
8.7 A equação de Euler 268
8.8 Exercícios adicionais 270

9 Cálculo de variáveis complexas 276
9.1 Funções plurívocas, cortes e ramos 276
9.2 A derivada, funções analíticas e as condições de Cauchy-Riemman . 280
9.3 Sequências e séries 283
9.4 Integração de contorno: o teorema de Cauchy e deformação de caminho 287
9.5 A fórmula integral de Cauchy 290
9.6 Séries de Taylor e de Laurent 293
9.7 O cálculo de séries de Laurent 299
9.8 Integração de contorno e o teorema dos resíduos 304

10 A técnica de integração de Feynman e funções definidas por integrais 314
10.1 A técnica de Feynman 314
10.2 Uma velha conhecida: $\ln(x)$ 314
10.3 A função erro e a função erro complementar 316
10.4 A função Gama 318
10.5 A função Beta 321

11 Soluções de EDO*s* em séries **325**
11.1 Motivação . . . 325
11.2 O método de Frobenius . . . 326
11.3 Caso (i) . . . 328
11.4 Caso (ii) . . . 330
11.5 Caso (iii)-a . . . 335
11.6 Caso (iii)-b . . . 339
11.7 Coeficientes não-polinomiais . . . 346

12 A Transformada de Laplace **351**
12.1 Definição e existência . . . 351
12.2 O cálculo de transformadas de Laplace . . . 353
12.3 Propriedades da Transformada de Laplace . . . 356
12.4 Convolução . . . 357
12.5 Outros truques . . . 359
12.6 Inversão . . . 360
12.7 Aplicação a uma equação diferencial parcial de difusão-advecção . . . 368

13 Uma breve introdução à teoria de distribuições **373**
13.1 A delta de Dirac . . . 373
13.2 O Cálculo com Distribuições . . . 378
13.3 Resultados adicionais . . . 381
13.4 Aplicações . . . 382

14 Solução numérica de equações diferenciais parciais **391**
14.1 Advecção pura: a onda cinemática . . . 391
14.2 Difusão pura . . . 405
14.3 Difusão em 2 Dimensões: ADI, e equações elíticas . . . 424
14.4 Trabalhos Computacionais . . . 431

15 Espaços normados e séries de Fourier **444**
15.1 O produto interno . . . 444
15.2 A desigualdade de Schwarz . . . 447
15.3 Espaços vetoriais de dimensão infinita . . . 449
15.4 Séries de Fourier . . . 454
15.5 Extensões par e ímpar de uma função . . . 459
15.6 Além de senos e cossenos . . . 465
15.7 A desigualdade de Bessel, e a igualdade de Parseval . . . 467
15.8 Mínimos quadrados e estatística . . . 472

16 A Transformada de Fourier **476**
16.1 Definição e o teorema da inversão . . . 476
16.2 O cálculo de algumas transformadas . . . 477
16.3 Linearidade; a transformada das derivadas . . . 482
16.4 O teorema da convolução . . . 488
16.5 O teorema de Parseval . . . 492
16.6 A fórmula da inversa da transformada de Laplace . . . 493
16.7 O princípio da incerteza para transformadas de Fourier . . . 494

17 Funções de Green e a teoria de Sturm-Liouville **500**
17.1 Operadores auto-adjuntos 500
17.2 A matriz adjunta 501
17.3 Autovalores e autovetores de operadores auto-adjuntos 502
17.4 Operadores diferenciais adjuntos 503
17.5 Funções de Green 504
17.6 A teoria de flambagem de Euler 511
17.7 A equação de Sturm-Liouville 512

18 Equações diferenciais parciais **522**
18.1 Introdução ao método das características 522
18.2 Características e classificação de EDPs 526
18.3 O método de separação de variáveis para problemas parabólicos . . 529
18.4 O método de separação de variáveis para problemas elíticos 543
18.5 O método de separação de variáveis para problemas hiperbólicos . . 554
18.6 A solução de d'Alembert 558
18.7 Problemas difusivos com transformações de similaridade 562

A A decomposição de funções racionais em frações parciais **571**
A.1 Conceitos gerais 571
A.2 Exemplos concretos 572
A.3 Coeficientes complexos 575
A.4 Coeficientes reais 580
A.5 Exemplos concretos, detalhados 593

B Algumas funções especiais **597**
B.1 A equação de Legendre e os polinômios de Legendre 597

C Soluções de exercícios propostos selecionados **600**

D Instalação de ferramentas computacionais **803**
D.1 Windows 803
D.1.1 Maxima 803
D.1.2 Python 804
D.1.3 Recomendações finais para Windows 804
D.2 Linux 805
D.2.1 Maxima 805
D.2.2 Python 805
D.2.3 Recomendações finais para Linux 806

E Vazão média e máxima anual **807**

Índice Remissivo **809**

Referências Bibliográficas **813**

Lista de Tabelas

3.1 Vazões Máximas Anuais ($m^3\,s^{-1}$) no Rio dos Patos, PR, 1931–1999 49

4.1 Estimativas numéricas de I e seus erros relativos δ. 64
4.2 Curva de remanso em canal trapezoidal – solução de Ven Te Chow . 113
4.3 Parâmetros do modelo de Ludwig et al. (1978) 117

5.1 O crescimento de $\exp(n)$ *versus* $n!$ 133

18.1 20 primeiros zeros de $J_0(x)$. 537

Lista de Figuras

1.1 Análise dimensional do período de um pêndulo. 23
1.2 Esquema de uma camada-limite convectiva. 30
1.3 Camada-limite sobre uma placa. 32

2.1 Interpretação geométrica de um número complexo. 34
2.2 Funções hiperbólicas: $\cosh(x)$ e $\operatorname{senh}(x)$. 43

3.1 FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos. 52
3.2 A função $f(x) = x/(1 + x^{7/3})$ 56

4.1 Integração numérica de uma função 62
4.2 A regra do trapézio, com $n = 4$ e $n = 8$ trapézios. 65
4.3 Exercício 4.5. 69
4.4 Integração numérica do Exercício 4.6. 69
4.5 A regra do ponto do meio. 70
4.6 Função $\operatorname{erf}(x)$ calculada por integração numérica, com `trapepsilon` e $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$, *versus* a `erf` pré-definida no programa de plotagem. 73
4.7 Função $\operatorname{erf}(x)$ calculada com série de Taylor, com `erf_1`, *versus* a `erf` pré-definida no programa de plotagem. 76
4.8 Solução da equação (4.14). 79
4.9 Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `sucesso.py`, para $\Delta x = 0{,}01$. 82
4.10 Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `sucesso.py`, para $\Delta x = 0{,}5$. 82
4.11 Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `succent.py`, para $\Delta x = 0{,}5$. 84
4.12 Os métodos de Euler de ordens 1 e 2. 85
4.13 Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `euler2.py`, para $\Delta x = 0{,}5$. 87
4.14 Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `rungek4.py`, para $\Delta x = 0{,}5$. 87
4.15 O integrando $\gamma(x, t)$ para $x = 1, \ldots, 5$. 89
4.16 Cálculo de $\Gamma(x)$ com o método de Runge-Kutta: saída de `intgam1` comparada com a função $\Gamma(x)$ do programa de plotagem (Gnuplot) . 90
4.17 Solução numérica pelo Método de Runge-Kutta de um sistema de 2 equações diferenciais ordinárias 95
4.18 Drenagem de um maciço poroso semi-infinito inicialmente totalmente saturado. 96
4.19 Resultado da integração numérica do problema de Boussinesq para um aquífero semi-infinito 99

4.20 Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta. 103
4.21 Um pêndulo (possivelmente) não-linear. 104
4.22 O período de um pêndulo não linear em função da amplitude inicial Θ_0. A linha tracejada é o valor teórico $f(0) = 2\pi$ para oscilações de pequena amplitude. 107
4.23 Características geométricas de um canal. 111
4.24 Area molhada em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua). 114
4.25 Perda de carga em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua). 115
4.26 Velocidade em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua). 115
4.27 Cota em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua). 116
4.28 A traça (*Spruce budworm*) *Choristoneura orae*. Fonte: Wikipedia. ©entomart (http://www.entomart.be). 117
4.29 Simulação de eclosão de uma praga de traças, utilizando o modelo de Ludwig et al. (1978). 118
4.30 O oscilador não-linear de van der Pol ($\mu = 5$). 119

5.1 A representação geométrica usual do vetor $(2, 1)$, e uma interpretação alternativa, mas igualmente válida! 120
5.2 O Teorema de Pitágoras 128
5.3 O Teorema dos Cossenos 129
5.4 Exercício 5.15. 138
5.5 Uma transformação linear que produz um cisalhamento simples . . 147
5.6 Uma transformação linear que produz uma rotação simples 148
5.7 Duas rotações sucessivas de eixos. 154
5.8 Uma transformação não-linear (no caso, $f(x) = \operatorname{tgh} x$) pode ser inversível sem ser bijetiva. Já uma transformação linear inversível (no caso, $g(x) = 2x$) é sempre bijetiva. 157
5.9 Duas retas s, t e uma projeção $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{u}$ no plano $x + 2y + z = 0$. 159

7.1 O teorema da função implícita, e uma situação indesejável 198
7.2 Uma dedução lagrangeana da regra de Leibnitz. 205
7.3 Cálculo do comprimento de arco de uma curva. 208
7.4 Parametrização de uma superfície no espaço, e o cálculo de sua área. 210
7.5 Mudança da ordem de integração em x e y em uma integral dupla . 212
7.6 Comprimento de arco de uma espiral infinita. 215
7.7 Figura do exercício 7.7. 216
7.8 Figura do problema 7.8. 216
7.9 Superfície do Problema 7.13. 218
7.10 A divergência em coordenadas cartesianas. 219
7.11 Superfície $z = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)/\sqrt{x^2+y^2}$ e suas curvas de nível. . . . 222
7.12 (a) o vetor $\boldsymbol{t}$ é tangente à curva de nível Λ e a curva $\mathscr{L}$ é *localmente* paralela a Λ; (b) o vetor $\boldsymbol{t}$ é perpendicular à curva de nível Λ e a curva $\mathscr{L}$ é *localmente* perpendicular a Λ. 223

7.13 Uma motivação simples para o teorema da divergência. Os espaços entre os diversos elementos são para facilitar a visualização; as fronteiras internas e externas na verdade se sobrepõem. A divergência é definida no centro (pontos pretos) de cada elemento. 231
7.14 O teorema de Stokes. 233
7.15 O teorema de Green. 233

8.1 Integração de $1/x$ sobre os ramos positivo e negativo 241

9.1 Raízes quadradas de $-(1+\mathrm{i})$. 277
9.2 Um corte no plano complexo (em cinza) e uma trajetória no plano (em preto). 278
9.3 Um corte para a função $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$. 279
9.4 A derivada no plano complexo: existem infinitos caminhos ao longo dos quais Δz pode tender a zero, e todos devem resultar no mesmo limite. 280
9.5 As somas s_n da série harmônica até 100000. 285
9.6 Exemplo 9.6. 289
9.7 Exercício 9.7. 289
9.8 O teorema de Cauchy, e a deformação de caminho 290
9.9 A fórmula integral de Cauchy. 291
9.10 A fórmula de Taylor para funções complexas. 293
9.11 A região de validade da expansão em série de Laurent: $f(z)$ é analítica na região cinza, e a sua expansão em série de Laurent em torno de z_0 vale no anel entre os círculos de raios R_1 e R_2. 295
9.12 A obtenção da fórmula para a série de Laurent. 296
9.13 A função $f(x) = 1/(1+x^2)$. O seu raio de convergência é $R = 1$ devido às singularidades de $f(z) = 1/(1+z^2)$ em $z = \pm\mathrm{i}$. 299
9.14 Exemplo 9.10. 300
9.15 Exercício 9.22. 303
9.16 O teorema dos resíduos. O arco de círculo $\mathscr{L}_\rho$ em torno de z_1 tem raio ρ. 303
9.17 O teorema dos resíduos para um número finito de singularidades. . . 305
9.18 Exemplo 9.12. 306
9.19 Diferenças entre raízes no exemplo 9.13. O círculo tem raio unitário, e os argumentos das raízes são múltiplos de $\pi/4$. 309
9.20 Contorno de integração do exemplo 9.14 310
9.21 Figura do Exercício 9.24. 312
9.22 Exercício 9.30. 312

10.1 A função $\Gamma(x)$. 320

12.1 Gráfico da função $\mathrm{e}^{-t}\Gamma(t)$. 352
12.2 Região de integração dupla no plano $t \times \tau$ para o cálculo da transformada de Laplace da convolução $f * g$. 359
12.3 Caminho de integração para a fórmula de inversão 12.14. 361
12.4 Caminho de integração para o Exemplo 12.7. 361
12.5 Os dois ramos da transformação $u(v)$. 370

13.1 Efeito de uma função $\phi_n(x-a)$, selecionando o valor de $f(a)$. . . . 374
13.2 A sequência $\phi_B(x)$, $B = 1, 2, 10$. 377
13.3 Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada 384
13.4 Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada 385

13.5 Exercício 13.18. 389
13.6 Exercício 13.19. 389
13.7 Exercício 13.20. 390

14.1 Solução analítica das equações 14.3–14.4. 392
14.2 Solução numérica produzida por `onda1d-ins.py`, para $t = 250\Delta t$, $500\Delta t$ e $750\Delta t$. 393
14.3 Solução numérica produzida por `onda1d-lax.py`, para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$. 398
14.4 Solução numérica produzida pelo esquema *upwind*, para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$. 401
14.5 As funções $\text{sen}^2(\theta)$ e $\cos^2(\theta)$ 403
14.6 A função definida em 14.30 (para Fo = 1) 403
14.7 Exemplo 14.1: interseção (em cinza escuro) de 32 regiões (em cinza-claro; incrementos de $\pi/32$) na equação (14.30) A parábola em preto representa o caso degenerado $\theta = 0$. 404
14.8 Solução analítica da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. 407
14.9 Solução numérica com o método explícito (14.40) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica. 411
14.10 Solução numérica com o método implícito (14.44) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica. 415
14.11 Solução numérica com o método de Crank-Nicholson ((14.50)) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica. 416
14.12 Comparação entre as soluções analítica (linhas) e numérica com um esquema implícito (pontos) da equação da difusão-advecção com termo de decaimento, para $t = 0{,}333$, $t = 0{,}666$ e $t = 0{,}999$. 422
14.13 Solução analítica da equação da difusão bidimensional, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}2$ e $t = 0{,}3$ 427
14.14 Solução numérica da equação da difusão bidimensional com o esquema ADI, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}2$ e $t = 0{,}3$ 430
14.15 Solução correta do problema para $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. As linhas cheias são a solução analítica, e os pontos a solução numérica. . . . 434
14.16 Parte real de $\phi(\zeta, \tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica. 436
14.17 Parte imaginária de $\phi(\zeta, \tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica. . . 437
14.18 Comparação do esquema numérico com a solução analítica de Boussinesq (1904). De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$ . . . 441
14.19 Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$. 441
14.20 Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}25$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$. 442

14.21 Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}50$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$. 442
14.22 Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}75$. 443

15.1 Significado geométrico da aproximação de mínimos quadrados 15.56 470
15.2 Aproximação do Exercício 15.21 471

16.1 O contorno de integração de $g(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$. 479
16.2 O princípio da incerteza entre $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$, para o par $\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a \mathrm{e}^{-\frac{k^2 a^2}{4}}$ com $a = 4$: quanto mais "espalhada" for $f(x)$, mais "concentrada" será $\widehat{f}(k)$, e vice-versa. 480
16.3 Movimento harmônico simples de uma partícula, "quantizado": a ação $p \times 2\pi R$ só pode assumir múltiplos inteiros da constante de Planck h. 497

17.1 Pilar sobre roletes, carregado verticalmente 512
17.2 Gráfico da solução de $\mathrm{tg}(kh) = \epsilon kh$. 519

18.1 O método das características para a propagação de uma onda com celeridade constante c. 523
18.2 Funções de Bessel de ordem 0 536
18.3 Esvaziamento de um maciço poroso 540
18.4 Condições inicial e de contorno para o problema 18.17. 542
18.5 Solução numérica da explosão de uma mina submarina. 550
18.6 Tratamento das condições de contorno não-homogêneas de um problema envolvendo a equação de Laplace. 550
18.7 Uma rotação do domínio da equação de Laplace para V o "transforma" no problema para W. 552
18.8 Figura do Exercício 18.23. 555
18.9 "O problema de Sutton" 565

C.1 Função $x\,\mathrm{sen}(x)$ calculada com a série de Taylor implementada no programa `xsenx.py`, *versus* a função pré-definida no programa de plotagem. 621
C.2 Paralelogramo da prova do Exercício 5.11. 626
C.3 O Teorema dos Senos. 626
C.4 Figura do exercício 7.9. 644
C.5 Problema 9.16. 678
C.6 Exercício 9.27. 683
C.7 Exercício 9.29. 685
C.8 Exercício 9.30. 686
C.9 Exercício 9.31. 687
C.10 Função $f(\theta)$, Exercício 14.7 734
C.11 Solução do problema 17.14. 769
C.12 Autovalores do Exercício 17.15. 771

Lista de Listagens

3.1 `binint.py` — Exemplo de *strings*, e inteiros. 46
3.2 `floats.py` — Exemplo de uso de `float` e `complex`. 47
3.3 `patos-medmax.dat` — Vazões média e máxima anuais, Rio dos Patos 49
3.4 `fqiemp.py` — Cálculo de uma FDA empírica 50
3.5 `fqiemp.dat` — FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos. 51
uhaul.py 52
3.6 `bintext.py` — Exemplo de arquivo texto e arquivo binário 53
3.7 `writearr.py` — Escreve um arquivo binário contendo 3 "linhas", cada uma das quais com um *array* de 10 `floats`. 54
3.8 `readarr.py` — Lê um arquivo binário contendo 3 "linhas", cada uma das quais com um *array* de 10 `floats`. 55
3.9 Obtenção do ponto de máximo de uma função com Maxima 57
3.10 `mulambdak.max` — Cálculo da média da distribuição Weibull em em função de seus parâmetros λ e k 58
3.11 Saída do programa `mulambdak.max` 59
4.1 `achapol.max` — Polinômio com propriedades definidas 61
4.2 Saída de `achapol.max` 62
4.3 Cálculo da integral de um polinômio analiticamente, com Maxima . 62
4.4 `passaquad.max` — parábola $h(x) = ax^2 + bx + c$ passando por $(1, f(1))$, $(3, f(3))$ e $(5, f(5))$. 63
4.5 Saída de `passaquad.max` 63
4.6 `numint.py` — Integração numérica, regra do trapézio 66
4.7 `quadraver1.py` — Integração numérica de $f(x)$ com 8 trapézios . 66
4.8 `numint.py` — Integração numérica ineficiente, com erro absoluto pré-estabelecido 66
4.9 `quadraver2.py` — Integração numérica ineficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0{,}0001$ 67
4.10 `numint.py` — Integração numérica eficiente, com erro absoluto pré-estabelecido 67
4.11 `quadraver3.py` — Integração numérica eficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0{,}000001$ 68
trapezio.py 71
boole.py 71
4.12 `vererf.py` — Cálculo da função erro por integração numérica . . . 73
4.13 Cálculo de $\mathrm{erf}(x)$ com uma série de Taylor. 75
4.14 `vererf1.py` — Cálculo da função erro com série de Taylor entre 0 e 3. 75
4.15 `erfs.py` — Cálculo de $\mathrm{erf}(x)$ com série de Taylor, limitado a no máximo 43 termos 77

4.16 `resolve-eqdif` — Solução de uma EDO com Maxima 78
4.17 `fracasso.py` — Um programa com o método de Euler que não funciona 80
4.18 `sucesso.py` — Um programa com o método de Euler que funciona 81
4.19 `succent.py` — Método de Euler implícito 83
4.20 `euler2` — Um método explícito de ordem 2 86
4.21 `rungek4` — Método de Runge-Kutta, ordem 4 88
4.22 Primeiro protótipo para o cálculo de $\Gamma(x)$ 91
4.23 Programa definitivo para o cálculo de $\Gamma(x)$ 92
4.24 `tentalista.py`: listas em Python 94
4.25 `tentaarray.py`: arrays com Numpy 94
4.26 `rungek4v.py`: o método de Runge-Kutta multidimensional 96
4.27 `street.py` — Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta. 102
verysimplesum.out 123
5.1 `verysimplesum.py` — Uma soma simples com Python. 124
notsosimple.py 124
notsosimple.out 124
fatvsexp.py 134
5.2 `levisemcom.py` — Cálculo do símbolo de permutação de Levi-Civitta. 135
5.3 `eigenrot.py` — Cálculo de autovalores e autovetores em Python, com `numpy`. 164
simcons3.out 172
5.4 `simcons3.py` — Manipulações de matrizes simétricas 173
dia4.py 188
dia4.py 189
dia4.py 189
dia4.py 190
dia4.py 190
dia4.py 190
7.1 `jacobsphere` — Jacobiano de coordenadas esféricas 203
7.2 Cálculo do Jacobiano de coordenadas esféricas com Maxima 204
9.1 Obtenção de ‘e’ com 20 casas decimais utilizando Maxima 284
9.2 `oresme.py` — cálculo das somas da série harmônica 285
11.1 `a2nbn` — Relação de recorrência para a_{2n}, e o cálculo direto utilizando (11.9) 341
11.2 Saída do programa `a2nbn.max` 341
11.3 Comparação entre b_n e d_n para alguns valores iniciais de n 343
11.4 Saída de `vamosbd.max` 344
11.5 Cálculo dos coeficientes da solução em série de $y' + e^{-x}y = 0;\ y(0) = 1$ 347
11.6 Coeficientes da solução de $y' + e^{-x}y = 0;\ y(0) = 1$ produzidos por Maxima 348
12.1 Obtenção da integral 12.42 com Maxima 371
14.1 `onda1d-ins.py` — Solução de uma onda cinemática 1D com um método explícito instável 393
14.2 `surf1d-ins.py` — Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem 394
14.3 `onda1d-lax.py` — Solução de uma onda cinemática 1D com um método explícito (Lax) estável 398

14.4 `surf1d-lax.py` — Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem 399
14.5 `difusao1d-ana.py` — Solução analítica da equação da difusão . . 406
14.6 `divisao1d-ana.py` — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização 407
14.7 `difusao1d-exp.py` — Solução numérica da equação da difusão: método explícito. 409
14.8 `divisao1d-exp.py` — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização 410
14.9 `alglin.py` — Exporta uma rotina que resolve um sistema tridiagonal. 413
14.10 `difusao1d-imp.py` — Solução numérica da equação da difusão: método implícito. 414
14.11 `difusao1d-ckn.py` — Solução numérica da equação da difusão: esquema de Crank-Nicholson. 417
sana.max 420
14.12 Implementação de um esquema numérico implícito para a equação da difusão-advecção. 421
14.13 `difusao2d-ana.py` — Solução analítica da equação da difusão bidimensional. 426
14.14 `difusao2d-adi.py` — Solução numérica da equação da difusão bidimensional, esquema ADI. 428
15.1 Coeficientes de Fourier de $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 1$ 456
15.2 Os primeiros 6 polinômios de Legendre 465
18.1 Solução numérica de uma explosão de uma mina 547
uhaul.py 614
uhaul.py 614
C.1 Aproximação de $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ com um polinômio do 3º grau 616
C.2 Cálculo de $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ com 10 trapézios. 617
C.3 Dedução da regra de Simpson. 618
uhaul.py 620
C.4 `xsenx.py` — Cálculo da série de Taylor de $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$. 621
squares.max 623
cubes.max 624
C.5 Obtenção de uma matriz na forma escada com Maxima. 637
abs.max 704
C.6 Valores iniciais de c_n para o problema11.19 711
C.7 Saída de `vamosbd.max` 712
C.8 Cálculo de $1 - A^* - A + A^*A$ com Maxima 732
integrap04.max 799
patos–medmax.dat 807

Prefácio

Este livro é o resultado de minhas atividades de docência em diversas disciplinas relacionadas ao ensino de Matemática para Engenharia. O livro baseia-se em duas disciplinas de Matemática Aplicada (I e II) lecionadas para o 3º ano do Curso de Engenharia Ambiental da Universidade Federal do Paraná (UFPR), mas há bastante material proveniente das disciplinas semelhantes de pós-graduação que ministrei ao longo dos anos nos Programas de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) e Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA) da UFPR.

O material se presta tanto ao ensino de graduação quanto de pós-graduação em cursos de Engenharia, Geociências e, talvez como material adicional, de Física e de Matemática: por um lado, procurei incluir as definições e os conceitos que permitem que um aluno de graduação se sinta confortável, e possa recordar o que aprendeu em seus cursos de Cálculo; por outro, não hesitei em apresentar as ideias e os conceitos mais abstratos, típicos de cursos de pós-graduação, que tornam o assunto tão poderoso e tão indispensável em Engenharia. É bom lembrar que os alunos de graduação *são* capazes de compreender e dominar esses últimos, tanto quanto os de pós.

O material é o "clássico" de cursos de "Matemática Avançada", ou "Matemática Aplicada para Engenharia", ou "Física Matemática" (entre outros nomes), mas com os vieses inevitáveis do autor. Os dois grandes focos são a solução de equações diferenciais, e os conceitos de Álgebra Linear úteis e necessários para isso. Existe uma certa falta de conteúdo de Mecânica dos Fluidos em livros desse tipo, que procurei remediar (veja por exemplo minha preocupação com Análise Dimensional e o Teorema dos Pi*s*, e com o método das caraterísticas). Sempre que pude chamar a atenção do leitor para dimensões, escalas, e às vezes para o puro bom-senso, procurei fazê-lo: com atenção a essas coisas, é possível evitar uma boa parte dos erros que os alunos de Engenharia cometem em Matemática.

O uso de números complexos é uma parte integral do livro. Eles são usados do começo ao fim, e fiz um esforço para mostrar que seu uso muitas vezes é mais "natural", e que outras é a única alternativa. Outros elementos importantes para a "caixa de ferramentas" que um Engenheiro deve possuir, e que procurei ressaltar, são a Regra de Leibnitz (e sua conexão com o Teorema do Transporte de Reynolds); a idéia de resolver um problema em um espaço "transformado"; o uso prático da "delta de Dirac" e dos elementos correspondentes da Teoria de Distribuições (usados aqui sistematicamente para obter funções de Green); e o enfrentamento, ainda que episódico, de problemas não-lineares.

Uma parte considerável dos exercícios propostos têm solução no apêndice C. Isso é bom, e é mau. É mau porque pode desestimular o aluno a buscar as soluções com seu próprio esforço. O aluno deve estar ciente de que, sem dedicação, não haverá aprendizado, e de que só deve consultar a solução de um problema depois de ter investido bastante esforço buscando-a sozinho (trabalhar em grupo também

é uma boa estratégia). É bom porque pode ajudar o aluno a ver o pequeno passo que faltava para obter uma solução, relembrá-lo de algum conceito importante, ou mesmo ensinar-lhe algum truque novo.

Neste século XXI, já não é mais possível evitar as ferramentas computacionais disponíveis, e decidi, após bastante consideração, incluir apenas duas: Maxima, uma linguagem de processamento simbólico, e Python, uma linguagem procedural moderna e fácil de aprender. Os exemplos com ambas apenas tangenciam o seu potencial, mas permitem incursões, algumas razoavelmente profundas, em métodos numéricos e em sua combinação com métodos analíticos. O uso de ferramentas computacionais não torna necessariamente o ensino, nem a aprendizagem, de Matemática Aplicada mais fáceis. Mas os torna mais realistas e concretos, o que me parece algo inevitável para a boa prática de Engenharia.

O uso de computação permeia todo o texto. Por sua importância, métodos numéricos são introduzidos bem cedo, no capítulo 4 para o Cálculo univariado, e no capítulo 14 para a solução numérica de equações diferenciais parciais. Minha decisão de colocá-los *antes* de capítulos que detalham a obtenção analítica de soluções equivalentes — por exemplo, soluções analíticas de sistemas de equações diferenciais ordinárias só aparecem pela primeira vez no capítulo 5 — foi deliberada: nos cursos em que leciono esses capítulos, eles aparecem logo no *início* do período (semestre ou trimestre), para dar tempo ao aluno de aprender a ferramenta computacional, eliminar os erros de seus programas, e chegar ao fim do período com pelo menos alguns programas feitos por ele mesmo *funcionando*.

Essa ligeira inversão da ordem "natural" das coisas justifica-se ainda mais pela natureza do texto: *este não é um livro de Cálculo nem de Álgebra Linear*, e não se propõe a substituir, nem mesmo parcialmente, uma boa formação em Cálculo Diferencial e Integral. Este é um livro, e um assunto, que deve ser ensinado *depois* do Cálculo: o livro faz uma ponte importante para as aplicações em Mecânica dos Sólidos e dos Fluidos, Termodinâmica, e Eletromagnetismo, que compõem a base daquilo que poderíamos chamar de "Ciências de Engenharia".

O que mais importa, talvez, seja o ângulo de abordagem: os problemas de Matemática que o Engenheiro encontra são o resultado de concepções e definições de projeto, e também da formulação correta da Física necessária. O objetivo deve ser *resolver* os problemas (ou compreender como sua solução foi obtida); o melhor método, muito pragmaticamente como deve ser o pensamento de um Engenheiro, é aquele que "funciona". Por esse motivo, eu evitei ao máximo "compartimentar" o livro. Referências cruzadas entre Análise e Computação, e entre as diferentes partes do livro, são frequentes. Quanto mais ampla for a "caixa de ferramentas" mencionada acima, maiores serão as chances de encontrar a solução desejada. É minha esperança que tanto os professores quanto os alunos vejam o poder e a utilidade dessa abordagem, e que a adotem tão entusiasticamente quanto possível.

Todos os grandes engenheiros foram proeficientes em Matemática (os nomes de Joseph Valentin Boussinesq, Osborne Reynolds e Ludwig Prandtl vêm rapidamente à memória), e muitos dos grandes matemáticos nos legaram contribuições fundamentais para a Física e para a Engenharia (por exemplo, Leonhard Euler, John von Neumann, e Andrei Kolmogorov). Seria tolo entrar no debate entre "Teoria e Prática", ou sobre a "utilidade" de Matemática em Engenharia. É mais produtivo ensinar Matemática para alunos de Engenharia, e para estes últimos aprendê-la, com entusiasmo e confiança. As recompensas, em termos de melhores projetos, e de uma melhor compreensão do mundo natural, são certas.

Curitiba, 4 de setembro de 2023.

0

Formalismos matemáticos

Este é um livro sobre formalismos matemáticos, e como eles podem ajudar você, estudante, a resolver problemas mais rapidamente, e mais facilmente. O uso de matemática para resolver problemas cada vez mais sofisticados e realistas relacionados ao meio físico, químico e biológico que nos cerca é um fato: o caminho do futuro é com certeza um caminho em que o conteúdo matemático será cada vez maior na solução de problemas de Engenharia.

Novos formalismos permitem resolver mais rapidamente problemas mais difíceis, mas muitos estudantes têm dificuldade de ver as vantagens. No curto prazo, o aprendizado é (algumas vezes) difícil. O ponto fundamental, entretanto, é estar disposta(o) a entender que o formalismo é *novo*, e que ele precisa ser aprendido *antes* que o retorno medido na solução de problemas de seu interesse possa vir. Pense nisso como um investimento.

0.1 – Aritmética e Álgebra

Como qualquer aluno que completou o ensino médio antes de ingressar em um curso superior, isto já aconteceu na sua vida: um dia, você aprendeu um novo formalismo matemático, muito difícil de entender (naquela ocasião), mas que lhe deu um gigantesco poder de resolver novos problemas. O poder é tão grande, que você quase certamente esqueceu a forma antiga.

Exemplo 0.1 Maria possui o dobro das maçãs de João, e duas maçãs a mais que José. O número total de maçãs que os três possuem é 18. Quantas maçãs Maria possui? Resolva esse problema sem usar Álgebra.

SOLUÇÃO
Sem Álgebra significa *com Aritmética apenas*. A única forma possível é por enumeração. Na tabela abaixo, nós vamos aumentando o número de maçãs de José, e calculando as maçãs que Maria e que João têm, até que a soma produza o valor do enunciado. Observação: o número de maçãs de Maria é par; logo, o número de maçãs de José também é. Variamos portanto o número de maçãs de José de 2 em 2.

José	Maria	João	Total
0	2	1	3
2	4	2	8
4	6	3	13
6	8	4	18

Portanto, Maria tem 8 maçãs. Era assim que você fazia até aprender *Álgebra*. Também era assim que o mundo inteiro fazia, até a Álgebra ser inventada. Hoje, ela é tão corriqueira,

que ninguém mais se lembra de que, um dia, ser matemático era ser aritmético e geômetra, mas ainda não era ser algebrista.

É claro que existe uma outra forma. Se x é o número de maçãs de Maria, y o de João, e z o de José,

$$\begin{aligned} x &= 2y, \\ x &= z + 2, \\ x + y + z &= 18. \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} x + x/2 + (x - 2) &= 18, \\ 2x + x + 2x - 4 &= 36, \\ 5x &= 40, \\ x &= 8 \blacksquare \end{aligned}$$

A superioridade da abordagem algébrica é tão gritante que a maioria de nós se esquece da solução aritmética que aprendemos. A álgebra é um *formalismo* novo, que nos dá tanto poder que vale a pena aprendê-la ainda bem cedo, e utilizá-la para resolver quase tudo que aparece até o fim do ensino médio. Nesse ponto, entretanto, o poder da álgebra dá sinais de cansaço. Novos formalismos são necessários. Esses formalismos são o Cálculo, e a Álgebra Linear. Este livro trata do seu uso sistemático, e intensivo, para resolver todo tipo de problema. Mas eles são formalismos *novos*. Suas regras são *diferentes* das regras da Álgebra elementar.

Esse fato precisa ser aceito, para que o conteúdo do livro seja proveitosamente aprendido.

Exercícios Propostos

0.1 Resolva o mesmo problema, substituindo 18 por 33599999998.

1

Uma breve introdução à análise dimensional

Em cursos de engenharia, matemática e física (entre outros), é frequente encontrar afirmações do tipo: "a dimensão de trabalho é $\mathsf{ML^2T^{-2}}$", mas a definição do que sejam "dimensões" é raramente, ou nunca, encontrada. O nome que se dá ao estudo das dimensões físicas das variáveis de um problema, e dos parâmetros que o governam, é *análise dimensional*. A análise dimensional tem um impacto profundo em todos os problemas de Engenharia. Este capítulo apresenta uma breve introdução informal ao assunto. As idéias aqui apresentadas são uma adaptação da introdução à análise dimensional de Barenblatt (1996, Capítulo 1).

1.1 – Primeiros exemplos

Nosso primeiro exemplo é tão importante que ele não será denominado, neste livro, um "Exemplo": ele faz parte da narrativa principal.

O período de um pêndulo mostrado na figura 1.1 é T. O comprimento da corda é L. A massa do pêndulo é m. A aceleração da gravidade é g.

As dimensões fundamentais *deste problema* são M (massa), L (comprimento), e T (tempo), porque todas as variáveis do problema possuem dimensões que podem ser expressas como produtos de potências dessas três. Conforme veremos a seguir, esse fato na verdade é um *teorema*, mas por ora é razoável aceitá-lo, como o fazem a maioria dos livros de física ou de engenharia. A única variável da lista acima que envolve M é m. O fato de que m é a única variável com dimensão M nos faz desconfiar de que m não pode fazer parte da "lista" de variáveis que intervêm no cálculo de T. Por quê? Porque, conforme também veremos, todas as equações da Física devem envolver apenas grupos de variáveis *adimensionais*. Por enquanto, acredite, e continue.

Com T, L e g, temos:

$$\begin{aligned} [\![T]\!] &= \mathsf{T}, \\ [\![L]\!] &= \mathsf{L}, \\ [\![g]\!] &= \mathsf{LT^{-2}}. \end{aligned}$$

Na lista acima, o símbolo $[\![\cdot]\!]$ significa "dimensão de". Confirme a afirmação feita acima: todas as 3 variáveis têm dimensões expressas como produtos de potências de L e T.

Com a última "equação dimensional" acima, podemos construir uma variável adimensional facilmente:

$$g = c^2 L T^{-2},$$

Figura 1.1: Análise dimensional do período de um pêndulo.

$$T^2 = c^2 \frac{L}{g},$$
$$T = c\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

A variável adimensional acima é c. Se nós a chamarmos de Π_1,

$$\Pi_1 = \frac{T}{\sqrt{\frac{L}{g}}}.$$

Uma solução analítica (aproximada) do problema do pêndulo pode ser obtida, e nos leva ao valor numérico

$$\Pi_1 = 2\pi,$$

onde $\pi = 3{,}141592\ldots$. A análise dimensional não permite a obtenção do valor numérico de Π_1. Ele poderia ser obtido, entretanto, *experimentalmente*, realizando-se diversas medidas de L e T; cada uma delas produziria, por exemplo, um valor experimental para Π_1. A média desses valores seria uma boa estimativa do valor de Π_1.

Exemplo 1.1 Suponha um escoamento de um fluido com massa específica ρ e viscosidade cinemática ν em torno de um cilindro com diâmetro D, com velocidade U. Suponha que a força do escoamento sobre o cilindro seja F. O que a análise dimensional pode nos dizer? As dimensões fundamentais são, novamente, M, L, T. Mas nem sempre isso será assim! As dimensões das diversas variáveis são

$$\begin{aligned}
[\![\rho]\!] &= \mathsf{ML}^{-3},\\
[\![\nu]\!] &= \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1},\\
[\![D]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![U]\!] &= \mathsf{LT}^{-1},\\
[\![F]\!] &= \mathsf{MLT}^{-2}.
\end{aligned}$$

Temos 5 variáveis, e 3 dimensões fundamentais. Devemos ter $5-3 = 2$ grupos adimensionais (na verdade, *esse* é um caso particular do teorema dos Π*s* ! O caso geral utiliza o conceito de *posto* da matriz dimensional; veja a seção 5.8). Vamos escolher 3 variáveis que estarão

(potencialmente) presentes nos 2 grupos. Por simplicidade, escolhemos D, U e ρ. *Note que, entre elas, temos presentes todas as dimensões fundamentais*. Faça

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= FD^aU^b\rho^c,\\ [\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{MLT}^{-2}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c,\\ 1 &= \mathsf{M}^{1+c}\mathsf{L}^{1+a+b-3c}\mathsf{T}^{-2-b}.\end{aligned}$$

Nas equações acima, note que nós impusemos, sem perda de generalidade, que o expoente de F é 1: de fato, qualquer potência de Π_1 será novamente adimensional, e portanto essa escolha não tira a generalidade do cálculo de Π_1. Note também que nós estabelecemos que uma variável adimensional tem "dimensão 1": $[\![\Pi_1]\!] = 1$. Temos um sistema de equações em a, b, c:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}.$$

A solução do sistema é $a = -2$, $b = -2$, $c = -1$, donde

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 D^2}.$$

Procuramos, da mesma forma, o segundo parâmetro adimensional:

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \nu D^aU^b\rho^c,\\ [\![\Pi_2]\!] &= \left[\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c,\\ 1 &= \mathsf{M}^c\mathsf{L}^{2+a+b-3c}\mathsf{T}^{-1-b},\end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$, e

$$\Pi_2 = \frac{\nu}{UD}.$$

Nós acabamos de encontrar $\Pi_2 = 1/\mathrm{Re}$, onde Re é o número de Reynolds em Mecânica dos Fluidos. Na verdade, tanto faz Π_2 ou $1/\Pi_2$ (porque qualquer potência de um número adimensional é, novamente, um número adimensional), e nossa relação em uma roupagem "clássica" é

$$\frac{F}{\rho U^2 D^2} = f\left(\frac{UD}{\nu}\right).$$

A função f é desconhecida, e a Análise Dimensional não nos permitirá obtê-la, da mesma maneira que não foi possível encontrar o valor numérico de Π_1 no exemplo anterior. Ela precisa ser encontrada experimentalmente. Mas em vez de irmos para o laboratório e variarmos aleatoriamente 5 variáveis (digamos, com 10 valores de cada, produzindo $10^5 = 100000$ experimentos), nós agora podemos fazer um número bem menor de experimentos, e variar aleatoriamente apenas 2 parâmetros, Π_1 e Π_2 (por exemplo, escolhendo/medindo 100 pares de (Π_1, Π_2): a economia no esforço experimental é substancial).

1.2 – Definição formal de Dimensão

Um *sistema de unidades* é formado por um conjunto de padrões para as suas grandezas fundamentais, em termos das quais todas as demais grandezas do sistema podem ser escritas. Dado o conjunto de grandezas fundamentais, isso define a *classe* do sistema. Por exemplo, o sistema internacional de unidades (SI) é um sistema de classe MLT (se circunscrito a grandezas mecânicas). As grandezas fundamentais do sistema são massa, comprimento e tempo. Os padrões (unidades) são, respectivamente, o quilograma (kg), o metro (m), e o segundo (s), donde o nome, também utilizado, MKS. Dois exemplos de grandezas *derivadas* no SI são a velocidade (com unidades $\mathrm{m\,s^{-1}}$), e a força (com unidades $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$). Outros sistemas de mesma classe são possíveis. Dois exemplos são o sistema CGS (centímetro – grama – segundo), que é métrico, e o sistema MLT britânico (pé – libra-massa – segundo).

O conjunto de grandezas fundamentais é razoavelmente arbitrário: é necessário apenas que todas as demais grandezas sejam exprimíveis em função das grandezas fundamentais escolhidas; cada escolha de grandezas fundamentais definirá uma nova classe. Por exemplo, em Mecânica o sistema técnico métrico kilograma-força – metro – segundo tem como grandezas fundamentais a força, o comprimento e o tempo, sendo um sistema de classe FLT. Da mesma maneira, o sistema britânico libra-força – pé – segundo também é um sistema de classe FLT.

Até agora, nós fomos cuidadosos em não utilizar a palavra *dimensão*. Com a introdução acima, nós estamos em condições de dar uma definição formal de dimensão. Considere portanto dois sistemas de unidades de mesma classe. Por exemplo, considere dois sistemas MLT, tais como o CGS e o MKS.

Definição 1.1 O fator numérico pelo qual uma grandeza muda quando passa de um sistema de unidades para outro de mesma classe é a sua dimensão.

Por exemplo, considere uma passagem CGS $\rightarrow$ MKS. Os fatores numéricos para massa, comprimento e tempo são: $\mathsf{M} = 0{,}001$; $\mathsf{L} = 0{,}01$; e $\mathsf{T} = 1$.

Definição 1.2 As dimensões das unidades fundamentais que definem a *classe* do sistema são as dimensões fundamentais dessa classe.

No caso acima, as unidades fundamentais são massa, comprimento e tempo. As dimensões fundamentais da classe são M, L, e T.

Considere o seguinte princípio:

Todos os sistemas de uma determinada classe são equivalentes.

Por exemplo, para a classe de sistemas MLT, as dimensões de *todas* as grandezas físicas devem ser expressas apenas em função dessas dimensões fundamentais: se a é uma grandeza qualquer do sistema de unidades, devemos ter

$$[\![a]\!] = \phi(\mathsf{M}, \mathsf{L}, \mathsf{T})$$

onde $[\![\cdot]\!]$ significa "dimensão de", e ϕ é a *função dimensional* da grandeza a. A consequência do princípio de equivalência dos sistemas de unidade de uma determinada classe é o

---

Teorema 1.1 A função dimensional ϕ é *sempre* uma função potência nas dimensões fundamentais:

$$\phi = \mathsf{M}^{\alpha}\mathsf{L}^{\beta}\mathsf{T}^{\gamma}$$

Fica claro que nós estamos sempre nos referindo a *relações* entre sistemas: não há um sistema *absoluto* de unidades. A ênfase será sempre nas *transformações* sofridas por um dado objeto matemático quando ele é escrito, ou referenciado, em diferentes *sistemas*. Essa é a mesma idéia que vai motivar nossas operações com vetores e tensores em espaços vetoriais.

Ainda falta uma coisa: uma *grandeza* física é um termo genérico: força, carga elétrica, pressão, velocidade, são *grandezas*. Nos problemas do mundo real, entretanto, existem variáveis: "a força do escoamento sobre um cilindro", "a carga elétrica

armazenada em uma bateria", "a velocidade média do rio em uma seção transversal", "a pressão do escoamento em um ponto do espaço e um instante do tempo", etc., são *variáveis* que entram em problemas específicos. Portanto, necessitamos da:

Definição 1.3 Variáveis são instâncias específicas de grandezas físicas. A dimensão de uma variável é a mesma dimensão da sua grandeza física.

Em particular, variáveis podem ser *adimensionais*:

Definição 1.4 Variáveis cujos valores numéricos não mudam quando passam de um sistema de unidades para outro de mesma classe são denominadas variáveis *adimensionais*.

Exemplo 1.2 O grupo

$$\Pi_1 = \frac{T}{\sqrt{L/g}}$$

é uma variável adimensional. Se

$$[\![g]\!] = \mathsf{LT}^{-2},$$

na passagem de um sistema MLT com valores T', L', g' para outro com valores $T = T'\mathsf{T}$, $L = L'\mathsf{L}$, $g = g'\mathsf{LT}^{-2}$ teremos

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{T}{\sqrt{L/g}} \\ &= \frac{T'\mathsf{T}}{\sqrt{L'\mathsf{L}/(g'\mathsf{LT}^{-2})}} \\ &= \frac{T'\mathsf{T}}{\mathsf{T}\sqrt{L'/(g')}} \\ &= \frac{T'}{\sqrt{L'/g'}} = \Pi_1'.\end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_1 = \Pi_1'$, e Π_1 é uma grandeza adimensional ■

1.3 – Análise dimensional e formas universais de funções de fenômenos físicos

A solução de um problema físico consiste em obter uma variável física a (note que a agora denota uma *variável* específica, e não mais uma grandeza) em função de diversas outras, digamos, $a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m$. Em geral nós procuramos a função f tal que (Eq. (1.19) de Barenblatt (1996)):

$$a = f(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m).$$

As k variáveis $a_1, \ldots, a_k$ possuem entre si as k dimensões fundamentais da classe de sistemas de unidades na qual o fenômeno em questão é descrito. As variáveis restantes possuem dimensões *dependentes*, de tal forma que

$$\begin{aligned}[\![b_1]\!] &= [\![a_1]\!]^{p_1} \ldots [\![a_k]\!]^{r_1}, \\ &\vdots \\ [\![b_m]\!] &= [\![a_1]\!]^{p_m} \ldots [\![a_k]\!]^{r_m}.\end{aligned}$$

Teorema 1.2 Teorema dos Πs:

$$f(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m) = a_1^p \ldots a_k^r \Phi\left(\frac{b_1}{a_1^{p_1} \ldots a_k^{r_1}}, \ldots, \frac{b_m}{a_1^{p_m} \ldots a_k^{r_m}}\right). \tag{1.1}$$

Em suma:

> O Teorema dos Πs simplesmente afirma que as leis da Física não dependem do particular sistema de unidades utilizado.

Suponha agora que você queira analisar algum tipo de força F em um escoamento de um fluido com densidade (massa específica) ρ, viscosidade cinemática ν, velocidade U, comprimento D. Suponha também que o escoamento se dê, parcialmente ou não, sob a ação da gravidade, de maneira que você precisa também incluir a aceleração da gravidade g na sua lista. Em uma classe de sistemas MLT, a *matriz dimensional* será

	D	U	ρ	F	ν	g
M	0	0	1	1	0	0
L	1	1	−3	1	2	1
T	0	−1	0	−2	−1	−2

Note que, essencialmente, nós simplesmente adicionamos g à lista de variáveis que já existiam no Exemplo 2. Portanto, nós já temos os parâmetros adimensionais Π_1 e Π_2 daquele exemplo. Falta obter Π_3, apenas:

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= gD^a U^b \rho^c, \\
[\![\Pi_3]\!] &= \left[\mathsf{LT}^{-2}\right] [\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b \left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c, \\
1 &= \mathsf{M}^c \mathsf{L}^{1+a+b-3c} \mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}$$

Donde $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{gD}{U^2}.$$

Em Mecânica dos Fluidos o parâmetro adimensional usual é $1/\sqrt{\Pi_3}$, denominado *número de Froude*:

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gD}}.$$

O que o teorema dos Πs agora nos permite escrever é (compare com (1.1))

$$\frac{F}{\rho U^2 D^2} = \phi\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{gD}}\right).$$

Se o problema em questão for complicado demais para ser resolvido analitica ou numericamente, uma forma muito comum de ataque é a construção de um *modelo reduzido físico*. No modelo, mede-se tudo, ou seja:

$$F_m, \rho_m, U_m, D_m, \nu_m, g.$$

Enquanto isso, no protótipo nós devemos ter uma lista análoga,

$$F_p, \rho_p, U_p, D_p, \nu_p, g.$$

Agora, se nós desejarmos utilizar o *mesmo fuido* no modelo e no protótipo (exemplo: modelos reduzidos hidráulicos, utilizando água), devemos reescrever essas listas:

$$F_m, \rho, U_m, D_m, \nu, g.$$

e

$$F_p, \rho, U_p, D_p, \nu, g.$$

Como o fluido é o mesmo, observe que a massa específica ρ, e a viscosidade cinemática ν, são as mesmas em ambas as listas.

Nossa condição de similaridade para a construção do modelo agora é óbvia:

$$\frac{U_m D_m}{\nu} = \frac{U_p D_p}{\nu},$$
$$\frac{U_m^2}{g D_m} = \frac{U_p^2}{g D_p}.$$

Do ponto de vista de um projetista, nós conhecemos U_p e D_p. Queremos portanto calcular quem devem ser U_m e D_m no modelo que vamos construir, de tal forma que possamos medir F_m e, dessa forma, obter F_p. Como há duas equações acima, em princípio deveria ser possível obter U_m e D_m. Tentemos:

$$U_m = U_p \frac{D_p}{D_m},$$
$$U_p^2 \frac{D_p^2}{D_m^2} \frac{1}{D_m} = \frac{U_p^2}{D_p},$$
$$D_m^3 = D_p^3,$$
$$D_m = D_p \Rightarrow U_m = U_p.$$

Portanto: o único "modelo" possível é do mesmo tamanho que o protótipo, o que é uma impossibilidade prática. Os engenheiros hidráulicos que trabalham com modelos reduzidos costumam se referir a esse fato dizendo que é impossível obter "similaridade perfeita". De fato, é impossível construir um modelo *realmente* reduzido (ou seja: em uma escala menor) com o *mesmo fluido* (por exemplo água) que o protótipo, e que atenda ao mesmo tempo à igualdade dos parâmetros adimensionais "Número de Reynolds" e "Número de Froude".

1.4 – O significado de dimensão fundamental

Nem sempre as "dimensões fundamentais" de um problema são M, L, e T. Considere o caso da equação diferencial parcial de Boussinesq

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_s}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial h}{\partial x} \right], \tag{1.2}$$

que veremos com mais detalhe na seção 4.8, em um aquífero semi-infinito inicialmente cheio até a altura h_0 (mostrado na figura 4.18).

O domínio espacial é $0 \leq x < \infty$ e o domínio temporal é $t \geq 0$; Em (1.2), h é altura da superfície freática no aquífero, k_s é a condutividade hidráulica saturada, e n é a porosidade drenável. Detalhes sobre a física do escoamento em meios porosos podem ser encontrados em Brutsaert (2005) e Bear (1972). Aqui, basta observar que a dedução da equação de Boussinesq envolve a lei de Darcy para o fluxo específico ou velocidade média da água no solo, v_x, que é:

$$v_x = -k_s \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.3}$$

À primeira vista, as variáveis do problema e suas dimensões são:

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![t]\!] &= \mathsf{T}, \\
[\![h]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![h_0]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![k_s]\!] &= \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}, \\
[\![n]\!] &= 1.
\end{aligned}$$

Como n é adimensional, há 5 variáveis dimensionais, e 2 dimensões independentes, e portanto esperamos que haja 3 grupos adimensionais. A forma geral esperada da solução é $\Pi_3 = f(\Pi_1, \Pi_2)$; isso é compatível com a forma esperada da solução *dimensional* da equação diferencial parcial: $h = h(x, t)$.

Uma análise mais detalhada das hipóteses *físicas* envolvidas na dedução equação diferencial, entretanto, evidenciaria a hipótese de que o fluxo v_x é horizontal, como nós já antecipamos em (1.3). Além disso, os comprimentos horizontais do problema são muito maiores que os verticais. Isso sugere reescrever a lista de variáveis e suas dimensões:

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] &= \mathsf{X}, \\
[\![t]\!] &= \mathsf{T}, \\
[\![h]\!] &= \mathsf{Z}, \\
[\![h_0]\!] &= \mathsf{Z}, \\
[\![k_s]\!] &= \mathsf{X}^2\,\mathsf{Z}^{-1}\,\mathsf{T}^{-1}, \\
[\![n]\!] &= 1,
\end{aligned}$$

onde agora nós estamos supondo que comprimentos horizontais possuem uma dimensão (X) *diferente* da dimensão dos comprimentos verticais (que é Z).

As dimensões de k_s foram obtidas diretamente de (1.3):

$$\begin{aligned}
[\![v_x]\!] &= \left[\!\!\left[k_s \frac{\partial h}{\partial x} \right]\!\!\right], \\
[\![k_s]\!] &= [\![v_x]\!] \left[\!\!\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]\!\!\right]^{-1}, \\
&= \mathsf{X}\,\mathsf{T}^{-1}\mathsf{X}\,\mathsf{Z}^{-1} = \mathsf{X}^2\,\mathsf{Z}^{-1}\,\mathsf{T}^{-1}.
\end{aligned}$$

Isso sugere que há na verdade apenas 2 grupos adimensionais, e que a solução deve ser da forma $\Pi_1 = f(\Pi_2)$. Este é o tipo de solução que se obtém resolvendo-se uma equação diferencial *ordinária*. Talvez haja alguma forma de reduzir a equação diferencial parcial (1.2) a uma equação diferencial ordinária. E de fato há.

A única forma de adimensionalizar h é dividindo por h_0 ($\Pi_1 = h/h_0$). Portanto, a equação diferencial parcial pode primeiramente ser reescrita:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \frac{h}{h_0}}{\partial t} &= \frac{h_0 k_s}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h}{h_0} \frac{\partial \frac{h}{h_0}}{\partial x} \right] \\
\frac{\partial \Pi_1}{\partial t} &= D \frac{\partial}{\partial x} \left[\Pi_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

com $D = h_0 k_s / n$. As variáveis restantes, x, t e D, devem formar um grupo adimensional. É trivial verificar que ele é

$$\Pi_2 = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}.$$

Figura 1.2: Esquema de uma camada-limite convectiva.

O fator adimensional 4 é introduzido apenas para simplificar algumas operações algébricas. Na seção 4.8, nós veremos como podemos utilizar Π_2 para transformar (1.2) em

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right] + 2\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = 0,$$

onde $\xi = \Pi_2$ e $\phi = \Pi_1$. A solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) costuma ser bem mais simples que a de uma Equação Diferencial Parcial. Neste exemplo, a análise dimensional sugere uma simplificação significativa do problema.

Exercícios Propostos

1.1 (Langhaar, 1951): Uma estrela de densidade ρ e diâmetro D vibra com frequência n: a vibração consiste em uma mudança cíclica de forma, mudando de elipsóide alongado em uma direção para esfera para elipsóide alongado em outra direção, e assim sucessivamente. Supõe-se que as variáveis que regem o fenômeno são essas três mais a constante universal de gravitação G (lembre-se: a lei da gravitação universal de Newton é $|F| = GMm/r^2$). Obtenha todos os grupos adimensionais que regem o problema. Escolha *obrigatoriamente* D, n e ρ como variáveis que participam de todos os grupos.

1.2 A camada limite convectiva (CLC) é uma região da atmosfera que "cresce" ao longo do dia forçada pelo fluxo de calor entre a superfície e a atmosfera. Na CLC, a temperatura potencial Θ tem um perfil constante em z (veja a figura 1.2). As seguintes variáveis são importantes neste processo:

1. A altura h (m) da CLC.
2. A velocidade de atrito u_* ($\mathrm{m\,s^{-1}}$).
3. O fluxo cinemático de calor na superfície, $\overline{w\theta}|_0$ ($\mathrm{m\,s^{-1}K}$).
4. A temperatura média da CLC, Θ_m (K).
5. A sua taxa de crescimento $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$ ($\mathrm{m\,s^{-1}}$).
6. O fluxo cinemático de calor em $z = h$, $\overline{w\theta}|_i$ ($\mathrm{m\,s^{-1}K}$).
7. A aceleração da gravidade g ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)
8. O gradiente de temperatura potencial acima de h, $\gamma_\theta = \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}z$ ($\mathrm{K\,m^{-1}}$).

Ache todos os 5 parâmetros adimensionais que mandam no problema, obrigando as variáveis h, u_* e $\overline{w\theta}|_0$ a estarem potencialmente presentes em todos os grupos, e obrigando Π_1 a ser linear em Θ_m, Π_2 a ser linear em $\mathrm{d}h/dt$, Π_3 a ser linear em $\overline{w\theta}|_i$, Π_4 a ser linear em g, e Π_5 a ser linear em γ_θ.

1.3 Próximo da costa, uma onda de gravidade com comprimento L se propaga em uma região com profundidade d, a uma velocidade (celeridade da onda) c. Além dessas variáveis, apenas a aceleração da gravidade g é importante no fenômeno. Encontre todos os parâmetros adimensionais que governam esse problema.

1.4 Toda explosão consiste na liberação de uma certa quantidade de energia E (armazenada nas ligações químicas do explosivo, ou nos núcleos dos átomos, no caso de uma explosão nuclear) para o ambiente (para fixar idéias, considere que a explosão ocorre na atmosfera). A explosão consiste na propagação de uma onda esférica de pressão e densidade cujo raio depende do tempo: $R = R(t; \ldots)$. Dentro da onda, a pressão e a densidade são muito maiores que a pressão ambiente p, e a densidade do ar ambiente, ρ. Suponha que as 5 variáveis que "mandam" no problema sejam p, R, t, E, ρ. Obtenha os dois grupos adimensionais correspondentes, sendo que um deve conter p (com expoente 1), t, E, ρ; e o outro deve conter R (com expoente 1), t, E, ρ.

1.5 Em um trecho de rio de comprimento L com velocidade média constante U verifica-se uma descarga de esgoto a montante que produz uma concentração volumétrica de matéria orgânica $C_0(t)$ (após a diluição no rio), onde t é o tempo. Um engenheiro ambiental mede a concentração volumétrica de matéria orgânica no fim do trecho ao longo do tempo, $C_L(t)$, e pretende fazer uma análise dimensional com as variáveis C_0, C_L, L, U e t. As dimensões físicas em questão são a massa de matéria orgânica M, o comprimento L e o tempo T. Ele escolhe C_0, U e L para as variáveis que comparecerão em ambos os grupos adimensionais. Um dos grupos deve conter C_L, e o outro t. Encontre os grupos Π_1 e Π_2.

1.6 Uma lata de óleo de raio de base R e altura H tem um furo no fundo, de raio r. As razões r/R e R/H são fixas, de modo que basta uma dessas variáveis na análise do problema (vamos usar H). O óleo tem viscosidade cinemática ν ($[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$). Se o tempo de drenagem do óleo da lata é T_d, e considerando que (obviamente) a aceleração da gravidade g é importante, obtenha os 2 parâmetros adimensionais que governam o problema. As variáveis *comuns* aos dois parâmetros devem ser, obrigatoriamente, H e g.

1.7 Em um trecho de canal ou rio, verifica-se que a velocidade média na seção, V (LT^{-1}), depende das seguintes variáveis: um comprimento de rugosidade z_0 (L) das paredes e do fundo; a componente da aceleração da gravidade na direção do escoamento, $\approx gS_0$ (LT^{-2}); e o raio hidráulico R (L). S_0 é a declividade do canal, *e fica junto da aceleração da gravidade* g. Conforme indicado, elas devem ser consideradas *como uma única variável* gS_0. Há 4 variáveis e 2 dimensões, e portanto há 2 parâmetros adimensionais. Escolha gS_0 e R para comparecerem (possivelmente) em ambos, e obtenha Π_1 (envolvendo V) e Π_2 (envolvendo z_0).

1.8 A vazão volumétrica Q ($[\![Q]\!] = \mathsf{L}^3\,\mathsf{T}^{-1}$) em um vertedor depende de sua largura b, da *carga hidráulica* h (a altura da água a montante em relação à base do vertedor) e da aceleração da gravidade g. Encontre os dois grupos adimensionais governantes, sendo que um deve conter Q (com expoente 1) e o outro b (com expoente 1).

1.9 O estudo de perfis de vento na atmosfera próximo da superfície indica que a derivada da velocidade do vento médio, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, depende da distância da superfície z, da tensão média de cisalhamento do vento com a superfície τ, do fluxo de calor sensível H (que aquece a atmosfera a partir da superfície), do calor específico a pressão constante do ar c_p, da massa específica do ar ρ, e do "parâmetro de flutuabilidade" g/T, onde g é a aceleração da gravidade e T é a temperatura média do ar próximo da superfície. Essa lista pode ser significativamente reduzida definindo-se a velocidade de atrito u_* e a escala turbulenta de temperatura T_*:

$$u_* \equiv \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},$$

Figura 1.3: Camada-limite sobre uma placa.

$$H \equiv \rho c_p u_* T_*.$$

A lista de variáveis intervenientes torna-se então z, u_*, T_*, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, e g/T. Utilizando como variáveis comuns, *obrigatoriamente*, z, u_* e T_*, encontre os parâmetros adimensionais que regem o problema. *Note que uma das dimensões fundamentais que deve ser usada é a temperatura* Θ.

1.10 Um tanque de diâmetro D com fluido de massa específica ρ e viscosidade dinâmica μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\mathsf{T}^{-1}$) possui um agitador mecânico que opera com potência P e velocidade angular ω. Utilizando *obrigatoriamente* como variáveis comuns ρ, D e ω, obtenha os grupos adimensionais que regem o problema.

1.11 Langhaar (1951): Quando um explosivo é detonado debaixo d'água, ele se converte quase que instantaneamente em gás. A pressão inicial do gás é p_0. A explosão produz uma onda de choque esférica que se propaga (expandindo-se) pela água. Durante a propagação, o raio da R da esfera aumenta, e a pressão p do gás em seu interior diminui. A pressão p do gás durante a explosão depende das variáveis p_0, R, ρ (massa específica da água, cujas dimensões são $\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}$), κ_T (compressibilidade isotérmica da água) e da massa m de explosivo. Note que κ_T é definido por

$$\kappa_T \equiv \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right).$$

Há 3 dimensões fundamentais M, L e T, e 6 variáveis. Obtenha os 3 parâmetros adimensionais do problema, escolhendo *obrigatoriamente* p_0, R e ρ como variáveis em comum (no máximo) para os mesmos.

1.12 Quando um escoamento uniforme com velocidade U encontra uma placa de comprimento L, forma-se uma *camada-limite* (mostrada na figura 1.3), que é uma região em que a velocidade vai de zero na placa até U no limite superior da camada-limite. As variáveis de interesse do problema são a força *por unidade de largura* F da placa sobre o escoamento, a massa específica ρ do fluido, a viscosidade cinemática ν do fluido ($[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$), o comprimento L da placa, a espessura δ da camada-limite em $x = L$, e a velocidade não-perturbada U.

Utilizando como variáveis comuns (no máximo) ρ, U e L, obtenha os 3 grupos adimensionais do problema.

2

Revisão de variáveis complexas

O feijão-com-arroz das atividades que vamos desenvolver neste livro envolve a capacidade de operar com números complexos. De fato, muitos dos assuntos que abordaremos, tais como a solução de equações diferenciais, problemas matriciais ("existem autovalores reais para essa matriz? quantos?"), o cálculo de séries de Fourier, etc., fica *muito* mais fácil quando utilizamos números complexos. Por esse motivo, é imprescindível que as regras básicas de manipulação de números complexos — a álgebra dos números complexos — sejam bem compreendidas por você. Este capítulo é uma breve revisão. Aspectos mais sofisticados, como o *cálculo* com funções complexas, são deixados para depois.

2.1 – Números complexos

Números complexos são criaturas do tipo

$$z = x + \mathrm{i}y$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$, e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ (nós adotamos a convenção de escrever $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ — em tipo romano, e não $i = \sqrt{-1}$ — em tipo itálico; dessa forma, nós enfatizamos, dentro das equações, o número imaginário i; o problema, como você pode notar, é que no texto ele fica confundido com a vogal 'i'; da mesma forma, nós adotaremos para a base dos logaritmos naturais o símbolo 'e' — em tipo romano, em lugar de e — em tipo itálico, com o mesmo problema). A motivação mais óbvia para a introdução de números complexos é a equação do 2º grau, embora historicamente os números complexos tenham aparecido no contexto das tentativas de se obter as raízes de equações do 3º grau! (para mais detalhes, veja Garbi (1997).)

Vamos então considerar um exemplo com a equação do 2º grau, que é mais fácil e nos leva mais diretamente à motivação de utilizar números complexos. Seja a equação do 2º grau

$$x^2 - 4x + 13 = 0;$$

usando a fórmula para as raízes da equação do 2º grau, elas são

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

A idéia é operar "um pouco mais" essa expressão como se $\sqrt{-1}$ fosse um número válido:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \times -1} = \sqrt{36} \times \sqrt{-1} = 6\sqrt{-1} = 6\mathrm{i}.$$

Vale a regra

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Figura 2.1: Interpretação geométrica de um número complexo.

Em outras palavras, as raízes da equação

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

são

$$z_{1,2} = 2 \pm 3\mathrm{i}.$$

Vemos então uma primeira grande vantagem dos números complexos: com sua introdução, *toda* equação polinomial possui sempre n raízes complexas (esse é o Teorema Fundamental da Álgebra: veja Courant e Robbins (1941)).

A *parte real* de z é x; a *parte imaginária* de z é y:

$$x = \operatorname{Re} z; \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Ambos são números reais.

O módulo de um número complexo z,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

é a distância r do ponto do plano que o representa até a origem. Não é muito difícil escrever

$$x + \mathrm{i}y = \sqrt{x^2 + y^2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\mathrm{i}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] = r\left[\cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)\right].$$

Essa última expressão é a *forma polar* de um número complexo, muitas vezes abreviada para

$$z = r\operatorname{cis}(\theta).$$

Números complexos possuem uma interpretação geométrica simples, como vetores de $\mathbb{R}^2$: veja a figura 2.1.

2.2 – Conjugado de um número complexo

Definição 2.1 O conjugado do número complexo

$$z = x + \mathrm{i}y$$

é

$$z^* = x - \mathrm{i}y.$$

O conjugado complexo obedece às seguintes propriedades:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \tag{2.1}$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*. \tag{2.2}$$

Por meio do *Princípio da Indução Finita*, essas propriedades generalizam-se para

$$\left[\sum_{i=1}^{n} z_i\right]^* = \sum_{i=1}^{n} z_i^*, \tag{2.3}$$
$$\left[\prod_{i=1}^{n} z_i\right]^* = \prod_{i=1}^{n} z_i^*. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.1 Provemos (2.2):
Se

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1,$$
$$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2,$$

então

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1); \\ (z_1 z_2)^* &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z_1^* z_2^* &= (x_1 - \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 x_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2) - \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (z_1 z_2)^* \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 O Princípio da Indução Finita consiste no seguinte: supõe-se que uma certa relação, que sempre depende de um número natural n, vale para n, e prova-se então que ela também vale para $n + 1$. Em seguida, *verificamos* que a relação vale para $n = 1$ (ou $n = 0$); consequentemente, concluímos que ela é válida para todo n. Suponha então que (2.4) valha para $n - 1$, e faça

$$z_a = \prod_{i=1}^{n-1} z_i,$$

$$z_b = z_{i+1}.$$

Segue-se de (2.2) (com z_a no lugar de z_1, e z_b no lugar de z_2) que

$$\begin{aligned}\left[\prod_{i=1}^{n} z_i\right]^* &= \left[\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) z_i\right]^* \\ &= (z_a z_b)^* \\ &= z_a^* z_b^*;\end{aligned}$$

a hipótese de que (2.4) vale para $n-1$ agora leva a

$$\begin{aligned}z_a^* &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} z_i\right]^* \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} z_i^*.\end{aligned}$$

Continuando,

$$\begin{aligned}\left[\prod_{i=1}^{n} z_i\right]^* &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} z_i^*\right] z_{i+1}^* \\ &= \left[\prod_{i=1}^{n} z_i^*\right].\end{aligned}$$

Mas (2.4) vale trivialmente para $n = 1$, o que completa a prova ■

Exemplo 2.3 Reescreva

$$z = \frac{1-2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$$

tornando o denominador puramente real.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}z &= \frac{1-2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} \times \frac{1-3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} \\ &= \frac{1-2\mathrm{i}-3\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{1-9\mathrm{i}^2} \\ &= \frac{-5-5\mathrm{i}}{10} = -\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) \ ■\end{aligned}$$

Exemplo 2.4 Dois números complexos são $z_1 = 2\pi\mathrm{i}$ e $z_2 = -\mathrm{i}/2$; calcule $z_1 z_2$.

SOLUÇÃO

$$z_1 z_2 = 2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i}/2) = -\pi\mathrm{i}^2 = \pi \ ■$$

Exercícios Propostos

2.1 Se $z = 3 + 2\mathrm{i}$, calcule z^*.

2.2 Calcule:

a) $(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^*$

b) $(3+2\mathrm{i})/(4-\mathrm{i})$

c) $|1+(3/2)\mathrm{i}|$

2.3 Mostre que $z^{-1} = z^*/|z|^2$.

2.3 – A fórmula de de Moivre

A fórmula de de Moivre é

$$[\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)]^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.5}$$

Ela pode ser provada para $n \in \mathbb{N}$ (n natural) e para $n \in \mathbb{Z}$ (n inteiro) como se segue.

n natural ($n \in \mathbb{N}$): (2.5) pode ser provada por indução. Note que (2.5) vale para $n = 0$, desde que nós aceitemos por definição que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^0 = 1. \tag{2.6}$$

Suponha agora que (2.5) valha para n; então

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^n(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ &= (\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta))(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)) \\ &= [\cos(n\theta)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)] + \\ &\quad \mathrm{i}\,[\mathrm{sen}(n\theta)\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)\cos(n\theta)] \\ &= \cos((n+1)\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}((n+1)\theta).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto, se (2.5) vale para n, vale também para $n+1$. Como sua validade para $n = 0$ ficou estabelecida, (2.5) está provada (para $n \in \mathbb{N}$). Definindo-se uma notação mais compacta,

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta) \equiv \mathrm{cis}(\theta), \tag{2.8}$$

a fórmula de de Moivre é

$$[\mathrm{cis}(\theta)]^n = \mathrm{cis}(n\theta). \tag{2.9}$$

A fórmula de de Moivre permite-nos calcular as n-ésimas raízes de um número complexo. Seja $z = r\,\mathrm{cis}\,\alpha \in \mathbb{C}$, onde $r \in \mathbb{R}$. As raízes n-ésimas de z são

$$w_k = r^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.10}$$

De fato,

$$\begin{aligned}w_k^n &= \left[r^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]^n \\ &= r\,\mathrm{cis}\left(n\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \\ &= r\,\mathrm{cis}(\alpha + 2k\pi) = r\,\mathrm{cis}\,\alpha = z \;\blacksquare\end{aligned} \tag{2.11}$$

n inteiro ($n \in \mathbb{Z}$): A fórmula de de Moivre pode ser facilmente estendida para $n < 0$. Sabemos que ela vale para $n = 0$; suponha agora que ela valha para um $n < 0$ qualquer. Então,

$$\begin{aligned}
(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^{n-1} &= \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^n}{\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)} \\
&= \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^n(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))}{(\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))} \\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta))^n(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)) \\
&= (\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta))(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)) \\
&= [\cos(n\theta)\cos(\theta) + \mathrm{sen}(n\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)] + \qquad (2.12) \\
&\quad \mathrm{i}\,[\mathrm{sen}(n\theta)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\cos(n\theta)] \\
&= \cos((n-1)\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}((n-1)\theta). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Portanto, se (2.5) vale para $n \in \mathbb{Z}$, ela também vale para $n \pm 1$, e como ela vale para $n = 0$ está provado por indução que ela vale para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.5 Calcule $[\sqrt{2}/2(1+i)]^5$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2}/2(1+i) \\
&= 1\,\mathrm{cis}(\pi/4); \\
z^5 &= 1^5\,\mathrm{cis}(5\pi/4) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

2.4 – A fórmula de Euler

A esta altura não podemos mais postergar a

Teorema 2.1 (Fórmula de Euler)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta). \qquad (2.14)$$

A "prova" que vamos fornecer é a mesma que foi dada por Euler, e não é realmente uma prova! Ela se baseia em supor que vale a fórmula de Taylor

$$\mathrm{e}^z = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (2.15)$$

para qualquer número complexo z. O problema dessa "prova" é que nós não estabelecemos ainda a validade de séries de Taylor para funções complexas. Na verdade, nós nem começamos ainda a falar de *funções complexas* (Courant e Robbins, 1941)! Prosseguindo formalmente[1], entretanto, e fazendo $z = \mathrm{i}\theta$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 + \frac{\mathrm{i}\theta}{1!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^5}{5!} + \ldots$$

[1]Como comenta, de forma definitiva, Greenberg (1978), "formalmente" significa, na verdade, informalmente! "prosseguir formalmente" significa prosseguir supondo que as manipulações algébricas *valem*. Os objetos sobre os quais operamos, entretanto, podem ou não permitir essa liberdade. Prosseguimos, e verificamos se ao fim os resultados estão corretos (ou não!).

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
&= \underbrace{\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right]}_{\cos(\theta)} + i\underbrace{\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right]}_{\operatorname{sen}(\theta)}
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

A rearrumação da ordem dos termos e a fatoração de $i = \sqrt{-1}$ feitas acima são operações válidas para *séries de potências* — mas não para séries em geral! As manipulações que levaram Euler à sua fórmula não seriam mais aceitáveis hoje em dia sem demonstração rigorosa de sua validade.

É evidente que a fórmula de Euler (2.14) *generaliza* a fórmula de de Moivre (2.5) para $n \notin \mathbb{Z}$. De fato, se $z = r \operatorname{cis} \theta$ e $n \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
z^n &= [r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))]^n \\
&= [re^{i\theta}]^n \\
&= r^n e^{in\theta} \\
&= r^n \operatorname{cis}(n\theta) \blacksquare
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Na prática, portanto, é preferível usar diretamente a fórmula de Euler em todas as situações.

Exemplo 2.6 Calcule $(-1)^\pi$

SOLUÇÃO

$$
\begin{aligned}
(-1)^\pi &= \left(e^{(i\pi)}\right)^\pi \\
&= e^{i\pi^2} \\
&= \cos(\pi^2) + i \operatorname{sen}(\pi^2) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios Propostos

2.4 Calcule i^i.

2.5 Calcule todos os valores possíveis z_n de $(1+i)^{1/7}$. Dê sua resposta na forma $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, onde os $r_n s$ e $\theta_n s$ devem ser explicitados.

2.6 Matrizes $[A_{ij}]$ do tipo $A_{ji} = A_{ij}^*$ são chamadas de *matrizes hermitianas*. Calcule o determinante das matrizes hermitianas:

a)

$$
\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}
$$

b)

$$
\begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 3+i \\ 2-i & 1+i & 4+i \\ 3-i & 4-i & 1+i \end{bmatrix}
$$

2.7 Usando a fórmula clássica da série de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

mostre que a série de Taylor de $f(z) = 1/(z+i)$ em torno de $z = i$ é

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{z-\mathrm{i}}{4} + \frac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^2}{8} - \frac{(z-\mathrm{i})^3}{16} - \frac{\mathrm{i}(z-i)^4}{32} + \dots$$

(basta chegar até a quarta potência).

2.5 – Desigualdades

Desigualdades são muito importantes: por exemplo, para o cálculo de integrais de contorno, e muitas vezes simplesmente para avaliar o tamanho de uma determinada expressão na análise de um problema de física-química-biologia. Agora, se $w = x + \mathrm{i}y$, é óbvio que

$$x = \operatorname{Re} w \le |w| = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2.18}$$

Em seguida, observe que

$$z_1^* z_2 + z_1 z_2^* = (z_1^* z_2) + (z_1^* z_2)^* = 2\operatorname{Re}(z_1^* z_2) \le 2|z_1^* z_2| = 2|z_1^*||z_2| = 2|z_1||z_2|. \tag{2.19}$$

Seja agora

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)^*(z_1+z_2) \\ &= z_1^* z_1 + z_2^* z_2 + z_1^* z_2 + z_1 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1^* z_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2; \end{aligned}$$

extraindo a raiz,

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2| \ \blacksquare \tag{2.20}$$

Esta é a famosa, e importantíssima, *desigualdade do triângulo*.

Agora,

$$\begin{aligned} |z_1| = |(z_1-z_2)+z_2| \le |z_1-z_2| + |z_2| \Rightarrow \\ |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|; \end{aligned}$$

por simetria,

$$\begin{aligned} |z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \Rightarrow \\ ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \ \blacksquare \end{aligned} \tag{2.21}$$

Finalmente, fazendo-se $z_3 = -z_2$, obtém-se

$$||z_1| - |z_3|| \le |z_1 + z_3| \ \blacksquare \tag{2.22}$$

Novamente, pelo Princípio da Indução Finita, teremos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i|. \tag{2.23}$$

Não vamos provar, mas a extensão para integrais é óbvia:

$$\left|\int_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\mathscr{L}} \left|f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \tag{2.24}$$

Mas em (2.24) nós nos adiantamos demais. Nós não definimos ainda o significado de integrais no plano complexo, ao longo de um caminho $\mathscr{L}$.

2.6 – Álgebra com números complexos

Neste capítulo, nós não vamos ver — ainda — o Cálculo com números complexos, ou seja: funções complexas de números complexos, suas séries, suas derivadas e suas integrais. A exceção foi a fórmula de Euler, (2.14), que é *tão* útil que não pode esperar!

Mas nós podemos e devemos entender algo essencial a respeito de números complexos:

> *A álgebra dos números complexos é exatamente a mesma dos números reais.*

Existe uma coisa, apenas uma coisa, que os números complexos não "herdam" dos reais: as relações de ordem. Nós podemos dizer que $1 < 4$, e que $-4 < -2$, quando essas quantidades indicam claramente números reais. Mas nós não podemos dizer nada a respeito de quem é maior: 1, i, ou $\sqrt{2}/\big(2(1+\mathrm{i})\big)$.

O motivo pelo qual nós não podemos comparar dois números complexos para decidir qual deles é o maior, e qual é o menor, é que existem infinitas direções a partir de $(0,0)$ ao longo das quais podemos "andar" no plano complexo.

Mesmo assim, nós ainda vamos precisar saber se dois números complexos estão "próximos" um do outro; nós vamos precisar calcular limites e decidir se uma série de números complexos "converge" para uma valor complexo, calcular derivadas, etc.. Todas as manipulações que faremos desses conceitos precisarão ser feitas com os *módulos* de números complexos. Como os módulos são eles mesmos números reais, nós podemos compará-los. Por exemplo:

Definição 2.2 (Limite de uma quantidade complexa). Dizemos que $z \to z_0$ (ou que o limite de z é z_0) quando

$$\lim_{z\to z_0} |z - z_0| = 0.$$

Como já vimos acima no Exemplo 2.6, a fórmula de Euler (2.14) costuma ser de grande ajuda para manipulações algébricas. Um pouco de treino:

Exemplo 2.7 Calcule

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x$$

com o auxílio de números complexos e da fórmula de Euler.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-1)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\mathrm{i}a-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-1)x}\,(\mathrm{i}a-1)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{\mathrm{i}a-1}\left[\mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-1)\infty} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-1)0}\right] \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1}{1-\mathrm{i}a} \\
&= \mathrm{Re}\,\frac{1+\mathrm{i}a}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Detalhe: $\lim_{x\to\infty} e^{iax}$ não existe! (Por quê?) Porém,

$$\begin{aligned} e^{(ia-1)\infty} &= \lim_{x\to\infty} e^{(ia-1)x} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{iax} = 0, \end{aligned}$$

pois o fator e^{-x} anula, à medida que x cresce, as oscilações de e^{iax}.

A fórmula de Euler é particularmente útil para lidar com identidades trigonométricas. Considere o seguinte:

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib}; \\ \cos(a+b) + i\,\mathrm{sen}(a+b) &= [\cos(a) + i\,\mathrm{sen}(a)]\,[\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)]\,; \\ \cos(a+b) + i\,\mathrm{sen}(a+b) &= \ [\cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)] \\ &\quad + i\,[\mathrm{sen}(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(b)\cos(a)]\,; \end{aligned}$$

você consegue ver as identidades trigonométricas para o cosseno e o seno da soma?

Ela também é muito útil para lidar com as *funções hiperbólicas*

$$\cosh(x) \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{2.25}$$

$$\mathrm{senh}(x) \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{2.26}$$

que se lê "cosseno hiperbólico" e "seno hiperbólico", respectivamente. Essas funções estão mostradas na figura 2.2. Note que o cosseno hiperbólico é uma função par e tem um mínimo em $x = 0$: $\cosh(0) = 1$; o seno hiperbólico é uma função ímpar.[2]

Segue-se que

$$\cosh(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x); \tag{2.27}$$

$$\mathrm{senh}(ix) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = i\,\mathrm{sen}(x). \tag{2.28}$$

Substituindo x por $-ix$ nas equações acima,

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \cos(-ix) = \cos(ix); \\ \mathrm{senh}(x) &= i\,\mathrm{sen}(-ix) = -i\,\mathrm{sen}(ix). \end{aligned}$$

As funções hiperbólicas possuem sua própria trigonometria (a trigonometria hiperbólica), e suas identidades trigonométricas. Das equações acima,

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \mathrm{senh}^2(x) &= \cos^2(ix) - (i\,\mathrm{sen}(ix))^2 \\ &= \cos^2(ix) - i^2\,\mathrm{sen}^2(ix) = 1 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Observe que nas manipulações acima nós supusemos que *existem* coisas do tipo $\mathrm{sen}(ix)$, ou seja: que as funções trigonométricas se *estendem*, naturalmente, para os complexos. Por exemplo, nós acabamos de supor, acima, que vale a identidade

$$\cos^2(ix) + \mathrm{sen}^2(ix) = 1$$

para qualquer x, real ou complexo. Isso é a mesma coisa que foi preciso fazer, no fundo, para dar sentido à expressão $e^{i\theta}$, e no contexto em que estamos trabalhando é aceitável. Conforme mencionamos acima, dar rigor a essas afirmações requer o desenvolvimento de Análise Complexa. Nós vamos simplesmente admitir que essas idéias funcionam (e, de fato, elas funcionam, como pode ser mostrado rigorosamente), e usá-las sempre que isso for conveniente.

[2] Se você não se lembra do significado de "função par" e "função ímpar", veja as definições na seção 15.5 antes de prosseguir.

Figura 2.2: Funções hiperbólicas: $\cosh(x)$ e $\operatorname{senh}(x)$.

Exercícios Propostos

2.8 Calcule a identidade trigonométrica para $\cos(a+b+c)$.

2.9 Use a fórmula de Euler para calcular

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.10 Utilizando *obrigatoriamente* a fórmula de Euler, calcule

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$$

para $a > 0$, $b > 0$.

2.11 Mostre que

$$x > \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0,$$

ou seja: que não é possível encontrar nenhum $x > 0$ tal que

$$x = \operatorname{tgh}(x).$$

Sugestão: mostre que

$$\begin{aligned} E(x) &= x - \operatorname{tgh}(x) \\ &= \frac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as séries de Taylor

$$\begin{aligned} x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

encontre a expressão para a_{2n+1} em

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

(atenção para o início do somatório em $n = 1$: por quê?) Qual é o sinal de a_{2n+1} na expressão acima? Qual é o sinal de $E(x)$? Por que isso prova que $x > \operatorname{tgh}(x)$ para $x > 0$?

3

Ferramentas computacionais

Neste capítulo nós fazemos uma introdução muito rápida a duas ferramentas computacionais.

Python é uma *linguagem de programação*, razoavelmente clássica, e da qual nós vamos explorar apenas uma parte chamada de *programação procedural*. A escolha de Python deve-se ao fato de ela ser uma linguagem fácil de aprender, e de existirem muitas *bibliotecas* de rotinas em Python que tornam muitas das tarefas de Matemática Aplicada fáceis de implementar em um computador.

Maxima é uma linguagem de processamento simbólico. Da mesma maneira que nós faremos contas com Python, nós faremos *álgebra* com Maxima. Os usos que faremos de Maxima estarão longe de explorar todo o seu potencial. Nós vamos apenas calcular algumas integrais, algumas séries de Taylor, e resolver algumas equações diferenciais ordinárias; entretanto, a rapidez com que faremos isso justifica amplamente o seu uso.

Este texto utiliza Python 3.x, e isso é enfatizado na primeira linha dos arquivos-fonte de Python utilizados, onde se usa `#!/usr/bin/python3`.

3.1 – Antes de começar a trabalhar,

Você precisará de algumas condições de "funcionamento". Eis os requisitos fundamentais:

1) Saber que sistema operacional você está usando.

2) Saber usar a linha de comando, ou "terminal", onde você datilografa comandos que são em seguida executados.

3) Saber usar um *editor* de texto.

4) Certificar-se de que você tem Python instalado.

5) Certificar-se de que você tem Numpy (um módulo de Python que deve ser instalado à parte, e que vamos utilizar seguidamente) instalado.

6) Certificar-se de que você tem Maxima instalada.

Atenção! Um editor de texto não é um processador de texto. Um editor de texto não produz letras de diferentes tamanhos, não cria tabelas, e não insere figuras. Um editor de texto reproduz o texto que você datilografa, em geral com um tipo de largura constante para que as colunas e espaços fiquem bem claros. Um editor de texto que "vem" com Windows chama-se *notepad*, ou *bloco de notas* nas versões em Português; um excelente substituto chama-se *notepad*++ (https:

//notepad-plus-plus.org). Em Linux, editores de texto simples são o *gedit* (http://projects.gnome.org/gedit/) — que também funciona muito bem em Windows, e o *kate*. Programadores mais experientes costumam preferir o *vim*, ou o *Emacs*. Esses dois últimos possuem versões para os 3 sistemas operacionais mais comuns hoje em dia: Windows, Linux e Mac OS X.

Quando você estiver praticando o uso das ferramentas computacionais descritas neste texto, suas tarefas invariavelmente serão:

1) Criar o arquivo com o programa em Python, ou Maxima, usando o editor de texto, e salvá-lo.

2) Ir para a linha de comando.

3) Executar o programa digitando o seu nome (*e não clicando!*), possivelmente precedido por `python` ou `maxima`.

4) Verificar se o resultado está correto.

5) Se houver erros, voltar para 1), e reiniciar o processo.

Neste texto, eu vou partir do princípio de que todas essas condições estão cumpridas por você, mas não vou detalhá-las mais: em geral, sistemas operacionais, editores de texto e ambientes de programação variam com o gosto do freguês: escolha os seus preferidos, e bom trabalho!

Exercícios Propostos

3.1 Você já devia estar esperando por isto: o que é um sistema operacional? Qual é o sistema operacional que você usa?

3.2 Como saber se Python está instalado?

3.2 – Python

Python reconhece os seguintes tipos "básicos" de variáveis: *strings*, números inteiros, números de ponto flutuante, e números complexos.

Strings e Inteiros

Strings, ou cadeias de caracteres, são criaturas do tipo `'abacaxi'`, e números inteiros são criaturas do tipo `-1`, `0`, e `32767`. O *tipo* das strings que vamos usar chama-se `str` em Python 3.x. O tipo dos números inteiros chama-se `int` em Python.

A listagem 3.1 mostra o conteúdo do arquivo `binint.py` com alguns exemplos simples do uso de inteiros e *strings*. A legenda de cada listagem se inicia sempre com o nome do arquivo correspondente. A listagem é um retrato fiel do arquivo, com duas exceções: as *palavras reservadas* de Python estão sublinhadas na listagem (mas não no arquivo), e os espaços em branco *dentro das strings* estão enfatizados pelo símbolo ␣.

Atenção: os números que aparecem à esquerda da listagem não fazem parte do arquivo. Em Python, um comentário inicia-se com `#`, e prossegue até o fim de linha. A maior parte dos comandos de `binint.py` está explicada nos próprios comentários. Alguns comentários (sem intenção de trocadilho) adicionais, por linha, são os seguintes:

Listagem 3.1: `binint.py` — Exemplo de *strings*, e inteiros.

```
1  #!/usr/bin/python3
2  a = 'açafrão'            # a é uma string
3  print(a)                 # imprime a na tela
4  print(len(a))            # imprime o número de caracteres de a
5  i = 2**32 - 1            # i é o maior int s/sinal que cabe em 32 bits
6  b = str(i)               # converte i à string correspondente b
7  print(b)                 # imprime b na tela
8  print('---␣a:')          # separa a saída do primeiro for
9  for c in a:              # p/ cada c de a, imprime seu valor unicode
10    print('ord(', c, ')␣=␣', ord(c))
11 print('---␣b:')          # separa a saída do segundo for
12 for c in b:              # p/ cada c de b, imprime seu valor unicode
13    print('ord(', c, ')␣=␣', ord(c))
14 print(chr(227))          # imprime o caractere unicode no 227
```

1 Esse comentário especial torna o arquivo executável em Linux. O caminho `/usr/bin/python3` pode variar com a instalação, e mais ainda com o sistema operacional. Veja o comentário sobre as versões de Python na página 44.

5 O operador `**` significa exponenciação. Nesta linha, a variável `i` torna-se um `int`, e recebe o valor $2^{32} - 1$. Esse é o maior valor *sem sinal* que um inteiro pode assumir, já que o maior inteiro que cabe em 32 bits é

$$\begin{aligned} &11111111111111111111111111111111 \text{ (binário)} = \\ &\quad 1 \times 2^{31} + 1 \times 2^{30} + 1 \times 2^{29} + \ldots + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = \\ &\qquad\qquad 4294967295 \text{ (decimal)} . \end{aligned}$$

9–10 O comando `for` percorre em ordem um objeto *iterável* (no caso, a *string* `'açafrão'` é iterável, com `a[0] == 'a'`, `a[1] == 'ç'`, etc.). O *corpo* do `for` *tem que ser indentado*, e na listagem a indentação é de 3 espaços[1]. Dessa forma, no caso da linha 11, o comando

[`print('ord(',c,') = ', ord(c))`]

é executado 7 vezes, uma para cada caractere de `a`. A volta à indentação anterior na linha 12 define o fim do `for`. Note que os colchetes acima *não fazem parte do comando*; eles apenas o delimitam, como se fossem aspas.

Vamos agora à saída do programa `binint.py`:

```
açafrão
7
4294967295
--- a:
ord( a ) =  97
ord( ç ) =  231
ord( a ) =  97
ord( f ) =  102
ord( r ) =  114
ord( ã ) =  227
ord( o ) =  111
--- b:
ord( 4 ) =  52
ord( 2 ) =  50
ord( 9 ) =  57
```

[1]Em Python, o número de espaços usados para a indentação não é fixo, podendo ser escolhido pelo usuário. Porém, uma vez feita sua escolha, seja consistente. Neste texto, nós sempre usaremos 3 espaços.

Listagem 3.2: `floats.py` — Exemplo de uso de `float` e `complex`.

```
#!/usr/bin/python3
from math import pi, e, sin          # pi, e, e seno
from cmath import sin as csin        # o seno de um número complexo vem
                                     # com outro nome, para não
                                     # confundir
from cmath import sqrt as csqrt      # a raiz quadrada de um número
                                     # complexo vem com outro nome, para
                                     # não confundir
print('pi␣=␣',pi)                    # imprime o valor de pi
print('e␣␣=␣',e)                     # imprime o valor de e
print('sen(pi/2)␣=␣',sin(pi/2))      # imprime sen(pi/2)
i = csqrt(-1.0)                      # neste programa, i == sqrt(-1)
print('sen(i)␣␣␣␣=␣',csin(i))        # imprime sen(i)
```

```
ord( 4 ) =  52
ord( 9 ) =  57
ord( 6 ) =  54
ord( 7 ) =  55
ord( 2 ) =  50
ord( 9 ) =  57
ord( 5 ) =  53
ã
```

`print` imprime com o formato apropriado inteiros e *strings* (e muito mais: quase tudo, de alguma forma!). O maior inteiro que cabe em 32 bits sem sinal é 4294967295 (como já vimos acima). A posição do caractere `a` na tabela *Unicode*[2] é 97; a posição do caractere `ç` é 231; a posição do caractere 4 é 52. Finalmente, o caractere *Unicode* de número 227 é o `ã`.

Se você estiver vendo uma saída diferente da mostrada acima, com caracteres estranhos, não se assuste (demais): o seu arquivo `binint.py` e o terminal dentro do qual você está executando este programa certamente estão utilizando codificações diferentes (veja se o apêndice D.1 pode ajudar).

Números de ponto flutuante "reais" e "complexos"

Em primeiro lugar, um esclarecimento: no computador, não é possível representar todos os números $x \in \mathbb{R}$ do conjunto dos reais, mas apenas um *subconjunto* dos racionais $\mathbb{Q}$. Linguagens de programação mais antigas, como FORTRAN, ALGOL e PASCAL, mesmo assim chamavam esses tipos de `REAL`. A partir da linguagem de programação "C", e continuando com Python, em muitas linguagens passou-se a usar o nome mais adequado `float`.

Python vem com uma grande quantidade de *módulos* predefinidos, e você pode adicionar seus próprios módulos. Deles, importam-se variáveis e funções (e outras coisas) úteis. Nosso primeiro exemplo do uso de números de ponto flutuante (`float`) e "complexos" (`complex`) não podia ser mais simples, na listagem 3.2

Eis a saída de `floats.py`:

```
pi =  3.14159265359
e  =  2.71828182846
sen(pi/2) =  1.0
sen(i)    =  1.17520119364j
```

Os comentários importantes seguem-se. Lembre-se de que na maioria dos casos você está vendo *aproximações racionais* de números reais, e que o computador não pode lidar com todos os números reais.

[2] veja https://pt.wikipedia.org/wiki/Unicode

Como era de se esperar, $\text{sen}(\pi/2) = 1$. Por outro lado, o seno de i é um número "puramente imaginário"[3], e vale $\approx$ 1,17520119364i. Note que Python usa a letra `j` para indicar um valor imaginário (e não `i`). Na linha 12, eu "forcei a barra", e criei a variável que, em notação matemática se escreveria $\text{i} = \sqrt{-1}$. Mas eu *também* poderia ter simplesmente eliminado essa linha, e substituído a linha 13 por

[`print('sen(i) = ',csin(1j))`] .

Note que existem *dois* módulos, `math` e `cmath`, para variáveis "reais" e "complexas", respectivamente. Em *ambos*, existe uma função denominada `sin`, que calcula o seno. Para poder usar essas duas funções *diferentes* em meu programa `floats.py`, eu *rebatizei* a função `sin` complexa de `csin`, no ato da importação do módulo, com o mecanismo `from ... import ... as ...` (linha 3). Idem para `csqrt`.

Exercícios Propostos

3.3 Usando Python, converta 7777 da base 10 para a base 2. Sugestão: estude a documentação em `www.python.org`, e encontre a rotina pré-definida (*built-in*) que faz isso.

3.4 Como se faz para concatenar as strings `"bom"` e `"demais"`?

Obtenção de uma curva de permanência

Uma função distribuição acumulada (FDA) de probabilidade é uma função que nos informa qual é a probabilidade de que uma variável aleatória Q assuma um valor menor ou igual que um certo "nível" q. Os valores de Q variam de experimento para experimento. Por exemplo, se Q é a vazão máxima diária em um rio em um ano qualquer, o valor observado de Q varia de ano para ano.

A tabela 3.1 dá os valores da vazão máxima anual para o Rio dos Patos, PR, estação ANA (Agência Nacional de Águas do Brasil) 64620000, entre 1931 e 1999.

Provavelmente, a maneira mais simples de se *estimar* uma FDA a partir de um conjunto de dados é supor que os dados representam a totalidade das possibilidades, e que as observações são equiprováveis (em analogia com os 6 únicos resultados possíveis do lançamento de um dado não-viciado). No caso da tabela 3.1, se q_i é a vazão máxima do i-ésimo ano, teríamos que a probabilidade de ocorrência de q_i é

$$P\{Q = q_i\} = \frac{1}{n}, \tag{3.1}$$

onde n é o número de observações. Mas a FDA *por definição* é

$$F(q) = P\{Q \leq q\}. \tag{3.2}$$

Para obtê-la, é preciso considerar os valores iguais ou menores que o valor de corte q. Portanto, nós devemos primeiro *ordenar* os $q_i s$ de tal maneira que

$$q_0 \leq q_1 \leq \ldots \leq q_{n-1}.$$

Note que a ordenação não altera (3.1). Após a ordenação, o cálculo de $F(q_i)$ é trivial:

$$F(q_i) = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{n} = \frac{i+1}{n}. \tag{3.3}$$

$F(q_i)$ em (3.3) é chamada de distribuição acumulada *empírica* de probabilidade. Em Hidrologia, muitas vezes (3.3) é denominada *curva de permanência*. O resultado

[3] Ou seja: com parte real nula.

Tabela 3.1: Vazões Máximas Anuais ($m^3\,s^{-1}$) no Rio dos Patos, PR, 1931–1999

Ano	Vaz Máx	Ano	Vaz Máx	Ano	Vaz Máx	Ano	Vaz Máx
1931	272.00	1951	266.00	1971	188.00	1991	131.00
1932	278.00	1952	192.10	1972	198.00	1992	660.00
1933	61.60	1953	131.80	1973	252.50	1993	333.00
1934	178.30	1954	281.00	1974	119.00	1994	128.00
1935	272.00	1955	311.50	1975	172.00	1995	472.00
1936	133.40	1956	156.20	1976	174.00	1996	196.00
1937	380.00	1957	399.50	1977	75.40	1997	247.50
1938	272.00	1958	152.10	1978	146.80	1998	451.00
1939	251.00	1959	127.00	1979	222.00	1999	486.00
1940	56.10	1960	176.00	1980	182.00		
1941	171.60	1961	257.00	1981	134.00		
1942	169.40	1962	133.40	1982	275.00		
1943	135.00	1963	248.00	1983	528.00		
1944	146.40	1964	211.00	1984	190.00		
1945	299.00	1965	208.60	1985	245.00		
1946	206.20	1966	152.00	1986	146.80		
1947	243.00	1967	92.75	1987	333.00		
1948	223.00	1968	125.00	1988	255.00		
1949	68.40	1969	135.60	1989	226.00		
1950	165.00	1970	202.00	1990	275.00		

Listagem 3.3: `patos-medmax.dat` — Vazões média e máxima anuais, Rio dos Patos

```
1931    21.57   272.00
1932    25.65   278.00
1933     4.76    61.60
1934    11.46   178.30
1935    28.10   272.00
```

$(i+1)/n$ é denominado uma *posição de plotagem*. Por diversos motivos, existem muitas outras posições de plotagem possíveis para a FDA empírica. Uma muito popular é $(i+1)/(n+1)$. A discussão detalhada de posições de plotagem deve ser feita em um curso de Probabilidade e Estatística, e não aqui, onde (3.3) serve (apenas) como um exemplo motivador.

Os dados da tabela 3.1 estão digitados no arquivo `patos-medmax.dat` (Apêndice E). Esse arquivo contém 3 colunas contendo, respectivamente, o ano, a vazão média do ano, e a vazão máxima do ano. A listagem 3.3 mostra as 5 primeiras linhas do arquivo (que possui 69 linhas).

O programa `fqiemp.py`, mostrado na listagem 3.4, calcula a curva de permanência, ou FDA empírica, para as vazões máximas anuais do Rio dos Patos. Essa é, simplesmente, uma tabela de duas colunas: a vazão observada (em ordem crescente), e o valor de $(i+1)/n$.

Como antes, os comentários em `fqiemp.py` explicam muito do que está acontecendo. Mas há necessidade de explicações adicionais:

2 A função pré-definida `open` abre o arquivo `patos-medmax.dat`, descrito acima e exemplificado na listagem 3.3. O segundo argumento de `open`, a *string* `'rt'`, diz duas coisas: com `r`, que se trata de uma operação de *leitura*,

Listagem 3.4: `fqiemp.py` — Cálculo de uma FDA empírica

```
1  #!/usr/bin/python3
2  fin = open('patos-medmax.dat','rt')      # abre o arquivo de dados
3                                           # (entrada)
4  qmax = []                                # uma lista vazia
5  for linha in fin:                        # loop nas linhas do arquivo
6     campo = linha.split()                 # separa os campos
7     print(campo)                          # para ver campo a campo na
8                                           # tela
9     qi = float(campo[2])                  # a vazão é o terceiro campo
10    qmax.append(qi)                       # adiciona qi à lista qmax
11 fin.close()                              # fecha o arquivo de entrada
12 fou = open('fqiemp.dat','wt')            # abre o arquivo de saída
13 qmax.sort()                              # ordena a lista
14 n = len(qmax)                            # tamanho da lista
15 for i in range(n):                       # loop nos elementos da lista
16                                          # ordenada
17    qi = qmax[i]                          # vazão
18    Fi = (i+1)/n                          # posição de plotagem
19    fou.write('␣%8.2f␣%8.6f\n' % (qi,Fi))# imprime uma linha
20 fou.close()                              # fim de papo
```

(*read*), de um arquivo que já existe: isso garante que `patos-medmax.dat` não será modificado por `fqiemp.py`; com `t`, que se trata de um arquivo *texto*. Um arquivo texto é um arquivo formado por linhas, sendo cada linha uma *string*. As linhas são separadas por caracteres (invisíveis no editor de texto) de fim de linha, que convencionalmente nós indicamos por '`\n`'. Um arquivo texto é um objeto *iterável*, que pode ser acessado linha a linha.

4 Nesta linha, `qmax` é inicializado como uma *lista* vazia. Uma lista é uma sequência de objetos quaisquer. Dada uma lista `a`, seus elementos são `a[0]`, `a[1]`, etc.. Uma lista `a` com *n* objetos vai de `a[0]` até `a[n-1]`.

5 Este é o *loop* de leitura do programa. `linha` é uma *string* que contém em cada iteração uma das linhas de `patos-medmax.dat`.

6 É preciso separar uma linha (veja a listagem 3.3) em seus 3 campos. O *método*[4] `split` separa a string `linha` em 3 strings, e as coloca em uma lista `campo == [ campo[0], campo[1], campo[2] ]`, usando os espaços em branco como separadores (que são eliminados).

7 Cada um dos `campo`*s* agora é ele mesmo uma *string*, com os valores separados. As 5 primeiras linhas que aparecem na tela devido ao comando `print` da linha 7 são:

```
['1931', '21.57', '272.00']
['1932', '25.65', '278.00']
['1933', '4.76', '61.60']
['1934', '11.46', '178.30']
['1935', '28.10', '272.00']
```

9 No entanto, esses campos ainda são *strings*, e não `float`*s*. Aqui o terceiro campo é convertido em um `float` e vai para a variável `qi`.

10 Finalmente, `qi` é incluída na lista `qmax`.

11 É bom estilo de programação fechar cada arquivo previamente aberto.

[4]Em Python, um método é uma rotina que "pertence" a uma variável ou um tipo (a rigor, a uma classe, mas este não é um curso de programação).

Listagem 3.5: `fqiemp.dat` — FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos.

```
56.10 0.014493
61.60 0.028986
68.40 0.043478
75.40 0.057971
92.75 0.072464
```

12 Agora o programa abre o arquivo de saída, `fqiemp.dat`. `w` significa abertura para escrita (*write*); e `t` que o arquivo será texto.

13 `sort` é um *método* pré-definido para qualquer lista, que a ordena (por *default* em ordem crescente).

14 `len` é uma função pré-definida que retorna o número de elementos da lista.

15 *loop* para impressão no arquivo de saída.

17 Obtém o `i`-ésimo elemento de `qmax`, colocado na variável `qi`, que é reutilizada para esse fim.

18 Calcula a posição de plotagem, utilizando o operador `/` para dividir dois `int`*s* e gerar um resultado correto do tipo `float`.

19 `write` é um método do arquivo `fou`. `write` sempre escreve seu único argumento, que *tem* que ser uma *string*, no arquivo. Trata-se portanto do problema inverso do *loop* de leitura, que transformava *strings* em `float`*s*: agora precisamos transformar `float`*s* em uma *string*. É para isso que serve o operador `%`: ele tem à sua esquerda uma *string* com os campos de formatação especiais `%8.2f` e `%8.6f`; à sua direita uma *tupla*[5] `(qi,Fi)` com tantos elementos quantos são os campos de formatação. O primeiro elemento será substituído no primeiro campo de formatação por uma *string* com 8 caracteres, sendo 2 deles para casas decimais. O segundo elemento será substituído no segundo campo de formatação por uma *string* com 8 caracteres, sendo 6 deles para casas decimais. A *string* resultante, que precisa conter explicitamente o caractere de fim de linha '`\n`', será escrita no arquivo de saída.

As primeiras 5 linhas do arquivo de saída `fqiemp.dat` são mostradas na listagem 3.5; o seu gráfico, plotado a partir de `fqiemp.dat`, é mostrado na figura 3.1

Exercícios Propostos

3.5 Dado um número inteiro `p` lido do terminal, escreva um programa Python para procurar o índice `i` de uma lista `a` de 10 números inteiros definida internamente no programa tal que `a[i] == p`, e imprimir o resultado.

3.6 As primeiras linhas do arquivo de dados `bhdados.txt`, que contém dados de precipitação acumulada mensal em Belo Horizonte, são mostradas a seguir:

```
# --------------------
# BDMEP - INMET
# --------------------
# Estação           : BELO HORIZONTE - MG (OMM: 83587)
```

[5]Em Python, uma tupla é uma lista imutável.

Figura 3.1: FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos.

```
# Latitude  (graus) : -19.93
# Longitude (graus) : -43.93
# Altitude  (metros): 915.00
# Estação Operante
# Inicio de operação: 03/03/1910
# Periodo solicitado dos dados: 31/12/1980 a 31/12/2011
# Os dados listados abaixo são os que encontram-se digitados no BDMEP
# Hora em UTC
# --------------------
# Obs.: Os dados aparecem separados por ; (ponto e vírgula) no formato
#       txt.  Para o formato planilha XLS, siga as instruções
# --------------------
# Estacao;Data;Hora;PrecipitacaoTotal;
83587;28/02/1981;0000;7.5;
83587;31/03/1981;0000;195;
83587;30/04/1981;0000;83.3;
83587;31/05/1981;0000;7;
83587;30/06/1981;0000;17.5;
83587;31/07/1981;0000;0;
83587;31/08/1981;0000;0;
83587;30/09/1981;0000;0.8;
83587;31/10/1981;0000;120.9;
83587;30/11/1981;0000;404;
83587;31/12/1981;0000;248.2;
83587;31/01/1982;0000;330.5;
83587;28/02/1982;0000;52;
83587;31/03/1982;0000;374.4;
```

O programa `bhclima.py` a seguir lê o arquivo `bhdados.txt`; escreva ao lado de cada linha da listagem abaixo o que a linha faz.

```
1  #!/usr/bin/python3
2  from numpy import zeros
3  pp = zeros((12,31),float)
4  pp[:,:] = -9999
5  fin = open('bhdados.txt','rt')
6  for line in fin:
7     line = line.rstrip()
8     if line[0] == '#':
9        continue
10    campo = line.split(';')
11    prec = float(campo[3])
12    data = campo[1].split('/')
13    imes = int(data[1]) - 1
14    iano = int(data[2]) - 1981
15    pp[imes,iano] = prec
```

Listagem 3.6: `bintext.py` — Exemplo de arquivo texto e arquivo binário

```
1  #!/usr/bin/python3
2  i = 673451
3  bdet = bin(i)
4  print(bdet)
5  fot = open('i.txt','wt')
6  fot.write('%6d' % i)
7  fot.close()
8  from struct import pack
9  b = pack('i',i)
10 fob = open('i.bin','wb')
11 fob.write(b)
12 fob.close()
13 print(type(i))
14 print(type(b))
15 from os.path import getsize
16 print('tamanho␣do␣arquivo␣txt␣=␣%d␣bytes' % getsize('i.txt'))
17 print('tamanho␣do␣arquivo␣bin␣=␣%d␣bytes' % getsize('i.bin'))
```

Arquivos texto e arquivos binários

Arquivos texto são legíveis por seres humanos. Qualquer representação interna é primeiramente traduzida para uma `string` de caracteres antes de ser escrita em um arquivo texto. Arquivos binários em geral armazenam informação com a mesma representação interna utilizada pelo computador para fazer contas, etc..

Como sempre, um exemplo vale por mil palavras. Na listagem 3.6, temos o programa `bintext.py`, que produz dois arquivos: o arquivo texto `i.txt`, e o arquivo binário `i.bin`. Cada um desses arquivos contém o número inteiro `i == 673451`.

Eis aqui a dissecação de `bintext.py`:

3 A função pré-definida `bin` produz a representação do objeto na base 2.

6 Escreve a variável `i` no arquivo `i.txt`, usando um campo de 6 caracteres, que é o tamanho necessário para escrever `i` na base 10.

8 A única maneira de ler ou escrever um arquivo binário em Python é por meio de *byte strings*: strings em que cada elemento é um *byte* (8 bits). O módulo struct provê a conversão de, e para, *byte strings*.

9 Converte `i` em uma *byte string*. Como a representação interna de `i` é em 4 bytes, o tamanho de `b` será de 4 bytes.

13–14 Verifica os tipos de `i` e `b`.

16–17 Mostra o tamanho de cada um dos arquivos gerados.

Finalmente, a saída de `bintext.py` é

```
0b10100100011010101011
<class 'int'>
<class 'bytes'>
tamanho do arquivo txt = 6 bytes
tamanho do arquivo bin = 4 bytes
```

Conte os bits na primeira linha acima (após o prefixo `0b`, que indica a representação na base 2): eles correspondem aos 4 *bytes* que custa ao programa para guardar o númreo inteiro 673451 (apenas 20 bits são mostrados; os 12 bits à esquerda desses são iguais a zero). Repare que o arquivo binário é menor que o arquivo texto. *Em*

Listagem 3.7: `writearr.py` — Escreve um arquivo binário contendo 3 "linhas", cada uma das quais com um *array* de 10 `float`*s*.

```
1  #!/usr/bin/python3
2  from numpy.random import rand
3  fob = open('a.bin','wb')      # abre um arq binário para escrita
4  for k in range(3):            # loop em 3 "linhas"
5     a = rand(10)               # gera um array com 10 números aleatórios
6     a.tofile(fob)              # escreve uma "linha"
7  fob.close()
```

geral, arquivos binários tendem a ser menores (para a mesma quantidade de informação). A outra grande vantagem é que a leitura e a escrita de arquivos binários é muito mais *rápida*, porque não há necessidade de traduzir a informação de, e para, *strings*.

Na prática, arquivos binários estão invariavelmente associados ao uso de *arrays*, pelo menos em Engenharia. O módulo Numpy (`http://numpy.scipy.org`), que *não vem com Python, e necessita ser instalado à parte*, proporciona um tipo chamado `array`, e permite manipular com boa eficiência computacional vetores e matrizes em Python. O tipo permite na prática substituir *listas* (tipo `list`); ademais, tudo ou quase tudo que funciona com listas também funciona com *arrays*. Neste texto, nós faremos a partir de agora amplo uso de Numpy e de seu tipo `array`. A referência completa de Numpy está disponível em domínio público (Oliphant, 2006), podendo também ser adquirida pela Internet.

Além de definir *arrays*, Numpy também proporciona seus próprios métodos e funções para ler e escrever de e para arquivos binários. Vamos então dar dois exemplos muito simples, porém muito esclarecedores.

Primeiro, um programa para *escrever* um array. A listagem 3.7 mostra o programa `writearr.py`. O programa usa uma rotina disponível em `numpy`, `rand`, para devolver um *array* com 10 números aleatórios entre 0 e 1. `writearr.py` repete por 3 vezes a geração de `a` e a sua escrita no arquivo binário `a.bin`: a escrita utiliza o método `tofile`. Repare que `tofile` é um método do *array* `a`; ele não precisa ser importado, pois ele "já faz parte" da variável `a` a partir do momento em que ela é criada. `writearr` roda silenciosamente: não há nenhuma saída na tela. No entanto, se procurarmos no disco o arquivo gerado, teremos algo do tipo

```
>ls -l a.bin
-rw-r--r-- 1 nldias nldias 240 2011-08-28 14:08 a.bin
```

O arquivo gerado, `a.bin`, possui 240 bytes. Em cada uma das 3 iterações de `writearr.py`, ele escreve 10 `float`*s* no arquivo. Cada `float` custa 8 *bytes*, de modo que em cada iteração 80 *bytes* são escritos. No final, são 240.

É importante observar que o arquivo `a.bin` *não possui estrutura*: ele "não sabe" que dentro dele mora o *array* `a`; ele é, apenas, uma "linguiça" de 240 *bytes*. Cabe a você, programadora ou programador, interpretar, ler e escrever corretamente o arquivo.

Prosseguimos agora para ler o arquivo binário gerado. Isso é feito com o programa `readarr.py`, mostrado na listagem 3.8.

O programa importa a rotina `fromfile` de Numpy, a partir da qual 3 instâncias de `a` são lidas do arquivo `a.bin` e impressas com formato na tela. Eis a sua saída:

```
0.2327 0.6117 0.7713 0.5942 0.1799 0.3156 0.1473 0.4299 0.0870 0.0846
0.4301 0.9779 0.0322 0.4833 0.6097 0.4387 0.0639 0.1399 0.4350 0.7737
0.5809 0.0382 0.6567 0.8062 0.8427 0.2511 0.2897 0.5785 0.2892 0.0385
```

Listagem 3.8: `readarr.py` — Lê um arquivo binário contendo 3 "linhas", cada uma das quais com um *array* de 10 `float`*s*.

```
1  #!/usr/bin/python3
2  from numpy import fromfile
3  from sys import stdout              # para escrever na tela
4  fib = open('a.bin','rb')            # abre o arquivo binário
5  for k in range(3):                  # loop em 3 "linhas"
6     a = fromfile(fib,float,10)       # lê um array com 10 floats
7     for e in a:                      # imprime com formato na tela
8        stdout.write('␣%5.4f' % e)
9     stdout.write('\n')
10 fib.close()
```

O que vemos são os números aleatórios das 3 instâncias de `a` escritas pelo programa `writearr.py`. Atenção: cada vez que você rodar `writearr.py`, a sua saída será diferente (pois os números gerados são aleatórios[6]). Portanto, não se preocupe em reproduzir *exatamente* os valores acima, pois eles sempre estarão mudando a cada rodada de `writearr.py`.

3.3 – Maxima

Maxima é a linguagem de processamento simbólico mais antiga que existe: ela se chamava, quando foi criada, MACSYMA. A mudança de nome ocorreu quando o código se tornou livre. Maxima é capaz de fazer álgebra, derivar, integrar, resolver equações diferenciais, calcular transformadas de Laplace, etc., *analiticamente*. Por exemplo: você sabe quanto é $(a+b)^4$? Não? Digitando `maxima` na linha de comando você obterá

```
Maxima 5.21.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1)
```

Continuando a digitar, você encontrará:

```
(%i1) (a+b)^4 ;
                                          4
(%o1)                                (b + a)
(%i2) expand(%);
                        4         3       2  2       3       4
(%o2)                  b  + 4 a b  + 6 a  b  + 4 a  b + a
(%i3) quit();
```

O comando

[`quit();`]

o devolverá para a linha de comando.

Vamos fazer algo um pouco mais sofisticado: quais são as raízes de

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24?$$

Faça

```
(%i1) P : x^4 - 10*x^3 + 35*x^2 - 50*x + 24 ;
                          4        3        2
(%o1)                    x  - 10 x  + 35 x  - 50 x + 24
(%i2) solve(P,x);
(%o2)                     [x = 3, x = 4, x = 1, x = 2]
```

[6] Na verdade, *pseudo-aleatórios*; mas isso é outra história.

Figura 3.2: A função $f(x) = x/(1 + x^{7/3})$

Uma outra maneira de obter o mesmo efeito teria sido

```
(%i1) P : x^4 - 10*x^3 + 35*x^2 - 50*x + 24 ;
                                4        3        2
(%o1)                          x  - 10 x  + 35 x  - 50 x + 24
(%i2) factor(P);
(%o2)                          (x - 4) (x - 3) (x - 2) (x - 1)
```

Maxima é capaz de resolver muitas equações quando a solução algébrica existe. Por exemplo, considere o problema de encontrar o máximo da função

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^{7/3}},$$

mostrada na figura 3.2: note que se trata de uma função muito "apertada" em torno de $x = 1$; para "vermos" melhor a função nas proximidades de 1, nós plotamos o eixo dos x em escala logaritmica. É evidente que só existe um máximo para a função. Para encontrá-lo, nós derivamos $f(x)$, igualamos a derivada a zero, e encontramos a raiz de $f'(x) = 0$. Com Maxima, isso fica mostrado na listagem 3.9.

Note que existem 7 raízes para $f'(x) = 0$, mas 6 delas são complexas! Por exemplo, a primeira raiz encontrada por Maxima foi

$$x = \left(\frac{3}{4}\right)^{3/7} \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{7}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3/7} \left[\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right];$$

observe que Maxima usa os símbolos `%e` para o número e, `%i` para o número $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, e `%pi` para o número π. Além disso, na linha `(%i3)`, o comando

[`solve(%,x)`]

significa: "resolva a expressão da linha anterior (`(%o2)`) em relação a x". A única raiz real, portanto, é $(3/4)^{3/7} \approx 0.884005215243613$, como pode ser verificado visualmente na figura 3.2.

Suponha agora que você deseje calcular a integral

$$\mu = \int_0^\infty x \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

onde

$$F(x) = 1 - \exp\left(-(x/\lambda)^k\right).$$

Listagem 3.9: Obtenção do ponto de máximo de uma função com Maxima

```
(%i1) linel : 70 ;
(%o1)                                70
(%i2) f : x/(1 + x^(7/3));
                                     x
(%o2)                             --------
                                   7/3
                                  x    + 1
(%i3) diff(f,x);
                                            7/3
                              1           7 x
(%o3)                     -------- - -------------
                           7/3            7/3     2
                          x    + 1   3 (x    + 1)
(%i4) solve(%,x);
                     6 %i %pi                2 %i %pi
                     --------              - --------
              3/7       7            3/7         7
             3    %e               3    %e
(%o4) [x = ----------------, x = -----------------,
                   3/7                     3/7
                  4                       4
             4 %i %pi                4 %i %pi              2 %i %pi
             --------              - --------              --------
      3/7       7            3/7         7            3/7       7
     3    %e               3    %e                  3    %e
x = ----------------, x = -----------------, x = ----------------,
            3/7                     3/7                     3/7
           4                       4                       4
               6 %i %pi
             - --------
      3/7         7            3/7
     3    %e                  3
x = -----------------, x = ----]
             3/7                 3/7
            4                   4
```

Listagem 3.10: `mulambdak.max` — Cálculo da média da distribuição Weibull em em função de seus parâmetros λ e k

```
1 linel : 70$
2 declare ( [k], real)$
3 declare ( [lam],real)$
4 assume ( k > 0)$
5 assume ( lam > 0)$
6 declare ( [k], noninteger)$
7 F : 1 - exp(-(x/lam)^k)$
8 fdp : diff(F,x)$
9 mu : integrate(x*fdp,x,0,inf) ;
```

A derivada dentro da integral ficou intencionalmente indicada: estou supondo que nós somos preguiçosos, e não queremos calculá-la manualmente, nem à integral. A listagem 3.10 mostra uma maneira de calcular μ, em função de λ e de k, com Maxima.

As explicações se seguem:

1 O número máximo de caracteres na saída é 70.

2–3 Declara que `k` e `lam` são variáveis reais. O símbolo `$` no fim de cada linha omite a "resposta" de Maxima; isso é útil quando executamos uma série de comandos de Maxima em *batch* (em série) a partir de um arquivo `.max`, e não estamos interessados em ver o resultado de cada um deles. Em seções interativas, o normal é encerrar cada comando com '`;`'.

4–5 Maxima suporá que `k` e `lam` são positivos em seus cálculos.

6 Sem a linha 6, Maxima vai parar e perguntar se `k` é `integer` — apesar da linha 2!

7 Define `F` ($F(x)$): note que não é `F(x)`! Note também que a *atribuição*, em Maxima, *não* é feita com '`=`' (como em Python), mas sim com '`:`'; '`=`' fica reservado para igualdade, ou "verdade lógica" de que duas expressões são iguais.

8 Armazena a derivada de $F(x)$.

9 Calcula a integral.

O resultado de "rodar" `mulambdak.max`, com o comando

[`maxima -b mulambdak.max`]

é mostrado na listagem 3.11

Na linha `(%o10)`, `gamma` significa a função gama, $\Gamma(x)$, que nós vamos encontrar muitas vezes neste texto, mas que não vem ao caso detalhar agora. O resultado analítico que nós obtivemos com Maxima é

$$\mu = \lambda\Gamma\left(\frac{k+1}{k}\right). \tag{3.4}$$

Exercícios Propostos

3.7 Com Maxima, calcule a derivada de

$$f(x) = \ln(\operatorname{sen}(e^x)).$$

Listagem 3.11: Saída do programa `mulambdak.max`

```
(%i1) batch("mulambdak.max")
read and interpret file:
#p/home/nldias/Dropbox/graduacao/matap/aulas/mulambdak.max
(%i2) linel:70
(%i3) declare([k],real)
(%i4) declare([lam],real)
(%i5) assume(k > 0)
(%i6) assume(lam > 0)
(%i7) declare([k],noninteger)
(%i8) F:1-exp(-(x/lam)^k)
(%i9) fdp:diff(F,x)
(%i10) mu:integrate(x*fdp,x,0,inf)
                                  k + 1
(%o10)                      gamma(-----) lam
                                    k
(%o10)                       mulambdak.max
```

3.8 Com Maxima, calcule

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

3.9 Com Maxima, obtenha as raízes de

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{29}{2}x + 15 = 0.$$

3.10 Teste em Maxima: $1 = 2$?

4

Métodos numéricos para o Cálculo de uma variável

Apesar do enorme poder das ferramentas analíticas do Cálculo univariado, muitas vezes essas ferramentas simplesmente não são suficientes para resolver o problema em questão. Numerosas grandezas em Física e em Engenharia são definidas no mundo natural, devendo ser medidas e depois manipuladas, tais como o volume de terra de uma escavação ou o volume de água em um lago natural ou em um reservatório artificial. Em outras ocasiões, as equações diferenciais que escolhemos para modelar um determinado tipo de problema não possuem solução analítica. Finalmente, literalmente todas as *funções* com as quais lidamos — mesmo as "analíticas", tais como o seno — precisam ser calculadas de *alguma forma* em termos das operações que os computadores "sabem" fazer: soma, subtração, adição, e multiplicação. Em todos esses casos, métodos numéricos são necessários para integrar, diferenciar, resolver equações diferenciais ordinárias e somar séries. Neste capítulo, veremos uma pequena introdução a esses assuntos.

4.1 – Integração numérica: motivação

Suponha que você deseje traçar uma curva com as seguintes propriedades:

- passar pelos pontos $(0,0)$, $(1,5/2)$, $(2,7/2)$ e $(4,4)$;
- possuir derivada igual a 0 em $x = 4$.

Existem muitas curvas com essas propriedades, mas uma candidata natural é um polinômio de grau 5, uma vez que existem 5 propriedades — ou graus de liberdade — na lista acima. Portanto,

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\\
g(x) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 5/2,\\
f(2) &= 7/2,\\
f(4) &= 4,\\
g(4) &= 0.
\end{aligned}$$

Agora, podemos obter facilmente a, b, c, d, e com Maxima, com o programa `achapol.max` da listagem 4.1.

A dissecação de `achapol.max` é a seguinte:

1–2 Define $f(x)$ e $g(x)$.

3–7 Define o valor de $f(x)$ em $x = 0, 1, 2, 4$, e o valor de $g(x)$ em $x = 4$, em função de a, b, c, d, e.

8 Resolve um sistema linear 5×5 em a, b, c, d, e.

Listagem 4.1: `achapol.max` — Polinômio com propriedades definidas

```
1 f : a*x^4 + b*x^3 + c*x^2 + d*x + e ;
2 g : diff(f,x);
3 eq1 : f,x=0 ;
4 eq2 : f,x=1 ;
5 eq3 : f,x=2 ;
6 eq4 : f,x=4 ;
7 eq5 : g, x=4 ;
8 solve([eq1 = 0, eq2 = 5/2, eq3 = 7/2, eq4 = 4, eq5 = 0],[a,b,c,d,e]);
```

A saída de `achapol.max` é mostrada na listagem 4.2
Portanto,

$$f(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{17}{12}x^2 + \frac{11}{3}x. \tag{4.1}$$

Suponha agora que você deseje calcular

$$I = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

É claro que essa integral pode ser calculada analiticamente com Maxima, conforme podemos ver na listagem 4.3. Logo, $I = 1321/90 \approx 14{,}6778$ (atenção para o arredondamento). Entretanto, nem todas as integrais podem ser calculadas assim, por uma série de motivos:

- a função pode não possuir uma integral em forma fechada,
- a função pode ser definida por pontos, mas não por uma fórmula,
- a função pode ser difícil de integrar analiticamente, e você pode querer ter uma idéia inicial do valor da integral, etc..

Suponha portanto que você *não soubesse* que $I = 1321/90$, mas fosse capaz de calcular em princípio tantos pontos de $f(x)$ quantos fossem necessários: qual a sua aposta para o valor de I?

Considere a figura 4.1: uma das aproximações mais óbvias — mas também mais grosseiras — é substituir a função por uma reta ligando os pontos $(1, f(1))$ e $(5, f(5))$. A área do *trapézio* é a nossa primeira aproximação para a integral:

$$I_0 = \frac{f(1) + f(5)}{2} \times 4 = 12{,}50.$$

Nada mal, considerando o valor verdadeiro 14,6778! Mas a estimativa pode ser melhorada, com o uso de dois trapézios. Para isso, basta calcular $f(3)$ e somar as áreas dos dois trapézios resultantes:

$$I_1 = \frac{f(1) + f(3)}{2} \times 2 + \frac{f(3) + f(5)}{2} \times 2 = 14{,}000.$$

Note que estamos *muito* próximos do valor verdadeiro — com apenas 2 trapézios. Mas existe uma alternativa analítica mais inteligente do que trapézios: como temos

Listagem 4.2: Saída de `achapol.max`

```
(%i1) batch("achapol.max")
(%i2) f:e+d*x+c*x^2+b*x^3+a*x^4
                                4       3       2
(%o2)                       a x  + b x  + c x  + d x + e
(%i3) g:diff(f,x)
                                  3         2
(%o3)                        4 a x  + 3 b x  + 2 c x + d
(%i4) ev(eq1:f,x = 0)
(%o4)                                     e
(%i5) ev(eq2:f,x = 1)
(%o5)                              e + d + c + b + a
(%i6) ev(eq3:f,x = 2)
(%o6)                        e + 2 d + 4 c + 8 b + 16 a
(%i7) ev(eq4:f,x = 4)
(%o7)                       e + 4 d + 16 c + 64 b + 256 a
(%i8) ev(eq5:g,x = 4)
(%o8)                          d + 8 c + 48 b + 256 a
(%i9) solve([eq1 = 0,eq2 = 5/2,eq3 = 7/2,eq4 = 4,eq5 = 0],[a,b,c,d,e])
                            1        13         17       11
(%o9)             [[a = - --, b = --, c = - --, d = --, e = 0]]
                            48       48         12       3
(%o9)                                 achapol.max
```

Listagem 4.3: Cálculo da integral de um polinômio analiticamente, com Maxima

```
(%i1) [ a : -1/48, b : 13/48, c : -17/12, d : 11/3] ;
                                  1   13    17  11
(%o1)                           [- --, --, - --, --]
                                  48  48    12  3
(%i2) f : a*x^4 + b*x^3 + c*x^2 + d*x ;
                                 4       3        2
                               x    13 x    17 x    11 x
(%o2)                        - -- + ----- - ----- + ----
                               48    48       12       3
(%i3) integrate(f,x,1,5) ;
                                        1321
(%o3)                                   ----
                                         90
(%i4) bfloat(%);
(%o4)                            1.467777777777778b1
```

Figura 4.1: Integração numérica de uma função

3 pontos, nós podemos aproximar a curva por uma parábola do 2º grau passando por esses 3 pontos. O programa `passaquad.max`, mostrado na listagem 4.4, faz esse trabalho, e acha os coeficientes a, b, c da parábola

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

que passa por $(1, f(1))$, $(3, f(3))$ e $(5, f(5))$. No embalo, `passaquad.max` redefine $h(x)$ com os coeficientes encontrados, e já calcula a integral de $h(x)$ entre 1 e 5. A parábola h também é mostrada na figura 4.1.

Listagem 4.4: `passaquad.max` — parábola $h(x) = ax^2 + bx + c$ passando por $(1, f(1))$, $(3, f(3))$ e $(5, f(5))$.

```
f : (-1/48)*x^4 + (13/48)*x^3 - (17/12)*x^2 + (11/3)*x ;
y1 : f,x=1$
y3 : f,x=3$
y5 : f,x=5$
h : a*x^2 + b*x + c$
eq1 : ev(h,x=1) = y1 ;
eq2 : ev(h,x=3) = y3 ;
eq3 : ev(h,x=5) = y5 ;
solve( [eq1, eq2, eq3],[a,b,c]) ;
abc : % ;
h : h,abc ;
integrate(h,x,1,5);
```

A saída de `passaquad.max` é mostrada na listagem 4.5.

Listagem 4.5: Saída de `passaquad.max`

```
(%i3) ev(y1:f,x = 1)
(%i4) ev(y3:f,x = 3)
(%i5) ev(y5:f,x = 5)
(%i6) h:c+b*x+a*x^2
(%i7) eq1:ev(h,x = 1) = y1
                                          5
(%o7)                            c + b + a = -
                                          2
(%i8) eq2:ev(h,x = 3) = y3
                                           31
(%o8)                        c + 3 b + 9 a = --
                                           8
(%i9) eq3:ev(h,x = 5) = y5
                                            15
(%o9)                        c + 5 b + 25 a = --
                                            4
(%i10) solve([eq1,eq2,eq3],[a,b,c])
                                 3        23       5
(%o10)                   [[a = - --, b = --, c = -]]
                                 16       16       4
(%i11) abc:%
                                 3        23       5
(%o11)                   [[a = - --, b = --, c = -]]
                                 16       16       4
(%i12) ev(h:h,abc)
                                   2
                                3 x     23 x    5
(%o12)                        - ---- + ---- + -
                                 16      16     4
(%i13) integrate(h,x,1,5)
                                     29
(%o13)                               --
                                     2
```

Tabela 4.1: Estimativas numéricas de I e seus erros relativos δ.

Integral	Valor	δ
Exato	14,6778	0
Um trapézio	12,5000	0,1483
Dois trapézios	14,0000	0,0461
Uma parábola	14,5000	0,0121

Com os coeficientes a, b, c de $h(x)$, nós podemos calcular — analiticamente — nossa próxima aproximação:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^5 h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^5 \left[-\frac{3}{16}x^2 + \frac{23}{16}x + \frac{5}{4}\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{29}{2} = 14{,}5000. \end{aligned}$$

Até agora nós avaliamos 3 alternativas de integração numérica de $f(x)$: com um trapézio, com dois trapézios, e com uma parábola. A tabela 4.1 dá um resumo dos resultados alcançados. O erro relativo de cada estimativa é

$$\delta = \frac{I_k - I}{I}. \tag{4.2}$$

Uma única parábola foi capaz de estimar I com um erro relativo ligeiramente superior a 1%. Um caminho geral para a integração numérica está aberto: aumentar o número de "elementos" de integração (no nosso caso foram trapézios) e/ou aumentar a ordem do polinômio aproximador da função por um certo número de pontos. Esse é o conteúdo da próxima seção.

Exercícios Propostos

4.1 Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, qual é a estimativa de $I = \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ com *um* trapézio?

4.2 Provavelmente, você não está muito contente com o resultado do Exercício 4.1.

a) Aproxime a integral I do Exercício 4.1 com dois trapézios, entre $x = 0$ e $\pi/2$, e entre $x = \pi/2$ e π.

b) Aproxime a integral pela integral da parábola $g(x) = ax^2 + bx + c$ passando pelos pontos $(0, 0)$, $(\pi/2, 1)$ e $(\pi, 0)$.

c) Aproxime a integral de $f(x)$ pela integral do polinômio $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passando pelos mesmos pontos acima, e com $h'(\pi/2) = 0$.

4.2 – A regra do trapézio

Vamos começar a melhorar nossas estimativas de I pelo método de "força bruta", de aumentar o número de trapézios. Isso nos levará ao método talvez mais simples de integração numérica que vale a pena mencionar, denominado "Regra do Trapézio". A figura 4.2 mostra a mesma função $f(x)$ da seção anterior; agora, entretanto, nós desenhamos 4 e 8 trapézios sob a curva $f(x)$.

Figura 4.2: A regra do trapézio, com $n = 4$ e $n = 8$ trapézios.

É evidente que a área sob $f(x)$ está muito bem aproximada com $n = 8$ trapézios. O seu valor pode ser estimado por

$$I_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x, \tag{4.3}$$

com

$$x_0 = 1, \tag{4.4}$$

$$x_n = 5, \tag{4.5}$$

$$\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}. \tag{4.6}$$

Prosseguindo, (4.3) pode ser re-escrita:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right] \Delta x \\ &= \left[f(x_0) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\big) + f(x_n) \right] \frac{\Delta x}{2} \\ &= (S_e + 2S_i) \frac{\Delta x}{2}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

com

$$S_e = f(x_0) + f(x_n), \tag{4.8}$$

$$S_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i). \tag{4.9}$$

Esta seção vale um *módulo* de Python, que nós vamos denominar `numint.py`. Uma implementação razoavelmente eficiente da regra do trapézio é mostrada nas primeiras 15 linhas de `numint.py`, na listagen 4.6

O programa `quadraver1.py` calcula a integral de $f(x)$ com 8 trapézios (listagem 4.7).

A saída de `quadraver1.py` é $I_3 \approx 14{,}6328$. O erro está agora na 2ª casa decimal, e o erro relativo é $\delta = 0{,}0031$, ou 0,3%.

Listagem 4.6: `numint.py` — Integração numérica, regra do trapézio

```
#!/usr/bin/python3
def trapezio(n,a,b,f):
   '''
   trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
   '''
   deltax = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)            # define Se
   Si = 0.0                    # inicializa Si
   for k in range(1,n):        # calcula Si
      xk = a + k*deltax
      Si += f(xk)
   I = Se + 2*Si               # cálculo de I
   I *= deltax
   I /= 2
   return I
```

Listagem 4.7: `quadraver1.py` — Integração numérica de $f(x)$ com 8 trapézios

```
#!/usr/bin/python3
from numint import trapezio
def f(x):
   return ((-1/48)*x**4 + (13/48)*x**3 + (-17/12)*x**2 + (11/3)*x)
I3 = trapezio(8,1,5,f)
print('I3 = %8.4f\n'  % I3)
```

O "problema" com `numint.trapezio` é que nós não temos uma idéia do erro que estamos cometendo, porque, se estamos utilizando integração numérica, é porque não conhecemos o valor exato de I! Um primeiro remédio para esse problema é ficar recalculando a regra do trapézio com um número dobrado de trapézios, até que a diferença *absoluta* entre duas estimativas sucessivas fique abaixo de um valor estipulado. Isso é implementado, *de forma muito ineficiente*, na próxima rotina do módulo `numint` (listagem 4.8: note a continuação da numeração de linhas dentro do *mesmo arquivo* `numint.py`), denominada `trapepsilonlento`, e mostrada na listagem 4.8.

Listagem 4.8: `numint.py` — Integração numérica ineficiente, com erro absoluto pré-estabelecido

```
def trapepsilonlento(epsilon,a,b,f):
   '''
   trapepsilonlento(epsilon,a,b,f): calcula a integral de f entre a e
   b com erro absoluto epsilon, de forma ineficiente
   '''
   eps = 2*epsilon             # estabelece um erro inicial grande
   n = 1                       # um único trapézio
   Iv = trapezio(1,a,b,f)      # primeira estimativa, "velha"
   while eps > epsilon:        # loop
      n *= 2                   # dobra o número de trapézios
      In = trapezio(n,a,b,f)   # estimativa "nova", recalculada do zero
      eps = abs(In - Iv)       # calcula o erro absoluto
      Iv = In                  # atualiza a estimativa "velha"
   return (In,eps)
```

O programa `quadraver2.py` calcula a integral de $f(x)$ com erro absoluto estipulado menor que 0,0001, e imprime a estimativa da integral, o erro absoluto e o erro relativo (em relação ao valor exato conhecido) encontrados: $I_4 = 14{,}67777$, $\epsilon = 0{,}00003$, $\delta = 0{,}00000075$. Com 4 casas decimais, esse é um resultado exato!

Listagem 4.9: `quadraver2.py` — Integração numérica ineficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0{,}0001$

```
#!/usr/bin/python3
from numint import trapepsilonlento
def f(x):
   return ((-1/48)*x**4 + (13/48)*x**3 + (-17/12)*x**2 + (11/3)*x)
(I4,eps) = trapepsilonlento(0.0001,1,5,f)
print('I4 = %8.5f  eps = %8.5f'  % (I4,eps))
II = 14.677777777777777
delta = (I4 - II)/II
print('delta = %10.8f' % delta)
```

O problema com `trapepsilonlento` é que todos os pontos que já haviam sido calculados por `trapezio` são recalculados em cada iteração (verifique). Nosso último esforço, a rotina `trapepsilon` em `numint.py`, corrige esse problema, reaproveitando todos os cálculos. Volte um pouco à figura 4.2: nela, nós vemos a integração numérica de $f(x)$ com $n = 4$ e depois com $n = 8$ trapézios. Repare que S_i para $n = 4$ é *parte* do valor de S_i para $n = 8$. De fato, para $n = 4$, $S_i = f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)$ (note que os índices já estão definidos para o caso $n = 8$). Essa soma já foi calculada na integral com 4 trapézios, e não precisa ser recalculada. O que nós precisamos fazer agora é somar $f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)$ ao S_i que já tínhamos. S_e permanece o mesmo, e depois basta aplicar (4.7). Isso é feito na última rotina de `numint`, denominada `trapepsilon`, na listagem 4.10.

Listagem 4.10: `numint.py` — Integração numérica eficiente, com erro absoluto pré-estabelecido

```
def trapepsilon(epsilon,a,b,f):
   '''
   trapepsilon(epsilon,a,b,f): calcula a integral de f entre a e b
   com erro absoluto epsilon, de forma eficiente
   '''
   eps = 2*epsilon                  # estabelece um erro inicial grande
   n = 1                            # n é o número de trapézios
   Se = f(a) + f(b)                 # Se não muda
   deltax = (b-a)/n                 # primeiro deltax
   dx2 = deltax/2                   # primeiro deltax/2
   Siv = 0.0                        # Si "velho"
   Iv = Se*dx2                      # I "velho"
   while eps > epsilon:             # executa o loop pelo menos uma vez
      Sin = 0.0                     # Si "novo"
      n *= 2                        # dobra o número de trapézios
      deltax /= 2                   # divide deltax por dois
      dx2 = deltax/2                # idem para dx2
      for i in range(1,n,2):        # apenas os ímpares...
         xi = a + i*deltax          # pula os ptos já calculados!
         Sin += f(xi)               # soma sobre os novos ptos internos
      Sin = Sin + Siv               # aproveita todos os ptos já
                                    # calculados
      In = (Se + 2*Sin)*dx2         # I "novo"
      eps = abs(In - Iv)            # calcula o erro absoluto
      Siv = Sin                     # atualiza Siv
      Iv = In                       # atualiza Iv
   return (In,eps)
```

O programa `quadraver3.py` (listagem 4.11) calcula a integral de $f(x)$ com erro absoluto estipulado menor que 0,000001, e imprime a estimativa da integral, o erro absoluto e o erro relativo (em relação ao valor exato conhecido) encontrados:

$I_5 = 14.6777776$, $\epsilon = 0.0000005$, $\delta = 0.00000001$. Note que I_5 é exato até a 6ª casa decimal, conforme estipulado.

Listagem 4.11: `quadraver3.py` — Integração numérica eficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0{,}000001$

```
#!/usr/bin/python3
from numint import trapepsilon
def f(x):
   return ((-1/48)*x**4 + (13/48)*x**3 + (-17/12)*x**2 + (11/3)*x)
(I5,eps) = trapepsilon(0.000001,1,5,f)
print('I5 = %12.7f  eps = %12.7f'  % (I5,eps))
II = 14.677777777777777
delta = (I5 - II)/II
print('delta = %12.8f' % delta)
```

Exercícios Propostos

4.3 Considere o programa em Python a seguir:

```
#!/usr/bin/python3
def f(x):
   return x
def trapezio (n ,a ,b , f ):
   '''
   trapezio (n ,a ,b , f ): integra f entre a e b com n trapézios
   '''
   deltax = (b - a )/ n
   Se = f ( a ) + f ( b )                # define Se
   Si = 0.0                              # inicializa Si
   for k in range (1 , n ):              # calcula Si
       xk = a + k * deltax
       Si += f ( xk )
   I = Se + 2* Si                        # cálculo de I
   I *= deltax
   I /= 2
   return I
Inumer = trapezio(2,0.0,1.0,f)
Iexata = 0.5
print(abs(Inumer - Iexata))
```

Qual o valor que o programa imprime na tela?

4.4 Usando Python e `numint.trapezio`, aproxime $I = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$ pela regra do trapézio com 10 trapézios.

4.5 A figura 4.3 mostra o perfil do lago de um reservatório de abastecimento de água. As cotas, medidas na vertical, estão em m. As distâncias horizontais estão em hm (100 m). A região hachuriada é solo, enquanto que a região branca é água. A profundidade máxima do lago é de 12 m. Suponha por simplicidade que o reservatório tem uma largura constante (na direção y) e igual a 100 m. Determine, por integração numérica, o volume total do reservatório em m^3.

4.6 Sabe-se que uma função $f(x)$ (mostrada em preto na figura 4.4) assume os valores da tabela a seguir:

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	2	4	2

Figura 4.3: Exercício 4.5.

Figura 4.4: Integração numérica do Exercício 4.6.

Figura 4.5: A regra do ponto do meio.

a) *Simplesmente contando quadrados:* qual é a sua estimativa para $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$? *Use um número realista de casas decimais! Indique quantos quadrados inteiros, e quantos pedaços, você contou!*

b) Interpole um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (em cinza) por esses valores: quem são a, b, c, d?

c) Com a dica acima: *usando* $P(x)$, calcule um valor aproximado para $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4.7 Usando Python e `numint.trapepsilon`, aproxime $I = \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$ pela regra do trapézio com precisão absoluta menor ou igual a 1×10^{-5}.

4.8 A figura 4.5 ilustra a "regra do ponto do meio", em que a integral

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

é aproximada pela soma das áreas dos retângulos com as alturas dadas pelo valor da função no centro de cada intervalo $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ onde, como sempre, $a \equiv x_0$ e $x_n \equiv b$. Considere $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ constante. Obtenha a fórmula geral para I utilizando a "fórmula do ponto do meio", para um número genérico de pontos n.

4.9 Dada $f(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_0 + 2h]$, deduza a regra de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right],$$

com $f_n = f(x_n)$, $x_n = x_0 + nh$, interpolando a função $g(x) = ax^2 + bx + c$ através dos pontos (x_0, f_0), (x_1, f_1) e (x_2, f_2) e calculando sua integral.

4.10 Dobrando o número de pontos de 2 para 4, obtenha a regra de Simpson para 5 pontos,

$$\int_{x_0}^{x_0+4h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right];$$

generalize:

$$\int_{a\equiv x_0}^{b\equiv x_0+2nh} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right].$$

4.11 Estenda `numint` com uma rotina `simpson` para calcular a regra de Simpson com $2n$ intervalos, e uma rotina `simpepsilon` para calcular uma integral numérica pela regra de Simpson com precisão estipulada. Baseie-se em `trapezio` e `trapepsilon`.

4.12 Considere a integração numérica de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, e $2n$ pontos igualmente espaçados, $a \equiv x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} \equiv b$, com $h = x_{i+1} - x_i$. A regra de Simpson para $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é

$$S_{2n} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right],$$

onde $f_i = f(x_i)$.

a) Mostre que a regra do trapézio utilizando apenas os pontos pares é

$$T_n = h\left[f_0 + 2f_2 + + \ldots + 2f_{2n-2} + f_{2n}\right].$$

b) Mostre que a regra do trapézio utilizando todos os pontos é

$$T_{2n} = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-2} + 2f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

c) Mostre que

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

4.13 Como você sabe, a rotina da esquerda abaixo implementa a regra do trapézio, cuja fórmula é mostrada à direita.

```
def trapezio(n,a,b,f):
    h = (b-a)/n
    Se = f(a) + f(b)
    Si = 0.0
    for k in range(1,n):
        xk = a + k*h
        Si += f(xk)
    return (Se + 2*Si)*h/2
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

Considere agora a rotina que implementa o *método de Boole* de integração, que é mais acurado:

```
def boole(n,a,b,f):
    h = (b-a)/n
    sab = 7.0*(f(a) + f(b))
    sim = 0.0
    for k in range(1,n,2):
        xk = a + k*h
        sim += f(xk)
    pass
    sim *= 32.0
    sip = 0.0
    for k in range(2,n-1,4):
        xk = a + k*h
        sip += f(xk)
    pass
    sip *= 12.0
    siq = 0.0
    for k in range(4,n-3,4):
        xk = a + k*h
        siq += f(xk)
    pass
    siq *= 14.0
    return ((sab+sim+sip+siq)*
            2.0*h/45.0)
```

$$I = ?$$

Escreva a fórmula correspondente para I no lado direito, supondo que n é par.

4.14 Considere

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

e sua aproximação numérica I_n dada por

$$I_n = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y,$$

onde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy, \\ x_i &= (i - 1/2)\Delta x, \\ y_j &= (i - 1/2)\Delta y, \\ \Delta x &= \Delta y = 1/10. \end{aligned}$$

a) Calcule analiticamente I.

b) Escreva e rode um programa em Python que calcula I_n

4.3 – Aproximação de integrais com séries: a função erro

Integrações numéricas tais como as mostradas na seção 4.2 podem ser muito "custosas" em termos do número de operações de ponto flutuante necessárias. Algumas vezes, é possível ser mais inteligente. Um exemplo disso foi o cálculo de I_2 com uma única parábola no fim da seção 4.1, que foi capaz de reduzir o erro relativo para pouco mais de 1%.

Considere agora o cálculo de uma integral particularmente importante, a *função erro*, definida por

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{x} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u. \tag{4.10}$$

A função erro está implementada em Maxima e em Python ≥ 3.3. Como obtê-la? Uma maneira "força bruta" é utilizar `trapepsilon` com uma precisão razoável (digamos, 10^{-6}), gerar um arquivo, e plotar o resultado para "ver a cara" da $\mathrm{erf}(x)$. O programa `vererf.py` (listagem 4.12) calcula a função em um grande número de pontos e gera o arquivo de dados `vererf.dat`. O resultado é mostrado com pontos na figura 4.6 em comparação com uma implementação padrão (mostrada em linha contínua) de $\mathrm{erf}(x)$ do programa de plotagem.

Existe uma maneira mais inteligente de calcular $\mathrm{erf}(x)$: ela se baseia em integrar a *série de Taylor* do integrando, e^{-u^2}. Maxima permite calcular os primeiros termos:

```
(%i1) taylor(exp(-u^2),u,0,10) ;
                                  4    6    8    10
                              2   u    u    u    u
(%o1)/T/                 1 - u  + -- - -- + -- - --- + . . .
                                  2    6    24   120
```

A expansão é em torno de $u = 0$, e é feita até o 10º termo. Não é muito difícil reconhecer nos denominadores os fatoriais de 0, 1, 2, 3, 4 e 5, e as potências dos dobros desses valores nos expoentes de u. Em geral,

$$\mathrm{e}^{-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!}. \tag{4.11}$$

Portanto,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} \, \mathrm{d}u$$

Listagem 4.12: `vererf.py` — Cálculo da função erro por integração numérica

```
#!/usr/bin/python3
from math import exp, sqrt, pi
from numint import trapepsilon
def f(x):
   return exp(-x*x)
xmin = 0.0                                # de 0
xmax = 3.0                                # a 3
nx = 100                                  # em 100 passos
dx = (xmax - xmin)/nx                     # de dx
erf = 0.0                                 # erf(0) = 0
fou = open('vererf.dat','wt')             # arquivo de saída
xl = xmin                                 # limite inferior a partir de
                                          # xmin
fou.write('%8.6f␣%8.6f\n' % (xl,erf))     # erf(0) = 0
for k in range(nx):                       # loop
   xu = xl + dx                           # novo limite superior
   (I,eps) = trapepsilon(1.0e-6,xl,xu,f)# integra mais uma fatia
   erf = erf + (2.0/sqrt(pi))*I           # acumula erf
   fou.write('%8.6f␣%8.6f\n' % (xu,erf))# imprime até aqui
   xl = xu                                # atualiza limite inferior
fou.close()                               # fecha o arquivo de saída
```

Figura 4.6: Função $\mathrm{erf}(x)$ calculada por integração numérica, com `trapepsilon` e $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$, *versus* a `erf` pré-definida no programa de plotagem.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x u^{2n}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\,. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Cuidado: não é toda série que permite a troca impune da ordem de integração e da soma (infinita) da série. Em princípio, devemos procurar os teoremas relevantes que nos permitem essa troca de ordem. Admitindo que está tudo bem, entretanto, nós conseguimos a série de Taylor de $\operatorname{erf}(x)$!

Ainda falta encontrar uma maneira computacionalmente eficiente de passar do termo $n-1$ para o termo n. Vamos a isso:

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} &\equiv \frac{A_n}{B_n C_n} \\
&= \frac{(-1)^n x^{2(n-1+1)+1}}{\big(2(n-1+1)+1)\big)\big(n(n-1)!\big)} \\
&= \frac{(-1)^{n-1} x^{2(n-1)+1} \times [-x^2]}{\big(2(n-1)+1)+[2]\big)\big([n](n-1)!\big)} \\
&= \frac{A_{n-1} \times (-x^2)}{(B_{n-1}+2)(C_{n-1} \times n)}\,. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Em outras palavras, o numerador A_n de cada novo termo da série é o anterior vezes $-x^2$. O denominador é mais complicado; ele é formado pelo produto $B_n C_n$, e as relações completas de recursão são

$$
\begin{aligned}
A_n &= (-1)^n x^{2n+1} = A_{n-1} \times (-x^2), \\
B_n &= 2n+1 = B_{n-1} + 2, \\
C_n &= n! = C_{n-1} \times n.
\end{aligned}
$$

Mais uma coisa: a série de $\operatorname{erf}(x)$ só contém potências ímpares: portanto, $\operatorname{erf}(x)$ é uma função *ímpar*, e vale a relação

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x).$$

Com isso, temos uma rotina em Python para calcular $\operatorname{erf}(x)$, chamada `erf_1(x)`, no módulo `erfs`, do arquivo `erfs.py`. As linhas correspondentes a `erf_1(x)` são mostradas na listagem 4.13.

Agora, podemos escrever `vererf1.py` (listagem 4.14), gerar um arquivo de saída `vererf1.dat` e plotar a saída, mostrada na figura 4.7.

Embora formalmente correta, a rotina `erf_1` fica mais lenta à medida que $|x|$ cresce. Como já vimos nas figuras 4.6 e 4.7, $\operatorname{erf}(x) \approx 1$ para $|x| \gtrsim 3$. Porém, uma olhada em `vererf1.dat`, nos dá

[`erf_1(3) = 0.999978`],

que ainda está acima da precisão especificada de 0,000001. Precisamos descobrir o valor de x para o qual `erf_1` produz 0,999999. Por tentativa e erro, encontramos

[`erf_1(3.6) = 0.99999952358847277`],

que é igual a 1,0 para 6 casas decimais. Precisamos também saber com quantos termos esse cálculo foi feito, e esse é o motivo de `erf_1` devolver também n. Para

Listagem 4.13: Cálculo de erf(x) com uma série de Taylor.

```
#!/usr/bin/python3
from math import sqrt, pi
def erf_1(x):
   epsilon_erf = 1.0e-6          # mesma precisão
   eps_erf = 2*epsilon_erf       # garante entrada no while
   A = x                         # primeiro A
   B = 1                         # primeiro B
   C = 1                         # primeiro C
   n = 0                         # primeiro n
   termo = A/(B*C)               # primeiro termo da série
   s = termo                     # primeira soma da série
   while eps_erf > epsilon_erf:  # loop
      n += 1                     # incrementa n
      A *= (-x*x)                # novo A
      B += 2                     # novo B
      C *= n                     # novo C
      termo = A/(B*C)            # novo termo
      eps_erf = abs(termo)       # seu valor absoluto
      s += termo                 # soma na série
   return (2/sqrt(pi) * s,n)
```

Listagem 4.14: `vererf1.py` — Cálculo da função erro com série de Taylor entre 0 e 3.

```
#!/usr/bin/python3
from math import exp, sqrt, pi
from erfs import erf_1
xmin = 0.0                              # de 0
xmax = 3.0                              # a 3
nx = 100                                # em 100 passos
dx = (xmax - xmin)/nx                   # de dx
fou = open('vererf1.dat','wt')          # arquivo de saída
xl = xmin                               # limite inferior a partir de
                                        # xmin
fou.write('%8.6f␣%8.6f\n' % (xl,0.0))   # erf(0) = 0
for k in range(nx):                     # loop
   xu = xl + dx                         # novo limite superior
   (erf,n) = erf_1(xu)
   fou.write('%8.6f␣%8.6f\n' % (xu,erf))# imprime até aqui
   xl = xu                              # atualiza limite inferior
fou.close()                             # fecha o arquivo de saída
```

Figura 4.7: Função erf(x) calculada com série de Taylor, com `erf_1`, *versus* a `erf` pré-definida no programa de plotagem.

calcular erf(3,6) com `erf_1`, nós precisamos de $n = 43$ termos. A rotina `erf` na listagem 4.15, também no arquivo `erfs.py`, usa esse fato para impedir que o número de termos continue crescendo. Verifique, você mesmo(a), que `erf(100)` retorna 1.0, mas que `erf_1(100)` dá um erro de ponto flutuante.

É preciso enfatizar que `erf` em `erfs.py` *ainda não é uma rotina "profissional"*. O número de termos usado ainda é potencialmente muito grande; consequentemente, há muitas operações de ponto flutuante envolvendo `A`, `B` e `C`, e muitos testes dentro do `while`.

É possível obter fórmulas que aproximam erf(x) com menos termos, uniformemente, no intervalo (digamos) de 0 a 3,6: veja, por exemplo, Abramowitz e Stegun (1972). Mesmo assim, a nossa `erf` já é uma opção vantajosa em relação à integração numérica.

A lição desta seção é a seguinte: em geral, com esforço analítico adicional, é possível obter uma mistura de métodos analíticos e numéricos que costuma ser amplamente superior ao uso de um método numérico "puro" (por exemplo a regra do trapézio) para a obtenção de resultados semelhantes. Exemplos desse fato vão reaparecer nos capítulos seguintes.

Exercícios Propostos

4.15 (Bender e Orszag (1978), seção 6.2, Exemplo 2) Obtenha uma série para

$$F(x) \equiv \int_0^x t^{-1/2} e^{-t}\, dt;$$

compare o resultado obtido com integração numérica.

4.16 Considere a função $F(x)$ definida pela integral

$$F(x) \equiv \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt, \qquad x \geq 0.$$

Obtenha uma série para o cálculo de $F(x)$. Sugestão: expanda e^t em série de Taylor em torno de $t = 0$, etc., e em seguida integre termo a termo.

Listagem 4.15: `erfs.py` — Cálculo de $\mathrm{erf}(x)$ com série de Taylor, limitado a no máximo 43 termos

```
def erf(x):
   if x > 3.6:                    # limita o número de termos a 43
      return 1.0
   elif x < -3.6:
      return -1.0
   epsilon_erf = 1.0e-6           # mesma precisão
   eps_erf = 2*epsilon_erf        # garante entrada no while
   A = x                          # primeiro A
   B = 1                          # primeiro B
   C = 1                          # primeiro C
   n = 0                          # primeiro n
   termo = A/(B*C)                # primeiro termo da série
   s = termo                      # primeira soma da série
   while eps_erf > epsilon_erf:   # loop
      n += 1                      # incrementa n
      A *= (-x*x)                 # novo A
      B += 2                      # novo B
      C *= n                      # novo C
      termo = A/(B*C)             # novo termo
      eps_erf = abs(termo)        # seu valor absoluto
      s += termo                  # soma na série
   return 2/sqrt(pi) * s
```

4.17 Escreva um programa em Python para calcular a série de Taylor de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ em torno de $x = 0$. Utilize Maxima para obter os primeiros termos da série, e desta forma, reconhecendo o padrão, encontrar o termo geral.

4.18 Expandindo a função $\mathrm{senh}(t)$ dentro da integral abaixo em uma série de Taylor em torno de $t = 0$, e em seguida integrando termo a termo, encontre a série de Taylor de $F(x)$, onde

$$F(x) \equiv \int_{0_+}^{x} \frac{\mathrm{senh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4.19 A função

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

não pode ser integrada em termos de funções transcedentais elementares. No entanto, expandindo-se $\exp(-x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, é possível obter facilmente uma "série" para $f(x)$, cujos primeiros termos são

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{24} - \frac{x^{9/2}}{120} + \ldots$$

a) Obtenha o termo geral da série acima, ou seja: obtenha as expressões para C_n e p_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ que concordam com os termos acima e tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{p_n}.$$

b) Integrando termo a termo, encontre a série (isto é, D_n e q_n) da primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{q_n}$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$.

4.4 – Solução numérica de equações diferenciais ordinárias

Considere uma equação diferencial de 1ª ordem simples, forçada eternamente por um seno:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(x). \tag{4.14}$$

Na listagem 4.16, nós resolvemos essa equação com Maxima. Maxima nos informa que a solução geral é da forma

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) + c}{x}. \tag{4.15}$$

É evidente que, em geral, nem a equação diferencial nem sua solução "existem" em $x = 0$. Entretanto, para $c = 0$,

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x). \tag{4.16}$$

Agora,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

de modo que existe uma solução para a equação partindo de $x = 0$ se nós impusermos a condição incial $y(0) = 0$. De fato:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \cos(x)\right] = 1 - 1 = 0. \tag{4.17}$$

Listagem 4.16: `resolve-eqdif` — Solução de uma EDO com Maxima

```
(%i1) batch("resolve-eqdif.max")
(%i2) y/x+'diff(y,x) = sin(x)
                                    dy   y
(%o2)                               -- + - = sin(x)
                                    dx   x
(%i3) ode2(%,y,x)
                                 sin(x) - x cos(x) + %c
(%o3)                        y = ----------------------
                                            x
```

O resultado está mostrado na figura 4.8. Claramente, existe uma parte "transiente" da solução, dada por $\operatorname{sen}(x)/x$, que "morre" à medida que x cresce, e existe uma parte periódica (mas não permanente!) da solução, dada por $-\cos(x)$, que "domina" $y(x)$ quando x se torna grande. Nós dizemos que $-\cos(x)$ é parte *estacionária* da solução.

4.5 – Solução numérica; o método de Euler de ordem1

A coisa mais simples que pode ser pensada para resolver a equação diferencial em questão é transformar a derivada em uma *diferença finita*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(x)$$

Isso é um começo, mas não é suficiente. Na verdade, o que desejamos é que o computador gere uma *lista* de xs (uniformemente espaçados por Δx), e uma *lista*

Figura 4.8: Solução da equação (4.14).

de *ys* correspondentes. Obviamente, como os *ys* devem aproximar a função, não podemos esperar deles que sejam igualmente espaçados!

Desejamos então:

$$x_0, x_1, \ldots, x_N$$

onde

$$x_n = n\Delta x,$$

com os correspondentes

$$y_0, y_1, \ldots, y_N.$$

Como Δx será fixo, podemos escrever nossa equação de diferenças finitas da seguinte forma:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(x),$$

onde eu deixei, propositadamente,

$$\ldots \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(x)$$

ainda sem índices. De fato: qual x_n e qual y_n usar aqui? A coisa mais simples, mas também a mais *instável*, é usar n:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + \frac{y_n}{x_n} = \operatorname{sen}(x_n).$$

Note que é agora possível explicitar y_{i+1} em função de todos os outros valores em i:

$$y_{n+1} = y_n + \left[\operatorname{sen}(x_n) - \frac{y_n}{x_n}\right]\Delta x. \tag{4.18}$$

Esse é um exemplo de um esquema *progressivo* de diferenças finitas: o novo valor da função em x_{n+1} (y_{n+1}) só depende de valores calculados no valor anterior, x_n. Um olhar um pouco mais cuidadoso será capaz de prever o desastre: na fórmula acima, se partirmos de $x_0 = 0$, teremos uma divisão por zero já no primeiro passo!

Muitos não veriam isso, entretanto, e nosso primeiro programa para tentar resolver a equação diferencial numericamente se chamará `fracasso.py`, e está mostrado na listagem 4.17

O resultado é o seguinte fracasso:

Listagem 4.17: `fracasso.py` — Um programa com o método de Euler que não funciona

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# cria listas com condições iniciais
# ------------------------------------------------------------------
x = [0.0]
y = [0.0]
dx = 0.01
NN = int(50/0.01)
from math import sin
for n in range(0,NN): # de 0 até ... n-1 !!!!
   xn = (n+1)*dx
   yn = y[n] + (sin(x[n]) - y[n]/x[n])*dx
   x.append(xn)
   y.append(yn)
fou = open('fracasso.out','wt')
for n in range(NN):
   fou.write('%12.6f %12.6f\n' % (x[n],y[n]))
fou.close()
```

```
Traceback (most recent call last):
  File "./fracasso.py", line 12, in <module>
    yn = y[n] + (sin(x[n]) - y[n]/x[n])*dx
ZeroDivisionError: float division by zero
```

Isso já era previsível: quando `n == 0` no *loop*, `x[0] == 0` no denominador, e o programa para com uma divisão por zero. Para conseguir fazer o método numérico funcionar, nós vamos precisar de mais *análise*!

De volta à equação diferencial, na verdade é possível conhecer uma boa parte do comportamento próximo da origem de $y(x)$ (a solução de (4.14) para a condição inicial $y(0) = 0$) sem resolvê-la! Para tanto, expanda tanto $y(x)$ quanto $\operatorname{sen}(x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= a + bx + cx^2 + \ldots, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= b + 2cx + \ldots, \\ \operatorname{sen}(x) &= x + \ldots \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$b + 2cx + \frac{a}{x} + b + cx + \ldots = x + \ldots$$

Note que a série de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ foi truncada corretamente, porque o maior expoente de x em ambos os lados da equação acima é 1. Simplificando,

$$\frac{a}{x} + 2b + 3cx + \ldots = x + \ldots$$

A igualdade acima só é possível se $a = 0$ e $b = 0$; neste caso, $c = 1/3$. Esse é o valor correto! De fato, a expansão em série de Taylor da solução analítica em torno de $x = 0$ dá

$$\operatorname{sen}(x)/x - \cos(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \frac{x^6}{840} - \ldots$$

Esse resultado nos informa que, próximo da origem, $y(x)$ "se comporta como" $x^2/3$. Nós vamos utilizar a notação

$$x \to 0 \Rightarrow y \sim x^2/3 \tag{4.19}$$

Listagem 4.18: `sucesso.py` — Um programa com o método de Euler que funciona

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# sucesso: resolve a equação diferencial
# dy/dx + y/x = sen(x)
# pelo método de Euler.  Uso:
#
# ./sucesso.py <dx> <arquivo de saída>
# ------------------------------------------------------------------
from sys import argv
dx = float(argv[1])            # tamanho do passo
x = [0.0, dx]                  # condições inciais em x
y = [0.0, 0.0]                 # condições iniciais em y
NN = int(50/dx)
from math import sin, cos
for n in range(1,NN):          # solução numérica
   xn = (n+1)*dx
   yn = y[n] + (sin(x[n]) - y[n]/x[n])*dx
   x.append(xn)
   y.append(yn)
erro = 0.0
for n in range(1,NN+1):        # calcula o erro relativo médio
   yana = sin(x[n])/x[n] - cos(x[n])
   erro += abs( (y[n] - yana)/yana )
erro /= NN ;
print ( 'erro relativo médio = ', '%10.5f' % erro )
fou = open(argv[2],'wt')
for n in range(0,NN+1):        # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f %12.6f\n' % (x[n],y[n]) )
fou.close()
```

para indicar esse fato.

Na verdade, (4.19), *obtida sem recurso à solução analítica*, é suficiente para tratar numericamente o problema da singularidade na origem. Note que

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}\frac{x^2}{x} = x/3 = 0;$$

Vamos então reescrever a equação de diferenças (4.18) *usando* o limite:

$$y_1 = y_0 + \underbrace{\left[\operatorname{sen}(x_0) - \frac{y_0}{x_0}\right]}_{=0,\ \lim x_0\to 0} \Delta x = 0.$$

Na prática, isso significa que nós podemos começar o programa do ponto $x_1 = \Delta x$, $y_1 = 0$! Vamos então reescrever o código, que nós agora vamos chamar, é claro, de `sucesso.py`, que pode ser visto na listagem 4.18.

A saída de `sucesso.py` gera o arquivo `sucesso.out`, que nós utilizamos para plotar uma comparação entre a solução analítica e a solução numérica, mostrada na figura 4.9.

Na verdade, o sucesso é estrondoso: com $\Delta x = 0{,}01$, nós conseguimos produzir uma solução numérica que é visualmente indistinguível da solução analítica. Uma das coisas que o programa `sucesso.py` calculou foi o *erro absoluto relativo médio*

$$\epsilon \equiv \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{y_n - y(x_n)}{y(x_n)} \right|$$

(onde y_i é a solução numérica, e $y(x_i)$ é a solução exata no mesmo ponto x_i). Para $\Delta x = 0{,}01$, $\epsilon = 0{,}02619$, ou seja: menos de 3%.

Figura 4.9: Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `sucesso.py`, para $\Delta x = 0{,}01$.

Figura 4.10: Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `sucesso.py`, para $\Delta x = 0{,}5$.

O preço, entretanto, foi "alto": nós precisamos de um Δx bem pequeno, e de $50/0{,}01 = 5000$ pontos para gerar a solução. Será possível gerar uma solução tão boa com, digamos, 100 pontos?

A figura 4.10 mostra o resultado de rodar `sucesso.py` com $\Delta x = 0{,}5$, muito maior do que antes.

O erro médio relativo agora pulou para $\epsilon = 1{,}11774$, nada menos do que 111%, e muito pior do que a figura 4.10 faz parecer à primeira vista!

4.6 – Um esquema de diferenças centradas, com tratamento analítico

Nosso desafio é desenvolver um método numérico que melhore consideravelmente a solução mesmo com um Δx grosseiro, *da ordem* de 0,5. Nossa abordagem

Listagem 4.19: `succent.py` — Método de Euler implícito

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# succent: resolve a equação diferencial
# dy/dx + y/x = sen(x)
# usando um esquema centrado, "sob medida"
# ------------------------------------------------------------------
dx = 0.5                        # passo em x
x = [0.0]                       # x inicial
y = [0.0]                       # y inicial
NN = int(50/dx)                 # número de passos
from math import sin, cos
for n in range(0,NN):           # loop na soluão numérica
    xn1 = (n+1)*dx
    xm = x[n] + dx/2.0
    yn1 = y[n]*x[n]/xn1 + (dx*xm/xn1)*sin((x[n]+xn1)/2)
    x.append(xn1)
    y.append(yn1)
erro = 0.0
for n in range(1,NN+1):         # calcula o erro relativo médio
    yana = sin(x[n])/x[n] - cos(x[n])
    erro += abs( (y[n] - yana)/yana )
erro /= n ;
print ( 'erro relativo médio = ', '%10.5f' % erro )
fou = open('succent.out','wt')
for n in range(0,NN+1):         # imprime o arquivo de saída
    fou.write( '%12.6f %12.6f\n' % (x[n],y[n]) )
fou.close()
```

será propor um esquema *centrado*:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}+\frac{y_n+y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}=\operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right).$$

Note que tanto o termo y/x quando $\operatorname{sen}(x)$ estão sendo agora avaliados no ponto *médio* entre x_n e x_{n+1}.

Lembrando que $\Delta x = x_{n+1} - x_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x}+\frac{y_n+y_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} &= \operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right),\\
y_{n+1}\left[\frac{1}{\Delta x}+\frac{1}{x_n+x_{n+1}}\right]+y_n\left[-\frac{1}{\Delta x}+\frac{1}{x_n+x_{n+1}}\right] &= \operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right),\\
y_{n+1}\left[\frac{2x_{n+1}}{\Delta x(x_{n+1}+x_n)}\right]-y_n\left[\frac{2x_n}{\Delta x(x_{n+1}+x_n)}\right] &= \operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Uma rápida rearrumação produz

$$\begin{aligned}
y_{n+1}x_{n+1}-y_nx_n &= \frac{\Delta x(x_{n+1}+x_n)}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right),\\
y_{n+1} &= y_n\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{\Delta x(x_{n+1}+x_n)}{2x_{n+1}}\operatorname{sen}\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Repare que a condição inicial $y(0) = 0$ não produz nenhuma singularidade em (4.20) para $i = 0 \Rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 0$, pois os denominadores em (4.20) não contêm x_i. O programa que implementa esse esquema é o `succent.py`, mostrado na listagem 4.19.

O resultado é um sucesso mais estrondoso ainda, e pode ser visto na figura 4.11.

Agora, o erro médio relativo baixou para $\epsilon = 0{,}02072$, que é ainda menor do que o do método de Euler com $\Delta x = 0{,}01$, ou seja: com um Δx 50 vezes menor!

Figura 4.11: Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `succent.py`, para $\Delta x = 0{,}5$.

4.7 – A forma padrão $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x, y)$: os métodos de Euler de ordem 1 e 2, e de Runge-Kutta de ordem 4

O preço que nós pagamos pelo método extremamente acurado implementado em `succent.py` foi trabalhar analiticamente a equação diferencial, até chegar à versão "dedicada" (4.20). Isso é bom! Porém, às vezes não há tempo ou não é possível melhorar o método por meio de um "pré-tratamento" analítico. Nossa discussão agora nos levará a um método excepcionalmente popular, denominado método de Runge-Kutta.

Considere portanto a equação

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Se voltarmos ao método de Euler de ordem 1 apresentado na seção 4.5, podemos reescrevê-lo na forma

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f(x, y), \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} &= f(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Mudando um pouco a notação para uma forma mais usual, fazemos $\Delta x = h$ e explicitamos y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + \underbrace{hf(x_n, y_n)}_{k_1};$$

finalmente, reescrevemos o método de Euler de ordem 1 usando uma notação padrão que será estendida para os métodos de Euler de ordem 2, e de Runge-Kutta de ordem 4:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + k_1. \end{aligned} \tag{4.21}$$

O método de Euler de ordem está ilustrado na figura 4.12 (que também ilustra o método de Euler de ordem 2, que vem a seguir). Na figura, o método consiste em

Figura 4.12: Os métodos de Euler de ordens 1 e 2.

dar um passo de tamanho h, a partir do ponto P, cuja abscissa é x_n, utilizando a inclinação da função neste ponto, $\mathrm{d}y(x_n)/\mathrm{d}x$. Por simplicidade, estamos colocando P *exatamente* sobre a curva $y(x)$, mas isso só é verdade em uma solução numérica quando P é a condição inicial. A partir daí, nós vamos "errando" a cada passo, e não estamos mais sobre a solução verdadeira $y(x)$. Na figura 4.12 nós não explicitamos esse fato, para não sobrecarregá-la. No método de Euler de ordem 1, o valor estimado da função $y(x)$ em x_{n+1} é dado pela ordenada do ponto C.

Claramente, utilizar a derivada "no início" do intervalo, em P, introduz um erro relativamente grande (note que estamos tentando chegar ao ponto A, cuja ordenada é o valor exato de $y(x_{n+1})$). Nós podemos tentar estimar a derivada "no meio" do intervalo h, que é claramente uma alternativa melhor:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_n+h/2} = f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)). \tag{4.22}$$

O problema é que nós não conhecemos y em $x + h/2$! Se soubéssemos, conheceríamos exatamente a ordenada do ponto M: utilizando a inclinação da função neste ponto (que é a inclinação da reta tangente no ponto M), nós partiríamos de P e chegaríamos, com um passo h, em A': o segmento PA' é paralelo à reta tangente por M. Note que nada garante que a inclinação de $y(x)$ em M produz *exatamente* o incremento necessário para atingir o ponto A; portanto, *mesmo que conhecêssemos M, ainda assim em geral atingiríamos um ponto A' diferente de A.* Como não conhecemos M, entretanto, precisamos utilizar o método de Euler de 1ª ordem para *primeiro* estimar $y(x_n + h/2)$:

$$y_{n+1/2} \approx y_n + hf(x_n, y_n)/2. \tag{4.23}$$

Isso corresponde a estimar $y_{n+1/2}$ com a ordenada do ponto N. Usando a inclinação estimada utilizando (4.23) em (4.22), obtemos a inclinação do segumento de reta

Listagem 4.20: `euler2` — Um método explícito de ordem 2

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# euler2: resolve a equação diferencial
# dy/dx + y/x = sen(x)
# usando um método explítico de ordem 2 (Euler)
# ------------------------------------------------------------------
h = 0.5                         # passo em x
x = [0.0]                       # x inicial
y = [0.0]                       # y inicial
n = int(50/h)                   # número de passos
from math import sin, cos
def ff(x,y):
   if x == 0.0:                 # implementa a condição inicial
      return 0.0
   else:
      return sin(x) - y/x
def eul2(x,y,h,ff):
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   yn = y + k2
   return yn
for i in range(0,n):            # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = eul2(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
erro = 0.0                      # calcula o erro relativo médio
for i in range(1,n+1):
   yana = sin(x[i])/x[i] - cos(x[i])
   erro += abs( (y[i] - yana)/yana )
erro /= n ;
print ( 'erro relativo médio = ', '%10.5f' % erro )
fou = open('euler2.out','wt')
for i in range(0,n+1):          # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f %12.6f\n' % (x[i],y[i]) )
fou.close()
```

cinza tracejado que parte de P e vai até B. Nossa estimativa de y_{n+1} agora é a ordenada de B. Podemos resumir todo esse procedimento com

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2), \\ y_{n+1} &= y_n + k_2. \end{aligned}$$

Ele se denomina método de Euler de 2ª ordem. Vamos tentar esse método e ver como ele se compara com nossos esforços anteriores. Vamos manter $h = 0{,}5$ como antes. No entanto, nós ainda sofremos do cálculo da derivada em $x = 0$; por isso, nós vamos mudar o cálculo da derivada, colocando um `if` na função `ff` que a calcula. Note que, do ponto de vista de *eficiência* computacional, isso é péssimo, porque o `if` será verificado em *todos* os passos, quando na verdade ele só é necessário no passo zero. No entanto, o programa resultante, `euler2.py` (listagem 4.20), fica mais simples e fácil de entender, e essa é nossa prioridade aqui. O resultado é mostrado na figura 4.13.

O resultado é muito bom, com um erro absoluto médio $\epsilon = 0{,}02529$. Mas nós podemos fazer melhor, com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem! Não vamos deduzir as equações, mas elas seguem uma lógica parecida com a do método de ordem 2:

Figura 4.13: Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `euler2.py`, para $\Delta x = 0{,}5$.

Figura 4.14: Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de `rungek4.py`, para $\Delta x = 0{,}5$.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n),\\
k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}),\\
k_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2),\\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3),\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}.
\end{aligned}
$$

Para o nosso bem conhecido problema, o método é implementado no programa `rungek4`, na listagem 4.21, e o resultado é mostrado na figura 4.14.

Listagem 4.21: `rungek4` — Método de Runge-Kutta, ordem 4

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# rungek4: resolve a equação diferencial
# dy/dx + y/x = sen(x)
# usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
# ------------------------------------------------------------------
h = 0.5             # passo em x
x = [0.0]           # x inicial
y = [0.0]           # y inicial
n = int(50/h)       # número de passos
from math import sin, cos
def ff(x,y):
   '''
   estou integrando dy/dx = sen(x) - y/x
   '''
   if x == 0.0:
      return 0.0
   else:
      return sin(x) - y/x
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):          # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
erro = 0.0                    # calcula o erro relativo médio
for i in range(1,n+1):
   yana = sin(x[i])/x[i] - cos(x[i])
   erro += abs( (y[i] - yana)/yana )
erro /= n ;
print ( 'erro relativo médio = ', '%10.5f' % erro )
fou = open('rungek4.out','wt')
for i in range(0,n+1):        # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f %12.6f\n' % (x[i],y[i]) )
fou.close()
```

Figura 4.15: O integrando $\gamma(x, t)$ para $x = 1, \ldots, 5$.

Desta vez, o erro absoluto médio foi $\epsilon = 0{,}00007$: o campeão de todos os métodos tentados até agora, e uma clara evidência da eficácia do método de Runge-Kutta.

Exemplo 4.1 Utilizando o método de Runge-Kutta (!), calcule a função gama

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

numericamente para o intervalo $x \in [1, 5]$.

SOLUÇÃO

A variável independente x entra com um parâmetro, não como um dos limites de integração. Isto torna as coisas um pouco mais complicadas. Para obter a solução, vamos primeiro definir a função gama incompleta inferior (Abramowitz e Stegun, 1972):

$$\gamma(x, y) \equiv \int_0^y t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{4.24}$$

Toda integração numérica pode ser convertida na solução numérica de uma EDO (Press et al., 1992, p. 129). Por exemplo, no caso acima, a integração numérica é equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(x, t)}{\mathrm{d}t} = t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}; \qquad \gamma(x, 0) = 0.$$

Se resolvermos a equação diferencial acima, então teremos, simplesmente,

$$\Gamma(x) = \gamma(x, \infty).$$

Numericamente, nós vamos substituir ∞ por um valor finito porém suficientemente grande. Para termos uma boa idéia do que signfica um valor "suficientemente grande", vamos plotar o integrando $t^{x-1}e^{-t}$ para os valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$. Isso é mostrado na figura 4.15.

Note que o limite prático de integração varia com x. No entanto, por simplicidade, podemos adotar $t = 20$ para todos os casos (com um pouco de exagero). Em outras palavras, nós esperamos que (numericamente) $\Gamma(x) \approx \gamma(x, 20)$ para $1 \leq x \leq 5$.

Um outro ponto importante é que é relativamente simples provar que

$$\Gamma(x) = (x - 1)! \tag{4.25}$$

Figura 4.16: Cálculo de $\Gamma(x)$ com o método de Runge-Kutta: saída de `intgam1` comparada com a função $\Gamma(x)$ do programa de plotagem (Gnuplot)

para $x \in \mathbb{N}$. Portanto, é imediato que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(4) = 6$ e $\Gamma(5) = 24$. Isso significa que é possível *testar* a solução numérica para estes valores particulares de x. Nosso primeiro esforço, portanto, é escrever um protótipo para testar alguns ou todos entre estes valores particulares. Lembremo-nos de que isso é feito simplesmente integrando a equação diferencial (4.1) até 20, com um passo que precisa ser verificado por tentativa e erro.

Nosso primeiro protótipo, muito simples, e denominado `intgam0.py`, é mostrado na listagem 4.22. Note que nós reaproveitamos a rotina `rk4` que foi introduzida na listagem 4.21.

Utilizando `intgam0.py` nós verificamos, por tentativa e erro, que $h = 10^{-4}$ é um passo suficientemente "preciso" para o método de Runge-Kutta, mas que o "infinito" é melhor representado numericamente por 30, e não por 20. Observe também na listagem 4.22 que o valor de x é definido "na força bruta", de maneira um pouco deselegante, por meio de uma variável global dentro do próprio programa. Para testar $x = 1, \ldots, 5$, nós simplesmente editamos o programa e modificamos o valor de x com um editor de texto.

O programa "definitivo" chama-se `intgam1.py`. Ele é mostrado na listagem 4.23. A principal diferença em relação a `intgam0` consiste em um *loop* externo, implementado por meio de um `while`, em que o valor de x, que antes era fixo, é incrementado de 0,01 em 0,01. Além disto, os valores para cada x são impressos em um arquivo de saída.

O resultado de `intgam1.py` é mostrado na figura 4.16. Na figura, note que a concordância é (visualmente) perfeita. Algumas observações importantes são as seguintes:

- As figuras deste exemplo foram geradas com o programa de plotagem Gnuplot (`www.gnuplot.info`). Como Gnuplot possui uma função `gamma(x)` "embutida", ela foi utilizada para comparação com os pontos calculados por `intgam1.py` na figura 4.16.
- Apenas 1 a cada 5 pontos gerados está plotado na figura 4.16 para não sobrecarregar a figura.

Exercícios Propostos

4.20 Resolva, usando o método de Euler e o Método de Runge-Kutta de ordem 4:

$$\frac{dy}{dx} + xy = \operatorname{sen}(x), \qquad y(0) = 0.$$

Listagem 4.22: Primeiro protótipo para o cálculo de $\Gamma(x)$

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# intgam0: resolve a integral
#
# \int_0^infty t^{x-1}e^{-t}\,dt
#
# usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
#
# uso: ./intgam0.py
# ------------------------------------------------------------------
from math import exp
h = 1.0e-4                # passo de integração
to = 0.0                  # t inicial
go = 0.0                  # gamma inicial
n = int(30.0/h)           # número de passos até o "infinito"
# ------------------------------------------------------------------
# define a função a ser integrada
# ------------------------------------------------------------------
x = 4.0
def ff(t,g):
    return t**(x-1.0)*exp(-t)
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):          # loop da solução numérica
   tn = (i+1)*h               # novo t
   gn = rk4(to,go,h,ff)       # novo gamma(x,t)
   (to,go) = (tn,gn)          # o antigo passa a ser o novo
# ------------------------------------------------------------------
# imprime o resultado final
# ------------------------------------------------------------------
print ( '%10.6f␣%10.6f' % (tn,gn) )
```

Listagem 4.23: Programa definitivo para o cálculo de $\Gamma(x)$

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# intgam1: resolve a integral
#
# \int_0^infty t^{x-1}e^{-t}\,dt
#
# usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
#
# para x=1,1+dx,...,5 com dx = 0.01
#
# uso: ./intgam1.py
# ------------------------------------------------------------------
from math import exp
h = 1.0e-4                # passo de integração de rk4
dx = 0.01                 # passo de variação de x
n = int(30.0/h)           # número de passos até o "infinito"
# ------------------------------------------------------------------
# define a função a ser integrada
# ------------------------------------------------------------------
def ff(t,g):
    return t**(x-1.0)*exp(-t)
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
fou = open('intgam1.dat','wt')   # abre o arquivo de saída
x = 1.0
while (x <= 5.0) :
   to = 0.0                      # t inicial
   go = 0.0                      # gamma inicial
   for i in range(0,n):          # loop da solução numérica
      tn = (i+1)*h               # novo t
      gn = rk4(to,go,h,ff)       # novo gamma(x,t)
      (to,go) = (tn,gn)          # o antigo passa a ser o novo
# ------------------------------------------------------------------
# imprime o resultado no arquivo de saída
# ------------------------------------------------------------------
   print(x,go)                   # imprime x na tela
   fou.write( '%10.6f␣%10.6f\n' % (x,gn) )
   x += dx
fou.close()
```

4.21 Resolva, usando o método de Euler de ordem 2, e compare com a solução analítica:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x^2 \exp(-x), \qquad y(0) = 1.$$

4.22 Na equação

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \qquad y(0) = 0,$$

estude a sensibilidade do h, necessário para produzir $\epsilon = 0{,}001$, ao valor L.

4.23 Utilizando um método implícito semi-analítico, resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x}, \qquad y(x) = 0.$$

4.24 Resolva, utilizando Runge-Kutta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \operatorname{sen}(x), \qquad y(0) = 1.$$

4.8 – O método de Runge-Kutta multidimensional

Vamos, na sequência, generalizar o método de Runge-Kutta para que ele seja capaz de resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}).$$

Note que $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{f}$ são **vetores**, enquanto que x permanece sendo um escalar. Neste livro, **vetores** são escritos em **negrito**: $\boldsymbol{v}$ significa um vetor $\boldsymbol{v}$, e isso é *diferente* de um escalar v! Não é possível fazer negritos com lápis e canetas: a forma usual em engenharia de denotar um vetor "no papel" é utilizar uma das seguintes notações: $\vec{v}$ ou $\underset{\sim}{v}$.

A base para a solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias com o método de Runge-Kutta é muito simples: basta reconhecer que as equações também "funcionam" vetorialmente! De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}_1 &= h\boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{y}_n),\\
\boldsymbol{k}_2 &= h\boldsymbol{f}(x_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1),\\
\boldsymbol{k}_3 &= h\boldsymbol{f}(x_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2),\\
\boldsymbol{k}_4 &= h\boldsymbol{f}(x_n + h, \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{k}_3),\\
\boldsymbol{y}_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{k}_3 + \frac{1}{6}\boldsymbol{k}_4.
\end{aligned}$$

As questões fundamentais que nós teremos aqui do ponto de vista de implementação computacional do método de Runge-Kutta multidimensional são como:

1. representar um vetor computacionalmente,
2. multiplicar um vetor por um escalar,
3. somar dois vetores.

Listagem 4.24: `tentalista.py`: listas em Python

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# tentalista: tenta manipular uma lista como se ela fosse
# um vetor matemático.
# ------------------------------------------------------------------
uu = [1,2]          # lista com dois elementos
vv = [3,4]          # outra lista com dois elementos
ww = uu + vv        # soma para ver no que dá
kk = 3*uu           # multiplica pelo escalar 3 para ver no que dá
print('ww␣=␣', ww) ;
print('kk␣=␣',kk) ;
```

Listagem 4.25: `tentaarray.py`: arrays com Numpy

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# tentaarray: usa arrays, em vez de listas
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import array
uu = array([1,2])   # array com dois elementos
vv = array([3,4])   # outro array com dois elementos
ww = uu + vv        # soma para ver no que dá
kk = 3*uu           # multiplica pelo escalar 3 para ver no que dá
print('ww␣=␣', ww) ;
print('kk␣=␣',kk) ;
```

A primeira idéia que vem à cabeça é representar um vetor em Python por uma lista; assim, por exemplo, o vetor $(1,-1)$ seria representado pela lista `[1,-1]`. É preciso também lidar com o fato de que em geral nós escrevemos para os *elementos* de um vetor em matemática:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

(os subscritos começam em 1), enquanto que os elementos de uma lista `u` em Python são `u[0]`, `u[1]`, e `u[2]`. Vamos tentar então utilizar listas, no programa `tentalista.py`, mostrado na listagem 4.24.

O resultado de rodar `tentalista.py` é

```
ww =  [1, 2, 3, 4]
kk =  [1, 2, 1, 2, 1, 2]
```

Que não é o que esperávamos! O operador + aplicado a listas não soma componente a componente, mas sim *concatena* as duas listas; e o produto por 3 não multiplica componente a componente, mas sim *repete* a lista 3 vezes.

Felizmente, existe uma maneira de se obter o comportamento esperado — mas não com listas. Um módulo *extra*-Python (que tem que ser instalado separadamente), denominado `numpy`, faz a mágica. A principal contribuição de `numpy` é que ele provê um novo tipo chamado `array`, que se comporta como um vetor. Vamos vê-lo em ação no próximo programa, `tentaarray.py` mostrado na listagem 4.25, cujo resultado é

```
ww =  [4 6]
kk =  [3 6]
```

Como podemos ver, agora as coisas "funcionam".

Para usar `numpy`, é claro, você tem que baixar o pacote, e *ler o manual*: procure em `http://numpy.scipy.org`.

Figura 4.17: Solução numérica pelo Método de Runge-Kutta de um sistema de 2 equações diferenciais ordinárias

Vamos agora resolver um caso para o qual possuímos solução analítica. Dado o sistema

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = u_2,$$
$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} = u_1,$$

a sua solução é

$$u_1(x) = \quad k_1 \mathrm{e}^{-x} + k_2 \mathrm{e}^{x},$$
$$u_2(x) = -k_1 \mathrm{e}^{-x} + k_2 \mathrm{e}^{x}.$$

O programa que resolve esse sistema é o `rungek4v.py` mostrado na listagem 4.26; o mais interessante, e um dos pontos fortes de Python, é que a rotina `rk4` segue *inalterada*: observe que ela é capaz de receber como entrada um `array` (`y`), assim como uma função que agora devolve `array`*s* (`ff`), e que ela própria agora devolve um `array`.

Com um $h = 0.1$, os erros relativos médios de u_1 e u_2 são extremamente pequenos: $\epsilon = 0.000004$ em ambos os casos. Graficamente, temos a resultado mostrado na figura 4.17. Note que $\cosh(x) \approx \mathrm{senh}(x)$ para $x \gtrsim 2{,}5$.

Solução numérica de um problema não-linear

Considere a solução da equação diferencial parcial não-linear de Boussinesq

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_s}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial h}{\partial x} \right] \tag{4.26}$$

em um aquífero semi-infinito mostrado na figura 4.18, $0 \leq x < \infty$ e para $t \geq 0$, com condições inicial e de contorno

$$h(x, 0) = h_0, \tag{4.27}$$
$$h(0, t) = 0, \tag{4.28}$$
$$h(\infty, t) = h_0. \tag{4.29}$$

Listagem 4.26: `rungek4v.py`: o método de Runge-Kutta multidimensional

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# rungek4v: resolve as equações diferenciais
#
# du1/dx = u2,
# du2/dx = u1,
#
# usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import array
h = 0.1                          # passo em x
x = [0.0]                        # x inicial
y = [array([1.0,0.0])]           # y inicial
n = int(10/h)                    # número de passos
from math import sinh, cosh
def ff(x,y):
    return array([y[1],y[0]])
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):            # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
erro0 = 0.0                     # calcula o erro relativo médio
erro1 = 0.0
for i in range(1,n+1):
   yana0 = cosh(x[i])
   yana1 = sinh(x[i])
   erro0 += abs( (y[i][0] - yana0)/yana0 )
   erro1 += abs( (y[i][1] - yana1)/yana1 )
erro0 /= n
erro1 /= n
print ( 'erro relativo médio = ', '%10.6f %10.6f' % (erro0,erro1) )
fou = open('rungek4v.out','wt')
for i in range(0,n+1):          # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f %12.6f %12.6f\n' % (x[i],y[i][0],y[i][1]) )
fou.close()
```

Figura 4.18: Drenagem de um maciço poroso semi-infinito inicialmente totalmente saturado.

Em (4.26), k_s é a condutividade hidráulica saturada, e n é a porosidade drenável (Brutsaert, 2005).

O problema consiste em obter a evolução da "superfície freática" $h(x,t)$ a partir da condição inicial (4.27); a condição de contorno (4.28) estabelece que existe um canal drenando o maciço poroso cujo nível é o mesmo da camada impermeável em $z = 0$, e a condição de contorno (4.29) simplesmente estabelece que as dimensões do aquífero em x são "infinitas".

Primeiramente, adimensionalizamos a equação conforme discutido na seção 1.4. Começamos com

$$h(x,t) \equiv \Phi(x,t)h_0, \tag{4.30}$$

onde $[\![\Phi]\!] = 1$; então, (4.26) torna-se

$$\begin{aligned} h_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{k_s}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left[h_0\Phi\frac{\partial h_0\Phi}{\partial x}\right], \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{k_s h_0}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right], \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= D\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right], \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde

$$D = \frac{k_s h_0}{f} \tag{4.32}$$

é uma "difusividade" ($\mathsf{X}^2\mathsf{T}^{-1}$) hidráulica. As condições inicial e de contorno em $\Phi(x,t)$ agora são

$$\Phi(x,0) = 1, \tag{4.33}$$

$$\Phi(0,t) = 0, \tag{4.34}$$

$$\Phi(\infty,t) = 1. \tag{4.35}$$

A existência de duas condições idênticas é a marca registrada do método de similaridade denominado "método da transformação de Boltzmann". Nesse método, nós fazemos

$$\Phi(x,t) = \phi(\xi), \tag{4.36}$$

onde (novamente, conforme mostrado na seção 1.4)

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}. \tag{4.37}$$

O fator 4 é apenas para tornar a solução um pouco mais elegante algebricamente, e não deve preocupar. Substituindo (4.36) em (4.31), nós inicialmente calculamos todas as derivadas parciais separadamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} \\ &= -\frac{xD}{4(Dt)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}; \\ \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}}\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] &= \frac{1}{\sqrt{4Dt}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\frac{\partial\xi}{\partial x},\\ &= \frac{1}{4Dt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right].\end{aligned}$$

Em seguida, substituindo as derivadas parciais em (4.31), nós obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{xD}{4(Dt)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{D}{4Dt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\\ -\frac{D}{4Dt}\frac{2x}{(4Dt)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{D}{4Dt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\\ -\frac{D}{4Dt}\frac{2x}{(4Dt)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{D}{4Dt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right] + 2\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= 0. \qquad (4.38)\end{aligned}$$

(4.38) é uma EDO não-linear de ordem 2, de coeficientes não-constantes. A sua solução demanda 2 condições de contorno em ϕ ou em sua derivada. As condições (4.33)–(4.35) traduzem-se, por meio de (4.37), em

$$\Phi(x,0) = 1 \quad\Rightarrow\quad \phi(\infty) = 1, \qquad (4.39)$$
$$\Phi(0,t) = 0 \quad\Rightarrow\quad \phi(0) = 0, \qquad (4.40)$$
$$\Phi(\infty,t) = 1 \quad\Rightarrow\quad \phi(\infty) = 1. \qquad (4.41)$$

Portanto, existem apenas duas condições de contorno independentes, (4.40) e (4.41).

Podemos agora transformar (4.38) em um sistema de EDO*s* de ordem 1:

$$\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} \equiv \psi,$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\psi}{\phi}, \qquad (4.42)$$
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = -2\xi\frac{\psi}{\phi} \qquad (4.43)$$

com condições iniciais

$$\phi(0) = 0, \qquad (4.44)$$
$$\psi(0) = \psi_0, \qquad (4.45)$$

onde o valor de ψ_0 tem que ser encontrado por tentativa e erro de tal modo que $\phi(\infty) = 1$.

O problema é que o sistema (4.42)–(4.43) não pode ser implementado diretamente no esquema de Runge-Kutta de 4ª ordem, porque a condição inicial (4.44) produz uma singularidade (tente!). Em vez disso, nós precisamos "pular" sobre a singularidade. Como vimos na seção 4.6, métodos implícitos podem resolver o problema de singularidades na condição inicial ao calcular a função e suas derivadas utilizando os pontos em i e $i+1$.

Para o primeiro passo entre $\xi = 0$ e $\xi = \Delta\xi$, portanto, nós discretizamos (4.42)–(4.43) como

$$\frac{\phi_1 - \phi_0}{\Delta\xi} = \frac{\psi_1 + \psi_0}{\phi_1 + \phi_0}, \qquad (4.46)$$
$$\frac{\psi_1 - \psi_0}{\Delta\xi} = -2\frac{\Delta\xi}{2}\frac{\psi_1 + \psi_0}{\phi_1 + \phi_0}. \qquad (4.47)$$

Figura 4.19: Resultado da integração numérica do problema de Boussinesq para um aquífero semi-infinito

Note que o valor de ξ foi tomado em $(\xi_0 + \xi_1)/2 = \Delta\xi/2$. Substituindo $\phi_0 = 0$ e simplificando, obtemos o sistema de equações

$$\psi_1 = \psi_0 \frac{\phi_1 + \Delta\xi^2}{\phi_1 - \Delta\xi^2}, \tag{4.48}$$

$$\phi_1 = \sqrt{\Delta\xi(\psi_1 + \psi_0)}, \tag{4.49}$$

que pode ser resolvido iterativamente a partir de uma estimativa inicial trivial $\phi_1 = \phi_0$. A partir do valor correto de ψ_0, obtido por tentativa e erro para que $\phi(\infty) = 1$, o sistema converge muito rapidamente para um erro global $\sqrt{(\phi_1 - \phi_0)^2 + (\psi_1 - \psi_0)^2} < \epsilon$: para $\epsilon = 1.0 \times 10^{-14}$, bastam 3 iterações. Os novos valores iniciais ϕ_1 e ψ_1 podem então ser utilizados para marchar com passo $\Delta\xi$ em um esquema de Runge-Kutta. O resultado da integração numérica está mostrado na figura 4.19

Poluição orgânica em rios

Considere um rio com velocidade média longitudinal U, e área de seção transversal A. A *vazão* (volumétrica) é

$$Q = UA \tag{4.50}$$

Uma substância qualquer misturada na água pode ser transportada pela velocidade média; pode ser *difundida* longitudinalmente pela campo turbulento de velocidade, e pode também *decair* bioquimicamente. Esses processos são descritos pela equação de difusão-advecção-decaimento. Se a substância for um poluente cuja concentração é C,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC \tag{4.51}$$

Em (4.51), E é o *coeficiente de dispersão longitudinal* do rio; e k é um coeficiente de decaimento de 1ª ordem.

A degradação geral de matéria orgânica na água tem a forma geral (Schnoor, 1996)

$$CH_2O + O_2 \xrightarrow{\text{bactérias}} CO_2 + H_2O.$$

Em Schnoor (1996), nós encontramos as concentrações consideradas aceitáveis de O_2 na água: *pelo menos* 4 mg L^{-1}, e 5 mg L^{-1} na "maior parte" do tempo.

A "equação" de Streeter-Phelps (Streeter e Phelps, 1925) é, na verdade, a solução de um problema acoplado. A primeira hipótese é a de um problema permanente: $\partial/\partial t = 0$ para todos os participantes.

Os participantes, por sua vez, são o oxigênio dissolvido na água , com concentração C, e a demanda bioquímica de oxigênio (DBO) L, ambos expresssos em concentração volumétrica, em geral dada em mg L^{-1}. Além disso, o modelo de Streeter-Phelps desconsidera os efeitos de dispersão longitudinal: $E = 0$. Para a DBO,

$$U\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -k_d L, \tag{4.52}$$

onde k_d é a taxa de decaimento de oxigênio de 1ª ordem. Para a concentração de oxigênio dissolvido,

$$U\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = -k_d L + k_a(C_s - C), \tag{4.53}$$

onde C_s é a concentração de saturação do oxigênio, e k_a é a constante de reaeração de ordem 1.

Juntas, as equações (4.52) e (4.53) formam um sistema de 2 equações diferenciais de ordem 1. Tradicionalmente, é conveniente introduzir o *deficit* de oxigênio dissolvido

$$D = C_s - C \tag{4.54}$$

donde, para C_s = cte,

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}, \tag{4.55}$$

e (4.53) pode ser traduzida para

$$\begin{aligned} -U\frac{dD}{\mathrm{d}x} &= -k_d L + k_a D \\ U\frac{dD}{\mathrm{d}x} &= \quad k_d L - k_a D. \end{aligned}$$

Na prática, é possível desacoplar o sistema; de fato, (4.52) não depende de D, e tem solução (para $L(x = 0) = L_0$)

$$L = L_0 \mathrm{e}^{-\frac{k_d}{U}x}. \tag{4.56}$$

A equação para o deficit de oxigênio dissolvido transformou-se agora em uma equação diferencial de ordem 1, não-homogênea:

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x} + \frac{k_a}{U}D = \frac{k_d L_0}{U}\mathrm{e}^{-\frac{k_d}{U}x}, \tag{4.57}$$

cuja condição inicial é $D(x = 0) = D_0$. Para resolver com Maxima, é conveniente fazer

$$\begin{aligned} A &= \frac{k_a}{U}, \\ B &= \frac{k_d L_0}{U}, \\ C &= \frac{k_d}{U}. \end{aligned}$$

Então,

```
(%i1) 'diff(D,x) + A*D = B*exp(-C*x) ;
                                 dD                - x C
(%o1)                            -- + A D = B %e
                                 dx
(%i2) ode2(%o1,D,x) ;
                                              x A - x C
                                 - x A   B %e
(%o2)                     D = %e        (------------- + %c)
                                              A - C
```

Ou seja:

$$D = \mathrm{e}^{-\frac{k_a}{U}x}\left(\frac{\frac{k_dL_0}{U}\mathrm{e}^{\frac{k_a-k_d}{U}x}}{\frac{k_a-k_d}{U}} + c\right),$$

$$D = \mathrm{e}^{-\frac{k_a}{U}x}\left(\frac{k_dL_0}{k_a-k_d}\mathrm{e}^{\frac{k_a-k_d}{U}x} + c\right).$$

Devemos escolher c para que $D = D_0$ em $x = 0$:

$$D_0 = \left(\frac{k_dL_0}{k_a-k_d} + c\right),$$

$$c = D_0 - \frac{k_dL_0}{k_a-k_d}.$$

Então,

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{e}^{-\frac{k_a}{U}x}\left(\frac{k_dL_0}{k_a-k_d}\mathrm{e}^{\frac{k_a-k_d}{U}x} + D_0 - \frac{k_dL_0}{k_a-k_d}\right) \\ &= D_0\mathrm{e}^{-\frac{k_a}{U}x} + \frac{k_dL_0}{k_a-k_d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{k_d}{U}x} - \mathrm{e}^{-\frac{k_a}{U}x}\right) \end{aligned}$$

Agora, é possível encontrar o ponto x_c em que o deficit é máximo:

$$x_c = \frac{U}{k_a-k_d}\ln\left[\frac{k_a}{k_d}\left(1 - \frac{k_a-k_d}{k_d}\frac{D_0}{L_0}\right)\right]. \tag{4.58}$$

A conta é um pouco longa; faça-a!

Considere agora o exemplo, razoavelmente realista:

$$\begin{aligned} k_a &= 1{,}5\,\mathrm{dia}^{-1} = 1{,}5 \times (86400\,\mathrm{s})^{-1} = 1{,}736 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}; \\ k_d &= 0{,}5\,\mathrm{dia}^{-1} = 5{,}787 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}, \\ U &= 1\,\mathrm{m\,s}^{-1}, \\ L_0 &= 10\,\mathrm{mg\,L}^{-1}, \\ D_0 &= 0\,\mathrm{mg\,L}^{-1}. \end{aligned}$$

Com esse exemplo, nós podemos resolver Streeter-Phelps numericamente, com Runge-Kutta, utilizando o programa `street.py` mostrado na listagem 4.27. O resultado é mostrado na figura 4.20. Se você está achando algo estranho, não ache! O modelo de Streeter-Phelps prevê que demora quase 100 km para que a DBO caia de 10 para 6 mg L^{-1}, e que o deficit de OD chega a quase 2 mg L^{-1} neste ponto.

Exercícios Propostos

4.25 O método de Runge-Kutta permite resolver (em princípio) qualquer sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

Listagem 4.27: `street.py` — Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta.

```
#!/usr/bin/python3
# ------------------------------------------------------------------
# street.py: solução numérica do problema de Streeter-Phelps
#
# usando o método de Runge-Kutta de ordem 4
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import array
# ------------------------------------------------------------------
# parâmetros do problema
# ------------------------------------------------------------------
h = 1000                        # passo em x (100 m)
x = [0.0]                       # x inicial
y = [array([10.0,0.0])]         # L0 = 10mg/L, D0 = 0 mg/L
n = int(500000/h)               # número de passos (50 km)
# ------------------------------------------------------------------
# dados do rio:
# ------------------------------------------------------------------
U = 1.0
ka = 1.736e-5
kd = 5.787e-6
L0 = 10.0
D0 = 0.0
def ff(x,y):
    dLdx = -(kd/U)*y[0]
    dDdx = (kd/U)*y[0] - (ka/U)*y[1]
    return array([dLdx,dDdx])
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):            # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
fou = open('street.out','wt')
for i in range(0,n+1):          # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f␣%12.6f␣%12.6f\n' % (x[i],y[i][0],y[i][1]) )
fou.close()
```

Figura 4.20: Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta.

simplesmente programando $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ e passando a função como argumento para `rk4(x,y,h,f)`. Se o sistema de EDOs é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 + y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix},$$

programe a `f(x,y)` correspondente em Python.

4.26 Dado o programa a seguir escrito em Python,

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
h = 0.1                          # passo em x
x = [0.0]                        # x inicial
y = [array([1.0,0.0])]           # y inicial
n = int(10/h)                    # número de passos
def ff(x,y):
    return array([-y[0]+y[1],y[0]-y[1]])
def rk4(x,y,h,ff):
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):            # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
fou = open('ruk.out','wt')
for i in range(0,n+1):          # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f␣%12.6f␣%12.6f\n' % (x[i],y[i][0],y[i][1]) )
fou.close()
```

qual é o problema que ele resolve? Escreva *todas* as equações que especificam completamente o problema.

Figura 4.21: Um pêndulo (possivelmente) não-linear.

4.9 – Trabalhos computacionais

Esta seção contém diversas propostas de trabalhos computacionais. Eles são mais longos que os exercícios propostos, e requerem considerável dedicação e *tempo*. Os trabalhos desta seção mostram diversas aplicações de métodos numéricos, e lhe dão a oportunidade de ganhar uma prática considerável em programação. Não há, intencionalmente, solução destes trabalhos. Cabe a você, talvez juntamente com o seu professor, certificar-se de que os programas estão corretos. Vários dos trabalhos incluem soluções analíticas que podem ajudar nessa verificação.

O método de Runge-Kutta e um pêndulo não-linear

A figura 4.21 mostra um pêndulo cujo cabo tem comprimento L, de massa m. O pêndulo sempre parte de uma posição angular inicial $\theta = \Theta_0$, com velocidade inicial nula. O comprimento de arco descrito pelo pêndulo a partir do ponto inicial; sua velocidade escalar; e sua aceleração escalar, são

$$\begin{aligned} s &= L(\Theta_0 - \theta), \\ v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \\ a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}$$

A 2ª lei de Newton nos dá

$$\begin{aligned} -mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= mg\,\mathrm{sen}(\theta), \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}(\theta) &= 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

A dimensão da equação (4.59) é

$$\frac{1}{\mathsf{T}^2},$$

mas ela pode ser adimensionalizada via

$$\begin{aligned}
\tau &= t\sqrt{\frac{g}{L}},\\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{\frac{g}{L}},\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}[\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t]}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{g}{L}.
\end{aligned}$$

Substituindo agora na equação (4.59), obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \operatorname{sen}(\theta) = 0, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0 \tag{4.60}$$

(note que nós agora incluímos as condições inciais).

Essa equação diferencial não pode ser resolvida por métodos analíticos em termos apenas em funções transcedentais elementares (funções baseadas nas funções trigonométricas e na função exponencial (incluindo as inversas)). Se a posição angular inicial Θ_0 for "pequena", podemos aproximar o seno por uma série de Taylor apenas até o primeiro termo, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, e transformar a equação diferencial em

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta = 0, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0;\\
&\quad \theta(\tau) = A\cos(\tau) + B\operatorname{sen}(\tau),\\
&\quad A = \Theta_0, \qquad B = 0 \;\Rightarrow\\
&\quad \theta = \Theta_0\cos(\tau) = \Theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).
\end{aligned}$$

Talvez a característica mais interessante dessa solução seja que o período de oscilação *não depende da amplitude* Θ_0: de acordo com a solução analítica (aproximada) acima, ele é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) &= \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right),\\
\frac{2\pi t}{T} &= \sqrt{\frac{g}{L}}t,\\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.
\end{aligned}$$

As coisas ficam ainda mais simples nas variáveis adimensionais: o período em unidades de τ é, simplesmente,

$$T_\tau = 2\pi.$$

Para o pêndulo não linear, por outro lado, é razoável prever, com base nas ferramentas de análise dimensional discutidas no início do curso, que o período de oscilação tem a forma

$$T = f(\Theta_0)\sqrt{\frac{g}{L}},$$

onde $f(0) = 2\pi$. O objetivo deste trabalho é a obtenção "experimental" de $f(\Theta_0)$.

O plano agora é resolver a equação correta numericamente para um grande número de condições inciais Θ_0, e plotar o período de cada uma dessas soluções contra Θ_0.

Para resolver o problema não-linear, escrevemos, a partir de (4.60):

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \omega, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \tag{4.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} = -\operatorname{sen}(\theta), \qquad \omega(0) = 0, \tag{4.62}$$

e resolvemos o sistema (4.61)–(4.62) com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para um grande número de condições iniciais Θ_0, a saber: $\Theta_0 = 0.05$, $\Theta_0 = 0.1, \ldots,$ $\Theta_0 = 3$. Para cada um desses valores, nós determinamos o período da solução. Em termos da variável adimensional independente τ, o período é justamente o valor de $f(\Theta_0)$.

O cálculo do período $f(\Theta_0)$ exige um algoritmo próprio, *além da solução numérica por Runge-Kutta de (4.61)–(4.62)*. Uma idéia simples e que funciona é a seguinte:

1. Adote um passo pequeno para a solução numérica de (4.61)–(4.62). Por exemplo, $\Delta\tau = 0.001$, e simule até $\tau = 50$ para obter um certo número de períodos.

2. *Para cada Θ_0, resolva numericamente o problema*, gerando uma lista de valores $\theta_0 = \Theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$, que são a solução numérica do problema.

3. Percorra a lista de θs para $i = 1, \ldots, N$: toda vez que $p = -\theta_{i-1}/\theta_i > 0$, a função trocou de sinal. Obtenha o zero da função $\theta(t)$ por interpolalção linear:
$$\tau_k = \tau_{i-1} + \frac{p}{1+p}\Delta\tau.$$
Adicione τ_k a uma lista separada com os zeros de $\theta(t)$.

4. Calcule as diferenças entre esses zeros:
$$\delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}.$$

5. Obtenha a média aritmética $\overline{\delta_k}$ dos $\delta_k s$. O período será
$$f(\Theta_0) = 2\overline{\delta_k}$$

6. Guarde esse $f(\Theta_0)$, e prossiga para o próximo Θ_0 em 2.

Você deve plotar os seus resultados para conferir. A função $f(\Theta_0)$ é mostrada na figura 4.22

Ressonância e um pêndulo não-linear

A figura 1.1 mostra um pêndulo de massa m forçado por uma força $\boldsymbol{F}$ que é sempre tangente à trajetória circular, cujo cabo tem comprimento L. O pêndulo sempre parte de uma posição angular inicial $\theta = \Theta_0$, com velocidade inicial nula. O comprimento de arco descrito pelo pêndulo a partir do ponto inicial; sua velocidade escalar; e sua aceleração escalar, são

$$\begin{aligned} s &= L(\Theta_0 - \theta), \\ v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \\ a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}$$

Figura 4.22: O período de um pêndulo não linear em função da amplitude inicial Θ_0. A linha tracejada é o valor teórico $f(0) = 2\pi$ para oscilações de pequena amplitude.

Faça $F(t) \equiv -mg\phi(t)$ o valor da componente tangencial da força (com sinal). A 2ª lei de Newton nos dá

$$\begin{aligned} -mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= mg\,\mathrm{sen}\,\theta + F(t), \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta &= -\frac{F(t)}{mL}, \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{mg}{mL}\phi(t). \end{aligned} \tag{4.63}$$

A dimensão da equação (4.63) é

$$\frac{1}{\mathsf{T}^2},$$

mas ela pode ser adimensionalizada via

$$\begin{aligned} \tau &= t\sqrt{\frac{g}{L}}, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{\frac{g}{L}}, \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}[\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t]}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{g}{L}. \end{aligned}$$

Substituindo agora na equação (4.63), obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathrm{sen}\,\theta = \phi(\tau), \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0 \tag{4.64}$$

(note que nós agora incluímos as condições inciais).

Essa equação diferencial não pode ser resolvida por métodos analíticos em termos apenas de funções algébricas e funções transcedentais elementares (funções baseadas nas funções trigonométricas e na função exponencial (incluindo as inversas)). Se a posição angular inicial Θ_0 for "pequena", podemos aproximar o seno por

uma série de Taylor apenas até o primeiro termo, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, e transformar a equação diferencial em

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta = \phi(\tau), \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0. \tag{4.65}$$

Se

$$\phi(\tau) = \operatorname{sen}(\tau), \tag{4.66}$$

aparecerá ressonância em (4.65). Nossa questão é: aparecerá também ressonância em (4.64)?

Para resolver o problema não-linear, escrevemos, a partir de (4.64):

$$\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}\tau} = \omega_n, \qquad \theta_n(0) = \Theta_0, \tag{4.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_n}{\mathrm{d}\tau} = -\operatorname{sen}\theta_n + \operatorname{sen}(\tau), \qquad \omega_n(0) = 0. \tag{4.68}$$

O problema linear tem solução numérica muito parecida:

$$\frac{\mathrm{d}\theta_l}{\mathrm{d}\tau} = \omega_l, \qquad \theta_l(0) = \Theta_0, \tag{4.69}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_l}{\mathrm{d}\tau} = -\theta_l + \operatorname{sen}(\tau), \qquad \omega_l(0) = 0, \tag{4.70}$$

Em (4.67)–(4.70) nós adicionamos os subscritos n e l para distinguir a solução *linear* da solução *não-linear*.

Seu objetivo é comparar as duas soluções: resolva os sistemas (4.67)–(4.68) e (4.69)–(4.70) utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $\Theta_0 = 1{,}5$. Você deve utilizar um passo $\Delta\tau = 0{,}01$ em τ, e marchar de $\tau = 0$ até $\tau = 1000$.

Plote no mesmo gráfico $\tau\times\theta_l(\tau)$ e $\tau\times\theta_n(\tau)$, e mostre graficamente que o sistema linear exibe ressonância. O que você pode dizer sobre o sistema não-linear?

Além disso, considere, e responda tão bem quanto possível, as seguintes questões:

- O que acontece com a solução linear quando você reduz $\Delta\tau$ para 0,001? E para 0,0001?
- O que acontece com a solução não-linear quando você reduz $\Delta\tau$ para 0,001? E para 0,0001?
- O que está acontecendo? É possível tirar alguma conclusão sobre a solução do sistema não-linear?

Atenção: os valores de $\theta(\tau)$ crescem muito além de 2π (uma volta completa), e portanto é difícil interpretar fisicamente a solução numérica após valores de τ da ordem de 2π. Não se preocupe com isso, concentrando-se nas propriedades matemáticas da solução.

A distribuição de Rayleigh

A distribuição de Rayleigh é uma *distribuição de probabilidade*. A função densidade de probabilidade é

$$f_R(x) = \frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \geq 0. \tag{4.71}$$

A função distribuição acumulada é

$$F_R(x) = \int_0^x f_R(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.72}$$

É fácil ver que, como acontece com toda função densidade de probabilidade, a sua integral é igual a um:

$$\int_0^\infty f_R(x)\,\mathrm{d}x = F_R(\infty) = 1. \tag{4.73}$$

Neste trabalho, é proibido usar $F_R(x)$: você pode usá-la "por fora" para testar seus resultados, mas ela não pode aparecer no seu programa. Todo o trabalho envolve apenas a manipulação de $f_R(x)$ em (4.71), ou de sua série de Taylor.

Parte I

Obtenha a série de Taylor, em torno de $x = 0$, de $f_R(x)$ para $\sigma = 1$:

$$f_S(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots \tag{4.74}$$

(isto é, obtenha os $c_n s$ em função de n, analiticamente). Escreva uma função que calcule a série com uma acurácia $\epsilon = 10^{-6}$. O programa deve gerar um arquivo de saída com 3 colunas: x, $f_S(x)$, e $f_R(x)$. Naturalmente, você deve encontrar $f_S(x) \approx f_R(x)$. No entanto, para x "grande" (digamos, $x > \sqrt{10}$), começam a aparecer problemas numéricos em $f_S(x)$.

Plote $f_S(x)$ e $f_R(x)$, e mostre os problemas que aparecem em $f_S(x)$ para x grande.

Uma estratégia para lidar com o destrambelhamento de $f_S(x)$ para x grande é a seguinte: se $x > \sqrt{10}$, calcule:

$$\begin{aligned}
y &= x/\sqrt{10}, \\
\eta &= \lfloor x/\sqrt{10} \rfloor, \\
\lambda &= \sqrt{10}\eta, \\
z &= x/\lambda, \\
N &= \lambda^2 = 10\eta^2.
\end{aligned}$$

η é o maior inteiro menor ou igual a y. Em Python, isso é calculado com `eta = floor(y)`. Repare que N é, convenientemente, um número inteiro por definição.

Agora,

$$\begin{aligned}
f_R(x) &= x\mathrm{e}^{-x^2/2} \\
&= \lambda \left[\frac{x}{\lambda}\right] \exp\left[-\lambda^2 \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right] \\
&= \lambda z \left[\exp\left(-z^2/2\right)\right]^{\lambda^2} \\
&= \lambda z \left[\exp\left(-z^2/2\right)\right]^{N}.
\end{aligned}$$

A série de Taylor de $\exp\left(-z^2/2\right)$ está intimamente relacionada com $f_S(z)$:

$$\exp(-z^2/2) = f_T(z) = f_S(z)/z = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + \dots,$$

onde os $c_n s$ são os mesmos de (4.74). Portanto, quando $x > \sqrt{10}$, calcule y, η, λ, z e N, calcule $f_T(z)$, eleve a N, e multiplique por λz.

Parte II

Verfique numericamente a validade de (4.73), usando um esquema de integração numérica de sua escolha. O problema é lidar com o limite superior da integral, que é ∞. Como você pode fazer para garantir que sua integral numérica é uma boa aproximação de (4.73)? Afinal, é impossível colocar ∞ em um programa de computador...

Dica: o capítulo sobre integração numérica de Press et al. (1992) tem várias sugestões para lidar com esse problema. Você pode usar as sugestões de Press et al. (1992), ou usar uma idéia sua.

Atenção! A sua solução também deve fazer parte do programa de computador produzido para o trabalho, e o resultado numérico de (4.73) deve ser impresso na tela, com 10 casas decimais.

Obtenção de curvas de remanso pelo método de Runge-Kutta

Este texto é uma adaptação de um trabalho publicado pelo autor em Congresso Científico (Dias, 1995).

Importância dos cálculos de curvas de remanso Um problema clássico em hidráulica de canais é a obtenção de curvas de remanso (Chow, 1959; French, 1986). O problema e suas soluções têm grande aplicação na medida em que suas hipóteses – regime permanente e escoamento gradualmente variado – ocorrem frequentemente em canais naturais e artificiais. Algumas aplicações importantes são a determinação de cotas da superfície da água a montante de um reservatório, e o cálculo de superfícies-chave em postos fluviométricos sujeitos à influência de remanso.

As soluções clássicas de curvas de remanso não enfatizam que se trata em última análise da solução de uma equação diferencial não-linear. Neste trabalho, adaptado de Dias (1995), formularemos o problema em função do nível d'água Z e da distância x desde a primeira seção de jusante, obteremos a equação diferencial correspondente $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}x = f(x, Z)$ e a resolveremos usando uma ferramenta padrão, que é o método de Runge-Kutta.

Cabe notar que a proposta de calcular curvas de remanso com o método de Runge-Kutta, é bastante antiga. Ver, por exemplo, Lin e Gray (1971). Coincidentemente, o exemplo utilizado por Lin e Gray (1971) é o mesmo apresentado em Dias (1995), e discutido aqui!!

Obtenção da equação diferencial do problema A figura 4.23 mostra as características gerais de um canal. A equação dinâmica de escoamento em canais em regime permanente é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Q^2}{A} + gA\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + gAS_f = 0, \tag{4.75}$$

onde Q é a vazão, A é a área molhada, g é a aceleração da gravidade, Z é a cota da superfície da água e S_f é a perda de carga. Outros elementos geométricos são a cota do fundo Z_f, a profundidade h, o raio hidráulico R e o perímetro molhado P. A declividade do fundo é $S_o = -\mathrm{d}Z_f/\mathrm{d}x$. Admitindo-se que a vazão é constante em x, obtém-se

$$-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + gA\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} + gAS_f = 0, \tag{4.76}$$

Figura 4.23: Características geométricas de um canal.

A derivada $\mathrm{d}A/\mathrm{d}x$ em (4.76) é uma derivada total. A área molhada por outro lado é função de x e Z. Então, sendo B a largura superficial,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_z + \left.\frac{\partial A}{\partial Z}\right|_x \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_z + B\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} \tag{4.77}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}\right|_Z - gAS_f}{gA - \frac{Q^2}{A^2}B} = f(x, Z) \tag{4.78}$$

é a equação diferencial não-linear que precisa ser integrada para a obtenção de curvas de remanso. Isto pode ser feito de maneira eficiente pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem (Press et al., 1992). Métodos mais tradicionais em hidráulica envolvem a solução numérica (por diferenças finitas) para x como variável *independente* da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h} = \frac{1 - F^2}{S_0 - S_f} \tag{4.79}$$

onde h é a profundidade média do escoamento e F é o número de Froude (French, 1986, p. 202), ou a solução iterativa da equação de energia entre duas seções consecutivas em canais não-prismáticos, como por exemplo o *step method* descrito por French (1986, p. 218–222).

As principais vantagens de utilizar a equação (4.78) em conjunto com o método de Runge-Kutta são:

1. A equação diferencial está explicitada para $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}x$, e não $\mathrm{d}x/\mathrm{d}Z$. A solução dá de forma direta a cota $Z(x)$ para cada seção cuja abscissa é x.

2. O método de Runge-Kutta não é iterativo. Sua programação é trivial.

3. Fica conceitualmente simples definir pontos x onde se deseja calcular parâmetros hidráulicos que não coincidem com nenhuma seção tabulada. Neste caso, usa-se interpolação linear para a obtenção de $A(x, Z)$ e $B(x, Z)$ entre as seções imediatamente a montante e a jusante do ponto x.

A derivada $\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_Z$ é calculada por um esquema simples de diferenças finitas:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_Z \approx \frac{A(x_j, Z) - A(x_m, Z)}{x_j - x_m}, \tag{4.80}$$

onde x_j e x_m são as abscissas de seções imediatamente a jusante e a montante do ponto x.

Trabalho Você deve fazer uma comparação do método de cálculo apresentado acima com um resultado clássico. Escolhemos um exemplo do livro de Chow (1959). A tabela 4.2, adaptada do exemplo 10.1 de Chow mostra o resultado o cálculo realizado por Chow, *com um método diferente*, de uma curva de remanso em um canal de seção trapezoidal, largura da base de 6,10 m e inclinação dos taludes de 1:2 (*i.e.,* dois passos na horizontal para um na vertical), com coeficiente de Manning $n = 0{,}025$, declividade $S_0 = 0{,}0016$ e uma vazão constante de $11{,}33\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}$. Todas as unidades foram convertidas para o sistema internacional (SI), e alguns parâmetros que não constam do exemplo de Chow (1959), mas podem ser calculados, tais como a cota da linha de água, foram adicionados.

Tabela 4.2: Curva de remanso em canal trapezoidal – solução de Ven Te Chow

seção	x m	A m^2	B m	R m	S_f –	V m s^{-1}	Z m
00	0.00	13.94	12.19	1.08	3.73e-4	0.81	1.52
01	−47.24	13.20	11.95	1.05	4.31e-4	0.86	1.54
02	−96.93	12.48	11.70	1.01	5.08e-4	0.91	1.56
03	−150.27	11.77	11.46	0.97	6.03e-4	0.96	1.58
04	−208.48	11.08	11.22	0.94	7.10e-4	1.02	1.61
05	−273.71	10.41	10.97	0.90	8.52e-4	1.09	1.66
06	−352.04	9.74	10.73	0.87	1.02e-3	1.16	1.72
07	−400.51	9.42	10.61	0.84	1.14e-3	1.20	1.77
08	−461.77	9.10	10.49	0.83	1.24e-3	1.25	1.84
09	−500.18	8.94	10.42	0.82	1.31e-3	1.27	1.88
10	−547.73	8.78	10.36	0.81	1.38e-3	1.29	1.94
11	−584.30	8.68	10.33	0.80	1.43e-3	1.31	1.99
12	−632.46	8.59	10.29	0.80	1.46e-3	1.32	2.06
13	−674.83	8.53	10.27	0.79	1.51e-3	1.33	2.12
14	−731.82	8.47	10.24	0.78	1.53e-3	1.34	2.21

O seu trabalho deve calcular a curva de remanso pelo método de Runge-Kutta, e comparar os resultados com a tabela 4.2. Suas condições inciais são os valores da seção 00 na tabela

Os cálculos devem ser realizados de *jusante para montante*. Como a equação (4.75) pressupõe que a velocidade é positiva no sentido positivo dos xs você deve arbitrar $x = 0$ na seção de montante e marchar no sentido negativo, com $\Delta x = -10$ m, até $x = -1000$ m. Para uma seção trapezoidal com a geometria dada, os parâmetros hidráulicos (geométricos e dinâmicos) são calculados na seguinte ordem:

$$Z_f = -S_0 x, \tag{4.81}$$
$$h = Z - Z_f, \tag{4.82}$$
$$B = b_f + 4h, \tag{4.83}$$
$$P = b_f + 2 * \sqrt{5}h, \tag{4.84}$$
$$A = (B + b_f)h/2, \tag{4.85}$$
$$R = A/P, \tag{4.86}$$
$$V = Q/A, \tag{4.87}$$
$$Sf = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \tag{4.88}$$

Você deve:

1. Gerar um arquivo de saída `rkrem.out` contendo, em cada linha, x, A, B, R, V, S_f e Z no formato

   `'%6.2f %5.2f %5.2f %5.2f %8.2e %5.2f %4.2f %4.2f\n'.`

2. Interpolar os valores de x da tabela 4.2 e produzir uma tabela similar com os *seus* resultados.

Figura 4.24: Area molhada em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua).

3. Gerar figuras semelhantes às figuras 4.24–4.27 contendo as curvas calculadas $A(x)$, $S_f(x)$, $V(x)$ e $Z(x)$ e os pontos correspondentes da tabela 4.2 para comparação.

Figura 4.25: Perda de carga em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua).

Figura 4.26: Velocidade em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua).

Figura 4.27: Cota em função da distância de jusante do exemplo 10.1 de Chow (1959), calculados por Chow (círculos) *versus* resultados do método de Runge-Kutta (linha contínua).

Figura 4.28: A traça (*Spruce budworm*) *Choristoneura orae*. Fonte: Wikipedia. ©entomart (http://www.entomart.be).

Tabela 4.3: Parâmetros do modelo de Ludwig et al. (1978)

Parâmetro	Unidade	Valor
r_B	ano^{-1}	1.52
K'	larvas galho^{-1}	355
β	larvas acre^{-1} ano^{-1}	43200
α'	larvas galho^{-1}	1.11
r_S	ano^{-1}	0.095
K_S	galhos acre^{-1}	25440
K_E	–	1
r_E	ano^{-1}	0.92
P'	larva^{-1}	0.00195
T	–	0.05

Um modelo ecológico para *Choristoneura orae*

A *Choristoneura orae* (figura 4.28) é uma traça conhecida nos EUA como *Spruce Budworm*. Ludwig et al. (1978) propuseram um modelo matemático simples de crescimento da traça: se B é a sua densidade populacional, o modelo é

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = r_B B\left(1 - \left(\frac{B}{K'S}\right)\frac{T^2+E^2}{E^2}\right) - \frac{\beta}{K_S}\left(\frac{B^2}{(\alpha' S)^2 + B^2}\right), \tag{4.89}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = r_S S\left(1 - \frac{SK_E}{E}\right), \tag{4.90}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = r_E E\left(1 - \frac{E}{K_E}\right) - \left(\frac{P'B}{S}\right)\frac{E^2}{T^2+E^2}. \tag{4.91}$$

Todos os parâmetros são definidos em (Ludwig et al., 1978). As variáveis que evoluem são B (a densidade de larvas, em larvas galho^{-1}; S (a área relativa de galhos) e E (a energia por galho).

Aqui, nós nos limitamos a listá-los (em suas unidades originais) na tabela 4.3

Utilize as condições iniciais para o sistema, $B(0) = 1$, $S(0) = 0.070$ e $E(0) = 1$. Resolva o sistema de equações (4.89)–(4.91), utilizando um passo de tempo de 1/400 ano e um tempo total de simulação de 200 anos. O seu resultado deve ser o mostrado na figura 4.29. Compare com a figura 5 de Ludwig et al. (1978).

Figura 4.29: Simulação de eclosão de uma praga de traças, utilizando o modelo de Ludwig et al. (1978).

O oscilador de van der Pol

Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mu\left(x - \frac{1}{3}x^3 - y\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu}x,$$

com $x(0) = 0.01$, $y(0) = 0.01$, e $\mu = 5$ Plote o resultado até $t = 50$.

O seu resultado deve ser o mostrado na figura 4.30

Agora, desenvolva uma método numérico para obter a amplitude e o período de oscilação de $x(t)$. Note que existe um transiente, até que o sistema entre em um regime estacionário (não confunda estacionário com x constante!). Você deve desprezar esse transiente antes de obter a amplitude e o período.

Finalmente, para as mesmas condições iniciais dadas acima, faça um grande número de simulações variando μ de 0,1 em 0,1, desde 0,1 até 10. Plote agora o período T e a amplitude A contra μ. Você deve comparar seus resultados com os obtidos por Fisher (1954).

Figura 4.30: O oscilador não-linear de van der Pol ($\mu = 5$).

5

Geometria e Álgebra

À primeira vista, este capítulo é sobre Álgebra Linear. Mas só à primeira vista. Não é, de fato, possível raciocinar matematicamente sem o recurso simultâneo à intuição visual da Geometria, e ao rigor um pouco árido da Álgebra. Aqui, nós construímos aos poucos novos objetos algébricos inspirados pela Geometria. Historicamente, foi um longo caminho que agora trilhamos, brevemente. Se houver um resumo para este capítulo, ele é: desenhe, e tente visualizar, o seu problema.

5.1 – Vetores

Um vetor é um nome genérico que pode significar muitas coisas em Álgebra Linear. Em um certo sentido, todos os objetos *algébricos* abaixo:

$$(1,2,3), \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L},$$

são vetores.

Em geral, nós estamos acostumados a associar o *vetor algébrico* $(2,1)$ ao vetor geométrico cuja projeção no "eixo x" vale 2 unidades, e cuja projeção no "eixo y" vale 1 unidade. No entanto, os eixos sobre os quais valem as projeções 2 e 1 poderiam ser quaisquer, e portanto o objeto algébrico $(2,1)$ pode representar, em princípio, infinitos objetos geométricos diferentes — e vice-versa (ver figura 5.1).

A relação entre os objetos algébricos com os quais nós lidamos em matemática e os entes geométricos ou físicos da realidade que eles representam precisa ser estabelecida por algum tipo de convenção. Muitas vezes, é cansativo ficar repetindo explicitamente as convenções que estamos seguindo. Neste texto, quando não

Figura 5.1: A representação geométrica usual do vetor $(2,1)$, e uma interpretação alternativa, mas igualmente válida!

houver menção explícita à convenção, deve ficar entendido que $(1, 0)$ representa o vetor com uma unidade ao longo do eixo x, e 0 unidades ao longo do eixo y, *e que y é perpendicular a x* ($y \perp x$). Convenções similares se aplicam a $(1, 0, 0)$ com $z \perp y \perp x$. O mesmo se aplica para $(0, 1)$, $(0, 0, 1)$, etc..

Dado um vetor genérico $\boldsymbol{v}$, entretanto, ele em geral pode ser escrito em termos de outros vetores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,. . . ,$\boldsymbol{e}_n$ do mesmo *espaço vetorial* $\mathbb{V}$ (na seção 5.2, daremos uma definição mais completa e formal de espaço vetorial). Se o conjunto $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ for composto por vetores capazes de gerar qualquer $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$,

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} v_{Ek} \boldsymbol{e}_k, \tag{5.1}$$

e se esses vetores forem linearmente independentes (veja mais à frente a definição 5.2), então ele é uma *base* de $\mathbb{V}$. Mais do que isso: na prática, a *ordem* em que os vetores da base aparecem é fundamental. Portanto, a rigor devemos escrever a base não somente como um conjunto de vetores, mas como uma *ênupla* (que são esses vetores numa particular ordem). A notação preferencial para E, por conseguinte, é $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Exemplo 5.1 O conjunto de vetores $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ é usualmente utilizado para formar uma base do $\mathbb{R}^3$. No entanto, a rigor, as bases

$$A = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}),$$
$$B = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}),$$

são distintas. A é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e é uma base *dextrógira*. B nunca ocorre na prática; B é uma base *levógira*.

Conhecida a base E, portanto, posso representar $\boldsymbol{v}$ por

$$[\boldsymbol{v}]_E = \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{E2} \\ \vdots \\ v_{En} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

ou seja, por uma matriz-coluna de coordenadas $[\boldsymbol{v}]_E$. Quando a base em que $\boldsymbol{v}$ é representado for óbvia, omite-se o índice E. v_{E1}, v_{E2}, . . . , v_{En} são as *coordenadas* de $\boldsymbol{v}$ na base E. Dado um único $\boldsymbol{v}$, portanto, existem infinitas representações (em princípio) possíveis, $[\boldsymbol{v}]_E$, para $\boldsymbol{v}$ (uma para cada base possível).

> *É muito importante não confundir um vetor com a matriz-coluna que o representa em uma particular base.*

Para o $\mathbb{R}^n$ em até 3 dimensões, é conveniente utilizar a notação x, y, z para 3 eixos mutuamente ortogonais e com orientação dextrógira (mais sobre isso em instantes), e a notação $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ para 3 vetores unitários orientados positivamente ao longo de x, y, e z respectivamente. No entanto, muitas vezes o particular eixo em que se está trabalhando não é tão importante, ou então o número de dimensões do espaço em questão pode ser bem maior do que 3 (ou ambos). Nesses casos, é conveniente renomear os eixos como x_1, x_2, . . . , x_n, e os vetores unitários ao longo de cada um desses eixos como $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, . . ., $\boldsymbol{e}_n$.

Não há uma terminologia universal, e separada, para os elementos de um vetor algébrico. Em particular, quando o vetor algébrico for uma ênupla ordenada,

$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, os seus *elementos* v_1, v_2, ..., v_n não serão em geral iguais às suas coordenadas $v_{E1}, v_{E2}, \ldots, v_{En}$ na base E:

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad \text{e} \qquad [\boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{E2} \\ \vdots \\ v_{En} \end{bmatrix};$$

porém (em geral)

$$v_1 \neq v_{E1}, \qquad v_2 \neq v_{E2}, \qquad \ldots, \qquad v_n \neq v_{En}.$$

É claro que os "elementos" e as coordenadas de $\boldsymbol{v}$ *podem* ser iguais, quando a base for particularmente simples. Neste caso, nós encontramos a base *canônica* do $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.1 Seja $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_k \in \mathbb{R}\}$, o conjunto das ênuplas ordenadas cujos elementos são números reais. A base canônica do $\mathbb{R}^n$ é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

De fato, somar dois vetores no $\mathbb{R}^n$ corresponde a somar "elemento a elemento", e multiplicar por um escalar corresponde a multiplicar todos os elementos pelo escalar. Então,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (v_1, 0, \ldots, 0) + (0, v_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, v_n) \\ &= v_1(1, 0, \ldots, 0) + v_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + v_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_k \boldsymbol{e}_k \ \Rightarrow \\ [\boldsymbol{v}]_E &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \blacksquare \end{aligned} \tag{5.3}$$

Exemplo 5.2 Mostre que as coordenadas de $(3, 4, 5)$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$ são 3, 4 e 5.

SOLUÇÃO
Algumas vezes, o mais difícil é provar o óbvio:

$$\begin{aligned} (3, 4, 5) &= (3, 0, 0) + (0, 4, 0) + (0, 0, 5) \\ &= 3(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) \\ &= 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 5.3 Se $E = ((1,1),(1,-1))$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (3,4)$ na base E.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= x(1,1) + y(1,-1) \\ (3,4) &= x(1,1) + y(1,-1) \\ 3 &= x + y, \\ 4 &= x - y. \end{aligned}$$

Como quase sempre em Álgebra Linear, tudo termina na necessidade de se resolver um sistema de equações lineares, o que nós aqui fazemos com a ajuda de Maxima (só para treinar):

```
(%i5) solve( [3 = x+y, 4 = x-y], [x,y] ) ;
                                    7          1
(%o5)                         [[x = -, y = - -]]
                                    2          2
```

Portanto,

$$[\boldsymbol{v}]_E = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exemplo 5.4 Calcule o módulo do vetor

$$\boldsymbol{v} = (1,2,3,4,5,6,7,8,9).$$

SOLUÇÃO

Se um vetor algébrico for interpretado da forma clássica, como a representação do vetor geométrico em que cada elemento da ênupla ordenada corresponde a uma componente do vetor geométrico segundo um eixo, e com os eixos mutuamente ortogonais (e para sermos completos, em uma base dextrógira — tenha um pouco mais de paciência com essa palavra), então em duas e três dimensões vale o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (x,y) & \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \boldsymbol{v} &= (x,y,z) & \Rightarrow \quad |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Em n dimensões não há mais geometria para nos auxiliar, e devemos encarar o módulo como uma *definição*. Usaremos o símbolo $\equiv$ quando estivermos definindo um conceito pela primeira vez. Portanto, definimos

$$|\boldsymbol{v}| \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} v_k^2 \right]^{1/2}, \tag{5.4}$$

e agora estamos prontos para o cálculo. É claro que ele pode ser feito até mesmo com lápis e papel, mas preferimos executá-lo com Python, na listagem 5.1.

O resultado da execução do programa `verysimplesum.py` é

```
v =  [1 2 3 4 5 6 7 8 9]
v2 =  [ 1  4  9 16 25 36 49 64 81]
m2 =  285
m =  16.8819430161
```

Donde

$$|\boldsymbol{v}| \approx 16{,}8819430161 \blacksquare$$

Listagem 5.1: `verysimplesum.py` — Uma soma simples com Python.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from numpy import array
from math import sqrt
v = array([1,2,3,4,5,6,7,8,9])
print('v␣=␣', v)
v2 = v*v
print('v2␣=␣', v2)
m2 = sum(v2)
print('m2␣=␣', m2)
m = sqrt(m2)
print('m␣=␣', m)
```

Exemplo 5.5 Calcule o módulo do vetor

$$v = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 96, 97, 98, 99)$$

SOLUÇÃO
Numericamente, isso pode ser feito de forma muito parecida com o exemplo anterior. Note que seria muito mais trabalhoso fazer todos os cálculos com lápis e papel. No entanto, é possível escrever o programa

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from numpy import array
from math import sqrt
v = array([i for i in range(1,100)])
v2 = v*v
m2 = sum(v2)
m = sqrt(m2)
print ('m␣=␣', m)
```

cuja saída é

```
m =  573.018324314
```

Donde

$$|v| = 573{,}018324314.$$

Mas será preciso tanto esforço computacional? Não! Neste caso é particularmente simples calcular

$$\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] = \left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right] \Rightarrow$$

$$|v| = \left[\frac{99}{6} \times 100 \times (199)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{99 \times 100 \times 199/6} = 573{,}018324314 \blacksquare$$

O exemplo acima ensina uma lição importante, e profunda:

> *O poder de métodos e de soluções analíticas, quando esses são possíveis, é incomparavelmente superior ao de soluções numéricas.*

A lição deve ser aprendida: sempre que você se deparar com um problema, pergunte-se antes de mais nada se há uma solução analítica para ele. Em geral, há, e está pronta. No exemplo acima, a fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n/6)(n+1)(2n+1)$ foi

obtida de Jeffrey (2003), p. 34, equação 1.2.3.1-2. Na verdade, existem resultados analíticos para

$$\sum_{k=1}^{n} k^q,$$

para qualquer inteiro q.

Exercícios propostos

5.1 Obtenha as coordenadas de $(3, 4)$ na base $\{(1, 0), (2, -1)\}$.

5.2 Se $E = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, -1))$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (3, 2, 3)$ na base E.

5.3 Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$

5.4 Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

5.5 Explique o que faz a linha

```
[ v = array ([ i for i in range (1,100)]) ]
```

do exemplo 5.5.

5.6 No seu computador, compare os tempos de cálculo de $\sum_{k=1}^{n} k^2$:

1. Usando a abordagem de "força bruta", com Python;
2. Usando a fórmula para a soma.

5.2 – Álgebra Linear

O que os objetos algébricos

$$(1, 2, 3), \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}$$

da seção 5.1 têm em comum? Por que eles são todos chamados, genericamente, de *vetores*? A resposta consiste do seguinte:

- Existe um conjunto $\mathbb{V}$ de objetos;
- Existe um *campo escalar* $\mathbb{F}$, associado;
- Existem duas operações que produzem novos objetos (vetores) que também pertencem a $\mathbb{V}$:
  1. Adição em $\mathbb{V}$:
  $$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}; \tag{5.5}$$
  2. Multiplicação por um escalar:
  $$\alpha \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}. \tag{5.6}$$

Exemplo 5.6 Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, e $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, a soma de dois vetores é definida por

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \equiv (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$$

e a multiplicação por escalar é definida por

$$\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \alpha\boldsymbol{v} = \alpha(v_1, v_2, v_3) \equiv (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

Note que tudo se resume a somas e multiplicações de números reais, elemento a elemento dos vetores. Em outras palavras, *novas operações* são definidas em função de operações pré-existentes.

As operações (5.5)–(5.6), entretanto, por si sós não são suficientes. É necessário que elas obedeçam às seguintes propriedades adicionais:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}; \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] + \boldsymbol{w}; \tag{5.8}$$

$$\exists^* \mathbf{0} \in \mathbb{V} \mid \boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}; \tag{5.9}$$

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}, \ \exists^* [-\boldsymbol{u}] \in \mathbb{V} \mid \boldsymbol{u} + [-\boldsymbol{u}] = \mathbf{0}; \tag{5.10}$$

$$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}, \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}; \tag{5.11}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{u}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}; \tag{5.12}$$

$$\alpha[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}; \tag{5.13}$$

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}. \tag{5.14}$$

Esses são os famosos 8 axiomas da Álgebra Linear; eles precisam existir junto com $\mathbb{F}$, $\mathbb{V}$, e com as operações de soma de dois vetores, e de multiplicação de um vetor por um escalar. Sempre que tudo isso acontece, os conjuntos $\mathbb{F}$, $\mathbb{V}$, as operações e os axiomas 5.7–5.14 constituem um *Espaço Vetorial*.

É evidente que as operações e propriedades acima já valiam quando trabalhamos com os "vetores algébricos" do tipo $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Por exemplo, verifique que as operações definidas no exemplo 5.6 foram implicitamente utilizadas nos exemplos 5.2 e 5.3.

Como teremos amplas oportunidades de explorar espaços vetoriais mais exóticos ao longo do texto, talvez faça sentido, neste ponto, esgotar as possibiliades do $\mathbb{R}^n$. Para fixar idéias, nós consideramos que os objetos "absolutos" desse espaço são as ênuplas $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, mas que cada $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso em termos de infinitas bases, e que portanto cada $\boldsymbol{v}$ possui infinitas matrizes-coluna que o representam, dependendo da base. O conceito de *base* de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ vem junto com dois outros conceitos fundamentais em Álgebra Linear: o conceito de *dimensão* do espaço $\mathbb{V}$, e o conceito de independência linear.

Definição 5.2 O conjunto $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ é linearmente independente (LI) quando

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i.$$

Definição 5.3 Uma base de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um conjunto LI de vetores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ que *gera* $\mathbb{V}$, ou seja:

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i.$$

Teorema 5.1 Todas as bases de $\mathbb{V}$ possuem o mesmo número n de vetores. n é a *dimensão* de $\mathbb{V}$.

Exercícios Propostos

5.7 Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais de soma e de produto por escalar, verifique (5.7)–(5.14) acima, e conclua que $\{\mathbb{R}, \mathbb{V}\}$ juntamente com suas operações usuais constituem um espaço vetorial.

5.8 Para o conjunto $\mathbb{V}$ das matrizes 2×2

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad A_{ij} \in \mathbb{R},$$

e para o campo escalar $\mathbb{R}$, defina as operações soma de vetores e produto por escalar da maneira mais natural possível, e mostre que estes conjuntos e operações constituem um espaço vetorial.

5.9 Repita o exercício acima para o conjunto das funções contínuas

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Existem incontáveis exemplos de espaços vetoriais. Em muitos sentidos, tudo o que faremos revolverá em torno desta idéia. De fato, livros inteiros de Matemática Aplicada podem ser escritos assim: se você conseguir uma cópia, ou pelo menos ler partes na biblioteca, procure conhecer o excelente livro de Kreider et al. (1966).

5.3 – Aplicações geométricas

Vetores algébricos do tipo $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são úteis porque eles facilitam aplicações geométricas. Nesta seção, nós vamos sistematicamente explorar operações geométricas no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ com o auxílio de vetores, e é óbvio que necessitaremos desenvolver algumas ferramentas. Muitas delas você já conhece, de modo que esta seção tem um pouco de sabor de revisão. No entanto, os conceitos serão manipulados com um nível mais alto de abstração, novas notações serão apresentadas, e alguns problemas serão explorados em novas direções: por exemplo, ao final desta seção nós estaremos nos perguntando qual é o significado *algébrico* de um *hipervolume*.

Figura 5.2: O Teorema de Pitágoras

Teorema 5.2 (Teorema de Pitágoras) Em um triângulo retângulo com catetos b, c e hipotenusa a,

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{5.15}$$

A dedução elegante e sucinta do Teorema de Pitágoras é baseada na figura 5.2, e encontrada em Simonsen (1994, p. 30):

$$\begin{aligned} a^2 + 4\frac{bc}{2} &= (b+c)^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 \ \blacksquare \end{aligned} \tag{5.16}$$

Teorema 5.3 (Teorema dos Cossenos) Em um triângulo qualquer com lados b, c e a, se θ é o ângulo formado por b e c,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \ \blacksquare \tag{5.17}$$

A dedução não tão elegante do Teorema dos Cossenos baseada na figura 5.3 é a seguinte:

$$\begin{aligned} a^2 &= e^2 + h^2, \\ b^2 &= d^2 + h^2, \\ c^2 &= d^2 + e^2 + 2de, \\ a^2 - b^2 &= e^2 - d^2, \\ a^2 &= b^2 + e^2 - d^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - d^2 - 2de - d^2, \end{aligned}$$

Figura 5.3: O Teorema dos Cossenos

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2d(d+e), \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cd, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \ \blacksquare
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

O produto escalar em $\mathbb{R}^3$

Uma vez que nós possuímos objetos algébricos (os vetores algébricos (v_1, v_2, v_3)) que são "absolutos" (isto é: não dependem da base, que é um conceito que vem *a posteriori*), nós podemos definir algumas operações diretamente sobre esses objetos. O produto escalar de dois vetores $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ é

$$
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \equiv \sum_{i=1}^{3} u_i v_i. \tag{5.19}
$$

É evidente que o produto escalar serve, no mínimo, para calcular o módulo de um vetor no $\mathbb{R}^3$:

$$
|\boldsymbol{v}| = [\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}]^{1/2}. \tag{5.20}
$$

Na verdade, usando (5.19), é *muito* fácil provar as seguintes propriedades:

$$
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}, \tag{5.21}
$$

$$
[\alpha \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}), \tag{5.22}
$$

$$
\boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}. \tag{5.23}
$$

De volta à figura 5.3, se $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são dois vetores com origem comum e paralelos aos lados b e c, com $|\boldsymbol{b}| = b$ e $|\boldsymbol{c}| = c$, então

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \\
a^2 &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] \cdot [\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}], \\
a^2 &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} - 2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}), \\
b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta &= b^2 + c^2 - 2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}), \\
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta \ \blacksquare
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Exemplo 5.7 Seja $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$ um ponto de uma reta cuja direção no $\mathbb{R}^2$ é perpendicular ao vetor normal unitário $\boldsymbol{n} = (a, b)$. A equação da reta é dada pela condição de que um ponto qualquer $\boldsymbol{r} = (x, y)$ atende a

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0] \cdot \boldsymbol{n} &= 0, \\
(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) &= 0, \\
ax + by &= \underbrace{ax_0 + by_0}_{c}, \\
ax + by &= c \ \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Exemplo 5.8 No $\mathbb{R}^3$ é preferível dar a direção paralela à reta, e um ponto qualquer. Assim, se $\boldsymbol{r}_0$ é um ponto qualquer de uma reta no espaço, e $\boldsymbol{m}$ é um vetor que dá a direção da reta no espaço, a equação da reta é

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{m}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{5.26}$$

Em termos das coordenadas (x_1, x_2, x_3) de $\boldsymbol{r}$ na base canônica, (5.26) são 3 *equações paramétricas* da reta:

$$x_1 = x_{01} + m_1 t, \tag{5.27}$$

$$x_2 = x_{02} + m_2 t, \tag{5.28}$$

$$x_3 = x_{03} + m_3 t \tag{5.29}$$

onde, naturalmente,

$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3), \ \boldsymbol{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}), \ \boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3). \tag{5.30}$$

Exemplo 5.9 Se duas retas no espaço possuem equações paramétricas

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{m}t_1, \\
\boldsymbol{s} &= \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{p}t_2,
\end{aligned}$$

discuta as condições geométricas que devem ser atendidas por $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{p}$ para que elas sejam *reversas*.

SOLUÇÃO
Duas retas no $\mathbb{R}^3$ são *reversas* quando não se interceptam. Se, por outro lado, elas se interceptam, então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{m}t_1 &= \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{p}t_2, \\
\boldsymbol{q}_0 \equiv \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{s}_0 &= t_2\boldsymbol{p} - t_1\boldsymbol{m}.
\end{aligned}$$

Para que as retas sejam reversas, a equação acima não pode ter solução para nenhum par (t_1, t_2) de números reais, ou seja, o vetor $\boldsymbol{q}_0$ não pode ser coplanar com $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}$ $\blacksquare$

Talvez a aplicação mais *clássica* do produto escalar seja a obtenção da projeção de um vetor na direção de um outro. Suponha que você deseje calcular a projeção do vetor $\boldsymbol{v}$ segundo o vetor $\boldsymbol{p}$. Primeiro, é necessário calcular um vetor unitário na direção de $\boldsymbol{p}$. Isso é fácil:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p}. \tag{5.31}$$

Agora, se θ é o ângulo entre $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{m}$, a projeção de $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{m}$ é simplesmente

$$|\boldsymbol{v}| \cos\theta = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{m}| \cos\theta = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m}. \tag{5.32}$$

Exemplo 5.10 Calcule a projeção de $(3, 8, 7)$ na direção de $(1/2, 1/2, 1/4)$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= (1/2, 1/2, 1/4) \Rightarrow |\boldsymbol{p}| = \sqrt{1/4 + 1/4 + 1/16} = \sqrt{9/16} = \frac{3}{4};\\
\boldsymbol{m} &= \frac{4}{3}(1/2, 1/2, 1/4) = (2/3, 2/3, 1/3);\\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m} &= (3, 8, 7) \cdot (2/3, 2/3, 1/3)\\
&= 2 + 16/3 + 7/3 = \frac{29}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

5.10 Determine a projeção do vetor $\boldsymbol{v} = (3, 3, 1)$ na direção do vetor $\boldsymbol{p} = (1/2, 1/2, 1/2)$.

A convenção de soma de Einstein

Voltemos à prova, feita acima, de que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$. Einstein observou que, *em geral* — mas não sempre — a ocorrência de um índice repetido em uma equação envolvendo vetores (e seres mais esotéricos, denominados *tensores*), está associada a uma soma. Assim, na definição

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i,$$

os dois índices i que aparecem em $u_i v_i$ estão associados ao somatório de 1 a 3. Nesses casos, *o símbolo de somatório* $\sum$ *é supérfluo, e pode ser omitido*. Todas as vezes em que aparecer um índice repetido neste texto, e em que não for feita nenhuma advertência em contrário, você deve "ver" um símbolo de somatório implícito. O ganho em velocidade de manipulação obtido em função dessa idéia aparentemente simples, denominada "convenção de soma de Einstein" ou "notação indicial" ou ainda "notação de Einstein" é considerável, e o segredo é que torna-se possível manipular vetores e depois tensores como se eles fossem simples escalares. Para a prova em questão, temos:

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta = a^2 &= a_i a_i = (b_i - c_i)(b_i - c_i)\\
&= b_i b_i + c_i c_i - 2b_i c_i \Rightarrow\\
|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Exemplo 5.11 O produto de uma matriz 3×3 por uma matriz-coluna 3×1 é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

Reescreva, usando notação indicial.

SOLUÇÃO

$$y_i = A_{ij} x_j \blacksquare$$

A notação indicial torna-se realmente poderosa quando usada em conjunto com dois símbolos especiais: o "delta de Kronecker" δ_{ij}, e o símbolo de permutação $\epsilon_{ijk,\ldots}$. A definição do primeiro é mais simples:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{5.34}$$

O delta de Kronecker é particularmente útil para denotar a matriz identidade:

$$[\boldsymbol{\delta}] = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.35}$$

Exemplo 5.12 Calcule δ_{ii}.

SOLUÇÃO

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \blacksquare$$

A notação indicial simplifica um sem-número de situações. Por exemplo, a transposta da matriz $[\boldsymbol{A}]$ é obtida trocando-se linhas por colunas:

$$[\boldsymbol{A}]^\top = [A_{ij}]^\top \equiv [A_{ji}]. \tag{5.36}$$

Note a validade de:

$$[\boldsymbol{\delta}][\boldsymbol{x}] = \delta_{ij}x_j = x_i = [\boldsymbol{x}]; \tag{5.37}$$

$$[\boldsymbol{y}]^\top[\boldsymbol{\delta}] = y_i\delta_{ij} = y_j = [\boldsymbol{y}]^\top. \tag{5.38}$$

Uma outra propriedade frequentemente útil: se $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^n$ (os $\boldsymbol{e}_i s$ têm todos módulo igual a 1, e são mutuamente ortogonais), então obviamente

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \tag{5.39}$$

Então, se $\boldsymbol{u} = u_{Ei}\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = v_{Ej}\boldsymbol{e}_j$ (atenção: o símbolo E que acompanha os subscritos não conta como um "índice" da notação indicial),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= u_{Ei}\boldsymbol{e}_i \cdot v_{Ej}\boldsymbol{e}_j \\ &= u_{Ei}v_{Ej}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \\ &= u_{Ei}v_{Ej}\delta_{ij} \\ &= u_{Ei}v_{Ei}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Note que (5.19) é *diferente* de (5.40)! A primeira é a definição em termos dos elementos u_i, v_i dos vetores, que são "absolutos" (não dependem da base), e a segunda agora vale para as coordenadas u_{Ei}, v_{Ei} em *qualquer base ortonormal*.

Tabela 5.1: O crescimento de $\exp(n)$ *versus* $n!$

n	$\exp(n)$	$n!$
1	2,71828182846	1
2	7,38905609893	2
3	20,0855369232	6
4	54,5981500331	24
5	148,413159103	120
6	403,428793493	720
7	1096,63315843	5040
8	2980,95798704	40320
9	8103,08392758	362880

O Karma da notação Há um conflito insolúvel na escolha da notação. Uma notação muito carregada e confusa impede o fluxo das idéias e dos cálculos. Por outro lado, uma notação displicente dificulta a compreensão dos conceitos e das definições que estão "por trás" dos símbolos utilizados. Veja por exemplo o caso de $\boldsymbol{v} = v_{Ei}\boldsymbol{e}_i$: até agora, essa notação tem sido útil para enfatizar que, quando a ênupla $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n)$ muda, as coordenadas v_{Ei} também mudam, *para um mesmo* $\boldsymbol{v}$. No entanto, "carregar" o índice E ao longo de todo o texto pode representar um peso considerável. De agora em diante, nós suprimiremos E quando não houver motivo para confusão. Por exemplo, quando estivermos circunscritos à base canônica, bastará escrever $\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{e}_i$, assim como quando estivermos usando apenas uma base e apenas as coordenadas nessa base.

Permutações, e o símbolo ϵ

Uma permutação parte da ênupla

$$(1, 2, 3, \ldots, n)$$

e troca suas posições. Por definição, uma permutação cria uma nova ênupla cujos elementos ainda pertencem a $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, mas cuja *ordem* (que define as diferentes ênuplas) é diferente. Por exemplo, para $n = 2$ as permutações possíveis são

$$(1, 2),\ (2, 1)$$

e para $n = 3$,

$$(1, 2, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 3, 1),\ (3, 2, 1),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3).$$

O número de permutações possíveis da ênupla $(1, 2, 3, \ldots, n)$ cresce rapidamente com n; na verdade, nada do que este autor conhece em Matemática tem um crescimento tão rápido — nem mesmo e^n! O número de permutações em uma ênupla de n elementos é $n!$ (o fatorial de n):

$$n! \equiv n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 \tag{5.41}$$

com a bem-conhecida convenção de que

$$0! = 1. \tag{5.42}$$

Para que você se convença da velocidade com que o fatorial cresce, considere a tabela 5.1

Se você está curioso para descobrir como a tabela 5.1 foi calculada, eis um programa em Python para isso:

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from math import exp, factorial
for n in range(1,10):
   print ('%4d␣%20.12g␣%8d' % (n, exp(n), factorial(n)))
```

Em (5.41), observe que, a partir de $n = 2$, $n!$ *é sempre um múltiplo de 2*, e portanto $n!$ é sempre par. Dessa forma, existe sempre um número par de permutações. Nós agora vamos definir o *sinal* de uma permutação, de tal maneira que metade das permutações serão *pares* ("positivas", associadas ao número +1), e metade serão ímpares ("negativas", associadas ao número −1).

Talvez a forma mais prática de calcular o sinal de uma permutação seja contar o número de inversões, ou seja, o número de vezes em que $a_i > a_j$ para todos os pares possíveis de uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com $i < j$. Por exemplo, para

$$(1, 3, 4, 2)$$

$3 > 2$ e $4 > 2$; há dois casos de $a_i > a_j$ com $i < j$, e portanto o sinal da permutação é +1.

Uma outra forma é pelo número de *transposições*: o sinal da permutação é $(-1)^T$, com T igual ao número de transposições entre pares de inteiros até se restaurar a ordem natural $(1, 2, \ldots, n)$. Por exemplo, para voltar de $(1, 3, 4, 2)$ para $(1, 2, 3, 4)$ há $T = 2$ transposições:

$$(1, 3, 4, 2) \xrightarrow{4\leftrightarrow 2} (1, 3, 2, 4) \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} (1, 2, 3, 4).$$

As transposições não precisam necessariamente envolver pares contíguos, como no exemplo acima. Há mais de uma maneira de voltar à ordem natural, mas todas levam ao mesmo sinal.

O cálculo manual do sinal de uma permutação é tedioso, entretanto, e pode levar a erros. O programa da listagem 5.2 calcula todas as permutações possíveis de $(1, 2, \ldots, n)$, e seus sinais:

Eis o resultado obtido para $n = 4$:

```
epsilon [1, 2, 3, 4] = +1
epsilon [1, 2, 4, 3] = -1
epsilon [1, 3, 2, 4] = -1
epsilon [1, 3, 4, 2] = +1
epsilon [1, 4, 2, 3] = +1
epsilon [1, 4, 3, 2] = -1
epsilon [2, 1, 3, 4] = -1
epsilon [2, 1, 4, 3] = +1
epsilon [2, 3, 1, 4] = +1
epsilon [2, 3, 4, 1] = -1
epsilon [2, 4, 1, 3] = -1
epsilon [2, 4, 3, 1] = +1
epsilon [3, 1, 2, 4] = +1
epsilon [3, 1, 4, 2] = -1
epsilon [3, 2, 1, 4] = -1
epsilon [3, 2, 4, 1] = +1
epsilon [3, 4, 1, 2] = +1
epsilon [3, 4, 2, 1] = -1
epsilon [4, 1, 2, 3] = -1
epsilon [4, 1, 3, 2] = +1
epsilon [4, 2, 1, 3] = +1
epsilon [4, 2, 3, 1] = -1
epsilon [4, 3, 1, 2] = -1
epsilon [4, 3, 2, 1] = +1
```

Dado um conjunto de índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$, cada um deles entre 1 e n, define-se o *símbolo de permutação*

$$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \begin{cases} 0, & \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{sinal}\,(i_1, i_2, \ldots, i_n), & \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \end{cases} \tag{5.43}$$

Listagem 5.2: `levisemcom.py` — Cálculo do símbolo de permutação de Levi-Civitta.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
epsilon = []
from copy import copy
def levi(esq,dir):
   if len(dir) == 2:
      uma = esq + dir
      dua = esq + dir[::-1]
      dua[0] *= -1
      epsilon.append(uma)
      epsilon.append(dua)
   else:
      m = len(dir)
      for i in range(m):
         lesq = copy(esq)
         ldir = copy(dir)
         lesq.append(ldir[i])
         lesq[0] *= (-1)**i
         del ldir[i]
         levi(lesq,ldir)
n = input('n␣=␣?␣')
levi([],[i for i in range(1,n+1)])
for eps in epsilon:
   if eps[0] < 0:
      sig = -1
      eps[0] = abs(eps[0])
   else:
      sig = 1
   print ('epsilon',eps,('=␣%+2d' % sig))
```

A interpretação é a seguinte: se houver pelo menos dois *is* iguais, então $\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = 0$; caso contrário, os *is* são uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$, e

$$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \text{sinal}\,(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \pm 1,$$

dependendo do sinal da permutação.

Quando $n = 3$, os sinais são muito fáceis de lembrar, porque se mantêm sob uma mudança cíclica, que corresponde a colocar o último índice no lugar do primeiro, e "rolar" os índices para a direita; assim:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = +1, \qquad \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1.$$

Muito cuidado, entretanto, porque essa é uma "regra" muito particular, que só funciona para $n = 3$. Por exemplo, sinal $(4, 3, 2, 1) = +1$, e sinal $(5, 4, 3, 2, 1) = +1$!

Exemplo 5.13 O sinal de uma permutação está implementado em Maxima na função `levi_civita`, do pacote `itensor`:

```
(%i1) load(itensor);
(%o1)         /usr/share/maxima/5.17.1/share/tensor/itensor.lisp
(%i2) levi_civita([4,3,2,1]);
(%o2)                                  1
(%i3) levi_civita([5,4,3,2,1]);
(%o3)                                  1
```

Pelos exemplos acima, você já deve estar desconfiando: o símbolo $\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ é chamado *símbolo de Levi-Civita* (Tullio Levi-Civita foi um matemático italiano). Existe uma fórmula geral para seu cálculo

(http://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol):

$$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j!}\prod_{k=j+1}^{n}(i_k - i_j)\right). \tag{5.44}$$

Uma fórmula muito útil envolvendo ϵs e δs quando $n = 3$ é a

Teorema 5.4 (Identidade polar):

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{5.45}$$

Do lado esquerdo de (5.45), o índice repetido k indica que há uma soma sobre $k = 1, 2, 3$. Os demais índices não se repetem, sendo portanto "livres": qualquer arranjo com repetição de i, j, l, m é aceitável, com cada um deles podendo variar de 1 até 3. O número total de arranjos é $3\times3\times3\times3 = 81$: a equação (5.45) representa 81 casos diferentes. Embora seja tedioso, portanto, (5.45) pode ser demonstrada por simples enumeração.

Exemplo 5.14 Verifique (5.45) para $i = 1, j = 2, l = 3, m = 1$

SOLUÇÃO

$$\epsilon_{12k}\epsilon_{31k} = \epsilon_{121}\epsilon_{311} + \epsilon_{122}\epsilon_{312} + \epsilon_{123}\epsilon_{313} = 0 = \delta_{13}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{23} = 0 - 0 = 0 \blacksquare$$

O produto vetorial

Com o símbolo de permutação à disposição, define-se o produto vetorial entre dois vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ do $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}u_i v_j \boldsymbol{e}_k. \tag{5.46}$$

Em (5.46), u_i e v_j são os elementos dos vetores $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ do $\mathbb{R}^3$, e portanto *independentes da base*. Os $\boldsymbol{e}_k s$ são obrigatoriamente os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$. Note que, apesar da aparência, (5.46) é na verdade uma definição *independente da base*, e que os $\boldsymbol{e}_k s$ só são utilizados para simplificar a escrita: (5.46) é equivalente a definir o produto vetorial como o vetor cujos elementos são

$$\left(\epsilon_{ij1}u_i v_j, \epsilon_{ij2}u_i v_j, \epsilon_{ij3}u_i v_j\right).$$

É claro que, com a notação indicial, os sinais de somatório são supérfluos:

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \epsilon_{ijk}u_i v_j \boldsymbol{e}_k. \tag{5.47}$$

O produto vetorial é um *vetor*, perpendicular tanto a $\boldsymbol{u}$ quanto a $\boldsymbol{v}$. De fato:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{u} &= \epsilon_{ijk}u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot u_l \boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{ijk}u_i v_j u_l (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) \\
&= \epsilon_{ijk}u_i v_j u_l \delta_{kl} \\
&= \epsilon_{ijk}u_i v_j u_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}u_i v_j u_k + \frac{1}{2}\epsilon_{kji}u_k v_j u_i \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{kji}\right]}_{=0} u_i v_j u_k \\
&= 0 \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

O produto vetorial é *anti-simétrico*:

$$
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \epsilon_{ijk}v_i u_j \boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk}u_j v_i \boldsymbol{e}_k = -\epsilon_{jik}u_j v_i \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \blacksquare \tag{5.49}
$$

O produto vetorial possui um módulo igual à área do paralelogramo formado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$; se θ é o ângulo entre eles,

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 &= \epsilon_{ijk}u_i v_j \epsilon_{lmk} u_l v_m \\
&= [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]u_i v_j u_l v_m \\
&= (u_i u_i)(v_j v_j) - (u_i v_i)(u_j v_j) \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta)^2 \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow \\
|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| &= |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \operatorname{sen}\theta \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.50}
$$

Exemplo 5.15 Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ estão no plano x_1x_2, o produto vetorial é particularmente simples:

$$
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [u_1 v_2 - u_2 v_1]\boldsymbol{e}_3. \tag{5.51}
$$

Isso significa que a *área A* do paralelogramo formado por (u_1, u_2) e (v_1, v_2) no $\mathbb{R}^2$ é

$$
\pm A = \epsilon_{i,j}u_i v_j. \tag{5.52}
$$

Note o sinal $\pm$: é o módulo de $u_1v_2 - u_2v_1$ que é igual à área.

O produto misto

de 3 vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ do $\mathbb{R}^3$ é, por definição,

$$
\pm V = [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{w} = \epsilon_{ijk}u_i v_j w_k. \tag{5.53}
$$

O produto misto é igual, em módulo, ao *volume V* do paralelepípedo formado por $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Exercícios Propostos

5.11 Para a diagonal f do paralelogramo formado pelos lados b e c do triângulo da figura 5.3, mostre que

$$
f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.
$$

5.12 Enuncie, e deduza, o Teorema dos Senos.

5.13 Desenhe a situação descrita no Exemplo 5.7.

Figura 5.4: Exercício 5.15.

5.14 Calcule a projeção de $(10, 11, 14)$ segundo a direção do vetor $(3, 1, 2)$.

5.15 Na figura 5.4, se $\boldsymbol{p} = (2, 1/2)$ e $\boldsymbol{v} = (4, 3)$, obtenha d_n, a distância do ponto $(4, 3)$ à reta-suporte de $\boldsymbol{p}$.

5.16 Dados um ponto Q e uma reta r no espaço, $r: \ \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 + t\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{p}_0$ e $\boldsymbol{m}$ sendo vetores conhecidos e $|\boldsymbol{m}| = 1$), a menor distância de Q à reta é o módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, onde o ponto P está na reta, e $\overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{m}$ (o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r).

Observando que Q é a extremidade de um vetor $\boldsymbol{q}$ conhecido (que parte da origem); que P é a extremidade do vetor $\boldsymbol{p}(t_*)$; que $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*)$, e usando a condição de perpendicularidade mencionada acima, obtenha o t_* (que define o ponto P) em função de $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}_0$ e $\boldsymbol{m}$, usando o produto escalar.

5.17 Prove que $[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

5.18 Se $\boldsymbol{a} = (3, 7, 2)$, e $\boldsymbol{b} = (1, 4, 5)$, obtenha a equação do plano definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e que passa pelo ponto $(0, 0, 0)$, na forma $Ax + By + Cz = D$. **Lembre-se**: se $\boldsymbol{n}$ é um vetor normal ao plano, e se $\boldsymbol{v} = (x, y, z)$ é um vetor contido no plano desejado (lembre-se de que ele passa pela origem), então: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

5.19 Programe (5.44) em Python.

5.20 O duplo produto vetorial entre 3 vetores do $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, pode ser definido de duas maneiras:

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \qquad \text{ou} \qquad [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}.$$

Mostre que elas **não** são equivalentes.

5.21 Utilizando sempre a base canônica, notação indicial (obrigatoriamente), e explicitando todos os passos, obtenha

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$$

em função de $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

5.22 Prove a *identidade de Jacobi*: $[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

5.23 Usando a identidade de Jacobi, prove que

$$[\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{c} \times [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]] + [\boldsymbol{b} \times [\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}]] = \boldsymbol{0}.$$

5.24 Dados 3 vetores $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$, não necessariamente ortonormais, porém LI, segue-se que

$$B = \boldsymbol{b}_1 \cdot [\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3] = \boldsymbol{b}_3 \cdot [\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2] = \boldsymbol{b}_2 \cdot [\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1] \neq 0.$$

Defina agora 3 novos vetores:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^1 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3], \\
\boldsymbol{b}^2 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1], \\
\boldsymbol{b}^3 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2].
\end{aligned}$$

(Os sobre-escritos não significam potências! Eles apenas enumeram os novos vetores.) Prove que

$$\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Sugestão: evite notação indicial: é mais fácil fazer por enumeração, testando cada um dos nove casos e argumentando com as propriedades geométricas dos produtos escalar e vetorial.

5.4 – O determinante

Olhe de novo para as equações (5.52) e (5.53): elas apontam para uma possibilidade interessante: o cálculo de *hipervolumes*.

Definição 5.4 Sejam $\boldsymbol{u}_1 = (u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1})$, $\boldsymbol{u}_2 = (u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{n2})$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_n = (u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{nn})$ n vetores do $\mathbb{R}^n$. O hipervolume com sinal V^n do hiperparalelepípedo formado por eles é o *determinante*

$$V^n \equiv \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \equiv \epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} u_{1i_1} u_{2i_2} \ldots u_{ni_n}. \tag{5.54}$$

É evidente que os diversos u_{ij} podem ser organizados em uma *matriz*

$$[\boldsymbol{u}] = [u_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}; \tag{5.55}$$

por definição, o determinante da matriz é o determinante dos vetores cujos elementos são suas colunas:

$$\det[\boldsymbol{u}] \equiv \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n). \tag{5.56}$$

Uma forma particularmente clara e elegante de apresentação de determinantes pode ser encontrada em Bressoud (1991). As seguintes propriedades de determinantes são quase óbvias quando se tem o conceito de hipervolume em mente:

1. O determinante do hiperparalelepípedo gerado pela base canônica, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é 1:

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1. \tag{5.57}$$

2. O determinante é linear em cada um dos vetores $\boldsymbol{u}_k$:

$$\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n) + \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \tag{5.58}$$

$$\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \alpha\boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \tag{5.59}$$

A equação (5.58) significa que o hiperparalelepípedo gerado por uma soma $\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k$ possui um volume igual à soma dos hiperparalelepípedos gerados separadamente com $\boldsymbol{u}_k$ e $\boldsymbol{v}_k$; a equação (5.59) significa que multiplicar uma das arestas de um hiperparalelepípedo por α multiplica o seu hipervolume por α. Ambas são bastante intuitivas.

3. Se $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_n)$ são LD, o seu determinante é nulo:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_n) \text{ LD} \Rightarrow \det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = 0. \tag{5.60}$$

Por exemplo, no $\mathbb{R}^3$, se construirmos um paralelepípedo com arestas $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, a 3ª aresta será evidentemente coplanar a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e o volume será consequentemente nulo.

4. O determinante da transposta é igual ao determinante da matriz:

$$\det [\boldsymbol{u}]^{\mathsf{T}} = \det [\boldsymbol{u}]. \tag{5.61}$$

5. Das regras de sinal de permutações segue-se que o sinal do determinante troca quando as posições de duas colunas são trocadas:

$$\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = -\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l, \ldots, \boldsymbol{u}_k, \ldots, \boldsymbol{u}_n). \tag{5.62}$$

Algumas dessas propriedades são provadas de forma trivial, e outras nem tanto. Considere por exemplo a prova de (5.58) para o caso $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) &= \epsilon_{ijk} u_i (v_j + b_j) w_k \\ &= \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k + \epsilon_{ijk} u_i b_j w_k \\ &= \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}) \ \blacksquare \end{aligned} \tag{5.63}$$

A prova do item 4 talvez seja a mais difícil. Matematicamente (5.61) se traduz em

$$\epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} u_{1i_1} u_{2i_2} \ldots u_{ni_n} = \epsilon_{l_1, l_2, \ldots, l_n} u_{l_1 1} u_{l_2 2} \cdots u_{l_n n}. \tag{5.64}$$

Para tornar a dedução um pouco mais concreta, considere o caso $n = 4$ (depois poderemos verificar o que é preciso para retornar ao caso de um n qualquer). Reescrevemos a expressão acima (que desejamos provar) como

$$\epsilon_{ijkl} u_{1i} u_{2j} u_{3k} u_{4l} = \epsilon_{mnpq} u_{m1} u_{n2} u_{p3} u_{q4}. \tag{5.65}$$

Inicialmente, considere apenas o lado esquerdo, sem somas e sem o sinal introduzido pelo símbolo de permutação ϵ_{ijkl}:

$$u_{1i}u_{2j}u_{3k}u_{4l}.$$

Em seguida, note que a quádrupla ordenada de índices (i, j, k, l) é uma permutação de $(1, 2, 3, 4)$. Logo, apenas um dos índices é igual a 1; um dos índices é igual a 2; um dos índices é igual a 3, e um dos índices é igual a 4. Portanto, é imediato que existem índices (m, n, p, q) tais que

$$u_{1i}u_{2j}u_{3k}u_{4l} = u_{m1}u_{n2}u_{p3}u_{q4} \tag{5.66}$$

É bem claro também que (m, n, p, q) têm que ser, igualmente, uma permutação de $(1, 2, 3, 4)$ — mas não necessariamente a mesma. Seja π a permutação (i, j, k, l), e χ a permutação (m, n, p, q); isso significa que

$$\begin{aligned} i &= \pi(1) & m &= \chi(1); \\ j &= \pi(2) & n &= \chi(2); \\ k &= \pi(3) & p &= \chi(3); \\ l &= \pi(4) & q &= \chi(4). \end{aligned}$$

Se utilizarmos as permutações π e χ, podemos reescrever (5.66) da seguinte forma:

$$\prod_{r=1}^{4} u_{r\,\pi(r)} = \prod_{s=1}^{4} u_{\chi(s)\,s}. \tag{5.67}$$

Não se deixe intimidar pela notação. Por exemplo, para u_{2j} temos: $u_{2j} = u_{2\,\pi(2)} = u_{r\,\pi(r)}$ para $r = 2$. Além disso, (5.66), e sua forma compacta (5.67) são apenas a rearrumação de um produto de quatro termos. Cada um dos 4 termos $u_{r\pi(r)}$ do lado esquerdo de (5.67) é igual a um dos termos $u_{\chi(s)\,s}$ do lado direito. Fixe portanto, mentalmente, um dos rs. Existe um s correspondente de tal modo que

$$u_{r\,\pi(r)} = u_{\chi(s)\,s}.$$

Isso é o mesmo que dizer que

$$\begin{aligned} r &= \chi(s), \\ \pi(r) &= s, \Rightarrow \\ r &= \chi(\pi(r)). \end{aligned}$$

Constatamos, enfim, que π e χ são permutações inversas. Neste caso, uma breve reflexão nos levará a concluir que ambas têm necessariamente que possuir o mesmo sinal! Então, $\epsilon_{ijkl} = \epsilon_{mnpq}$, e

$$\epsilon_{ijkl}u_{1i}u_{2j}u_{3k}u_{4l} = \epsilon_{mnpq}u_{m1}u_{n2}u_{p3}u_{q4} \blacksquare$$

O resultado acima é idêntico a (5.65), e prova (5.64) para $n = 4$. Mais uma breve reflexão, entratanto, nos convencerá de que a prova acima *não tem nenhuma restrição para n* (exceto pela notação e o uso finito de índices (i, j, k, l), (m, n, p, q), etc.). É um exercício relativamente simples, que convidamos os leitores a fazer, adaptar a prova para um n qualquer. A prova é de fato geral, e a equação (5.64) vale para qualquer n.

Com a ajuda do símbolo de permutação e do conceito de determinante, podemos agora definir o que é uma base dextrógira/levógira do $\mathbb{R}^n$:

Definição 5.5 Uma ênupla de n *vetores* LI $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ — e portanto uma base — do $\mathbb{R}^n$ é *dextrógira* se $\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) > 0$, e *levógira* caso contrário.

Exercícios Propostos

5.25 Verifique que (5.57) reduz-se a (5.52) e a (5.53) quando $n = 2$ e $n = 3$, respectivamente.

5.26 Prove (5.57).

5.27 Verifique que a nossa definição de $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ é equivalente ao "pseudo-determinante"

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

5.28 Prove que, para $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 0$.

5.29 Para uma matriz 3×3, prove (5.61).

5.30 Calcule o determinante de

$$[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.31 Zorg é um estudante de Engenharia Ambiental do Planeta Z4, um planeta quadridimensional de outro universo. Enquanto calcula o hipervolume de um reservatório de q-água (uma molécula quadridimensional com propriedades semelhantes às da água), Zorg precisa obter o hipervolume do hiperprisma formado pelos vetores $(2, 4, 1, 0)$, $(1, 3, 0, 2)$, $(0, 2, 3, 1)$ e $(0, 4, 2, 3)$. Qual é o valor obtido por Zorg?

5.5 – Funções e funcionais lineares, e o teorema da representação

Antes de entrarmos no caso mais geral (e mais interessante) de transformações lineares em um espaço vetorial $\mathbb{V}$, considere a seguinte definição:

Definição 5.6 (Função linear) Uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

é *linear* quando:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \tag{5.68}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \tag{5.69}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Existe uma grande restrição sobre a *forma analítica* que uma função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ pode assumir. Esse é o conteúdo do

---

Teorema 5.5 Toda função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é da forma

$$f(x) = cx, \tag{5.70}$$

para algum $c \in \mathbb{R}$.

A prova consiste em uma parte fácil, e uma difícil. A fácil é a seguinte: se $f(x) = cx$, então,

$$\begin{aligned} f(\alpha x) = c(\alpha x) = \alpha(cx) = \alpha f(x) \qquad &((5.68) \text{ ok}), \\ f(x_1) + f(x_2) = cx_1 + cx_2 = c(x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2) \qquad &((5.69) \text{ ok}). \end{aligned}$$

A parte difícil é provar que (5.70) é a *única* forma possível para uma função linear. Uma prova não muito longa é a seguinte: para *qualquer* função f, pela regra da cadeia, vale:

$$\frac{\mathrm{d}f(\alpha x)}{\mathrm{d}x} = \alpha f'(\alpha x).$$

Mas se f é linear, então, para qualquer α, teremos:

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x), \\ \alpha f'(\alpha x) &= \alpha f'(x). \end{aligned}$$

Note que, nas equações acima, o lado esquerdo é a regra da cadeia, e o lado direito é uma consequência da linearidade de f. Eliminando α, temos que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(\alpha x) = f'(x),$$

ou seja: a função $f'(x)$ não depende do argumento x. Isso é o mesmo que

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = c,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Integrando,

$$f(x) = cx + b.$$

Volte a ((5.68): fazendo $\alpha = 0$, obtemos o fato de que $f(0) = 0$ sempre para uma função linear. Portanto, $b = 0$, e uma $f(x)$ linear de fato é *sempre* da forma (5.70).

Agora, em lugar de dizermos

"$y = f(x)$, onde f é linear",

podemos dizer, simplesmente,

"$y = cx$".

Uma extensão natural agora é a definição de um *funcional* linear. Aqui nós seguimos, mas não muito de perto, Nearing (2009, Cap. 12).

Definição 5.7 (Função linear) Um funcional

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto y = f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

é *linear* quando:

$$f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}), \tag{5.71}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2), \tag{5.72}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

É evidente que, em cada um dos elementos x_i do vetor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, f é uma função linear da forma $c_{(i)} x_{(i)}$ (sem soma em i). Não é difícil verificar agora que

---

Teorema 5.6 (Teorema da representação) A forma mais geral possível de um funcional linear é (Nearing, 2009, p. 329)

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}, \tag{5.73}$$

onde $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor único que define o funcional.

A operação acima é análoga ao produto escalar da equação (5.19), só que agora em $\mathbb{R}^n$. Nós vamos usar a mesma notação para esse caso um pouco mais geral. No capítulo 15, nós voltaremos ao assunto, e veremos que o produto escalar em $\mathbb{R}^3$ e no $\mathbb{R}^n$ é um caso particular do *produto interno*.

Novamente, podemos substituir "$y = f(\boldsymbol{x})$, f é linear", por: "$y = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$".

5.6 – Transformações lineares

Uma transformação linear é apenas uma função linear de um espaço vetorial em outro. Uma restrição maior ainda é fazer com que o domínio e o contra-domínio sejam o *mesmo* espaço $\mathbb{V}$. Escreve-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \mathbb{V} &\to \mathbb{V} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Na prática, muitas transformações lineares estão associadas com fenômenos físicos tais como: tensões e deformações em corpos, momentos de inércia, e outros. Por exemplo, se o momento de inércia de um "corpo" bi-dimensional no plano xy é I_z, e se o corpo gira com velocidade angular ω_z em torno do eixo z, o seu momento angular é

$$L_z = I_z w_z. \tag{5.74}$$

No entanto, no caso de um corpo tridimensional girando no espaço com velocidade angular vetorial $\boldsymbol{\omega}$, o momento angular é dado por

$$\boldsymbol{L} = \mathfrak{I}(\boldsymbol{\omega}), \tag{5.75}$$

onde, agora, $\mathfrak{I}$ (o tensor de inércia) é uma *transformação linear*.

As propriedades fundamentais de uma transformação linear são

$$\boldsymbol{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \tag{5.76}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}). \tag{5.77}$$

Compare (5.76)–(5.77) com (5.68)–(5.69), e com (5.71)–(5.72): é evidente que se trata do mesmo conceito, aplicado a espaços vetoriais (tanto no domínio quanto no contra-domínio) sucessivamente "maiores". Uma questão é: haverá um análogo de $y = cx$ e de $y = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$ no caso de transformações lineares? A resposta é *sim*.

O mais importante vem agora: considere uma base $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$; todo vetor $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{V}$ pode ser escrito nesta base:

$$\boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{e}_j \tag{5.78}$$

(lembre-se de que está valendo a convenção de soma de Einstein), donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(x_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= x_j \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j). \end{aligned} \tag{5.79}$$

Mas o *vetor* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j)$ também pode ser escrito na mesma base:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j) = A_{ij} \boldsymbol{e}_i, \tag{5.80}$$

donde

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i. \tag{5.81}$$

Portanto, se $\boldsymbol{y} = y_i \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, temos

$$y_i = A_{ij} x_j, \qquad [\boldsymbol{y}] = [A][\boldsymbol{x}] \tag{5.82}$$

ou seja: *a transformação linear* $\boldsymbol{A}$ *pode ser representada por um produto de matrizes, para qualquer argumento* $\boldsymbol{x}$ *em* $\mathbb{V}$. Além disso, (5.82) é um primeiro análogo de $y = cx$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$. É claro que a matriz depende da base em que os vetores são escritos, de modo que a analogia (ainda) não é perfeita, ou seja: o produto não é feito ainda com o objeto "puro" $\boldsymbol{x}$, mas sim com uma representação matricial sua, que depende da base, e que portanto pode mudar.

Por exemplo, suponha que escrevamos os vetores do domínio de $\boldsymbol{A}$ na base $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, e os vetores do contra-domínio na base $F = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$: o que muda no desenvolvimento acima? É mais ou menos imediato que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= x_j \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j), \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j) &= A_{ij} \boldsymbol{f}_i, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= A_{ij} x_j \boldsymbol{f}_i. \end{aligned} \tag{5.83}$$

O significado da matriz $[\boldsymbol{A}]$ agora mudou: ela representa a transformação linear quando os vetores do domínio estão na base E, e os do contra-domínio na base F. Estritamente falando, seria necessário escrever algo como $[\boldsymbol{A}]_{F,E}$ para deixar este fato explícito. Novamente, em geral ficará claro pelo contexto em que bases os vetores do domínio e do contra-domínio são escritos, e, como fizemos acima para vetores, muitas vezes omitiremos os índices representativos das bases.

Quando $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, existe uma maneira prática de explicitar as bases em que uma transformação linear está representada. Nós vamos nos limitar, no restante deste capítulo a bases ortonormais e a $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Lembre-se: se E, F, etc., são bases ortonormais, $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$, $\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_j = \delta_{ij}$, etc..

Considere, portanto, novamente a sequência

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(x_j \boldsymbol{e}_j) \\ &= x_j A_{ij} \boldsymbol{f}_i : \end{aligned}$$

observe como $x_j A_{ij}$ tem exatamente a forma do funcional linear dado por (5.73). Além disso, como $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, temos um vetor $\boldsymbol{A}_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j$, um vetor $\boldsymbol{x} = x_k \boldsymbol{e}_k$, e $A_{ij}x_j$ é o produto escalar entre eles. Escreveremos portanto

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \left[A_{ij}\boldsymbol{e}_j \cdot x_k \boldsymbol{e}_k\right] \boldsymbol{f}_i \tag{5.84}$$

(onde $\boldsymbol{A}_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j$ faz o papel de $\boldsymbol{c}$ em (5.73)). A equação (5.84) sugere a seguinte notação:

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{f}_i \boldsymbol{e}_j, \tag{5.85}$$

juntamente com a definição de um novo produto:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \left[A_{ij}\boldsymbol{e}_j \cdot x_k \boldsymbol{e}_k\right] \boldsymbol{f}_i. \tag{5.86}$$

O produto em (5.86) se dá entre o objeto $\boldsymbol{A}$ de (5.85) e um vetor $\boldsymbol{x}$ do $\mathbb{R}^n$. $\boldsymbol{A}$ é um membro de um novo espaço vetorial, o espaço dos tensores de ordem 2, cuja base são, no caso de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, os 9 objetos $\boldsymbol{f}_i \boldsymbol{e}_j$. A equação (5.86) é a generalização, para $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, das equações $y = cx$ (para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) e $y = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$ (para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Nos casos em que $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, portanto, nós daremos preferência a usar a notação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$, em lugar de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, para indicar transformações lineares.

A vantagem dessa notação é que a partir de agora nós podemos operar sobre vetores utilizando produtos escalares! Por exemplo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= A_{ij}\boldsymbol{f}_i \boldsymbol{e}_j \cdot x_k \boldsymbol{e}_k \\ &= A_{ij}\boldsymbol{f}_i x_k (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\ &= A_{ij}\boldsymbol{f}_i x_k \delta_{jk} \\ &= A_{ij} x_j \boldsymbol{f}_i. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Olhe de novo para (5.85): ela é uma forma compacta de dizer que os elementos A_{ij} da matriz $[\boldsymbol{A}]$ representam a transformação quando a base do domínio é $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, e a base do contra-domínio é $F = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$.

A partir de agora, nós vamos usar frequentemente a notação (5.85) para representar transformações lineares, porque ela em geral é a mais útil, e a mais "agradável" para físicos e engenheiros.

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (e também em $\mathbb{R}^n$, se abrirmos mão de visualizações que são impossíveis para $n > 3$), transformações lineares podem ser classificadas em termos do que elas fazem *geometricamente* com os vetores. Considere inicialmente a transformação definida por

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \tag{5.88}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \tag{5.89}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3. \tag{5.90}$$

Claramente, $\boldsymbol{A}$ leva uma base dextrógira em uma base levógira. A matriz desta transformação é

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.91}$$

Figura 5.5: Uma transformação linear que produz um cisalhamento simples

Verifique (5.80): as colunas de $[\boldsymbol{A}]$ são as coordenadas de $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n$. *Volumes* em $\mathbb{R}^3$ são levados em volumes iguais, porém com o sinal trocado: $\det[\boldsymbol{A}] = -1$ (verifique).

Considere agora

$$\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1, \tag{5.92}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2. \tag{5.93}$$

A matriz da transformação agora é

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.94}$$

Essa transformação é um *cisalhamento*. Ela deforma um elemento do $\mathbb{R}^2$. Entretanto, ela não modifica a sua área: $\det[\boldsymbol{A}] = +1$. A figura 5.5 mostra graficamente a transformação. Cisalhamentos são situações muito comuns em diversos tipos de situações físicas. Eles ocorrem por exemplo em estruturas sujeitas a esforços tangenciais, e também em sistemas de lubrificação. Um dos primeiros exemplos históricos de uma equação envolvendo cisalhamento talvez seja a lei de Newton para a viscosidade, que permite o cálculo da tensão de cisalhamento em um fluido:

$$T_{12} = \mu\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_2}, \tag{5.95}$$

onde T_{12} é a tensão de cisalhamento, μ é o coeficiente de viscosidade, e u_1 é a velocidade do fluido na direção x_1.

Outra transformação geométrica importante do ponto de vista físico é a expansão/ contração de uma região. Duas transformações lineares que produzem expansões são dadas, na base canônica do $\mathbb{R}^3$, por

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 2^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1/3} \end{bmatrix}, \qquad [\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5.96}$$

Note que $\boldsymbol{A}$ dobra o volume de uma região do $\mathbb{R}^3$ *isotropicamente*: todos os 3 eixos são alongados por um fator $2^{1/3}$: $\det[\boldsymbol{A}] = 2$. Já $\boldsymbol{B}$ constitui-se em uma expansão *anisotrópica*: a direção 1 permanece inalterada, a direção 2 dobra de comprimento, e a direção 3 triplica: $\det[\boldsymbol{B}] = 6$.

Finalmente, considere a *rotação* no $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

Figura 5.6: Uma transformação linear que produz uma rotação simples

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 = \cos(\pi/6)\boldsymbol{e}_1 + \operatorname{sen}(\pi/6)\boldsymbol{e}_2, \tag{5.97}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 = -\operatorname{sen}(\pi/6)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\pi/6)\boldsymbol{e}_2. \tag{5.98}$$

A matriz da transformação é

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}. \tag{5.99}$$

e a figura 5.6 mostra-a graficamente. Note que a transformação não muda a área transformada: $\det[\boldsymbol{A}] = +1$.

Rotações podem ser estudadas sistematicamente como se segue. Considere duas bases ortonormais, $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ e $E' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$. Cada vetor de uma delas pode ser escrito em termos dos vetores da outra, ou seja:

$$\boldsymbol{e}'_j = C_{ij}\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}'_j\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i, \tag{5.100}$$
$$\boldsymbol{e}_i = C_{ij}\boldsymbol{e}'_j = (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}'_j)\boldsymbol{e}'_j. \tag{5.101}$$

O significado geométrico de C_{ij} é claro: ele é o cosseno entre $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}'_j$.

Note que

$$|\boldsymbol{e}'_j| = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} C_{ij}^2 = 1, \tag{5.102}$$
$$|\boldsymbol{e}_i| = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} C_{ij}^2 = 1. \tag{5.103}$$

Exemplo 5.16 As equações (5.102)–(5.103) são casos em que a notação indicial não funciona tão facilmente. Considere por exemplo (5.102). Como precisamos de uma soma em i, somos tentados a escrever

$$C_{ij}C_{ij} = 1$$

— mas isso está errado, porque significaria uma soma em i *e em* j! De fato, em (5.102), j é um índice *livre*, ou seja: *não se soma em* j. Uma maneira de lograr esse efeito com notação indicial é envolver em parênteses o índice que não deve ser somado. Portanto, a maneira correta de escrever (5.102) usando notação indicial é

$$C_{i(j)}C_{i(j)} = 1.$$

Note que em geral $C_{ij} \neq C_{ji}$, ou seja: a matriz $[C]$ *não* é simétrica. Agora, dado um vetor $\boldsymbol{u}$ qualquer no $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{u} = u'_j \boldsymbol{e}'_j = u_i \boldsymbol{e}_i, \tag{5.104}$$

onde u'_j são as coordenadas de $\boldsymbol{u}$ na base E', e u_i são as coordenadas de $\boldsymbol{u}$ na base E. Duas fórmulas podem ser obtidas daqui:

$$u_i = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{u} \cdot C_{ij}\boldsymbol{e}'_j = C_{ij}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}'_j) = C_{ij}u'_j \Rightarrow [\boldsymbol{u}]_E = [C][\boldsymbol{u}]_{E'}, \tag{5.105}$$

$$u'_j = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{u} \cdot C_{ij}\boldsymbol{e}_i = C_{ij}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_i) = C_{ij}u_i = C^{\mathsf{T}}_{ji}u_i \Rightarrow [\boldsymbol{u}]_{E'} = [C]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{u}]_E. \tag{5.106}$$

Uma propriedade importante da matriz $[C]$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_k\boldsymbol{e}_k = u_i\boldsymbol{e}_i = u_iC_{ij}\boldsymbol{e}'_j = u_iC_{ij}C_{kj}\boldsymbol{e}_k; \\ u_k &= u_iC_{ij}C_{kj} = C_{kj}C^{\mathsf{T}}_{ji}u_i; \\ C_{kj}C^{\mathsf{T}}_{ji} &= \delta_{ki} \;\Rightarrow \\ [C][C]^{\mathsf{T}} &= [\delta] \;\blacksquare \end{aligned} \tag{5.107}$$

Em outras palavras, $[C]^{\mathsf{T}}$ é uma *inversa direita* de $[C]$. No problema 5.35, pede-se para que você prove que $[C]^{\mathsf{T}}$ é uma inversa esquerda de $[C]$, também. Consequentemente,

$$[C][C]^{\mathsf{T}} = [C]^{\mathsf{T}}[C] = [\delta] \;\Rightarrow\; [C]^{\mathsf{T}} = [C]^{-1} \tag{5.108}$$

(a inversa de $[C]$ é igual à sua transposta).

Da maneira como viemos tratando o assunto, a matriz $[C]$ é uma *matriz de rotação de eixos*, ou de bases: o que "gira" ou "muda" é a base, permanecendo "fixo" o vetor $\boldsymbol{u}$. Portanto, o que muda são as coordenadas de $\boldsymbol{u}$, porque a base mudou. Mas tudo é relativo, e é óbvio que uma rotação de um ângulo $+\theta$ dos eixos coordenados em torno de um reta fixa r é equivalente a uma rotação de um ângulo $-\theta$ em torno da mesma reta do vetor $\boldsymbol{u}$, mantendo-se a base fixa. *Nessa segunda interpretação, C é uma transformação linear que gira um vetor.*

O determinante da transformação linear C é unitário:

$$\begin{aligned} 1 &= [\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2] \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &= \left[C_{1l}\boldsymbol{e}'_l \times C_{2m}\boldsymbol{e}'_m\right] \cdot C_{3n}\boldsymbol{e}'_n \\ &= C_{1l}C_{2m}C_{3n}[\boldsymbol{e}'_l \times \boldsymbol{e}'_m] \cdot \boldsymbol{e}'_n \\ &= \epsilon_{lmn}C_{1l}C_{2m}C_{3n} = \det[C] \;\blacksquare \end{aligned} \tag{5.109}$$

Uma rotação de eixos também muda, evidentemente, as matrizes das transformações lineares. Isso pode ser calculado muito convenientemente utilizando a notação introduzida em (5.85):

$$\begin{aligned} A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j &= A'_{kl}\boldsymbol{e}'_k\boldsymbol{e}'_l \\ &= A'_{kl}C_{ik}\boldsymbol{e}_iC_{jl}\boldsymbol{e}_j \\ &= C_{ik}A'_{kl}C^{\mathsf{T}}_{lj}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \Rightarrow \\ [A]_E &= [C][A]_{E'}[C]^{\mathsf{T}}; \end{aligned} \tag{5.110}$$

bem como

$$\begin{aligned} A'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j &= A_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l \\ &= A_{kl}C_{ki}\boldsymbol{e}'_iC_{lj}\boldsymbol{e}'_j \\ &= C^{\mathsf{T}}_{ik}A_{kl}C_{lj}\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{e}'_j \Rightarrow \\ [A]_{E'} &= [C]^{\mathsf{T}}[A]_E[C]. \end{aligned} \tag{5.111}$$

Exemplo 5.17 Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a base canônica em $\mathbb{R}^3$. Desejo construir uma base ortonormal dextrógira $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$. Os vetores $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ são

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \tag{5.112}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1). \tag{5.113}$$

a) [2,0] Mostre que

$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \tag{5.114}$$

b) [3,0] Calcule a matriz de rotação $[C]$ cujos elementos atendem a $\boldsymbol{f}_j = \sum_i C_{ij}\boldsymbol{e}_i$.

SOLUÇÃO
1a) é óbvia: $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2$.
1b) é resolvida com $C_{ij} = (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{e}_i)$, donde

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.18 Considere um sistema rígido de eixos x_0, y_0, z_0 mutuamente ortogonais e orientados segundo a regra da mão direita. Os eixos sofrem duas rotações *simples* consecutivas:

1. uma rotação positiva (segundo a regra da mão direita) de um ângulo $\alpha_1 < \pi/2$ em redor do eixo original z_0.
2. uma rotação positiva (segundo a regra da mão direita) de um ângulo $\alpha_2 < \pi/2$ em redor do eixo original x_0.

Obtenha a matriz de rotação de coordenadas $C_{ij} = (\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_i)$. **Sugestão:** componha duas rotações planas, cada uma das quais com matriz de rotação dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO
Na base original $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$, as duas matrizes simples de rotação deste problema são:

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

Tudo o que precisamos agora é saber aonde "vão parar" $\boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{j}_0$ e $\boldsymbol{k}_0$ após as duas rotações consecutivas:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{i}_0 = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1, 0); \\
\boldsymbol{i}' &= \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{i}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2); \\
\boldsymbol{j}_1 &= \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{j}_0 = (-\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_1, 0); \\
\boldsymbol{j}' &= \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{j}_1 = (-\operatorname{sen}\alpha_1, \cos\alpha_2 \cos\alpha_1, \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2);
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{k}_0 = (0, 0, 1);$$
$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{k}_1 = (0, -\operatorname{sen}\alpha_2, \cos\alpha_2).$$

Portanto,

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exemplo 5.19 Define-se a rotação no plano x_{0i}, x_{0j} de valor θ_k como a rotação em que um vetor paralelo a x_{0i} gira de θ_k (neste plano) de tal modo que $\epsilon_{ijk} = +1$ (veja a figura). Note que $\epsilon_{ijk} = +1$ define o *sentido* da rotação.

(a) Mostre que a matriz de rotação no plano x_{0i}, x_{0j} é

$$[Q_k] = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\operatorname{sen}\theta_k \\ \operatorname{sen}\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}.$$

(b) Consequentemente, mostre que as 3 matrizes tri-dimensionais de rotação plana são

$$[\boldsymbol{R}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix},$$
$$[\boldsymbol{R}_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$
$$[\boldsymbol{R}_3] = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\operatorname{sen}\theta_3 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $[\boldsymbol{R}_2]$ é "diferente" das outras duas: em que, e por quê? Sugestão: lembre-se da ordem i, j, k em $\epsilon_{ijk} = +1$.

SOLUÇÃO

a) Seja $\boldsymbol{v}$ um vetor genérico de módulo r, fazendo um ângulo α com o eixo x_{0i}; então, após uma rotação de θ_k as coordenadas do vetor rotacionado serão

$$\begin{aligned} v_i' &= r\cos(\alpha+\theta_k) \\ &= r\cos\alpha\cos\theta_k - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_k \\ &= v_i\cos\theta_k - v_j\,\mathrm{sen}\,\theta_k. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v_j' &= r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta_k) \\ &= r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta_k + r\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_k \\ &= v_j\cos\theta_k + v_i\,\mathrm{sen}\,\theta_k \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} v_i' \\ v_j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\mathrm{sen}\,\theta_k \\ \mathrm{sen}\,\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} \blacksquare$$

b) A matriz $[\boldsymbol{R}_k]$ pode ser obtida a partir da matriz $[\boldsymbol{Q}_k]$ expandindo essa última pela adição de uma linha k e uma coluna k com 1 na posição (k,k) e 0 nas demais. *Respeitada* a ordem de i, j, k em $\epsilon_{i,j,k} = +1$ temos:

$$[\boldsymbol{Q}_1] = \begin{bmatrix} R_{1,22} & R_{1,23} \\ R_{1,32} & R_{1,33} \end{bmatrix}$$
$$[\boldsymbol{Q}_2] = \begin{bmatrix} R_{2,33} & R_{2,31} \\ R_{2,13} & R_{2,11} \end{bmatrix}$$
$$[\boldsymbol{Q}_3] = \begin{bmatrix} R_{3,11} & R_{3,12} \\ R_{3,21} & R_{3,22} \end{bmatrix}$$

Note que $[\boldsymbol{Q}_2]$ está "transposta", ou seja: o índice 3 aparece antes do índice 1. É por isso que $[\boldsymbol{R}_2]$ é "diferente" das outras duas, já que o sinal de $\mathrm{sen}\,\theta_2$ aparece trocado $\blacksquare$

Exercícios Propostos

5.32 A *contração* de dois tensores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_m).$$

Se $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico de ordem 2, e $\boldsymbol{A}$ é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ S_{ij} = S_{ji}; \qquad \boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m,\ A_{lm} = -A_{ml},$$

mostre que

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0.$$

5.33 Se

$$\boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m, \qquad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k,$$

obtenha uma expressão em notação indicial para

$$\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}].$$

5.34 Escreva (5.103) em notação indicial.

5.35 Prove que $[C]^{\mathsf{T}}[C] = [\boldsymbol{\delta}]$.

5.36 Seja $[\boldsymbol{A}]$ uma matriz simétrica que representa alguma grandeza física (por exemplo um tensor de inércia) em uma base ortonormal E. Mostre que $[\boldsymbol{A}']$ (a matriz da mesma grandeza em *qualquer* outra base ortonormal E'), *também será simétrica*. Sugestão: admita uma matriz de rotação qualquer $[\boldsymbol{C}]$ de E para E'; usando a notação indicial de Einstein, parta de

$$A'_{mn} = C^{\mathsf{T}}_{mi} A_{ij} C_{jn},$$

escreva a expressão correspondente para A'_{nm} e use o fato de que $A_{ij} = A_{ji}$.

5.37 Dado o vetor $\boldsymbol{k} = k_i \boldsymbol{e}_i$, a matriz do tensor

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}) = \underbrace{\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right]}_{P_{ij}} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$$

na base canônica $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é $[P_{ij}]$. Dada uma rotação de E para $E' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$,

$$\boldsymbol{e}'_l = C_{il} \boldsymbol{e}_i \Longleftrightarrow \boldsymbol{e}_i = C_{il} \boldsymbol{e}'_l,$$

a expressão de $\boldsymbol{P}$ na base E' é

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}) = P'_{lm} \boldsymbol{e}'_l \boldsymbol{e}'_m.$$

Obtenha as componentes P'_{lm} em termos de k'_l e k'_m, onde $\boldsymbol{k} = k'_l \boldsymbol{e}'_l$.

5.38 Sabemos que

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$, são os elementos da matriz da transformação $\boldsymbol{P}$, na base canônica, que projeta qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ do $\mathbb{R}^3$ no plano que passa pela origem e é normal ao vetor $\boldsymbol{k}$. Para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ não nulos e não colineares, calcule, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**,

$$[\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k}.$$

5.39 Considere a transformação linear dada pela reflexão em torno do plano vertical $x_2 x_3$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= -\boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Qual é a relação geométrica entre $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ e $[\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{u}] \times [\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}]$, sendo $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$?

5.40 Considere a base ortonormal dextrógira F dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \\ \boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \\ \boldsymbol{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Obtenha a matriz de rotação $[\boldsymbol{C}]$ da base canônica E para a base F.

Figura 5.7: Duas rotações sucessivas de eixos.

5.41 A figura 5.7 mostra duas rotações sucessivas, entre $(x_E, y_E, z_E) \to (x_F, y_F, z_F)$, e $(x_F, y_F, z_F) \to (x_G, y_G, z_G)$. As bases de cada sistema coordenado são, respectivamente, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$; $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$; e $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$. As matrizes de rotação $[C]$ e $[D]$ são definidas respectivamente por

$$\boldsymbol{f}_j \equiv C_{ij}\boldsymbol{e}_i; \qquad \boldsymbol{g}_k \equiv D_{jk}\boldsymbol{f}_j,$$

com

$$C_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{f}_j); \qquad D_{jk} = (\boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{g}_k).$$

A primeira rotação é um giro positivo de α radianos em torno de z_E, e a segunda rotação é um giro *negativo* de β radianos em torno de y_F. Obtenha as matrizes de rotação $[C]$ e $[D]$.

5.42 Considere 2 rotações sucessivas: uma rotação da base E para a base E', seguida de uma rotação da base E' para a base E''. A primeira rotação, C, gira $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ de um ângulo θ em torno de $\boldsymbol{e}_3$:

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \longrightarrow (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3);$$

a segunda rotação, D, gira $E' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ de um ângulo α em torno de $\boldsymbol{e}'_1$:

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) \longrightarrow (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2, \boldsymbol{e}''_3).$$

Sabendo que as matrizes de rotação são

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

mostre que as duas rotações em sucessão são equivalentes a uma única rotação $E \longrightarrow E''$ cuja matriz de rotação é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\alpha\cos\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Sugestão: usando a notação indicial de Einstein, simplesmente escreva $\boldsymbol{e}'_j = C_{ij}\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}''_k = D_{jk}\boldsymbol{e}'_j$, componha as duas e calcule o produto matricial correspondente.

5.43 A matriz

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de rotação? Por quê? Sugestão: Para $[\boldsymbol{u}] = [1, 1]^\top$ e $[\boldsymbol{v}] = [1, -1]^\top$, Calcule $[C][\boldsymbol{u}]$ e $[C][\boldsymbol{v}]$: o resultado parece uma rotação para você?

5.7 – Sistemas de equações lineares

Voltemos à equação (5.82): lá, ela representava uma transformação linear que leva o vetor $\boldsymbol{x}$ no vetor $\boldsymbol{y}$. Mas é evidente que

$$[A][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}] \tag{5.115}$$

pode ser interpretada simplesmente como um conjunto de n equações em n incógnitas. Quando é que um sistema $n \times n$ possui *solução única*? Quando a transformação linear $\boldsymbol{A}$ é *inversível*, ou seja: quando $\det [\boldsymbol{A}] \neq 0$. Vejamos por quê.

Inicialmente, considere o exemplo muito trivial, mas bastante instrutivo, da transformação definida por

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1, \tag{5.116}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2, \tag{5.117}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}. \tag{5.118}$$

A matriz dessa transformação é

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.119}$$

e é evidente que $\det [\boldsymbol{A}] = 0$. Também não é difícil ver o significado geométrico de $\boldsymbol{A}$: ela *projeta* qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ no plano x_1x_2:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \operatorname{proj}_{x_1x_2} \boldsymbol{x}; \end{aligned}$$

Consequentemente, qualquer *volume* do domínio $\mathbb{R}^3$ será "achatado" e mapeado por $\boldsymbol{A}$ em uma *área* do $\mathbb{R}^2$.

Observe que, enquanto que o *contra-domínio* de $\boldsymbol{A}$ é o $\mathbb{R}^3$, a sua *imagem* é apenas o $\mathbb{R}^2$. Observe também que $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_3$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, onde $\mathbb{R}_3 = \{(0, 0, x_3)\}$: dizemos que $\mathbb{R}_3$ é o *núcleo* da transformação $\boldsymbol{A}$.

Definição 5.8 Seja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} : \mathbb{V} &\to \mathbb{W} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

uma transformação linear de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ em um espaço vetorial $\mathbb{W}$ (*note que este é um caso mais geral, e que as dimensões de* $\mathbb{V}$ *e de* $\mathbb{W}$ *podem ser diferentes*). O *núcleo* de $\boldsymbol{A}$ é o sub-conjunto de $\mathbb{V}$

$$\mathbb{K} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

Teorema 5.7 Se $\mathbb{V}$ é o domínio, $\mathbb{K}$ é o núcleo e $\mathbb{Y}$ é a imagem de $\boldsymbol{A}$,

$$\dim \mathbb{K} + \dim \mathbb{Y} = \dim \mathbb{V}. \tag{5.120}$$

Definição 5.9 A *nulidade*, e o *posto*, de $\boldsymbol{A}$ são:

$$\begin{aligned} \text{nulidade}(\boldsymbol{A}) &= \dim \mathbb{K}; \\ \text{posto}(\boldsymbol{A}) &= \dim \mathbb{Y}. \end{aligned}$$

De volta ao nosso exemplo numérico, o posto da matriz (5.119) é 2, e sua nulidade é 1. Note como $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ *jamais* é um vetor com componente $y_3 \neq 0$. O que isso significa? Que a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

é *impossível*, porque é impossível que $\boldsymbol{A}$ produza qualquer vetor com componente $y_3 \neq 0$. Por outro lado, a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

possui *infinitas* soluções $\boldsymbol{x} = (1, 2, x_3)$, onde x_3 é qualquer número real.

De volta à notação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$, temos:

Teorema 5.8 (Determinante e existência e unicidade de soluções de sistemas de equações lineares)

$$\det [\boldsymbol{A}] = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}] \text{ não possui nenhuma solução,} \\ \text{ou} \\ [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}] \text{ possui infinitas soluções.} \end{cases}$$

Qual é, então, o significado geométrico de $\det [\boldsymbol{A}] = 0$? Se interpretarmos que $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial (domínio e contra-domínio) da transformação representada pela equação matricial $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}]$, o determinante nulo significa que $\boldsymbol{A}$ está mapeando hipervolumes V^n do domínio $\mathbb{R}^n$ em hipervolumes de dimensão $r < n$, onde r (como vimos acima) é o *posto* de $\boldsymbol{A}$, ou seja: $\boldsymbol{A}$ está "achatando" esses hipervolumes.

Mas nesse caso $\dim \mathbb{Y} < n$, e certamente existem vetores de $\mathbb{V}$ que não pertencem a $\mathbb{Y}$; portanto, é impossível inverter $\boldsymbol{A}$.

Para entender um pouco melhor essa última afirmação, veja (5.120): se uma transformação linear é injetiva, $\dim \mathbb{K} = 0$, e consequentemente a dimensão da imagem tem que ser igual à do domínio. Em outras palavras, se $\boldsymbol{A}$ é injetiva, ela também é bijetiva! Isso é uma particularidade de funções lineares. Por exemplo, considere as funções $f(x) = \operatorname{tgh} x$ e $g(x) = 2x$. A primeira é uma função não-linear, e injetiva: $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$. Consequentemente, embora $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}$, f é inversível.

Figura 5.8: Uma transformação não-linear (no caso, $f(x) = \operatorname{tgh} x$) pode ser inversível sem ser bijetiva. Já uma transformação linear inversível (no caso, $g(x) = 2x$) é sempre bijetiva.

Já $g(x)$ também é inversível (sua inversa é $g^{-1}(x) = x/2$), mas, por ser linear, é bijetiva: $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$. Veja a figura 5.8.

O caso geral de uma transformação linear que leva qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ em um vetor no *plano* cujo normal é $\boldsymbol{k}$ passando pela origem (e portanto em um *subespaço* vetorial de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$) pode ser obtido da seguinte forma: Para projetar um vetor $\boldsymbol{a}$ num plano $\pi \perp \boldsymbol{k}$, faça

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \tag{5.121}$$

operar sobre $\boldsymbol{a}$; então, o vetor-projeção de $\boldsymbol{a}$ em π será

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}, \\ b_i &= \delta_{ij} a_j - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j, \end{aligned} \tag{5.122}$$

cujo produto escalar com $\boldsymbol{k}$ deve ser nulo; de fato,

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k} = \delta_{ij} a_j k_i - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j k_i = a_i k_i - a_j k_j = 0. \tag{5.123}$$

Vamos testar: seja $\boldsymbol{k} = (1, -2, 1)$; então $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 6$, e

$$[\boldsymbol{P}] = \begin{bmatrix} 1 - 1/6 & 0 + 2/6 & 0 - 1/6 \\ 0 + 2/6 & 1 - 4/6 & 0 + 2/6 \\ 0 - 1/6 & 0 + 2/6 & 1 - 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{bmatrix}. \tag{5.124}$$

Exemplo 5.20 Verifique com Maxima que $\det [\boldsymbol{P}] = 0$; calcule o seu posto.

SOLUÇÃO

```
(%i1) p : matrix([5/6, 2/6, -1/6], [2/6, 2/6, 2/6], [-1/6, 2/6, 5/6]) ;
                                    [  5    1     1 ]
                                    [  -    -   - - ]
                                    [  6    3     6 ]
                                    [               ]
```

```
                                    [  1    1    1  ]
(%o1)                               [  -    -    -  ]
                                    [  3    3    3  ]
                                    [               ]
                                    [   1   1    5  ]
                                    [ - -   -    -  ]
                                    [   6   3    6  ]
(%i2) determinant(p);
(%o2)                                   0
(%i3) rank(p);
(%o3)                                   2
```

Novamente, temos nulidade$(\boldsymbol{P}) = 1$, posto$(\boldsymbol{P}) = 2$. O *núcleo* de $\boldsymbol{P}$ é o conjunto $\{\alpha(1,-2,1), \forall\alpha \in \mathbb{R}\}$. A equação

$$\begin{bmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é *impossível* (por quê?).

Exemplo 5.21 Obtenha as equações paramétricas de duas retas quaisquer (não coincidentes) no plano $x + 2y + z = 0$. Calcule o ângulo entre elas. Calcule a projeção do vetor $\boldsymbol{u} = (1/(2\sqrt{6}) + 3, 1/\sqrt{6} - 2, 1/(2\sqrt{6}) + 1)$ nesse plano.

SOLUÇÃO
Há infinitas possibilidades. Uma delas é

$$\begin{aligned} x &= s, & x &= 3t, \\ y &= s, & y &= -2t, \\ z &= -3s & z &= t. \end{aligned}$$

Ambas "fecham" a equação $x+2y+z = 0$ para quaisquer s, t. Como ambas as retas passam pela origem $(0,0,0)$, podemos calcular o ângulo entre elas usando o produto escalar entre os vetores $(s, s, -3s)$ e $(3t, -2t, t)$, para s e t genéricos:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{3st - 2st - 3st}{\sqrt{11s^2 \times 14t^2}}, \\ &= \frac{-2}{\sqrt{11 \times 14}} \approx -0.161164592, \\ \theta &\approx 99.27446^\circ. \end{aligned}$$

Para projetar $\boldsymbol{u}$ no plano $x + 2y + z = 0$, fazemos simplesmente

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{proj} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o normal unitário ao plano (note que isso é a mesma coisa que a equação (5.121)):

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}}(1,2,1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}});$$

obtém-se

$$\boldsymbol{v} = (3, -2, 1),$$

que obviamente é um ponto da reta t. O resultado não é uma coincidência. Na verdade, o exemplo foi "montado" calculando-se

$$\boldsymbol{u} = (3, -2, 1) + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}.$$

Dessa forma, a projeção de $\boldsymbol{u}$ sobre o plano em questão cai diretamente sobre a reta parametrizada por t.
A situação é mostrada na figura 5.9. Note que a projeção de $\boldsymbol{u}$ sobre $\boldsymbol{n}$ cai exatamente na metade do comprimento desse último.

Figura 5.9: Duas retas s, t e uma projeção $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{u}$ no plano $x + 2y + z = 0$.

O caso $\det A \neq 0$ é diferente: a transformação $\boldsymbol{A}$ estará então mapeando hipervolumes V^n em outros hipervolumes V^n; a imagem terá a mesma dimensão do domínio, e a transformação linear será *inversível*:

Teorema 5.9 Se $\det [A] \neq 0$, o sistema

$$[A][x] = [y]$$

tem solução única, e a transformação $\boldsymbol{A}$ é *inversível*.

Corolário Se $\det [A] \neq 0$, então

$$[A][x] = [\mathbf{0}] \;\Rightarrow [x] = [\mathbf{0}].$$

5.8 – Teorema dos Π*s*

Com o conteúdo adicional de álgebra linear que obtivemos neste capítulo, vamos revisitar o capítulo 1.

Suponha um fenômeno físico muito complicado para ser tratado analiticamente. Reconheça n variáveis fisicamente relevantes no fenômeno:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Por exemplo, num escoamento em dutos,

1. $v_1 = \rho$ (massa específica)
2. $v_2 = V$ (velocidade média)
3. $v_3 = D$ (diâmetro)
4. $v_4 = e$ (rugosidade)

5. $v_5 = \Delta p$ (queda de pressão)

6. $v_6 = L$ (comprimento do tubo)

7. $v_7 = \mu$ (viscosidade dinâmica)

Se um pesquisador fosse realizar 10 medidas independentes de cada uma das variáveis acima, seriam necessárias 10^7 medições para descrever o fenômeno! A solução proporcionada pela Análise Dimensional é descobrir um número menor de parâmetros adimensionais independentes uns dos outros, e realizar apenas as medições que cubram a faixa de valores desses parâmetros. Para isto, constrói-se a matriz dimensional $[A_{ij}]$:

	v_1	v_2	v_3	v_4	...
M	1	0	0	0	...
L	−3	1	1	1	...
T	0	−1	0	0	...

cujos elementos são os expoentes de cada dimensão física fundamental para cada variável v_j. As 4 primeiras entradas da tabela acima referem-se às dimensões de ρ, V, D e e (verifique). Agora, se um grupo Π é definido pelo produto de cada uma das variáveis v_j elevada a um expoente x_j,

$$\Pi = \prod_{j=1}^{n} v_j^{x_j},$$

então a dimensão física de Π é dada por:

$$[\![\Pi]\!] = \prod_{j=1}^{n} (\mathsf{M}^{A_{1j}} \mathsf{L}^{A_{2j}} \mathsf{T}^{A_{3j}})^{x_j}.$$

Para que Π seja adimensional,

$$1 = \prod_{j=1}^{n} \left(\mathsf{M}^{A_{1j}}\right)^{x_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\mathsf{L}^{A_{2j}}\right)^{x_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\mathsf{T}^{A_{3j}}\right)^{x_j}.$$

Resumindo,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ou seja: desejo obter todos os vetores $(x_1, \ldots, x_n)$ independentes tais que valha a equação acima. O sentido da palavra *independente* é exatamente o mesmo que acabamos de ver em Álgebra Linear: se $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são dois vetores de expoentes cujos grupos adimensionais são Π_x e Π_y, e $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$, então é fácil mostrar que $\Pi_z = \Pi_x^a \Pi_y^b$ (tente). Logo, haverá tantos grupos adimensionais independentes quantas forem as soluções LI do sistema de equações lineares acima. Esse número é exatamente a nulidade da matriz $[\boldsymbol{A}]$. Do Teorema 5.7, sabemos agora que a dimensão do domínio de uma transformação linear é igual à dimensão do seu núcleo (nulidade) mais a dimensão da sua imagem (posto). Portanto, a forma mais geral e correta do Teorema dos Π*s* é:

Teorema 5.10 (Teorema dos Π*s*): Se há n variáveis importantes num fenômeno físico e o posto da matriz dimensional é r, então haverá $s = n - r$ grupos adimensionais independentes descrevendo o processo.

Observe que na discussão acima tínhamos 3 dimensões fundamentais, talvez as mais comuns: M, L, e T. No entanto, toda a discussão vale para o caso geral de d dimensões fundamentais *para o problema*, em que a matriz $[\boldsymbol{A}]$ possui d linhas.

Um segundo ponto muito importante revelado pelo Teorema dos Pi*s*: *Nem sempre o posto r da matriz dimensional é igual ao número de dimensões fundamentais d*, como mostra o Exemplo 5.22

Exemplo 5.22 (White, 2016, Exemplo 5.5) Uma viga engastada de comprimento L (L) tem uma carga P (MLT^{-2}) aplicada à sua extremidade, sofrendo uma deflexão δ (L). A viga tem seção transversal cujo momento de inércia é I (L^4), e seu material possui módulo de elasticidade E ($\mathsf{ML}^{-1}\mathsf{T}^{-2}$). Obtenha a matriz dimensional, calcule seu posto, e obtenha $s = n - r$ parâmetros adimensionais do problema.

SOLUÇÃO
Obviamente, as dimensões fundamentais são, novamente, M, L e T. Começamos montando a matriz dimensional:

	L	P	δ	I	E
M	0	1	0	0	1
L	1	1	1	4	−1
T	0	−2	0	0	−2

O posto de $[\boldsymbol{A}]$ pode ser obtido com Maxima:

```
(%i1) A : matrix([0,1,0,0,1],[1,1,1,4,-1],[0,-2,0,0,-2]);
                                [ 0   1   0   0   1 ]
                                [                   ]
(%o1)                           [ 1   1   1   4  - 1 ]
                                [                   ]
                                [ 0  - 2  0   0  - 2 ]
(%i2) rank(A);
(%o2)                                   2
```

Existem portanto $s = 5-2 = 3$ grupos adimensionais independentes. Note que se tivéssemos aplicado a "regra" simplificada $s = 5 - 3$, onde 3 é o número de dimensões fundamentais do problema, teríamos encontrado apenas 2 grupos independentes, o que está errado. Sabemos também que não existe uma solução única, porque devemos especificar duas variáveis que serão comuns a todos os 3 parâmetros. *Entretanto, essas variáveis ainda precisam conter, entre elas, todas as dimensões fundamentais.* Escolhemos L e E. Imporemos agora $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$ (que são os expoentes de P, δ e I), sucessivamente.
Para P,

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= PL^aE^b,\\
[\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{MLT}^{-2}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{ML}^{-1}\mathsf{T}^{-2}\right]^b,\\
1 &= \mathsf{M}^{1+b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2-2b}
\end{aligned}$$

Donde $a = -2$, $b = -1$, e

$$\Pi_1 = \frac{P}{EL^2}.$$

Note que há 3 equações e apenas 2 incógnitas, mas que as equações em M *e* T *são linearmente dependentes.*
Para δ,

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \delta L^aE^b,\\
[\![\Pi_2]\!] &= \left[\mathsf{L}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{ML}^{-1}\mathsf{T}^{-2}\right]^b,\\
1 &= \mathsf{M}^{b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2b}
\end{aligned}$$

Donde $a = -1$, $b = 0$, e

$$\Pi_2 = \frac{\delta}{L}.$$

Para I,

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= IL^a E^b, \\ [\![\Pi_3]\!] &= \left[\mathsf{L}^4\right] [\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{M}\mathsf{L}^{-1}\mathsf{T}^{-2}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^b \mathsf{L}^{4+a-b} \mathsf{T}^{-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -4$, $b = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{I}{L^4} \blacksquare$$

Exemplo 5.23 Considere novamente o Exemplo 1.1: as variáveis aqui são $v_1 = T$, $v_2 = L$, $v_3 = g$. A matriz dimensional é obtida como se segue

	v_1	v_2	v_3
L	0	1	1
T	1	0	−2

O posto de $[A]$ pode ser obtido com Maxima:

```
(%i1) A : matrix([0,1,1],[1,0,-2]) ;
                                    [ 0   1    1   ]
(%o1)                               [              ]
                                    [ 1   0   - 2  ]
(%i2) rank(A);
(%o2)                                     2
```

Este portanto é o caso mais comum em que o número de dimensões fundamentais *é igual ao posto*. O número de parâmetros adimensionais é $n - r = 3 - 2 = 1$. Como já sabemos, o único parâmetro adimensional é

$$\Pi = \frac{T}{\sqrt{\frac{L}{g}}},$$

e portanto nas variáveis v_1, v_2, v_3, os expoentes são $x_1 = 1$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = +1/2$. O núcleo da transformação tem dimensão 1, e é gerado por todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ paralelos a $(1, -1/2, 1/2)$. Por exemplo, o vetor $(3, -3/2, 3/2)$ também pertence ao núcleo. Isso produziria o grupo adimensional

$$\Pi' = T^3 L^{-3/2} g^{3/2} = \frac{T^3}{\left(\frac{L}{g}\right)^{3/2}} = \Pi^3.$$

Como Π é adimensional, $\Pi' = \Pi^3$ também é. Na verdade, qualquer potência de Π é adimensional.

Exemplo 5.24 Considere agora o exemplo dado na seção 1.4. Temos 5 variáveis físicas, $v_1 = h$, $v_2 = h_0$, $v_3 = x$, $v_4 = t$ e $v_5 = D = h_0 k_s/n$. Há 3 dimensões fundamentais, X, Z e T. A matriz dimensional é

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
X	0	0	1	0	2
Z	1	1	0	0	0
T	0	0	0	1	−1

A matriz dimensional tem posto 3:

```
(%i1) A : matrix( [0,0,1,0,2],[1,1,0,0,0],[0,0,0,1,-1]) ;
                                  [ 0  0  1  0   2  ]
                                  [                 ]
(%o1)                             [ 1  1  0  0   0  ]
                                  [                 ]
                                  [ 0  0  0  1  - 1 ]
(%i2) rank(A);
(%o2)                                     3
```

Portanto, novamente este é um caso em que o número de linhas é igual ao posto (mas cuidado, pois sabemos que isso nem sempre é verdade). O número de grupos adimensionais independentes é $n - r = 5 - 3 = 2$. Já vimos que esses grupos são

$$\Pi_1 = \frac{h}{h_0},$$
$$\Pi_2 = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}.$$

O fator 4, adimensional, é utilizado apenas por conveniência algébrica, e não muda nada. Correspondendo a esses 2 grupos adimensionais, há 2 vetores $\boldsymbol{x}$ linearmente independentes no núcleo de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (1, -1, 0, 0, 0),$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = (0, 0, 1, -1/2, -1/2).$$

Qualquer combinação linear de $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ gera um grupo adimensional. Por exemplo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)}$ gera o grupo

$$\Pi' = \left(\frac{h}{h_0}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right).$$

Qualquer das 3 combinações (Π_1, Π_2), (Π_1, Π') ou (Π_2, Π') serve para descrever o problema, embora evidentemente a primeira (que nós obtivemos na seção 1.4) seja mais conveniente.

Uma última palavra de precaução — física, não matemática — refere-se ao termo *dimensão física fundamental*. Conforme vimos na seção 1.4, além de M, L e T (massa, comprimento, tempo), pode ser necessário identificar a massa (ou o número de moles) de cada substância envolvida no processo, e a temperatura, como grandezas físicas adicionais. Nesse caso, haverá mais de três equações no sistema acima.

Por exemplo, no caso de transporte turbulento de vapor de água (evaporação) e calor na atmosfera, é preciso considerar que massa de ar "seco" e massa de vapor de água são grandezas fundamentais distintas, assim como a temperatura (Dias, 1986).

5.9 – Autovalores e autovetores

Considere novamente a matriz de rotação do exemplo 5.17, cujo nome nós mudaremos de $\boldsymbol{C}$ para $\boldsymbol{A}$ em benefício da generalidade.

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}: \tag{5.125}$$

como obter o *eixo* da rotação? Uma forma simples de raciocinar é a seguinte: se o vetor $\boldsymbol{x}$ está no eixo de rotação, o efeito de $\boldsymbol{C}$ será, no máximo, de alongar ou de comprimir $\boldsymbol{x}$; portanto, para qualquer vetor $\boldsymbol{x}$ do $\mathbb{R}^3$ ao longo do eixo de rotação, devemos ter

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}. \tag{5.126}$$

Listagem 5.3: `eigenrot.py` — Cálculo de autovalores e autovetores em Python, com `numpy`.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from math import sqrt
from numpy import array, set_printoptions
from numpy.linalg import eig
set_printoptions(precision=6,linewidth=70);
a = array ( [[1/sqrt(3), 2/sqrt(6), 0],
             [1/sqrt(3),-1/sqrt(6),1/sqrt(2)],
             [1/sqrt(3),-1/sqrt(6),-1/sqrt(2)]])
b = eig(a)                    # calcula os autovalores e autovetores
print ('autovalores:')        # o primeiro elemento da lista b são
                              # os autovalores
print (b[0])
print ('-'*20)
print ('autovetores:')        # o segundo elemento da lista b são
                              # os autovetores,
print (b[1])                  # com um autovetor em cada coluna
```

A equação 5.126 é a forma clássica de um *problema de autovalor-autovetor*. Naturalmente, não adianta nada encontrar $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, porque isso não definiria o eixo. Portanto, desejamos obter os valores de λ e de $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ em (5.126). Prosseguindo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{x} &= \mathbf{0}, \\ [\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{\delta}] \cdot \boldsymbol{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.127}$$

Pelo corolário do Teorema 5.9, para que $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\det [\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{\delta}] = 0. \tag{5.128}$$

(5.128) é a *equação característica* do problema de autovalor-autovetor.

No caso de (5.125), o programa `eigenrot.py` (listagem 5.3) em Python obtém os autovalores e os autovetores.

A saída do programa `eigenrot.py` é

```
autovalores:
[ 1.       +0.j        -0.769002+0.639246j -0.769002-0.639246j]
--------------------
autovetores:
[[ 0.872399+0.j        -0.117463+0.325058j -0.117463-0.325058j]
 [ 0.451587+0.j        -0.060803-0.627963j -0.060803+0.627963j]
 [ 0.187053+0.j         0.694626+0.j        0.694626-0.j      ]]
```

A lista de autovalores mostra 1 autovalor real, e 2 autovalores complexos. Como era de se esperar, existe apenas um autovalor real, e $\lambda = 1$ significa que não há alongamento/compressão, o que era de se esperar. A primeira coluna da matriz contém o autovetor correspondente a $\lambda = 1$; note também que ele é o único autovetor com componentes estritamente reais, o que novamente faz sentido. O eixo de rotação é dado pelo autovetor $\boldsymbol{x} = (0.87239910, 0.45158700, 0.18705346)$.

Exemplo 5.25 Obtenha os autovalores e autovetores de

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2] - 2[1(2-\lambda)-1] + 1[2-(3-\lambda)] \\
&= (2-\lambda)[6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-2] - 2[2-\lambda-1] + 1[2-3+\lambda] \\
&= (2-\lambda)[\lambda^2-5\lambda+4] + 2[\lambda-1] + 1[\lambda-1] \\
&= (2\lambda^2-10\lambda+8) + (-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda) + 3\lambda - 3 \\
&= -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5 = 0.
\end{aligned}
$$

Encontrar as raízes de uma equação de 3º grau pode ser muito difícil sem o auxílio de um computador, mas neste caso é óbvio que $\lambda = 1$ é raiz. Dividimos então o polinômio:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
-\lambda^3 & +7\lambda^2 & -11\lambda & +5 & \lambda & -1 & \\ \cline{5-7}
-\lambda^3 & \lambda^2 & & & -\lambda^2 & +6\lambda & -5 \\ \cline{1-4}
 & 6\lambda^2 & -11\lambda & +5 & & & \\
 & 6\lambda^2 & -6\lambda & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -5\lambda & +5 & & & \\
 & & -5\lambda & +5 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

e agora as raízes de $-\lambda^2 + 6\lambda - 5 = 0$ são $\lambda = 5$ e $\lambda = 1$. Os autovalores são $(1, 1, 5)$ (o autovalor 1 possui multiplicidade 2). De posse dos autovalores, montamos os sistemas de equações correspondentes para calcular os autovetores. Para $\lambda = 1$,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= x_1, \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= x_2, \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= x_3;
\end{aligned}
$$

ou:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que só temos uma equação independente! Escolhendo dois valores para (por exemplo) x_1 e x_2, o valor de x_3 fica determinado. Encontramos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \qquad & x_2 &= 0 \qquad & \Rightarrow \qquad & x_3 = -1; \\
x_1 &= 0 \qquad & x_2 &= 1 \qquad & \Rightarrow \qquad & x_3 = -2.
\end{aligned}
$$

Portanto, 2 autovetores LI associados a $\lambda = 1$ são

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} &= (1, 0, -1), \\
\boldsymbol{x}_{\mathrm{ii}} &= (0, 1, -2).
\end{aligned}
$$

Obviamente, eles não são os únicos possíveis: *qualquer* vetor contido no plano gerado por $\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{ii}}$ é um autovalor de $\boldsymbol{A}$.

Para $\lambda = 5$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5x_1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5x_2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5x_3; \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0; \end{aligned}$$

eliminando x_1 da 2ª e da 3ª equação:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 0x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 0x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Há apenas duas equações independentes. x_3 deve ser igual a x_2, de modo que a 1ª equação fica

$$-3x_1 + 3x_2 = 0.$$

Portanto, x_2 também deve ser igual a x_1, e os autovalores são todos do tipo (x_1, x_1, x_1). Uma escolha simples para o autovalor associado a $\lambda = 5$ é

$$\boldsymbol{x}_{\text{iii}} = (1, 1, 1).$$

É claro que um computador pode fazer todo o trabalho para você. Com Maxima:

```
(%i1) a : matrix( [2,2,1], [1,3,1], [1,2,2]) ;
                                    [ 2  2  1 ]
                                    [         ]
(%o1)                               [ 1  3  1 ]
                                    [         ]
                                    [ 1  2  2 ]
(%i2) eigenvectors(a) ;
(%o2)    [[[5, 1], [1, 2]], [[[1, 1, 1]], [[1, 0, - 1], [0, 1, - 2]]]]
```

O próximo exemplo tem por objetivo mostrar que a multiplicidade do autovalor não é necessariamente igual à dimensão do espaço gerado pelo autovetor.

Exemplo 5.26 Obtenha os autovalores e autovetores de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 = 0.$$

Portanto, $\lambda = 1$ com multiplicidade 3. O cálculo dos autovetores é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 + x_3 &= x_1,\\
x_1 + x_2 + 0x_3 &= x_2,\\
0x_1 + 0x_2 + x_3 &= x_3;
\end{aligned}
$$

ou:

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0,\\
x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0,\\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $x_1 = x_3 = 0$, e x_2 pode ser qualquer. O único autovetor possível é $\boldsymbol{x} = (0, 1, 0)$ (ou qualquer múltiplo $(0, \alpha, 0)$, é claro). Novamente, isso também poderia ter sido obtido com Maxima:

```
(%i1) a : matrix( [1,0,1], [1,1,0], [0,0,1]) ;
                                    [ 1  0  1 ]
                                    [         ]
(%o1)                               [ 1  1  0 ]
                                    [         ]
                                    [ 0  0  1 ]
(%i2) eigenvectors(a);
(%o2)                       [[[1], [3]], [[[0, 1, 0]]]]
```

5.10 – Invariantes de uma transformação linear

Considere agora o cálculo dos autovalores da matriz $[A_{ij}]$, ou seja, a obtenção de sua *equação característica* na forma $P(\lambda) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, onde $P(\lambda)$ é denominado *polinômio característico*. O que nós vamos ver agora é que os $I_j s$ são *invariantes* sob uma rotação de eixos. Começamos calculando $P(\lambda)$ por meio de uma expansão de Laplace do det $[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{\delta}]$:

$$
P(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
(A_{11} - \lambda)\begin{vmatrix} A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} - \lambda \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}. \tag{5.129}
$$

O determinante é linear: veja (5.58); então,

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (A_{11} - \lambda)\left\{\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & A_{23} \\ 0 & A_{33} - \lambda \end{vmatrix}\right\}\\
&\quad - A_{12}\left\{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{21} & 0 \\ A_{31} & -\lambda \end{vmatrix}\right\}\\
&\quad + A_{13}\left\{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{21} & -\lambda \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix}\right\}\\
&= (A_{11} - \lambda)\left\{\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & 0 \\ A_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}\right\}\\
&\quad - A_{12}\left\{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{21} & 0 \\ A_{31} & -\lambda \end{vmatrix}\right\}\\
&\quad + A_{13}\left\{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{21} & -\lambda \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

Usando (5.58) mais uma vez:

$$
P(\lambda) = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&+A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & 0 \\ A_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + A_{11}\begin{vmatrix} -\lambda & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{vmatrix} + A_{11}\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&-\lambda\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} A_{22} & 0 \\ A_{32} & -\lambda \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -\lambda & A_{23} \\ 0 & A_{33} \end{vmatrix} - \lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&-A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & 0 \\ A_{31} & -\lambda \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & -\lambda \\ A_{31} & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

A primeira linha acima é um termo em λ^0, e é evidentemente o determinante de $[\boldsymbol{A}]$. Agrupando agora os termos restantes em função da potência de λ, temos

$$
\det[\boldsymbol{A}] - \left(\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda^2 - \lambda^3 = 0,
$$

ou

$$
\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{5.130}
$$

onde

$$
I_1 = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \mathrm{tr}\boldsymbol{A}, \tag{5.131}
$$

$$
I_2 = \left(\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}\right), \tag{5.132}
$$

$$
I_3 = \det[\boldsymbol{A}]. \tag{5.133}
$$

Denomina-se $I_1 = \mathrm{tr}[\boldsymbol{A}]$ o *traço* da matriz $[\boldsymbol{A}]$; I_3, naturalmente, é o *determinante* de $[\boldsymbol{A}]$. As quantidades I_1, I_2 e I_3 são *invariantes* sob uma rotação de eixos . Em particular, se fatorarmos $P(\lambda)$ em 3 raízes (não necessariamente reais!):

$$
P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \tag{5.134}
$$

teremos

$$
I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{5.135}
$$

$$
I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \tag{5.136}
$$

$$
I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \ \blacksquare \tag{5.137}
$$

A prova da invariância do traço é bastante simples: se $[\boldsymbol{A}]$ é a matriz de $\boldsymbol{A}$ na base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, e $[\boldsymbol{A}']$ é a matriz de $\boldsymbol{A}$ na base $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$,

$$
\begin{aligned}
A'_{kl} &= C^{\mathsf{T}}_{ki} A_{ij} C_{jl}, \\
A'_{kk} &= C^{\mathsf{T}}_{ki} A_{ij} C_{jk} \\
&= C_{jk} C^{\mathsf{T}}_{ki} A_{ij} \\
&= \delta_{ji} A_{ij} = A_{ii} \ \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.138}
$$

Estes resultados são generalizáveis para matrizes $n \times n$ (veja Greenberg, 1998):

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n I_n = \\
&= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n) = 0
\end{aligned} \tag{5.139}
$$

com

$$
I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n, \tag{5.140}
$$

$$
I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \tag{5.141}
$$

$$
I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n \tag{5.142}
$$

$$
\vdots
$$

$$
I_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \ \blacksquare \tag{5.143}
$$

É impossível, também, não citar o

Teorema 5.11 (Teorema de Cayley-Hamilton) Se a equação característica da matriz $[\boldsymbol{A}]$ é

$$\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n I_n = 0,$$

então $[\boldsymbol{A}]$ satisfaz à sua própria equação característica:

$$[\boldsymbol{A}]^n - I_1[\boldsymbol{A}]^{n-1} + I_2[\boldsymbol{A}]^{n-2} - \ldots + (-1)^n I_n[\boldsymbol{\delta}] = [\boldsymbol{0}].$$

O próximo exemplo expande bastante o escopo de uso de autovalores/autovetores, e mostra o seu enorme valor.

Exemplo 5.27 Resolva o sistema acoplado de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 4y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y.$$

SOLUÇÃO
Tentamos uma solução simples, da forma

$$x(t) = q_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad y(t) = q_2 \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

De onde vem a inspiração? Em geral, é impossível explicar as introvisões (*insights*) que permitem a solução de problemas matemáticos. Mas neste caso, uma resposta pelo menos razoável é que a equação diferencial "unidimensional"

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx$$

possui solução

$$x = x_0 \mathrm{e}^{kt}.$$

Portanto, nós tentamos alguma coisa similar. Substituindo a solução tentativa no sistema,

$$\lambda q_1 \mathrm{e}^{\lambda t} = (q_1 + 4q_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t},$$
$$\lambda q_2 \mathrm{e}^{\lambda t} = (q_1 + q_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t},$$

e parecemos estar no caminho certo, pois os termos $\mathrm{e}^{\lambda t}$ se anulam, e ficamos com um sistema puramente algébrico

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},$$

que é um problema de autovalor-autovetor!
Resolvendo o problema de autovalor-autovetor:

$$\lambda_1 = 3, \qquad \boldsymbol{q}_{\mathrm{i}} = (2, 1),$$
$$\lambda_2 = -1, \qquad \boldsymbol{q}_{\mathrm{ii}} = (-2, 1),$$

e a solução geral do sistema de equações diferenciais é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t},$$

onde α e β são constantes arbitrárias.

5.11 – Transformações simétricas

Definição 5.10 A *transposta* $\boldsymbol{A}^\top$ de uma transformação linear $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definida classicamente da seguinte forma: para qualquer par de vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{x} \cdot [\boldsymbol{A}^\top \cdot \boldsymbol{y}] \equiv \boldsymbol{y} \cdot [\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}]. \tag{5.144}$$

As consequências para a representação de $\boldsymbol{A}$ na base E (uma só base para o domínio e para o contra-domínio, por simplicidade!) são

$$\begin{aligned}
x_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A^\top_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot y_l \boldsymbol{e}_l] &= y_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot x_l \boldsymbol{e}_l] \\
x_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A^\top_{ij} \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) y_l] &= y_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A_{ij} \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) x_l] \\
x_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A^\top_{ij} \boldsymbol{e}_i \delta_{jl} y_l] &= y_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A_{ij} \boldsymbol{e}_i \delta_{jl} x_l] \\
x_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A^\top_{ij} y_j \boldsymbol{e}_i] &= y_k \boldsymbol{e}_k \cdot [A_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i] \\
x_k A^\top_{ij} y_j (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) &= y_k A_{ij} x_j (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \\
x_k A^\top_{ij} y_j \delta_{ki} &= y_k A_{ij} x_j \delta_{ki} \\
x_i A^\top_{ij} y_j &= y_i A_{ij} x_j.
\end{aligned}$$

Mas os índices de x e y devem ser os mesmos, para que as expressões possam ser comparadas. Trocando i com j do lado direito:

$$x_i A^\top_{ij} y_j = y_j A_{ji} x_i \;\Rightarrow\; A^\top_{ij} = A_{ji}. \tag{5.145}$$

Os colchetes em (5.144) e no desenvolvimento acima servem para enfatizar que *primeiro* a transformação linear opera sobre o vetor da sua direita, e *em seguida* calcula-se o produto escalar do vetor da esquerda com o resultado. Mas isso realmente não importa, porque com a notação introduzida na equação (5.85) na prática pode-se definir, além da operação $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$, uma outra operação: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$. Recapitulando,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot x_k \boldsymbol{e}_k \\
&= A_{ij} x_k \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\
&= A_{ij} \delta_{jk} x_k \boldsymbol{e}_i \\
&= A_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i.
\end{aligned} \tag{5.146}$$

É claro que isso é a mesma coisa que a equação (5.87) (exceto que estamos usando a mesma base para o domínio e o contra-domínio, o que faremos, por simplicidade, quase sempre). Mas isso também sugere imediatamente o significado da operação $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} &= x_k \boldsymbol{e}_k A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \\
&= A_{ij} x_k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_j \\
&= A_{ij} x_k \delta_{ki} \boldsymbol{e}_j \\
&= A_{ij} x_i \boldsymbol{e}_j.
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Note bem a diferença entre (5.146) e (5.147)! Nós podemos interpretar a operação $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$ como a transformação linear "à esquerda" de $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{x}$, enquanto que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ é a transformação linear usual ("à direita") de $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{x}$. Consequentemente, a ordem com que os produtos são tomados em (5.144) não importa, e ela pode ser escrita sem os colchetes.

Na verdade, a definição de $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$ teria sido suficiente para definir a transposta:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^{\top} \equiv \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}, \tag{5.148}$$

$$\begin{aligned}
x_k \boldsymbol{e}_k A^{\top}_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j &= A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot x_k \boldsymbol{e}_k \\
x_k A^{\top}_{ij} (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_j &= A_{ij} x_k \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\
\delta_{ki} x_k A^{\top}_{ij} \boldsymbol{e}_j &= A_{ij} \delta_{jk} x_k \boldsymbol{e}_i \\
A^{\top}_{ij} x_i \boldsymbol{e}_j &= A_{ij} x_j \boldsymbol{e}_i \\
A^{\top}_{ij} x_i \boldsymbol{e}_j &= A_{ji} x_i \boldsymbol{e}_j \\
A^{\top}_{ij} &= A_{ji},
\end{aligned} \tag{5.149}$$

que é, naturalmente, o mesmo resultado de (5.145).

Definição 5.11 Uma transformação linear $\boldsymbol{A}$ é simétrica quando

$$\boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{A}. \tag{5.150}$$

O seguinte fato é extremamente importante: quando uma transformação linear é simétrica, todos os autovalores são reais, e todos os autovetores são mutamente ortogonais. Generalizações desse fato para espaços vetoriais de dimensão infinita estarão na base de muito do que estudaremos neste texto.

Teorema 5.12 Seja $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear simétrica, e tal que os elementos A_{ij} da matriz de $\boldsymbol{A}$ em qualquer base são reais; então $\boldsymbol{A}$ possui n autovetores mutuamente ortogonais, e todos os seus autovalores são reais.

Todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são reais. De fato, se $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de uma transformação simétrica:

$$A_{ij} x_j = \lambda x_i, \tag{5.151}$$

$$A_{ij} x^*_j = \lambda^* x^*_i. \tag{5.152}$$

A segunda equação é o conjugado complexo da primeira. Note que por hipótese os $A_{ij}s$ são reais. Multiplicando a equação (5.151) por x^*_i e a equação (5.152) por x_i, subtraindo, e usando o fato de que $A_{ij} = A_{ji}$:

$$\begin{aligned}
x^*_i A_{ij} x_j - x_i A_{ij} x^*_j &= x^*_i \lambda x_i - x_i \lambda^* x^*_i \\
x^*_j A_{ji} x_i - x_i A_{ij} x^*_j &= (\lambda - \lambda^*)(x^*_i x_i) \\
(A_{ji} - A_{ij}) x^*_j x_i &= (\lambda - \lambda^*)(x^*_i x_i) \\
0 &= (\lambda - \lambda^*)(x^*_i x_i) \Rightarrow \\
\lambda &= \lambda^*.
\end{aligned} \tag{5.153}$$

A equação (5.153) mostra que todos os autovalores são iguais aos seus conjugados complexos: portanto, suas partes imaginárias são nulas: todos os autovalores são reais.

Além disso, há n autovetores mutuamente ortogonais. Como é impossível especificar quantos autovalores de uma transformação simétrica são distintos, é preciso estudar dois casos separadamente.

Autovetores pertencentes a autovalores distintos Suponha $\lambda^i \neq \lambda^{ii}$ (dois autovalores distintos) associados respectivamente a $\boldsymbol{x}^i$ e $\boldsymbol{x}^{ii}$; então

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^i = \lambda^i\boldsymbol{x}^i \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}^{ii}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^i = \lambda^i(\boldsymbol{x}^{ii}\cdot\boldsymbol{x}^i), \tag{5.154}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^{ii} = \lambda^{ii}\boldsymbol{x}^{ii} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^{ii} = \lambda^{ii}(\boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{x}^{ii}). \tag{5.155}$$

Como $\boldsymbol{A}$ é simétrica, $\boldsymbol{x}^{ii}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}^{ii}$; subtraindo as duas equações:

$$0 = (\lambda^i - \lambda^{ii})(\boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{x}^{ii}) \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{x}^{ii}) = 0, \tag{5.156}$$

e $\boldsymbol{x}^i \perp \boldsymbol{x}^{ii}$ ■

Autovetores pertencentes a autovalores iguais Se $\lambda^i = \lambda^{ii}$, nada se pode deduzir sobre $(\boldsymbol{x}^i\cdot\boldsymbol{x}^{ii})$ a partir de (5.156); no entanto, qualquer vetor pertencente ao plano (ao subespaço) gerado por dois autovetores $\boldsymbol{x}^i$ e $\boldsymbol{x}^{ii}$ associados a este único λ é também um autovetor:

$$\boldsymbol{A}\cdot[\alpha\boldsymbol{x}^i + \beta\boldsymbol{x}^{ii}] = \alpha\lambda\boldsymbol{x}^i + \beta\lambda\boldsymbol{x}^{ii} = \lambda[\alpha\boldsymbol{x}^i + \beta\boldsymbol{x}^{ii}]; \tag{5.157}$$

portanto, estamos livres para escolher dois vetores ortogonais nesse plano. Isso completa a prova do Teorema 5.12 ■

Exemplo 5.28 Dados 3 vetores mutamente ortogonais, $\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-3,0,3)$, defina a transformação $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{f}_1 &= 2\boldsymbol{f}_1,\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{f}_2 &= 1\boldsymbol{f}_2,\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{f}_3 &= 3\boldsymbol{f}_3;\end{aligned}$$

Então

$$[A]_F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Obtenha $[A]$ na base canônica; calcule seus autovalores; confirme que eles são 2,1,3. Calcule seus autovetores; confirme que eles são $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ e $\boldsymbol{f}_3$.

SOLUÇÃO
Uma solução completa está no programa `simcons3.py`, listagem 5.4.
A saída do programa é:

```
autovetores:
[ 0.57735027  0.57735027  0.57735027]
[-0.40824829  0.81649658 -0.40824829]
[-0.70710678  0.          0.70710678]
det a_f =  6.0
det a_e =  6.0
a_e =
[[ 2.33333333  0.33333333 -0.66666667]
 [ 0.33333333  1.33333333  0.33333333]
 [-0.66666667  0.33333333  2.33333333]]
a_f =
[[2 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 3]]
c =
[[ 0.57735027  0.57735027  0.57735027]
 [-0.40824829  0.81649658 -0.40824829]
 [-0.70710678  0.          0.70710678]]
autovalores:
[ 3.  2.  1.]
autovetores:
[ -7.07106781e-01  -9.62771529e-17   7.07106781e-01]
[-0.57735027 -0.57735027 -0.57735027]
[-0.40824829  0.81649658 -0.40824829]
```

Listagem 5.4: `simcons3.py` — Manipulações de matrizes simétricas

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from math import sqrt
from numpy import array, dot, cross, zeros
from numpy.linalg import det, eig, norm
f = array( [ [1,1,1],              # parto de uma base de autovetores
             [-1,2,-1],
             [-3,0,3] ], float )
e = array( [ [1,0,0],
             [0,1,0],
             [0,0,1] ], float )
for i in range(3):
   mm = norm(f[i])
   f[i] /= mm
print('autovetores:')
for i in range(3): (print (f[i]))
c = zeros((3,3))                   # construo uma matriz de rotação
for i in range(3):
   for j in range(3):
      c[i,j] = dot( e[j],f[i])
# a matriz na base dos autovetores é diagonal
a_f = array ( [ [2,0,0], [0,1,0], [0,0,3] ] )
print('det a_f = ', det(a_f))
a_e = dot(c.T,dot(a_f,c))          # calcula a matriz na base canônica
print('det a_e = ', det(a_e))
print('a_e = ')
print(a_e)
print('a_f = ')
print(a_f)
print('c = ')
print(c)
d = eig(a_e)                       # verifica que estávamos certos!
print('autovalores:')
print(d[0])
print('autovetores:')
print(d[1][:,0])
print(d[1][:,1])
print(d[1][:,2])
```

A verificação de que f_1, f_2, f_3 são mutuamente ortognais é trivial. Defino agora uma rotação de corpo rígido C que leva f_1, f_2, f_3 em e_1, e_2, e_3: a matriz de C é

$$C_{ij} = e_j \cdot f_i \;\Rightarrow [C] = \begin{bmatrix} 0.57735027 & 0.57735027 & 0.57735027 \\ -0.40824829 & 0.81649658 & -0.40824829 \\ -0.70710678 & 0.0 & 0.70710678 \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, a matriz de A na base canônica é

$$[A]_E = [C]^\top [A]_F [C] = \begin{bmatrix} 2.33333333 & 0.33333333 & -0.66666667 \\ 0.33333333 & 1.33333333 & 0.33333333 \\ -0.66666667 & 0.33333333 & 2.33333333 \end{bmatrix}$$

O principal ponto deste exercício é a verificação do Teorema 5.12 "ao contrário": nós construímos uma matriz simétrica com elementos reais. As últimas linhas do programa `simcons3.py` verificam que, de fato, os autovalores de A são 3, 2 e 1, e que os autovetores são

$$f_3 \approx (-0.707106781e-01, -1.50753653e-16, 0.707106781e-01) \approx \frac{1}{\sqrt{18}}(-3, 0, 3),$$

$$-f_1 \approx (-0.57735027, -0.57735027, -0.57735027) \approx -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

$$f_2 \approx (-0.40824829, 0.81649658, -0.40824829) \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) \;\blacksquare$$

Exemplo 5.29 Dados 3 vetores mutamente ortogonais, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(-3,0,3)$, defina a transformação $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot f_1 &= 2f_1,\\ \boldsymbol{A}\cdot f_2 &= 2f_2,\\ \boldsymbol{A}\cdot f_3 &= 3f_3;\end{aligned}$$

Então

$$[A]_F = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Obtenha $[A]$ na base canônica; calcule seus autovalores; confirme que eles são 2,2,3. Calcule seus autovetores; *verifique* se eles são f_1, f_2 e f_3.

SOLUÇÃO

A solução é praticamente igual à do exemplo anterior. Note que a rotação de eixos, e portanto a matriz de rotação $[C]$, é a mesma de antes. A matriz de $\boldsymbol{A}$ na base dos autovetores é

$$[\boldsymbol{A}]_F = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

A matriz de $\boldsymbol{A}$ na base canônica é agora

$$[\boldsymbol{A}]_E = [C]^\top[\boldsymbol{A}]_F[C] = \begin{bmatrix}5/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 2 & 0\\ -1/2 & 0 & 5/2\end{bmatrix}$$

cujos autovalores são, de fato, 2, 2, e 3. Os autovetores encontrados por `numpy.linalg.eig()` são

$$\begin{aligned}v_1 &= (0,1,0),\\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\\ -f_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).\end{aligned}$$

Note que os 2 primeiros *não* são iguais a f_1 e f_2! Mas isso não importa, desde que eles sejam *coplanares*. Verifique:

$$\begin{aligned}&\det(f_1, f_2, v_1) = 0,\\ &\det(f_1, f_2, v_2) = 0 \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.30 Dados 3 vetores mutamente ortogonais, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$, defina a transformação $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot f_1 &= 2f_1,\\ \boldsymbol{A}\cdot f_2 &= 2f_2,\\ \boldsymbol{A}\cdot f_3 &= 2f_3;\end{aligned}$$

Então

$$[A]_F = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Obtenha $[A]$ na base canônica; calcule seus autovalores; confirme que eles são 2,2,2. Calcule seus autovetores; *verifique* se eles são $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ e $\boldsymbol{f}_3$.

SOLUÇÃO
Novamente, a solução é muito parecida com o exemplo anterior. A matriz de $\boldsymbol{A}$ na base canônica é agora

$$[A]_E = [C]^\top [A]_F [C] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ou seja: a matriz de $\boldsymbol{A}$ é diagonal em qualquer base ortonormal! O uso de `numpy.linalg.eig()` produzirá agora os autovalores 2, 2 e 2, e os autovetores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &\approx (1, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_2 &\approx (0.06777901, -0.71305865, -0.69782044), \\ \boldsymbol{v}_3 &\approx (-0.13463345, -0.69306091, 0.70819518) \end{aligned}$$

Embora $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_3| = 1$, eles não são ortonormais. Aqui, a solução numérica deixou de "notar" que um conjunto ortonormal é possível. A equação para a obtenção dos autovetores é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} 2x1 + 0x_2 + 0x_3 &= 2x_1, \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 2x_2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 &= 2x_3 : \end{aligned}$$

qualquer vetor do (x_1, x_2, x_3) do $\mathbb{R}^3$ é um autovetor: este é um problema *isotrópico*. Consequentemente, a escolha mais simples para os autovetores teria sido a base canônica $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ ■

Transformações definidas e indefinidas

Definição 5.12 Uma transformação $\boldsymbol{A}$ é *positiva definida* quando, para qualquer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} > 0.$$

Definição 5.13 Uma transformação $\boldsymbol{A}$ é *positiva semidefinida* quando, para qualquer $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0.$$

Definição 5.14 Uma transformação $\boldsymbol{A}$ é *negativa definida* quando, para qualquer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} < 0.$$

Definição 5.15 Uma transformação $\boldsymbol{A}$ é *negativa semidefinida* quando, para qualquer $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq 0.$$

Quando $\boldsymbol{A}$ não é nem positiva semidefinida nem negativa semidefinida, ela é denominada *indefinida*.

O caso de transformações simétricas é particularmente interessante, todos os autovalores correspondentes são reais. Então, nós afirmamos, sem prova, o

---

Teorema 5.13 Se a transformação $\boldsymbol{A}$ é simétrica:

- $\boldsymbol{A}$ é positiva definida se e somente se todos os seus autovalores são positivos.
- $\boldsymbol{A}$ é positiva semidefinida se e somente se todos os seus autovalores são não-negativos.
- $\boldsymbol{A}$ é negativa definida se e somente se todos os seus autovalores são negativos.
- $\boldsymbol{A}$ é negativa semidefinida se e somente se todos os seus autovalors são não-positivos
- $\boldsymbol{A}$ é indefinida se e somente se possui autovalores positivos e negativos.

A título apenas de ilustração, suponha que $\boldsymbol{A}$ é simétrica e que todos os seus n autovalores λ_i sejam positivos. Então, *na base E dos autovetores*, um vetor qualquer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ do $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito

$$[\boldsymbol{x}]_E = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^\top,$$

e

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots \lambda_n x_n^2 > 0,$$

e $\boldsymbol{A}$ é positiva definida.

Exercícios Propostos

5.44 Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: uma das 3 raízes da equação característica é um número fácil de ser testado e "descoberto".

5.45 Obtenha os autovalores e autovetores da matriz

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.46 Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

5.47 Modifique o programa `simcons3.py` do Exemplo 5.28, para que ele resolva o exemplo 5.29.

5.48 A matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Possui determinante igual a +1, e os seguintes autovalores/autovetores ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$):

k	autovalor	autovetor
1	$\sqrt{2}/2 - \mathrm{i}\sqrt{2}/2$	$(1, \mathrm{i}, 0)$
2	$\sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\sqrt{2}/2$	$(1, -\mathrm{i}, 0)$
3	1	$(0, 0, 1)$

a) Qual é o efeito geométrico de $\boldsymbol{A}$ sobre um vetor qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$?

b) Dado qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ com componentes **estritamente reais**, $\boldsymbol{w} = (\alpha, \beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ele sempre pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores 1 e 2 acima:

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2,$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Obtenha c_1 e c_2 em função de α e β.

5.49 Modifique o programa `simcons3.py` do Exemplo 5.28, para que ele resolva o exemplo 5.30.

5.50 Utilizando obrigatoriamente autovalores e autovetores, encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

5.51 Utilizando obrigatoriamente autovalores, autovetores e um método de diagonalização, resolva:

$$\begin{bmatrix} 11/3 & -5/6 & -1/3 \\ 2/3 & 8/3 & -4/3 \\ -1/3 & 13/6 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os autovalores. Mostre que os autovetores são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} &= (1, 2, 3), \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{ii}} &= (1, 3/2, 5/4), \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{iii}} &= (1, 2/3, 1/3). \end{aligned}$$

b) Verifique que

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}} + \frac{3}{4}\boldsymbol{x}_{\mathrm{iii}}.$$

c) Com isso, calcule x, y, z.

6

Métodos de solução de sistemas de equações lineares

Todo cientista e engenheiro deve ter em mente a importância gigantesca de resolver sistemas de equações lineares. Praticamente todos os métodos de solução numérica de problemas relevantes em Engenharia e em Ciência envolvem um sub-problema de solução de sistemas de equações lineares. Muitos desses sistemas possuem centenas ou milhares de equações, e o adjetivo "linear" pode ser enganador: nem sempre sua solução é trivial. Neste pequeno capítulo, nós fazemos uma breve introdução, e esperamos que você *comece* a ver como implementar a solução de sistemas de equações lineares, e a ver algumas aplicações.

6.1 – Eliminação de Gauss

Suponha $[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^\top$. A partir dessa solução, o seguinte sistema de equações pode ser montado "ao contrário":

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\ 13\\ 9\end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Temos que $\det[\boldsymbol{A}] \neq 0$, onde $[\boldsymbol{A}]$ é a matriz do sistema, o que nos garante, pelo Teorema 5.9 que há uma única solução. Sabemos qual ela é, mas suponha que não: que tudo o que temos seja o sistema (6.1); como proceder para encontrar a solução *de uma forma sistemática*?

A resposta é o *Método de eliminação de Gauss*: Sabemos que podemos multiplicar cada linha de (6.1) por uma constante, assim como somar duas linhas para encontrar uma nova equação "equivalente" (uma equação que satisfaz à solução $[\boldsymbol{x}]$).

Iniciamos o procedimento montando uma matriz ampliada $[\boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{y}\end{bmatrix}$. Utilizando Maxima, somemos a 2ª linha com $-1/4$ vezes a 1ª :

```
(%i1) b : matrix([4,2,1,11],[1,3,2,13],[2,2,1,9])$
(%i2) b ;
                                  [ 4  2  1  11 ]
                                  [             ]
(%o2)                             [ 1  3  2  13 ]
                                  [             ]
                                  [ 2  2  1  9  ]
(%i3) b[2] : b[2] - (1/4)*b[1]$
(%i4) b ;
                                  [ 4  2  1  11 ]
                                  [             ]
                                  [    5  7  41 ]
(%o4)                             [ 0  -  -  -- ]
                                  [    2  4  4  ]
                                  [             ]
                                  [ 2  2  1  9  ]
```

Note que dessa forma "zeramos" B_{21}. Analogamente, podemos zerar B_{31}:

```
(%i5) b[3] : b[3] - (1/2)*b[1]$
(%i6) b ;
                                  [ 4  2  1  11 ]
                                  [             ]
                                  [    5  7  41 ]
                                  [ 0  -  -  -- ]
(%o6)                             [    2  4  4  ]
                                  [             ]
                                  [       1  7  ]
                                  [ 0  1  -  -  ]
                                  [       2  2  ]
```

e ainda mais uma vez, zerar B_{32}:

```
(%i7) b[3] : b[3] - (2/5)*b[2]$
(%i8) b ;
                                 [ 4  2   1   11  ]
                                 [                ]
                                 [    5   7   41  ]
                                 [ 0  -   -   --  ]
(%o8)                            [    2   4   4   ]
                                 [                ]
                                 [          1    3 ]
                                 [ 0  0  - -  - - ]
                                 [          5    5 ]
```

Dessa forma, obtivemos um sistema equivalente, com a matriz $[A]$ na forma "escada":

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 41/4 \\ -3/5 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

A solução pelo processo de *retrossubstituição* é

$$\begin{aligned} (-1/5)x_3 &= -3/5, \\ x_3 &= (-3/5)\big/(-1/5) = 3; \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} (5/2)x_2 + (7/4)3 &= 41/4 \\ (5/2)x_2 &= 41/4 - 21/4 = 5 \\ (1/2)x_2 &= 1 \\ x_2 &= 2; \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} (4)x_1 + (2)2 + (3)3 &= 11 \\ 4x_1 &= 11 - 7 = 4 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1, \tag{6.5}$$

como não poderia deixar de ser ■

Deve ser mais ou menos óbvio para você que o processo é generalizável para sistemas $n \times n$. Nem sempre o processo vai funcionar: sabemos, do teorema 5.8, que sistemas lineares podem ter infinitas soluções, ou nenhuma.

Mas o que está por trás do processo de eliminação de Gauss? Como veremos, podemos interpretá-lo como uma série de mudanças de base no contra-domínio, enquanto a transformação $\boldsymbol{A}$ permanece a mesma! Essa "invariância" de $\boldsymbol{A}$ é uma maneira elegante de interpretar o processo (embora não seja a única). Vale a pena detalhá-la.

Se $A : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ é uma transformação linear, $\dim \mathbb{V} = n$, $\dim \mathbb{W} = m$, e $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ têm bases $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ e $F = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$, então

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j = A_{ij} \boldsymbol{f}_i$$

e

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot \left(x_j \boldsymbol{e}_j\right) = x_j \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j = A_{ij} x_j \boldsymbol{f}_i.$$

Já vimos no capítulo 5 que existem infinitas matrizes $[\boldsymbol{A}]_{F,E}$ para cada transformação $\boldsymbol{A}$, dependendo de nossa escolha das bases E e F. Sabemos também que as colunas de $[\boldsymbol{A}]$ representam as coordenadas de cada um dos $\boldsymbol{e}_j s$ na base F.

Conforme também vimos no capítulo 5, uma permutação de $I = \{1, \ldots, n\}$ é qualquer bijeção

$$\begin{aligned} P &: I \to I \\ i \in I &\mapsto P(i). \end{aligned}$$

Por exemplo, $\{3, 2, 1\} = P(\{1, 2, 3\})$. Dada a transformação linear

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &: \mathbb{V} \to \mathbb{W} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

onde E e F são as bases de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ respectivamente, permutar E por $P(E)$ e F por $Q(F)$ corresponde a permutar as colunas e linhas da matriz $[A_{ij}]$ de $\boldsymbol{A}$.

Dito isso, a essência do algoritmo de eliminação de Gauss para a solução de sistemas de equações lineares está nas seguintes propriedades, facilmente verificáveis:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \;\Rightarrow\; y_{P(i)} = \sum_{j=1}^{n} A_{P(i)j} x_j, \tag{6.6}$$

$$\Rightarrow\; y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{iQ(j)} x_{Q(j)}, \tag{6.7}$$

$$\Rightarrow\; \beta y_i = \sum_{j=1}^{n} \beta A_{ij} x_j, \tag{6.8}$$

$$\Rightarrow\; (y_i - y_k) = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij} - A_{kj}) x_j, \tag{6.9}$$

onde P e Q são permutações. É sempre possível, usando as operações acima, transformar

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{em} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

(os mesmos símbols $[A_{ij}]$ foram usados nas matrizes da esquerda e da direita para não sobrecarregar a notação, mas é óbvio que o processo de eliminação de Gauss foi aplicado).

As transformações do exemplo numérico com Maxima mostrado acima são usadas para produzir matrizes que, de alguma forma, são "equivalentes" entre si. O fato de os elementos da matriz estarem mudando *não* significa que a transformação subjacente esteja mudando, mas sim que a base F está mudando. De fato,

$$y_i \boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \boldsymbol{f}_i \;\Rightarrow\; \beta y_i (\boldsymbol{f}_i/\beta) = \sum_{j=1}^{n} (\beta\alpha_{ij}) x_j (\boldsymbol{f}_i/\beta) \tag{6.10}$$

Logo, a multiplicação de uma linha da matriz pelo escalar β pode ser entendida como a mudança do vetor $\boldsymbol{f}_i$ da linha correspondente para $(\boldsymbol{f}_i/\beta)$. De forma mais geral,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \\
&= \sum_{l=1}^{m} y_l \boldsymbol{f}_l \\
&= \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq k}}^{m} y_l \boldsymbol{f}_l \right] + y_k(\boldsymbol{f}_k + \beta \boldsymbol{f}_i) - y_k \beta \boldsymbol{f}_i + y_i \boldsymbol{f}_i \\
&= \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq k}}^{m} y_l \boldsymbol{f}_l \right] + (y_i - \beta y_k) \boldsymbol{f}_i + y_k(\boldsymbol{f}_k + \beta \boldsymbol{f}_i)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Atente bem para as atribuições, porque existe uma anti-simetria nelas:

$$y_i \leftarrow y_i - \beta y_k, \tag{6.12}$$

porém

$$\boldsymbol{f}_k \leftarrow \boldsymbol{f}_k + \beta \boldsymbol{f}_i; \tag{6.13}$$

o sinal de β na base, portanto, é o *oposto* do sinal de β aplicado à matriz-coluna $[\boldsymbol{y}]$. O significado de "atribuição", cujo símbolo é "$\leftarrow$", é estritamente o mesmo usado em linguagens de programação: o "lugar" de y_i é agora "ocupado" por $y_i - \beta y_k$ na nova matriz-coluna $[\boldsymbol{y}]$. O mesmo vale para as demais interpretações, daqui para a frente.

Essa "simples" manipulação algébrica revela todo o segredo da transformação de uma matriz para a forma escada: note que o vetor $\boldsymbol{y}$ não muda; o que muda é a base de W:

$$(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots, \boldsymbol{f}_k, \ldots, \boldsymbol{f}_m) \leftarrow (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_i, \ldots, (\boldsymbol{f}_k + \beta \boldsymbol{f}_i), \ldots, \boldsymbol{f}_m),$$

assim como as coordenadas $[\boldsymbol{y}]$:

$$\begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_i & \ldots & y_k & \ldots & y_m \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \leftarrow \begin{bmatrix} y_1 & \ldots & (y_i - \beta y_k) & \ldots & y_k & \ldots & y_m \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Isso mostra que quando reduzimos uma matriz à forma escada, estamos apenas mudando implicitamente a base de vetores do contra-domínio. As "regras de

ouro" são (6.10) e (6.11). Vejamos como o procedimento mostrado acima para a obtenção da forma escada a partir de

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser interpretado em termos de mudanças de base no contra-domínio. No que se segue, a base do domínio é sempre a base canônica,

$$E = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big);$$

o que vai mudando é a base do contra-domíno F.

1º passo: F inicia o processo como a base canônica:

$$F = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 4\boldsymbol{f}_1 + 1\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 2(0,0,1) = (4,1,2), \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1) = (2,3,2), \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 1\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 1\boldsymbol{f}_3 \\
&= 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) = (1,2,1).
\end{aligned}$$

Como sempre: as *colunas* de $[\boldsymbol{A}]$ são as coordenadas de cada um de $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ na base F do contra-domínio.

2º passo: O "y" que muda é y_2; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda é o $\boldsymbol{f}_1$!

$$\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}_1 + (1/4)\boldsymbol{f}_2 = (1,1/4,0),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1,1/4,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5/2 & 7/4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 4\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 4(1,1/4,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1) = (4,1,2) \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1,1/4,0) + \frac{5}{2}(0,1,0) + 2(0,0,1) = (2,3,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 1\boldsymbol{f}_1 + \frac{7}{4}\boldsymbol{f}_2 + 1\boldsymbol{f}_3\\ &= 1(1,1/4,0) + \frac{7}{4}(0,1,0) + 1(0,0,1) = (1,2,1).\end{aligned}$$

Observe que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3$ são, *em termos absolutos*, estritamente os mesmos — como não poderia deixar de ser: a transformação $\boldsymbol{A}$ não mudou. O que mudou foi sua *representação*, ou seja: a *base* $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ que escolhemos para o contra-domínio.

3º passo: O "y" que muda é y_3; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda (novamente) é o $\boldsymbol{f}_1$!

$$\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}_1 + (1/2)\boldsymbol{f}_3 = (1,1/4,1/2),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1,1/4,1/2),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1\\ 0 & 5/2 & 7/4\\ 0 & 1 & 1/2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 4\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3\\ &= 4(1,1/4,1/2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) = (4,1,2),\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3\\ &= 2(1,1/4,1/2) + \frac{5}{2}(0,1,0) + 1(0,0,1) = (2,3,2)\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 1\boldsymbol{f}_1 + \frac{7}{4}\boldsymbol{f}_2 + 1\boldsymbol{f}_3\\ &= 1(1,1/4,1/2) + \frac{7}{4}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) = (1,2,1).\end{aligned}$$

Novamente, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3$ permanecem invariantes.

4º passo: Agora a transação é entre a 2ª e a 3ª linhas. O "y" que muda é y_3; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda $\boldsymbol{f}_2$.

$$\boldsymbol{f}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}_2 + (2/5)\boldsymbol{f}_3 = (0,1,2/5),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1,1/4,1/2),(0,1,2/5),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1\\ 0 & 5/2 & 7/4\\ 0 & 0 & -1/5\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 4\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3\\ &= 4(1,1/4,1/2) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) = (4,1,2),\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(1, 1/4, 1/2) + \frac{5}{2}(0, 1, 2/5) + 0(0, 0, 1) = (2, 3, 2),\\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 &= 1\boldsymbol{f}_1 + \frac{7}{4}\boldsymbol{f}_2 + -\frac{1}{5}\boldsymbol{f}_3\\
&= 1(1, 1/4, 1/2) + \frac{7}{4}(0, 1, 2/5) - \frac{1}{5}(0, 0, 1) = (1, 2, 1).
\end{aligned}
$$

Em resumo, ao longo de todo o processo de escalonamento da matriz $[\boldsymbol{A}]$, a base do domínio da transformação permaneceu fixa e igual à base canônica E; por outro lado, a base do contra-domínio foi mudando de tal maneira que, embora as matrizes $[\boldsymbol{A}]$ mudassem, a transformação linear subjacente, $\boldsymbol{A}$, permaneceu invariante.

Considere agora a matriz de projeção $[\boldsymbol{P}]$ dada pela equação (5.124): esta matriz possui, como sabemos, posto igual a 2, e um sistema formado a partir dela possui ou nenhuma ou infinitas soluções. Vamos revisitar a matriz, multiplicando-a por 6 (por simplicidade: isto não muda o posto, como você pode verificar) e construíndo "de trás para frente um problema. Suponha novamente $[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, e obtenha

$$
\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}. \tag{6.14}
$$

Montamos a matriz ampliada do sistema, $[\boldsymbol{B}] = [[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{y}]]$. Com Maxima:

```
(%i1) b : matrix( [5, 2, -1, 6], [2,2,2,12], [-1, 2, 5, 18] ) ;
                                 [  5   2  - 1  6  ]
                                 [                 ]
(%o1)                            [  2   2   2   12 ]
                                 [                 ]
                                 [ - 1  2   5   18 ]
```

Os passos do escalonamento agora são padronizados.

```
(%i2) b[2] : b[2] - (2/5)*b[1]$

(%i3) b ;
                                 [  5   2  - 1  6  ]
                                 [                 ]
                                 [      6  12   48 ]
(%o3)                            [  0   -  --   -- ]
                                 [      5  5    5  ]
                                 [                 ]
                                 [ - 1  2   5   18 ]

(%i4) b[3] : b[3] + (1/5)*b[1]$

(%i5) b ;
                                 [ 5  2   - 1  6  ]
                                 [                ]
                                 [    6   12   48 ]
                                 [ 0  -   --   -- ]
(%o5)                            [    5   5    5  ]
                                 [                ]
                                 [    12  24   96 ]
                                 [ 0  --  --   -- ]
                                 [    5   5    5  ]
(%i6) b[3] : b[3] - 2*b[2]$

(%i7) b ;
                                  [ 5  2  - 1  6  ]
                                  [               ]
                                  [    6  12   48 ]
(%o7)                             [ 0  -  --   -- ]
                                  [    5  5    5  ]
                                  [               ]
                                  [ 0  0   0   0  ]
```

O aparecimento de uma linha nula na matriz escalonada $[\boldsymbol{A}]$ nos informa que a nulidade da transformação $\boldsymbol{A}$ é 1, e que seu posto é 2. O aparecimento de um 0 *também* na última linha da matriz-coluna $[\boldsymbol{y}]$ nos diz que o sistema é compatível: existem infinitas soluções, sendo uma das quais, obviamente, $[\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^\top$ que postulamos para montar o sistema. A solução por retrossubstituição se segue:

$$5x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 6, \tag{6.15}$$

$$0x_1 + \frac{6}{5}x_2 + \frac{12}{5}x_3 = \frac{48}{5}, \tag{6.16}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \tag{6.17}$$

Na 3ª linha, qualquer valor para x_3 (a rigor, qualquer valor para qualquer dos $x_j s$) é possível: escolhemos $x_3 = 3$ e substituímos na 2ª linha:

$$x_2 = \frac{5}{6}\left(\frac{48}{5} - \frac{12}{5} \times 3\right) = 2. \tag{6.18}$$

Finalmente,

$$x_1 = \frac{1}{5}\,(6 - 2 \times 2 + 1 \times 3) = 1 \;\blacksquare \tag{6.19}$$

O que será que acontece com os vetores da base do contra-domínio? Repetindo todo o procedimento para o calculo de sucessivas bases F feito anteriormente, temos:

1º passo: F inicia o processo como a base canônica:

$$F = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 5\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + -1\boldsymbol{f}_3 \\
&= 5(1,0,0) + 2(0,1,0) + -1(0,0,1) = (5,2,-1), \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1) = (2,2,2), \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= -1\boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3 \\
&= -1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 1(0,0,1) = (-1,2,5).
\end{aligned}$$

2º passo: O "y" que muda é y_2; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda é o $\boldsymbol{f}_1$!

$$\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}_1 + (2/5)\boldsymbol{f}_2 = (1, 2/5, 0),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1,2/5,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6/5 & 12/5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1 = 5\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + -1\boldsymbol{f}_3$$

$$
\begin{aligned}
&= 5(1, 2/5, 0) + 0(0, 1, 0) + -1(0, 0, 1) = (5, 2, -1) \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{6}{5}\boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1, 1/4, 0) + \frac{6}{5}(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) = (2, 2, 2) \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 &= -1\boldsymbol{f}_1 + \frac{12}{5}\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3 \\
&= -1(1, 1/4, 0) + \frac{12}{5}(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (-1, 2, 5).
\end{aligned}
$$

3º passo: O "y" que muda é y_3; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda (novamente) é o $\boldsymbol{f}_1$!

$$\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}_1 - (1/5)\boldsymbol{f}_3 = (1, 2/5, -1/5),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1, 2/5, -1/5), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6/5 & 12/5 \\ 0 & 12/5 & 24/5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= 5\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 \\
&= 5(1, 2/5, 1/5) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (5, 2, 1), \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{6}{5}\boldsymbol{f}_2 + \frac{12}{5}\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1, 2/5, -1/5) + \frac{6}{5}(0, 1, 0) + \frac{12}{5}(0, 0, 1) = (2, 2, 2) \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3 &= -1\boldsymbol{f}_1 + \frac{12}{5}\boldsymbol{f}_2 + \frac{24}{5}\boldsymbol{f}_3 \\
&= -1(1, 2/5, -1/5) + \frac{12}{5}(0, 1, 0) + \frac{24}{5}(0, 0, 1) = (-1, 2, 5).
\end{aligned}
$$

4º passo: Agora a transação é entre a 2ª e a 3ª linhas. O "y" que muda é y_3; portanto, o "$\boldsymbol{f}$" que muda $\boldsymbol{f}_2$.

$$\boldsymbol{f}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}_2 + 2\boldsymbol{f}_3 = (0, 1, 2),$$

de modo que F agora vale

$$F = \big((1, 2/5, -1/5), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\big).$$

Então:

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 6/5 & 12/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1 &= 5\boldsymbol{f}_1 + 0\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 \\
&= 4(1, 2/5, -1/5) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (5, 2, -1), \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 2\boldsymbol{f}_1 + \frac{6}{5}\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 \\
&= 2(1, 2/5, -1/5) + \frac{6}{5}(0, 1, 2) + 0(0, 0, 1) = (2, 2, 2),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= -1\boldsymbol{f}_1 + \frac{12}{5}\boldsymbol{f}_2 + 0\boldsymbol{f}_3 \\ &= -1(1, 2/5, -1/5) + \frac{12}{5}(0, 1, 2) + 0(0, 0, 1) = (-1, 2, 5). \end{aligned}$$

Observe que os vetores da base F "final" permanecem LI como não poderia deixar de ser, senão F não seria mais uma base do contra-domínio $\mathbb{R}^3$.

Isso nos leva agora à forma operacional de determinar o posto e a nulidade de uma transformação/matriz:

Teorema 6.1 Seja $\boldsymbol{A}$ uma transformação linear entre dois espaços vetoriais finitos, e $[\boldsymbol{A}]$ a matriz de $\boldsymbol{A}$ nas bases E, F. Se $[\boldsymbol{A}]$ já está na forma escada, o número de linhas não-nulas de $[\boldsymbol{A}]$ é igual ao posto de A.

6.2 – Diagonalização

O cálculo de autovalores e autovetores nos proporciona uma poderosa alternativa para resolver sistemas lineares. Já vimos que matrizes simétricas com elementos reais sempre produzem autovalores reais (não necessariamente distintos), e n autovetores ortonormais (e portanto uma base para o $\mathbb{R}^n$ — ver Teorema 5.12).

No capítulo 5, vimos 3 exemplos (5.28, 5.29 e 5.30) em que as matrizes da transformação nas bases de autovetores eram diagonais (possuíam elementos não-nulos apenas na diagonal). Isso *não* é uma coincidência: sempre que houver n autovetores LI com os quais pudermos formar uma base do $\mathbb{R}^n$, a matriz da transformação $\boldsymbol{A}$ nesta base será diagonal. A prova é simples: de volta à pagina 147, sabemos que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j = A_{ij}\boldsymbol{e}_i$, ou seja: que as colunas de $[\boldsymbol{A}]$ (na base E) são as coordenadas, nessa base, de $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_n$. Agora, se houver uma base $F = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ formada por *autovetores*, então necessariamente:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{f}_j = \lambda_{(j)}\boldsymbol{f}_j = A_{ij_F}\boldsymbol{f}_i \Rightarrow A_{ij_F} = \delta_{ij}\lambda_{(j)}. \tag{6.20}$$

Interprete a equação acima: os parênteses em torno de j indicam que não há soma neste índice. A última igualdade indica uma matriz diagonal; por extenso:

$$[A_{ij}]_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{6.21}$$

Se conseguirmos uma base de autovetores, o sistema de equações $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}]$ torna-se terrivelmente simples: começamos interpretando as matrizes $[\boldsymbol{A}]$ e $[\boldsymbol{x}]$ como representantes da transformação $\boldsymbol{A}$ e do vetor $\boldsymbol{x}$ na base canônica E; a matriz $[\boldsymbol{A}]_F$ de $\boldsymbol{A}$ na base F dos autovetores é uma matriz com os autovalores na diagonal (e zeros no resto das posições; veja (6.21) acima); *se* conseguirmos escrever o vetor $\boldsymbol{y}$ na base dos autovetores, então poderemos resolver o sistema *desacoplado*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_F \Rightarrow x_{i_F} = \frac{y_{i_F}}{\lambda_{(i)}}. \tag{6.22}$$

Infelizmente, esse é um grande *se*! Por hipótese, nós conhecemos os autovetores:

$$\boldsymbol{f}_i = Q_{ji}\boldsymbol{e}_j, \tag{6.23}$$

de forma que as *componentes* de $\boldsymbol{f}_i$ na base canônica são a i-ésima coluna da matriz $[Q]$ (já vimos isso antes!). Segue-se que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = y_{i_F}\boldsymbol{f}_i &= y_j\boldsymbol{e}_j, \\
y_{i_F}Q_{ji}\boldsymbol{e}_j &= y_j\boldsymbol{e}_j \\
Q_{ji}y_{i_F} &= y_j \Rightarrow \\
Q^{-1}_{kj}Q_{ji}y_{i_F} &= Q^{-1}_{kj}y_j \\
y_{k_F} &= [Q_{kj}]^{-1}y_j, \text{ ou:} \\
[\boldsymbol{y}]_F &= [Q]^{-1}[\boldsymbol{y}].
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Em outras palavras, para obter o vetor $\boldsymbol{y}$ na base F, é preciso *inverter* a matriz $n \times n$ $[Q]$, que é um problema, *em tese*, tão difícil quanto o original!

Ainda não acabou, porque queremos obter $\boldsymbol{x}$ na base *canônica*. Mas

$$\boldsymbol{x} = x_{i_F}\boldsymbol{f}_i = x_{i_F}Q_{ji}\boldsymbol{e}_j = \underbrace{\left(Q_{ji}x_{i_F}\right)}_{x_j}\boldsymbol{e}_j \Rightarrow x_j = Q_{ji}x_{i_F} \blacksquare \tag{6.25}$$

Esse assunto, além de terrivelmente simples, é terrivelmente importante: na verdade, uma boa parte deste texto são variações sobre o tema de diagonalização de diversas transformações lineares, e sua solução sistemática.

Exemplo 6.1 Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

usando diagonalização.

SOLUÇÃO
Começamos especificando a matriz $[A]$, a matriz-coluna $[\boldsymbol{y}]$, calculando os autovalores e os autovetores:

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ------------------------------------------------------------------
# dia4: diagonalização de um sistema 4 x 4
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import array, dot,zeros
from numpy.linalg import det,eig,inv
a = array ( [[3,1,4,2],[2,1,3,4],[2,7,1,1],[1,4,2,1]] )
y = array ( [4,3,2,2])
# ------------------------------------------------------------------
# calcula autovalores (lamb) e autovetores (q)
# ------------------------------------------------------------------
(lamb,q) = eig(a)
# ------------------------------------------------------------------
# autovalores:
# ------------------------------------------------------------------
print('autovalores:')
print('lamb␣=␣', lamb)
print('-'*20)
print('autovetores:')
f = q.T
print('f␣=␣', f)
```

O resultado parcial é

```
autovalores:
lamb =  [ 9.80906556  1.40903018 -3.6537022  -1.56439354]
--------------------
autovetores:
f =  [[ 0.52205158  0.49568904  0.55910694  0.41128331]
 [ 0.89294202 -0.2067781  -0.11145378 -0.3840253 ]
 [ 0.44484828  0.41220763 -0.78724061 -0.11156656]
 [ 0.55823419  0.09243805 -0.78547225  0.25072521]]
```

Note que a variável `f` é a transposta da variável `q` (que representa a matriz $[Q]$): em cada linha acima, lemos os elementos de cada um dos autovetores. Prosseguimos, verificando se há 4 autovetores LI:

```
# ------------------------------------------------------------------
# verificamos se há 4 autovetores LI
# ------------------------------------------------------------------
if det(q) == 0:
   ans = 'Não: '
else:
   ans = 'Sim: '
print('LI? ' + ans + 'det q = ', det(q))
```

A resposta é

```
LI? Sim: det q =  0.41467524126
```

Talvez a essência do processo de diagonalização seja agora a obtenção de $[\boldsymbol{y}]_F$:

```
# ------------------------------------------------------------------
# projetamos y na base dos autovetores
# ------------------------------------------------------------------
yf = dot(inv(q),y)
print('yf = ',yf)
# ------------------------------------------------------------------
# sempre é bom verificar
# ------------------------------------------------------------------
yz = zeros(4)
for j in range(4):
   yz += yf[j]*f[j]
y = array(y,float)
print('y  = ',  y)
print('yz = ', yz)
```

Cuja resposta é

```
yf =  [ 5.47425228  0.60736034  0.92376944  0.33835826]
```

Portanto,

$$[\boldsymbol{y}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{6.26}$$

$$[\boldsymbol{y}]_F = \begin{bmatrix} 5.47425228 & 0.60736034 & 0.92376944 & 0.33835826 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{6.27}$$

Cuidado, porque isso *não* é uma solução mais fácil do problema. A sujeira está escondida na linha de programação

```
yf = dot(inv(q),y)
```

que quer dizer:

$$[\boldsymbol{y}]_F = [Q]^{-1}[\boldsymbol{y}]. \tag{6.28}$$

É aqui que Python/Numpy resolvem um problema *totalmente* equivalente, em complexidade, ao problema original. O fato de que a solução *numérica* é aparentemente muito rápida e simples não deve esconder este ponto fundamental: se a base de autovetores não for ortogonal, não há ganho na solução de sistemas lineares (mas pode haver *outros* ganhos: veja, por exemplo, o problema 6.2)

De qualquer maneira, e independentemente de como o obtivemos, *temos* $[\boldsymbol{y}]_F$, de forma que prosseguimos no cálculo da solução pelo método de diagonalização. Obtemos agora $[\boldsymbol{x}]_F$:

```
# ------------------------------------------------------------------
# funcionou, de forma que agora nós calculamos os xf's
# ------------------------------------------------------------------
xf = zeros(4,float)
for j in range(4):
   xf[j] = yf[j]/lamb[j]
# ------------------------------------------------------------------
# imprime os valores de xf
# ------------------------------------------------------------------
print('xf␣=␣', xf)
```

cuja resposta é

```
xf =  [ 0.55808091  0.4310485  -0.25283107 -0.21628717]
```

e agora estamos a um passo do fim, já que basta aplicar (6.25):

```
# ------------------------------------------------------------------
# agora calcula x
# ------------------------------------------------------------------
x = dot(q,xf)
print ('x␣=␣', x)
```

que dá como resposta:

```
x =  [ 0.44303797  0.06329114  0.63291139  0.03797468]
```

Tudo isso poderia ter sido obtido diretamente calculando-se

$$[\boldsymbol{x}] = [A]^{-1}[\boldsymbol{y}] \tag{6.29}$$

que se obtém com Numpy, fazendo-se

```
# ------------------------------------------------------------------
# mas será que está certo?
# ------------------------------------------------------------------
x = dot(inv(a),y)
print ('x␣=␣', x)
```

cuja resposta, mais uma vez, teria sido

```
x =  [ 0.44303797  0.06329114  0.63291139  0.03797468]
```

o que verifica a correção do método, nesse caso ■

A equação (6.28) também vale, naturalmente, para o vetor $\boldsymbol{x}$:

$$[\boldsymbol{x}]_E = [Q][\boldsymbol{x}]_F;$$

aplicando-a tanto para $\boldsymbol{x}$ quanto para $\boldsymbol{y}$ para a transformação $\boldsymbol{y} = A \cdot \boldsymbol{x}$, obtém-se

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{y}]_E &= [A]_E[\boldsymbol{x}]_E, \\ [Q][\boldsymbol{y}]_F &= [A][Q][\boldsymbol{x}]_F, \\ [\boldsymbol{y}]_F &= [Q]^{-1}[A]_E[Q][\boldsymbol{x}]_F. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Mas nós já sabemos que a matriz da transformação é diagonal na base F. Portanto,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = [A]_F = [Q]^{-1}[A]_E[Q]. \tag{6.31}$$

Observe a semelhança de (5.111) com (6.31). A diferença, naturalmente, é que aquela valia para rotações, ou seja: mudanças de uma base ortonormal para outra

(onde $[C]^\top = [C]^{-1}$), enquanto que esta é mais geral, e vale para mudanças genéricas de base.

Métodos de diagonalização são muito mais poderosos do que o nosso primeiro exemplo 6.1, um tanto longo e igualmente pessimista, pode nos fazer crer. De fato, o exemplo 5.27 já apontava para o poder do uso de autovalores e autovetores para desacoplar (ou seja, diagonalizar) sistemas de equações lineares.

Exemplo 6.2 Resolva o sistema

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO
Os autovalores e autovetores da transformação linear (representada por hipótese na base canônica) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \sqrt{2}, & \boldsymbol{f}_1 &= (1, -\sqrt{2}, 1), \\ \lambda_2 &= 1 + \sqrt{2}, & \boldsymbol{f}_2 &= (1, +\sqrt{2}, 1), \\ \lambda_3 &= -1, & \boldsymbol{f}_3 &= (1, 0, -1). \end{aligned}$$

Na base dos autovetores, o sistema fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_F$$

Essas são 3 equações diferenciais ordinárias *desacopladas*, cada uma delas do tipo

$$\frac{\mathrm{d}u_{Fi}}{\mathrm{d}t} = \lambda_{(i)} u_{Fi}$$

com solução

$$u_{Fi}(t) = c_i \mathrm{e}^{\lambda_{(i)} t}$$

(por que os $(i)s$?) — aqui, é muito útil enfatizar que se trata das componentes de $\boldsymbol{u}$ na base F. Os $c_i s$ são constantes de integração. A solução portanto é naturalmente escrita na base F como

$$\boldsymbol{u} = u_{Fi}\boldsymbol{f}_i.$$

Note que existe uma soma implícita em i acima. A genialidade simples do método consiste agora em reescrever a equação acima na base . . . canônica! veja:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \sum_{i=1}^{3} u_{Fi}\boldsymbol{f}_i, \\ \boldsymbol{u} &= \sum_{i=1}^{3} c_i \mathrm{e}^{\lambda_{(i)} t}\boldsymbol{f}_i, \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= c_1 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{2})t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{2})t}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vamos agora avançar para uma outra idéia: equações diferenciais de ordem maior que 1 podem ser escritas como *sistemas* de equações de ordem 1. Quando isso acontece, muitas vezes as técnicas de diagonalização e o uso de autovalores

e autovetores fornecem a chave para a solução. Um outro elemento que vai entrar em cena agora é que muitas vezes é *natural* passar de espaços vetoriais reais para espaços vetoriais complexos. De fato, mais do que natural, muitas vezes é essencial.

Considere portanto uma velha conhecida:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u = 0.$$

Sabemos que a solução geral em termos de funções reais é

$$u(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t.$$

Tente entretanto

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= v,\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -u;\end{aligned}$$

evidentemente, trata-se da mesma equação, "desdobrada" em duas equações diferenciais ordinárias de ordem 1, via a introdução da função $v(t)$. Matricialmente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

A tentação de calcular os autovalores e autovetores, como antes, é irresistível. Desta vez, entretanto, obteremos quantidades complexas:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= +\mathrm{i}, & \boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\mathrm{i}),\\ \lambda_2 &= -\mathrm{i}, & \boldsymbol{f}_2 &= \frac{f}{\sqrt{2}}(1,-\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Seguindo ao longo da mesma linha de antes, devemos ter portanto

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

À primeira vista, se não temos muita intimidade com os números complexos $\mathbb{C}$, fica parecendo que encontramos uma solução diferente da clássica $u = A\cos t + B\operatorname{sen} t$, a saber

$$u(t) = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}.$$

É possível, entretanto, obter uma solução $u(t)$ puramente real impondo

$$\begin{aligned}c_1 &= (A - \mathrm{i}B)/2,\\ c_2 &= (A + \mathrm{i}B)/2,\end{aligned}$$

e em seguida utilizando a fórmula de Euler $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t} = \cos t \pm \mathrm{i}\operatorname{sen} t$:

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{A - \mathrm{i}B}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{A + \mathrm{i}B}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\\ u(t) &= \frac{A - \mathrm{i}B}{2}[\cos t + \mathrm{i}\operatorname{sen} t] + \frac{A + \mathrm{i}B}{2}[\cos t - \mathrm{i}\operatorname{sen} t]\\ u(t) &= A\cos t + B\operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

Em outras palavras, a "regra" de estudar as raízes da equação característica da equação diferencial,

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

e "montar" a solução a partir da natureza destas raízes, é apenas uma forma um pouco escondida de montar um problema de autovalor-autovetor, e então resolvê-lo com as técnicas de Álgebra Linear.

Exercícios propostos

6.1 Obtenha a forma escada de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.2 (Greenberg, 1998, p. 581, Ex. 11.4-7) Mostre que se $[A]$ é diagonalizável, com

$$[Q]^{-1}[A][Q] = [D],$$

então

$$[A]^m = [Q][D]^m[Q]^{-1},$$

que é infinitamente mais simples de calcular do que $[A]^m$, pois

$$[D]^m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

6.3 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

6.4 Para $x(t), y(t) \in \mathbb{C};\ t \in \mathbb{R}$, resolva (isto é, obtenha a solução geral de):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 3y,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y.$$

Resolva o problema do começo ao fim com números complexos. Não se preocupe em obter soluções puramente "reais".

6.5 Resolva o sistema de equações diferenciais lineares acoplado

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

expanda a sua solução com o auxílio da fórmula de Euler até garantir que $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sejam reais.

7

Funções no $\mathbb{R}^n$

Praticamente tudo o que "acontece" no mundo natural ou em sistemas projetados pelo homem pode ser representado em termos de funções de várias variáveis. O estado da atmosfera é um exemplo: a velocidade do vento em cada ponto (x, y, z) é um vetor (em coordenadas cartesianas) $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$; a concentração de uma pluma de poluente modelada bidimensionalmente em uma baía é uma função $c(x, y)$, etc.. Neste capítulo, nós apresentamos alguns dos fatos mais importantes relativos a funções de diversas variáveis: o Teorema da Função Implícita, que justifica a noção geral de que precisamos de n equações para resolver problemas com n incógnitas — mesmo quando as equações são não lineares —; a Regra de Leibniz; e os operadores vetoriais, gradiente, divergente, e rotacional.

7.1 – Ordem de derivação

Uma função de n variáveis do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ é

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Em geral, *mas não sempre*, é possível obter derivadas parciais de f derivando em qualquer ordem. Esse é o conteúdo do

---

Teorema 7.1 Dada a função $f(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i}$$

sempre que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

forem contínuas em alguma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$.

Exemplo 7.1 Verifique o teorema (7.1) para $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$.

SOLUÇÃO

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy);\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x\cos(xy),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \blacksquare
\end{aligned}$$

7.2 – A regra da cadeia

Na maioria dos livros de física, engenharia, etc., a regra da cadeia é escrita de forma simplificada e no entanto, essencialmente, errada. Considere por exemplo uma função $f(x_1, \ldots, x_n)$; por sua vez, suponha que cada um dos $x_i s$ seja ele mesmo uma função de t. Isso define uma *nova* função de t:

$$F(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Sua derivada em relação a t é dada pela regra da cadeia:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

A fonte de confusão é que muitos autores usam o mesmo símbolo para a nova função de t, e escrevem

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

Isso costuma funcionar, *desde que você entenda o que está fazendo*. Caso haja dúvida, é preciso ser cuidadoso com os símbolos. Considere o seguinte exemplo de Greenberg (1998): suponha $f(x, y, u, v)$, com $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. Aplicando sem muito cuidado a regra da cadeia, isto é, utilizando um único símbolo para a função original de x, y, u e v e para a nova função de x e y somente, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow\\
0 &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}!
\end{aligned}$$

Esse resultado está errado, porque nós cancelamos $\partial f/\partial x$ dos dois lados da equação que na verdade são funções *diferentes*! Veja:

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= f(x, y, u(x, y), v(x, y));\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},
\end{aligned}$$

que é o resultado correto.

Exemplo 7.2 Se $F(x, y) = f(x, y, u, v)$ com

$$\begin{aligned}
f(x, y, u, v) &= x^2 + y^2 + u + v,\\
u &= \mathrm{sen}(xy),\\
v &= x + y,
\end{aligned}$$

calcule $\partial F/\partial x$.

SOLUÇÃO

A primeira maneira de resolver o problema é por substituição direta:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(xy) + x + y;$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y\cos(xy) + 1.$$

A segunda maneira de resolver o problema é utilizar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$
$$= 2x + 1 \times y\cos(xy) + 1 \times 1 \blacksquare$$

7.3 – Séries de Talor multivariadas

Em $\mathbb{R}^n$, a série de Taylor de f em torno de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ é

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) +$$
$$\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k}) + \ldots \quad (7.1)$$

Exemplo 7.3 Se $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, utilize Maxima para obter a série de Taylor de f até ordem 6 em torno de $(0,0)$. Identifique a lei de formação, e obtenha o termo geral da série.

SOLUÇÃO
Com Maxima, temos

```
(%i1) linel : 69;
(%o1)                                69
(%i2) f : sin(x+y);
(%o2)                           sin(y + x)
(%i3) taylor(f,[x,y],[0,0],6);
                      3         2       2       3
                     x  + 3 y x  + 3 y  x + y
(%o3)/T/ (y + x) - -------------------------
                                  6
                 5         4        2  3        3  2       4       5
                x  + 5 y x  + 10 y  x  + 10 y  x  + 5 y  x + y
              + ---------------------------------------------- + . . .
                                   120
(%i4)
```

É evidente que apenas potências ímpares estão presentes; isto faz sentido, porque $\operatorname{sen}(x)$ é uma função ímpar, e apenas termos ímpares comparecem na série de Taylor univariada de $\operatorname{sen}(x)$. Observando mais atentamente, nós reconhecemos nas frações acima as expansões dos binômios de Newton de $(x+y)^1$, $(x+y)^3$, e $(x+y)^5$. Nos denominadores, nós reconhecemos os fatoriais de 1, 3 e 5. A série de Taylor desejada, portanto, deve ser

$$\operatorname{sen}(x+y) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} \blacksquare$$

Exercícios Propostos

7.1 Expanda em série de Taylor

$$f(x, y) = \exp(x + y)$$

em torno de $(x, y) = (0, 0)$ até os termos de ordem 2, ou seja: até os termos em x^2, y^2 e xy.

7.2 Obtenha a série de Taylor bivariada de

$$f(x, y) = x^2 \exp(x + y) + y \operatorname{sen}(x)$$

até ordem 2, em torno de $(1, 1)$.

7.4 – O teorema da função implícita

Este é um dos teoremas mais subestimados do Cálculo Multivariado. Em duas dimensões, o teorema é bem simples

---

Teorema 7.2 (teorema da função implícita, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) Se

$$f(x, u) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u} \neq 0,$$

então existe uma função $u = u(x)$ em alguma vizinhança de (x_0, u_0) definida por f e tal que $u_0 = u(x_0)$.

A notação $f(x, u) = 0$ é uma forma de dizer que existe alguma relação entre x e u; por exemplo,

$$x^2 + u^2 - 4 = 0.$$

Note que a letra f não aparece explicitamente aqui, mas ela *poderia*:

$$f(x, u) = x^2 + u^2 - 4 = 0.$$

Agora, f aparece mais explicitamente como uma função mais geral de x e u ($x^2 + u^2 - 4$), que assume um valor particular (0). Isso significa que, *em tese*, é possível escrever a relação entre f, x e u de formas distintas:

$$f = f(x, u), \qquad u = u(x, f), \qquad x = x(u, f).$$

A condição

$$\frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u} \neq 0 \tag{7.2}$$

está ilustrada na figura 7.1: a inclinação da curva $f(x, u) = 0$ não pode ser vertical (não pode ser paralela ao eixo de u) no ponto ao redor do qual estamos tentando definir $u(x)$ implicitamente. O motivo é fácil de entender: graficamente, vemos que é impossível definir uma função na vizinhança do ponto, pois haverá 2 valores de u para um mesmo x nesta vizinhança. Algebricamente, com (7.2) estamos eliminando o caso em que a derivada $du/\mathrm{d}x$ torna-se infinita; de fato, a partir de $f(x, u) = 0$ podemos calcular $du/\mathrm{d}x$:

$$f(x, u) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}f = 0,$$

Figura 7.1: O teorema da função implícita, e uma situação indesejável

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u &= 0,\\ \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u &= -\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}}.\end{aligned} \tag{7.3}$$

Considere agora um caso no $\mathbb{R}^2$: fazer um exemplo bi-dimensional é mais fácil do que partir, "de cara", para o $\mathbb{R}^n$ (mas nós chegaremos lá). Sejam então

$$f(x, y, u, v) = 0, \tag{7.4}$$
$$g(x, y, u, v) = 0. \tag{7.5}$$

Se $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ e $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, haverá um par de funções $u(x, y)$, $v(x, y)$ definidas implicitamente? Suponha que sim, e faça uma expansão em série de Taylor:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0) + \ldots, \tag{7.6}$$
$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0) + \ldots, \tag{7.7}$$

onde P_0 é uma notação compacta para (x_0, y_0). Fica evidente que, para obter *pelo menos* uma estimativa linearizada de u e v em torno de P_0 como acima, precisamos calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y};$$

como obtê-las? A resposta é construir, a partir de f e de g, duas novas funções F e G de x, y somente, lembrando do que aprendemos na seção 7.2:

$$F(x, y) = f(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, \tag{7.8}$$
$$G(x, y) = g(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0. \tag{7.9}$$

É evidente que $\partial F/\partial x = 0$, $\partial G/\partial x = 0$; então,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{7.11}$$

Isso produz um sistema 2×2 nas incógnitas que desejamos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{7.12}$$

Da mesma forma, fazendo-se

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Chegamos então ao

Teorema 7.3 (teorema da função implícita, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) A condição para a existência das funções implícitas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ a partir das relações

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v) &= 0, \\ g(x, y, u, v) &= 0, \end{aligned}$$

é

$$J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.14}$$

O determinante J é denominado o *jacobiano* das funções f e g. Muitas vezes a questão é ainda mais simples, e tudo o que temos são n equações em n incógnitas. Seja

$$x = x(u, v), \tag{7.15}$$

$$y = y(u, v) \tag{7.16}$$

um sistema de 2 equações em 2 incógnitas. A questão é: existe a "inversa"

$$u = u(x, y), \;\; v = v(x, y)?$$

Note que este é um dos casos em que a confusão entre o nome da variável (x) e o nome da função ($x(u, v)$) pode ser danosa. Portanto, prosseguimos com precaução.

Vemos que temos um caso particular da situação anterior; mais especificamente, temos

$$f(x, u, v) = x - x(u, v) = 0,$$

$$g(y,u,v) = y - y(u,v) = 0.$$

Procedemos da mesma forma que antes, por meio de expansões em série de Taylor:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y-y_0) + \ldots, \tag{7.17}$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y-y_0) + \ldots \tag{7.18}$$

Note que nós possuímos

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v};$$

mas que nós *precisamos* de

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}!$$

Para obter essas últimas, fazemos

$$F(x,y) = x - x(u(x,y),v(x,y)) = 0, \tag{7.19}$$

$$G(x,y) = y - y(u(x,y),v(x,y)) = 0, \tag{7.20}$$

e derivamos *ambas*, *inicialmente*, em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0, \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0, \tag{7.22}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.23}$$

Novamente, portanto, as coisas "deram certo", e é possível obter um sistema de equações em duas das incógnitas desejadas. Para as outras duas devemos ter

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

(prove!). O teorema da função implícita é o mesmo, em outra roupagem: para que a inversa exista,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0. \tag{7.25}$$

O determinante J é denominado o *jacobiano* da transformação de variáveis

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v).$$

Em geral, vale:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1. \tag{7.26}$$

No $\mathbb{R}^n$, o teorema também existe e é importantíssimo. Considere um sistema de n relações implícitas entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{u}$:

$$f_i(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_n) = 0,$$

onde

$$u_i = u_i(x_1,\ldots,x_n),$$

ou de forma ainda mais compacta:

$$u_i = u_i(x_j).$$

Agora expanda cada um dos $u_i s$ em série de Taylor:

$$u_i(x_j) = u_i(x_{0j}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j - x_{0j}) + \ldots$$

Observe a notação indicial em ação (soma em j). Mas

$$F_i(x_j) = f_i(x_j, u_k(x_j)) = 0, \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0. \tag{7.28}$$

Segue-se portanto o sistema de equações

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \tag{7.29}$$

Quantas equações há aqui? Compare com um sistema

$$A_{ik}x_k = y_i.$$

A matriz do sistema é evidentemente $A_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial u_k}$; a incógnita é $x_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$, e o forçante é $y_i = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Existe portanto um *novo* sistema para cada j: a equação (7.29) representa portanto n sistemas de equações — um para cada j. A solução desses sistemas produz todos os valores de $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ necessários para expandir u em série de Taylor até 1ª ordem em 7.4, e portanto obter uma aproximação linear para a função implícita $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ em torno de $\boldsymbol{x}_0$.

A condição para a existência da função implícita é evidente:

$$\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\right] \neq 0. \tag{7.30}$$

Novamente, o determinante dessa matriz chama-se *jacobiano*, e nós escrevemos

$$\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\right] \equiv \frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}. \tag{7.31}$$

Pode-se mostrar que

$$\frac{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)} = 1. \tag{7.32}$$

Temos o

Teorema 7.4 (Teorema da função implícita, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) Se $f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, e

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0} \neq 0,$$

existe uma função $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ definida por $\boldsymbol{f}$ e tal que $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$.

O teorema da função implícita explica por que, em geral, para resolver para n incógnitas nós precisamos de n equações *mesmo que o problema seja não-linear*. Uma solução existe em um ponto $\boldsymbol{x}_0$ desde que o determinante do jacobiano nesse ponto não se anule.

Exemplo 7.4 Se $x_i = x_i(u_k)$ é um sistema $n \times n$ de equações não necessariamente lineares, generalize o procedimento de (7.15) até (7.25) para n equações.

SOLUÇÃO
Desta vez, em lugar de n equações $f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) = 0$ nós temos o caso mais simples $f_i(x_i, u_1, \ldots, u_n) = 0$ (sem repetição em i). Desejamos inverter o problema, e obter $u_i = u_i(x_j)$; para tanto, fazemos a expansão em série de Taylor

$$u_i(x_j) = u_i(x_{0j}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_j - x_{0j}) + \ldots$$

Teremos

$$\begin{aligned} F_i(x_j) &= f_i(x_i, u_k(x_j)) \\ &= x_i - x_i(u_k) = 0; \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} - \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0. \end{aligned}$$

Isto conduz a um sistema $n \times n$ de equações

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

para cada j. A matriz do sistema é $\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right]$; a condição para a obtenção das derivadas parciais $\partial u_i / \partial x_j$ que permitem obter a função (linearizada) $u_i(x_j)$ é que o jacobiano

$$J = \det\left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right]$$

não seja nulo ■

Exemplo 7.5 Calcule o jacobiano da transformação de variáveis

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r \;■$$

Exemplo 7.6 Calcule o jacobiano da transformação de variáveis

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

O programa `jacobsphere.max` da listagem 7.1 monta a matriz e calcula o determinante.

Listagem 7.1: `jacobsphere` — Jacobiano de coordenadas esféricas

```
linel : 70 ;
x : r*sin(fi)*cos(te);
y : r*sin(fi)*sin(te);
z : r*cos(fi);
jacob : matrix([diff(x,r),diff(x,fi),diff(x,te)],
               [diff(y,r),diff(y,fi),diff(y,te)],
               [diff(z,r),diff(z,fi),diff(z,te)]);
determinant(jacob);
factor(%);
trigreduce(%);
```

A sua saída é mostrada na listagem 7.2, donde

$$J = r^2 \operatorname{sen}\phi \ \blacksquare$$

Exemplo 7.7 Calcule o jacobiano da transformação:

$$\begin{aligned} x &= 3u + 5v, \\ y &= 2u; \end{aligned}$$

o que significa o sinal de J?

SOLUÇÃO

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10.$$

O sinal negativo significa que a mudança de variáveis inverte a orientação dos eixos coordenados: por exemplo, se z e w são o "terceiro eixo" de cada um dos sistemas, um produto

Listagem 7.2: Cálculo do Jacobiano de coordenadas esféricas com Maxima

```
(%i1) batch("jacobsphere.max")
(%i2) linel:70
(%o2)                                70
(%i3) x:r*sin(fi)*cos(te)
(%o3)                       sin(fi) r cos(te)
(%i4) y:r*sin(fi)*sin(te)
(%o4)                       sin(fi) r sin(te)
(%i5) z:r*cos(fi)
(%o5)                           cos(fi) r
(%i6) jacob:matrix([diff(x,r),diff(x,fi),diff(x,te)],
                   [diff(y,r),diff(y,fi),diff(y,te)],
                   [diff(z,r),diff(z,fi),diff(z,te)])
      [ sin(fi) cos(te)  cos(fi) r cos(te)  - sin(fi) r sin(te) ]
      [                                                         ]
(%o6) [ sin(fi) sin(te)  cos(fi) r sin(te)   sin(fi) r cos(te)  ]
      [                                                         ]
      [     cos(fi)         - sin(fi) r              0          ]
(%i7) determinant(jacob)
                                     2
(%o7) (- sin(fi) r sin(te) ((- cos (fi) r sin(te))
      2                      3      2    2
 - sin (fi) r sin(te))) + sin (fi) r  cos (te)
      2              2    2
 + cos (fi) sin(fi) r  cos (te)
(%i8) factor(%)
                    2          2       2     2          2
(%o8)   sin(fi) (sin (fi) + cos (fi)) r  (sin (te) + cos (te))
(%i9) trigreduce(%)
                                         2
(%o9)                           sin(fi) r
(%o9)                       jacobsphere.max
```

vetorial de dois vetores no sistema (x, y) tem o seu sinal invertido no sistema (u, v). É conveniente "trocar" (*a posteriori*) as variáveis quando isso acontece, para garantir que ambos os sistemas coordenados sejam dextrógiros. No caso deste exemplo, faríamos:

$$x = 2u;$$
$$y = 3u + 5v.$$

Exercícios Propostos

7.3 Dadas as funções

$$f(x, y, u, v) = x^2 + y^3 + \operatorname{sen}(uv),$$
$$g(x, y, u, v) = x^3 + y^2 + \cos(uv),$$

calcule o jacobiano $\partial(f, g)/\partial(u, v)$.

7.5 – A regra de Leibnitz

A regra de Leibnitz é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x = f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x. \tag{7.33}$$

Uma demonstração de (7.33) particularmente interessante é baseada em uma abordagem *lagrangeana* do significado da integral do lado esquerdo de (7.33). A

Figura 7.2: Uma dedução lagrangeana da regra de Leibnitz.

idéia é interpretar que $a(t)$ e $b(t)$ são as posições de partículas materiais que, em $t = 0$, delimitam o intervalo $[\alpha, \beta]$ (veja a figura 7.2). Agora, cada ponto desse intervalo também é uma partícula que descreve um movimento unidimensional do tipo

$$x = X(\xi, t), \tag{7.34}$$

onde ξ é a posição da partícula em $t = 0$. Observe que ξ é um marcador que define qual é a partícula, entre α e β, cujo movimento está sendo descrito (veja a linha tracejada na figura 7.2). Em particular,

$$a(t) = X(\alpha, t), \qquad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X(\alpha, t)}{\partial t}, \tag{7.35}$$

$$b(t) = X(\beta, t), \qquad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X(\beta, t)}{\partial t} \tag{7.36}$$

(veja a figura 7.2). A derivada total de (7.34) é

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial X}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial X}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{7.37}$$

Para cada valor fixo de t, mudamos a variável de x para ξ, de modo que a integral do lado esquerdo de (7.33) torna-se

$$\int_\alpha^\beta f\left(X(\xi, t), t\right) \frac{\partial X}{\partial \xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

Os limites de integração, α e β, não dependem de t. Dessa forma, é possível agora fazer

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\alpha^\beta f\left(X(\xi, t), t\right) \frac{\partial X}{\partial \xi}\, \mathrm{d}\xi &= \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}\left[f\left(X(\xi, t), t\right) \frac{\partial X}{\partial \xi}\right] \mathrm{d}\xi \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(X(\xi, t), t\right)\right) \frac{\partial X}{\partial \xi} + f\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial \xi}\right] \mathrm{d}\xi \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(X(\xi, t), t\right)\right) \frac{\partial X}{\partial \xi} + f\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial X}{\partial t}\right] \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Este é um ponto que requer cuidado! Observe:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(X(\xi,t),t\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t};$$

portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial X}{\partial \xi} + f\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial X}{\partial t}\right]\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial X}{\partial \xi} + f\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)\frac{\partial X}{\partial \xi}\right]\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Note o surgimento de $\partial X/\partial t$: é conveniente dar-lhe um nome:

$$u(x,t) = u(X(\xi,t),t) \equiv \frac{\partial X(\xi,t)}{\partial t}. \tag{7.38}$$

É evidente que u indica a velocidade de cada partícula. Agora, nós *voltamos* de uma integral em ξ para uma integral em x:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial X}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (uf)}{\partial x}\right]\frac{\partial X}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (uf)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x \\ &= u(x,t)f(x,t)\Big|_{a(t)}^{b(t)} + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7.39}$$

Finalmente, em vista de (7.35)–(7.36) e (7.38),

$$u(a(t),t) = \frac{\partial X(\alpha,t)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \tag{7.40}$$

$$u(b(t),t) = \frac{\partial X(\beta,t)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}; \tag{7.41}$$

levando (7.40)–(7.41) em (7.39), obtemos finalmente a regra de Leibnitz (7.33):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x \;\blacksquare$$

A dedução acima nada mais é do que a versão unidimensional do *teorema do transporte de Reynolds* (Kundu, 1990, cap. 4): esse último desempenha um papel fundamental em Mecânica dos Fluidos.

A regra de Leibnitz é extremamente útil! Por exemplo, em Finnigan (2006), encontramos o seguinte trecho:

> Generalizing the time averaging operator in Eq. (1) to a moving average filter, we define,
>
> $$\overline{\phi(t)}^{P} = \frac{1}{2P}\int_{t-P}^{t+P}\phi(t')\,\mathrm{d}t'$$
>
> . . . and its straightforward to show that
>
> $$\frac{\partial \overline{c}^{P}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial c}{\partial t}}^{P} \quad \ldots$$

A prova depende da regra de Leibnitz: primeiramente,

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial c}{\partial t}} &= \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P}\frac{\partial c}{\partial \tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2P}\left[c(P)-c(-P)\right],\end{aligned}$$

onde nós omitimos o sobrescrito P por simplicidade. Do outro lado da igualdade nós precisamos da regra de Leibnitz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2P}\int_{t-P}^{t+P} c(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2P}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t-P}^{t+P} c(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2P}\left[c(t+P)\frac{\mathrm{d}(t+P)}{\mathrm{d}t} - c(t-P)\frac{\mathrm{d}(t-P)}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{1}{2P}\int_{t-P}^{t+P}\underbrace{\frac{\partial c(\tau)}{\partial t}}_{\equiv 0}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2P}\left[c(P)-c(-P)\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 7.8 Utilizando *obrigatoriamente* a regra de Leibniz, calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \left[xt + \mathrm{e}^{-t^2}\right]\,\mathrm{d}t$$

SOLUÇÃO
Primeiramente, escrevemos a regra de Leibniz com os símbolos de que vamos precisar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = f(x,b)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} - f(x,a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Reconhecemos $b(x) = x$, $a(x) = 0$, e substituímos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}\left[xt + \mathrm{e}^{-t^2}\right]\,\mathrm{d}t &= x^2 + \mathrm{e}^{-x^2} + \int_0^x t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2 + \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{3x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x^2} \blacksquare\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

7.4 Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1/x}^{2/x}\frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\mathrm{d}t.$$

Figura 7.3: Cálculo do comprimento de arco de uma curva.

7.6 – Comprimentos, áreas e volumes

Dada uma curva, ou linha, $\mathscr{L}$ do $\mathbb{R}^3$ definida por suas equações paramétricas,

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

de tal forma que o vetor posição de um ponto da linha $\mathscr{L}$ é dado por

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{e}_x x(t) + \boldsymbol{e}_y y(t) + \boldsymbol{e}_z z(t),$$

desejamos calcular (na verdade, antes nós vamos precisar *definir* !) o comprimento da curva entre dois pontos, digamos, (parametrizados por) $t = \tau_0$ e $t = \tau$.

Para obter o comprimento de arco de uma curva, nós inicialmente calculamos o comprimento de um pequeno trecho retilíneo entre dois pontos da curva. Da figura 7.3:

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|, \\ \Delta\ell &= |\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}} \\ &= \left[\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{r}\right]^{1/2}\Delta t. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Em (7.42), $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$; aqui, nós reconhecemos a derivada de uma função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

O comprimento de arco será a soma dos $\Delta\ell s$ no limite quando $\Delta t \to 0$, entre (digamos) τ_0 e τ:

$$\ell_{\mathscr{L}} = \int_{\boldsymbol{r}\in\mathscr{L}} \mathrm{d}\ell \equiv \int_{\tau_0}^{\tau}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right]^{1/2}\mathrm{d}t. \tag{7.43}$$

Observe como, a rigor, (7.43) é a *definição* de comprimento de arco.

O cálculo de $\ell_{\mathscr{L}}$ é um caso particular de *integrais de linha*: dada a mesma curva Γ de antes, uma integral de linha sobre Γ é

$$I_{\mathscr{L}} = \int_{\boldsymbol{r}\in\mathscr{L}} f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\ell. \tag{7.44}$$

Agora, se nós reconhecermos em (7.44) que ("entre aspas")

$$\mathrm{d}\ell = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right]^{1/2}\mathrm{d}t,$$

a definição — e o cálculo — de I são triviais:

$$I_{\mathscr{L}} = \int_{\tau_0}^{\tau} f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right]^{1/2}\mathrm{d}t. \tag{7.45}$$

Frequentemente, integrais de linha surgem a partir de operações físicas com o produto escalar. Suponha por exemplo que $\boldsymbol{F}$ seja um campo vetorial de força, e que $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ seja um deslocamento infinitesimal sobre o caminho $\mathscr{L}$: o produto escalar $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ é o trabalho infinitesimal realizado por $\boldsymbol{F}$ ao longo de $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. A integral correspondente é o trabalho total sobre o caminho, e pode ser calculada por

$$\int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\tau_0}^{\tau} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{7.46}$$

Exemplo 7.9 Seja a curva $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t)[\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y] - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t)\boldsymbol{e}_z$, onde $0 \le t < \infty$. Encontre o comprimento $\ell(\tau)$ da curva entre $t = 0$ e $t = \tau$. Neste problema, $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ são a base ortonormal canônica do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO
Primeiramente, o comprimento da curva será $\ell(\tau) = \int_0^\tau \mathrm{d}\ell$. Resta calcular o comprimento elementar $\mathrm{d}\ell$ em função do parâmetro t:

$$d\ell = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'}\mathrm{d}t.$$

Como $\boldsymbol{r}'(t) = -\,\mathrm{sen}(t)[\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y] - \sqrt{2}\cos(t)\boldsymbol{e}_z$, temos

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{2(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t, \quad \ell(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\tau \;\blacksquare$$

O cálculo das áreas de superfícies é uma generalização da mesma idéia. Uma *superfície* no $\mathbb{R}^3$ também é descrita por equações paramétricas, exceto que agora são necessários *dois* parâmetros (digamos: u e v) para cada coordenada:

$$x = x(u, v), \tag{7.47}$$
$$y = y(u, v), \tag{7.48}$$
$$z = z(u, v). \tag{7.49}$$

O vetor-posição de cada ponto da superfície é

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \tag{7.50}$$

Figura 7.4: Parametrização de uma superfície no espaço, e o cálculo de sua área.

É evidente que, fixando-se um dos dois parâmetros, as equações acima agora descrevem uma *curva*, exatamente como antes. A idéia é que as curvas desenhadas fixando-se alternadamente u ou v se *cruzem* em direções *oblíquas*, conforme mostra a figura 7.4. A superfície é descrita quando u, v variam em uma região R_{uv}. O cálculo da área da superfície baseia-se em descrever pequenas variações Δu e Δv a partir de um ponto (u_0, v_0). Quando isso acontece, o vetor posição $\boldsymbol{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ descreve um pequeno quadrilátero cujos lados são, aproximadamente,

$$\Delta \ell_u = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \Delta u \right|, \tag{7.51}$$

$$\Delta \ell_v = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v \right|. \tag{7.52}$$

Os vetores correspondentes estão mostrados na figura 7.4. A área do paralelograma delimitado por esses dois vetores é bem conhecida: trata-se do módulo do produto vetorial

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v.$$

Intuitivamente, portanto, a área de uma superfície $\mathscr{S}$ no $\mathbb{R}^3$ cujas equações paramétricas são (7.47)–(7.49), resumidas em (7.50), será

$$A_{\mathscr{S}} = \int_{\boldsymbol{r} \in \mathscr{S}} \mathrm{d}A = \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.53}$$

Um caso particular que aparece frequentemente em livros de Cálculo, e que gera um conjunto grande de "fórmulas" que muitos alunos aprendem a decorar para calcular essas integrais (as quais, a bem da verdade, envolvem uma certa dificuldade), é aquele em que a superfície S, em lugar de ser parametrizada em termos de (u, v), é dada por uma fórmula (muito geralmente uma função)

$$z = g(x, y). \tag{7.54}$$

É trivial reduzir (7.54) à forma de (7.47)–(7.49); basta fazer

$$x = u,$$

$$y = v,$$
$$z = g(u, v).$$

Nesse caso, os vetores $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ e $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ são

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}\right).$$

Então,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right),$$

donde

$$A_{\mathscr{S}} = \int_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.55}$$

Com o auxílio das fórmulas (7.53) e (7.55), é trivial definir *integrais de superfície*, da mesma maneira que nós já definimos integrais de linha. Uma integral de superfície é um ser do tipo

$$I_{\mathscr{S}} \equiv \int_{\boldsymbol{r} \in \mathscr{S}} f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}A.$$

Portanto, é natural escrever

$$I_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} f(\boldsymbol{r}(u, v)) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.56}$$

No caso em que a superfície é dada por uma equação do tipo de (7.54),

$$I_{\mathscr{S}} = \int_{R_{xy}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.57}$$

Note que as equações *fundamentais* são (7.53) e (7.56); (7.55) e (7.57) são *triviais*!

Um caso particular muito importante das relações obtidas acima é o de uma *mudança de variáveis*,

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v).$$

Note que essas equações são idênticas às duas primeiras de (7.47)–(7.49); de fato, é natural considerá-las idênticas ao caso $z \equiv 0$, ou seja: ao caso em que a superfície é plana. Isso nos leva a

$$\boldsymbol{r} = (x(u, v), y(u, v), 0),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, 0\right),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, 0\right).$$

Figura 7.5: Mudança da ordem de integração em x e y em uma integral dupla

Segue-se que

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(0, 0, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z.$$

O Jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ é claramente reconhecível; portanto, no caso bidimensional temos:

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.58}$$

Atenção: as barras verticais acima significam o *módulo*; o Jacobiano *em si* é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

O significado geométrico de (7.58) também fica claro: o módulo do Jacobiano é a relação entre as áreas diferenciais "$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$" e "$\mathrm{d}u\mathrm{d}v$". Dessa forma, o valor da integral é preservado quando as transformações (7.47)–(7.48) "alteram" a geometria do domínio de integração.

Exemplo 7.10 É importante lembrar, operacionalmente, como se dá a mudança de ordem de integração de variáveis em integrais duplas (e triplas, quádruplas, etc.). Com relação à figura 7.5, note que, para qualquer função $f(x, y)$ de duas variáveis integrada na região cinza, vale:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2x} f(x, y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{2} \int_{x=y/2}^{1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exemplo 7.11 Calcule a área da superfície externa do parabolóide de revolução $z = x^2+y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

SOLUÇÃO
Com $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, e

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr d\theta \\ &= \pi \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \end{aligned}$$

Exemplo 7.12 Um pavilhão de 20 m × 20 m tem um teto com a forma de um parabolóide hiperbólico. Para um sistema de eixos x, y, z localizado no centro do pavilhão, $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$, o formato do teto é dado por

$$z = \left(100 + x^2 - y^2\right)/100,$$

onde todas as dimensões estão em metros. Monte a integral em x, y que dá o valor da área da superfície do teto. *Não é necessário calcular a integral.*

SOLUÇÃO
Use a fórmula (7.55). Calculando as derivadas parciais, encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{2x}{100} = \frac{x}{50}, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{2y}{100} = -\frac{y}{50}, \end{aligned}$$

donde

$$A = \int_{-10}^{10} \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{2500}}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \blacksquare$$

O cálculo de volumes segue a mesma lógica. Agora, um *corpo* no $\mathbb{R}^3$ é parametrizado por

$$x = x(u, v, w), \tag{7.59}$$
$$y = y(u, v, w), \tag{7.60}$$
$$z = z(u, v, w). \tag{7.61}$$

Uma rápida observação sobre nomenclatura: parece conveniente fazer a distinção

linha $\mathscr{L}$ – comprimento da linha ℓ
superfície $\mathscr{S}$ – área da superfície A
corpo $\mathscr{C}$ – volume do corpo V

para diferenciar a *região* no espaço (linha, superfície, corpo) de sua medida (comprimento, área, volume).

Quando (u, v, w) percorre uma região R_{uvw} do espaço de parâmetros, o vetor

$$\boldsymbol{r}(u, v, w) = \boldsymbol{e}_x x(u, v, w) + \boldsymbol{e}_y y(u, v, w) + \boldsymbol{e}_z z(u, v, w) \tag{7.62}$$

percorre todos os pontos do corpo $\mathscr{C}$ cujo volume $V_{\mathscr{C}}$ desejamos medir. Na figura 7.4 imagine uma "terceira malha" parametrizada por w para cada par (u, v) fixo. É evidente que uma variação Δw em w produzirá agora uma variação de comprimento ao longo da curva parametrizada por w de aproximadamente (compare com (7.51)–(7.52))

$$\Delta \ell_w = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \Delta w \right|. \tag{7.63}$$

Juntas, (7.51)–(7.52) e (7.63) descrevem os comprimentos das 3 arestas de um paralelepípedo cujo volume é dado pelo produto misto

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v \right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \Delta w;$$

o volume da região parametrizada por u, v, w será portanto

$$V_{\mathscr{C}} = \int_{\boldsymbol{r} \in \mathscr{C}} \mathrm{d}V = \iiint_{R_{uvw}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{7.64}$$

O caso de integrais de volume agora é imediato: uma integral de volume é uma expressão do tipo

$$I_{\mathscr{C}} = \int_{\boldsymbol{r} \in \mathscr{C}} f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V. \tag{7.65}$$

Sua parametrização e seu cálculo são feitos por

$$I_{\mathscr{C}} = \iiint_{R_{uvw}} f(\boldsymbol{r}(u, v, w)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{7.66}$$

Note que

$$\int_{\mathscr{C}} f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V = \iiint_{\mathscr{C}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ;$$

que

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\ ;$$

e que portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{C}} f(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V &= \iiint_{\mathscr{C}} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{R_{uvw}} f(\boldsymbol{r}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Esta última é a contrapartida em 3 dimensões de (7.58). O significado geométrico de (7.67) também é o mesmo: o módulo do Jacobiano é a relação entre os volumes diferenciais "$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$" e "$\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$".

Figura 7.6: Comprimento de arco de uma espiral infinita.

Exercícios Propostos

7.5 Se

$$F(x, y, z) = x + 2y^2 + 3z^3$$

e o segmento de reta Γ é

$$\Gamma : \quad \begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t, \qquad t \in [0, 1], \\ z &= 3t, \end{aligned}$$

calcule a integral de linha

$$I = \int_\Gamma F(x, y, z)\, ds.$$

7.6 Na figura 7.6, considere a curva plana cujas equações paramétricas são

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\mathrm{e}^{-t/10} \cos t, \\ y(t) &= 3\mathrm{e}^{-t/10} \operatorname{sen} t, \end{aligned}$$

$t \geq 0$. Calcule o seu comprimento total. *Observação*: $0 \leq t < \infty$, mas o comprimento da curva é *finito*.

7.7 Uma nuvem tóxica foi lançada por uma indústria em um acidente. Em um sistema de coordenadas que tem a indústria em sua origem, a concentração da substância tóxica é $C(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$. Uma auto-estrada passa pelas proximidades e tem uma curva Γ com forma aproximada $y = 1/x$ para $x > 0$ (figura 7.7).

Um jipe totalmente aberto faz a curva Γ. A exposição de seus ocupantes à substância tóxica é dada pela integral

$$I = \int_\Gamma C(x(s), y(s))\, \mathrm{d}s,$$

onde s é o comprimento de arco. Mostre que

$$I = \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} e^{-\left(x^2 + 1/x^2\right)}\, \mathrm{d}x.$$

Sugestão: insira $y = 1/x$ e $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ e manipule algebricamente. Não tente calcular a integral!

Figura 7.7: Figura do exercício 7.7.

Figura 7.8: Figura do problema 7.8.

7.8 Calcule

$$I = \iint_R x \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

onde R é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x$ mostrada na figura 7.8.

7.9 Calcule

$$I = \iint_{R_{xy}} (1 + x + y) \, \mathrm{d}A,$$

onde R_{xy} é a região do $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$\begin{aligned} x &= -y, \qquad 0 \le y \le 2, \\ x &= \sqrt{y}, \qquad 0 \le y \le 2, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

7.10 Se $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametriza uma superfície $\mathscr{S}$ no $\mathbb{R}^3$, e se $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a $\mathscr{S}$ em cada ponto, então é verdade que

$$\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}A = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Portanto, dada uma função vetorial $\boldsymbol{v}(x, y, z)$,

$$I = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A = \int_{R_{uv}} \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right] \cdot \boldsymbol{v}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sabendo disso, calcule $I = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A$, onde $\mathscr{S}$ é a superfície cilíndrica

$$y = 1 - x^2, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le z \le 1,$$

e $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (1 - x, 1 - y, 0)$.

7.11 Calcule o volume da região $\mathscr{C}$ delimitada *inferiormente* pelo parabolóide de revolução $z = 5(x^2 + y^2)$ e *superiormente* pelo plano $z = 5$.

7.12 Obtenha a área da superfície externa de

$$\begin{aligned} x &= 2u \cos(v), \\ y &= u \operatorname{sen}(v), \\ z &= u, \end{aligned}$$

$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. Você deve deixar seu resultado indicado na forma

$$\int_{v=0}^{2\pi} f(v) \, \mathrm{d}v,$$

ou seja: faça todos os cálculos até encontrar a forma mais simples possível para $f(v)$.

Figura 7.9: Superfície do Problema 7.13.

7.13 A área da superfície mostrada na figura 7.9 e parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= u, \qquad -\pi \le u \le +\pi, \\ y &= v, \qquad -\pi \le v \le +\pi, \\ z &= \operatorname{sen}(x+y), \end{aligned}$$

é dada pela integral dupla

$$A = \int_{u=-\pi}^{+\pi} \int_{v=-\pi}^{+\pi} F(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

Obtenha $F(u,v)$. *Não tente calcular a integral.*

7.14 Calcule o volume da região definida pela interseção entre o cilindro $x^2+y^2=1$, $z \ge 0$ e o plano $-y+z=1$. *Sugestão: desenhe!*

7.15 Calcule a área da superfície do parabolóide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ que se projeta sobre a região $\sqrt{x^2+y^2} \le 1$ do plano Oxy.

7.16 Calcule o volume do corpo limitado inferiormente pela superfície

$$z = x^2 + y^2,$$

e superiormente pela superfíce

$$z = 1 + \frac{x^2+y^2}{4}.$$

7.17 (Greenberg, 1998, Ex. 15.5-1b) Usando a fórmula $\mathrm{d}A = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$, calcule a área da superfície do cilindro $x^2+y^2=1$ entre o plano $z=0$ e a superfície $z = 1-y^2$. Dica: use $z=u$, $x=\cos v$, $y = \operatorname{sen} v$.

7.18 Um campo de velocidade uniforme $\boldsymbol{v} = (1,0,0)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ atravessa a superfície $\mathscr{S}$:

$$x = \sqrt{1-y^2}, \qquad -1 \le y \le 1, \qquad 0 \le z \le 1\ \mathrm{m}.$$

Calcule a vazão total

$$Q = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.$$

Figura 7.10: A divergência em coordenadas cartesianas.

7.7 – Divergência, rotacional, gradiente

Os operadores que apresentaremos nesta seção, a divergência, o gradiente e o rotacional, são operações que ocorrem com muita frequência em Física e em Engenharia. Eles aparecem em Eletromagnetismo, Mecânica dos Sólidos, Mecânica dos Fluidos, e em aplicações importantes tais como a otimização (obtenção de máximos e mínimos) de funções de muitas variáveis.

O seu domínio é imprescindível em Física e em Engenharia.

Considere um campo vetorial $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ no $\mathbb{R}^3$. Muitas vezes, $\boldsymbol{u}$ representa um *fluxo* por unidade de área (uma corrente elétrica, um vetor fluxo de calor, ou uma velocidade em um fluido, por exemplo). O fluxo total da quantidade associada através de uma superfície aberta é a integral de superfície

$$Q = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}A. \tag{7.68}$$

Por exemplo, se $\boldsymbol{u}$ é o vetor fluxo de calor da lei de Fourier (com dimensões de energia por área por tempo), Q é o fluxo total de calor (com dimensões de energia por tempo) através de S.

Já o cálculo de uma integral de superfície *fechada* corresponde ao *balanço* da grandeza física associada; se

$$Q = \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}A, \tag{7.69}$$

então Q significa a taxa líquida com que a grandeza correspondente está deixando o volume limitado por S. Por exemplo, em (7.69), se $\boldsymbol{u}$ é a velocidade através da superfície fechada do corpo $\mathscr{C}$, então Q é o fluxo líquido (saídas menos entradas) volumétrico para fora de $\mathscr{C}$, em unidade de volume por tempo.

Divergência

Considere uma função *vetorial* $\boldsymbol{u}$ de (x, y, z):

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

onde os seus elementos são 3 funções escalares, u, v e w. A *divergência* de $\boldsymbol{u}$ é definida como o efluxo líquido de $\boldsymbol{u}$ através de uma superfície fechada $\delta\mathscr{S}$ (cuja área total é ΔA) por unidade de volume:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} \equiv \lim_{\Delta A,\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\delta\mathscr{S}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}A. \tag{7.70}$$

Em (7.70), ΔV é o volume do corpo delimitado pela superfície fechada $\delta\mathscr{S}$.

A aplicação de (7.70) para coordenadas cartesianas é bastante simples. A figura 7.10 mostra um elemento de volume $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$. O fluxo de $\boldsymbol{u}$ "entrando" em ΔV ao longo da direção x é $-u(x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)\Delta y\Delta z$. O sinal negativo corresponde ao produto escalar na face: $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = -u$. O fluxo "saindo" ao longo da mesma direção é $+u(x+\Delta x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)\Delta y\Delta z$. O sinal positivo corresponde ao produto escalar positivo na face oposta. Pares correspondentes, envolvendo v e w nas demais faces, podem ser obtidos facilmente. O resultado da aplicação de (7.70) é

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta A,\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\delta\mathscr{S}}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S = \\
&\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\Big[\big(u(x+\Delta x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)-u(x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)\big)\Delta y\Delta z + \\
&\qquad\big(v(x+\Delta x/2, y+\Delta y, z+\Delta z/2)-v(x+\Delta x/2, y, z+\Delta z/2)\big)\Delta x\Delta z + \\
&\qquad\big(w(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z+\Delta z)-w(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)\big)\Delta x\Delta y\Big] \\
&= \lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\Bigg[\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)-u(x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2)}{\Delta x} + \\
&\qquad\frac{v(x+\Delta x/2, y+\Delta y, z+\Delta z/2)-v(x+\Delta x/2, y, z+\Delta z/2)}{\Delta y} + \\
&\qquad\frac{w(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z+\Delta z)-w(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)}{\Delta z}\Bigg] \\
&\qquad = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Portanto, em coordenadas cartesianas,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{7.71}$$

O lado esquerdo de (7.71) é um mnemônico: *se* $\boldsymbol{\nabla}$ fosse um vetor,

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

o seu "produto escalar" com $\boldsymbol{u}$ produziria (7.71). É claro que isso não é verdade: $\boldsymbol{\nabla}$ *não* é um vetor, e a operação definida em (7.71) *não* é um produto escalar. No entanto, a analogia é muito útil para nos lembrarmos dessas operações. Por exemplo, o produto escalar transforma dois vetores em um escalar (ou de outra forma: o produto escalar é uma função de $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$, onde $\mathbb{V}$ são os vetores do $\mathbb{R}^3$). De forma análoga, a operação divergência transforma o "pseudo-vetor" $\boldsymbol{\nabla}$ operando sobre o campo vetorial $\boldsymbol{u}$ em um escalar. Em notação indicial escrevemos, simplesmente,

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{e}_i, \tag{7.72}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{7.73}$$

Em resumo, e reforçando o que acabamos de dizer, a divergência de uma função, ou campo, vetorial, é uma função *escalar*. Além disso, a divergência é um operador *linear*: se α, β são constantes e $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ são campos vetoriais,

$$\nabla \cdot [\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}] = \alpha \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \beta \nabla \cdot \boldsymbol{v}. \tag{7.74}$$

Exemplo 7.13 Calcule a divergência de

$$\boldsymbol{v} = (3x^3 + 2y^2 + z, 3y^3 + 2z^2 + x, 3z^3 + 2x^2 + y)$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 + 2y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^3 + 2z^2 + x) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2 + 2x^2 + y) \\ &= 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Gradiente

A equação

$$z = f(x, y)$$

é um caso particular da descrição de uma superfície no $\mathbb{R}^3$. A equação

$$f(x, y) = \text{constante}$$

define uma curva do $\mathbb{R}^2$ ao longo da qual f é constante: a curva correspondente é denominada uma *curva de nível*. Para fixarmos a notação, o que nos será útil muito em breve, vamos denominar essa curva de nível de Λ.

A título de exemplo, a figura 7.11 mostra a superfície

$$z = f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{7.75}$$

As curvas de nível são as curvas do $\mathbb{R}^2$ para as quais

$$c = \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

É relativamente fácil verificar, algebricamente, que as curvas de nível, nesse caso, são círculos.

Por outro lado, ao caminharmos ao longo de uma curva arbitrária $\mathscr{L} \in \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo seu comprimento de arco,

$$\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \end{aligned}$$

a função f corta uma "seção" na superfície $z = f(x, y)$, de tal forma que ao longo de $\mathscr{L}$ isso define uma nova função da variável independente s:

$$z = F(s) = f(x(s), y(s)).$$

Figura 7.11: Superfície $z = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)/\sqrt{x^2+y^2}$ e suas curvas de nível.

É claro que isso é, novamente, um caso para a regra da cadeia multimensional, que vimos na seção 7.2. Podemos interpretá-la, entretanto — e esta é a novidade — como um produto escalar:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{\nabla} f = |\boldsymbol{t}|\,|\boldsymbol{\nabla} f|\cos(\theta).\end{aligned} \tag{7.76}$$

Na equação acima,

$$\boldsymbol{t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)$$

é o vetor unitário ($|\boldsymbol{t}| = 1$) tangente a $\mathscr{L}$ em cada ponto. Em coordenadas cartesianas, o vetor

$$\boldsymbol{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{7.77}$$

é o *gradiente* de f. Em (7.76), θ é evidentemente o ângulo entre os vetores $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{\nabla} f$.

A prova de que $|\boldsymbol{t}| = 1$ é simples. Como s é o comprimento de arco,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{t}| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}s^2}}\\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}s^2}} = 1.\end{aligned}$$

Voltando agora à equação (7.76), observe que ela sintetiza informações importantes sobre a derivada $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$:

(a) Por exemplo, se em um ponto P $\boldsymbol{t} \perp \boldsymbol{\nabla} f$ ($\boldsymbol{t}$ é perpendicular a $\boldsymbol{\nabla} f$), $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s = 0$, $\cos(\theta) = 0$, e $\boldsymbol{t}$ é tangente a uma curva de nível Λ: pelo menos localmente, $\mathscr{L} \parallel \Lambda$ ($\mathscr{L}$ é paralela a Λ), e estamos, *localmente*, caminhando sobre uma curva de nível. Ao fazê-lo, o valor de $F(s)$ é localmente constante (Figura 7.12-a).

Figura 7.12: (a) o vetor $\boldsymbol{t}$ é tangente à curva de nível Λ e a curva $\mathscr{L}$ é *localmente* paralela a Λ; (b) o vetor $\boldsymbol{t}$ é perpendicular à curva de nível Λ e a curva $\mathscr{L}$ é *localmente* perpendicular a Λ.

(b) Por outro lado, se em P $\boldsymbol{t} \parallel \boldsymbol{\nabla} f$ ($\boldsymbol{t}$ é paralelo a $\boldsymbol{\nabla} f$), $|\mathrm{d}F/\mathrm{d}s|$ é máximo, $\cos(\theta) = 1$, e estamos nos deslocando perpendicularmente à curva de nível Λ, assim como estamos, *localmente*, produzindo a máxima variação possível (em módulo) para $F(s)$. (Figura 7.12-b).

Em qualquer caso, o gradiente $\boldsymbol{\nabla} f$ é sempre *normal* a Λ: o $\boldsymbol{\nabla} f$ é uma propriedade de f (e portanto ligado a Λ), enquanto que $\boldsymbol{t}$ é relacionado com a curva $\mathscr{L}$. Finalmente, observe que o conceito da curva $\mathscr{L}$ serve mais para "construir" (como se fosse um andaime, que depois pode ser retirado) a derivada direcional do que qualquer coisa: *todas* as curvas $\mathscr{L}$ com tangente unitária $\boldsymbol{t}$ em um ponto P produzem o mesmo valor de $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$.

Exemplo 7.14 Para a função $z = f(x, y)$ dada pela equação (7.75) e ilustrada na figura 7.11, calcule $\mathrm{d}F/\mathrm{d}s$ no ponto $P = (\pi/(2\sqrt{2}), \pi/(2\sqrt{2}))$ ao longo da direção e sentido dados por $\boldsymbol{t} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

SOLUÇÃO
Em P,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\left(\frac{\pi}{(2\sqrt{2})}\right)^2} = \sqrt{2\frac{\pi^2}{2 \times 4}} = \frac{\pi}{2},$$

donde

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 1, \qquad \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

As derivadas parciais de f em relação a x e a y são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2^{3/2}}{\pi^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2^{3/2}}{\pi^2}.$$

A derivada direcional no ponto será

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\right|_P = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right) \cdot \left(-\frac{2^{3/2}}{\pi^2}, -\frac{2^{3/2}}{\pi^2}\right) = -\frac{4}{\pi^2} \blacksquare$$

Exemplo 7.15 Considere a lei de Darcy para escoamento em um meio poroso saturado, na forma

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla} h$$

onde k é a condutividade hidráulica saturada, e h a altura do lençol freático. Mostre que, se h só depender de coordenadas horizontais (por exemplo: se, em coordenadas cartesianas, só depender de x e y), então $\boldsymbol{v}$ é um vetor *horizontal*. Essa é a *hipótese de Dupuit-Forchheimer*.

SOLUÇÃO
Suponha $h = h(x, y)$; então,

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla} h = -k\left[\frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right].$$

Como a componente $\boldsymbol{k}$ de $\boldsymbol{v}$ é nula, $\boldsymbol{v}$ é um vetor horizontal.

O mesmo raciocínio que vimos acima em duas dimensões, onde é possível visualizar os termos e plotar $z = f(x, y)$, estende-se para mais dimensões. De fato, se

$$w = f(x, y, z),$$

ao longo de uma curva $\mathscr{L}$ (agora no $\mathbb{R}^3$) teremos

$$\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \\ z &= z(s), \end{aligned}$$

e

$$F(s) = f(x(s), y(s), z(s)),$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla} f. \end{aligned}$$

Como antes,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \text{ e} \\ \boldsymbol{\nabla} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

são o vetor unitário tangente a $\mathscr{L}$ em cada ponto, e o gradiente de f, respectivamente.

Assim como no caso da divergência, é útil interpretar (7.77) *como se ela fosse o produto do escalar f pelo (pseudo) vetor* $\boldsymbol{\nabla}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \boldsymbol{\nabla} f.$$

Novamente, enfatizamos que se trata apenas de uma analogia, mas que serve para nos lembrar de um fato essencial: *o gradiente de uma função escalar é um vetor*.

Em geral, se

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, o gradiente de f na base canônica é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i.$$

Como já comentamos acima: o gradiente de uma função escalar é um *vetor*.

Exemplo 7.16 Calcule a derivada de $g(x, y, z) = xy^2 - 3z^3$ no ponto $(1, -2, 4)$ na direção normal à superfície $xy + xz + yz = -6$.

SOLUÇÃO
Se $G(s) = g(x(s), y(s), z(s))$, A derivada direcional é dada por

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t} \cdot \nabla g,$$

portanto precisamos calcular o gradiente de g no ponto e também o vetor unitário $\boldsymbol{t}$ que dá a direção de variação de g. Comecemos pelo segundo: o vetor normal à superfície $F(x, y, z) = 0$ é ∇F; portanto, se

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= xy + xz + yz + 6, \\ \nabla F &= (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k} \\ &= (-2 + 4)\boldsymbol{i} + (1 + 4)\boldsymbol{j} + (1 - 2)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 1\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

O vetor normal *unitário* é

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1).$$

O gradiente de g no mesmo ponto é

$$\begin{aligned} \nabla g &= y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - 9z^2\boldsymbol{k} \\ &= 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 144\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, 5, -1) \cdot (4, -4, -144) = \frac{132}{\sqrt{30}} \approx 24{,}0997 \blacksquare$$

O rotacional

Dada uma função vetorial $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ de (x_1, x_2, x_3), o rotacional é a função vetorial cujos elementos são

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

É conveniente escrever o rotacional com o auxílio dos vetores da base canônica (embora, a rigor, a definição acima seja uma definição do rotacional *independente da base*):

$$\nabla \times \boldsymbol{u} \equiv \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k. \tag{7.78}$$

Quando escrevemos "por extenso", $\boldsymbol{u} = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, o rotacional é a função vetorial

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Isso frequentemente é apresentado na forma de um "pseudo" determinante, de forma análoga ao que acontece com o produto vetorial:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

Mais operadores

O operador $\boldsymbol{\nabla}$ permite "criar" alguns operadores derivados. Os dois mais importantes, sem dúvida, são o laplaciano:

$$\nabla^2 f \equiv \operatorname{div} \mathbf{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}, \tag{7.79}$$

e o operador associado com a *advecção* de um campo f pelo campo vetorial de velocidades $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{7.80}$$

(7.80) é um "operador sem nome", mas muito comum em Mecânica dos Fluidos.

Algumas vezes, encontramos também o laplaciano de um campo vetorial $\boldsymbol{u}$, que deve ser interpretado simplesmente como o vetor cujos elementos são os laplacianos de cada um dos elementos de $\boldsymbol{u}$. Na base canônica $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_i \boldsymbol{e}_i, \\ \nabla^2 \boldsymbol{u} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \boldsymbol{e}_i. \end{aligned} \tag{7.81}$$

Ou, por extenso,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}, \\ \nabla^2 \boldsymbol{u} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{7.82}$$

Identidades vetoriais

As identidades vetoriais mais "óbvias" são

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f \equiv \mathbf{0}, \tag{7.83}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}] \equiv 0. \tag{7.84}$$

O mnemônico para ambos é a analogia de $\boldsymbol{\nabla}$ com um vetor. *Se* $\boldsymbol{\nabla}$ fosse um vetor, claramente $\boldsymbol{\nabla} \parallel \boldsymbol{\nabla} f \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{0}$. Analogamente, se $\boldsymbol{\nabla}$ fosse um vetor, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{\nabla} \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}] = 0$.

Naturalmente, as analogias *não são* demonstrações. Aqui estão as provas. A equação (7.83) é provada com:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} f &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \boldsymbol{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \boldsymbol{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right] \boldsymbol{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \boldsymbol{e}_k \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik} \right]}_{=0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \boldsymbol{e}_k = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A equação (7.84) é provada com

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}] &= \boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\epsilon_{jkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{jkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j}\delta_{il} \\
&= \epsilon_{jki}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{2}\epsilon_{jik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\partial x_i} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{2}\epsilon_{jik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\left[\epsilon_{ijk}+\epsilon_{jik}\right]}_{=0}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_j} = 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Existe mais uma identidade que pode ser obtida com apenas uma variável ($\boldsymbol{u}$ *ou* f):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}] &= \boldsymbol{\nabla}\times\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_k = \epsilon_{qkp}\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_p \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{pqk}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_q\partial x_i}\boldsymbol{e}_p \\
&= \left[\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}\right]\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_q\partial x_i}\boldsymbol{e}_p \\
&= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_i}\boldsymbol{e}_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_i}\boldsymbol{e}_j \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\boldsymbol{e}_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_i}\boldsymbol{e}_j \\
&= \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\right) - \nabla^2\boldsymbol{u}.
\end{aligned} \tag{7.85}
$$

Com duas variáveis ($\boldsymbol{u}$ *e* f, ou $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$), entretanto, muitas outras podem ser obtidas; talvez os dois resultados mais óbvios sejam

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot[f\boldsymbol{u}] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(fu_i\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_i}u_i + f\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\
&= \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}f + f\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\right);
\end{aligned} \tag{7.86}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times[f\boldsymbol{u}] &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(fu_j\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk}\left(u_j\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_k \\
&= \boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{u} + f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}.
\end{aligned} \tag{7.87}
$$

Com duas funções vetoriais, tem-se ainda:

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v}, \tag{7.88}$$

$$\nabla \times [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}, \tag{7.89}$$

$$\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times [\nabla \times \boldsymbol{v}] + \boldsymbol{v} \times [\nabla \times \boldsymbol{u}]. \tag{7.90}$$

Mudança de coordenadas

Considere o cálculo do operador ∇ em coordenadas cilíndricas. O procedimento é bastante sistemático. Em primeiro lugar, note que $\boldsymbol{e}_r$ é uma rotação do vetor $\boldsymbol{e}_x$ de um ângulo θ, e que $\boldsymbol{e}_\theta$ é também uma rotação de $\boldsymbol{e}_y$, igualmente de um ângulo θ. $\boldsymbol{e}_z$ permanece "no lugar". As equações de rotação são

$$\boldsymbol{e}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{e}_x + \operatorname{sen}(\theta)\boldsymbol{e}_y, \tag{7.91}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\operatorname{sen}(\theta)\boldsymbol{e}_x + \cos(\theta)\boldsymbol{e}_y, \tag{7.92}$$

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z. \tag{7.93}$$

É fácil "inverter" o sistema, e obter $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ em função de $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$:

$$\boldsymbol{e}_x = \cos(\theta)\boldsymbol{e}_r - \operatorname{sen}(\theta)\boldsymbol{e}_\theta, \tag{7.94}$$

$$\boldsymbol{e}_y = \operatorname{sen}(\theta)\boldsymbol{e}_r + \cos(\theta)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{7.95}$$

O procedimento para obter ∇ é na verdade bastante simples: nós partimos de

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

e em seguida escrevemos $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ em função de $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ utilizando (7.94)–(7.95); em seguida, nós precisamos expressar $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ em função (por sua vez) de $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta})$. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}\nabla = {} & [\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e}_\theta]\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \\ & [\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{e}_r + \cos\theta \boldsymbol{e}_\theta]\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned} \tag{7.96}$$

Neste ponto, calculamos as derivadas parciais,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{7.97}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{7.98}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \tag{7.99}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta, \tag{7.100}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-y}{r}\frac{1}{r} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},\end{aligned} \tag{7.101}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r}\frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{r}. \tag{7.102}$$

Substituindo agora em (7.96):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} &= [\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{e}_\theta]\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\
&\quad [\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta]\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \left[\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_r + \\
&\quad \left[(-\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \blacksquare
\end{aligned} \tag{7.103}$$

Exercícios Propostos

7.19 Obtenha um vetor tangente à superfície $z = \operatorname{sen}(xy)$ no ponto $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}, 1)$ e contido no plano vertical $x = y$.

7.20 Em um aquífero, a superfície freática é bem representada por

$$h(x,y) = h_0\left\{1 - \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{y}{2L}\right)^2\right]\right\},$$

onde h_0 e L são constantes com dimensão de comprimento. A condutividade hidráulica saturada é k, e a vazão específica $\boldsymbol{v}$ é dada pela lei de Darcy:

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla}h.$$

Calcule a derivada de $f(x,y) = |\boldsymbol{v}|$ na direção $\boldsymbol{t} = (1/\sqrt{2})(1,1)$ e no ponto $(x,y) = (L,L)$.

7.21 Em um artigo histórico que deu início à moderna Teoria do Caos [E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J Atmos Sci*, 1963, v. 20, p. 130–141], Edward Lorenz utilizou a função-corrente

$$\Psi(x,z,t) = A(t)\operatorname{sen}(\pi z)\operatorname{sen}(ax),\ 0 \le z \le 1,\ -\infty < x < +\infty,$$

onde $a > 0 \in \mathbb{R}$, para representar o escoamento em um fluido entre duas placas devido à convecção livre gerada por uma temperatura maior na placa inferior do que na superior. Sabendo que o campo de velocidade $\boldsymbol{u} = (u, 0, w)$ pode ser recuperado via

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \end{aligned}$$

calcule a vorticidade $\boldsymbol{\omega}(x,z,t) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$, e a divergência do campo de velocidade.

7.22 Um pouco de *background*: é fácil mostrar que

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{u^2+v^2}, \qquad u^2+v^2 \le h^2,$$

são equações paramétricas de um cone invertido cuja ponta se encontra na origem de um sistema de eixos cartesianos O_{xyz}. Se você adicionar a restrição $v \le 0$, isso representa a metade do cone, que fica sobre a região onde $y \le 0$. Suponha que esse meio-cone

seja uma barragem, sobre a qual age, em cada ponto, um vetor-tensão $\boldsymbol{t} = -p\boldsymbol{n}$, onde $\boldsymbol{n}$ é um vetor normal unitário apontando para *fora* do cone, e $p = p_0 + \rho g(h - z)$ é a pressão hidrostática. Calcule a componente vertical da força resultante $F_z = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{k})\, \mathrm{d}A$ da água sobre a barragem ($\boldsymbol{k}$ é o vetor unitário ao longo do eixo z; p_0 é a pressão atmosférica, ρ é a massa específica da água, g é a aceleração da gravidade, e $\mathscr{S}$ é a superfície da barragem).

Para facilitar sua vida, você pode usar o fato de que

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1 \right),$$

e que a integral de superfície de uma função escalar $f(\boldsymbol{r}(u,v))$ sobre $\mathscr{S}$ é

$$I_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} f(\boldsymbol{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

7.23 Em coordenadas cartesianas, se $u(x,y)$ é uma função no $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Obtenha $\nabla^2 u$ em coordenadas polares:

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

7.8 – Os teoremas de Gauss e Stokes

O teorema da divergência

O teorema da divergência, ou de Gauss, é

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A = \int_{\mathscr{C}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}V. \tag{7.104}$$

Uma motivação (e não uma *demonstração!*) muito simples para o teorema da divergência é mostrada na figura 7.13. A figura mostra um corpo $\mathscr{C}$ formado por quatro elementos $\delta\mathscr{C}_k$, $k = 1, \ldots, 4$. Por simplicidade, o "corpo" é desenhado em duas dimensões. No centro de cada elemento, a divergência é definida, localmente, por (7.70), e calculada com $\Delta V = \Delta x \Delta y \times 1$ e $\Delta A = 2\Delta x \times 1 + 2\Delta y \times 1$ (o fator 1 representa a dimensão z, não mostrada na figura). Em cada um desses (quatro) elementos, o fluxo de $\boldsymbol{u}$ atravessa suas quatro faces visíveis na figura. A integral de volume da divergência pode ser aproximada por uma soma de Riemman:

$$\sum_k (\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}) \Delta V_k = \sum_k \int_{\delta\mathscr{S}_k} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}A.$$

Observe como os fluxos através das faces *internas* se anulam perfeitamente (os espaços entre as fronteiras são apenas para facilitar a visualização; as fronteiras na verdade se sobrepõem): através dessas faces, o fluxo que *sai* de um elemento é o mesmo que *entra* no elemento fronteiriço. Os vetores que produzem esses fluxos estão plotados em cinza na figura 7.13. A soma das integrais de superfície de todos os elementos, portanto, deixa apenas os fluxos através das faces *externas* (cujos vetores estão plotados em preto), ou seja, das faces que compõem a superfície externa do corpo $\mathscr{C}$. Somando sobre todos os elementos e tomando o limite quando $\Delta A_k \to 0$, $\Delta V_k \to 0$, etc., obtemos (7.104).

Figura 7.13: Uma motivação simples para o teorema da divergência. Os espaços entre os diversos elementos são para facilitar a visualização; as fronteiras internas e externas na verdade se sobrepõem. A divergência é definida no centro (pontos pretos) de cada elemento.

Existe, é claro, um pouco de circularidade nesse argumento: afinal de contas, é evidente, *a posteriori*, que a definição (7.70) é *motivada* pelo próprio teorema da divergência! Isso não invalida o argumento: uma vez que o teorema tenha sido "descoberto", as definições e deduções são subsequentemente arranjadas para que a estrutura lógica seja coerente. Do nosso ponto de vista, o mais importante é a compreensão do teorema da divergência como uma maneira inteligente de lidar com os fluxos de $\boldsymbol{u}$ tanto do ponto de vista macroscópico (no corpo $\mathscr{C}$ como um todo, através de sua superfície $\mathscr{S}$), como em cada ponto do seu interior.

Exemplo 7.17 O princípio de conservação de massa para um volume de controle em Mecânica dos Fluidos é

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{n}\cdot[\rho\boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}A \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho \,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\nabla}\cdot[\rho\boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathscr{C}} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot[\rho\boldsymbol{v}]\right)\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

A lei de conservação vale para qualquer V, e o resultado é a equação diferencial de conservação de massa:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot[\rho\boldsymbol{v}] = 0.$$

As identidades de Green são uma aplicação direta do teorema da divergência. Sejam então $u(\boldsymbol{x})$ e $v(\boldsymbol{x})$ duas funções escalares da posição $\boldsymbol{x}$. Comecemos com

$$\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{n}\cdot[u\boldsymbol{\nabla}v]\,\mathrm{d}A = \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\nabla}\cdot[u\boldsymbol{\nabla}v]\,\mathrm{d}V.$$

Essa é uma aplicação direta do teorema da divergência. O lado esquerdo pode ser reescrito:

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{n}\cdot[u\boldsymbol{\nabla}v]\,\mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{S}} u[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}v]\,\mathrm{d}A\\ &= \oint_{\mathscr{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Do lado direito:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot[u\boldsymbol{\nabla}v] &= \boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left[u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]\boldsymbol{e}_i\\ &= (\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\\ &= \delta_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_i}\\ &= \boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v+u\nabla^2 v.\end{aligned}$$

Obtém-se assim a 1ª identidade de Green:

$$\oint_{\mathscr{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}A = \int_{\mathscr{C}}\left(\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v+u\nabla^2 v\right)\,\mathrm{d}V.$$

Trocando-se u por v na 1ª identidade de Green e subtraindo, obtém-se

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{S}} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}A &= \int_{\mathscr{C}}\left(\boldsymbol{\nabla}u\cdot\boldsymbol{\nabla}v+u\nabla^2 v\right)\,\mathrm{d}V,\\ \oint_{\mathscr{S}} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}A &= \int_{\mathscr{C}}\left(\boldsymbol{\nabla}v\cdot\boldsymbol{\nabla}u+v\nabla^2 u\right)\,\mathrm{d}V,\\ \oint_{\mathscr{S}}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\,\mathrm{d}A &= \int_{\mathscr{C}}\left(v\nabla^2 u-u\nabla^2 v\right)\,\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Esta última é a 2ª identidade de Green.

O teorema de Stokes

Teorema 7.5 (teorema de Stokes)

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{S}}(\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}])\,\mathrm{d}A \tag{7.105}$$

Ele é ilustrado na figura 7.14. O teorema de Stokes possui uma versão bidimensional, denominada teorema de Green, e ilustrada na figura 7.15. Considere um campo vetorial bidimensional

$$\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

definido dentro da região em cinza da figura. No caso bidimensional, a superfície $\mathscr{S}$ é plana e contida no plano Oxy, enquanto que a curva $\mathscr{L}$ também é plana. O vetor normal $\boldsymbol{n}$ em cada ponto de $\mathscr{S}$ agora é simplesmente $\boldsymbol{k}$. Calculemos inicialmente:

$$(\boldsymbol{n}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}]) = \boldsymbol{k}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}$$

Figura 7.14: O teorema de Stokes.

Figura 7.15: O teorema de Green.

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{k} \cdot \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \boldsymbol{k} \\
&= \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right].
\end{aligned}
$$

Ao mesmo tempo,

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (P, Q) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

O teorema de Green, portanto, é

$$\iint_{\mathscr{S}} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \oint_{\mathscr{L}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \ \blacksquare$$

Campos irrotacionais

Se $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, dizemos que $\boldsymbol{F}$ é um campo *irrotacional*. Com o teorema de Stokes, a consequência é imediata:

$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}])\, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

Portanto, se $\boldsymbol{F}$ é um campo irrotacional,

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

sobre qualquer circuito fechado $\mathscr{L}$.

Agora, todo circuito fechado pode ser decomposto em uma linha aberta $\mathscr{L}_1$ de um ponto A até um ponto B, e o restante do circuito em outra linha aberta $\mathscr{L}_2$ de B de volta a A. Temos:

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{L}_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathscr{L}_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \;\Rightarrow$$
$$\int_{\mathscr{L}_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\mathscr{L}_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Ambas as integrais acima iniciam-se em A e terminam em B. De fato, a integral de $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ é *independente* do caminho entre A e B. Seja $\boldsymbol{r}_0$ o vetor-posição de A, e $\boldsymbol{r}$ o vetor-posição de B. Isso significa que existe uma função escalar Φ tal que, para $\boldsymbol{r}_0$ fixo,

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

depende apenas da posição $\boldsymbol{r}$ (o sinal de menos é meramente convencional). Diferenciando ambos os lados,

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \;\Rightarrow$$
$$\boldsymbol{F} = -\nabla\Phi.$$

Em geral, nós dizemos que Φ é o *potencial* de $\boldsymbol{F}$.

Por exemplo, quando uma força pode ser escrita como o gradiente de um potencial, dizemos que ela é *conservativa*. De nossa discussão, segue-se imediatamente que o trabalho de forças conservativas não depende do caminho.

Em Mecânica dos Fluidos, se um campo de velocidade $\boldsymbol{v}$ é irrotacional ($\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$), também segue-se de nossa discussão que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\Phi$$

(em Mecânica dos Fluidos é convencional utilizar-se o sinal +). Isso, combinado com a equação de conservação de massa sob a hipótese de incompressibilidade, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, produz

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi = 0,$$

e escoamentos incompressíveis e irrotacionais podem ser modelados resolvendo-se a equação acima (equação de Laplace) para o potencial de velocidade Φ.

Exercícios Propostos

7.24 Em um fluido, o campo de velocidade

$$\boldsymbol{u} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 4z\boldsymbol{k}$$

atravessa região esférica do espaço

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Calcule

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}S,$$

onde $\mathscr{S}$ é a superfície da esfera, e $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal apontando para fora da superfície em cada ponto de $\mathscr{S}$.

7.25 A equação integral da hidrostática pode ser escrita como

$$\int_V \rho \boldsymbol{g}\, dV - \int_S p\boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{0}.$$

a) Interprete fisicamente a equação: o que as duas integrais significam? Que lei da física elas exprimem?

b) Utilizando o teorema da divergência, deduza a forma diferencial, utilizando coordenadas cartesianas e notação indicial.

7.26 Se $\boldsymbol{u}$ é a função vetorial

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ \boldsymbol{r} = (x, y, z) &\mapsto \boldsymbol{u} = (y^2 + z^3, x^3 + z^2, x^2 + y^3), \end{aligned}$$

calcule

$$I_{\mathscr{S}} = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})\, \mathrm{d}A$$

sobre a superfície $\mathscr{S}$ formada pelo prisma reto definido pelos vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$.

7.27 Se $\boldsymbol{F} = \big(y, -x, \operatorname{senh}(x^2 + y^2)\big)$, calcule calcule

$$I_{\mathscr{S}} = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}]\, \mathrm{d}A$$

sobre a superfície $\mathscr{S}$ da semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Considere que o vetor unitário $\boldsymbol{n}$ normal a $\mathscr{S}$ aponta para "fora" da semiesfera.

7.28 Dado o teorema de Stokes,

$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}])\, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

faça $\boldsymbol{F} = \phi\boldsymbol{\gamma} = \phi\gamma_j\boldsymbol{e}_j$, onde $\boldsymbol{\gamma} = (1, 1, 1)$ e $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ é um campo escalar, e mostre (usando *obrigatoriamente* notação indicial) que

$$\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi]\, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \phi\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

7.9 – Máximos e mínimos de funções de mais de uma variável

Seja f uma função de n variáveis do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto y = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Definição 7.1 $f(x_1, \ldots, x_n)$ possui um máximo em $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ se $f(\boldsymbol{x}_0) > f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ em uma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$.

Definição 7.2 $f(x_1, \ldots, x_n)$ possui um mínimo em $\boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ se $f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x}$ em uma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$.

Máximos ou mínimos de uma função são chamados de *extremos*. Cada ponto $\boldsymbol{x}_0$ correspondente é um *ponto de extremo*.

Exemplo 7.18 A função

$$f(x, y) = (200 - (x^2 + y^2))/100$$

possui um máximo em $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Teorema 7.6 (Piskounov, 1969, Cap. VIII, Seção 17, Teorema 1) Se $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto de extremo da função f, então ou $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, ou o $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0)$ não existe.

Definição 7.3 Dizemos que $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto crítico de f se $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.

É relativamente fácil intuir "graficamente" o Teorema 7.6: na figura 7.12, note que se em um determinado ponto (x_0, y_0) $\boldsymbol{\nabla} f$ existe e é $\neq \mathbf{0}$, então sempre podemos caminhar no sentido de $\boldsymbol{\nabla} f$ para valores maiores de f, ou no sentido contrário para valores menores.

Note também que a nulidade ou não-existência do gradiente é uma condição necessária para a ocorrência de um extremo, porém não suficiente; e que portanto um ponto crítico pode não ser um ponto de extremo. Por exemplo, a função do exemplo 7.12,

$$f(x, y) = (100 + x^2 - y^2)/100,$$

é tal que $\boldsymbol{\nabla} f(0, 0) = \mathbf{0}$; porém, $(0, 0)$ não é nem um ponto de máximo nem de mínimo. Neste caso, dizemos que $(0, 0)$ é um *ponto de sela*.

Surge portanto a questão: se $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$, e portanto $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto crítico, como saber se $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto de máximo, de mínimo, ou de sela? Suponha que f

possui derivadas pelo menos até ordem 2 e Considere uma expansão em série de Taylor até ordem 2 em torno de $\boldsymbol{x}_0$:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= f(x_{0i}) + \frac{\partial f(x_{0(i)})}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x_{0(i)})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots \\ &= f(x_{0i}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x_{0(i)})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots \end{aligned} \tag{7.106}$$

pois $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$.

Note que estamos utilizando sistematicamente notação indicial em (7.106), e que explicitamos um índice que não indica soma entre parênteses ((i)). Note também que a *matriz Hessiana*

$$H_{E,ij} = \frac{\partial^2 f(x_{0i})}{\partial x_i \partial x_j} \tag{7.107}$$

é simétrica: existem n autovetores mutuamente perpendiculares, e n autovalores reais. Inicialmente, nós associamos as coordenadas x_i com a base canônica E, e enfatizamos esse fato em (7.107). Mas é muito mais simples entender as coisas na base (que também é ortogonal) F dos autovetores! Sejam agora, portanto,

$$[\boldsymbol{x}_0]_F = \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \\ \vdots \\ \xi_{0n} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [\boldsymbol{x}]_F = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

as coordenadas de $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{x}$ na base F; nessa base, a matriz hessiana é diagonal (seção 6.2):

$$H_{F,ij} = \frac{\partial^2 f(\xi_{0i})}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \lambda_{(i)}\delta_{ij}, \tag{7.108}$$

onde os $\lambda_i s$ são os autovalores da transformação $\boldsymbol{H}$. Abusando ligeiramente da notação, utilizemos $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ para indicar a *a mesma função* f porém nas coordenadas da base F. Expandido em série de Taylor temos agora,

$$\begin{aligned} f(\xi_i) &= f(\xi_{0i}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(\xi_{0(i)})}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi_i - \xi_{0i})(\xi_j - \xi_{0j}) + \dots \\ &= f(\xi_{0i}) + \frac{1}{2!}\lambda_{(i)}\delta_{ij}(\xi_i - \xi_{0i})(\xi_j - \xi_{0j}) + \dots \\ &= f(\xi_{0i}) + \frac{1}{2!}\lambda_{(i)}(\xi_i - \xi_{0i})(\xi_i - \xi_{0i}) + \dots \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta\xi_i = (\xi_i - \xi_{0i})$ e escrevendo por extenso, portanto,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta\xi_i^2 + \dots \tag{7.109}$$

A situação agora é bastante clara. Em uma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$ em que (7.109) seja suficientemente acurada, se todos os $\lambda_i s$ forem positivos, $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)$, e portanto $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto de mínimo. Analogamente, se todos os $\lambda_i s$ forem negativos, $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0)$, e portanto $\boldsymbol{\xi}_0$ é um ponto de mínimo. Caso contrário, $\boldsymbol{H}$ ou é semidefinida (positiva ou negativa) ou é indefinida. Nesses três últimos casos, existem um ou mais autovalores nulos, e $\boldsymbol{H}$ é dita *singular*. Em resumo, nós agora temos o Lambers (2014):

Teorema 7.7

Se $\boldsymbol{H}$ é positiva definida em $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0$ é um mínimo local.

Se $\boldsymbol{H}$ é negativa definida em $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0$ é um máximo local.

Se $\boldsymbol{H}$ possui autovalores positivos *e* negativos, $\boldsymbol{x}_0$ é um ponto de sela.

Se $\boldsymbol{H}$ é *singular* (isto é, se existem autovalores nulos), nada se pode informar, e $\boldsymbol{x}_0$ pode ser um ponto de máximo, de mínimo ou de sela, mas isso precisa ser definido por outras informações sobre f.

8

Equações diferenciais ordinárias

Este capítulo contém uma rápida revisão de métodos para resolver equações diferenciais ordinárias. Aspectos mais teóricos, tais como teoremas de existência e unicidade, são deixados de lado. Nós vamos nos dedicar essencialmente a "resolver problemas".

8.1 – Introdução

Uma equação algébrica pode ser linear ou não-linear:

$$
\begin{array}{lll}
ax + b = 0 & x = -\dfrac{b}{a} & \text{linear,} \\
[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{b}] & [\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{A}]^{-1}[\boldsymbol{b}] & \text{linear,} \\
ax^2 + bx + c = 0 & x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{não-linear.}
\end{array}
$$

No caso de uma equação algébrica deseja-se encontrar um valor (numérico ou literal) para x.

Já no caso de uma equação diferencial, *a incógnita é uma função*. A equação diferencial mais simples do mundo é

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Neste capítulo nós estudaremos *equações diferenciais ordinárias*, ou EDO*s*. Equações diferenciais ordinárias são equações em que aparecem derivadas em relação a uma única variável independente. Quando mais de uma variável independente está presente, ou seja, quando existem derivadas parciais em relação a mais de uma variável, a equação é denominada equação diferencial parcial (EDP). EDP*s* serão estudadas mais à frente, principalmente nos capítulos 12 e 18.

Exemplo 8.1 Se uma viga com comprimento L tem um carregamento $w(x) = w_0 \frac{x}{L}$, ache a expressão para o esforço cortante $V(x)$, sabendo que $V(0) = \frac{w_0 L}{3}$, e que $w = \mathrm{d}V/\mathrm{d}x$. Discuta o uso da variável de integração. Note que a solução exige a imposição de uma *condição inicial*, $V(0) = \frac{w_0 L}{3}$.

SOLUÇÃO

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} &= w_0 \frac{x}{L}, \\
\int_{V(\xi=0)}^{V(\xi=x)} \mathrm{d}V &= \frac{w_0}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=x} \xi\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
$$

$$V(x) - \frac{w_0 L}{3} = \frac{w_0 x^2}{2L},$$
$$V(x) = \frac{w_0 L}{3} + \frac{w_0 x^2}{2L} \blacksquare \tag{8.1}$$

Como nós desejávamos $V(x)$, tivemos que mudar a variável de integração de x para ξ. A condição inicial, $V(0)$, apareceu naturalmente ao integrarmos $\mathrm{d}V$.

Exemplo 8.2 A 2ª lei de Newton é

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$$

Considere o movimento de uma partícula com $v(t = 0) = +v_0$ e $x(t = 0) = 0$ ao longo de uma linha reta (o eixo x) com uma força de resistência $F = -kv$. Calcule $v(t)$ e $x(t)$.

SOLUÇÃO

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

Essa é uma equação diferencial separável: é possível separar v e t em cada lado da equação:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\mathrm{d}t,$$
$$m\int_{u=v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -k\int_{\tau=0}^{t} \mathrm{d}\tau = -kt,$$
$$m\ln\frac{v(t)}{v_0} = -kt,$$
$$\ln\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{k}{m}t,$$
$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \blacksquare$$

O que aconteceu com a fórmula

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$$

que nós aprendemos em Cálculo? Para a resposta, é necessário olharmos para o gráfico de $y = 1/x$. A figura 8.1 mostra que, *por definição*,

$$\ln(x) \equiv \int_1^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

No entanto, está claro que a definição só vale se $x > 0$. Pela simetria da funcão, entretanto, é evidente que, se $x < 0$, então:

$$\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \int_{1}^{-x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \ln(-x) = \ln|x|.$$

Note também que existe uma *singularidade* na função $y = 1/x$ no ponto $x = 0$: essa singularidade impede que se calcule a integral

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

quando $ab < 0$. Em outras palavras: *ou* ($a > 0$ e $b > 0$), *ou* ($a < 0$ e $b < 0$). No primeiro caso,

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}.$$

Figura 8.1: Integração de $1/x$ sobre os ramos positivo e negativo

No segundo caso ($a < 0$ e $b < 0$),

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-b) - \ln(-a) = \ln\frac{(-b)}{(-a)} = \ln\frac{b}{a}$$

novamente! Daqui por diante, portanto, será relativamente simples nos despreocuparmos com o módulo, se seguirmos a seguinte regra: $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$, desde a e b sejam *ambos* positivos ou *ambos* negativos.
Voltando agora à questão original,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},\\
\mathrm{d}x &= v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,dt\\
\mathrm{d}x &= -\frac{mv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\left(-\frac{k}{m}\,dt\right),\\
\int_{\xi=0}^{x}\mathrm{d}\xi &= -\frac{mv_0}{k}\int_{u=0}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{e}^{u}\,du,\\
x(t) &= \frac{mv_0}{k}\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

8.2 – Classificação

A solução de equações diferenciais ordinárias depende de reconhecermos certas características nessas equações. Em particular, certas classes de soluções existem ou não dependendo de características tais como sua *ordem*, se a equação é linear ou não, e se existem termos forçantes (se a equação é *homogênea* ou não).

De maneira *geral*, podemos escrever uma equação diferencial na forma

$$\mathscr{D}y = f(x). \tag{8.2}$$

Cuidado, porque isso nem sempre é possível. Mas quando é, abre caminho para classificarmos a equação diferencial. Em (8.2), $\mathscr{D}$ é um *operador diferencial*. Alguns exemplos são:

$$\mathscr{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Nesse caso, a equação é simplesmente

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \tag{8.3}$$

que vimos no começo deste capítulo. Eis agora um segundo exemplo:

$$\mathscr{D} = x + y(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x};$$

esse operador nos leva à equação diferencial

$$xy(x) + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x). \tag{8.4}$$

Continuando, se

$$\mathscr{D} = x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2,$$

a equação diferencial será

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x^2y = f(x); \tag{8.5}$$

finalmente, se

$$\mathscr{D} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1,$$

a equação diferencial será

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = f(x). \tag{8.6}$$

Utilizando portanto (8.2), vamos rever brevemente a classificação de equações diferenciais ordinárias. Para começar, a *ordem* de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada presente na equação diferencial. Nos exemplos acima, (8.3) e (8.4) são EDO*s* de ordem 1, enquanto que (8.5) e (8.6) são EDO*s* de ordem 2.

EDO*s* homogêneas e não-homogêneas

Quando $f(x) = 0$ em (8.2), nós dizemos que a equação é homogênea. Caso contrário, ela é não-homogênea. Exemplos de equações homogêneas são

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2y = 0,$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 3xy = 0.$$

Exemplos de equações não-homogêneas são

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x + x^3,$$
$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \operatorname{sen}(x).$$

Da mesma forma que as equações algébricas, as equações diferenciais podem ser classificadas em:

EDO*s* lineares e não-lineares

Existe um enorme corpo de conhecimento relativo a equações lineares. Uma EDO é linear quando o operador $\mathscr{D}$ em (8.2) é linear. A definição de um operador linear é a mesma de uma transformação linear; na verdade, um operador linear é um caso particular de uma transformação linear! Portanto, $\mathscr{D}$ é linear se

$$\mathscr{D}(y_1 + y_2) = \mathscr{D}y_1 + \mathscr{D}y_2; \tag{8.7}$$

$$\mathscr{D}(\alpha y) = \alpha \mathscr{D}y. \tag{8.8}$$

Na prática, nós reconhecemos uma EDO linear quando $y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ aparecem todas com expoente 1, *sem* produtos entre si. Exemplos de EDO*s* lineares são

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{L} = \frac{y_0}{L}\mathrm{e}^{\frac{x}{L}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = w(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + \frac{x}{L^4}y = \frac{y_0}{L^3}.$$

Exemplos de EDO*s* não-lineares são

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{y_0}{L^2}y = \frac{y_0^2}{L^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{L}},$$

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y_0^2\frac{x^4}{L^5} = \frac{y_0^2}{L}.$$

EDO*s* lineares a coeficientes constantes

Uma EDO linear possui coeficientes constantes quando comparecem apenas $y(x)$ e suas derivadas em $\mathscr{D}$ (que agora estamos supondo se tratar de um operador *linear*), mas nenhuma outra função. Exemplos de EDO*s* lineares a coeficientes constantes são

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y = f(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

A maior parte do restante deste capítulo lida com a soluções de equações diferenciais ordinárias *lineares*. Para EDO*s* de ordem 1, é suficiente que a equação seja linear para que seja possível obter, em princípio, soluções. Já para EDO*s* de ordem 2 ou mais alta, a linearidade em si não garante uma solução "padrão". Neste capítulo, nós estudamos a solução de EDO*s* lineares de ordem 2 (ou mais alta) apenas para dois casos simples: o caso de coeficientes constantes, e o caso da equação de Euler.

Exercícios Propostos

8.1 Classifique *completamente* cada uma das equações diferenciais a seguir.

a)

$$y''' + xy = 1$$

b)

$$(y')^2 + y = 0$$

c)
$$x^2y'' + xy' + y = 1$$

d)
$$y'' - 2y' + y = \operatorname{sen}(x)$$

8.3 – Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1

Por definição, todas as EDO*s* lineares homogêneas são *separáveis*. Considere por exemplo
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}y = 0.$$
É possível *separar* as variáveis x e y dos dois lados do sinal de igual, como se segue:
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x}y,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{1+x},\\
\ln|y| &= \ln|1+x| + k_1,\\
|y| &= \mathrm{e}^{k_1}\,|1+x|\\
&= C_1\,|1+x| \;\Rightarrow\\
y &= \pm C_1\,|1+x|\\
&= (\pm C_1)\,(\pm\,[1+x])\\
&= C\,[1+x]\,.
\end{aligned}$$

Estude cuidadosamente a forma como lidamos com o $|y|$ no exemplo acima: ela é a forma correta de "eliminarmos" o módulo, quando, ao contrário do que aconteceu no Exemplo 8.2, não temos informação *a priori* sobre os sinais de x e y.

A verdadeira ação, entretanto, está em resolver as equações lineares de ordem 1 *não-homogêneas*. Considere, portanto, a seguinte variante do problema acima:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{1+x}.$$
Uma das fontes de confusão para os alunos que estão aprendendo a resolver EDO*s* é que existem várias formas na literatura (vários "métodos") de resolver a equação acima. Nós vamos começar pelo que talvez seja o mais geral, denominado *método de variação de constantes*. A vantagem do método é que ele é capaz de resolver equações diferenciais lineares não-homogêneas de qualquer ordem. A desvantagem é que ele assume formas ligeiramente diferentes em cada caso. Portanto, *procure identificar as diferenças* quando nós o utilizarmos, por exemplo, em equações de ordem 2. Embora o *nome* seja o mesmo, os detalhes mudam!

No caso de ordem 1, a essência do método é a seguinte. Deseja-se resolver (8.2). Nós sabemos que equações lineares de ordem 1 homogêneas são sempre separáveis; portanto, é *sempre* possível resolver a *equação homogênea associada*,
$$\mathscr{D}y_h = 0,$$
e obter $y_h(x)$. Tentemos agora uma solução
$$y(x) = u(x)y_h(x),$$
onde $u(x)$, que é uma função desconhecida a determinar, toma o lugar da constante de integração da EDO (C no exemplo acima). Essa é a essência do método de

variação de constantes. O método consiste em substuir $u(x)y_h(x)$ na equação: a regra da derivada do produto então sempre produzirá um termo

$$\mathscr{D}y_h = 0$$

e o restante será uma EDO em u, *mais simples que a original*: via de regra, a equação resultante em u será separável. Basta de teoria, vamos ao nosso exemplo: para resolver

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{1+x}.$$

Tentamos

$$y = uy_h,$$

onde $y_h(x) = (1+x)$, e substituímos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}[u(x)y_h]}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}(uy_h) &= \frac{1}{1+x} \\
u(x)\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + y_h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}(uy_h) &= \frac{1}{1+x} \\
u(x)\left[\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}y_h(x)\right] + y_h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x}.
\end{aligned}$$

Neste ponto, note que o termo entre colchetes é *exatamente a equação diferencial homogênea associada*, da qual y_h é solução: o termo entre colchetes é nulo, e resta:

$$\begin{aligned}
y_h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x}, \\
(1+x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x}, \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{(1+x)^2}, \\
u(x) &= -\frac{1}{1+x} + k_1.
\end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = (1+x)\left[-\frac{1}{1+x} + k_1\right] \blacksquare$$

Vale a pena observar que Maxima é capaz de fazer essas coisas bem mais rapidamente que um ser humano:

```
(%i1) 'diff(y,x) - y/(1+x) = 1/(1+x);
                                  dy      y        1
(%o1)                             -- - ----- = -----
                                  dx    x + 1    x + 1
(%i2) ode2(%,y,x);
                                                  1
(%o2)                        y = (x + 1) (%c - -----)
                                                x + 1
```

Note ainda que, expandindo a solução geral, temos

$$y(x) = k_1(1+x) - 1$$

A solução geral, portanto, é da forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{8.9}$$

onde $y_p(x)$, uma solução *particular*, é livre de constantes de integração. No caso de nosso exemplo, $y_p(x) = -1$.

Esse na verdade é um resultado *geral*, que vale para equações lineares de qualquer ordem! De fato, considere novamente (8.2) para um operador linear $\mathscr{D}$, e substitua y por $y_h + y_p$, onde por hipótese y_h é a solução da equação homogênea associada. Então,

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(y_h + y_p) &= f(x),\\ \mathscr{D}y_h + \mathscr{D}y_p &= f(x),\\ \mathscr{D}y_p &= f(x).\end{aligned}$$

Em outras palavras, no caso linear, se conseguirmos resolver a equação homogênea associada a (8.2); e se conseguirmos encontrar *uma* solução particular $y_p(x)$, teremos a solução geral.

Uma *segunda forma* de resolver EDO*s* lineares de ordem 1 (ou seja: de fazer *a mesma coisa* que já fizemos com o método de variação de constantes) é a seguinte: postule

$$y = uv,$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são *duas* funções a determinar. No nosso exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}(uv) &= \frac{1}{1+x},\\ u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}(uv) &= \frac{1}{1+x}.\end{aligned}$$

O método consiste agora em colocar uma das duas variáveis em evidência:

$$u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x}.$$

Agora, *force* o termo entre colchetes a ser nulo: isso nada mais é do que a equação homogênea associada, e portanto,

$$v(x) = k_1(1+x).$$

O que restou foi

$$\begin{aligned}v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x},\\ k_1(1+x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+x},\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{k_1}\frac{1}{(1+x)^2},\\ u(x) &= -\frac{1}{k_1(1+x)} + k_2,\\ y(x) &= u(x)v(x)\\ &= \left[-\frac{1}{k_1(1+x)} + k_2\right]k_1(1+x)\\ &= -1 + (k_1k_2)(1+x) = -1 + C(1+x).\end{aligned}$$

Observações:

1) Os dois métodos são essencialmente a *mesma* coisa. A menos das constantes multiplicativas k_1 e k_2, v do segundo método pode ser identificado com y_h do primeiro, e u do segundo método com u do primeiro.

2) No segundo método, embora nós resolvamos duas equações diferenciais, para u e v, e obtenhamos duas constantes de integração k_1 e k_2, note como a solução final envolve apenas uma constante independente, $C = k_1 k_2$, como tem que ser, uma vez que a ordem da equação é 1. Quando resolvermos equações diferenciais de ordem 2, aparecerão duas constantes independentes de integração.

Exemplo 8.3 Resolva

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x.$$

SOLUÇÃO
A equação homogênea é

$$\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + y_h &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}y_h}{y_h} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
\frac{\mathrm{d}y_h}{y_h} + \frac{\mathrm{d}x}{x} &= 0,\\
\ln|x| + \ln|y_h| &= k_1,\\
\ln|xy_h| &= k_1,\\
|xy_h| &= \mathrm{e}^{k_1} = k_2,\\
xy_h &= \pm k_2 = C,\\
y_h &= \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

O método de variação de constantes consiste agora em fazer:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{u(x)}{x},\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{xu' - u}{x^2},\\
x\frac{xu' - u}{x^2} + \frac{u}{x} &= x,\\
\frac{1}{x}\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\right) + \frac{u}{x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x,\\
u(x) &= \frac{x^2}{2} + C,\\
y(x) &= \frac{1}{x}u = \frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2} + C\right] = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}.
\end{aligned}$$

Observe que a solução tem a forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde $y_p(x) = x/2$ é a solução particular livre de constantes de integração.

Exemplo 8.4 Obtenha a solução da equação diferencial de crescimento populacional (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \lambda P\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right), \qquad P(0) = P_0.$$

SOLUÇÃO
Essa é uma equação separável:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{P(1 - P/P_\infty)} &= \lambda \mathrm{d}t, \\
\int_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}x}{x(1 - x/P_\infty)} &= \int_0^t \lambda \, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Escrevemos o lado esquerdo em frações parciais; no desenvolvimento seguinte, nós supomos que $P_0 \leq P < P_\infty$ (o que se verifica na última linha):

$$\begin{aligned}
\int_{P_0}^{P} \left[\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{-\mathrm{d}(x/P_\infty)}{1 - x/P_\infty}\right] &= \lambda t, \\
\ln(P) - \ln(P_0) - \left[\ln\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) - \ln\left(1 - \frac{P_0}{P_\infty}\right)\right] &= \lambda t, \\
\ln \frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} &= \lambda t, \\
P(t) &= \frac{P_\infty}{\left[\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right] \mathrm{e}^{-\lambda t} + 1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 8.5 Mostre que

$$y' = f(x/y)$$

pode ser transformada em uma equação diferencial separável por meio da mudança de variável

$$w(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

SOLUÇÃO
Se $w = y/x$,

$$\begin{aligned}
y &= xw(x), \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + w, \\
x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + w &= f(1/w), \\
x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= f(1/w) - w, \\
\frac{dw}{f(1/w) - w} &= \frac{\mathrm{d}x}{x},
\end{aligned}$$

que é uma equação diferencial separável ■

Exemplo 8.6 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = -by^2, \qquad y(0) = y_0,$$

$a > 0$, $b > 0$.

SOLUÇÃO
Faça $y = uv$:

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + auv = -bu^2v^2,$$
$$\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + av\right]u + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -bu^2v^2.$$

Obrigue o termo dentro dos colchetes a ser nulo, e resolva:

$$v = v_0\mathrm{e}^{-ax}.$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^2v,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= -bv_0\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} &= -\frac{bv_0}{a}\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right],\\
\frac{u - u_0}{uu_0} &= -\frac{b}{a}v_0\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right],\\
u - u_0 &= -\frac{b}{a}u_0v_0\left[1 - \mathrm{e}^{-ax}\right]u,
\end{aligned}$$

(note que $y_0 = u_0v_0$)

$$u\left[1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - \mathrm{e}^{-ax}\right)\right] = u_0,$$

donde

$$y = uv = \frac{y_0\mathrm{e}^{-ax}}{1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - \mathrm{e}^{-ax}\right)} \blacksquare$$

Exemplo 8.7 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x + 3\mathrm{e}^y}.$$

SOLUÇÃO

Muito difícil em $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, este problema se torna muito mais fácil se:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x + 3\mathrm{e}^y,$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x = 3\mathrm{e}^y$$

Faça (por exemplo) $x = uv$:

$$\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right] - uv = 3\mathrm{e}^y,$$

$$
\begin{aligned}
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= 3\mathrm{e}^y,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} &= v,\\
v &= k\mathrm{e}^y \;\Rightarrow\\
v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= 3\mathrm{e}^y,\\
k\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= 3\mathrm{e}^y,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{3}{k} \;\Rightarrow\\
u &= \frac{3}{k}y + k',\\
x = uv &= \left[\frac{3}{k}y + k'\right]k\mathrm{e}^y,\\
x &= 3y\mathrm{e}^y + C\mathrm{e}^y \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios Propostos

8.2 Obtenha a solução geral das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a seguir:

a)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2y = \mathrm{e}^{-x^3/3}\,\mathrm{sen}(x).$$

b)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-x}y = 0$$

c)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = x$$

8.3 Resolva:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1.$$

8.4 Obtenha a solução geral da equação diferencial
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}.$$

8.5 Encontre a solução geral de cada uma das equações a seguir:

a)
$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - y^5 + 3x = 0,$$

b)
$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = x^3y^2,$$

c)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y^2 - y)x\mathrm{e}^x.$$

8.6 Se $P(t)$ é a concentração de uma substância poluidora em uma lagoa e $Q(t)$ é a carga de poluição lançada, a equação diferencial que rege $P(t)$ é

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}P = \frac{1}{T}Q.$$

Para $P(0) = P_0$, faça a substituição obrigatória $P = uv$ e obtenha a solução em função de P_0 e Q.

8.7 Encontre a solução geral da equação diferencial

$$\frac{1}{x}y' + y = 0$$

em termos de funções elementares, separando as variáveis. Verifique que a solução é uma função par.

8.8 Resolva

$$(1+t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (1+2t)x = 0.$$

8.9 Resolva as seguintes equações:

a)

$$y' + 4y = 8$$

b)

$$y^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + xy - 4y^2 = 1$$

8.10 Resolva

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x^2.$$

8.11 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \operatorname{sen}(3t), \qquad x(0) = 1.$$

8.12 Encontre a solução geral das seguintes EDO*s* de ordem 1:

a)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x,$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-2x}y = 0,$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \operatorname{sen}(2x).$$

8.13 Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x).$$

8.14 Resolva a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 1.$$

8.4 – Equações de ordem 1 linearizáveis

Às vezes é possível produzir uma transformação de variáveis que converte uma equação diferencial não-linear em uma equação linear correspondente. Não há um método geral para isso, e o sucesso depende inteiramente da sorte e de um certo "dom" de "ver" transformações que funcionem. No entanto, uma vez descoberto um truque, ele pode ser catalogado e utilizado daí por diante. Nesta seção, nós vamos estudar dois casos que se tornaram bem conhecidos.

A equação diferencial de Bernoulli

A equação diferencial de Bernoulli é uma equação diferencial não-linear da forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n. \tag{8.10}$$

A equação é facilmente linearizável. Reescreva-a como

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Note o seguinte:

$$z = y^{1-n} \qquad \Rightarrow \tag{8.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{8.12}$$

Portanto, podemos usar (8.11)–(8.12) em (8.10) como se segue:

$$\begin{aligned}(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (1-n)p(x)y^{1-n} &= (1-n)q(x),\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)p(x)z &= (1-n)q(x).\end{aligned} \tag{8.13}$$

(8.13) é agora uma equação diferencial ordinária linear e não-homogênea em z, com solução padrão. Uma vez resolvida a equação para $z(x)$, obtém-se $y(x)$ via (8.11).

Exemplo 8.8 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = y^2\,\mathrm{sen}(x), \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO

Essa é uma equação de Bernoulli, e devemos procurar resolvê-la em termos de $z = y^{1-2} = y^{-1}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{z},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação original:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{z^2}\,\mathrm{sen}(x),\\ -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z &= \mathrm{sen}(x).\end{aligned}$$

Prosseguimos com Maxima, para poupar tempo:

```
(%i1) eq : -'diff(z,x) + z - sin(x) ;
                                   dz
(%o1)                            - -- + z - sin(x)
                                   dx
(%i2) ode2(eq,z,x);
                                     - x
                            x        %e     (- sin(x) - cos(x))
(%o2)                 z = %e  (%c - -------------------------)
                                                 2
```

Donde

$$z(x) = Ce^x + \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right],$$
$$y(x) = \frac{1}{Ce^x + \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right]},$$
$$1 = \frac{1}{C + 1/2} \Rightarrow C = 1/2 \blacksquare$$

Exemplo 8.9 Resolva

$$2xyy' + y^2 = 2x.$$

Esta é uma equação de Bernoulli com $n = -1$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2x}y = y^{-1}.$$

Fazendo $v = y^2$, encontramos a equação linear

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}v = 2,$$

cuja solução (detalhes omitidos) é

$$v(x) = x + \frac{C}{x} \;\Rightarrow\; y(x) = \left[x + \frac{C}{x}\right]^{1/2} \blacksquare$$

Exemplo 8.10 A equação não-linear de Boussinesq,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right] + 2\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} = 0, \qquad \phi(0) = \phi_0, \qquad \phi(\infty) = 1,$$

foi estudada no capítulo 4 (ver a equação 4.38). Sua solução numérica (para $\phi_0 = 0$) está mostrada na figura 4.19.
O comportamento *assintótico* da solução é um assunto fascinante: com o que se "parece" $\phi(\xi)$ para ξ "grande"? Uma forma de estudar isso é expandir a derivada,

$$\phi\phi'' + (\phi')^2 + 2\xi\phi' = 0,$$

e em seguida substituir ϕ por 1, já que ξ é grande. Ficamos com

$$\phi_a'' + (\phi_a')^2 + 2\xi\phi_a' = 0.$$

O índice a enfatiza que ϕ_a é uma *aproximação* para ϕ quando ξ é grande. Essa é uma equação de ordem 2, mas que agora contém apenas derivadas; é possível *reduzir a ordem*:

$$f(\xi) = \phi_a'(\xi),$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi f = -f^2.$$

Essa última é uma equação de Bernoulli. Fazemos

$$\begin{aligned} z(\xi) &= \frac{1}{f(\xi)}; \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}. \end{aligned}$$

Reescrevemos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} - \frac{2\xi}{f^2}f &= 1, \\ -\frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} - \frac{2\xi}{f} &= 1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi z &= 1. \end{aligned}$$

A solução para $z(\xi)$ é

$$z(\xi) = \mathrm{e}^{\xi^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\xi) + C\right].$$

Para f:

$$f(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2}}{(\sqrt{\pi}/2)\,\mathrm{erf}(\xi) + C}.$$

Integrando essa última expressão em relação a ξ,

$$\phi_a(\xi) = \ln\left[(\sqrt{\pi}/2)\,\mathrm{erf}(\xi) + C\right] + D.$$

A abordagem acima é essencialmente a utilizada por Dias et al. (2014) para estudar o comportamento assintótico de (4.38). Note que esse resultado *não* é uma solução de (4.38), mas sim uma *aproximação assintótica* da solução $\phi(\xi)$ para ξ grande. O significado de ξ "grande" também é relativo: para $\phi_0 = 0{,}5$ e C e D convenientemente ajustados, Dias et al. (2014) constataram que a aproximação é muito boa para $\xi \gtrsim 1{,}5$.

A equação de Riccati

É uma equação diferencial não-linear de ordem 1 com a forma geral

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = q_0(x) + q_1 y(x) + q_2 y^2(x).$$

Uma solução geral fechada não existe. No entanto, se $q_0(x) = 0$, a equação reduz-se imediatamente a uma equação de Bernoulli. Além disso, se for possível encontrar uma solução particular $y_p(x)$, é possível fazer:

$$\begin{aligned} y &= y_p + u; \\ \frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= q_0(x) + q_1(x)y_p + q_1(x)u + q_2(x)(y_p^2 + u^2 + 2y_p u); \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \left[q_1(x) + 2q_2(x)y_p(x)\right]u + q_2(x)u^2. \end{aligned}$$

Essa última é uma equação de Bernoulli em u, e pode ser resolvida da forma mostrada nesta seção ■

A eliminação da variável independente

Uma outra técnica que às vezes é frutífera é a eliminação da variável independente. Esta técnica vai aparecer na solução da equação não-linear de Boussinesq na seção 18.3, assim como no exemplo 18.8. Neste último, nós encontraremos a EDO não-linear, não-homogênea, de ordem 2

$$c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}, \tag{8.14}$$

$$R(0) = R_0, \tag{8.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(0)}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{8.16}$$

como parte da solução de uma equação diferencial elítica. Aqui, vamos nos concentrar apenas na solução de (8.14), que ficará pronta para o exemplo 18.8.

Faça

$$P = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}; \tag{8.17}$$

então,

$$c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = \frac{3}{2}P^2 + R\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

Agora, nós substituímos $\mathrm{d}t$ acima usando (8.17). A substituição é "estranha", mas válida:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}R}{P},\\
c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} &= \frac{3}{2}P^2 + PR\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R},\\
P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} + \frac{3}{2R}P^2 &= \frac{c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},\\
2P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} + \frac{3}{R}P^2 &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},\\
\frac{\mathrm{d}P^2}{\mathrm{d}R} + \frac{3}{R}P^2 &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}.
\end{aligned}$$

Com isso, nós obtivemos uma equação diferencial ordinária *linear* na variável P^2. Reescrevemos

$$\begin{aligned}
Q &= P^2,\\
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}R} + \frac{3Q}{R} &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},\\
Q(R_0) &= \left(\frac{\mathrm{d}R(0)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

A solução agora prossegue ao longo das linhas usuais:

$$\begin{aligned}
Q &= UV,\\
U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} + V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} + \frac{3UV}{R} &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\\
U\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} + \frac{3V}{R}\right] + V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} + \frac{3V}{R} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}V}{V} + 3\frac{\mathrm{d}R}{R} &= 0,\\
\ln|V| + 3\ln|R| &= C_v',\\
\ln|V| + \ln|R|^3 &= C_v',\\
\ln\left(|V||R|^3\right) &= C_v',\\
\ln|VR^3| &= C_v',\\
|VR^3| &= \exp(C_v'),\\
VR^3 &= \pm\exp(C_v') = C_v,\\
V &= \frac{C_v}{R^3}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação original,

$$
\begin{aligned}
\frac{C_v}{R^3}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} &= \frac{2c_0^2}{R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma},\\
\mathrm{d}U &= \frac{2c_0^2}{C_v}R_0^{3\gamma}R^{2-3\gamma}\mathrm{d}R,\\
U &= \frac{2c_0^2}{C_v}R_0^{3\gamma}\frac{R^{3-3\gamma}}{3-3\gamma} + C_u,\\
Q = UV &= \left[\frac{2c_0^2}{C_v}R_0^{3\gamma}\frac{R^{3-3\gamma}}{3-3\gamma} + C_u\right]\frac{C_v}{R^3}\\
&= \frac{2c_0^2R_0^{3\gamma}}{3-3\gamma}R^{-3\gamma} + \frac{C}{R^3};\\
Q(R_0) &= 0 \;\Rightarrow\\
\frac{2c_0^2}{3-3\gamma} + \frac{C}{R_0^3} &= 0,\\
C &= -\frac{2c_0^2R_0^3}{3-3\gamma}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
Q = \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2c_0^2}{3(\gamma-1)}\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right] \blacksquare \tag{8.18}
$$

Note que nós ainda não resolvemos completamente (8.14)–(8.16): este é apenas um resultado intermediário, que surgirá no exemplo 18.8.

Exercícios Propostos

8.15 A equação de von Bertalanffy para o crescimento da mássa corpórea m de uma espécie de peixe é (Bassanezi e Ferreira Jr., 1988, p. 79)

$$
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha m^{2/3} - \beta m,
$$

onde α é uma constante de anabolismo, e β uma constante de catabolismo, ambas específicas de cada espécie. Se $m(0) = 0$, obtenha $m(t)$.

8.16 As vazões que entram e saem de um tanque de uma estação de tratamento de esgotos são controladas automaticamente, em função do volume de esgoto $V(t)$ dentro do tanque, de acordo com

$$E(t) = \frac{V^3(t)}{V_R^2 T} \qquad \text{(vazão de entrada)},$$

$$S(t) = \frac{V(t)}{T} \qquad \text{(vazão de saída)},$$

onde T é uma constante de tempo característica do problema, e V_R é um volume característico do problema (por exemplo, V_R pode ser o volume do tanque).

a) Quais são as dimensões de $E(t)$ e $S(t)$? Elas são fisicamente consistentes?

b) Sabendo que um balanço simples de massa, do tipo "taxa de variação do volume = vazão de entrada − vazão de saída" é

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = E(t) - S(t),$$

e que $V(t = 0) = V_0 = V_R/2$, resolva a equação diferencial e obtenha o volume do tanque em função do tempo, $V(t)$. O volume aumentará ou diminuirá com o tempo?

8.17 Dada a equação diferencial de Riccati:

$$y' = y^2 - xy + 1,$$

e sabendo que: (i) $Y(x) = x$ é uma solução particular e (ii) a integral $\int \exp(x^2/2)\, dx$ não pode ser obtida em termos de funções elementares — devendo portanto ser deixada como está —, procure a solução geral na forma

$$y(x) = Y(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

8.5 – Equações diferenciais exatas no $\mathbb{R}^2$

Diferenciais exatas

Como vimos no capítulo 7, a diferencial de uma função $U(x, y)$ é

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{8.19}$$

Além disso, sob certas condições de regularidade, o teorema 7.1 nos dá

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \tag{8.20}$$

Isso nos leva imediatamente à

Definição 8.1 A expressão

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

é uma diferencial exata quando

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.21}$$

Neste caso, existe uma função $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \tag{8.22}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \tag{8.23}$$

Exemplo 8.11 Verifique se

$$x\,\mathrm{sen}(y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}y$$

é uma diferencial exata.

SOLUÇÃO
Temos

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x\,\mathrm{sen}(y), \\ Q(x,y) &= y\,\mathrm{sen}(x), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= x\cos(y), \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= y\cos(x), \\ P(x,y) &\neq Q(x,y), \end{aligned}$$

e a expressão *não* é uma diferencial exata.

Dada a equação diferencial

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{8.24}$$

se valer (8.21), então existe $U(x,y)$ tal que

$$\mathrm{d}U = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Podemos então integrar (8.22)–(8.23):

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + f(y), \tag{8.25}$$

$$U(x,y) = \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y + g(x). \tag{8.26}$$

Note que, como estamos integrando as derivadas parciais $\partial U/\partial x$ e $\partial U/\partial y$, as "constantes" de integração resultantes são na verdade funções da outra variável. As duas expressões do lado direito de (8.25)–(8.26) precisam ser comparadas para a obtenção da expressão final para $U(x,y)$. Observe também que (8.24) é equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}. \tag{8.27}$$

Naturalmente, nós já encontramos essa expressão antes, na versão "unidimensional" do teorema da função implícita: veja a equação (7.3). Isso significa que, dado um ponto (x_0, y_0) em que vale (8.24), essa expressão define implicitamente (em alguma vizinhança de (x_0, y_0)) uma solução $y(x)$ de (8.27).

Exemplo 8.12 Resolva

$$(2x + y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0.$$

SOLUÇÃO
Calculamos as derivadas cruzadas:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2x + y, \\ Q(x,y) &= x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

portanto, temos uma diferencial exata do tipo $\mathrm{d}U = 0$. Para obtermos U,

$$U = \int (2x + y)\,\mathrm{d}x = x^2 + xy + f(y) + C,$$
$$U = \int x\,\mathrm{d}y = xy + g(x) + C.$$

Logo,

$$f(y) = 0,$$
$$g(x) = x^2,$$

e

$$U(x, y) = x^2 + xy + C,$$

onde C é uma constante arbitrária de integração.

O fator integrante

Nem sempre a expressão (8.24) é uma diferencial exata, e portanto nem sempre ela pode ser resolvida pelas técnicas demonstradas acima. No entanto, sempre existe uma função $\mu(x, y)$ tal que

$$\mu(x, y)P(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{8.28}$$

é uma diferencial exata (Piskunov, 1969, Cap. XIII, seção 10, p. 496). A equação diferencial parcial para $\mu(x, y)$ é, naturalmente,

$$\frac{\partial[\mu(x, y)P(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(x, y)Q(x, y)]}{\partial x}. \tag{8.29}$$

Porém, resolver (8.29) pode ser mais difícil do que resolver (8.24), e nem sempre a técnica de encontrar $\mu(x, y)$ de tal forma que (8.28) torna-se uma diferencial exata é frutífera (ver, novamente, Piskunov (1969, Cap. XIII, seção 10, p. 496)). Mesmo assim, muitas vezes é possível estimar $\mu(x, y)$ por inspeção, ou tentar os casos mais simples $\mu(x)$ ou $\mu(y)$ (que, no entanto, não têm garantia de funcionar).

Exemplo 8.13 Encontre um fator integrante para

$$\left(2 + \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0.$$

SOLUÇÃO
Note que, de fato, a diferencial acima não é exata:

$$\frac{\partial\left(2 + \frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial(1)}{\partial x} = 0,$$

e as duas expressões acima são distintas. No entanto, com o benefício do Exemplo 8.12, a solução é óbvia: $\mu = x$.

8.6 – Equações diferenciais lineares de ordem 2 a coeficientes constantes

A equação homogênea

A equação

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = 0, \tag{8.30}$$

onde a, b e c são constantes, é um clássico. (8.30) requer que uma combinação linear entre $y(x)$ e suas derivadas primeira e segunda seja nula. A maneira mais simples de conseguir isso é impor que a forma das derivadas seja igual à de y. A função exponencial, $y = \exp(\lambda x)$, possui exatamente essa propriedade: sua derivada é novamene uma função exponencial, e assim sucessivamente. Tentemos:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\lambda x}, \\ y' &= \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, \\ y'' &= \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Substituindo em (8.30), obtém-se

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{8.31}$$

(8.31) é a *equação característica* de (8.30). Ela sempre possui duas soluções λ_1, λ_2, *que podem ser números complexos*. Portanto, as funções

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x},$$

são ambas soluções de (8.30). A solução geral é

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{8.32}$$

Observe que o operador diferencial $\mathscr{D}$ associado a (8.30) é

$$\mathscr{D} \equiv a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c; \tag{8.33}$$

esse é um operador linear. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem duas soluções de (8.30), então qualquer combinação linear $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ também é:

$$\mathscr{D}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathscr{D}y_1 + c_2\mathscr{D}y_2 = 0. \tag{8.34}$$

De fato, o conjunto $\mathbb{V} = \{y(x) \mid \mathscr{D}y = 0\}$ é um espaço vetorial de dimensão 2: qualquer solução pode ser obtida na forma de (8.34), se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem linearmente independentes.

Exemplo 8.14 Resolva

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

SOLUÇÃO

Como não há menção a condições iniciais, ou de contorno, trata-se de encontrar a solução geral. Faça

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\lambda x}, \\ y' &= \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, \\ y'' &= \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Substitua:

$$\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) e^{\lambda x} = 0.$$

As raízes da equação característica são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$; duas soluções linearmente independentes são e^{2x} e e^{3x}. A solução geral é

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \blacksquare$$

Solução em termos de senos e cossenos hiperbólicos

Muitas vezes é conveniente, devido às condições iniciais e de contorno, expressar a solução de uma EDO de ordem 2 a coeficientes constantes como

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[D_1 \cosh(\beta x) + D_2 \operatorname{senh}(\beta x)\right]. \tag{8.35}$$

Isso é *sempre* possível. Veja: partindo de (8.32), escreva

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + \beta, \\ \lambda_2 &= \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Isso é sempre possível, porque sempre existem α, β que atendem às equações acima. De fato,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \alpha = -b/(2a),\ \beta = \sqrt{b^2 - 4ac}\big/(2a).$$

Em seguida, faça (isto também é sempre possível):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(D_1 + D_2\right), \\ C_2 &= \frac{1}{2}\left(D_1 - D_2\right). \end{aligned}$$

Substitua agora as relações acima em (8.32):

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}\left(D_1 + D_2\right) e^{(\alpha+\beta)x} + \frac{1}{2}\left(D_1 - D_2\right) e^{(\alpha-\beta)x} \\ &= \frac{1}{2}\left(D_1 + D_2\right) e^{\alpha x} e^{\beta x} + \frac{1}{2}\left(D_1 - D_2\right) e^{\alpha x} e^{-\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\left[\frac{1}{2}\left(D_1 + D_2\right) e^{\beta x} + \frac{1}{2}\left(D_1 - D_2\right) e^{-\beta x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[D_1\left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}\right) + D_2\left(\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}\right)\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[D_1 \cosh(\beta x) + D_2 \operatorname{senh}(\beta x)\right] \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 8.15 Escreva a solução do exemplo 8.14 na forma de (8.35).

SOLUÇÃO
Temos que

$$3,2 = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Segue-se que

$$y(x) = e^{5x/2}\left[D_1 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) + D_2 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Solução real em termos de raízes complexas conjugadas

A equação característica pode possuir raízes complexas. Considere o caso em que os coeficientes da equação característica são números complexos. Em geral, isso ocorre quando os coeficientes da equação diferencial original são todos reais, e normalmente está associado a um problema puramente real, com solução desejada também puramente real.

Como os coeficientes da equação característica são, nesse caso, reais, as duas raízes complexas são conjugadas. Sejam

$$\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta,$$
$$\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta.$$

O "segredo" para produzir uma solução puramente real é impor que as constantes de integração sejam números complexos conjugados:

$$C_1 = \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B), \tag{8.36}$$
$$C_2 = \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B) \tag{8.37}$$

(note a analogia com o caso acima, envolvendo o cosseno e o seno hiperbólicos). Então,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} + \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x} \\ &= \frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[\frac{1}{2}(A - \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \frac{1}{2}(A + \mathrm{i}B)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2}\right) - \mathrm{i}B\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Nos parênteses acima nós reconhecemos, utilizando a fórmula de Euler (2.14):

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2} = \cosh(\mathrm{i}\beta x) = \cos(\beta x),$$
$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}}{2} = \operatorname{senh}(\mathrm{i}\beta x) = \mathrm{i}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Logo,

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[A\cos(\beta x) + B\operatorname{sen}(\beta x)\right].$$

Exemplo 8.16 Resolva

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

escrevendo a solução geral tanto na forma de exponenciais complexas quanto de cossenos e senos.

SOLUÇÃO
As raízes são

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times 13}}{2} = 2 \pm 3\mathrm{i}.$$

Segue-se que

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x} + C_2\mathrm{e}^{(2-3\mathrm{i})x},$$
$$y(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)\right].$$

A equação não-homogênea

A equação

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{8.38}$$

pode ser resolvida para *qualquer* $f(x)$ utilizando (uma variação do) método de variação de constantes, que introduzimos na seção 8.3. O método consiste no seguinte: sejam $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ as soluções da equação homogênea associada. Tentemos resolver (8.38) na forma

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x). \tag{8.39}$$

Diferenciando,

$$y' = Ay_1' + By_2' + A'y_1 + B'y_2$$

Se derivarmos novamente essa expressão, surgirão as derivadas segundas de A e B. Não queremos que isso aconteça! Imporemos, portanto, a condição

$$A'y_1 + B'y_2 = 0. \tag{8.40}$$

A restrição (8.40) parece arbitrária à primeira vista (como tantas vezes acontece em Matemática), mas é essencial para obtermos um sistema de equações determinado nas funções A e B, conforme veremos. Por ora, vamos aceitar (8.40) e prosseguir. Diferenciando novamente y', e utilizando (8.40),

$$y' = Ay_1' + By_2', \tag{8.41}$$

$$y'' = Ay_1'' + By_2'' + A'y_1' + B'y_2'. \tag{8.42}$$

Substituímos agora (8.39) e (8.41)–(8.42) em (8.38):

$$\begin{aligned} a\left[Ay_1'' + By_2'' + A'y_1' + B'y_2'\right] + b\left[Ay_1' + By_2'\right] + c\left[Ay_1 + By_2\right] &= f(x), \\ a\left[Ay_1'' + By_2''\right] + b\left[Ay_1' + By_2'\right] + c\left[Ay_1 + By_2\right] + a\left[A'y_1' + B'y_2'\right] &= f(x), \\ A\left[ay_1'' + by_1' + cy_1\right] + B\left[ay_2'' + by_2' + cy_2\right] + a\left[A'y_1' + B'y_2'\right] &= f(x). \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos entre colchetes no lado esquerdo, última linha acima, somam zero, pois contêm soluções LI da equação homogênea. Ficamos com um sistema de equações diferenciais ordinárias em $A(x)$ e $B(x)$:

$$A'y_1 + B'y_2 = 0, \tag{8.43}$$

$$A'y_1' + B'y_2' = \frac{f(x)}{a}. \tag{8.44}$$

A solução do sistema leva à solução geral da equação não-homogênea (8.38).

Exemplo 8.17 Resolva (isto é, obtenha a soluçao geral de)

$$y'' - 3y' + 2y = x.$$

SOLUÇÃO
A equação característica da EDO homogênea associada é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 =$, donde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Portanto, devemos procurar uma solução na forma

$$y(x) = A(x)e^x + B(x)e^{2x}.$$

Derivando,

$$y' = Ae^x + 2Be^{2x} + \underbrace{\left[A'e^x + B'e^{2x}\right]}_{=0};$$

$$y'' = Ae^x + 4Be^{2x} + A'e^x + 2B'e^{2x}.$$

Substituindo na equação original,

$$\left(Ae^x + 4Be^{2x} + A'e^x + 2B'e^{2x}\right) - 3\left(Ae^x + 2Be^{2x}\right) + 2\left(A(x)e^x + B(x)e^{2x}\right) = x,$$
$$\frac{dA}{dx}e^x + 2\frac{dB}{dx}e^{2x} = x.$$

Agora, a condição de controle das derivadas segundas de A e B é $A'e^x + B'e^{2x} = 0$ (ver termo no colchete horizontal acima); temos portanto o sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem 1:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx}e^x + 2\frac{dB}{dx}e^{2x} &= x,\\ \frac{dA}{dx}e^x + \frac{dB}{dx}e^{2x} &= 0.\end{aligned}$$

Eliminando primeiro dB/dx,

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} &= -xe^{-x},\\ A(x) &= (x+1)e^{-x} + C_1.\end{aligned}$$

Analogamente, eliminando dA/dx,

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dx} &= xe^{-2x},\\ B(x) &= -\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C_2.\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned}y(x) &= A(x)e^x + B(x)e^{2x},\\ &= [(x+1)e^{-x} + C_1]e^x + \left[-\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + C_2\right]e^{2x},\\ &= C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{2x+3}{4}.\end{aligned}$$

A solução é, como deveria, da forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

com $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ sendo a solução da equação homogênea associada (ou, simplesmente, a "solução homogênea"), e $y_p(x) = (2x+3)/4$ a solução particular livre de constantes de integração.

Exemplo 8.18 Obtenha a a soluçao geral de

$$y'' + \alpha^2 y = \cos(\beta t)$$

para $\alpha \neq \beta$.

SOLUÇÃO A solução da equação homogênea é

$$y_h(t) = A\cos(\alpha t) + B\,\mathrm{sen}(\alpha t)$$

onde A e B são constantes; portanto, utilizando o método de variação de constantes, faça

$$\begin{aligned}y(t) &= A(t)\cos(\alpha t) + B(t)\,\mathrm{sen}(\alpha t),\\ y'(t) &= \alpha\left[-A\,\mathrm{sen}(\alpha t) + B\cos(\alpha t)\right] + \underbrace{A'\cos(\alpha t) + B'\,\mathrm{sen}(\alpha t)}_{=0},\end{aligned}$$

$$y''(t) = -\alpha^2 \left[A\cos(\alpha t) + B\,\mathrm{sen}(\alpha t)\right] + \alpha\left[-A'\,\mathrm{sen}(\alpha t) + B'\cos(\alpha t)\right].$$

Substituindo esses resultados na EDO, encontramos

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \left[A\cos(\alpha t) + B\,\mathrm{sen}(\alpha t)\right] + \alpha\left[-A'\,\mathrm{sen}(\alpha t) + B'\cos(\alpha t)\right] \\ + \alpha^2 \left[A\cos(\alpha t) + B\,\mathrm{sen}(\alpha t)\right] = \cos(\beta t) \end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro termos do lado esquerdo se cancelam; temos agora duas EDOs de ordem 1 em A e B:

$$A'\cos(\alpha t) + B'\,\mathrm{sen}(\alpha t) = 0, \tag{8.45}$$

$$-A'\,\mathrm{sen}(\alpha t) + B'\cos(\alpha t) = \frac{\cos(\beta t)}{\alpha}. \tag{8.46}$$

Multiplicando (8.45) por $\cos(\alpha t)$ e (8.45) por $-\,\mathrm{sen}(\alpha t)$, eliminamos B e obtemos

$$\begin{aligned} A'\left[\cos^2(\alpha t) + \mathrm{sen}^2(\alpha t)\right] &= -\frac{\mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t)}{\alpha}, \\ A' &= -\frac{\mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Detalhamos agora a obtenção da integral acima. Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\alpha t + \beta t) &= \mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) + \mathrm{sen}(\beta t)\cos(\alpha t), \\ \mathrm{sen}(\alpha t - \beta t) &= \mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) - \mathrm{sen}(\beta t)\cos(\alpha t), \\ \mathrm{sen}(\alpha t + \beta t) + \mathrm{sen}(\alpha t - \beta t) &= 2\,\mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t), \\ \mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}((\alpha+\beta)t) + \mathrm{sen}((\alpha-\beta)t)\right], \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \left[-\,\mathrm{sen}(\alpha t)\cos(\beta t)\right]\,\mathrm{d}t &= \int -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}((\alpha+\beta)t)\,\mathrm{d}t \int -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}((\alpha-\beta)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\cos((\alpha+\beta)t) + \frac{1}{\alpha-\beta}\cos((\alpha-\beta)t)\right] + K_1; \\ A(t) &= \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\cos((\alpha+\beta)t) + \frac{1}{\alpha-\beta}\cos((\alpha-\beta)t)\right] + C. \end{aligned}$$

onde K_1 e $C = K_1/\alpha$ são constantes arbitrárias de integração. Agora multiplicamos (8.45) por $\mathrm{sen}(\alpha t)$ e (8.45) por $\cos(\alpha t)$, e com isso eliminamos A, obtendo

$$B' = \frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\cos(\beta t).$$

Esta equação pode ser integrada utilizando-se as identidades trigonométricas para o cosseno da soma e o cosseno da diferença, que deixamos a cargo dos leitores; o resultado é

$$B(t) = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\,\mathrm{sen}((\alpha+\beta)t) + \frac{1}{\alpha-\beta}\,\mathrm{sen}((\alpha-\beta)t)\right] + D,$$

onde D é uma constante arbitrária de integração.
A solução geral da EDO agora fica

$$y(t) = A(t)\cos(\alpha t) + B(t)\,\mathrm{sen}(\alpha t).$$

Fazemos por partes:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\left\{(\alpha-\beta)\cos((\alpha+\beta)t) + (\alpha+\beta)\cos((\alpha-\beta)t)\right\} + C \\ &= \frac{1}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\left\{(\alpha-\beta)\left[\cos(\alpha t)\cos(\beta t) - \mathrm{sen}(\alpha t)\,\mathrm{sen}(\beta t)\right]\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \qquad (\alpha+\beta)\,[\cos(\alpha t)\cos(\beta t) + \operatorname{sen}(\alpha t)\operatorname{sen}(\beta t)]\} + C \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\{\alpha\cos(\alpha t)\cos(\beta t) + \beta\operatorname{sen}(\alpha t)\operatorname{sen}(\beta t)\} + C; \\
A(t)\cos(\alpha t) &= \frac{1}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\left\{\alpha\cos^2(\alpha t)\cos(\beta t) + \beta\operatorname{sen}(\alpha t)\cos(\alpha t)\operatorname{sen}(\beta t)\right\} + C\cos(\alpha t).
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\{(\alpha-\beta)\operatorname{sen}((\alpha+\beta)t) + (\alpha+\beta)\operatorname{sen}((\alpha-\beta)t)\} + D \\
&= \frac{1}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\{(\alpha-\beta)\,[\operatorname{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) + \operatorname{sen}(\beta t)\cos(\alpha t)] \\
&+ \qquad (\alpha+\beta)\,[\operatorname{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) - \operatorname{sen}(\beta t)\cos(\alpha t)]\} + D \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\{\alpha\operatorname{sen}(\alpha t)\cos(\beta t) - \beta\operatorname{sen}(\beta t)\cos(\alpha t)\} + D; \\
B(t)\operatorname{sen}(\alpha t) &= \frac{1}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)}\,\left\{\alpha\operatorname{sen}^2(\alpha t)\cos(\beta t) - \beta\operatorname{sen}(\beta t)\operatorname{sen}(\alpha t)\cos(\alpha t)\right\} + D\operatorname{sen}(\alpha t).
\end{aligned}
$$

Finalmente, somamos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= A(t)\cos(\alpha t) + B(t)\operatorname{sen}(\alpha t) \\
&= C\cos(\alpha t) + D\operatorname{sen}(\alpha t) + \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\cos(\beta t) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios Propostos

8.18 Resolva

$$(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0.$$

8.19 Encontre a solução geral e puramente real de

$$x^2y'' + xy' + 9y = 0.$$

A sua resposta final *não* pode conter números complexos.

8.20 Encontre a solução geral de

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4 = -4x^3.$$

Você pode estar interessada(o) em saber que uma das raízes da equação característica da equação diferencial homogênea associada é 2.

8.21 Encontre a solução geral de

$$y'' + y = \mathrm{e}^x.$$

8.22 Converta a equação diferencial ordinária

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0$$

em um sistema de equações diferenciais ordinárias *de ordem 1*. Sugestão: faça $u = x$ e $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

8.23 Encontre a solução geral de:

a) $y''' + y'' - 2y = 0$,

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

8.24 Considere a função

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a) Obtenha a equação diferencial ordinária, linear, homogênea e de ordem 2 com a forma

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + f(x)y = 0$$

da qual $y_1(x)$ é solução.

b) Obtenha uma segunda solução desta equação, linearmente independente de $y_1(x)$.

8.25 Resolva

$$y''' - y'' = 6x + 2\cosh x.$$

8.26 Sejam $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ e

$$\begin{aligned} u : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto u(z) \end{aligned}$$

uma função complexa de uma variável complexa. Encontre a solução geral da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} - 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}^2 u = 0.$$

8.27 Obtenha a solução geral da equação diferencial ordinária linear de ordem 3

$$u''' - u'' - 4u' + 4u = 0$$

transformando-a, *obrigatoriamente*, em um sistema de equações de ordem 1 do tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{u}], \qquad [\boldsymbol{u}] = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix},$$

e em seguida diagonalizando $[\boldsymbol{A}]$. *Prossiga até obter a solução geral* $u(t) = \ldots$

8.28 Obtenha a solução geral da equação diferencial ordinária linear de ordem 2

$$z'' + z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Sugestões: (i) o lado direito da equação diferencial é *complexo*: use notação e álgebra complexas para resolver o problema; (ii) use variação de parâmetros.

8.29 Obtenha a solução geral de

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

8.7 – A equação de Euler

A equação de Euler tem a forma geral (para ordem 2)

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{8.47}$$

O truque para resolver (8.47) é simples:

$$\begin{aligned} y &= x^m, \\ y' &= mx^{m-1}, \\ y'' &= (m-1)mx^{m-2}. \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} a(m-1)mx^m + bmx^m + cx^m &= 0, \\ [a(m-1)m + bm + c]\, x^m &= 0, \\ am^2 + (b-a)m + c &= 0. \end{aligned}$$

Essa última é uma equação do segundo grau em m, donde existem duas raízes m_1 e m_2 (possivelmente complexas). A solução geral da equação de Euler é

$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}. \tag{8.48}$$

Exemplo 8.19 Resolva

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} y &= x^m, \\ y' &= mx^{m-1}, \\ y'' &= (m-1)mx^{m-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m-1)mx^m + mx^m - x^m &= 0, \\ m^2 - 1 &= 0, \\ m &= \pm 1, \end{aligned}$$

donde

$$y = C_1x + C_2x^{-1} \blacksquare$$

Exemplo 8.20 Resolva

$$x^2y'' + y = 0.$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} y &= x^m, \\ y' &= mx^{m-1}, \\ y'' &= (m-1)mx^{m-2}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(m-1)m+1 &= 0,\\
m^2-m+1 &= 0,\\
m &= \frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

As duas soluções LI são da forma

$$
y = x^{\left(\frac{1}{2}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = x^{\frac{1}{2}}x^{\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}.
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
x^a &= \exp\left(\ln(x^a)\right) = \exp\left(a\ln(x)\right),\\
x^{\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} &= \exp\left(\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right),\\
&= \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) \pm \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right).
\end{aligned}
$$

Na forma complexa, a solução geral é

$$
\begin{aligned}
y = C_1\sqrt{x}&\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right]\\
+ C_2\sqrt{x}&\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right].
\end{aligned}
$$

A solução tem a forma geral

$$
y(x) = C_1\sqrt{x}\left[\cos(\theta(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta(x))\right] + C_2\sqrt{x}\left[\cos(\theta(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta(x))\right].
$$

Para obtermos uma expressão puramente real, fazemos

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2}\left(D_1 - \mathrm{i}D_2\right),\\
C_2 &= \frac{1}{2}\left(D_1 + \mathrm{i}D_2\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo,

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\left(D_1 - \mathrm{i}D_2\right)\sqrt{x}\left[\cos(\theta(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta(x))\right]\\
&+ \frac{1}{2}\left(D_1 + \mathrm{i}D_2\right)\sqrt{x}\left[\cos(\theta(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta(x))\right]\\
&= \sqrt{x}\left[D_1\cos(\theta(x)) + D_2\,\mathrm{sen}(\theta(x))\right]\\
&= \sqrt{x}\left[D_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + D_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios Propostos

8.30 Encontre a solução geral da equação diferencial

$$
x^2y'' + 4xy' - 8y = 0.
$$

8.31 Encontre a solução geral de

$$x^2y'' - 2xy' - y = 0.$$

8.32 A equação de Euler

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \qquad x > 0,$$

possui solução do tipo $y = Ax^m$, onde $m = +1$ é a *raiz dupla* de $m^2 - 2m + 1 = 0$. Portanto, esta substituição produz apenas *uma* das duas soluções linearmente independentes: $y = Ax$, onde A é uma constante. Obtenha a segunda solução pelo método da variação das constantes, supondo uma solução do tipo

$$y = xA(x),$$

e substituindo na equação original. Obtenha a solução geral em termos de duas constantes arbitrárias de integração C_1 e C_2.

8.33 Resolva

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

8.34 Considere a função

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2}.$$

a) Obtenha a equação diferencial ordinária, linear, homogênea e de ordem 2 com a forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + f(x)y = 0$$

da qual $y_1(x)$ é solução.

b) Obtenha uma segunda solução desta equação, linearmente independente de $y_1(x)$.

8.35 Resolva a EDO não-homogênea

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = x.$$

a) Encontre a solução da equação homogênea associada,

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

ou seja: encontre $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

b) Faça

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x);$$

derive; force o termo envolvendo A' e B' a ser nulo; derive novamente e substitua. Produza um sistema de duas EDOs de ordem 1 em A e B. Resolva para $A(x)$ e $B(x)$.

8.8 – Exercícios adicionais

Exemplo 8.21 Resolva

$$y''' - 8y' + 8y = 0.$$

SOLUÇÃO
A única novidade é que se trata de uma equação diferencial do 3º grau. A equação característica é

$$\lambda^3 - 8\lambda + 8 = 0.$$

Por tentativa e erro (não muito difícil), encontramos uma das raízes: $\lambda = 2$. Para as próximas duas, dividimos o polinômio:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+\lambda^3 & +0\lambda^2 & -8\lambda & +8 & \lambda & -2 & \\
\cline{5-7}
+\lambda^3 & -2\lambda^2 & 0\lambda & +0 & +\lambda^2 & +2\lambda & -4 \\
\cline{1-4}
 & 2\lambda^2 & -8\lambda & +8 & & & \\
 & 2\lambda^2 & -4\lambda & +0 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -4\lambda & +8 & & & \\
 & & -4\lambda & +8 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

As duas outras raízes vêm de

$$\lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = -1 + \sqrt{5}, \ \lambda_2 = -1 - \sqrt{5}.$$

Portanto,

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{(-1+\sqrt{5})x} + C_3 e^{(-1-\sqrt{5})x} \ \blacksquare$$

Exemplo 8.22 Resolva

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0.$$

SOLUÇÃO
A equação característica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

Por tentativa e erro (não muito difícil), encontramos uma das raízes: $\lambda = 1$. Para as próximas duas, dividimos o polinômio:

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
+\lambda^3 & -4\lambda^2 & +5\lambda & -2 & \lambda & -2 & \\
\cline{5-7}
+\lambda^3 & -\lambda^2 & +0\lambda & +0 & +\lambda^2 & -3\lambda & +2 \\
\cline{1-4}
 & -3\lambda^2 & +5\lambda & -2 & & & \\
 & -3\lambda^2 & +3\lambda & +0 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 2\lambda & -2 & & & \\
 & & 2\lambda & -2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

As raízes de $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Portanto, $\lambda = 1$ é uma raiz dupla, e por enquanto temos apenas duas soluções LI:

$$e^x \qquad \text{e} \qquad e^{2x}.$$

Tentamos obter uma 3ª solução com o método de variação de constantes:

$$
\begin{aligned}
y &= ue^x, \\
y' &= e^x\left[u' + u\right], \\
y'' &= e^x\left[u'' + 2u' + u\right], \\
y''' &= e^x\left[u''' + 3u'' + 3u' + u\right].
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação diferencial,

$$e^x\left[u''' + 3u'' + 3u' + u - 4u'' - 8u' - 4u + 5u' + 5u - 2u\right] = 0,$$

ou

$$u''' - u'' = 0.$$

É possível reduzir a ordem:

$$v = u'',$$

$$
\begin{aligned}
v' - v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= v,\\
v &= k\mathrm{e}^x,\\
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} &= k\mathrm{e}^x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= k\mathrm{e}^x + c_1,\\
u &= k\mathrm{e}^x + c_1x + x2.
\end{aligned}
$$

Substituindo em $y = u\mathrm{e}^x$,

$$y = k\mathrm{e}^{2x} + c_1x\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^x,$$

que é a solução geral ■

Exemplo 8.23 Resolva

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad -1 \le x \le +1.$$

SOLUÇÃO
Esta é uma equação de Legendre. Os coeficientes não são constantes, e não se trata de uma equação de Cauchy-Euler. Portanto, não "sabemos" como resolvê-la com as técnicas que já vimos neste capítulo. No entanto, por inspeção, $y = x$ é uma solução (verifique). Tentamos portanto o método de variação de constantes:

$$
\begin{aligned}
y &= xu,\\
y' &= xu' + u,\\
y'' &= xu'' + u' + u' = xu'' + 2u'.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação e simplificando,

$$(x - x^3)u'' + (2 - 4x^2)u' = 0.$$

Podemos reduzir a ordem para resolver essa última:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\
(x - x^3)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (2 - 4x^2)v &= 0,\\
(x - x^3)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= (4x^2 - 2)v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{4x^2 - 2}{x - x^3}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

O lado direito precisa ser decomposto em frações parciais:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},\\
\ln|v| &= -\left[2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1|\right] + k',\\
|v| &= k''\left[\frac{1}{|x|^2} \times \frac{1}{|x-1|} \times \frac{1}{|x+1|}\right]\\
v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{k_1}{x^2(1-x^2)},
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
u &= k_1\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|\right]+k_2,\\
&= k_1\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]+k_2,\\
y &= k_1\left[-1+\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]+k_2x \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 8.24 Resolva

$$y''-(x^2+1)y=0.$$

Novamente, precisamos de uma solução por inspeção:

$$y=\mathrm{e}^{x^2/2}.$$

Utilizamos agora, novamente, variação de constantes:

$$\begin{aligned}
y &= u(x)\mathrm{e}^{x^2/2},\\
[u''+2xu']\,\mathrm{e}^{x^2/2} &= 0,\\
v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+2xv &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -2xv,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -2x\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x^2+k',\\
|v| &= k''\mathrm{e}^{-x^2},\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= k_1\mathrm{e}^{-x^2},\\
u(x) &= k_1\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+k_2,\\
u(x) &= k_1\,\mathrm{erf}(x)+k_2,\\
y(x) &= k_1\mathrm{e}^{x^2/2}\,\mathrm{erf}(x)+k_2\mathrm{e}^{x^2/2} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Fatoração com D

Se os coeficientes de uma equação diferencial forem constantes, é possível *fatorar*. Por exemplo, dada

$$y''-3y'+2y=0,$$

Temos

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \ \Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$$

É possível então escrever a equação diferencial em termos do operador diferencial

$$D\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

da seguinte forma:

$$(D-1)(D-2)y=0.$$

Verifique:

$$\begin{aligned}(D^2 - 2D - D + 2)y &= 0,\\ (D^2 - 3D + 2)y &= 0,\\ y'' - 3y' + 2y &= 0. \qquad \text{(OK)}\end{aligned}$$

Isso permite resolver a equação em 2 "etapas":

$$\begin{aligned}(D-1)\underbrace{[(D-2)y]}_{=u} &= 0,\\ (D-1)u &= 0,\\ u' - u &= 0,\\ u &= C_1 e^x;\\ (D-2)y &= C_1 e^x,\\ \frac{dy}{dx} - 2y &= C_1 e^x,\\ y(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{2x},\end{aligned}$$

que coincide com a solução conhecida.

Exemplo 8.25 Resolva

$$y'' - 9y = 4 + 5\,\mathrm{senh}(3x).$$

SOLUÇÃO
Fatorando,

$$\begin{aligned}(D-3)\underbrace{[(D+3)y]}_{z} &= 4 + 5\,\mathrm{senh}(3x),\\ (D-3)z &= 4 + 5\,\mathrm{senh}(3x),\\ z' - 3z &= 4 + 5\,\mathrm{senh}(3x).\end{aligned}$$

Em nome da concisão:

```
(%i1) eq : 'diff(z,x) - 3*z -(4 + 5*sinh(3*x)) ;
                              dz
(%o1)                         -- - 3 z - 5 sinh(3 x) - 4
                              dx
(%i2) ode2(eq,z,x);
                                            - 6 x
                                          %e
                              - 3 x   5 (------- + x)
                          4 %e               6                  3 x
(%o2)             z = (- --------- + --------------- + %c) %e
                              3               2
(%i3) expand(%);
                                3 x                     - 3 x
                          5 x %e            3 x   5 %e         4
(%o3)                 z = --------- + %c %e     + --------- - -
                              2                       12        3
```

Donde

$$z(x) = C_1 e^{3x} + \frac{5}{2} x e^{3x} + \frac{5}{12} e^{-3x} - \frac{4}{3}.$$

Por sua vez,

$$(D+3)y = C_1 e^{3x} + \frac{5}{2} x e^{3x} + \frac{5}{12} e^{-3x} - \frac{4}{3}.$$

Com Maxima, mais uma vez,

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) eq:'diff(y,x) + 3*y - (c*exp(3*x) - 4/3 + (5/2)*x*exp(3*x) +
      (5/12)*exp(-3*x));
                                 3 x                    - 3 x
            dy           5 x %e           3 x   5 %e         4
(%o2)       -- + 3 y - --------- - c %e     - --------- + -
            dx               2                     12        3
(%i3) ode2(eq,y,x);
                                            6 x         3 x
                    (30 x + 12 c - 5) %e       16 %e
                    ----------------------- - -------- + 5 x
            - 3 x              6                   3
(%o3) y = %e       (---------------------------------------- + %c)
                                          12
(%i4) expand(%);
                 3 x        3 x        3 x           - 3 x
           5 x %e       c %e       5 %e       5 x %e               - 3 x   4
(%o4) y = --------- + ------- - ------- + ----------- + %c %e       - -
             12           6         72           12                       9
```

Ou:

$$y = \frac{5}{6}x\cosh(3x) + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{4}{9}.$$

Observe que é preciso reinterpretar as constantes e agrupar os termos linearmente dependentes obtidos por Maxima ■

9

Cálculo de variáveis complexas

Neste capítulo, nós nos deteremos um pouco mais em funções do tipo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto w = f(z). \end{aligned}$$

Essas são funções complexas de uma variável complexa. É impossível visualizar o gráfico de f, por motivos óbvios: tanto o domínio quanto o contra-domínio de f envolvem 2 dimensões, e o total de 4 dimensões não pode ser visualizado por seres humanos.

Esse não é um preço demasiadamente alto, porque muitas das restrições algébricas normalmente encontradas em $\mathbb{R}$ podem ser suspensas. Por exemplo, nós poderemos calcular raízes quadradas, raízes n-ésimas, logaritmos, etc., de qualquer número complexo, e definir as funções associadas. Isso é diferente de termos que nos restringir a calcular raízes quadradas e logaritmos apenas de números positivos (incluindo o zero no caso da raiz quadrada) nos reais.

Por outro lado, muitas vezes existem pontos onde $f(z)$ não é definida (não existe), ou nos quais a derivada de $f(z)$ não existe. Tais pontos são chamados de *singularidades* de f. Eles constituem pontos de considerável interesse: muito de nosso trabalho envolverá identificar as singularidades de f e o seu comportamento em suas vizinhanças.

9.1 – Funções plurívocas, cortes e ramos

A equação

$$z^2 = -(1 + \mathrm{i})$$

admite duas soluções. Para que possamos encontrar ambas, entretanto, é preciso notar que $-(1+\mathrm{i})$ admite infinitas representações em coordenadas polares! De fato,

$$-(1 + \mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Procuremos agora a raiz z na forma $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Então,

$$z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)},$$

donde

$$\begin{aligned} r &= \left[\sqrt{2}\right]^{1/2} = 2^{1/4}, \\ \theta &= \frac{5\pi}{8} + k\pi. \end{aligned}$$

Figura 9.1: Raízes quadradas de $-(1+\mathrm{i})$.

Embora k possa ser qualquer inteiro, bastam os valores $k = 0$ e $k = 1$ para selecionar as duas raízes distintas:

$$\theta = \frac{5\pi}{8} \Rightarrow$$

$$z_1 = 2^{1/4}\left[\cos\frac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right] = -0.4550898605622273 + 1.098684113467810\mathrm{i},$$

$$\theta = \frac{5\pi}{8} + \pi \Rightarrow$$

$$z_2 = 2^{1/4}\left[\cos\frac{13\pi}{8} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{8}\right] = 0.4550898605622273 - 1.098684113467810\mathrm{i};$$

z_1 e z_2 são antípodas no círculo de raio $2^{1/4}$ do plano complexo. O resultado da extração das duas raízes está mostrado na figura 9.1.

Note portanto que a expressão

$$f(z) = \sqrt{z}$$

não define uma função no sentido clássico, já que para cada z existem duas raízes possíveis, z_1 e z_2.

Onde está a origem do problema? No fato de que nós deixamos θ dar várias "voltas" em torno do *ponto de ramificação* $z = 0$.

Definição 9.1 $z = z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto de ramificação da função $w = f(z)$ se, para algum $\epsilon > 0$, após uma volta completa em torno de z_0 ao longo do círculo $|z - z_0| = \epsilon$, f assume um valor diferente do original (Needham, 2005, p. 90–92).

Quando uma função complexa f possui pontos de ramificação, dizemos que f é uma função *plurívoca*. É claro que, no sentido matemático clássico, f *não é mais* uma função; mas o termo "função plurívoca", embora seja paradoxal, caiu no uso comum, e temos que viver com ele.

A plurivocidade é um problema que vai aparecer com qualquer potência do tipo $z^{1/n}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Figura 9.2: Um corte no plano complexo (em cinza) e uma trajetória no plano (em preto).

Exemplo 9.1 Obtenha as raízes de $w = z^{1/5}$, se $z = 2$.

SOLUÇÃO

$$z = 2e^{i(2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z};$$
$$w = z^{1/5} = 2^{1/5}e^{i\frac{2k\pi}{5}},\ k = 0, \ldots, 4.$$

Cortes

A esta altura, nós temos uma solução "rápida": impedir que θ dê mais do que uma volta em torno do ponto de ramificação. Isso pode ser obtido "cortando" o plano complexo a partir do ponto de ramificação por uma linha, que nós vamos chamar de "corte", de tal maneira que a extremidade do raio-vetor que emana do ponto de ramificação e vai até z não possa "passar por cima" dela. Na figura 9.2, veja como uma trajetória fechada em torno do ponto de ramificação $z_0 = 0$ não pode ser completada porque ela "colide" com o corte.

Observação: Existem infinitos cortes possíveis para $f(z) = z^{1/5}$, todos eles emanando de $z = 0$ e prosseguindo até o infinito. Cada um deles "funciona", porém cada um deles define uma função unívoca *diferente*. A escolha do corte mais adequado geralmente faz parte do problema em questão.

Exemplo 9.2 Identifique os pontos de ramificação de

$$w = f(z) = \sqrt{z(z-1)};$$

proponha um corte.

SOLUÇÃO

Os pontos de ramificação são $z_0 = (0,0)$ e $z_1 = (1,0)$ (figura 9.3). Nós procedemos exprimindo z e $z-1$ individualmente em coordenadas polares:

$$z = r_1 e^{i(\theta_1 + 2k\pi)},$$

Figura 9.3: Um corte para a função $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$.

$$z - 1 = r_2 e^{i(\theta_2 + 2l\pi)}.$$

Segue-se que

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + (k+l)\pi\right)}.$$

Observe que $k+l$ par não altera o valor original de w, mas $k+l$ ímpar sim. Um corte muito simples, e que impede que $k+l$ seja ímpar, está mostrado na figura 9.3 em cinza, ligando $(0,0)$ a $(1,0)$. Conforme mostrado na figura, para $k = l = 0$, os valores de θ_1 e θ_2 ficam restritos a:

$$0 \le \theta_1 < 2\pi \qquad \text{e} \qquad -\pi \le \theta_2 < \pi.$$

Individualmente, *pequenas* voltas em torno de cada um dos pontos de ramificação, como indicado pelos dois pequenos círculos da figura 9.3 mudam o valor de $f(z)$. Esse é o motivo de precisarmos usar ϵ na definição de ponto de ramificação dada na página 277. Por outro lado, uma volta envolvendo ambos os pontos de ramificação (conforme indicado no círculo $\mathscr{L}$ da figura), não muda o valor de $f(z)$, porque não cruza o corte.

Um outro ponto importante a se notar é que, em geral, $f(z)$ é descontínua *através* de um corte. Considere, novamente, $f(z) = z^{1/2}$, e considere que a linha de corte é a semi-reta $x \in (-\infty, 0]; y = 0$. Dado um número qualquer

$$z = re^{i\theta + 2k\pi},$$

nós vimos que as suas duas raízes distintas são

$$z_1 = r^{1/2} e^{i\theta/2}, \qquad z_2 = r^{1/2} e^{(i\theta/2 + \pi)}.$$

Agora, o corte acima seleciona sempre z_1, ao mesmo tempo em que impõe $-\pi < \theta \le +\pi$. Considere, portanto, dois pontos infinitamente próximos mas em dois lados do corte:

$$z_A = e^{i\pi},$$
$$z_B = e^{-i\pi}.$$

Temos:

$$\lim_{z \to z_A} f(z) = e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = +i;$$
$$\lim_{z \to z_B} f(z) = e^{-i\pi/2} = \cos(\pi/2) - i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = -i.$$

Note que $f(z)$ dá um "salto" de $2i$ através do corte.

Figura 9.4: A derivada no plano complexo: existem infinitos caminhos ao longo dos quais Δz pode tender a zero, e todos devem resultar no mesmo limite.

Exercícios Propostos

9.1 Seja $u = \ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta$ a função logaritmo definida pelo corte $\{z = (x, y) \mid -\infty < x \leq 0;\ y = 0\}$ de tal maneira que $-\pi < \theta \leq \pi$. Calcule

$$\ln\left[\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right].$$

9.2 Calcule todos os valores possíveis z_n de $(1+i)^{1/7}$. Dê sua resposta na forma $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, onde os $r_n s$ e $\theta_n s$ devem ser explicitados.

9.3 Defina um corte no plano complexo que torne

$$f(z) = \left[1 + z^2\right]^{1/3}$$

unívoca. Atenção: é obrigatório fazer um desenho do corte.

9.2 – A derivada, funções analíticas e as condições de Cauchy-Riemman

A derivada de uma função complexa é definida da maneira usual:

$$f'(z) \equiv \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{9.1}$$

Como sempre, para que (9.1) faça sentido, o limite tem que ser único para qualquer Δz. Essa afirmação aparentemente simples contém o que talvez seja a essência do cálculo com variáveis complexas: como os caminhos ao longo dos quais Δz pode tender a zero são muito mais "ricos" do que a tendência a zero "pela esquerda" e "pela direita" que ocorre nos reais, a exigência de existência do limite em (9.1) traduz-se em uma exigência de que $f(z)$ seja muito bem comportada. A figura 9.4 ilustra esse fato, mostrando 5 caminhos muito diferentes ($\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_x$, $\mathscr{L}_y$) ao

longo dos quais Δz pode tender a zero em torno do ponto z: um particular Δz ao longo de $\mathscr{L}_2$ está ilustrado na figura.

Funções complexas que possuem derivada em um ponto *e em sua vizinhança* são denominadas funções analíticas. A analiticidade de uma função é um prêmio altamente cobiçado em análise complexa. Observe a diferença entre os dois conceitos a seguir.

Definição 9.2 Se existe $f'(a)$, $f(z)$ é *diferenciável* em $z = a$.

Definição 9.3 Se existe $f'(z)$ em uma vizinhança de $z = a$, $f(z)$ é *analítica* em $z = a$.

Cauchy-Riemman

De todos os caminhos possíveis para $\Delta z \to 0$, certamente os dois mais óbvios são

$$\Delta z = \Delta x,$$
$$\Delta z = \mathrm{i}\Delta y$$

As *condições de Cauchy-Riemman* podem ser obtidas observando-se que a função complexa $f(z)$ pode ser entendida como

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \tag{9.2}$$

onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são agora as partes real e imaginária de $f(z)$, e cada uma delas é uma função real de duas variáveis reais x e y. Para $\Delta z = \Delta x$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) + \mathrm{i}v(x + \Delta x, y)] - [u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + \mathrm{i}[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Analogamente, para $\Delta z = \mathrm{i}\Delta y$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) + \mathrm{i}v(x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)]}{\mathrm{i}\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + \mathrm{i}[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\mathrm{i}\Delta y} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Igualando (9.3) e (9.4), obtemos as condições de Cauchy-Riemman:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9.6}$$

As condições de Cauchy-Riemman são condições *necessárias* de diferenciabilidade (Definição 9.2) e, por conseguinte, de *analiticidade* (Definição 9.3) em um ponto. Elas não são condições *suficientes*.

A não-validade das condições de Cauchy-Riemman em um ponto serve, portanto, apenas para demonstrar que uma função complexa *não* é analítica no ponto.

Exemplo 9.3 Funções Harmônicas Começamos observando o seguinte: se $f = u + \mathrm{i}v$ é analítica, então ambas as funções u e v atendem à Equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$.

SOLUÇÃO
De fato, valem as condições de Cauchy-Riemman:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \qquad \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad = & \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \qquad \text{ou} & \nabla^2 u &= 0. \end{aligned}$$

De maneira completamente análoga, pode-se mostrar que

$$\nabla^2 v = 0.$$

Portanto, qualquer função analítica define implicitamente partes real e imaginária que são soluções da equação de Laplace.

Exercícios Propostos

9.4 Considere a função

$$f(z) = (3y^2 - x^3) + i(6xy^2 - 3yx^2).$$

Responda, **justificando**:

a) As equações de Cauch-Riemman são satisfeitas em todos os pontos do eixo real?

b) As derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

são contínuas em todos os pontos do eixo real?

c) A função $f(z)$ é analítica em todos os pontos do eixo real?

9.5 Discuta a diferenciabilidade e analiticidade de $f(z) = z^* z = |z|^2$ em $z = 0 + \mathrm{i}0$ (z^* é o conjugado complexo de z).

9.6 Em que pontos do plano complexo a função

$$f(z) = z + z^*$$

é analítica?

9.3 – Sequências e séries

Uma sequência enumerável de números reais ou complexos é um objeto da forma

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \qquad a_i \in \mathbb{R} \text{ ou } a_i \in \mathbb{C}.$$

A partir da sequência (a_n), podemos construir uma nova sequência, somando os termos:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

etc.. Dizemos que s_n é uma *série*. No capítulo 4, nós já trabalhamos informalmente com séries, e antes disso no ensino médio. De fato, um resultado amplamente conhecido é a soma de uma série geométrica: se $|z| < 1$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}. \tag{9.7}$$

A prova de (9.7) é simples: forma-se

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + z + z^2 + \ldots + z^n, \\ zs_n &= z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}, \\ s_n(1-z) &= 1 - z^{n+1}, \\ s_n &= \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}. \end{aligned}$$

Acima, estamos supondo que $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ e que $r < 1$ (pois $|z| < 1$). Agora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(re^{i\theta})^{n+1}}{1-z} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} r^{n+1} \left| \frac{(e^{i\theta})^{n+1}}{1-z} \right| \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se segue (9.7).

Naturalmente, séries são particularmente úteis se a sequência s_n converge, como acontece com (9.7). Esse é o caso, por exemplo, das séries de Taylor de e^x e de $\operatorname{erf}(x)$ (para todo x), que já vimos antes:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots \right]. \end{aligned}$$

Juntamente com uns poucos outros objetos, tais como certos produtórios e expansões em frações continuadas, as séries são a forma prática de conhecermos,

Listagem 9.1: Obtenção de ‘e’ com 20 casas decimais utilizando Maxima

```
(%i1) fpprec : 21 ;
(%o1)                                  21
(%i2) bfloat(%e);
(%o2)                        2.71828182845904523536b0
```

analisarmos e *calcularmos com*, funções. Para conhecermos o valor de uma função em um determinado ponto, nós somamos a sua série até que a soma esteja suficientemente próxima, sob o ponto de vista de algum critério de convergência, do valor exato. Muitas vezes, esse valor exato sequer é conhecido. Por exemplo, $e^1 \approx 2.71828182845904523536$ (veja a listagem 9.1), mas como e é um número irracional, é impossível conhecer todos os dígitos da sua expansão decimal (a expansão é infinita, e não periódica).

A garantia de convergência de uma série, e a *forma* como ela converge, entretanto, são questões delicadas. Um primeiro critério nos dá, pelo menos, uma maneira de decidir quando uma série *não* converge (Boas, 1983, seção 5.1):

Teorema 9.1 (Condição necessária de convergência para séries). Se $(s_1, s_2, \ldots)$ converge, então

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0. \tag{9.8}$$

Exemplo 9.4 A série formada a partir da sequência

$$a_n = 1 + \frac{1}{n},$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

não converge, pois

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1 \neq 0.$$

Quando $|a_n| \to 0$, entretanto, não podemos (ainda) estar certos da convergência: nesse caso, ela pode ou não acontecer. Considere, por exemplo, a *série harmônica*:

$$a_n = \frac{1}{n},$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

A condição necessária de convergência (9.8) é atendida, mas isso não é suficiente: a série converge? É interessante observar que, em casos como esse, nem todo o poder computacional do mundo provê uma resposta (embora possa nos ajudar e dar algumas indicações). Por exemplo, o programa da listagem 9.2 calcula a soma até s_{100000}, e o resultado está mostrado na figura 9.5: não está claro se a série convergirá!

A prova de que s_n diverge é devida a Nicholas Oresme (1323–1382) (Havil, 2003, capítulo 2):

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

Listagem 9.2: `oresme.py` — cálculo das somas da série harmônica

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
f = open('oresme.dat','wt')
s = 0.0
for k in range(1,100001):
    a = 1/float(k)
    s += a
    f.write("%10d %12.8f %12.8f\n" % (k,a,s))
f.close()
```

Figura 9.5: As somas s_n da série harmônica até 100000.

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty \blacksquare
\end{aligned}
$$

No entanto, a série *alternada* associada à série harmônica converge:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2. \tag{9.9}$$

Exemplo 9.5 Prove (9.9).

SOLUÇÃO
Use a série de Taylor de $\ln(1-x)$ em torno de $x=0$:

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Segue-se que

$$\ln 2=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \blacksquare$$

A série alternada (9.9) é um exemplo de uma série que *não* é absolutamente convergente:

Definição 9.4 A série

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

é dita *absolutamente convergente* se a série

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} |a_n|$$

for convergente.

Séries absolutamente convergentes possuem propriedades agradáveis. Em particular, é possível rearranjar os termos em qualquer ordem, e a soma não muda. Essa é uma extensão da "propriedade comutativa" da soma para "somas infinitas", e é o assunto dos exemplos 39, 40 e do teorema 22 de Lima (1976).

Definição 9.5 Dizemos que a série $\sum a_n$ é *comutativamente convergente* quando, para toda bijeção $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se $b_n = a_{\phi(n)}$, então $\sum b_n$ é convergente, e $\sum b_n = \sum a_n$.

Essa definição simplesmente nos diz que podemos trocar a ordem dos termos a_n ao nosso bel-prazer, e que nesse caso, por exemplo,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = \quad & (a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + \ldots) \\ & + (a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + \ldots) \\ & + (a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} + \ldots) \end{aligned}$$

Teorema 9.2 Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

Esse não é o caso, repetimos, de (9.9). Isso significa que rearrumar os termos de uma série não absolutamente convergente pode levar a resultados desastrosos. Por exemplo (Derbyshire, 2003):

$$\begin{aligned} s &= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - \ldots \\ &= 1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + 1/7 - 1/14 + \\ &\quad 1/9 - \ldots \\ &= (1 - 1/2) - 1/4 + (1/3 - 1/6) - 1/8 + (1/5 - 1/10) - 1/12 + \\ &\quad (1/7 - 1/14) + \ldots \\ &= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - 1/12 + 1/14 - \ldots \\ &= s/2 \quad \Rightarrow \\ 1 &= 1/2 \ \blacksquare \end{aligned}$$

É claro que, em nenhum momento, você deve acreditar no resultado acima! Ele foi obtido supondo que a propriedade comutativa se aplica à série (9.9), o que não é verdade. O ponto importante para ser lembrado aqui é este: *em princípio*, não é permitido rearrumar (no sentido da comutatividade) os termos de uma série não absolutamente convergente.

O próximo resultado sobre convergência é um pouco mais poderoso:

Teorema 9.3 (O teste da razão) Forme a sequência

$$r_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Então:

$$r = \lim_{n\to\infty} r_n : \begin{cases} 0 \le r < 1 \Rightarrow & s_n \text{ converge,} \\ r = 1 \Rightarrow & \text{nada se pode afirmar,} \\ r > 1 \Rightarrow & s_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

9.4 – Integração de contorno: o teorema de Cauchy e deformação de caminho

Toda integral no plano complexo é uma integral de linha. Isso pode ser visto sem muita dificuldade: considere uma função

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

sobre uma linha $\mathscr{L}$ no plano complexo. Sobre essa linha, um elemento de integração é

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y.$$

Reunindo tudo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\mathscr{L}} [u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)]\ [\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y] \\ &= \int_{\mathscr{L}} [u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int_{\mathscr{L}} [v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y] \end{aligned}$$

Cada uma das duas expressões do lado direito acima é uma integral de linha *real* (verifique).

O teorema de Cauchy

Teorema 9.4 (teorema de Cauchy) Se $f(z)$ é analítica sobre um contorno fechado $\mathscr{L}$ e em seu interior, então

$$\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{9.10}$$

A prova pode ser obtida, por exemplo, com a versão bidimensional do teorema de Stokes (7.105) (teorema de Green). Recapitulando, se $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, 0)$ é uma função vetorial bidimensional, em que $F_x = F_x(x, y)$ e $F_y = F_y(x, y)$, e se $\mathscr{L}$ é um contorno fechado no plano xy que limita a região plana $\mathscr{S}$, o rotacional de $\boldsymbol{F}$ é

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

e (7.105) fica

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{k} \cdot [\nabla \times \boldsymbol{F}])\,\mathrm{d}A$$

$$\oint_{\mathscr{L}} \left(F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y\right) = \int_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}A \tag{9.11}$$

Faça agora

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

onde $f(z)$ é por hipótese uma função analítica sobre $\mathscr{L}$ e no seu interior $\mathscr{S}$. Nessa região, valem as condições de Cauchy-Riemman (9.5)–(9.6). A integral de contorno da função complexa é

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{L}} f(z) \, \mathrm{d}z &= \oint_{\mathscr{L}} [u + \mathrm{i}v] \, [\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y] \\ &= \oint_{\mathscr{L}} [u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y] + \mathrm{i} \oint_{\mathscr{L}} [v \, \mathrm{d}x + u \, \mathrm{d}y]\end{aligned}$$

Observe que (9.11) aplica-se a cada uma das duas integrais acima. Obtemos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{L}} [u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y] &= \int_{\mathscr{S}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = 0, \\ \oint_{\mathscr{L}} [v \, \mathrm{d}x + u \, \mathrm{d}y] &= \int_{\mathscr{S}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}A = 0,\end{aligned}$$

respectivamente, devido a (9.6) e a (9.5). Isso prova o teorema (9.10) ■

Exemplo 9.6 Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

utilize o contorno fechado $ABCD$ da figura 9.6, cujos vértices são $(-a, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) e $(-a, b)$, para calcular

$$I = \lim_{a \to \infty} \int_{DC} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z = \int_{-\infty + \mathrm{i}b}^{+\infty + \mathrm{i}b} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z.$$

Dica: mostre que

$$\lim_{a \to \infty} \int_{BC} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z = \lim_{a \to \infty} \int_{AD} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z = 0,$$

e utilize o teorema apropriado para integrais de funções complexas sobre contornos fechados.

SOLUÇÃO
Em BC,

$$\begin{aligned}z &= a + \mathrm{i}y; \\ z^2 &= a^2 + 2\mathrm{i}ay - y^2; \\ \exp(-z^2) &= \exp(-a^2 - \mathrm{i}(2ay) + y^2) \\ &= \exp(-a^2) \exp(y^2) \exp(-\mathrm{i}(2ay)); \\ |\exp(-z^2)| &= \exp(-a^2) \exp(y^2); \\ \lim_{a \to \infty} |\exp(-z^2)| &= 0.\end{aligned}$$

Agora:

$$\lim_{a \to \infty} \int_{BC} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z \leq \lim_{a \to \infty} \left| \int_{BC} \mathrm{e}^{-z^2} \, \mathrm{d}z \right| \leq \lim_{a \to \infty} \int_{BC} |\exp(-z^2)| \, \mathrm{d}z = 0.$$

Figura 9.6: Exemplo 9.6.

Figura 9.7: Exercício 9.7.

A prova de que a integral sobre AD se anula no limite é totalmente análoga, com a substituído por $-a$. Portanto, já que não há singularidades dentro do contorno $ABCD$,

$$\lim_{a\to\infty}\left[\int_{AB}+\int_{CD}\right]=0;$$

$$\left(\lim_{a\to\infty}\right)\int_{DC}=-\int_{CD}=+\int_{AB};$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{DC}\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z=\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty+\mathrm{i}b}^{+\infty+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\ \blacksquare$$

Exercícios Propostos

9.7 (Greenberg, 1998, Problema 24.5-7) Calcule

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-a^2}\qquad(a>0)$$

integrando $f(z)=\mathrm{e}^{-z^2}$ em torno do retângulo (mostrado na figura 9.7) com vértices em 0, R, $R+ia$ e ia, e usando o valor conhecido da integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Deformação de caminho

A figura 9.8 mostra uma consequência útil do teorema de Cauchy. Suponha que a função $f(z)$ seja analítica na região *entre* as curvas $\mathscr{L}_1$ (externa) e $\mathscr{L}_2$ (interna). Observe que não é necessário que $f(z)$ seja analítica na região circundada por $\mathscr{L}_2$.

Figura 9.8: O teorema de Cauchy, e a deformação de caminho

Quando ligamos $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ da maneira mostrada na figura, por meio de dois seguimentos de reta muito próximos e percorridos em sentidos opostos, formamos um contorno fechado $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \mathscr{R}_2$, percorridos *nessa* ordem, dentro do qual $f(z)$ é analítica.

Segue-se do teorema 9.4 que

$$\oint_{\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{L}_2 \cup \mathscr{R}_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0;$$

$$\int_{\mathscr{L}_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\mathscr{L}_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Note o sinal de menos em $\int_{\mathscr{L}_2}$, pois $\mathscr{L}_2$ é percorrido no sentido horário (negativo). Se fizermos um processo de limites tornando os segmentos $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ infinitamente próximos teremos, no limite,

$$\int_{\mathscr{R}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\mathscr{R}_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

donde

$$\int_{\mathscr{L}_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathscr{L}_2} f(z)\,\mathrm{d}z \blacksquare$$

Isso significa que podemos *deformar* $\mathscr{L}_1$ até $\mathscr{L}_2$ (desde que $f(z)$ seja analítica *entre* os dois contornos) sem modificar o valor da integral.

9.5 – A fórmula integral de Cauchy

Considere a integral

$$I = \oint_{\mathscr{L}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Se não houver singularidades entre $\mathscr{L}$ e o círculo $\mathscr{L}_R$ de raio R mostrado na figura 9.9, podemos deformar a trajetória de $\mathscr{L}$ para $\mathscr{L}_R$, e

$$I = \oint_{\mathscr{L}_R} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Figura 9.9: A fórmula integral de Cauchy.

Façamos

$$f(\zeta) = (\zeta - z)^n.$$

A integral é facilmente calculada, fazendo-se

$$\begin{aligned} \zeta - z &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{d}\zeta &= \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

A integral é

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}R^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Então,

$$\begin{aligned} n \neq -1 &\Rightarrow I = \frac{R^{n+1}}{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\,\mathrm{i}(n+1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{R^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0; \\ n = -1 &\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_{\mathscr{L}} (\zeta - z)^n\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & n = -1. \end{cases} \tag{9.12}$$

Considere agora o cálculo, um pouco mais elaborado, da integral

$$I = \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

onde nós suporemos que $f(\zeta)$ é uma função analítica sobre $\mathscr{L}$ e em todo o seu interior. Novamente por deformação de caminho,

$$I = \oint_{\mathscr{L}_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z$$

para qualquer círculo $\mathscr{L}_R$ interno a $\mathscr{L}$. Em particular, isso deve valer para o caso limite de um círculo cujo raio $\rho \to 0$ (veja novamente a figura 9.9). Quando $\rho \to 0$, $f(\zeta) \to f(z)$, e temos:

$$I = \lim_{\rho\to 0} \oint_{\mathscr{L}_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \lim_{\rho\to 0} f(z) \oint_{\mathscr{L}_\rho} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

ou:

Teorema 9.5 (A fórmula integral de Cauchy)

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i} f(z) \blacksquare \tag{9.13}$$

Um resultado impressionante é que, se $f(z)$ é analítica, todas as derivadas existem. Isso é uma consequência da fórmula de Cauchy. De fato,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta,\\
f'(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} f(\zeta)(\zeta - z)^{-2}\,\mathrm{d}\zeta,\\
f''(z) &= \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} f(\zeta)(\zeta - z)^{-3}\,\mathrm{d}\zeta,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} f(\zeta)(\zeta - z)^{-(n+1)}\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

Esse resultado é um corolário do teorema 9.5. Ele também é conhecido pelo mesmo nome (fórmula integral de Cauchy). Com isso, temos um teorema extremamente importante (Dettman, 1984, teorema 3.6.2):

Teorema 9.6 Seja $f(z)$ analítica sobre e dentro de um contorno simples $\mathscr{L}$; então, para todo z dentro do contorno $\mathscr{L}$, f possui todas as derivadas, que são dadas pela *Fórmula Integral de Cauchy*,

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{9.14}$$

Note que agora estamos usando a designação *Fórmula Integral de Cauchy* tanto para (9.13) quanto para (9.14).

O teorema 9.6 não possui contrapartida em análise real: lá, uma função pode ter algumas derivadas em um intervalo, e depois cessar de tê-las. Isso não acontece com variáveis complexas: se existe $f'(\zeta)$ em uma pequena região em torno de um ponto z, então *todas* as derivadas existem. Isso é o resultado de uma exigência muito maior (em comparação com os reais) de existência do limite (9.1) para qualquer caminho ao longo do qual $\Delta z \to 0$, o que faz com que as fs complexas que são analíticas sejam extremamente "bem comportadas".

Exercícios Propostos

9.8 Usando, obrigatoriamente, a transformação $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e coordenadas polares, calcule a integral

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2},$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo unitário $z = 1$.

Figura 9.10: A fórmula de Taylor para funções complexas.

9.9 Seja $\mathscr{L}$ o semi-círculo de raio R do plano complexo tal que a parte imaginária de z é maior que ou igual a zero: $\mathrm{Im} z \geq 0$; calcule

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

9.10 Seja o contorno de integração $\mathscr{L}$ o círculo $|z| = 1$, percorrido no sentido anti-horário (positivo) desde $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$. Calcule:

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{dz}{z(z+5)}.$$

9.6 – Séries de Taylor e de Laurent

Singularidades, e a convergência das séries de Taylor

Séries de Taylor estendem-se naturalmente para os números complexos. Se $f(z)$ é analítica em um círculo de raio R centrado na origem, para $|z| < R$ sua série de Taylor em torno de $z = 0$ pode ser obtida a partir de (9.13) (veja a figura 9.10):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{1}{\zeta} \frac{f(\zeta)}{\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Como $|z/\zeta| < 1$, nós usamos a soma de uma série geométrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \left[\frac{1}{\zeta} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\right] \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

De (9.14),

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \Rightarrow$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \blacksquare \tag{9.15}$$

O resultado é a bem conhecida série de McLaurin[1] para uma função. Substituindo z por $z - z_0$ (na prática, uma mudança de variáveis linear), nós encontramos o resultado mais geral para séries de Taylor (Dettman, 1984, teorema 4.4.2):

Teorema 9.7 Se $f(z)$ é analítica em uma vizinhança de z_0, então a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{9.16}$$

converge para $|z - z_0| < R$, onde R é a menor distância entre z_0 a qualquer ponto onde $f(z)$ não é analítica.

Exercícios Propostos

9.11 Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções complexas *analíticas* em z_0, e tais que $f(z_0) = g(z_0) = 0$; então existem as séries de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} (z - z_0)^n,$$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}}{n!} (z - z_0)^n.$$

Suponha que $g'(z_0) \neq 0$; usando os fatos acima, prove a *Regra de l'Hôpital*:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9.12 A função

$$F(x) = \int \operatorname{arctg}(x)\, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$$

possui uma série de Taylor, que pode ser obtida derivando-se sucessivamente o lado direito acima. *Nesta questão, isso é proibido.* Em vez disto, obtenha a série de Taylor de $F(x)$ integrando termo a termo:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

(Note também que o procedimento alternativo é mais rápido e mais fácil do que derivar sucessivamente $F(x)$.)

Séries de Laurent

Para variáveis complexas, mesmo que $f(z)$ não seja analítica em $z = z_0$, ainda assim é possível, em alguns casos, obter expansões "em torno" de z_0. Essas séries, mais gerais que as séries de Taylor, são denominadas séries de Laurent. Esse é o assunto do próximo teorema (Dettman, 1984, teorema 4.6.1):

[1] A série de McLaurin é a série de Taylor em torno da origem.

Figura 9.11: A região de validade da expansão em série de Laurent: $f(z)$ é analítica na região cinza, e a sua expansão em série de Laurent em torno de z_0 vale no anel entre os círculos de raios R_1 e R_2.

Teorema 9.8 Seja $f(z)$ analítica no anel $R_1 < |z - z_0| < R_2$; então, nessa região, vale a expansão

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9.17}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \tag{9.18}$$

onde $\mathscr{L}$ é qualquer contorno fechado dentro do anel envolvendo z_0.

A figura 9.11 ilustra o teorema 9.8.

É possível, neste ponto, saltar diretamente para a próxima seção, que é dedicada a calcular séries de Laurent. Vale a pena, entretanto, entender a lógica de obtenção do teorema 9.8.

Novamente, vamos utilizar a idéia de *deformação de trajetória*. Suponha novamente que $f(z)$ seja analítica em uma região anelar em torno de $z = 0$ dada por $R_1 < |z| < R_2$, mas que ela não seja analítica em $z = 0$ (e possivelmente em uma vizinhança de $z = 0$). Isso é mostrado, agora, na figura 9.12. Para qualquer z dessa região, a fórmula integral de Cauchy fornece (novamente no limite quando os caminhos $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ estão infinitamente próximos, e suas integrais se anulam)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta. \tag{9.19}$$

Sobre $\mathscr{L}_1$, $|\zeta| < |z|$, e o oposto ocorre sobre $\mathscr{L}_2$. Reescrevemos a equação acima e utilizamos a série geométrica da mesma forma que fizemos antes para obter a série de Taylor:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta$$

Figura 9.12: A obtenção da fórmula para a série de Laurent.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_2} \frac{1}{\zeta} \frac{f(\zeta)}{\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)} \,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_1} \frac{1}{z} \frac{f(\zeta)}{\left(\frac{\zeta}{z} - 1\right)} \,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_1} \frac{f(\zeta)}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^m \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} z^n \left[\oint_{\mathscr{L}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta\right] + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{1}{z^{m+1}} \left[\oint_{\mathscr{L}_1} \zeta^m f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta\right]
\end{aligned}
$$

No segundo termo acima, faça

$$
\begin{aligned}
n &= -(m+1), \\
m &= -(n+1),
\end{aligned}
$$

e reescreva:

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta\right] + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{z^{-n}} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\mathscr{L}_1} \zeta^{-(n+1)} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta\right].
$$

Substituindo-se agora z por $z - z_0$, e ζ por $\zeta - z_0$, e substituindo-se $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ por $\mathscr{L}$ por deformação de caminho, obtém-se o teorema 9.8 ■

Singularidades de funções complexas

Nem toda singularidade, entretanto, permite uma expansão em série de Laurent. Por exemplo, não existe uma série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ para a função $f(z) = z^{1/5}$, porque z_0 nesse caso é um ponto de ramificação, e não uma *singularidade isolada*.

Note portanto o seguinte: uma singularidade pode ser isolada ou não. Todas as singularidades das quais emanam cortes no plano complexo são não-isoladas.

Já se $z = a$ é uma singularidade isolada, é sempre possível fazer uma expansão em série de Laurent em torno de a:

$$
f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - a)^n.
$$

Dizemos que N é a *ordem* da singularidade, e que $z = a$ é um polo de ordem N.

Exemplo 9.7 A função

$$f(z) = \frac{1}{(z - [3 + 2\mathrm{i}])^5}$$

é analítica em todos os pontos do plano complexo, exceto em $z = 3 + 2\mathrm{i}$. Em torno desse ponto, a série de Laurent é a própria função, com

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = -5, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$z = 3 + 2\mathrm{i}$ é um polo de ordem 5.

Suponha que $z = a$ seja o polo de mais alta ordem de $f(z)$. Façamos uma expansão em série de Laurent em torno de a. É relativamente fácil obter c_{-N} algebricamente:

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-N}\frac{1}{(z-a)^N} + c_{-N+1}\frac{1}{(z-a)^{N-1}} + c_{-N+2}\frac{1}{(z-a)^{N+2}} + \dots \\ (z-a)^N f(z) &= c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + c_{-N+2}(z-a)^2 + \dots \\ \lim_{z\to a}(z-a)^N f(z) &= (z-a)^N f(a) = c_{-N}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.8 Seja

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})^2}.$$

Identifique a singularidade de mais alta ordem N da função, e obtenha (o coeficiente da série de Laurent) c_{-N}.

SOLUÇÃO
Por inspeção, $N = 3$, e o polo de ordem 3 é $z = \mathrm{i}$. Próximo desse polo,

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \frac{1}{(2\mathrm{i})^2}\frac{1}{(z-\mathrm{i})^3}, \qquad \Rightarrow \\ c_{-3} &= -\frac{1}{4} \blacksquare \end{aligned}$$

O resultado pode ser confirmado com Maxima:

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                  70
(%i2) f : 1/((z-%i)^3*(z+%i)^2);
                                        1
(%o2)                       --------------------
                                    3          2
                            (z - %i)   (%i + z)
(%i3) taylor(f,z,%i,4);
                    1              %i              3         %i    5 (z - %i)
(%o3)/T/ (- -----------) - ----------- + ----------- + -- - ----------
                       3               2   16 (z - %i)   8         64
             4 (z - %i)      4 (z - %i)
                                     2              3                4
                    (3 %i) (z - %i)     7 (z - %i)     %i (z - %i)
                  - ---------------- + ----------- + ------------ + . . .
                            64               256             64
```

A mesma idéia agora pode ser utilizada para encontrar uma fórmula para c_{-1}, da seguinte maneira:

$$f(z) = c_{-N}\frac{1}{(z-a)^N} + c_{-N+1}\frac{1}{(z-a)^{N-1}} + c_{-N+2}\frac{1}{(z-a)^{N+2}} + \dots$$

Então,

$$\begin{aligned}
(z-a)^N f(z) &= c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + c_{-N+2}(z-a)^2 + \dots \\
\frac{\mathrm{d}\left[(z-a)^N f(z)\right]}{\mathrm{d}z} &= c_{-N+1} + 2c_{-N+2}(z-a) + 3c_{-N+3}(z-a)^2 + \dots \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}z^{N-1}}\left[(z-a)^N f(z)\right] &= (N-1)!c_{-1}; \\
c_{-1} &= \lim_{z\to a}\frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}z^{N-1}}\left[(z-a)^N f(z)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 9.9 Obtenha o resíduo (isto é: o coeficiente c_{-1} da série de Laurent respectiva) de

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

em torno de $z = \mathrm{i}$.

SOLUÇÃO
Esta é uma questão de aplicação de fórmula: o pólo é de ordem 2: $N = 2$, e

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}z^{N-1}}\left[(z-\mathrm{i})^N f(z)\right] \\
&= \lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z+\mathrm{i})^2} \\
&= \lim_{z\to \mathrm{i}} -\frac{(z-\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^3} = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Juntos, os teoremas 9.7 e 9.8 justificam nossa afirmativa um pouco mais acima: dizer que $f(z)$ é analítica em z_0 é sinônimo de dizer que existe a série de Taylor de $f(z)$ em torno de z_0, e que essa série possui um raio de convergência $R > 0$.

Primeiro, recapitulamos:

Definição 9.6 Se existe $f'(z)$ em uma vizinhança de $z = a$, $f(z)$ é *analítica* em $z = a$.

Nós podemos, portanto, adotar uma definição mais "prática" de analiticidade!

Definição 9.7 $f(z)$ é analítica em z_0 se existe $R > 0$ tal que (9.16) vale para z da vizinhança $|z - z_0| < R$.

Greenberg (1978, p. 36) opta por essa definição mais "prática" de analiticidade. Vamos aproveitá-la, agora, para definir o que são as singularidades de f:

Figura 9.13: A função $f(x) = 1/(1 + x^2)$. O seu raio de convergência é $R = 1$ devido às singularidades de $f(z) = 1/(1 + z^2)$ em $z = \pm\mathrm{i}$.

Definição 9.8 f é *singular* em $z = z_0$ se f não é analítica em $z = z_0$.

Em particular, f é singular quando $f(z)$ *não existe* em um ponto. É hora de colocar o teorema 9.7 em ação.

Considere, inicialmente, a função *real*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9.20}$$

É trivial obter a série de Taylor de f:

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots \tag{9.21}$$

A série converge para $|x| < 1$, mas diverge em $x = 1$. De fato, a expressão.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

não pode ser somada. No entanto, $f(x)$ existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$, como mostra o seu gráfico na figura 9.13. Onde está o problema? A função complexa equivalente,

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}, \tag{9.22}$$

é *analítica* em $z = 0$. No entanto, ela é singular em $z = \pm\mathrm{i}$, pois $1 + z^2 = 0$ nesses pontos. Essas são as duas únicas singularidades de f, e elas estão ambas a uma distância $R = 1$ da origem, em torno da qual nós expandimos $f(z)$ em série de Taylor. Portanto, de acordo com o teorema 9.7, o raio de convergência da série (9.21) é 1.

9.7 – O cálculo de séries de Laurent

Na prática, o cálculo de séries de Laurent é obtido com mais praticidade e rapidez utilizando repetidamente a equação (9.7), e não (9.18). Nesta seção, vemos vários exemplos de como fazer isso

Figura 9.14: Exemplo 9.10.

Exemplo 9.10 Obtenha todas as expansões possíveis de

$$f(z) = \frac{1}{z+\mathrm{i}}$$

em torno de $z = 0$.

SOLUÇÃO
$f(z)$ é analítica em $z = 0$, e consequentemente admite uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto. No entanto, essa série tem raio de convergência igual a 1, porque ela é limitada pela singularidade em $z = -\mathrm{i}$ (ver figura 9.14). Na região cinza-escuro, portanto, teremos uma série de Taylor. Já na região *externa* ao círculo unitário (em cinza-claro na figura 9.14), haverá uma série de Laurent.
Dentro do círculo unitário, $|z/\mathrm{i}| < 1$; manipulamos $f(z)$ algebricamente para explicitar essa variável, e utilizamos (9.7):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+\mathrm{i}} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{1}{\left(\frac{z}{\mathrm{i}}+1\right)} = -\mathrm{i}\frac{1}{1+\frac{z}{\mathrm{i}}} = -\mathrm{i}\frac{1}{1-\mathrm{i}z} \\
&= -\mathrm{i}\left[1+(\mathrm{i}z)+(\mathrm{i}z)^2+(\mathrm{i}z)^3+\ldots\right] \\
&= -\mathrm{i}\left[1+\mathrm{i}z-z^2-\mathrm{i}z^3+\ldots\right] \\
&= \left[-\mathrm{i}+z+\mathrm{i}z^2-z^3+\ldots\right], \qquad |z|<1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, fora do círculo unitário, $|\mathrm{i}/z| < 1$, e agora é essa variável que buscamos explicitar:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+\mathrm{i}} &= \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{i}}{z}\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left[1-\frac{\mathrm{i}}{z}+\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^3+\ldots\right] \\
&= \frac{1}{z}\left[1-\frac{\mathrm{i}}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{\mathrm{i}}{z^3}+\ldots\right], \\
&= \frac{1}{z}-\frac{\mathrm{i}}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{\mathrm{i}}{z^4}+\ldots, \qquad |z|>1 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 9.11 Calcule a série de Laurent de $f(z) = 1/[(z-2)(z-3)]$ em torno de $z = 0$ para o disco $2 < |z| < 3$.

SOLUÇÃO
Inicialmente, expandimos em frações parciais com MAXIMA:

```
(%i1) p : 1/((z-2)*(z-3)) ;
                                          1
(%o1)                              ---------------
                                   (z - 3) (z - 2)
(%i2) partfrac(p,z);
                                     1        1
(%o2)                               ----- - -----
                                    z - 3    z - 2
```

Em seguida note dois fatos:

$$|z| < 3 \;\Rightarrow\; \left|\frac{z}{3}\right| < 1;$$
$$|z| > 2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{2}{z}\right| < 1.$$

A idéia portanto é manipular algebricamente

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

para fazer aparecerem, explicitamente, $z/3$ e $2/z$. Vamos a isso:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-3} &= \frac{1/3}{z/3-1} = \frac{-1/3}{1-z/3} \\
&= -\frac{1}{3}\left[1 + (z/3) + (z/3)^2 + (z/3)^3 + \ldots\right] \qquad (|z| < 3); \\
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + (2/z) + (2/z)^2 + (2/z)^3 + \ldots\right] \qquad (|z| > 2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\left[\ldots + \frac{2^3}{z^4} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \frac{z^3}{3^4} + \ldots\right] \blacksquare$$

Exercícios Propostos

9.13 Encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z+3)}$$

em torno de $z = -3$ no disco $|z+3| < 3$.

9.14 Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

em torno de $z = 0$ e para a região $|z| > 1$. *Sugestão:* $|1/z| < 1$ na região especificada.

9.15 Calcule a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

em torno de $z = 0$ na região $|z| > 1$.

9.16

a) Para $|z| < 1$, encontre a série de Taylor de

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

em torno de $z = 0$.

b) Utilizando o resultado de (a), encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

em torno de $z = 1$.

9.17 Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z-2)}$$

no disco $|z-2| < 2\sqrt{2}$.

9.18 Calcule a série de Laurent de $f(z) = 1/(z-2)$ em torno de $z = 0$ para o disco $2 < |z|$.

9.19 Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{[z-(2+2\mathrm{i})][z-(5+2\mathrm{i})]}$$

em torno de $z_0 = 2\mathrm{i}$ no anel $2 < |z-2\mathrm{i}| < 5$.

9.20 Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{[z-(1+\mathrm{i})][z-(2+\mathrm{i})]}$$

em torno de $z_0 = 2+\mathrm{i}$ no anel $|z-(2+\mathrm{i})| < 1$.

9.21 Expanda a função complexa

$$f(z) = \frac{z-3}{z-7}$$

em série de Laurent em torno de $z = 3$ na região $|z-3| < 4$.

9.22 Para a região anelar indicada em cinza na figura 9.15, obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-[3+2\mathrm{i}])}$$

em torno do ponto $z = 3+0\mathrm{i}$.

Figura 9.15: Exercício 9.22.

Figura 9.16: O teorema dos resíduos. O arco de círculo $\mathscr{L}_\rho$ em torno de z_1 tem raio ρ.

9.8 – Integração de contorno e o teorema dos resíduos

Quando uma linha fechada $\mathscr{L}$ no plano complexo contém singularidades isoladas, o teorema de Cauchy (teorema 9.4) não é aplicável. No entanto, ele pode ser modificado com a mesma idéia que já utilizamos para deformar trajetórias, e também para obter a série de Laurent na seção 9.6.

Considere portanto, na figura 9.16, um contorno $\mathscr{L}$ dentro do qual há uma única singularidade de $f(z)$ no ponto z_1 indicado na figura (mais tarde generalizaremos com facilidade para um número finito de singularidades). Construímos duas trajetórias de sentidos opostos indo do contorno $\mathscr{L}$ até o perímetro $\mathscr{L}_\rho$ de uma vizinhança de raio ρ em torno de z_1, e construímos um novo contorno, $\mathscr{L} \cup \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup \mathscr{L}_\rho$.

Dentro do novo contorno, vale o teorema de Cauchy:

$$\oint_{\mathscr{L}\cup\mathscr{R}_1\cup\mathscr{R}_2\cup\mathscr{L}_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{L}_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Note que, no $\lim_{\rho\to 0}$,

$$\int_{\mathscr{R}_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{R}_2} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0;$$

então (atenção para os sentidos de percurso das integrais de linha),

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\mathscr{L}_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z\right] = 0;$$

$$\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to 0}\oint_{\mathscr{L}_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Concentramo-nos agora na integral do lado direito acima. Utilizando o teorema 9.8, expandimos $f(z)$ ao longo de $\mathscr{L}_\rho$ em série de Laurent em torno de z_1 e integramos:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_1)^n, \\
\oint_{\mathscr{L}_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_{\mathscr{L}_\rho}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_1)^n\right]\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\oint_{\mathscr{L}_\rho} c_n (z-z_1)^n\,\mathrm{d}z\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[c_n \oint_{\mathscr{L}_\rho} (z-z_1)^n\,\mathrm{d}z\right].
\end{aligned}$$

Mas de (9.12), todas as integrais dentro do somatório acima são nulas exceto quando $n = -1$; nesse caso, a integral vale $2\pi\mathrm{i}$. Temos, finalmente,

$$\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-1}.$$

No caso de diversas singularidades (digamos, um número finito J delas), basta repetirmos o procedimento em torno de cada singularidade, conforme indicado na figura 9.17. O resultado final é:

Figura 9.17: O teorema dos resíduos para um número finito de singularidades.

Teorema 9.9 (teorema dos resíduos) Se $f(z)$ é analítica em um contorno $\mathscr{L}$ fechado e em seu interior, exceto em um número finito J de singularidades $z_1, \ldots, z_J$ em seu interior,

$$\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{J} 2\pi \mathrm{i} c_{-1}^{j}. \tag{9.23}$$

Exemplo 9.12 Utilizando obrigatoriamente o teorema dos resíduos, calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO

O resultado pode ser obtido facilmente *sem* o teorema dos resíduos observando-se que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Nosso exemplo portanto não se refere ao cálculo do valor numérico *em si* da integral imprópria, mas sim à técnica de "integração de contorno", e à aplicação do teorema dos resíduos.

Começamos observando que a função

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

possui dois polos de ordem 1 em $z = \pm\mathrm{i}$.

Na figura 9.18, escolhemos o contorno $\mathscr{L}_R \cup \mathscr{L}_C$, composto pelo segmento $\mathscr{L}_R$ de reta $(-R, +R)$ sobre o eixo dos xs e pelo semi-círculo $\mathscr{L}_C$ com centro na origem e raio R. Para qualquer valor finito de $R > 1$, o contorno sempre envolve a singularidade $z_1 = +\mathrm{i}$, e portanto:

$$R > 1 \Rightarrow \int_{\mathscr{L}_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{L}_C} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$

Figura 9.18: Exemplo 9.12.

onde c_{-1} é o resíduo (coeficiente -1 da série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z = +\mathrm{i}$). Vamos agora mostrar que $\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_C} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Sobre $\mathscr{L}_C$, temos

$$\begin{aligned} z &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathscr{L}_C} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\mathscr{L}_C} |f(z)\,\mathrm{d}z| \\ &= \int_{\mathscr{L}_C} \left|\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{1}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{|\mathrm{i}||R||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}{\left|1+R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{|R|}{\left|1+R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{pois } |\mathrm{i}| = 1,\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1,) \\ &\le \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R}{\left|R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{R} \to 0, \text{ quando } R \to \infty. \end{aligned}$$

Resta calcular c_{-1}: quando $z \to \mathrm{i}$,

$$\begin{aligned} f(z) &\sim \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} \\ &\sim \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{z-\mathrm{i}} \Rightarrow \\ c_{-1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}, \end{aligned}$$

donde

$$R \to \infty \Rightarrow$$
$$\int_{\mathscr{L}_R} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}} = \pi \ \blacksquare$$

Exemplo 9.13 Utilizando integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO

Inicialmente, pensamos em utilizar o mesmo contorno da figura 9.18, antecipando que haverá 4 singularidades de

$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{z^4+1},$$

sendo que duas delas dentro do contorno da figura. Antes de continuarmos, entretanto, precisamos investigar o comportamento da função $f(z)$ sobre $\mathscr{L}_C$, quando $R \to \infty$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \cos(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(z), \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} &= \cos(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(z), \\ \mathrm{sen}(z) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Em um ponto z qualquer de $\mathscr{L}_C$ teremos

$$z = x + \mathrm{i}y = R\cos(\theta) + \mathrm{i}R\,\mathrm{sen}(\theta);$$

e

$$\begin{aligned} |z\,\mathrm{sen}(z)| &= \left| R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \right| \\ &= \left| R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \right| \\ &= \left| R\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[R\cos(\theta)+\mathrm{i}R\,\mathrm{sen}(\theta)]} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[R\cos(\theta)+\mathrm{i}R\,\mathrm{sen}(\theta)]}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2}\left| R\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\cos(\theta)}\mathrm{e}^{-R\,\mathrm{sen}(\theta)} - R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R\cos(\theta)}\mathrm{e}^{+R\,\mathrm{sen}(\theta)} \right|; \end{aligned}$$

quando $R \to \infty$,

$$\begin{aligned} |z\,\mathrm{sen}(z)| &\sim \frac{1}{2}R\mathrm{e}^{+R\,\mathrm{sen}(\theta)}; \qquad \Rightarrow \\ |f(z)| &\sim \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{+R\,\mathrm{sen}(\theta)}}{R^3} \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto, não é possível "controlar" o módulo de $f(z)$ sobre $\mathscr{L}_C$, e utilizar $f(z)$ para resolver o problema não é uma boa ideia!
Por outro lado, considere

$$g(z) = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^4},$$

e *suponha* que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_C} g(z)\,\mathrm{d}z \to 0 \text{ quando } R \to \infty; \tag{9.24}$$

nesse caso, quando $R \to \infty$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{L}_R} g(z)\,\mathrm{d}z &\to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \mathrm{i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x}_{I_2}. \end{aligned}$$

Observe que a primeira integral do lado direito acima é nula, porque o integrando é uma função ímpar. Já a segunda integral é facilmente relacionada com a integral desejada, porque o integrando é uma função par:

$$\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Nosso plano portanto consiste em demonstrar (9.24) e em seguida utilizar o teorema dos resíduos, juntamente com o fato de que I_1 é igual a zero, para calcular a integral desejada. Provemos (9.24):

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathscr{L}_C} g(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_{\mathscr{L}_C} \left|g(z)\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \int_{\mathscr{L}_C} \left|\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\left|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}\right|}{\left|1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right|}\left|\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} R^2\frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\left|\mathrm{e}^{-y}\right|}{\left|1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_{\theta=0}^{\pi} R^2\frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\left|\mathrm{e}^{-y}\right|}{\left|R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|\left|\mathrm{e}^{-y}\right|}{R^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\left|\mathrm{e}^{-y}\right|}{R^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R^2} \to 0 \text{ quando } R\to\infty.
\end{aligned}$$

Na penúltima linha acima, observe que sobre $\mathscr{L}_C$ $y \geq 0$, donde

$$\left|\mathrm{e}^{-y}\right| \leq 1.$$

Resta-nos agora, portanto, apenas calcular os resíduos. As raízes de $1+z^4$ são

$$\begin{aligned}
z_k &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}, \\
r^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta_k} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2(k-1)\pi)}, \\
r &= 1, \\
\theta_k &= \frac{\pi}{4} + (k-1)\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

As duas singularidades dentro do contorno escolhido são

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A função $g(z)$ é

$$g(z) = \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)},$$

e os dois resíduos de interesse para nós são

$$\begin{aligned}
c_{-1}^{(1)} &= \frac{z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}, \\
c_{-1}^{(2)} &= \frac{z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}.
\end{aligned}$$

O cálculo fica um pouco mais fácil fazendo-se um diagrama das quatro raízes, e das diferenças entre elas que aparecem acima, conforme indicado na figura 9.19:

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= \sqrt{2}, \\
z_1 - z_3 &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \\
z_1 - z_4 &= \mathrm{i}\sqrt{2};
\end{aligned}$$

analogamente,

$$z_2 - z_1 = -\sqrt{2},$$

Figura 9.19: Diferenças entre raízes no exemplo 9.13. O círculo tem raio unitário, e os argumentos das raízes são múltiplos de $\pi/4$.

$$\begin{aligned} z_2 - z_3 &= \mathrm{i}\sqrt{2}; \\ z_2 - z_4 &= 2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}. \end{aligned}$$

Agora:

$$\begin{aligned} c_{-1}^{(1)} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2)}}{(\sqrt{2})2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(\mathrm{i}\sqrt{2})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2)}}{4\mathrm{i}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}/2}\left(\cos(\sqrt{2}/2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}/2)\right)}{4\mathrm{i}}; \\ c_{-1}^{(2)} &= \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2)}}{(-\sqrt{2})2\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}(\mathrm{i}\sqrt{2})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\sqrt{2}/2+\mathrm{i}\sqrt{2}/2)}}{-4\mathrm{i}}; \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}/2}\left(\cos(\sqrt{2}/2) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}/2)\right)}{-4\mathrm{i}}; \\ c_{-1}^{(1)} + c_{-2}^{(2)} &= \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}/2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}/2)}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos aplicar o teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\left(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2}/2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}/2)}{2}; \\ \int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}/2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}/2) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 9.14 Calcule a integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

usando o teorema dos resíduos:

- Para a função complexa $z^{1/3}$, utilize a linha de corte formada pelo semi-eixo positivo dos x: $x \in [0, \infty)$ (veja a figura 9.20).

Figura 9.20: Contorno de integração do exemplo 9.14

- O resíduo de
$$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(z+1)^2}$$
em $z = -1$ é $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}/3$.
- Mostre que as integrais sobre os círculos $\mathscr{C}_R$ e $\mathscr{C}_\epsilon$ indicados na figura, cujos raios são respectivamente R e ϵ, tendem a zero quando $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$.
- Calcule as integrais de $f(z)$ sobre $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ (percorrendo o contorno no sentido anti-horário).
- Junte tudo, e mostre que a integral pedida vale $2\pi/(3\sqrt{3})$.

SOLUÇÃO
A linha de corte indicada limita o argumento de $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ a $0 \le \theta < 2\pi$. Sobre $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$, e
$$\int_{\mathscr{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{1/3}}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1)^2}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
Para $R \to \infty$,
$$\int_{\mathscr{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(1/3+1-2)}R^{1/3+1-2}\,\mathrm{d}\theta \to 0.$$
Sobre $z = \epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
$$\int_{\mathscr{C}_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{1/3}}{(\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1)^2}\mathrm{i}\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
Para $\epsilon \to 0$,
$$\int_{\mathscr{C}_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(1/3+1)}\epsilon^{1/3+1}\,\mathrm{d}\theta \to 0.$$
Agora, pelo teorema dos resíduos,
$$\int_{\mathscr{C}_R} + \int_{\mathscr{C}_\epsilon} + \int_{\mathscr{L}_1} + \int_{\mathscr{L}_2} = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$
onde $c_{-1} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}/3$ é o resíduo de $f(z)$ em -1. Mas:
$$\text{em } \mathscr{L}_1 : z = x,$$

$$\text{em } \mathscr{L}_2 : z = x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{L}_1} &= \int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x,\\
\int_{\mathscr{L}_2} &= \int_\infty^0 \frac{(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^{1/3}}{(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}+1)^2}\,\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})\\
&= -\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Note que $x = xe^{2\pi\mathrm{i}}$, e que só há diferença no termo $z^{1/3}$. Juntando tudo,

$$\begin{aligned}
\left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\right)\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3},\\
\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}-\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}}\\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\frac{1}{(-1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)-(-1/2-\mathrm{i}\sqrt{3}/2)}\\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

9.23 Calcule a integral

$$I = \oint_{\mathscr{L}} z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z$$

para o contorno $\mathscr{L}$ dado pelo círculo unitário $|z| = 1$.

9.24 Calcule

$$\int_{\mathscr{L}} \frac{1}{(z^4-1)^2}\mathrm{d}z,$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo $|z - \mathrm{i}| = 1$, mostrado na figura 9.21.

9.25 Utilizando obrigatoriamente integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Sugestão: considere a integral

$$J = \oint_{\mathscr{L}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

em um contorno $\mathscr{L}$ adequado. Ao escolher seu contorno de integração, a integral deve se anular (no limite) em alguns trechos do contorno: *não se esqueça de provar isso*.

9.26 Calcule a integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sugestão: Às vezes, Cálculo I é mais útil do que Cálculo IV.

Figura 9.21: Figura do Exercício 9.24.

Figura 9.22: Exercício 9.30.

9.27 Usando *obrigatoriamente* o teorema dos resíduos, e justificando todos os passos necessários (escolha de um contorno adequado; prova de que a integral de linha se anula sobre certas partes do contorno, etc.), calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

9.28 Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-\operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

9.29 Usando obrigatoriamente integração de contorno, calcule

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x.$$

9.30 Utilizando obrigatoriamente integração de contorno com variáveis complexas, calcule

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^3 + \mathrm{i}} \, \mathrm{d}x.$$

onde x é o eixo dos reais e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Utilize o contorno mostrado na figura 9.22 com $R \to \infty$.

9.31 Usando obrigatoriamente integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^6} \, \mathrm{d}x.$$

10

A técnica de integração de Feynman e funções definidas por integrais

Muitas funções que aparecem em aplicações de Matemática são definidas por integrais. Neste capítulo nós revisamos algumas dessas funções e de suas aplicações.

10.1 – A técnica de Feynman

A técnica de Feynman consiste em introduzir um parâmetro em uma integral, diferenciar em relação ao parâmetro, e resolver a integral "indiretamente". Como quase sempre, é mais fácil entendê-la por exemplos. Considere então a integral do exercício 2.10,

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x,$$

cuja solução, no apêndice C, foi obtida exclusivamente com a fórmula de Euler. A técnica de Feynman para o cálculo dessa integral consiste em duas observações. Em primeiro lugar, note que a integral

$$I(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{b}{b^2+a^2} \tag{10.1}$$

pode ser calculada facilmente por integração por partes, ou novamente com o auxílio da fórmula de Euler (veja o exemplo 2.7 para uma integral similar envolvendo o $\cos(bx)$). Em segundo lugar, faça agora

$$I'(a) = -\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2} \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} \blacksquare \tag{10.2}$$

10.2 – Uma velha conhecida: $\ln(x)$

A primitiva de $f(x) = x^n$ é

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

A fórmula funciona para qualquer $n \in \mathbb{R}$, exceto quando $n = -1$. Não existe uma fórmula para

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

e a única alternativa é definir a primitiva pela própria integral.

Definição 10.1 A função logaritmo natural, $\ln(x)$, $x > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, é definida por

$$\ln(x) \equiv \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{10.3}$$

As propriedades clássicas de logaritmos seguem-se de maneira quase trivial. Na sequência, nós seguimos de perto a excelente abordagem de Leithold (1977, capítulo 8). As propriedades que nos interessam são

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \tag{10.4}$$

$$\ln(a^r) = r\ln(a). \tag{10.5}$$

Note que elas esgotam *todas* as operações com logaritmos. Por exemplo, se $r = -1$ em (10.5), então $\ln(1/a) = \ln(a^{-1}) = -\ln(a)$.

Para provar (10.4), parta de

$$\int_{t=a}^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

e substitua $t = au$; então,

$$\mathrm{d}t = a\mathrm{d}u,$$

$$\int_{t=a}^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{b} \frac{1}{au}\,a\mathrm{d}u = \int_{u=1}^{b} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\ln(ab) &= \int_{1}^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1}^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1}^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{u=1}^{b} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \ln(a) + \ln(b),
\end{aligned}$$

e isso prova (10.4).

A prova de (10.5) é similar. Considere

$$\ln\left(a^r\right) = \int_{t=1}^{a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t;$$

faça $u = t^{1/r}$; então,

$$\begin{aligned}
u &= t^{1/r}, \\
t &= u^r, \\
\mathrm{d}t &= ru^{r-1}\,\mathrm{d}u, \\
\ln\left(a^r\right) &= \int_{t=1}^{a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=1}^{a} \frac{1}{u^r}\,ru^{r-1}\,\mathrm{d}u \\
&= r\int_{u=1}^{a} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = r\ln(a),
\end{aligned}$$

o que prova (10.5).

O valor principal de Cauchy

No exemplo 8.2, nós estabelecemos a regra de que

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

desde que $ab > 0$. Existe entretanto uma alternativa que atende à ideia intuitiva de que as áreas debaixo de $1/x$ se "cancelam" quando integramos desde um limite negativo até um positivo: veja novamente a figura 8.1. Essa alternativa, denominada *valor principal de Cauchy*, consiste em definir

---

Definição 10.2 O valor principal de Cauchy: se $a > 0$ e $b > 0$,

$$⨍_{-a}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\epsilon}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Note que, usando a regra que estabelecemos no Exemplo 8.2, temos agora

$$\begin{aligned}
⨍_{-a}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\epsilon}^{b} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon\to 0_+} \left[\ln\left(\frac{\epsilon}{a}\right) + \ln\left(\frac{b}{\epsilon}\right)\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0_+} \left[\ln(\epsilon) - \ln(a) + \ln(b) - \ln(\epsilon)\right] \\
&= \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O valor principal de Cauchy não se limita à função $f(x) = 1/x$: suponha $f(x)$ contínua em $[a, b]$ exceto em $x = c$ onde, possivelmente, $\lim_{x\to c_-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c_+} f(x) = +\infty$, ou vice-versa; neste caso, a definição do valor principal de Cauchy é

Definição 10.3 Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ exceto em $x = c$, onde, possivelmente, $\lim_{x\to c_-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c_+} f(x) = +\infty$ (ou vice-versa); O valor principal de Cauchy da integral de $f(x)$ em $[a, b]$ é

$$⨍_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.3 – A função erro e a função erro complementar

A função erro apareceu pela primeira vez na seção 4.3, e sua definição (4.10) é repetida aqui:

Definição 10.4 A função erro $\mathrm{erf}(x)$ é definida por

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u=0}^{x} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u. \tag{10.6}$$

Definição 10.5 A função erro complementar é

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x). \tag{10.7}$$

Como veremos logo abaixo, o fator de normalização $2/\sqrt{\pi}$ é introduzido na definição para que $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. O primeiro ponto a se observar é que a integral acima não pode ser calculada em termos de funções elementares, ou seja: não existe uma função elementar $F(x)$ tal que $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Esse resultado (que também se aplica a diversas outras funções além de e^{-x^2}) é denominado "teorema de Liouville" (Liouville, 1833a,b,c). Veja também Risch (1969, 1970).

Mas o que é uma "função elementar"? Segundo Conrad (2005),

> Roughly speaking, an elementary formula should be built from the familiar operations and functions in calculus: addition, multiplication, division, root extraction, trigonometric functions and their inverses, exponential and logarithmic functions, and arbitrary composition among such functions.

ou:

> A grosso modo, uma função elementar é qualquer função construída a partir das operações e funções familares do Cálculo: adição, multiplicação, divisão, extração de raízes, funções trigonométricas e suas inversas, as funções expoencial e logaritmica, e composições arbitrárias entre essas funções.

Conrad (2005) nos fornece o seguinte exemplo de uma "função elementar":

$$f(x) = \frac{\pi x^2 - 3x\ln(x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x - \operatorname{sen}\left(x/(x^3-7)\right)}}.$$

De volta à função erro, desejamos agora calcular

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Interessantemente, embora (10.6) não possa ser calculada em termos de funções elementares, o *valor* da integral definida acima pode ser obtido. Uma forma de calculá-lo é a seguinte:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right] \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Essa integral dupla agora pode ser calculada facilmente em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \pi\int_{r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}(2r)\,\mathrm{d}r; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u &= r^2, \\
\mathrm{d}u &= 2r\mathrm{d}r, \\
I^2 &= \pi \int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \pi \;\Rightarrow \\
I &= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

Como a função e^{-x^2} é par, segue-se que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{10.8}$$

e agora o fator $2/\sqrt{\pi}$ em (10.6) produz $\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

Alternativamente, parta de

$$I^2 = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 4\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Na integral interna (em y), x é uma constante. Faça portanto

$$y = sx \;\Rightarrow \mathrm{d}y = x\mathrm{d}s$$

e mude a integral de y para s:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= 4\int_{x=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-(x^2+x^2s^2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{x=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2(1+s^2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{s=0}^{\infty} \frac{-1}{1+s^2}\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+s^2)}\,(-(1+s^2))(2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= 2\int_{s=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{1+s^2}\mathrm{e}^{-x^2(1+s^2)}\right]_{x=0}^{\infty} \mathrm{d}s \\
&= 2\int_{s=0}^{\infty} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= 2\left[\mathrm{arctg}(\infty) - \mathrm{arctg}(0)\right] \\
&= 2\frac{\pi}{2} = \pi; \;\Rightarrow I = \sqrt{\pi} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

10.4 – A função Gama

Definição 10.6 A função Gama é definida por

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{10.9}$$

Uma fórmula de recorrência pode ser encontrada facilmente integrando-se (10.9) por partes:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \underbrace{t^{x-1}}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v}$$

$$
\begin{aligned}
&= -t^x \mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= x \int_0^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= x\Gamma(x). \qquad (10.10)
\end{aligned}
$$

Note que a integral (10.9) diverge para $x = 0$, ou seja: $\Gamma(0)$ não existe. Por outro lado,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1. \qquad (10.11)$$

Agora, de (10.10), segue-se que

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1, \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2, \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 6, \\
\Gamma(5) &= 4\Gamma(4) = 24, \\
&\vdots \\
\Gamma(n) &= (n-1)!, \qquad (10.12)
\end{aligned}
$$

o que estabelece a relação entre a função gama e o fatorial para números inteiros.

A substituição de variáveis

$$
\begin{aligned}
t &= u^2, \\
\mathrm{d}t &= 2u\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

produz

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} (u^2)^{x-1} \mathrm{e}^{-u^2} 2u\,du, \\
&= 2\int_0^{\infty} u^{2x-1} \mathrm{e}^{-u^2}\,du. \qquad (10.13)
\end{aligned}
$$

Segue-se imediatamente que

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \qquad (10.14)$$

Esse resultado pode ser generalizado para o cálculo de $\Gamma((2n+1)/2)$, $n \in \mathbb{N}$, com o auxílio da técnica de integração de Feynman. Primeiramente, note que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2u^2}\,\mathrm{d}au = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Diferenciando ambos os lados da 2ª igualdade em relação a a,

$$\int_0^{\infty} u^2 \mathrm{e}^{-a^2u^2}(-2a)\,\mathrm{d}u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^2} \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} u^2 \mathrm{e}^{-a^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}.$$

Mais uma vez,

$$\int_0^{\infty} u^4 \mathrm{e}^{-a^2u^2}(-2a)\,\mathrm{d}u = -\frac{3\sqrt{\pi}}{4a^4} \;\Rightarrow\; \int_0^{\infty} u^4 \mathrm{e}^{-a^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^5}.$$

Figura 10.1: A função $\Gamma(x)$.

É relativamente simples identificar a lei de formação:

$$I(a,n) \equiv \int_0^\infty u^{2n} \mathrm{e}^{-a^2u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{2^{n+1}a^{2n+1}}\sqrt{\pi}. \tag{10.15}$$

De posse de (10.15), agora obtemos, de (10.13), que

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= 2\int_0^\infty u^{\left(2\times\frac{2n+1}{2}-1\right)}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = 2I(1,n) \\ &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 1}{2^n}\sqrt{\pi}.\end{aligned} \tag{10.16}$$

A figura 10.1 mostra a aparência da função gama. Para $x \leq 0$, a integral (10.9) diverge, e a função precisa ser definida pela relação de recorrência (10.10).

Finalmente, vale definir novamente (veja (4.24)) a função gama incompleta inferior (Abramowitz e Stegun, 1972):

$$\gamma(x,y) \equiv \int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{10.17}$$

Algumas vezes, utiliza-se também a função gama incompleta $P(x,y)$, que é normalizada por $\Gamma(x)$ (Press et al., 1992, seção 6.2):

$$P(x,y) \equiv \frac{\gamma(x,y)}{\Gamma(x)}; \qquad P(x,0)=0,\ P(x,\infty)=1. \tag{10.18}$$

Exemplo 10.1 Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x^p}\,dx = \frac{\Gamma(1/p)}{p} \qquad (p>0).$$

SOLUÇÃO

Faça

$$\begin{aligned} x^p &= t, \\ px^{p-1}dx &= dt, \\ x &= t^{1/p}, \\ x^{p-1} &= t^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

e substitua na integral:

$$\int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{px^{p-1}} = \int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{pt^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(1/p)}{p} \blacksquare$$

10.5 – A função Beta

Considere

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\,du\int_0^\infty v^{2q-1}\mathrm{e}^{-v^2}\,dv \\ &= 4\int_{u=0}^\infty\int_{v=0}^\infty u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,dv\,du. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Agora faça a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= r\operatorname{sen}\theta, \\ v &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

e obtenha a integral dupla em r, θ

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_{r=0}^\infty\int_{\theta=0}^{\pi/2} r^{2p+2q-2}(\operatorname{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2p-1}\mathrm{e}^{-r^2}r\,d\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 4\int_{r=0}^\infty r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\int_{\theta=0}^{\pi/2} r^{2p+2q-2}(\operatorname{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\Gamma(p+q)\int_{\theta=0}^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Para rearranjar a última integral, tente

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}^2\theta, \\ \mathrm{d}u &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2\int_{\theta=0}^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta &= 2\int_{u=0}^1 u^p(1-u)^q\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\frac{\mathrm{d}u}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \\ &= \int_{u=0}^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,\mathrm{d}u \equiv B(p,q), \end{aligned} \tag{10.21}$$

onde $B(p,q)$ é a função *Beta*. Isso produz o resultado

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10.22}$$

Agora, partindo de (10.21), faça a mudança de variável

$$u = \frac{t}{1+t} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

e substitua na integral:

$$\begin{aligned} B(p,q) &= \int_{t=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1} \left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{q-1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{q-1} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Em particular, se $p+q=1$,

$$B(1-q,q) = \Gamma(1-q)\Gamma(q) = \int_{t=0}^{\infty} \frac{t^{-q}}{1+t}\,\mathrm{d}t. \tag{10.24}$$

Exemplo 10.2 O resultado (10.24 é suficiente para integrar o "espectro de Kaimal" (Kaimal, 1973); se

$$f(n) = \frac{A}{1+(Bn)^{5/3}}, \tag{10.25}$$

então a integral $\int_0^\infty f(n)\,dn$ pode ser calculada facilmente fazendo-se

$$\begin{aligned} (Bn)^{5/3} = t \Rightarrow dn &= \frac{3}{5B} t^{-2/5} dt, \\ \int_0^\infty \frac{A}{1+(Bn)^{5/3}}\,dn &= \frac{3A}{5B}\int_{t=0}^{\infty} \frac{t^{-2/5}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3A}{5B}\Gamma(3/5)\Gamma(2/5). \end{aligned} \tag{10.26}$$

A mesma integral também pode ser calculada por integração de contorno. A figura 9.20 ilustra o caminho de integração $\mathscr{L}$ necessário. A semi-reta $x \in [0,+\infty)$ é a linha de corte utilizada para tornar a função

$$f(z) = \frac{z^{-2/5}}{1+z}$$

unívoca ao mesmo tempo em que se evita o pólo da função em $z=-1$. Esta linha de corte impõe que $\theta = \arg z$ fique restrito a $0 \le \theta < 2\pi$.
A integral de contorno é dividida em 4 integrais:

$$\oint_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathscr{L}_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{L}_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathscr{C}_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{10.27}$$

Sobre $\mathscr{C}_R$,

$$\begin{aligned} z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &\Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ \left|\int_{\mathscr{C}_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\mathscr{C}_R} |f(z)\,\mathrm{d}z| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left|\frac{\mathrm{i}R^{1-2/5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^{3/5}}{|1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}\,\mathrm{d}\theta \\ &\le \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{R^{3/5}}{|R-1|}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\frac{R^{3/5}}{|R-1|} \sim 2\pi R^{-2/5} \to 0, \end{aligned} \tag{10.28}$$

quando $R \to \infty$. Na passagem da penúltima para a última linha acima, nós usamos $|1+R\mathrm{e}^{i\theta}| \ge |1-|R\mathrm{e}^{i\theta}|| = |1-R|$ para majorar o integrando, eliminando a sua dependência de θ.
Sobre $\mathscr{C}_\epsilon$,

$$\begin{aligned} z = \epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &\Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{i}\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ \left|\int_{\mathscr{C}_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\mathscr{C}_\epsilon} |f(z)\,\mathrm{d}z| = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left|\frac{\mathrm{i}\epsilon^{1-2/5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right| \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\epsilon^{3/5}}{|1+\epsilon e^{i\theta}|}\,d\theta \\
&\le \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\epsilon^{3/5}}{|1-\epsilon|}\,d\theta = 2\pi\frac{\epsilon^{3/5}}{|1-\epsilon|} \sim 2\pi\epsilon^{3/5} \to 0, \qquad (10.29)
\end{aligned}
$$

quando $\epsilon \to 0$.
Por inspeção, o resíduo de $f(z)$ em $z = -1$ é

$$
\operatorname{Res} f(z) = (-1)^{-2/5} = (e^{\pi i})^{-2/5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}. \qquad (10.30)
$$

Portanto, fazendo $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ em (10.27) e aplicando o teorema dos resíduos,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathscr{L}} f(z)\,dz &= 2\pi i e^{-2\pi i/5}, \\
\int_{\mathscr{L}_1} f(z)\,dz + \int_{\mathscr{L}_2} f(z)\,dz &= 2\pi i e^{-2\pi i/5}. \qquad (10.31)
\end{aligned}
$$

Sobre $\mathscr{L}_1$, $z^{-2/5} = x^{-2/5}$; sobre $\mathscr{L}_2$, porém, $z^{-2/5} = \left(xe^{2\pi i}\right)^{-2/5} = x^{-2/5}e^{-4\pi i/5}$, donde

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\infty} \frac{x^{-2/5}}{1+x}\,dx + \int_{x=-\infty}^{0} \frac{x^{-2/5}e^{-4\pi i/5}}{1+x}\,dx &= 2\pi i e^{-2\pi i/5} \\
\left[1 - e^{-4\pi i/5}\right] \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^{-2/5}}{1+x}\,dx &= 2\pi i e^{-2\pi i/5} \\
\int_{x=0}^{\infty} \frac{x^{-2/5}}{1+x}\,dx &= 2\pi i \frac{e^{-2\pi i/5}}{1-e^{-4\pi i/5}} \\
&= 2\pi \frac{\operatorname{sen} 2\pi/5 + i\cos 2\pi/5}{1 - (\cos 4\pi/5 - i \operatorname{sen} 4\pi/5)} \\
&= 2\pi \frac{\operatorname{sen} 2\pi/5 + i\cos 2\pi/5}{2\operatorname{sen}^2 4\pi/5 + 2i \operatorname{sen} 2\pi/5 \cos 2\pi/5} \\
&\frac{2\pi}{2\operatorname{sen} 2\pi/5}\,\frac{\operatorname{sen} 2\pi/5 + i\cos 2\pi/5}{\operatorname{sen} 2\pi/5 + i\cos 2\pi/5} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen} 2\pi/5} \blacksquare \qquad (10.32)
\end{aligned}
$$

Com uma calculadora ou com um programa de processamento simbólico tal como Maxima, é possível verificar rapidamente que $\pi/(\operatorname{sen} 2\pi/5) = \Gamma(2/5)\Gamma(3/5)$.

A função Beta incompleta (Press et al., 1992, seção 6.4) é definida por

$$
I_x(p,q) \equiv \frac{1}{B(p,q)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt, \qquad (10.33)
$$

com

$$
\begin{aligned}
I_0(p,q) &= 0, && (10.34)\\
I_1(p,q) &= 1, && (10.35)\\
I_x(p,q) &= 1 - I_{1-x}(q,p). && (10.36)
\end{aligned}
$$

Exercícios Propostos

10.1 Você deseja calcular a integral indefinida

$$
\int \frac{x}{1+x}\,dx = x + 1 - \ln(x+1).
$$

Para isso, prove (seguindo a sugestão), os seguintes fatos auxiliares:

a) (integração por partes)

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x.$$

b) (substituição $y = 1 + x$ no resultado anterior)

$$\int \ln(1 + x) \, \mathrm{d}x = (1 + x) \ln(1 + x) - (1 + x).$$

c) (aplicação direta da regra de derivada do produto)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \ln(x + 1) = \frac{x}{x + 1} + \ln(x + 1).$$

d) Finalmente, junte todos os fatos acima de forma ordenada para obter o resultado desejado.

10.2 Calcule $\Gamma'(x)$ em termos da integral definidora da função $\Gamma(x)$.

11

Soluções de EDO*s* em séries

As equações diferenciais lineares de ordem 2 que nós encontramos no capítulo 8 limitavam-se, em sua grande maioria, a equações com coeficientes constantes, e à Equação de Euler. Muitas vezes, entretanto, em problemas de Física e de Engenharia, surgem equações com coeficientes *não constantes*. Soluções em séries são uma maneira de resolver esses problemas.

11.1 – Motivação

Considere o exemplo simples de resolver (*i.e.*, encontrar a solução geral de)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0. \tag{11.1}$$

A solução é bem conhecida: $y = a_0 \mathrm{e}^{-x}$, e sua obtenção é trivial.

Nossa idéia aqui, entretanto, é mostrar como o mesmo resultado pode ser obtido por uma outra técnica, denominada *solução em série de potências*. De fato, suponha que nós não saibamos resolver (11.1) analiticamente.

Suponha entretanto que nós saibamos derivar e integrar potências. A idéia é tentar obter os coeficientes a_n de uma série que represente a solução $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{11.2}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{11.3}$$

Os índices e expoentes de x são diferentes em (11.2) e (11.3); fazemos

$$m = n - 1, \qquad n = m + 1$$

em (11.3), e substituimos:

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Note que não há nada demais em rebatizar m de n na segunda igualdade acima. Substituindo na equação (11.1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + a_n \right] x^n = 0.$$

Para que a equação valha, por exemplo, para qualquer $x > 0$, o termo entre colchetes deve ser zerado *para todo n*:

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= -a_n,\\ a_{n+1} &= -\frac{a_n}{n+1}.\end{aligned}$$

É fácil obter o termo geral:

$$\begin{aligned}a_1 &= -a_0,\\ a_2 &= +\frac{a_0}{2},\\ a_3 &= -\frac{a_0}{3\times 2},\\ a_4 &= +\frac{a_0}{4\times 3\times 2},\\ &\vdots\\ a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}a_0.\end{aligned}$$

Portanto, a solução em série é

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

É evidente que a série obtida é a série de Taylor da função e^{-x}: $y(x) = a_0\mathrm{e}^{-x}$, como não poderia deixar de ser.

11.2 – O método de Frobenius

O método de Frobenius diz respeito a estudar o comportamento de soluções de equações diferenciais próximo de *pontos singulares* , e na verdade tirar partido desse comportamento para encontrar soluções válidas em uma ampla região do domínio da solução.

Definição 11.1 Dada a equação diferencial

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{11.4}$$

x_0 é um ponto *singular* se $p(x)$ ou $q(x)$ não forem analíticas em x_0.

Mas alguns pontos singulares são mais bem comportados do que outros:

Definição 11.2 Se x_0 é um ponto singular, então:

i) x_0 é um ponto singular *regular* quando $(x - x_0)p(x)$ e $(x - x_0)^2 q(x)$ forem analíticas em x_0.

ii) Caso contrário, x_0 é um ponto singular *irregular*.

Pontos singulares irregulares são casos realmente patológicos, e não serão tratados neste capítulo. Nós vamos nos concentrar em pontos singulares regulares. Além disso, sempre que $x_0 \neq 0$, nós vamos poder fazer uma mudança de variáveis do tipo $\xi = x - x_0$ e "mover" o ponto singular para a origem no novo sistema de coordenadas. Portanto, sem perda de generalidade, a partir daqui a teoria será desenvolvida para o caso em que o ponto singular é $x = 0$.

Note que nós podemos reescrever (11.4) na forma

$$x^2 y'' + x \underbrace{[xp(x)]}_{\text{analítica}} y' + \underbrace{[x^2 q(x)]}_{\text{analítica}} y = 0.$$

O truque agora consiste em expandir $xp(x)$ e $x^2 q(x)$ em séries de Taylor, já que ambas são (por hipótese) analíticas:

$$\begin{aligned} xp(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots \\ x^2 q(x) &= q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

Isso significa que, próximo de $x = 0$, se retivermos apenas os termos de maior ordem das séries de Taylor, a equação diferencial fica

$$x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0. \tag{11.5}$$

É razoável supor que a solução de (11.4) próximo de $x = 0$ será aproximada pela solução de (11.5). Mas essa é uma equação de Euler, cuja solução, como sabemos, é da forma x^r. Segue-se que uma forma geral para a solução de (11.4) que se comporta como x^r na proximidade de $x = 0$ é

$$y(x) = x^r \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right]. \tag{11.6}$$

O Método de Frobenius consiste, essencialmente, em substituir (11.6) em (11.4) e procurar os valores numéricos de r e dos $a_n s$.

Essa busca, entretanto, deve ser feita de forma sistemática. O objetivo do restante desta seção é prover um roteiro para ela.

A partir de (11.5), é muito fácil mostrar analiticamente que a equação a resolver para r é

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0. \tag{11.7}$$

Note entretanto que não é necessário memorizar a *equação indicial* (11.7): ela sempre surgirá naturalmente quando substituirmos a série (11.6) em (11.4). Portanto, não é absolutamente necessário memorizar (11.7). Infelizmente, é necessário memorizar o teorema a seguir, muito mais complicado!

Teorema 11.1 (Kreider et al. (1966), teorema 15-1) Sejam r_1 e r_2 as raízes de (11.7), com $r_1 \geq r_2$. Então,

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é *sempre* uma solução. Como (11.4) é uma equação diferencial linear ordinária de ordem 2, é necessário buscar uma segunda solução LI. Esta segunda solução pode ser obtida da seguinte forma:

i) Se $r_1 \neq r_2$ e $r_1 - r_2 \neq k \in \mathbb{Z}$,

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

ii) Se $r_1 = r_2$,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

iii) Se $r_1 - r_2 = k \in \mathbb{Z}$:

a) r_2 produz duas soluções LI $y_1(x)$ e $y_2(x)$, *ou*:

b)

$$y_2(x) = \kappa y_1(x)\ln(x) + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

onde κ é uma constante fixa a determinar.

O problema do teorema 11.1 é que ele tem a aparência enganosa de "simplificar" a busca de soluções. Na verdade, ele apenas condensa um fato já conhecido nosso: é sempre possível buscar uma segunda solução LI de uma EDO de ordem 2 linear a partir do conhecimento da primeira solução.

Um plano didático razoável, portanto, parece ser o seguinte: primeiro, nós devemos fornecer exemplos de *todos* os casos previstos pelo teorema 11.1 (embora isto tome um tempo considerável!). Em seguida, nós devemos fornecer ao estudante uma lista útil de equações diferenciais clássicas, sua notação e a forma de "construir" soluções sem ter que desenvolver as séries detalhadamente (ou seja, sem ter que aplicar o Método de Frobenius "na mão").

11.3 – Caso (i): $r_1 \neq r_2$ e $r_1 - r_2 \neq k \in \mathbb{Z}$

Exemplo 11.1 Resolva a equação diferencial

$$2xy'' + y' + y = 0$$

usando o método de Frobenius.

SOLUÇÃO
A forma normal é

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x}y = 0.$$

O ponto $x = 0$ é singular; mas

$$xp(x) = \frac{1}{2},$$
$$x^2 q(x) = \frac{x}{2}.$$

O ponto singular é regular.
Buscamos a solução na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n-1)(r+n)a_n x^{r+n-2}.$$

A substituição na equação diferencial nos dá

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r} = 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r-1)(n+r)+(n+r)\right]a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+r} = 0$$

Façamos

$$n+r-1 = m+r,$$
$$n-1 = m.$$

Isto resulta em

$$\sum_{m=-1}^{\infty}\left[2(m+r)(m+r+1)+(m+r+1)\right]a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$
$$\left[2(r-1)r+r\right]a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)(1+2(n+r))a_{n+1}+a_n\right]x^{n+r} = 0.$$

No método de Frobenius, *sempre* "funciona" fazer $a_0 \neq 0$. No nosso caso, isso leva diretamente à equação indicial

$$2r^2 - r = 0,$$

donde $r = 0$ ou $r = 1/2$. As raízes diferem por um número não-inteiro. Estamos no caso (i) do teorema 11.1, ou seja: cada uma das raízes leva a uma solução. A fórmula geral de recorrência é

$$a_n = \frac{-1}{(n+r)(1+2(n-1+r))}a_{n-1};$$

para $r_1 = 1/2$ e $r_2 = 0$, respectivamente, teremos:

$$a_n = \frac{-1}{(n+1/2)(1+2(n-1/2))}a_{n-1},$$
$$b_n = \frac{-1}{n(1+2(n-1))}b_{n-1}.$$

Para $r_2 = 0$, nós "mudamos" o nome das constantes apenas para enfatizar que são séries diferentes. A primeira série depende do primeiro valor, arbitrário, a_0; a segunda depende do primeiro valor, arbitrário, b_0. A solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + b_0 y_2(x);$$

note que a_0 e b_0 fazem o papel das constantes arbitrárias da solução geral, neste caso. As soluções LI são

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{30} - \frac{x^3}{630} + \frac{x^4}{22680} - \dots\right],$$
$$y_2(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \frac{1}{2520}x^4 - \dots \blacksquare$$

11.4 – Caso (ii): $r_1 = r_2$

Exemplo 11.2 Resolva

$$x^2y'' - (x + x^2)y' + y = 0.$$

SOLUÇÃO
Inicialmente, colocamos a equação na forma normal:

$$y'' - \frac{x + x^2}{x^2}y' + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Evidentemente, $x = 0$ é um ponto singular da equação. Nesse ponto, analisamos as funções

$$\begin{aligned} xp(x) &= \frac{x + x^2}{x} = 1 + x, \\ x^2q(x) &= 1. \end{aligned}$$

Ambas são analíticas em $x = 0$, e o método de Frobenius é aplicável. A aplicação padrão segue-se:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)a_n x^{n+r-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r - 1)(n + r)x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

A substituição na equação diferencial produz

$$x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n + r - 1)(n + r)x^{n+r-2}\right] - (x + x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n + r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Rearrumando,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n + r - 1)(n + r) - (n + r) + 1\right] a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)a_n x^{n+r+1} = 0.$$

É evidente que agora devemos ter

$$\begin{aligned} m + r &= n + r + 1, \\ m &= n + 1, \\ n &= m - 1. \end{aligned}$$

O 2º somatório acima torna-se

$$-\sum_{m=1}^{\infty}(m + r - 1)a_{m-1}x^{m+r}$$

Como sempre, o nome do índice de soma não importa. Rebatizando o m acima de n, e reunindo todos os termos da equação diferencial, temos

$$\begin{aligned} &\left[(r - 1)r - r + 1\right] a_0 x^r + \\ &\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n + r - 1)(n + r) - (n + r) + 1\right] a_n - \left[n + r - 1\right] a_{n-1}\right\} x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

A equação indicial é

$$\begin{aligned} r^2 - r - r + 1 &= 0, \\ r^2 - 2r + 1 &= 0, \Rightarrow \\ (r-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Temos uma raiz dupla $r = 1$, e pelo teorema 11.1, a 1ª solução é

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

No nosso caso, a equação de recursão é

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+r-1}{(n+r-1)(n+r)-(n+r)+1} a_{n-1}, \\ &= \frac{n}{n(n+1)-(n+1)+1} \\ &= \frac{n}{n^2+n-n-1+1} \\ &= \frac{n}{n^2} a_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} a_{n-1} \end{aligned}$$

Partindo-se de $a_0 = 1$, é fácil verificar que

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

e a 1ª solução é

$$y_1(x) = x\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right].$$

Agora, duas alternativas são possíveis. Uma delas é deixar a série como está:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!};$$

outra é reconhecer a série de xe^x:

$$y_1(x) = xe^x.$$

No entanto, aberta ou fechada, o método de Frobenius só nos forneceu uma solução. O teorema 11.1 nos sugere

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+r}. \tag{11.8}$$

Em vez de seguirmos uma "receita de bolo", vamos tentar justificar esta opção. Uma saída que é sempre possível com EDO*s* de ordem 2 é procurar uma segunda solução, linearmente independente da primeira, por meio do método de variação de parâmetros. Tentemos então

$$\begin{aligned} y(x) &= A(x)y_1(x), \\ y'(x) &= A'y_1 + Ay_1', \\ y''(x) &= A''y_1 + 2A'y_1' + Ay_1'', \end{aligned}$$

onde $A(x)$ é uma função a determinar. Substituindo na equação diferencial:

$$\begin{aligned} x^2\left[A''y_1 + 2A'y_1' + Ay_1''\right] - (x+x^2)\left[A'y_1 + Ay_1'\right] + Ay_1 &= 0, \\ A\left[x^2y_1'' - (x+x^2)y_1' + y_1\right] + x^2(A''y_1 + 2A'y_1') - (x+x^2)A'y_1 &= 0. \end{aligned}$$

O termo entre colchetes é nulo, porque y_1 é solução da EDO. Substituindo

$$y_1 = xe^x,$$

$$y_1' = xe^x + e^x$$

nos termos restantes:

$$\begin{aligned} x^2(xe^x)A'' + 2x^2(xe^x + e^x)A' - (x + x^2)(xe^x)A' &= 0, \\ x^3A'' + 2x^3A' + 2x^2A' - x^3A' - x^2A' &= 0, \\ x^3A'' + (x^3 + x^2)A' &= 0, \\ xA'' + (x + 1)A' &= 0. \end{aligned}$$

É evidente que podemos reduzir a ordem da equação diferencial resultante:

$$\begin{aligned} B = A' \quad &\Rightarrow \\ x\frac{dB}{dx} + (x + 1)B &= 0, \\ \frac{dB}{dx} &= -\frac{x + 1}{x}B, \\ \frac{dB}{B} &= -\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx, \\ B &= \frac{k_2}{x}e^{-x}. \end{aligned}$$

A solução para $A(x)$ é

$$A(x) = k_2 \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx + k_1,$$

donde

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_1(x) \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Observe que, na busca de uma 2ª solução LI, nós na verdade obtivemos a solução geral, com duas soluções LI. A 2ª solução é (claramente)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

À primeira vista, esta não é a forma prevista em (11.8); no entanto, a integral que aparece em $y_2(x)$ pode ser manipulada como se segue

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-x}}{x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}\,dx \\ &= \int \left[\frac{dx}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n-1}}{n!}\,dx\right] \\ &= \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n \times n!}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\ln(x) + \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m!}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n \times n!}\right] \\ &= y_1(x)\ln(x) + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{(m-1)!}\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n \times n!}\right] \\ &= y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}c_nx^{n+1} \end{aligned}$$

Note que o produto de duas séries, cada uma delas começando em x, é uma série começando em x^2, e está tudo em paz com o modelo de solução do teorema 11.1.

Tente então

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}, \\
y_2' &= y_1' \ln(x) + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^n, \\
y_2'' &= y_1'' \ln(x) + y_1' \frac{1}{x} + y_1' \frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_n x^{n-1}, \\
&= y_1'' \ln(x) + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_n x^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação diferencial, teremos:

$$
\begin{aligned}
x^2 &\left[y_1'' \ln(x) + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_n x^{n-1} \right] \\
&\quad - (x + x^2) \left[y_1' \ln(x) + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^n \right] + y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Os termos envolvendo $\ln(x)$ se anulam, pois y_1 é uma solução da equação diferencial. Resta:

$$
\begin{aligned}
&2xy_1' - 2y_1 - xy_1 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

Simplificando os termos em x^{n+1}:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+2} + 2xy_1' - (2+x) y_1 = 0.
$$

É possível "transformar" $n+2$ em $n+1$:

$$
\begin{aligned}
m + 1 &= n + 2, \\
m &= n + 1, \\
n &= m - 1
\end{aligned}
$$

donde

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} m c_{m-1} x^{m+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_{n-1} x^{n+1},
$$

se $c_0 = 0$. O resultado é a equação *não-homogênea*

$$
\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 c_n - n c_{n-1}] x^{n+1} = (2+x) y_1 - 2xy_1'.
$$

Agora, a obtenção dos $c_n s$ precisa passar pelas séries

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}, \\
y_1' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Calculamos:

$$
(2+x) y_1 - 2xy_1' = (2+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) x^n}{n!}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

Neste ponto, o mesmo truque de sempre,

$$
\begin{aligned}
n + 2 &= m + 1, \\
n + 1 &= m, \\
n &= m - 1,
\end{aligned}
$$

produz

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{(n-1)!} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 c_n - n c_{n-1}] x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n+1}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
n^2 c_n - n c_{n-1} &= -\frac{1}{(n-1)!} \\
c_n - \frac{n}{n^2} c_{n-1} &= -\frac{1}{n^2 (n-1)!} \\
c_n &= \frac{1}{n^2} \left[n c_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(n-1)! c_{n-1} - 1}{(n-1)!} \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n! c_{n-1} - 1}{(n-1)!} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{n! c_{n-1} - 1}{n!} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[c_{n-1} - \frac{1}{n!} \right]
\end{aligned}
$$

Esta fórmula de recorrência pode ser trabalhada com o objetivo de se encontrar o termo geral. Partindo de $c_0 = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -1, \\
c_2 &= \frac{1}{2} \left[-1 - \frac{1}{2!} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \right]; \\
c_3 &= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3!} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right] \\
&= \frac{1}{3\times 2!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{1}{3!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]; \\
c_4 &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4\times 3!}\right] \\
&= -\frac{1}{4\times 3!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right] \\
&= -\frac{1}{4!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right] \\
&\vdots \\
c_n &= -\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right].
\end{aligned}
$$

11.5 – Caso (iii)-a: $r_1 - r_2 = k \in \mathbb{Z}$, e a menor raiz leva a duas soluções

Exemplo 11.3 Resolva a equação diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$$

Pelo método de Frobenius.

SOLUÇÃO
O primeiro passo sempre é escrever a equação diferencial em sua *forma normal*:

$$y'' + \frac{1}{x}y + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0.$$

Como talvez fosse de se esperar, $x = 0$ é um *ponto singular*; mas

$$
\begin{aligned}
xp(x) &= 1, \\
x^2q(x) &= x^2 - 1/4,
\end{aligned}
$$

de forma que o ponto singular é regular, e o método de Frobenius se aplica.
Embora seja possível, agora, escrever a equação indicial (11.7) e avaliar as raízes, é igualmente possível (e tem que ser feito, de qualquer maneira), partir para a solução:

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1}, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n)a_n x^{r+n-2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo as séries acima na equação diferencial, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n-1)(r+n)a_nx^{r+n} + (r+n)a_nx^{r+n} - (1/4)a_nx^{r+n}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+2} = 0$$

Desejamos reescrever o último termo acima na mesma "forma" dos demais, ou seja:

$$\begin{aligned} r+n+2 &= r+m, \\ n &= m-2 \;\Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} &= \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{r+n}. \end{aligned}$$

Note a manipulação dos "nomes" dos índices mudos m e n acima. Nós agora reescrevemos a equação diferencial:

$$a_0(r^2-1/4)x^r + a_1\left((r+1)^2-1/4\right)x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\left((r+n)^2-1/4\right)+a_{n-2}\right]x^{r+n} = 0.$$

Note também que nós colocamos os termos $n=0$ e $n=1$ do somatório em evidência. São esses termos que nos darão as raízes r. Agora, para que a equação valha para qualquer x,

$$\begin{aligned} a_0(r^2-1/4) &= 0, \\ a_1\left((r+1)^2-1/4\right) &= 0. \end{aligned}$$

O seguinte passo pode ser sempre usado, *sem temor*: imponha $a_0 \neq 0$. Isso imediatamente produz $r = \pm 1/2$. Verifiquemos o que acontece com a segunda equação nesses casos:

$$\begin{aligned} r = -1/2 &\Rightarrow a_1\left((-1/2+1)^2-1/4\right) = 0 \Rightarrow a_1 \text{ é qualquer} \\ r = +1/2 &\Rightarrow a_1\left((1/2+1)^2-1/4\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0. \end{aligned}$$

Em termos do teorema 11.1, onde estamos? No caso (iii) (as duas raízes diferem por um inteiro), que na verdade é o caso mais complicado! Ou a menor raiz ($r=-1/2$) produzirá as duas soluções LI desejadas, ou não produzirá nenhuma. Portanto, a forma mais inteligente de agir é procurar imediatamente a solução associada a $r=-1/2$. Existe uma relação de recorrência que se obtém do termo entre colchetes no somatório de 2 a ∞:

$$\begin{aligned} a_n\left((-1/2+n)^2-1/4\right)+a_{n-2} &= 0, \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Note que esta relação conecta diretamente os $a_n s$ pares (a_0, a_2, a_4, etc.) e os ímpares (a_1, a_3, a_5, etc.). Isso nos dá

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}a_0 & a_3 &= -\frac{1}{6}a_1, \\ a_4 &= +\frac{1}{24}a_0 & a_5 &= +\frac{1}{120}a_1, \\ a_6 &= -\frac{1}{720}a_0 & a_7 &= -\frac{1}{5040}a_1, \ \ldots \end{aligned}$$

As duas soluções LI são, portanto:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0\left\{x^{-1/2}\left[1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\ldots\right]\right\}, \\ y_2 &= a_1\left\{x^{-1/2}\left[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\ldots\right]\right\}. \end{aligned}$$

As séries de Taylor dentro dos colchetes são "clássicas", e facilmente reconhecíveis:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^{-1/2}\cos(x), \\ y_2 &= x^{-1/2}\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Na verdade, a menos de uma constante, elas são as *funções de Bessel* de 1ª espécie e ordens $-1/2$ e $+1/2$:

$$J_{-1/2}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} \cos(x),$$
$$J_{+1/2}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} \operatorname{sen}(x) \blacksquare$$

Exemplo 11.4 Encontre a solução geral de

$$x^2 y'' + (x + x^2) y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius.

SOLUÇÃO
Na forma normal,

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 1\right) y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

Claramente, $x = 0$ é um ponto singular. Porém,

$$xp(x) = 1 + x,$$
$$x^2 q(x) = -1.$$

O ponto singular é regular, e o método de Frobenius é aplicável.
Tente:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2},$$

e substitua na EDO, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)\right] a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Evidentemente devemos fazer

$$m + r = n + r + 1,$$
$$m = n + 1,$$
$$n = m - 1;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m-1+r)\right] a_{m-1} x^{m-1+r+1} = 0.$$

Segue-se que

$$[r^2 - 1] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)^2 - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n-1+r)\right] a_{n-1} x^{n+r} = 0,$$
$$[r^2 - 1] a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r)^2 - 1\right] a_n + \left[(n-1+r)\right] a_{n-1}\right\} x^{n+r} = 0.$$

A equação indicial é

$$r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$$

As raízes diferem por um inteiro; a menor raiz pode levar às duas soluções, ou a nenhuma delas. Tentemos:

$$\begin{aligned}
[(n-1)^2 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
[n^2 - 2n + 1 - 1]a_n + [n-2]a_{n-1} &= 0,\\
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
na_n + a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n}.
\end{aligned}$$

Para $a_0 \neq 0$, esta primeira solução é:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
a_2 &= \frac{1}{2},\\
a_3 &= -\frac{1}{6},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{x}\left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right]\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}
\end{aligned}$$

Nosso teorema sobre as soluções nos garante que a menor raiz leva a *duas* soluções, mas não nos diz nada sobre como encontrá-las! No nosso caso, há necessidade de uma certa sutileza ou imaginação. Dois caminhos são possíveis:

1. O mais fácil é procurar a solução gerada por $r = +1$. Ela é

$$\begin{aligned}
[(n+1)^2 - 1]a_n + na_{n-1} &= 0,\\
(n^2 + 2n + 1 - 1)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
n(n+2)a_n + na_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n+2};
\end{aligned}$$

   A segunda solução será

$$y_2 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots$$

   que claramente é linearmente independente de y_1.

2. O mais difícil é encontrar a segunda solução a partir da menor raiz. Suponha então que $a_0 = 0$; neste caso, (lembre-se: para $r = -1$), $a_1 = 0$ necessariamente. A relação de recorrência para o próximo n, 2, fica:

$$\begin{aligned}
n(n-2)a_n + (n-2)a_{n-1} &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)a_1 &= 0,\\
2(0)a_2 + (0)0 &= 0.
\end{aligned}$$

   Portanto, se $a_0 = a_1 = 0$, a_2 pode ser qualquer. Fazendo, sem perda de generalidade, $a_2 = 1$, teremos então

$$a_3 = -1/3,$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &= +1/12,\\
a_5 &= -1/60,\\
a_6 &= 1/360,\\
a_7 &= -1/2520,
\end{aligned}
$$

etc. Ou, para $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 3} = \frac{2(-1)^n}{n!}.$$

Mudando o índice para que ele comece de 0:

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+2}x^{m+1}}{(m+2)!} = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{60} + \frac{x^5}{360} - \frac{x^6}{2520} + \dots$$

que é o mesmo resultado obtido para $r = +1$.

11.6 – Caso (iii)-b: $r_1 - r_2 = k \in \mathbb{Z}$, e a menor raiz não leva a nenhuma solução

Exemplo 11.5 Considere o Exemplo 7, página 177 de Butkov (1988):

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

Como veremos na sequência, esse é um exemplo de uma equação de Bessel de ordem 1. O Ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, e a equação admite solução pelo método de Frobenius:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)x^{n+r-2}.
\end{aligned}
$$

A substituição na equação diferencial produz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + (n+r)a_n x^{n+r} - a_n x^{n+r}\right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

Como sempre,

$$
\begin{aligned}
m + r &= n + r + 2,\\
m &= n + 2,\\
n &= m - 2,
\end{aligned}
$$

e o último somatório fica

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r}.$$

Obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+r-1)(n+r+1)]\, a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Separando-se os dois primeiros termos do somatório,

$$(r+1)(r-1)a_0 x^r + r(r+2)a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r-1)(n+r+1)]\, a_n + a_{n-2}\}\, x^{n+r} = 0.$$

As raízes são $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, e diferem por um inteiro. Pelo teorema 11.1, ou r_2 leva a 2 soluções LI, ou não leva a nenhuma. Substituindo-se $r_2 = -1$ em $r(r+2)$ obtém-se -1, e portanto $a_1 = 0$; novamente, substituindo-se $r_1 = 1$ em $r(r+2)$ obtém-se $+3$, e portanto $a_1 = 0$. Em suma, não há nenhum grau de liberdade para a escolha de a_1 com nenhuma das duas raízes.
Vamos verificar que, de fato, r_2 não leva a nenhuma solução. A relação de recorrência entre a_n e a_{n-2} com $r = -1$ é

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r-1)(n+r+1)} = -\frac{a_{n-2}}{(n-2)n}$$

O cálculo de a_2 a partir de a_0 leva a

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 0},$$

que é impossível.
Já $r_1 = 1$ leva a uma solução:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)}.$$

Partindo de $a_0 = 1$, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2\times 4};\\
a_4 &= +\frac{1}{4\times 6}\times\frac{1}{2\times 4};\\
a_6 &= -\frac{1}{6\times 8}\times\frac{1}{4\times 6}\times\frac{1}{2\times 4};\\
&\vdots\\
a_{2n} &= \frac{(-1)^n}{[(2n)(2n-2)\ldots(2)][(2n+2)(2n)\ldots 4]}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n[n(n-1)\ldots 1]2^n[(n+1)n\ldots 2]}\\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n! 2^n (n+1)!} = \frac{(-1)^n}{[2^n n!]^2\,(n+1)}.
\end{aligned}$$

Vamos chamar

$$b_n \equiv a_{2n} = \frac{(-1)^n}{[2^n n!]^2\,(n+1)}; \tag{11.9}$$

podemos verificar empiricamente a correção de (11.9) com o programa `a2nbn.max`, mostrado na listagem 11.1.
A sua saída é mostrada na listagem 11.2: os coeficientes a_{2n} e b_n são iguais, o que verifica que a relação de recorrência foi obtida corretamente.
Nesse ponto, obtivemos

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2^n n!)^2} x^{2n+1}.$$

Entretanto, essa é apenas uma solução. Uma segunda solução linearmente independente da primeira deve ser procurada. A linha de ataque que encontramos em Butkhov é procurar uma solução na forma

$$y_2 = y_1 \ln(x) + v,$$

Listagem 11.1: `a2nbn` — Relação de recorrência para a_{2n}, e o cálculo direto utilizando (11.9)

```
a[0] : 1$
a[n] := -a[n-2]/(n*(n+2))$
b[n] := (-1)**n / ( (n+1)*((2**n * (n!))**2) )$
for n : 1 thru 4 step 1  do (
   print ("n = ",n," a2n = ", a[2*n], " bn = ", b[n] )
);
```

Listagem 11.2: Saída do programa `a2nbn.max`

```
(%i1) batch("a2nbn.max")
(%i2) a[0]:1
(%i3) a[n]:=(-a[n-2])/(n*(2+n))
(%i4) b[n]:=(-1)^n/((1+n)*(2^n*n!)^2)
(%i5) for n thru 4 do print("n = ",n," a2n = ",a[2*n]," bn = ",b[n])
                  1           1
n =  1  a2n =  - -  bn =  - -
                  8           8
                 1           1
n =  2  a2n =  ---  bn =  ---
               192         192
                   1              1
n =  3  a2n =  - ----  bn =  - ----
                  9216           9216
                  1              1
n =  4  a2n =  ------  bn =  ------
               737280         737280
(%o5)                                  done
```

$$y_2' = y_1' \ln(x) + \frac{y_1}{x} + v',$$
$$y_2'' = y_1'' \ln(x) + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + v''.$$

Lembrando de nosso exemplo anterior, isso parece perfeitamente natural. Substituindo na equação diferencial,

$$x^2 \left[y_1'' \ln(x) + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + v'' \right] + x \left[y_1' \ln(x) + \frac{y_1}{x} + v' \right] + (x^2 - 1) \left[y_1 \ln(x) + v \right] = 0.$$

Novamente, os termos envolvendo $\ln(x)$ se anulam, pois $y_1(x)$ é uma solução da equação diferencial, e ficamos com

$$x^2 v'' + x v' + (x^2 - 1)v + 2xy_1' - y_1 + y_1 = 0,$$
$$x^2 v'' + x v' + (x^2 - 1)v = -2xy_1'.$$

Da mesma forma que antes, estamos diante de uma equação não-homogênea. O termo não-homogêneo é uma série:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1},$$
$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n x^{2n},$$
$$-2xy_1' = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n+1) b_n x^{2n+1}.$$

Tentamos agora

$$v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$$

(o mesmo tipo de solução proposto pelo método de Frobenius para $y_1(x)$), e em seguida obtemos (da mesma forma que antes)

$$(r+1)(r-1)c_0x^r + r(r+2)c_1x^{r+1} + \sum_{m=2}^{\infty}\{[(r+m-1)(r+m+1)c_m + c_{m-2}]\}\,x^{m+r} = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n+1)b_nx^{2n+1}.$$

Este é *quase o mesmo* problema de antes, mas não-homogêneo. Devemos procurar agora valores de r que tornem os expoentes dos dois lados da igualdade iguais. Tentemos $r = +1$: o lado esquerdo começa então em x^2, enquanto que o lado direito começa em x^1. Concluímos que $r = +1$ não satisfaz a equação não-homogênea.
Tentemos então $r = -1$: o lado esquerdo começa então em x^0, mas isso é contornável exigindo-se que $c_1 = 0$; neste caso, o primeiro termo do somatório ($m = 2$) produz um expoente x^1, compatível com o lado direito da equação. Nossa equação agora para os $c_m s$ é

$$\sum_{m=2}^{\infty}\{[(m-2)mc_m + c_{m-2}]\}\,x^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n+1)b_nx^{2n+1}. \tag{11.10}$$

Façamos

$$\begin{aligned} m-1 &= 2n+1,\\ m &= 2n+2,\\ m &= 2(n+1). \end{aligned}$$

A solução buscada é do tipo

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=-1}^{\infty} c_{2(n+1)}x^{2(n+1)-1}\\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} c_{2(n+1)}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Atenção: lembre-se de que nós exigimos que $c_1 = 0$. Portanto, a solução "começa", efetivamente, em c_0, e "pula" para c_2, c_4, etc., que é de fato o que nos diz a equação (11.10), que aponta para uma relação de recorrência entre c_m e c_{m-2}.
Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2n\times 2(n+1)c_{2(n+1)} + c_{2n}\right]\right\}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n+1)b_nx^{2n+1}.$$

Nós podemos tentar simplificar um pouco a nossa vida escrevendo

$$\begin{aligned} c_{2n} &\equiv d_n,\\ v(x) &= \sum_{n=-1}^{\infty} d_{n+1}x^{2n+1} = d_0x^{-1} + d_1x^1 + d_2x^3 + d_3x^5 + \ldots; \end{aligned}$$

então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2n\times 2(n+1)d_{(n+1)} + d_n\right]\right\}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n+1)b_nx^{2n+1}.$$

Em $n = 0$ nós temos uma relação definida entre d_0 e b_0:

$$d_0 = -2b_0 = -2.$$

Em seguida,

$$\begin{aligned} 4n(n+1)d_{n+1} + d_n &= (-4n-2)b_n,\\ d_{n+1} &= \frac{-4n-2}{4n(n+1)}b_n - \frac{1}{4n(n+1)}d_n, \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{-4n+2}{4n(n-1)} b_{n-1} - \frac{1}{4n(n-1)} d_{n-1};$$

note que é *impossível calcular* d_1! Somos forçados, portanto, a *arbitrar* $d_1 = \lambda$ (por exemplo), para só então prosseguir.
Vamos agora construir, lenta e penosamente, a série dos coeficientes d_n. Partindo de $n = 0$, temos $d_0 = -2$. Já sabemos que é impossível obter d_1, portanto façamos (por exemplo) $d_1 = \lambda$. Vamos obter d_2, d_3, d_4, assim como b_0, b_1, b_2, b_3, b_4. Isto pode ser feito muito facilmente com o programa `vamosbd.max`, mostrado na listagem 11.3.

Listagem 11.3: Comparação entre b_n e d_n para alguns valores iniciais de n

```
/* vamosbd.max: ajuda a entender a relação entre os b's e os d's do
   exemplo 7 de Butkhov, página 144 */
b[0] : 1$
b[n] := -(b[n-1]/(4*n*(n+1)))$
for n : 1 thru 4 step 1 do (
   print ("n = ", n, "b[n] = ", b[n] )
);
d[0] : -2$
d[1] : lambda$
d[n] := (-4*n + 2)/(4*n*(n-1)) * b[n-1] - 1/(4*n*(n-1))*d[n-1]$
for n : 1 thru 5 step 1 do (
   print ("n = ", n, "d[n] = ", expand(expand(d[n])))
);
```

A sua saída é mostrada na listagem 11.4
Podemos agora comparar os primeiros termos das funções $y_1(x)$ e $v(x)$:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 - \frac{1}{9216}x^7 + \frac{1}{737280}x^9 - \dots \\
v(x) &= \lambda\left[x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 - \frac{1}{9216}x^7 + \dots\right] \\
&\quad - \frac{2}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{7}{1152}x^5 + \frac{35}{221184}x^7 - \dots \\
&= \lambda y_1(x) - \frac{2}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{7}{1152}x^5 + \frac{35}{221184}x^7 - \dots
\end{aligned}$$

e isto mostra que o λ é realmente irrelevante, pois tudo o que ele "faz" é somar um múltiplo de $y_1(x)$ ao $v(x)$ (e, por conseguinte, ao $y_2(x)$).

Exemplo 11.6 Dada a equação diferencial ordinária

$$xy'' + xy' + y = 0:$$

a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) Obtenha *uma* solução de Frobenius do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

SOLUÇÃO
Começo escrevendo a equação na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

As funções

$$[xp(x)] = x, \qquad \text{e} \qquad [x^2 q(x)] = x$$

Listagem 11.4: Saída de `vamosbd.max`

```
(%i1) batch("vamosbd.max")
(%i2) b[0]:1
(%i3) b[n]:=-b[n-1]/(4*n*(1+n))
(%i4) for n thru 4 do print("n = ",n,"b[n] = ",b[n])
                  1
n =  1 b[n] =  - -
                  8
                 1
n =  2 b[n] =  ---
               192
                   1
n =  3 b[n] =  - ----
                 9216
                 1
n =  4 b[n] =  ------
               737280
(%o4)                                done
(%i5) d[0]:-2
(%i6) d[1]:lambda
(%i7) d[n]:=(2-4*n)*b[n-1]/(4*n*(n-1))-d[n-1]/(4*n*(n-1))
(%i8) for n thru 5 do print("n = ",n,"d[n] = ",expand(expand(d[n])))
n =  1 d[n] =  lambda
               3    lambda
n =  2 d[n] =  -- - ------
               32     8
               lambda    7
n =  3 d[n] =  ------ - ----
                192     1152
                 35     lambda
n =  4 d[n] =  ------ - ------
               221184    9216
               lambda     101
n =  5 d[n] =  ------ - --------
               737280   44236800
```

são analíticas em $x = 0$, e $x = 0$ é um ponto singuar regular, em torno do qual é possível obter uma solução de Frobenius,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, encontro

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Faço agora no primeiro somatório:

$$\begin{aligned} m + r &= n + r - 1, \\ m &= n - 1, \\ n &= m + 1, \end{aligned}$$

e obtenho

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r) a_n + a_n \right] x^{n+r} &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r+1) a_n \right] x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

É evidente que, com $a_0 \neq 0$, a equação indicial é

$$r(r-1) = 0 \;\Rightarrow\; r_2 = 0 \text{ ou } r_1 = 1.$$

As raízes diferem por um inteiro; ou a menor raiz leva a 2 soluções, ou não leva a nenhuma. Tentemos com a menor raiz ($r_2 = 0$):

$$\begin{aligned} n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= -\frac{1}{n} a_n. \end{aligned}$$

Note que é impossível obter a_1 a partir de a_0: a recursão falha, e a menor raiz não leva a nenhuma solução. Uma única solução ainda é possível com a maior raiz $r_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) a_{n+1} + (n+2) a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} a_n. \end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, não é difícil encontrar o termo geral:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

e uma solução

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \;\blacksquare$$

11.7 – Coeficientes não-polinomiais

Nosso último exemplo mostra como podemos lidar com coeficientes que são funções transcedentais, e não polinômios.

Exemplo 11.7 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{e}^{-x}y = 0, \qquad y(0) = 1,$$

em série.

SOLUÇÃO
A solução analítica é conhecida, e vale

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}.$$

Já antecipando a solução, a sua série de Taylor é

$$y(x) = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{13}{30}x^5 + \frac{203}{720}x^6 - \dots$$

Nós iniciamos a solução da maneira padrão. Como o coeficiente de y é uma função analítica em todo o domínio real, nós antecipamos que não há necessidade do método de Frobenius; basta uma expansão em série de potências:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Substituindo na equação diferencial, encontramos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \mathrm{e}^{-x} \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l = 0.$$

Nesta forma, é impossível prosseguir. O índice mudo l no segundo somatório já prevê as mudanças necessárias. Primeiramente, precisamos escrever e^{-x} em série de Taylor:

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$
$$b_k = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Isto nos dá

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right]\left[\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l\right] = 0.$$

O produto de duas séries não é tão feio quanto pode parecer à primeira vista. Ele dá

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right]\left[\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}\right] x^n.$$

Isso é quase o fim, porque agora temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}\right] x^n = 0.$$

Mas com a mudança de índices

$$m = n - 1,$$

Listagem 11.5: Cálculo dos coeficientes da solução em série de $y'+e^{-x}y = 0$; $y(0) = 1$

```
/* -------------------------------------------------------
   coeficientes da solução de

   y'  + e^(-x) y = 0
   ------------------------------------------------------- */

a[0] : 1$
a[n] := (-1/n)*sum( ((-1)**k/k!)*a[n-1-k], k, 0, n-1)$
for n : 1 thru 8 step 1 do (
   print ("n = ",n," an = ", a[n])
);
```

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} &= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,\end{aligned}$$

nós ficamos com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} \right] x^n = 0.$$

Utilizando os valores de b_k previamente calculados, isso nos dá a relação de recorrência

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a_{n-k} \right]$$

A listagem 11.5 mostra a implementação da relação de recorrência axima em Maxima. A saída é mostrada na listagem 11.6
Como era de se esperar, o resultado obtido,

$$y(x) = 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{13}{30}x^5 + \frac{203}{720}x^6 - \dots$$

confere com a série de Taylor da solução analítica previamente obtida ■

Exercícios Propostos

11.1 Resolva a equação diferencial

$$\frac{1}{x} y' + y = 0$$

pelo método de Frobenius, ou seja: encontre uma solução geral em série do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}.$$

11.2 Considere a equação de Bessel de ordem zero:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

Classifique o ponto $x = 0$ quanto à existência e natureza de singularidades.

Listagem 11.6: Coeficientes da solução de $y' + e^{-x}y = 0$; $y(0) = 1$ produzidos por Maxima

```
(%i1) batch("seriesexp.max")
(%i2) a[0]:1
(%i3) a[n]:=(-1)*sum((-1)^k*a[-k-1+n]/k!,k,0,n-1)/n
(%i4) for n thru 8 do print("n = ",n," an = ",a[n])
n =  1  an =  - 1
n =  2  an =  1
                5
n =  3  an =  - -
                6
              5
n =  4  an =  -
              8
                13
n =  5  an =  - --
                30
              203
n =  6  an =  ---
              720
                877
n =  7  an =  - ----
                5040
              23
n =  8  an =  ---
              224
(%o4)                                done
```

11.3 Ainda em relação à equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

sem aplicar diretamente o método de Frobenius, obtenha a equação indicial e suas raízes. Escreva em seguida, em função da natureza das raízes obtidas e ainda sem resolver a equação, a forma geral esperada das duas soluções linearmente independentes (L.I.).

11.4 Ainda em relação à equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

o método de Frobenius garante que a tentativa

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

leva a pelo menos uma das duas soluções L.I.; no nosso caso, há apenas uma solução com esta forma: obtenha a forma geral dos $a_n s$ desta solução.

11.5 Resolva

$$y'' + 3y' + 2y = x; \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

fazendo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Obtenha explicitamente, pelo menos: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5. Atenção: Isto não é o método de Frobenius: derivando, e substituindo na equação diferencial, você consegue resolver o problema. Além disso: não se esqueça de levar em consideração o termo não-homogêneo x do lado direito da equação.

11.6 Dada a EDO

$$xy'' + (1 - x)y' + y = 0,$$

a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) Utilizando o método de Frobenius, encontre duas soluções linearmente independentes.

11.7 Dada a equação diferencial de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 :$$

a) Classifque o ponto $x = 0$.

b) Obtenha a solução *geral* em série em torno de $x = 0$, $y(x) = AP(x) + BQ(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são duas séries linearmente independentes do tipo

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{2n+1} \qquad (p_0 = 1),$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{2n} \qquad (q_0 = 1),$$

e A e B são constantes arbitrárias. *É obrigatório encontrar a forma geral (em função de n) dos coeficientes p_n e q_n.*

11.8 Dada a equação diferencial

$$x(x - 1)y'' + (3x - 1)y' + y = 0,$$

a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) Aplique o método de Frobenius em torno de $x = 0$; obtenha uma equação indicial com raiz dupla, e ache a 1ª solução L.I. $y_1(x)$.

c) Obtenha a segunda solução L.I. pelo método de variação de constantes, fazendo

$$y_2(x) = u(x)y_1(x),$$

inserindo $y_2(x)$ de volta na equação diferencial e resolvendo para $u(x)$.

11.9 Resolva a equação de Airy [1]

$$y'' - xy = 0$$

em série de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (note que $x = 0$ é um ponto regular, e que portanto isto não é o método de Frobenius); em particular mostre que se deve ter necessariamente $a_2 = 0$, e obtenha os 3 primeiros termos das séries que multiplicam, respectivamente, a_0 e a_1 (isto é: as duas soluções LI).

11.10 Obtenha os 5 primeiros termos da solução em série mais fácil de encontrar da EDO

$$xy'' + (1 + x + x^2)y' + y = 0.$$

11.11 Obtenha a solução de Frobenius de

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - 2)y = 0$$

correspondente à maior raiz da equação indicial.

[1] "The Airy function describes the appearance of a star — a point source of light — as it appears in a telescope" (http://en.wikipedia.org/wiki/Airy_function).

11.12 Tente resolver

$$x^2y'' + (1+x)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius: você consegue? Por quê?

11.13 Utilizando obrigatoriamente o método de Frobenius, obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - (1/9 + x)y = 0.$$

11.14 Usando o método de Frobenius, encontre a solução geral de

$$xy'' + y = 0$$

na forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções L.I..

11.15 Usando obrigatoriamente uma solução por série de potências *ab initio* (que significa *desde o início*),

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

resolva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + tx = 0, \qquad x(0) = 1.$$

11.16 Usando obrigatoriamente o método de Frobenius, obtenha a solução geral de

$$y'' + xy = 0$$

em torno de $x = 0$.

11.17 Resolva a equação diferencial

$$y'' + x^2y = 0.$$

11.18 Encontre a solução geral (isto é: encontre as *séries* de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, onde y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes) de

$$y'' + 5x^3y = 0$$

pelo método de Frobenius.

11.19 Obtenha uma segunda solução LI da EDO do exemplo (11.6):

$$xy'' + xy' + y = 0.$$

11.20 (Kreider et al. (1966), seção 15-5, Ex. 1) Obtenha duas soluções LI de

$$x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0.$$

12

A Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma idéia poderosa. Como sempre, o objetivo é resolver equações diferenciais. Embora ela seja em geral apresentada como uma ferramenta para resolver equações diferenciais ordinárias, ela também é útil para a solução de equações diferenciais parciais de considerável interesse em Física e em Engenharia, como veremos neste capítulo.

12.1 – Definição e existência

A transformada de Laplace é um mapeamento: ela leva uma função $f(t)$ em outra função, $\overline{f}(s)$, por meio de

$$\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \overline{f}(s) \equiv \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{12.1}$$

É claro que a integral (12.1) não existe para *qualquer* $f(t)$ (pelo menos no sentido de funções usuais; quando as fs são *distribuições*, as possibilidades de uso de transformadas de Laplace aumentam, mas isso é assunto para daqui a um pouco mais). O seguinte teorema ajuda a identificar um conjunto de funções "transformáveis".

Teorema 12.1 Se $f(t)$ é contínua por partes, e se $\exists\, k, \gamma, t_0 > 0 : |f(t)| \leq k\mathrm{e}^{\gamma t}$ para $t \geq t_0$, então existe a $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

Quando uma $f(t)$ obedece às condições do teorema 12.1, nós dizemos que f é de *ordem exponencial*.

A prova do teorema 12.1 não é muito difícil. Seja $s = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} s = u \geq \gamma$; Se f é de ordem exponencial, temos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-st} f(t)\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-(u+\mathrm{i}v)t}\right| |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-ut}\right| \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}vt}\right| |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \left|\mathrm{e}^{-ut}\right| |f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Figura 12.1: Gráfico da função $\mathrm{e}^{-t}\Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_0^{t_0} \left|\mathrm{e}^{-ut}\right| |f(t)| \,\mathrm{d}t}_{=M_0} + \int_{t_0}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-ut}\right| |f(t)| \,\mathrm{d}t \\
&\leq M_0 + k \int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ut}\mathrm{e}^{\gamma t} \,\mathrm{d}t \\
&= M_0 + k \int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(u-\gamma)t} = M_0 + \frac{k}{u-\gamma}\mathrm{e}^{-(u-\gamma)t_0} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Em resumo, quando f é de ordem exponencial, a integral converge, e a Transformada de Laplace existe.

Exemplo 12.1 Verifique a existência de $\mathscr{L}\{f(t)\}$, onde $f(t) = \Gamma(t)$.

SOLUÇÃO
A transformada de Laplace em questão é

$$
\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\Gamma(t) \,\mathrm{d}t, \tag{12.2}
$$

onde por sua vez

$$
\Gamma(t) = \int_0^{\infty} u^{t-1}\mathrm{e}^{-u} \,du.
$$

Antes de um esforço analítico mais detalhado, é interessante analisar o comportamento do integrando de (12.2). O resultado para $s = 1$ está mostrado na figura 12.1: observe que a função cresce rapidamente a partir de $x \sim 4$, e que é bastante evidente que a transformada de Laplace de $\Gamma(t)$ não existe no ponto $s = 1$.
Na verdade devemos ser capazes de provar isto analiticamente para qualquer s. Tentemos:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\Gamma(t)\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\Gamma(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \int_{u=0}^{\infty} u^{t-1}\mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} u^{t-1}\mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u} \left[\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} u^{t-1} \,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Nós agora reconhecemos na integral interna a transformada de Laplace de u^{t-1}; uma rápida pesquisa com MAXIMA nos dá:

```
(%i1) laplace( u**(t-1),t,s) ;
                                        1
(%o1)                             --------------
                                  u (s - log(u))
```

ou

$$\mathscr{L}\{u^{t-1}\} = \frac{1}{u(s - \ln u)};$$

donde

$$\mathscr{L}\{\Gamma(t)\} = \int_{u=0}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u(s - \ln u)}\, \mathrm{d}u.$$

Nessa forma, a função possui uma singularidade em $\ln u = s$, ou seja, a partir de $u = 1$ haverá uma singularidade para cada valor de s, que começa em 0. Muito antes de u chegar em 1 (partindo de 0), entretanto, é possível mostrar que o integrando diverge!
Começamos arrumando um pouco a expressão: faça $s = \ln a \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^s$; como $s > 0$, temos $a > 1$. A integral fica

$$\int_{u=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u \ln\left(\frac{a}{u}\right)}\, \mathrm{d}u.$$

Calculemos agora a integral apenas entre 0 e $\epsilon \ll 1$; a idéia é que se essa parte divergir, então a integral não existe, e a transformada de Laplace de $\Gamma(t)$ também não existe. Note também que, com $a > 1$, temos

$$0 \le u \le \epsilon \Rightarrow \ln u < 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u \ln(a/u)} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u(s - \ln u)} > 0.$$

Então, para $0 \le u \le \epsilon \ll 1$, o integrando é positivo, e

$$\int_{u=0}^{\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u \ln\left(\frac{a}{u}\right)}\, \mathrm{d}u \ge \mathrm{e}^{-\epsilon} \int_{u=0}^{\epsilon} \frac{1}{u \ln\left(\frac{a}{u}\right)}\, \mathrm{d}u.$$

Interessantemente, esta última integral possui uma primitiva; de fato,

```
(%i1) assume ( a > 1 ) ;
(%o1)                                [a > 1]
(%i2) f : 1/(u * log(a/u)) ;
                                        1
(%o2)                               --------
                                        a
                                    log(-) u
                                        u
(%i3) integrate(f,u) ;
                                            a
(%o3)                             - log(log(-))
                                            u
```

Portanto,

$$\int_{u=0}^{\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u \ln\left(\frac{a}{u}\right)}\, du \ge \mathrm{e}^{-\epsilon} \left[-\ln\left(\ln\left(\frac{a}{u}\right)\right)\right]_0^{\epsilon} = +\infty,$$

e a transformada de Laplace não existe ■

12.2 – O cálculo de transformadas de Laplace

Existem extensas tabelas de transformadas de Laplace, por exemplo, em Abramowitz e Stegun (1972); outra possibilidade é o uso de Maxima através da função (adivinhe) `laplace`. Alguns casos muito simples são:

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s},$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} &= \frac{1}{s-a},\\
\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(at)\} &= \frac{a}{s^2+a^2},\\
\mathscr{L}\{\cos(at)\} &= \frac{s}{s^2+a^2}.
\end{aligned}$$

De fato,

```
(%i1) laplace( sin(a*t),t,s) ;
                                        a
(%o1)                                -------
                                      2    2
                                     s  + a
(%i2) laplace( cos(a*t),t,s) ;
                                        s
(%o2)                                -------
                                      2    2
                                     s  + a
```

Mas não nos esqueçamos de variáveis complexas e sua utilidade: se

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at} = \cos(at) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(at),$$

então

$$\begin{aligned}
\overline{f}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-s)t}\,\mathrm{d}t,\\
&= \frac{1}{\mathrm{i}a-s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-s)t}(\mathrm{i}a-s)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\mathrm{i}a-s}\left[\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-s)t}-1\right]
\end{aligned}$$

O limite deve ser calculado com cuidado. Suponha $s = s_x + \mathrm{i}s_y \in \mathbb{C}$; e (muito importante) $\operatorname{Re} s = s_x > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-s)t}| &= \lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}a-(s_x+\mathrm{i}s_y))t}|\\
&= \lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{(-s_x+\mathrm{i}(a-s_y))t}|\\
&= \lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{-s_xt}|\,\underbrace{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-s_y)t}|}_{=1}\\
&= \lim_{t\to\infty}|\mathrm{e}^{-s_xt}| = 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s-\mathrm{i}a} = \frac{s+\mathrm{i}a}{s^2-\mathrm{i}^2a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + \mathrm{i}\frac{a}{s^2+a^2},$$

ou:

$$\int_0^\infty [\cos(at) + i\operatorname{sen}(at)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^\infty \cos(at)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^\infty \operatorname{sen}(at)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+a^2} + \mathrm{i}\frac{a}{s^2+a^2}.$$

Então, igualando as partes real e imaginária,

$$\mathscr{L}\{\cos(at)\} = \int_0^\infty \cos(at)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+a^2},$$

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \int_0^\infty \operatorname{sen}(at)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{s^2+a^2},$$

como Maxima já havia antecipado.

Exemplo 12.2 Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}.$$

SOLUÇÃO

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

Faça $\tau = st$, $t = \tau/s$ e substitua:

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{s}{\tau}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty \tau^{-1/2}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Agora lembre-se da função Gama!

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \tau^{x-1}\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

compare:

$$x-1 = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

donde

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \;\blacksquare$$

Exemplo 12.3 Repita o Exemplo 12.2, usando Maxima.

SOLUÇÃO

```
(%i1) laplace(1/sqrt(t),t,s);
                                        sqrt(%pi)
(%o1)                                   ---------
                                         sqrt(s)
```

Exemplo 12.4 Generalize o resultado obtido com o Exemplo 12.2, e calcule

$$\mathscr{L}\left\{t^p\right\}.$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^p\right\} &= \int_0^\infty t^p\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s^{p+1}}\int_{t=0}^\infty (st)^p\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}(st) \\
&= \frac{1}{s^{p+1}}\int_{u=0}^\infty u^{(p+1)-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Em particular, se $p = n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\blacksquare$$

Exercícios Propostos

12.1 Calcule

$$\mathscr{L}\{\cosh t\}(s)$$

usando obrigatoriamente a integral que define a transformada de Laplace.

12.3 – Propriedades da Transformada de Laplace

Para começar : a transformada de Laplace é um operador linear:

$$\mathscr{L}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} \blacksquare \tag{12.3}$$

Exercícios Propostos

12.2 Prove a equação (12.3).

Outra propriedade importante é a que permite calcular a transformada de Laplace da derivada:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esta é uma integral que está implorando para ser feita por partes, e nós prosseguimos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \mathrm{e}^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left[-s\mathrm{e}^{-st}\right]\,\mathrm{d}t \\
&= -f(0) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow \\
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= s\overline{f}(s) - f(0). \qquad (12.4)
\end{aligned}$$

O resultado 12.4 pode ser aplicado recursivamente tantas vezes quantas forem desejadas:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= s\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s\left[s\overline{f}(s) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\overline{f}(s) - sf(0) - f'(0). \qquad (12.5)
\end{aligned}$$

Exemplo 12.5 Calcule $\mathscr{L}\{f'''(t)\}$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'''(t)\} &= s\mathscr{L}\{f''(t)\} - f''(0) \\
&= s\left[s^2\overline{f}(s) - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0) \\
&= s^3\overline{f}(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \blacksquare
\end{aligned}$$

Com (12.3), (12.5), e as extensões dessa última para derivadas de maior ordem, é possível equações diferenciais em equações algébricas. Esse é sempre o primeiro passo para resolver equações diferenciais utilizando transformadas de Laplace. Trata-se agora não mais de calcular a transformada de Laplace de uma *função*,

mas sim de uma equação diferencial inteira. Naturalmente, dada uma equação diferencial do tipo

$$\mathscr{D}y = f(t),$$

onde $L(y)$ é um operador diferencial do tipo que foi introduzido no capítulo 8 (ver equação (8.2), isso consiste essencialmente em fazer

$$\mathscr{L}\{\mathscr{D}y\} = \mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Em geral, isso só é frutífero se $\mathscr{D}$ for um operador linear *com coeficientes constantes*, pois somente então poderemos tirar proveito de (12.3) sem necessitar de manipulações algébricas ou de cálculo mais específicas, as quais podem ou não funcionar, ou mesmo existir. Em suma: Transformadas de Laplace são concebidas, fundamentalmente, para resolver problemas lineares em que os coeficientes sejam, preferencialmente, constantes.

Exemplo 12.6 Calcule a transformada de Laplace da equação diferencial

$$y'' + 3y' + 4y = x\,\mathrm{sen}(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

SOLUÇÃO
Note que o problema é proposto em forma padrão: os coeficientes são constantes, de forma que a linearidade se aplica, e os valores de $y(0)$ e de $y'(0)$, necessários em (12.4) e (12.5), estão disponíveis. Note também que a variável independente é x, e não t! Com algum esforço de integração, a transformada do lado direito pode ser calculada:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x\,\mathrm{sen}(x)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx} x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

A transformada de Laplace do lado esquerdo é um exercício de aplicação de fórmula:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y'' + 3y' + 4y\} &= \left[s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0)\right] + 3\left[s\overline{y} - y(0)\right] + 4\overline{y} \\ &= \left[s^2 + 3s + 4\right]\overline{y} - s - 1 - 3 \\ &= \left[s^2 + 3s + 4\right]\overline{y} - s - 4.\end{aligned}$$

Juntando tudo,

$$\left[s^2 + 3s + 4\right]\overline{y} - s - 4 = \frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2} \blacksquare$$

12.4 – Convolução

O teorema da convolução é uma das ferramentas mais importantes da Teoria de Transformadas de Laplace.

Definição 12.1 A convolução de Laplace de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é

$$[f * g](t) \equiv \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{12.6}$$

Como veremos mais tarde, existe outra definição de convolução, que denominaremos convolução de Fourier: elas diferem principalmente nos limites de integração, portanto, preste atenção!

Uma propriedade importante da convolução é a comutatividade:

$$[f * g](t) = [g * f](t). \tag{12.7}$$

É preciso também atentar para o fato de que símbolo $*$ denota a operação de convolução, e não um produto ordinário! Preste atenção portanto para o fato de que $[f * g](t) \neq f(t) \times g(t)$: embora não seja uma justificativa razoável, a confusão às vezes pode vir do fato de que em linguagens de programação tais como Python e Maxima, o símbolo $*$ *significa* o produto ordinário. A tendência de algumas pessoas escreverem $*$ no lugar de $\times$, entretanto, deve ser combatida a todo custo.

O principal resultado a respeito da convolução de Laplace, naturalmente, é o

Teorema 12.2 (teorema da convolução de Laplace)

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \overline{f}(s)\overline{g}(s). \tag{12.8}$$

A prova é um exercício padrão de manipulação de integrais duplas:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f * g\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Neste ponto, o procedimento padrão é trocar a ordem de integração, e para isto é útil nós desenharmos a região de integração no plano $t \times \tau$. Isto é feito na figura 12.2, onde a região de integração é enfatizada em cinza. Após a troca da ordem das variáveis de integração, teremos

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=\tau}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t.$$

Neste ponto, fazemos a mudança de variáveis

$$x = \tau \qquad \tau = x, \tag{12.9}$$

$$y = t - \tau \qquad t = x + y, \tag{12.10}$$

que pretendemos usar para mudar nossa integral dupla segundo

$$\iint_{t,\tau} f(\tau, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \iint_{x,y} f(\tau(x,y), t(x,y)) \left|\frac{\partial(\tau, t)}{\partial(x, y)}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

onde usamos a notação padrão para o Jacobiano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\tau, t)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial x} & \frac{\partial\tau}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ \left|\frac{\partial(\tau, t)}{\partial(x, y)}\right| &= 1.\end{aligned}$$

Figura 12.2: Região de integração dupla no plano $t \times \tau$ para o cálculo da transformada de Laplace da convolução $f * g$.

O fim da prova de (12.8) agora está próximo:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f * g\} &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} f(x) g(y) \mathrm{e}^{-s(x+y)} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x) \left[\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sy} g(y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \left[\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x) \, \mathrm{d}x \right] \times \left[\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sy} g(y) \, \mathrm{d}y \right] = \overline{f}(s) \overline{g}(s) \blacksquare
\end{aligned}$$

12.5 – Outros truques

Sabendo que

$$\mathscr{L}^{-1} \left\{ b\sqrt{s} \right\} = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp(-b^2/4t),$$

quem é

$$\mathscr{L}^{-1} \left\{ b\sqrt{s-a} \right\}?$$

A resposta é simples:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} \left\{ \mathrm{e}^{at} f(t) \right\} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{e}^{at} f(t) \, \mathrm{d}t, \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t} f(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \overline{f}(s-a). \qquad (12.11)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}^{-1} \left\{ \overline{f}(s-a) \right\} = \mathrm{e}^{at} f(t). \qquad (12.12)$$

No caso acima,

$$\mathscr{L}^{-1} \left\{ b\sqrt{s-a} \right\} = \frac{b\mathrm{e}^{at}}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp(-b^2/4t).$$

Finalmente, note que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overline{f}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left[-t\mathrm{e}^{-st}\right] f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\left[tf(t)\right]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathscr{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{\mathrm{d}\overline{f}}{\mathrm{d}s}. \tag{12.13}$$

12.6 – Inversão

Naturalmente, o fato fundamental que torna as transformadas de Laplace úteis é que é possível inverter uma transformada de Laplace:

Definição 12.2 A transformada inversa $\mathscr{L}^{-1}\{\overline{f}(s)\}$ é a função $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$.

Por integração no plano complexo

Existe uma fórmula para a inversão de $f(s)$, mas nós não vamos deduzi-la — ainda. Ei-la:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\right\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} \overline{f}(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s. \tag{12.14}$$

A figura 12.3 mostra o caminho de integração (a reta vertical $x = \gamma$) no plano complexo, e a reta vertical deve ficar à direita de todas as singularidades de $\overline{f}(s)$.

Exemplo 12.7 Utilizando integração de contorno no plano complexo conforme indicado na figura 12.4, e a fórmula de inversão, obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$\overline{f}(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}, \qquad \omega, a \in \mathbb{R}_+.$$

Atente para os sinais de ω e de a; utilize o contorno CABC da figura ao lado (com $R \to \infty$), onde

$$-a < \gamma < 0.$$

SOLUÇÃO
Procuramos as singularidades de $\overline{f}(s)$ no plano complexo:

$$\begin{aligned}(s+a)^2+\omega^2 &= 0, \\ (s+a)^2 &= -\omega^2, \\ s+a &= \pm\mathrm{i}\omega, \\ s &= -a \pm \mathrm{i}\omega.\end{aligned}$$

Pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_{CABC} \overline{f}(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i}\left[c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}\right],$$

Figura 12.3: Caminho de integração para a fórmula de inversão 12.14.

Figura 12.4: Caminho de integração para o Exemplo 12.7.

onde os resíduos são calculados em $-a \pm \mathrm{i}\omega$; agora:

$$\begin{aligned}
\alpha = \theta &= \pi - \arccos\left(\frac{-\gamma}{R}\right),\\
\beta &= \pi + \arccos\left(\frac{-\gamma}{R}\right),\\
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{ABC}\overline{f}(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right| &= \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\alpha}^{\beta}\overline{f}(s)\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}\theta\right|\\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left|\overline{f}(s)\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{st}\right|\,\mathrm{d}\theta\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{\omega R\mathrm{e}^{(s_x+\mathrm{i}s_y)t}}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)^2+\omega^2}\right|\,\mathrm{d}\theta\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\left|\frac{\omega R\mathrm{e}^{s_x t}}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)^2+\omega^2}\right|\,\mathrm{d}\theta\\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left|\frac{\omega R}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+a)^2+\omega^2}\right|\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{pois } \mathrm{e}^{s_x t} < 1)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left|\frac{\pi\omega R}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_*}+a)^2+\omega^2}\right|
\end{aligned}$$

(pelo teorema do valor médio, para $\pi/2 \le \theta_* \le 3\pi/2$)

$$= 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\overline{f}(s)\mathrm{e}^{+st}\,\mathrm{d}s = c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\overline{f}(s)\mathrm{e}^{st} &= \frac{\omega\mathrm{e}^{st}}{(s-[-a+\mathrm{i}\omega])(s-[-a-\mathrm{i}\omega])},\\
c_{-1}^{(1)} &= \lim_{s\to[-a+\mathrm{i}\omega]}(s-[-a+\mathrm{i}\omega])\frac{\omega\mathrm{e}^{st}}{(s-[-a+\mathrm{i}\omega])(s-[-a-\mathrm{i}\omega])}\\
&= \lim_{s\to[-a+\mathrm{i}\omega]}\frac{\omega\mathrm{e}^{st}}{s-[-a-\mathrm{i}\omega]}\\
&= \frac{\omega\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}\omega)t}}{2\mathrm{i}\omega};\\
c_{-1}^{(2)} &= \lim_{s\to[-a-\mathrm{i}\omega]}(s-[-a-\mathrm{i}\omega])\frac{\omega\mathrm{e}^{st}}{(s-[-a+\mathrm{i}\omega])(s-[-a-\mathrm{i}\omega])}\\
&= \lim_{s\to[-a-\mathrm{i}\omega]}\frac{\omega\mathrm{e}^{st}}{s-[-a+\mathrm{i}\omega]}\\
&= -\frac{\omega\mathrm{e}^{(-a-\mathrm{i}\omega)t}}{2\mathrm{i}\omega};\\
f(t) &= c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}\\
&= \omega\mathrm{e}^{-at}\frac{1}{2\mathrm{i}\omega}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\\
&= \mathrm{e}^{-at}\operatorname{sen}\omega t \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Por manipulações algébricas

Naturalmente, o trabalho de integração da $\overline{f}(s)$ no plano complexo é longo. No caso do exemplo 12.7, uma alternativa é utilizar (12.11), como fazemos no exemplo a seguir.

Exemplo 12.8 Utilizando (12.11), obtenha a inversa de

$$\overline{f}(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}.$$

SOLUÇÃO

Sabemos que

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

De (12.11),

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-at}\operatorname{sen}(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{(s-(-a))^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \blacksquare$$

O uso das propriedades que nós deduzimos sobre as transformadas de Laplace; das tabelas de que dispomos destas mesmas transformadas; e do teorema da convolução, permite inverter um grande número de transformadas. Em última análise, a transformada de Laplace é uma ferramenta para resolver equações diferenciais ordinárias ou parciais, e nós em geral estaremos percorrendo uma rota do tipo

$$\begin{aligned}\text{Equação diferencial} &\longrightarrow \text{Transformada de Laplace}\\ &\longrightarrow \text{Solução algébrica} \longrightarrow \text{Solução da equação diferencial.}\end{aligned}$$

Isso acontece porque (12.4) e (12.5) (e relações análogas para derivadas de mais alta ordem) transformam a diferenciação em uma operação algébrica (o produto por s, s^2, etc., mais a inclusão das condições iniciais) no espaço das funções transformadas $\overline{f}(s)$. Nesse espaço, então, a solução da equação diferencial torna-se equivalente à solução de uma equação algébrica, geralmente mais fácil. Mas resta o trabalho, que pode ser difícil, de inverter a transformada de Laplace da solução do problema.

Exemplo 12.9 Resolva

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{iv}} - y &= 0,\\ 0 = y(0) &= y'(0) = y''(0),\\ 1 &= y'''(0). \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s^4\overline{y} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) - \overline{y} = 0.$$

Introduzindo as condições iniciais,

$$\begin{aligned}(s^4 - 1)\overline{y} - 1 &= 0,\\ \overline{y} &= \frac{1}{s^4 - 1}\end{aligned}$$

A decomposição em frações parciais da transformada acima é

```
(%i1) partfrac(1/(s^4 - 1), s) ;
                                 1            1            1
(%o1)                     - ---------- - --------- + ---------
                                 2         4 (s + 1)   4 (s - 1)
                            2 (s  + 1)
```

donde

$$\overline{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)}.$$

A inversa é trivial:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} \blacksquare$$

Exemplo 12.10 Resolva

$$\begin{aligned} y''' + y &= \mathrm{e}^{-t}, \\ 0 = y(0) &= y'(0) = y''(0). \end{aligned}$$

SOLUÇÃO
Uso:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y'''\} &= s^3\overline{y} - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0), \\ \mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{-t}\right\} &= \frac{1}{s+1}. \end{aligned}$$

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned} s^3\overline{y} + \overline{y} &= \frac{1}{s+1}, \\ \left(s^3+1\right)\overline{y} &= \frac{1}{s+1}, \\ \left[(s+1)(s^2-s+1)\right]\overline{y} &= \frac{1}{s+1}, \\ \overline{y}(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s^2-s+1)}. \end{aligned}$$

Agora decompomos em frações parciais; com Maxima,

```
(%i1)  partfrac( 1/((s+1)^2 * (s^2 - s + 1)), s) ;
                          s - 1             1             1
(%o1)                - -------------- + --------- + ----------
                            2            3 (s + 1)            2
                       3 (s  - s + 1)                3 (s + 1)
```

ou seja:

$$\overline{y}(s) = \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{s-1}{3(s^2-s+1)}.$$

As inversas dos dois primeiros termos do lado direito acima são triviais, mas o terceiro termo requer algum cuidado.
Já sabemos que

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{at} f(t)\right\} = \overline{f}(s-a)$$

vamos portanto transformar o denominador $s^2 - s + 1$ em uma expressão do tipo $(s-a)^2 + b^2$, cujas transformadas de Laplace inversas cheiram ao seno e ao cosseno:

$$\begin{aligned} s^2 - s + 1 &= (s-a)^2 + b^2, \\ s^2 - s + 1 &= s^2 - 2as + a^2 + b^2, \\ 2a &= 1, \\ a^2 + b^2 &= 1, \\ a &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{3(s^2-s+1)} &= \frac{s-1}{3((s-1/2)^2+3/4)}\\ &= \frac{s-1/2}{3((s-1/2)^2+3/4)} - \frac{1/2}{3((s-1/2)^2+3/4)};\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}\overline{y}(s) &= \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{(s-1/2)}{3((s-1/2)^2+3/4)} + \frac{1/2}{3((s-1)^2+3/4)}\\ &= \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+1)^2} - \frac{(s-1/2)}{3((s-1/2)^2+3/4)} + \frac{1/2}{3((s-1)^2+3/4)};\\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s+1)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3(s+1^2)}\right\}\\ &\quad - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1/2)}{3((s-1/2)^2+3/4)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{3\sqrt{3}((s-1)^2+3/4)}\right\}\\ &= \frac{e^{-t}}{3} + \frac{te^{-t}}{3} - \frac{1}{3}e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 12.11 Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva a equação diferencial ordinária

$$y''' + y' = t, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 1.$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y'''\} + \mathscr{L}\{y'\} &= \mathscr{L}\{t\},\\ s^3\overline{y} - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + s\overline{y} - y(0) &= \frac{1}{s^2},\\ s^3\overline{y} - 1 + s\overline{y} &= \frac{1}{s^2},\\ \overline{y}\left(s^3+s\right) &= 1 + \frac{1}{s^2},\\ \overline{y} &= \frac{1}{s^3},\\ y(t) &= \frac{t^2}{2} \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 12.12 Usando a transformada de Laplace, resolva

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} - 3x + 4y &= 4e^{-t} - 2e^{t},\\ \frac{dy}{dt} + 4x + y &= 4e^{t},\end{aligned}$$

sujeitas às condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

SOLUÇÃO

Calculo as transformadas de laplace de ambas as equações:

$$s\overline{x} - 1 - 3\overline{x} + 4\overline{y} = \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s-1},$$
$$s\overline{y} - 1 + 4\overline{x} + \overline{y} = \frac{4}{s-1}.$$

$$\begin{bmatrix} (s-3) & 4 \\ 4 & (s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{s+1} - \dfrac{2}{s-1} + 1 \\ \dfrac{4}{s-1} + 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} (s-3) & 4 \\ 4 & (s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2+2s-7}{(s-1)(s+1)} \\ \dfrac{s+3}{s-1} \end{bmatrix}$$

Para eliminar $\overline{y}$, multiplicamos a 1ª equação por $(s+1)$, a 2ª por -4, e somamos:

$$[(s-3)(s+1) - 16]\overline{x} = \frac{s^2+2s-7}{s-1} - 4\frac{s+3}{s-1},$$
$$[s^2 - 2s - 19]\overline{x} = \frac{s^2-2s-19}{s-1},$$
$$\overline{x} = \frac{1}{s-1}.$$

Substituimos agora esse resultado na segunda equação do sistema:

$$\frac{4}{s-1} + (s+1)\overline{y} = \frac{s+3}{s-1},$$
$$(s+1)\overline{y} = \frac{s-1}{s-1},$$
$$\overline{y} = \frac{1}{s+1}.$$

Portanto, a solução final é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{+t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercícios propostos

12.3 Calcule a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+6s+3}{s^3+4s^2+3s}\right\}.$$

12.4 Resolva o problema de valor inicial

$$3x' + x = 6e^{2t};\ x(0) = 0.$$

12.5 Sem utilizar frações parciais, encontre a transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}.$$

12.6 Usando, obrigatoriamente, transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial

$$x'' + 4x' + 3x = \mathrm{e}^{-3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

12.7 Considere o seguinte modelo para a dispersão de um poluente em um rio em regime permanente:

$$2\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 3\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2} - c, \qquad c(0) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}c(0)}{\mathrm{d}x} = 0,$$

onde x é a distância ao longo do rio, e $c(x)$ é a concentração do poluente. Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, obtenha $c(x)$.

12.8 Utilizando a transformada de Laplace, resolva a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{T} = \frac{x_0 t}{T^2}, \qquad x(0) = x_0.$$

12.9 Usando transformada de Laplace, resolva

$$y'' - y' - 2y = x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

12.10 Utilizando o teorema da convolução, calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3s-10}\right\}.$$

12.11 Calcule a transformada de Laplace de $\mathrm{e}^{at}\cos bt$ de duas formas: a) usando a definição de transformada de laplace e integrando por partes; e b) usando $\cos bt = \mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\}$

12.12 Calcule a transformada inversa de:

a) $1/(s^2 - a^2)$.

b) $(s+1)/(s^2 - s)$.

12.13 Resolva para $x(t)$:

$$x''' + x'' - 2x' = 1 + \mathrm{e}^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

12.14 Sendo $\mathscr{L}$ a transformada de Laplace, e $\mathscr{L}^{-1}$ a sua inversa,

a) calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+8)}\right\}.$$

b) Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos 3(t-\tau)\, d\tau\right\}.$$

12.15 Resolva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \mathrm{sen}(3t), \qquad x(0) = 1$$

usando transformada de Laplace.

12.7 – Aplicação a uma equação diferencial parcial de difusão-advecção

O problema a seguir foi resolvido em O'Loughlin e Bowmer (1975): o texto a seguir é uma adaptação da solução por transformada de Laplace, e um detalhamento do cálculo da integral que dá a solução. O mesmo problema foi resolvido de forma diferente da utilizada aqui por Dias (2003).

Exemplo 12.13 Resolva

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -Kc, \tag{12.15}$$

onde $U > 0$ é uma velocidade de advecção, $D > 0$ é um coeficiente de difusão, e $K > 0$ é um coeficiente de decaimento de 1ª ordem. As condições inicial e de contorno são

$$c(x,0) = 0, \qquad x \geq 0, \tag{12.16}$$

$$c(0,t) = c_0, \qquad t > 0, \tag{12.17}$$

$$\lim_{x\to\infty} c(x,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{12.18}$$

SOLUÇÃO
A transformada de Laplace de (12.15) é

$$s\overline{c} - c(x,0) + U\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} - D\frac{\mathrm{d}^2\overline{c}}{\mathrm{d}x^2} = -K\overline{c},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{c}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{U}{D}\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} - \frac{(s+K)\overline{c}}{D} = 0. \tag{12.19}$$

Esta é uma equação diferencial ordinária homogênea, com coeficientes constantes; a equação característica é

$$\lambda^2 - \frac{U}{D}\lambda - \frac{(s+K)}{D} = 0, \tag{12.20}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{U}{2D} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{U}{D}\right)^2 + \frac{4(s+K)}{D}\right]^{1/2} > 0, \tag{12.21}$$

$$\lambda_2 = \frac{U}{2D} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{U}{D}\right)^2 + \frac{4(s+K)}{D}\right]^{1/2} < 0. \tag{12.22}$$

A solução geral é

$$\overline{c}(x,s) = A\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + B\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \tag{12.23}$$

onde tanto A, B quanto λ_1, λ_2 são em geral funções de s. A condição inicial (12.16) já foi utilizada na obtenção de (12.19); a condição (12.18) impõe que

$$\lim_{x\to\infty} \overline{c}(x,s) = \mathscr{L}\left\{\lim_{x\to\infty} c(x,t)\right\} = \int_0^\infty 0\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 0; \tag{12.24}$$

como $\lambda_2 < 0$, $\lim_{x\to\infty} B\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = 0$ automaticamente; por outro lado, como $\lambda_1 > 0$, $\lim_{x\to\infty} A\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \neq 0$ *a não ser que* $A = 0$. Portanto, é preciso impor $A = 0$, e a solução limita-se a

$$\overline{c}(x,s) = B\exp\left\{\frac{Ux}{2D} - \frac{x}{2}\left[\left(\frac{U}{D}\right)^2 + \frac{4(s+K)}{D}\right]^{1/2}\right\} \tag{12.25}$$

A constante B é obtida fazendo-se a transformada de Laplace de (12.17):

$$\overline{c}(0,s) = \int_{t=0}^\infty c(0,t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t=0}^{\infty} c_0 \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c_0}{s} = B. \qquad (12.26)
\end{aligned}
$$

O nosso resultado para a transformada de Laplace, obtido com uma relativa facilidade, é

$$
\bar{c}(x,s) = \frac{c_0}{s}\exp\left\{\frac{Ux}{2D} - \frac{x}{2}\left[\left(\frac{U}{D}\right)^2 + \frac{4(s+K)}{D}\right]^{1/2}\right\} \qquad (12.27)
$$

Agora vamos manipular este resultado:

$$
\begin{aligned}
\bar{c}(x,s) &= \frac{c_0}{s}\exp\left[\frac{Ux}{2D} - \frac{2x}{2\sqrt{D}}\left(\frac{U^2}{4D} + s + K\right)^{1/2}\right] \\
\bar{c}(x,s) &= \exp\left(\frac{Ux}{2D}\right)\frac{c_0}{s}\exp\left[-\frac{x}{\sqrt{D}}\left(\frac{U^2}{4D} + s + K\right)^{1/2}\right] \qquad (12.28)
\end{aligned}
$$

Uma rápida busca em uma tabela de transformadas de Laplace mostra que

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\exp(-b\sqrt{s})\right\} = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp(-b^2/4t), \qquad (12.29)
$$

enquanto que o argumento da exponencial é

$$
\exp\left(-b\sqrt{s+a^2}\right), \qquad (12.30)
$$

onde $a^2 = [U^2/(4D) + K]$, e $b = x/\sqrt{D}$. Noto então que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{-a^2 t} f(t)\right\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-a^2 t} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(s+a^2)t} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \bar{f}(s+a^2);
\end{aligned}
$$

portanto:

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\bar{f}(s+a^2)\right\} = \mathrm{e}^{-a^2 t} f(t). \qquad (12.31)
$$

Segue-se que

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\exp(-b\sqrt{s+a^2})\right\} = \frac{b}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left[-\left(a^2 t + \frac{b^2}{4t}\right)\right]. \qquad (12.32)
$$

enquanto que

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1. \qquad (12.33)
$$

Portanto, podemos usar o teorema da convolução para obter

$$
c(x,t) = c_0\exp\left(\frac{Ux}{2D}\right)\int_{\tau=0}^{t}\frac{b}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\exp\left[-(a^2\tau + b^2/4\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau. \qquad (12.34)
$$

Para tentar resolver a integral, fazemos a substituição de variável

$$
\tau = \frac{b^2}{4u^2} \;\Rightarrow\; \tau^{-3/2} = \left(\frac{2u}{b}\right)^3;\; \mathrm{d}\tau = -\frac{b^2}{2}u^{-3}\,\mathrm{d}u.
$$

A integral fica

$$
\int_{u=\infty}^{\frac{b}{2\sqrt{t}}}\frac{b}{2\sqrt{\pi}}\frac{8u^3}{b^3}\exp\left[-\left(\left(\frac{ab}{2u}\right)^2 + u^2\right)\right]\left[-\frac{b^2}{2}u^{-3}\,\mathrm{d}u\right]
$$

Figura 12.5: Os dois ramos da transformação $u(v)$.

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{b}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left[-\left(\left(\frac{ab}{2u}\right)^2 + u^2\right)\right] \mathrm{d}u. \tag{12.35}$$

A técnica padrão em uma situação destas é "completar o quadrado":

$$\begin{aligned}\exp\left[-\left(\left(\frac{ab}{2u} + u\right)^2\right)\right] &= \exp\left[-\left(\left(\frac{ab}{2u}\right)^2 + ab + u^2\right)\right] \\ &= \exp(-ab)\exp\left[-\left(\left(\frac{ab}{2u}\right)^2 + u^2\right)\right].\end{aligned} \tag{12.36}$$

O problema agora é calcular

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{ab} \int_{\frac{b}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{ab}{2u} + u\right)^2\right] \mathrm{d}u. \tag{12.37}$$

Faço então mais uma mudança de variável:

$$v = \frac{ab}{2u} + u, \tag{12.38}$$

que infelizmente não é monótona. A figura 12.5 mostra a função 12.38. O ponto de mínimo é (u_*, v_*), onde $u_* = \sqrt{ab/2}$, e $v_* = \sqrt{2ab}$. Os dois ramos da relação inversa $u = u(v)$ são

$$u = \frac{1}{2}\left[v - \sqrt{v^2 - 2ab}\right], \qquad u < u_*, \tag{12.39}$$

$$u = \frac{1}{2}\left[v + \sqrt{v^2 - 2ab}\right], \qquad u > u_*. \tag{12.40}$$

Portanto, a integral em (12.35) precisa ser calculada separadamente para os casos $u > u_*$ e $u < u_*$. Note que $u > u_*$ corresponde a

$$\frac{b}{2\sqrt{t}} > \sqrt{\frac{ab}{2}} \Rightarrow \frac{b^2}{4t} > \frac{ab}{2} \Rightarrow \frac{b}{2\sqrt{t}} > a\sqrt{t}. \tag{12.41}$$

O primeiro caso é aparentemente mais fácil, porque só depende do ramo "positivo":

$$I = \frac{2\mathrm{e}^{ab}}{\sqrt{\pi}} \int_{v_0}^{\infty} \exp(-v^2)\frac{1}{2}\left[1 + \frac{v}{\sqrt{v^2 - 2ab}}\right] dv$$

Listagem 12.1: Obtenção da integral 12.42 com Maxima

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) f : exp(a*b)/sqrt(%pi) * exp(-v^2)*(1 + v/sqrt(v^2-2*a*b));
                                                          2
                              v                     a b - v
                     (---------------- + 1) %e
                              2
                      sqrt(v  - 2 a b)
(%o2)                ---------------------------------
                                 sqrt(%pi)
(%i3) integrate(f,v,v0,inf);
(%o3)
          - a b                2                  2 a b                2 a b
       %e       (erf(sqrt(v0  - 2 a b)) + %e       erf(v0) - %e       - 1)
     - ---------------------------------------------------------------------
                                          2
(%i4) expand(%);
             - a b                2                    a b                a b
          %e       erf(sqrt(v0  - 2 a b))     %e     erf(v0)    %e
(%o4) (- -------------------------------) - ------------- + -----
                        2                            2            2
                                                                        - a b
                                                                     %e
                                                                   + -------
                                                                        2
```

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-ab}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{v_0^2-2ab}\right)+\mathrm{e}^{ab}\,\mathrm{erfc}(v_0)\right],\\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-ab}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t}\right)+\mathrm{e}^{ab}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]. \qquad (12.42)
\end{aligned}
$$

No desenvolvimento acima, nós usamos $u_0 = b/(2\sqrt{t})$, e $v_0 = (ab)/(2u_0) + u_0$. A integral é facilmente calculada com Maxima (ou qualquer outra linguagem de processamento simbólico, ou manualmente), conforme indicado na listagem 12.1.
No segundo caso, $u < u_*$, e precisamos dividir a integral em duas partes: uma com $u \in [u_0, u_*]$, e a outra com $u \in (u_*, \infty)$. No primeiro ramo, $u(v)$ é dado por (12.39), e no segundo, por (12.40):

$$
\begin{aligned}
I = \frac{2\mathrm{e}^{ab}}{\sqrt{\pi}}\int_{v_0}^{v_*}\exp(-v^2)\frac{1}{2}\left[1-\frac{v}{\sqrt{v^2-2ab}}\right]\mathrm{d}v\,+\\
\frac{2\mathrm{e}^{ab}}{\sqrt{\pi}}\int_{v_*}^{\infty}\exp(-v^2)\frac{1}{2}\left[1+\frac{v}{\sqrt{v^2-2ab}}\right]\mathrm{d}v. \qquad (12.43)
\end{aligned}
$$

Cada uma das duas integrais acima pode ser calculada com relativa facilidade (no meu caso, novamente com Maxima), resultando respectivamente em

$$
\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{v_0^2-2ab}\right)-\mathrm{erf}\left(\sqrt{v_*^2-2ab}\right)\right]+\frac{\mathrm{e}^{ab}}{2}\left[\mathrm{erf}\,v_*-\mathrm{erf}\,v_0\right],
$$

e

$$
\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{v_*^2-2ab}\right)\right]+\frac{\mathrm{e}^{ab}}{2}\left[1-\mathrm{erf}\,v_*\right].
$$

Reunindo estes resultados e usando $v_*^2 = 2ab$, $\mathrm{erf}(0) = 0$,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ab}\left[1+\mathrm{erf}\left(\sqrt{v_0^2-2ab}\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ab}\left[1-\mathrm{erf}(v_0)\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ab}\left[1+\mathrm{erf}\left(a\sqrt{t}-\frac{b}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ab}\left[1-\mathrm{erf}(v_0)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ab}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}} - a\sqrt{t}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{ab}\left[1 - \operatorname{erf}(v_0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-ab}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}} - a\sqrt{t}\right) + \mathrm{e}^{ab}\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)\right]. \qquad (12.44)
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
ab &= x\sqrt{\frac{U^2}{4D^2} + \frac{K}{D}}, \\
\frac{b}{2\sqrt{t}} &= \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}, \\
a\sqrt{t} &= \sqrt{\frac{U^2 t}{4D} + Kt}.
\end{aligned}
$$

Reunindo tudo,

$$
\begin{aligned}
c(x,t) = \frac{c_0}{2}\exp\left(\frac{Ux}{2D}\right)\Bigg[&\exp\left(-x\sqrt{\frac{U^2}{4D^2} + \frac{K}{D}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\frac{U^2 t}{4D} + Kt}\right) + \\
&\exp\left(+x\sqrt{\frac{U^2}{4D^2} + \frac{K}{D}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\frac{U^2 t}{4D} + Kt}\right)\Bigg] \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Repare que ambos os casos $u < u_*$ e $u > u_*$ levam à mesma solução em termos de t: os resultados 12.42 e 12.44 são idênticos. Para obter os resultados acima, nós usamos o fato de que erf é uma função ímpar.

13

Uma breve introdução à teoria de distribuições

A distribuição delta de Dirac é uma forma conveniente de representar fenômenos físicos fortemente localizados no espaço, no tempo ou em alguma outra dimensão (por exemplo, fenômenos localizados na *frequência*, ou no *número de onda*), de tal maneira que os detalhes de seu comportamento na região onde estão localizados não são essenciais. A delta representa "impulsos", isto é: forças localizadas em torno de "pontos", impactos (de uma bola de tênis na raquete, por exemplo), ou descargas muito localizadas de poluentes (por exemplo, um acidente em que um caminhão com uma carga tóxica cai dentro de um rio e a carga vaza "instantaneamente" para dentro do rio).

Mesmo assim, os efeitos produzidos por esses fenômenos "localizados" (no tempo e/ou no espaço) podem ser muito bem previstos a partir da "integral" da ação: a quantidade de movimento total trocada entre a raquete e a bola (o "impulso"), ou a massa total de substância vazada. O conhecimento dessas quantidades é suficiente, desde que a escala em que o fenômeno ocorre seja muito menor do que a escala de interesse (por exemplo, a região em que ocorre o vazamento é muito menor que o trecho de rio de interesse).

Nossa introdução à delta vai ser bastante informal, mas ela é somente isto: uma introdução. Para um estudo detalhado de distribuições, mas ainda razoavelmente acessível, recomendamos o excelente livro de Richards e Youn (1990).

13.1 – A delta de Dirac

Considere o ponto 0 do eixo x, e para fixar idéias dê ao eixo uma dimensão física: por exemplo, L. Escolha agora um fator de escala ℓ, $[\![\ell]\!] = \mathsf{L}$, e construa um "pequeno" intervalo I_n ($n \in \mathbb{N}$) em torno de $x = 0$, como se segue:

$$I_n = \left[-\frac{\ell}{2n}, +\frac{\ell}{2n}\right]. \tag{13.1}$$

Note que o tamanho de I_n é

$$|I_n| = \Delta x_n = \frac{\ell}{n}. \tag{13.2}$$

Construa agora um retângulo de área unitária sobre a base Δx_n, definindo uma função $\phi_n(x)$ como

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{\ell}, & x \in I_n, \\ 0, & x \notin I_n. \end{cases} \tag{13.3}$$

Figura 13.1: Efeito de uma função $\phi_n(x-a)$, selecionando o valor de $f(a)$.

A idéia de (13.3) é que à medida que n aumenta, o intervalo I_n fica cada vez mais "apertado" em torno de 0, e que o valor de ϕ_n dentro de I_n fica cada vez maior; no entanto, a *área* permanece constante. De fato, uma consequência de (13.3) é que, para $x \in I_n$,

$$\phi_n(x)\Delta x_n = 1,$$

ou:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{13.4}$$

A figura 13.1 mostra $\phi_n(x-a)$ atuando em torno de um ponto $x = a$. Agora, ainda conforme mostrado na figura 13.1, dada uma função $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$, a função $f(x)\phi_n(x)$ é zero, obviamente, exceto em I_n. O efeito da operação $f(x)\phi_n(x)$ é "selecionar" os valores de f em torno de $x = 0$. Considere agora

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\ell}{2n}}^{+\frac{\ell}{2n}} \frac{n}{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{\ell} f(x^*)\frac{\ell}{n} = f(x^*).\end{aligned}$$

A expressão acima é uma aplicação direta do teorema do valor médio do Cálculo, com $-\ell/(2n) \leq x^* \leq +\ell/(2n)$.

Se nós fizermos então $n \to \infty$, $\Delta x_n = \ell/n$ fica cada vez mais "apertado" em torno de $x = 0$; portanto, $n \to \infty \Rightarrow f(x^*) \to f(0)$, e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0). \tag{13.5}$$

As condições (13.4) e (13.5) definem o que nós chamamos de uma "sequência delta": o conjunto de funções $\phi_n(x)$ é uma *sequência* de funções que "cercam" cada vez mais o valor de f em $x = 0$, preservando áreas unitárias.

Como mostra a figura 13.1, se desejarmos "concentrar" a ação em torno de um ponto $x = a$ diferente de zero, a modificação necessária é trivial; (13.4) e (13.5) tornam-se (verifique)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x-a)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{13.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a). \tag{13.7}$$

Repare que o limite

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$$

não é uma função! *Simbolicamente*, entretanto, nós escrevemos

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \tag{13.8}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{13.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0). \tag{13.10}$$

Para uma translação da δ até a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = 1, \tag{13.11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a). \tag{13.12}$$

Insistindo: do ponto de vista matemático, $\delta(x)$ não é uma função: é um outro objeto matemático, uma *distribuição*. Tecnicamente, uma distribuição, tal como a delta, é um *funcional*, mas isso talvez nos leve um pouco longe demais aqui (de novo: para as definições tecnicamente corretas em Matemática, veja Richards e Youn (1990)). O ponto fundamental é o "espírito" de uso das deltas: volte o olhar para (13.9)–(13.10): observe como a delta está *dentro de integrais*. Naturalmente, nós sempre devemos nos lembrar de que se trata de *limites* de integrais de *sequências delta*. Mas a abreviação é útil em Engenharia e Física: *O importante é nos lembrarmos de que a delta de Dirac representa um efeito sobre funções, via de regra aparecendo sob o sinal de integração*.

As equações (13.9)–(13.10) são uma maneira conveniente de lidarmos com sequências delta sem entrarmos nos detalhes de como elas são definidas, e nos processos de limites associados. De fato, isso seria um pouco entediante, uma vez que existem infinitas sequências delta, todas elas formalmente equivalentes à "$\delta(x)$", como mostra (por exemplo) o exemplo a seguir.

Exemplo 13.1 Mostre que

$$\phi_n(x) = \frac{n}{\ell\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{nx}{\ell}\right)^2}$$

é uma sequência delta.

SOLUÇÃO
Faça

$$y = \frac{nx}{\ell},$$
$$\mathrm{d}y = \frac{n\mathrm{d}x}{\ell};$$

então,

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty}\phi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y=-\infty}^{+\infty}\phi_n\left(\frac{\ell y}{n}\right)\frac{\ell}{n}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\ell y}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = f(0) \blacksquare\end{aligned}$$

Um outro resultado importantíssimo em Física e em Engenharia é o seguinte:

$$\delta(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi}\,\mathrm{d}k. \tag{13.13}$$

O resultado é estranho, porque do ponto de vista "clássico" a integral não converge: o integrando $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ simplesmente oscila "por toda a eternidade", impedindo a convergência. No entanto, nós podemos calcular

$$\phi_B(x) = \int_{k=-B}^{+B} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi}\,\mathrm{d}k \tag{13.14}$$

para $B < \infty$, e em seguida fazer $B \to \infty$ para procurar ver em que sentido (13.13) é verdadeira. O cálculo na verdade é padrão, e bastante simples:

$$\begin{aligned}\phi_B(x) = \int_{k=-B}^{+B} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi}\,\mathrm{d}k &= \int_{-B}^{+B} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi\mathrm{i}x}(\mathrm{i}x)\,\mathrm{d}k \\ &= \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi\mathrm{i}x}\right|_{-B}^{+B} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}x}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Bx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Bx}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}x} 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(Bx) \\ &= \frac{\mathrm{sen}(Bx)}{\pi x}.\end{aligned} \tag{13.15}$$

$\phi_B(x)$ é uma função interessante. Em primeiro lugar, sua integral não depende de B, e vale sempre 1, como podemos constatar com Maxima:

```
(%i1) assume(B > 0);
(%o1)                                  [B > 0]
(%i2) phi_B : sin(B*x)/(%pi * x) ;
                                      sin(x B)
(%o2)                                 --------
                                       %pi x
(%i3) integrate(phi_B,x,0,inf);
                                          1
(%o3)                                     -
                                          2
```

Portanto, uma vez que $\phi_B(x)$ é par,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(Bx)}{\pi x}\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \forall B > 0. \tag{13.16}$$

Além disso, uma sequência de Bs crescentes transforma $\{\phi_B(x)\}$ em uma sequência delta; de fato,

$$\lim_{B\to\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\mathrm{sen}(Bx)}{\pi x}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{Bx}{B}\right) \frac{\mathrm{sen}(Bx)}{\pi Bx}\,B\mathrm{d}x$$

Figura 13.2: A sequência $\phi_B(x)$, $B = 1, 2, 10$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{B\to\infty} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\xi}{B}\right) \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(0) \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\pi\xi}\, \mathrm{d}\xi = f(0).
\end{aligned}
$$

Fisicamente, podemos interpretar B como uma frequência: à medida que B cresce, $\phi_B(x)$ oscila mais rapidamente e tende a se concentrar em $x = 0$, conforme nos mostra a figura 13.2

Exemplo 13.2 Utilizando a "técnica de Feynman", mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

para $b > 0$.

SOLUÇÃO
Inicialmente, defina

$$I(a) \equiv \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}\, \mathrm{d}x,$$

e note que $I(\infty) = 0$.
Agora,

$$
\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^\infty -x\mathrm{e}^{-ax} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \operatorname{sen}(bx)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{b}{b^2 + a^2}.
\end{aligned}
$$

Note que a integral na 2ª linha acima é obtida, trivialmente, com integração por partes.
Mas

$$I'(a) = -\frac{b}{b^2 + a^2} \;\Rightarrow\; I(a) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) + C,$$

onde C é uma constante de integração a determinar. Sabemos entretanto que $I(\infty) = 0$; então,

$$-\operatorname{arctg}(\infty) + C = 0 \;\Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right);$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = I(0) = \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Exercícios propostos

13.1 Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi,$$

construa uma sequência delta baseada no integrando.

13.2 Observando que

$$\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-xy}\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

mostre analiticamente que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Sugestão: escreva uma integral dupla, e troque os limites de integração.

13.2 – O Cálculo com Distribuições

Integrais

Embora não no sentido clássico, distribuições são "integráveis". Até agora, a única distribuição que conhecemos — e mesmo assim muito superficialmente — é a delta de Dirac. Do ponto de vista de distribuições, a delta possui uma primitiva. Ela é (simbolicamente)

$$H(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{13.17}$$

Na literatura, $H(x)$ é denominada "função" de Heaviside.

É fundamental observar a diferença entre (13.9) e (13.17): essa é uma integral *imprópria*, enquanto que aquela era uma integral *definida*. Cada qual tem seu papel, mas eles são diferentes!

Naturalmente, $H(x)$ pode ser entendida como o limite das integrais de sequências delta. Por exemplo, partindo de nossos $\phi_n s$ simples definidos em (13.3), e fazendo

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

obtemos rapidamente

$$H_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\ell}{2n}, \\ \frac{nx}{2} + \frac{1}{2}, & -\frac{\ell}{2n} \le x \le +\frac{\ell}{2n}, \\ 1, & x > \frac{\ell}{2n}. \end{cases}$$

Ao contrário da $\delta(x)$, $H(x)$ pode ser associada a uma função clássica. De fato, se $\lim_{n\to\infty} H_n(x) = H(x)$, temos

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Isso não deve ser surpreendente, uma vez que a integração é uma operação de suavização.

A próxima questão, obviamente, é o cálculo de

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Mas agora que sabemos que $\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = H(x)$, podemos integrar por partes (o procedimento é meramente formal mas acredite: funciona):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= f(\xi)H(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} H(\xi)f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= f(x)H(x) - \left[\int_{-\infty}^{0} H(\xi)f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{x} H(\xi)f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\right]\end{aligned}$$

A primeira integral dentro dos colchetes é zero, pois $H(\xi) \equiv 0,\ \xi < 0$. Em seguida,

- Se $x < 0$, a segunda integral também será zero.
- Se $x > 0$,

$$\int_{0}^{x} H(\xi)f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{x} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x) - f(0).$$

As duas condições acima podem ser resumidas em uma única:

$$\int_{0}^{x} H(\xi)f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = H(x)\left[f(x) - f(0)\right], \tag{13.18}$$

donde

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = H(x)f(x) - [H(x)f(x) - H(x)f(0)] = H(x)f(0). \tag{13.19}$$

Note que, quando $x \to \infty$, (13.19) concorda com (13.5).

Outros resultados úteis facilmente obtidos com integração por partes são:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} H(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \xi H(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \xi\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= xH(x) - H(x)\times 0 = xH(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} H(\xi)\xi\,\mathrm{d}\xi &= H(\xi)\frac{1}{2}\xi^2\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\xi^2\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= H(x)\frac{x^2}{2} - H(x)\times 0 = H(x)\frac{x^2}{2};\end{aligned}$$

e em geral:

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi)\xi^n\,\mathrm{d}\xi = H(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{13.20}$$

Derivadas

A definição de derivada de uma distribuição é baseada em uma generalização relativamente óbvia. Suponha que $h(x)$ seja uma função *integrável* de $-\infty$ a $+\infty$, e que $\psi(x)$ seja uma distribuição. *Se* $\psi(x)$ também fosse uma função ordinária e integrável, teríamos

$$\begin{aligned} h(\pm\infty) &= 0, \\ \psi(\pm\infty) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [h(x)\psi(x)]' \mathrm{d}x = h(x)\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \tag{13.21}$$

A seguinte manipulação formal motiva, então, a definição da derivada de uma distribuição ψ:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [h(x)\psi(x)]' \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [h'(x)\psi(x) + h(x)\psi'(x)] \, \mathrm{d}x \;\Rightarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)h(x) \, \mathrm{d}x &\equiv -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)h'(x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{13.22}$$

Observe que (13.22) é uma *definição formal* da derivada de uma distribuição ψ: a *ação* de ψ' sobre uma $h(x)$ (lembre-se: $h(x)$ é uma "função" de verdade!) é definida em termos da ação de ψ sobre $h'(x)$.

Por exemplo, (13.22) é compatível com (13.18) no caso em que $\psi(x) = H(x)$. De fato, usando a definição (13.22),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)f(x) \, \mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{0}^{\infty} H(x)f'(x) \, \mathrm{d}x \\ \text{(usando (13.18))} &= -H(\infty)[f(\infty) - f(0)] \\ &= f(0). \end{aligned} \tag{13.23}$$

Em (13.23), nós usamos o fato de que f é uma função integrável, com $f(\infty) = 0$. Comparando (13.23) com (13.10),

$$H'(x) = \delta(x),$$

o que concorda, formalmente, com (13.17).

Se $\psi(x)$ for uma distribuição, então $h(x)\psi(x)$ também é uma distribuição. Vamos provar que

$$[h(x)\psi(x)]' = h(x)\psi'(x) + h'(x)\psi(x). \tag{13.24}$$

Comece pela definição:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [h(x)\psi(x)]' g(x) \, \mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{+\infty} [h(x)\psi(x)] g'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)[h(x)g'(x)] \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)[(gh)'(x) - h'(x)g(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi'(x)h(x) + \psi(x)h'(x)]g(x)\,\mathrm{d}x \;\blacksquare
\end{aligned} \tag{13.25}
$$

Com a fórmula (13.25):

$$
[x\delta(x)]' = x\delta'(x) + \delta(x). \tag{13.26}
$$

Mas

$$
\int x\delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0f(0) = 0; \tag{13.27}
$$

Agora, se interpretarmos $x\delta(x)$ como uma "função" que vale 0 em todos os pontos,

$$
\begin{aligned}
[x\delta(x)]' &= [0]' = 0; \\
x\delta'(x) + \delta(x) &= 0 \;\blacksquare
\end{aligned} \tag{13.28}
$$

13.3 – Resultados adicionais

Em seguida, vamos mostrar que

$$
\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{13.29}
$$

Se $a > 0$, faça $\xi = ax$:

$$
\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(ax)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)f\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} \\
&= \frac{1}{a}f(0) = \frac{1}{|a|}f(0) \\
&= \int \frac{\delta(x)}{|a|}f(x)\,\mathrm{d}x;
\end{aligned} \tag{13.30}
$$

Se $a < 0$, faça, também, $\xi = ax$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(\xi)f\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{a} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)f\left(\frac{\xi}{a}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{-a} \\
&= \frac{1}{|a|}f(0) \\
&= \int \frac{\delta(x)}{|a|}f(x)\,\mathrm{d}x \;\blacksquare
\end{aligned} \tag{13.31}
$$

Em particular, isso mostra que a δ é uma "função" par:

$$
\delta(-x) = \delta(x) \;\blacksquare \tag{13.32}
$$

Vamos fazer mais um exemplo obtido em Butkov (1988):

$$
\begin{aligned}
\int \delta\left(x^2 - a^2\right) f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \delta\left((x-a)(x+a)\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \delta\left(2a(x-a)\right) f(x)\,\mathrm{d}x + \int \delta\left(-2a(x+a)\right) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\delta(x-a)}{|2a|}f(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{\delta(x+a)}{|2a|}f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \blacksquare \tag{13.33}$$

A transformada de Laplace da delta de Dirac é

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\delta(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-s\cdot 0} = 1 \blacksquare\end{aligned} \tag{13.34}$$

e

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-st_0} \blacksquare\end{aligned} \tag{13.35}$$

Para a função de Heaviside, temos os seguintes resultados:

$$\mathscr{L}\{H(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} 1\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}, \tag{13.36}$$

$$\mathscr{L}\{H(t-t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-st_0}}{s} \tag{13.37}$$

Também é possível mostrar que $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$:

$$\int \delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) = f(0)\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int \delta(x)f(0)\,\mathrm{d}x \blacksquare \tag{13.38}$$

Exercícios propostos

13.3 Calcule

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi.$$

13.4 Obtenha

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{sen}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

13.5 Se $\delta(x)$ e $H(x)$ são a delta de Dirac e a função de Heaviside, respectivamente, calcule a integral

$$\int_{\xi=-\infty}^{x} \big\{[H(\xi) - H(\xi-1)] + \delta(\xi-2)\big\}\,\mathrm{d}\xi.$$

13.4 – Aplicações

Equações diferenciais

Em equações diferenciais, onde quer que uma função ordinária pode aparecer (nos coeficientes da equação, ou no termo forçante, por exemplo), uma distribuição também pode. Para que isso seja possível, é suficiente que possamos *diferenciar* e *integrar* distribuições (seção 13.2).

Os exemplos desta seção ilustram várias situações em que integramos equações diferenciais que contêm distribuições.

Exemplo 13.3 Uma forma particularmente fácil de resolver equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1 não-homogêneas do tipo

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{13.39}$$

é pelo método de variação de constantes: se $h(x)$ é a solução da equação homogênea associada, tente

$$y = g(x)h(x) \Rightarrow g'h + gh' + agh = f \tag{13.40}$$

$$g\underbrace{(h' + ah)}_{=0} + g'h = f \Rightarrow g(x) = \int \frac{f}{h}\,\mathrm{d}x \;\blacksquare \tag{13.41}$$

Usando, obrigatoriamente, o método descrito acima, encontre a solução de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0) = 0, \tag{13.42}$$

onde $\delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac. Observações:

1. Ache a solução h *sem se preocupar em atender à condição inicial*.
2. Na integração de f/h, use como limite inferior $t = 0_-$, de maneira a permitir que a delta de Dirac "atue" em torno de zero.

SOLUÇÃO
Inicialmente, procura-se uma solução da equação homogênea (qualquer uma serve):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}h &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{h} &= -\frac{\mathrm{d}t}{T},\\
\ln h &= -\frac{t}{T},\\
h(t) &= \mathrm{e}^{-t/T}.
\end{aligned} \tag{13.43}$$

Agora procuro uma solução da forma

$$x(t) = h(t)g(t),$$

tal que

$$0 = x(0_-) = h(0_-)g(0_-) \Rightarrow g(0_-) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_{0_-}^{t} e^{+\tau/T}\delta(\tau)\,d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{+\tau/T}\delta(\tau)\,d\tau\\
&= H(t)e^{0/T} = H(t),
\end{aligned} \tag{13.44}$$

donde

$$x(t) = H(t)e^{-t/T} \;\blacksquare \tag{13.45}$$

Figura 13.3: Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada

Cargas concentradas e distribuídas em vigas

Em Mecânica, um carregamento distribuído $w(x)$ é uma distribuição contínua de forças elementares $\mathrm{d}F = w(x)\,\mathrm{d}x$ que, integrada, dá a força resultante sobre uma peça estrutural unidimensional, em geral uma viga.

Na figura 13.3, vemos um carregamento distribuído triangular

$$w_1(x) = -\left[H(x) - H(x-L)\right] w_0 \frac{x}{L}, \qquad 0 \le x \le L$$

Note que o uso das funções de Heaviside dentro dos colchetes delimita o carregamento triangular à metade esquerda da viga.

Já uma carga concentrada P é uma força atuando sobre uma região suficientemente pequena da viga para que sua ação possa ser considerada, para todos os efeitos, pontual.

Uma rápida reflexão nos levará a concluir que, na realidade, carregamentos distribuídos são muito mais realistas como modelos mecânicos do que forças concentradas em pontos, embora essas últimas sempre sejam apresentadas antes de carregamentos distribuídos em cursos de Mecânica!

Por exemplo, sacos de soja, pneus de caminhões ou as bases de estantes de livros sempre exercem suas cargas de forma distribuída sobre suas áreas (ou comprimentos, como no caso unidimensional que estamos tratando aqui) em contato com vigas, ou lajes.

Por outro lado, quando o comprimento total da viga em questão ($2L$ na figura 13.3) é muito maior que essas regiões de contato, é muito razoável esquecer os detalhes do carregamento e representá-lo como uma carga concentrada.

Naturalmente, isso nada mais é do que a delta de Dirac com a qual temos trabalhado neste capítulo. Por exemplo, na figura 13.3 a carga concentrada P pode ser representada por um carregamento distribuído equivalente

$$w_2(x) = -P\delta(x - 3L/2).$$

Com isso, rapidamente a resultante e o momento (em relação a $x = 0$) do carregamento podem ser calculados:

$$\begin{aligned} R = \int_{0_-}^{2L_+} w_2(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{0_-}^{2L_+} P\delta(x - 3L/2)\mathrm{d}x \\ &= -P\int_{0_-}^{2L_+} P\delta(x - 3L/2)\mathrm{d}x \\ &= -P; \\ M = -\int_{0_-}^{2L_+} x w_2(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{0_-}^{2L_+} xP\delta(x - 3L/2)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Figura 13.4: Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada

$$= -P \int_{0_-}^{2L_+} x\delta(x - 3L/2)\mathrm{d}x.$$

Essa última integral pode ser calculada por partes:

$$\begin{aligned}\int_{0_-}^{2L_+} x\delta(x - 3L/2)\mathrm{d}x &= xH(x - 3L/2)\Big|_{0_-}^{2L_+} - \int_{0_-}^{2L_+} H(x - 3L/2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2L - L/2 = 3L/2; \\ M &= -3PL/2.\end{aligned}$$

É claro que esse último resultado poderia ter sido obtido, de maneira muito mais fácil, com métodos elementares de Mecânica. Mas não é esse o ponto aqui; o ponto é que é possível obter as equações de equilíbrio (e fazer muitas coisas mais), escrevendo de forma compacta *todo* o carregamento sobre a viga utilizando a $\delta(x)$ e a $H(x)$. No exemplo da figura 13.3, o carregamento total inclui as duas reações de apoio A e B como cargas concentradas, o carregamento distribuído triangular, e a carga concentrada P, e pode ser escrito na forma:

$$w(x) = A\delta(x) - [H(x) - H(x - L)]\, w_0\frac{x}{L} + -P\delta(x - 3L/2) + B\delta(x - 2L).$$

Uma vez obtido o carregamento *total* $w(x)$, as equações de equilíbrio serão, simplesmente,

$$\int w(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int xw(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exemplo 13.4 Calcule as reações de apoio em A e B na figura 13.4.

SOLUÇÃO
O carregamento é dado por

$$w(x) = A\delta(x) - w_0[H(x) - H(x-2L)] - w_0[H(x-L)) - H(x-2L)] + B\delta(x-2L). \quad (13.46)$$

As equações de equilíbrio são

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad (13.47)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xw(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad (13.48)$$

Vemos que as duas integrais intermediárias são as mais difíceis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_0 \underbrace{[H(x) - H(x-2L)]}_{u} \underbrace{\mathrm{d}x}_{dv} = w_0 x[H(x) - H(x-2L)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_0 x[\delta(x) - \delta(x-2L)]\,\mathrm{d}x = 2w_0 L. \tag{13.49}$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_0[H(x-L) - H(x-2L)] = w_0 L. \tag{13.50}$$

A integral de toda a equação (13.46), portanto, é

$$A - 2w_0 L - w_0 L + B = 0. \tag{13.51}$$

Da mesma forma, a condição de equilíbrio de momentos (13.48) produz duas integrais "difíceis". A primeira será

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_0 \underbrace{[H(x) - H(x-2L)]}_{u} \underbrace{x\mathrm{d}x}_{dv} = w_0 \frac{x^2}{2}[H(x) - H(x-2L)]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2} w_0[\delta(x) - \delta(x-2L)]\,\mathrm{d}x = 2w_0 L^2 \tag{13.52}$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w_0[H(x-L) - H(x-2L)]x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} w_0 L^2. \tag{13.53}$$

A equação de equilíbrio de momentos será

$$B = \frac{7}{4} w_0 L. \tag{13.54}$$

A solução do sistema de equações em A e em B produz o valor acima para B e $A = 5w_0 L/4$.

Exemplo 13.5 Uma viga bi-apoiada, isostática, está sujeita a um carregamento distribuído total

$$w(x) = \frac{w_0 L}{2}\delta(x) - w_0\,[H(x) - H(x-L)] + \frac{w_0 L}{2}\delta(x-L),$$

onde as δs indicam duas reações de apoio iguais nas extremidades de um vão L; sobre o vão, o carregamento é uniforme e igual a $-w_0$. Sabendo que o esforço cortante $V(x)$ e o momento fletor $M(x)$ são dados por (*siga rigorosamente os sinais!*)

$$V(x) = \int_{-\infty}^{x} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} V(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

Obtenha $V(x)$ e $M(x)$ integrando a expressão dada para $w(x)$. *A utilização dos conceitos de teoria de distribuições é obrigatória.*

SOLUÇÃO

Inicialmente, vamos obter um resultado auxiliar útil. Se $F'(x) = f(x)$, então

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= H(\xi - a)F(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} F(\xi)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi \\
&= H(x-a)F(x) - H(x-a)F(a) \\
&= H(x-a)[F(x) - F(a)].
\end{aligned}
$$

Esse resultado será repetidamente utilizado na seqüência.
Integrando $w(x)$ termo a termo,

$$
\int_{-\infty}^{x} \frac{w_0 L}{2}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{w_0 L}{2}H(x);
$$

$$
\int_{-\infty}^{x} -w_0\left[H(x) - H(x-L)\right]\,\mathrm{d}\xi = -w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right];
$$

$$
\int_{-\infty}^{x} \frac{w_0 L}{2}\delta(\xi - L)\,\mathrm{d}\xi = \frac{w_0 L}{2}H(x-L).
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{w_0 L}{2}H(x) - w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right] + \frac{w_0 L}{2}H(x-L), \\
M(x) &= \frac{w_0 L}{2}xH(x) - w_0\left[\frac{x^2}{2}H(x) - \frac{(x-L)^2}{2}H(x-L)\right] + \frac{w_0 L}{2}(x-L)H(x-L) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

13.6 Calcule a transformada de Laplace da Distribuição Delta de Dirac em torno de $t = a$,

$$
\mathscr{L}[\delta(t-a)] = \int_{0}^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t,
$$

onde $a > 0$. Para fazer isto, você vai precisar mudar o limite inferior da integral para $-\infty$. Explique por que você pode fazer isto sem alterar o resultado da integral.

13.7 Calcule a transformada de Laplace de $\mathrm{e}^{t}\delta(t-b)$, onde $b > 0$ e $\delta(\cdot)$ é a distribuição delta de Dirac.

13.8 Primeiro, calcule a transformada de Laplace de $H(t-a)$, onde $a > 0$, e $H(t)$ é a função de Heaviside — Calcule a integral!. Agora, obtenha

$$
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}\right\}.
$$

13.9 Resolva a equação diferencial

$$
\frac{dx}{dt} + \frac{1}{T}x = \delta(t), \qquad x(0_-) = 0,
$$

usando obrigatoriamente transformadas de Laplace. Por causa da presença da distribuição delta de Dirac, é conveniente definir

$$
\mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.
$$

Siga o seguinte roteiro:

a) Monte a tabela de transformadas de que você necessitará, na ida ou na volta, calculando $\mathscr{L}\{e^{at}\}$ e $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$.

b) Mostre que

$$
\mathscr{L}\{H(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.
$$

c) De posse dos resultados de a) e de b), resolva o problema.

13.10 Calcule a transformada de Laplace de

$$\Big[H(t) - H(t-a)\Big]\frac{t}{a} + \Big[H(t-a) - H(t-2a)\Big]\Big(2 - \frac{t}{a}\Big).$$

13.11 Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva

$$3y'' + 2y' - 3y = \delta(t), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

onde $\delta(t)$ é a delta de Dirac.

13.12 Resolva

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = \delta(t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,$$

usando obrigatoriamente transformada de Laplace. Note que $\delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac.

13.13 Uma bola de sinuca de massa m está parada sobre a mesa em $t = 0_-$ e na posição $x = 0$; ela recebe um impulso I de um taco em $t = 0$. Deixando de lado uma análise mais detalhada da dinâmica de rotação da bola, e supondo que a equação do movimento do centro de massa da bola ao longo da direção x em que foi imprimido o impulso seja

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = I\delta(t),$$

(onde $\delta(t)$ é a distribuição delta de Dirac), mostre que após a tacada a velocidade da bola é constante.

13.14 Resolva:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \delta(t)y = \frac{y_1}{T^2}t; \qquad y(0) = y_0,$$

onde y_0, y_1 e T são constantes.

13.15 Usando obrigatoriamente transformadas de Laplace, e sabendo que

$$\mathscr{L}\{H(t-b)\} = \frac{e^{-bs}}{s},$$

resolva

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = -Kc,$$

sujeita às condições iniciais e de contorno:

$$c(x,0) = 0,$$
$$c(0,t) = c_0$$

13.16 Utilizando obrigatoriamente transformada de Laplace, resolva o problema

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = -Kt^2,$$
$$c(x,0) = 0,$$
$$c(0,t) = c_0.$$

Ou seja: encontre $c(x,t)$. É útil saber que

$$\int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t = e^{-sa}\int_a^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) = e^{-sa}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Figura 13.5: Exercício 13.18.

Figura 13.6: Exercício 13.19.

13.17 Seja $\mathscr{F}$ um espaço de funcões $f(x)$ integráveis de $-\infty$ a $+\infty$ com $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; a forma de se definir a derivada de uma distribuição ϕ é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{*}$$

Seja agora a distribuição ϕ definida por

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x)\,\mathrm{d}x &\equiv \int_{0_-}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(\infty) - F(0) \\ &= -F(0),\end{aligned}$$

onde $F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, e nós estamos supondo que $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$, ou seja: que $F \in \mathscr{F}$.

a) Usando obrigatoriamente (*), mostre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

b) ϕ e ϕ' são velhas conhecidas: quem são elas?

13.18 Para a viga da figura 13.5:

a) Descreva o carregamento $w(x)$ em termos das cargas, reações de apoio, e (se necessário) da "função" delta de Dirac e da "função" de Heaviside.

b) Usando as condições de equilíbrio $\int w(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int x w(x)\,\mathrm{d}x = 0$, obtenha e resolva as equações nas reações de apoio A e B.

c) Utilizando obrigatoriamente integração de $w(x)$, obtenha o esforço cortante $V(x)$.

d) Utilizando obrigatoriamente integração de $V(x)$, obtenha o momento fletor $M(x)$.

Figura 13.7: Exercício 13.20.

13.19 A viga da figura 13.6 está *equilibrada*.

a) Escreva uma expressão para o carregamento distribuído $w(x)$ *total*, incluindo todas as cargas mostradas, em função da delta de Dirac δ e da Heaviside H; utilize a convenção de que a direção positiva aponta para cima.

b) Calcule o esforço cortante

$$V(x) = \int_{0_-}^{x} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

13.20 Para a viga da figura 13.7:

a) Escreva o carregamento total (incluindo as reações de apoio) sobre a viga, $w(x)$, utilizando as "funções" delta de Dirac e de Heaviside.

b) Utilizando obrigatoriamente as equações de equilíbrio $\int w(x)\,\mathrm{d}x = 0$ e $\int xw(x)\,\mathrm{d}x = 0$, com os limites apropriados e com $w(x)$ obtido em (a), encontre duas equações para as reações de apoio A e B. Resolva, obtendo os seus valores.

ATENÇÃO: Use o sistema de coordenadas indicado na figura.

14

Solução numérica de equações diferenciais parciais

Dada uma função u de duas variáveis (digamos, x e t) e uma equação diferencial parcial para a mesma, é possível encontrar representações aproximadas de u na forma $u(x_i, t_n)$ em um reticulado no seu domínio. Essas soluções aproximadas são chamadas de soluções numéricas, e podem ser obtidas de diversas formas. Neste capítulo, nós fazemos uma breve introdução ao método de diferenças finitas para a sua obtenção.

Um elemento chave das soluções numéricas é que nós terminamos por obter sistemas algébricos de equações, cuja solução produz, em geral, uma parte dos pontos $u(x_i, t_n)$. À medida que o algoritmo da solução progride, mais e mais pontos são obtidos.

14.1 – Advecção pura: a onda cinemática

Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = g(x). \tag{14.1}$$

A sua solução pode ser obtida pelo método das características, e é

$$u(x,t) = g(x - ct). \tag{14.2}$$

Seja então o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{14.3}$$

$$u(x,0) = 2x(1-x). \tag{14.4}$$

A condição inicial, juntamente com $u(x,1)$, $u(x,2)$ e $u(x,3)$ estão mostrados na figura 14.1. Observe que a solução da equação é uma simples onda cinemática.

Vamos adotar a notação

$$u_i^n \equiv u(x_i, t_n), \tag{14.5}$$

$$x_i = i\Delta x, \tag{14.6}$$

$$t_n = n\Delta t, \tag{14.7}$$

com

$$\Delta x = L/N_x, \tag{14.8}$$

Figura 14.1: Solução analítica das equações 14.3–14.4.

$$\Delta t = T/N_t \tag{14.9}$$

onde L, T são os tamanhos de grade no espaço e no tempo, respectivamente, e N_x, N_t são os números de divisões no espaço e no tempo.

Uma maneira simples de transformar as derivadas parciais em diferenças finitas na equação (14.3) é fazer

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i,n} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \tag{14.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,n} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \tag{14.11}$$

Substituindo na equação (14.3), obtemos o esquema de diferenças finitas *explícito*:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right),$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \tag{14.12}$$

(com $c = 2$ no nosso caso). Esse é um esquema incondicionalmente *instável*, e vai fracassar. Vamos fazer uma primeira tentativa, já conformados com o fracasso antecipado. Ela vai servir para desenferrujar nossas habilidades de programação de métodos de diferenças finitas.

O programa que implementa o esquema instável é o `onda1d-ins.py`, mostrado na listagem 14.1. Por motivos que ficarão mais claros na sequência, nós escolhemos $\Delta x = 0{,}01$, e $\Delta t = 0{,}0005$.

O programa gera um arquivo de saída binário, que por sua vez é lido pelo próximo programa na sequência, `surf1d-ins.py`, mostrado na listagem 14.2. O único trabalho desse programa é selecionar algumas "linhas" da saída de `onda1d-ins.py`; no caso, nós o rodamos com o comando

```
[ surf1d-ins.py 3 250 ] ,
```

o que significa selecionar 3 saídas (além da condição inicial), de 250 em 250 intervalos de tempo Δt. Observe que para isso nós utilizamos uma lista (`v`), cujos elementos são `arrays`.

O resultado dos primeiros 750 intervalos de tempo de simulação é mostrado na figura 14.2. Repare como a solução se torna rapidamente instável. Repare também como a solução numérica, em $t = 750\Delta t = 0{,}375$, ainda está bastante distante dos tempos mostrados na solução analítica da figura 14.1 (que vão até $t = 4$).

Listagem 14.1: `onda1d-ins.py` — Solução de uma onda cinemática 1D com um método explícito instável

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
#-----------------------------------------------------------
# onda1d-ins resolve uma equação de onda cinemática com um
# método explícito
#
# uso: ./onda1d-ins.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('onda1d-ins.dat','wb')
dx = 0.01
dt = 0.0005
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
from numpy import zeros
nx = int(10.0/dx)              # número de pontos em x
nt = int(1.0/dt)               # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
u = zeros((2,nx+1),float)      # apenas 2 posições no tempo
                               # são necessárias!
def CI(x):                     # define a condição inicial
   if 0 <= x <= 1.0:
      return 2.0*x*(1.0-x)
   else:
      return 0.0
for i in range(nx+1):          # monta a condição inicial
   xi = i*dx
   u[0,i] = CI(xi)
u[0].tofile(fou)               # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
c = 2.0                        # celeridade da onda
couhalf = c*dt/(2.0*dx)        # metade do número de Courant
for n in range(nt):            # loop no tempo
   for i in range(1,nx):       # loop no espaço
      u[new,i] = u[old,i] - couhalf*(u[old,i+1] - u[old,i-1])
   u[new,0] = 0.0
   u[new,nx] = 0.0
   u[new].tofile(fou)         # imprime uma linha com os novos dados
   (old,new) = (new,old)      # troca os índices
fou.close()
```

Figura 14.2: Solução numérica produzida por `onda1d-ins.py`, para $t = 250\Delta t$, $500\Delta t$ e $750\Delta t$.

Listagem 14.2: `surf1d-ins.py` — Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# surf1d-ins.py: imprime em <arq> <m>+1 saídas de
# onda1d-ins a cada <n> intervalos de tempo
#
# uso: ./surf1d-ins.py <m> <n>
# ----------------------------------------------------------
from sys import argv
dx = 0.01
dt = 0.0005
print('#␣dx␣=␣%9.4f' % dx)
print('#␣dy␣=␣%9.4f' % dt)
nx = int(10.0/dx)              # número de pontos em x
print('#␣nx␣=␣%9d' % nx)
m = int(argv[1])               # m saídas
n = int(argv[2])               # a cada n intervalos de  tempo
print('#␣␣m␣=␣%9d' % m)
print('#␣␣n␣=␣%9d' % n)
fin = open('onda1d-ins.dat',
         'rb')                 # abre o arquivo com os dados
from numpy import fromfile
u = fromfile(fin,float,nx+1)   # lê a condição inicial
v = [u]                        # inicializa a lista da "transposta"
for it in range(m):            # para <m> instantes:
   for ir in range(n):         # lê <ir> vezes, só guarda a última
      u = fromfile(fin,float,nx+1)
   v.append(u)                 # guarda a última
founam = 'surf1d-ins.dat'
print(founam)
fou = open(founam,'wt')        # abre o arquivo de saída
for i in range(nx+1):
   fou.write('%10.6f' % (i*dx))    # escreve o "x"
   fou.write('%10.6f' % v[0][i])   # escreve a cond inicial
   for k in range(1,m+1):
      fou.write('%10.6f' % v[k][i])# escreve o k-ésimo
   fou.write('\n')
fou.close()
```

Claramente, o esquema explícito que nós programamos jamais nos levará a uma solução numérica satisfatória para tempos da ordem de $t = 1$!

Por que o esquema utilizado em (14.12) fracassa? Uma forma de obter a resposta é fazer uma *análise de estabilidade de von Neumann*.

A análise de estabilidade de von Neumann consiste primeiramente em observar que, em um computador real, (14.12) jamais será calculada com precisão infinita. O que o computador realmente calcula é um valor *arredondado* $\tilde{u}_i^n$. Por enquanto, nós só vamos fazer essa distinção de notação, entre $\tilde{u}$ e u, aqui, onde ela importa. O *erro de arredondamento* é

$$\epsilon_i^n \equiv \tilde{u}_i^n - u_i^n. \tag{14.13}$$

Note que (14.12) se aplica tanto para u quanto para $\tilde{u}$; subtraindo as equações resultantes para $\tilde{u}_i^{n+1}$ e u_i^{n+1}, obtém-se a *mesma* equação para a evolução de ϵ_i^n:

$$\epsilon_i^{n+1} = \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n), \tag{14.14}$$

onde

$$\mathrm{Co} \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} \tag{14.15}$$

é o *número de Courant*. Isso só foi possível porque (14.12) é uma equação *linear* em u. Mesmo para equações não-lineares, entretanto, sempre será possível fazer pelo menos uma análise *local* de estabilidade.

O próximo passo da análise de estabilidade de von Neumman é escrever uma série de Fourier para ϵ_i^n, na forma

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t, \\ x_i &= i\Delta x, \\ \epsilon_i^n &= \sum_{l=1}^{N/2} \xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}, \end{aligned} \tag{14.16}$$

onde e é a base dos logaritmos naturais, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $N = L/\Delta x$ é o número de pontos da discretização em x, e L é o tamanho do domínio em x.

Argumentando novamente com a linearidade, desta vez de (14.14), ela vale para cada *modo* l de (14.16), donde

$$\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} = \xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right); \tag{14.17}$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{at_n + \mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) \\ &= 1 - \mathrm{iCo}\,\mathrm{sen}\, k_l\Delta x. \end{aligned} \tag{14.18}$$

O lado direito é um número complexo, de maneira que o lado esquerdo também tem que ser! Como conciliá-los? Fazendo $a = \alpha - \mathrm{i}\beta$, e substituindo:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)\Delta t} &= 1 - \mathrm{iCo}\,\mathrm{sen}\, k_l\Delta x; \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta t}\left[\cos(\beta\Delta t) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\beta\Delta t)\right] &= 1 - \mathrm{iCo}\,\mathrm{sen}\, k_l\Delta x; \Rightarrow \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta t}\cos(\beta\Delta t) &= 1, \qquad (14.19) \\ \mathrm{e}^{\alpha\Delta t}\,\mathrm{sen}(\beta\Delta t) &= \mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x). \qquad (14.20) \end{aligned}$$

As duas últimas equações formam um sistema não-linear nas incógnitas α e β. O sistema pode ser resolvido:

$$\operatorname{tg}(\beta\Delta t) = \mathrm{Co}\operatorname{sen}(k_l\Delta x) \Rightarrow \beta\Delta t = \operatorname{arctg}\left(\mathrm{Co}\operatorname{sen}(k_l\Delta x)\right).$$

Note que $\beta \neq 0$, donde $\mathrm{e}^{\alpha\Delta t} > 1$ via (14.19), e o esquema de diferenças finitas é *incondicionalmente instável*.

O método de Lax Uma alternativa que produz um esquema estável é o método de Lax:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \mathrm{Co}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)\right]. \tag{14.21}$$

Agora que nós já sabemos que esquemas numéricos podem ser instáveis, devemos fazer uma análise de estabilidade *antes* de tentar implementar (14.21) numericamente. Vamos a isto: utilizando novamente (14.16) e substituindo em (14.21), temos

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \frac{1}{2}\left[\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} + \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right)\right.\\
&\quad \left. - \mathrm{Co}\left(\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right)\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) - \mathrm{Co}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \cos(k_l\Delta x) - \mathrm{i}\mathrm{Co}\operatorname{sen}(k_l\Delta x).
\end{aligned} \tag{14.22}$$

Nós podemos, é claro, fazer $a = \alpha - \mathrm{i}\beta$, mas há um caminho mais rápido: o truque é perceber que se o fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ for um número complexo com módulo maior que 1, o esquema será instável. Desejamos, portanto, que $|\mathrm{e}^{a\Delta t} \leq 1|$, o que só é possível se

$$\mathrm{Co} \leq 1, \tag{14.23}$$

que é o critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy.

A "mágica" de (14.21) é que ela introduz um pouco de *difusão numérica*; de fato, podemos reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta t}\\
&= -c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\right)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.
\end{aligned} \tag{14.24}$$

Não custa repetir: (14.24) é *idêntica* a (14.21). Porém, comparando-a com (14.12) (nosso esquema instável inicialmente empregado), nós vemos que ela também é equivalente a essa última, *com o termo adicional* $\left(\Delta x^2/2\Delta t\right)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)/\Delta x^2$. O que esse termo adicional significa? A resposta é *uma derivada numérica de ordem 2*. De fato, considere as expansões em série de Taylor

$$\begin{aligned}
u_{i+1} &= u_i + \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_i \Delta x^2 + O(\Delta x^3),\\
u_{i-1} &= u_i - \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_i \Delta x^2 + O(\Delta x^3),
\end{aligned}$$

e some:

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + \left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_i \Delta x^2 + O(\Delta x^4),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \tag{14.25}$$

Portanto, a equação (14.24) — ou seja: o esquema de Lax (14.21) — pode ser interpretada *também* como uma solução aproximada da equação de advecção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial c} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com

$$D = \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\right).$$

Note que D tem dimensões de *difusividade*: $[\![D]\!] = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$. No entanto: não estamos então resolvendo a equação *errada*? De certa forma, sim: estamos introduzindo um pouco de difusão na equação para amortecer as oscilações que aparecerão em decorrência da amplificação dos erros de arredondamento.

O quanto isto nos prejudica? Não muito, *desde que o efeito da difusão seja muito menor que o da advecção que estamos tentando simular*. Como a velocidade de advecção ("física"; "real") que estamos simulando é c, precisamos comparar isso com (por exemplo) a magnitude das velocidades introduzidas pela difusão numérica; devemos portanto verificar se

$$\begin{aligned}
\frac{D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{c\frac{\partial u}{\partial x}} &\ll 1,\\
\frac{D\frac{u}{\Delta x^2}}{c\frac{u}{\Delta x}} &\ll 1,\\
\frac{D}{\Delta x} &\ll c,\\
\frac{\Delta x^2}{2\Delta t\Delta x} &\ll c,\\
\frac{c\Delta t}{\Delta x} &= \mathrm{Co} \gg \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Em outras palavras, nós descobrimos que o critério para que o esquema seja acurado do ponto de vista físico é conflitante com o critério de estabilidade: enquanto que estabilidade demandava $\mathrm{Co} < 1$, o critério de que a solução seja *também* fisicamente acurada demanda que $\mathrm{Co} \gg 1/2$. Na prática, isso significa que, para $c = 2$, *ou* o esquema é estável com muita difusão numérica, ou ele é instável. Isso praticamente elimina a possibilidade de qualquer uso sério de (14.21).

Mesmo assim, vamos programá-lo! O programa `onda1d-lax.py` está mostrado na listagem 14.3. Ele usa os mesmos valores $\Delta t = 0{,}0005$ e $\Delta x = 0{,}01$, ou seja, $\mathrm{Co} = 0{,}10$.

O programa gera um arquivo de saída binário, que por sua vez é lido pelo próximo programa na sequência, `surf1d-lax.py`, mostrado na listagem 14.4. O único trabalho desse programa é selecionar algumas "linhas" da saída de `onda1d-lax.py`; no caso, nós o rodamos com o comando

```
[ surf1d-lax.py 3 500 ] ,
```

o que significa selecionar 3 saídas (além da condição inicial), de 500 em 500 intervalos de tempo Δt. Com isso, nós conseguimos chegar até o instante 0,75 da simulação.

O resultado dos primeiros 1500 intervalos de tempo de simulação é mostrado na figura 14.3. Observe que agora não há oscilações espúrias: o esquema é estável no tempo. No entanto, a solução está "amortecida" pela difusão numérica!

Listagem 14.3: `onda1d-lax.py` — Solução de uma onda cinemática 1D com um método explícito (Lax) estável

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# onda1d-lax resolve uma equação de onda cinemática com um
# método explícito
#
# uso: ./onda1d-ins.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('onda1d-lax.dat','wb')
dx = 0.01
dt = 0.0005
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
from numpy import zeros
nx = int(10.0/dx)              # número de pontos em x
nt = int(1.0/dt)               # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
u = zeros((2,nx+1),float)      # apenas 2 posições no tempo
                               # são necessárias!
def CI(x):                     # define a condição inicial
   if 0 <= x <= 1.0:
      return 2.0*x*(1.0-x)
   else:
      return 0.0
for i in range(nx+1):          # monta a condição inicial
   xi = i*dx
   u[0,i] = CI(xi)
u[0].tofile(fou)               # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
c = 2.0                       # celeridade da onda
cou = c*dt/(dx)               # número de Courant
print("Co = %10.6f" % cou)
for n in range(nt):           # loop no tempo
   for i in range(1,nx):      # loop no espaço
      u[new,i] = 0.5*(    (u[old,i+1] + u[old,i-1]) -
                       cou*(u[old,i+1] - u[old,i-1])    )
   u[new,0] = 0.0
   u[new,nx] = 0.0
   u[new].tofile(fou)         # imprime uma linha com os novos dados
   (old,new) = (new,old)      # troca os índices
fou.close()
```

Figura 14.3: Solução numérica produzida por `onda1d-lax.py`, para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$.

Listagem 14.4: `surf1d-lax.py` — Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# surf1d-lax.py: imprime em <arq> <m>+1 saídas de
# onda1d-lax a cada <n> intervalos de tempo
#
# uso: ./surf1d-lax.py <m> <n>
# ----------------------------------------------------------
from sys import argv
dx = 0.01
dt = 0.0005
print('#␣dx␣=␣%9.4f' % dx)
print('#␣dy␣=␣%9.4f' % dt)
nx = int(10.0/dx)             # número de pontos em x
print('#␣nx␣=␣%9d' % nx)
m = int(argv[1])              # m saídas
n = int(argv[2])              # a cada n intervalos de  tempo
print('#␣␣m␣=␣%9d' % m)
print('#␣␣n␣=␣%9d' % n)
fin = open('onda1d-lax.dat',
         'rb')                # abre o arquivo com os dados
from numpy import fromfile
u = fromfile(fin,float,nx+1)  # lê a condição inicial
v = [u]                       # inicializa a lista da "transposta"
for it in range(m):           # para <m> instantes:
   for ir in range(n):        # lê <ir> vezes, só guarda a última
      u = fromfile(fin,float,nx+1)
   v.append(u)                # guarda a última
founam = 'surf1d-lax.dat'
print(founam)
fou = open(founam,'wt')       # abre o arquivo de saída
for i in range(nx+1):
   fou.write('%10.6f' % (i*dx))    # escreve o "x"
   fou.write('%10.6f' % v[0][i])   # escreve a cond inicial
   for k in range(1,m+1):
      fou.write('%10.6f' % v[k][i])# escreve o k-ésimo
   fou.write('\n')
fou.close()
```

Upwind Um esquema que é conhecido na literatura como indicado por representar melhor o termo advectivo em (14.1) é o esquema de diferenças regressivas; nesse esquema, chamado de esquema *upwind* — literalmente, "corrente acima" na literatura de língua inglesa — a discretização utilizada é

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t} &= -c\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x},\\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_i^n - u_{i-1}^n\right].\end{aligned} \tag{14.26}$$

Claramente, estamos utilizando um esquema de $O(\Delta x)$ para a derivada espacial. Ele é um esquema menos acurado que os usados anteriormente, mas se ele ao mesmo tempo for condicionalmente estável e não introduzir difusão numérica, o resultado pode ser melhor para tratar a advecção.

Antes de "colocarmos as mãos na massa", sabemos que devemos analisar analiticamente a estabilidade do esquema. Vamos a isso:

$$\begin{aligned}\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\left[\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\ e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\left[e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\ e^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co}\left[1 - e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right]\\ e^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x) - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x).\end{aligned} \tag{14.27}$$

Desejamos que o módulo do fator de amplificação $e^{a\Delta t}$ seja menor que 1. O módulo (ao quadrado) é

$$\left|e^{a\Delta t}\right|^2 = (1 - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x))^2 + (\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x))^2.$$

Para aliviar a notação, façamos

$$\begin{aligned}C_k &\equiv \cos(k_l\Delta x),\\ S_k &\equiv \mathrm{sen}(k_l\Delta x).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\left|e^{a\Delta t}\right|^2 &= (\mathrm{Co}S_k)^2 + (\mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co} + 1)^2\\ &= \mathrm{Co}^2 S_k^2 + (\mathrm{Co}^2 C_k^2 + \mathrm{Co}^2 + 1) + 2(-\mathrm{Co}^2 C_k + \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co})\\ &= \mathrm{Co}^2(S_k^2 + C_k^2 + 1 - 2C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1\\ &= 2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1.\end{aligned}$$

A condição para que o esquema de diferenças finitas seja estável é, então,

$$\begin{aligned}2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1 &\le 1,\\ 2\mathrm{Co}\left[\mathrm{Co}(1 - C_k) + (C_k - 1)\right] &\le 0,\\ (1 - \cos(k_l\Delta x))\left[\mathrm{Co} - 1\right] &\le 0,\\ \mathrm{Co} &\le 1 \;\blacksquare\end{aligned}$$

Reencontramos, portanto, a condição (14.23), *mas em um outro esquema de diferenças finitas*. A lição não deve ser mal interpretada: longe de supor que (14.23) vale sempre, é a análise de estabilidade que deve ser refeita para cada novo esquema de diferenças finitas!

Figura 14.4: Solução numérica produzida pelo esquema *upwind*, para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$.

O esquema *upwind*, portanto, é condicionalmente estável, e tudo indica que podemos agora implementá-lo computacionalmente, e ver no que ele vai dar. Nós utilizamos os mesmos valores de Δt e de Δx de antes. As mudanças necessárias nos códigos computacionais são óbvias, e são deixadas a cargo do(a) leitor(a).

A figura 14.4 mostra o resultado do esquema *upwind*. Note que ele é *muito melhor* (para *esta* equação diferencial) que o esquema de Lax. No entanto, a figura sugere que algum amortecimento também está ocorrendo, embora em grau muito menor.

Exemplo 14.1 Dada a equação de difusão-advecção

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

onde u e D são constantes, faça uma análise de estabilidade de von Neumann para o esquema explícito a seguir:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + u\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} = D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Encontre uma relação entre os números de Courant, $\mathrm{Co} = u\Delta t/\Delta x$, e de Fourier, $\mathrm{Fo} = D\Delta t/\Delta x^2$, da forma

$$(a + b\mathrm{Fo})^2 + (c + d\mathrm{Co})^2 \leq 1;$$

que garanta a estabilidade do esquema.

SOLUÇÃO

$$\epsilon_i^{n+1} - \epsilon_i^n + \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n\right) = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right),$$

$$\epsilon_i^{n+1} = \epsilon_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\epsilon_{i+1}^n - \epsilon_{i-1}^n\right) + \mathrm{Fo}\left(\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right),$$

$$\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} = \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right) +$$
$$\mathrm{Fo}\left(\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right),$$

$$e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} = e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right) +$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Fo}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right),\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right) + \mathrm{Fo}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta x}\right),\\
&= 1 - \mathrm{iCo}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x) + 2\mathrm{Fo}\,(\cos(k_l\Delta x) - 1)\\
&= 1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) - 2\mathrm{iCo}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Faça $\theta = k_l\Delta x/2$; a condição para que o esquema seja estável é que

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &< 1,\\
\left(1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)^2 + \left(2\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\right)^2 &\le 1,\\
1 - 8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2(\theta) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4(\theta) + 4\mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta) &\le 1,\\
-8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2(\theta) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4(\theta) + 4\mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta) &\le 0.
\end{aligned}
\tag{14.28}
$$

Exceto para o caso $\mathrm{sen}(\theta) = 0$, podemos eliminar o fator comum $\mathrm{sen}^2(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
-8\mathrm{Fo} + 16\,\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{Fo}^2 + 4\cos^2(\theta)\mathrm{Co}^2 &\le 0,\\
-2\mathrm{Fo} + 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{Fo}^2 + \cos^2(\theta)\mathrm{Co}^2 &\le 0,
\end{aligned}
\tag{14.29}
$$

donde

$$
\mathrm{Co} \le \left[\frac{2\mathrm{Fo}\left(1 + 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{Fo}\right)}{\cos^2(\theta)}\right]^{1/2}. \tag{14.30}
$$

Para cada θ, (14.30) define uma região *diferente* do plano Fo×Co. É preciso portanto *varrer* os valores de θ e encontrar a região do plano em que o esquema é estável independentemente de θ (lembre-se de que θ indica o modo de Fourier que se desestabilizará; basta que um desses modos se desestabilize para que o sistema seja instável). As funções $\mathrm{sen}^2(\theta)$ e $\cos^2(\theta)$ possuem período igual a π (figura 14.5). No entanto, a função definida em (14.30) é simétrica em relação a $\theta = \pi/2$, como mostra a figura 14.6 (para Fo = 1); portanto, basta "varrer" θ desde 0 até $\pi/2$.

Antes de fazer essa varredura com "força bruta", entretanto, vale a pena entender as curvas representadas por 14.29 tanto em geral, quanto para os casos particulares $\theta = 0$ (entendido como um limite, já que (14.29) foi obtida após a divisão por $\mathrm{sen}^2(\theta)$) e $\theta = \pi/2$, que definem a faixa de valores que devemos varrer.

Retornamos portanto à geometria analítica, e utilizamos x para Fo e y para Co. No limite da igualdade, manipulamos agora (14.28) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\left(1 - 4\,\mathrm{sen}^2(\theta)x\right)^2 + (\mathrm{sen}(2\theta)y)^2 &= 1,\\
\left(4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)^2\left(\frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2(\theta)} - x\right)^2 + (\mathrm{sen}(2\theta)y)^2 &= 1,\\
\left(4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)^2\left(x - \frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2(\theta)}\right)^2 + (\mathrm{sen}(2\theta)y)^2 &= 1,\\
\frac{\left(x - \frac{1}{4\,\mathrm{sen}^2(\theta)}\right)^2}{\frac{1}{\left(4\,\mathrm{sen}^2(\theta)\right)^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{(\mathrm{sen}(2\theta))^2}} &= 1.
\end{aligned}
$$

A equação acima tem a forma

$$
\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,
$$

ou seja: trata-se (em geral) da equação de uma elipse com semi-eixos a e b, e centrada em $(a, 0)$. Para cada $a(\theta)$, $b(\theta)$, a região de estabilidade é a meia elipse com $0 \le x \le 2a$ e $y \ge 0$. Concluímos que a região de estabilidade que procuramos (para todos os valores de θ entre 0 e $\pi/2$) é a interseção de todas as meias elipses correspondentes. Uma considerável introvisão pode ser obtida com os dois limites. Para $\theta = 0$, (14.29) simplifica-se para

$$
-2\mathrm{Fo} + \mathrm{Co}^2 \le 0,
$$

Figura 14.5: As funções $\text{sen}^2(\theta)$ e $\cos^2(\theta)$

Figura 14.6: A função definida em 14.30 (para Fo = 1)

$$\text{Co} \leq \sqrt{2\text{Fo}}. \tag{14.31}$$

Esta é uma região não mais sob uma elipse, mas sim sob uma parábola. Para $\theta = \pi/2$, (14.29) simplifica-se para

$$\begin{aligned} -2\text{Fo} + 4\text{Fo}^2 &\leq 0, \\ -\text{Fo} + 2\text{Fo}^2 &\leq 0, \\ \text{Fo}(-1 + 2\text{Fo}) &\leq 0, \\ \text{Fo} &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{14.32}$$

Voltamos agora para uma varredura sistemática: a figura 14.7 mostra as meias-elipses que definem a região de estabilidade para cada θ, em incrementos $\Delta\theta = \pi/32$ a partir de $\theta = \pi/32$, até $\theta = 15\pi/32$, utilizando (14.30). Para a primeira metade dessa faixa de valores, ou seja, até $\theta = 7\pi/32$, $a(\theta) > 1/2$. Nessa faixa, as ordenadas máximas das meias elipses (mostradas em cinza-claro) caem abaixo da parábola $\text{Co} = \sqrt{2\text{Fo}}$ (mostrada com uma linha preta grossa). No valor central $\theta = \pi/4$, $a = 1/2$ e $b = 1$ (confira), e a ordenada máxima da elipse, $(1/2, 1)$, também é um ponto da parábola (confira). Para a segunda metade da faixa, $\pi/4 < \theta < \pi/2$, e as ordenadas máximas das elipses agora ultrapassam a parábola. Os valores de a variam entre $a = 1/2$ para $\theta = \pi/4$ e $a = 1/4$ para $\theta = \pi/2$. Note que este último valor também é um caso degenerado, e não representa mais uma elipse legítima. A interseção de todas as meias elipses é, claramente, a região em cinza-escuro da figura 14.7, representada por

$$\text{Co} \leq \sqrt{2\text{Fo}}, \qquad 0 \leq \text{Fo} \leq 1/2 \ \blacksquare$$

Figura 14.7: Exemplo 14.1: interseção (em cinza escuro) de 32 regiões (em cinza-claro; incrementos de $\pi/32$) na equação (14.30) A parábola em preto representa o caso degenerado $\theta = 0$.

Exercícios Propostos

14.1 Escreva o programa `onda1d-upw` e `surfa1d-upw`, que implementam o esquema *upwind*. Reproduza a figura 14.4.

14.2 Seja o esquema de diferenças finitas *upwind* explícito e condicionalmente estável para a equação da onda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathrm{Co}[u_i^n - u_{i-1}^n].$$

Considere que a matriz `u` foi alocada com `u = zeros((2,nx+1),float)`, onde `zeros` foi importada de `numpy`, com `nx=1000`, e que você está calculando `u[new]` a partir de `u[old]`, sendo que `old` refere-se ao passo de tempo n, e `new` ao passo de tempo $n+1$. Mostre como, utilizando a técnica de *slicing*, você pode calcular `u[new,1:nx]` *em apenas uma linha de código em Python (usando numpy)*; suponha que a variável `Cou`, com o número de Courant, já foi calculada e que ela garante a estabilidade do esquema.

14.3 Calcule a difusividade numérica introduzida pelo esquema *upwind*.

14.4 Dado esquema explícito

$$u_i^{n+1} = 2\left[1 - \mathrm{Co}^2\right] u_i^n + \mathrm{Co}^2\left[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right] - u_i^{n-1},$$

onde Co é o número de Courant, analise a estabilidade do esquema.

14.5 Considere a seguinte discretização de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(onde $c > 0$ é constante) ($t_n = n\Delta t$; $x_i = i\Delta x$):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

Faça uma análise completa de estabilidade de von Neumann do esquema em função do número de Courant $\mathrm{Co} = (c\Delta t)/\Delta x$. Descubra se o esquema é incondicionalmente instável, condicionalmente estável, ou incondicionalmente estável. Se o esquema for condicionalmente estável, para que valores de Co ele é estável?

14.6 Um esquema regressivo (*upwind*) de ordem 2. Expanda em série de Taylor $u(x,t)$ desde x_i até x_{i-1} e x_{i-2} (igualmente espaçados), elimine $\partial^2 u/\partial x^2$ e encontre uma aproximação de diferenças finitas para $\partial u/\partial x|_{x_i}$ cujo erro é $O(\Delta x^2)$.

14.7 Utilizando o esquema *upwind* do Exercício 14.6, podemos discretizar a equação da onda cinemática como

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n}{2\Delta x}.$$

Analise a estabilidade desse esquema.

14.2 – Difusão pura

Considere agora a equação da difusão,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{14.33}$$

com condições iniciais e de contorno

$$u(x,0) = f(x) \tag{14.34}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{14.35}$$

Esta solução será vista no capítulo 18:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{14.36}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x. \tag{14.37}$$

Em particular, se

$$\begin{aligned} D &= 2, \\ L &= 1, \\ f(x) &= 2x(1-x), \\ A_n &= 2\int_0^1 2x(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{\pi^3 n^3}\left[1-(-1)^n\right]. \end{aligned}$$

Todos os A_ns pares se anulam. Fique então apenas com os ímpares:

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{16}{\pi^3(2n+1)^3}, \\ u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^3(2n+1)^3}\mathrm{e}^{-((2n+1)^2\pi^2 D)t}\operatorname{sen}((2n+1)\pi x) \end{aligned} \tag{14.38}$$

O programa `difusao1d-ana.py`, mostrado na listagem 14.5, implementa a solução analítica para $\Delta t = 0{,}0005$ e $\Delta x = 0{,}001$. Da mesma maneira que os programas `surf1d*.py`, o programa `divisao1d-ana.py`, mostrado na listagem 14.6, seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização:

[`divisao1d-ana.py 3 100`].

A figura 14.8 mostra o resultado da solução numérica para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Esse é praticamente o "fim" do processo difusivo, com a solução analítica tendendo rapidamente para zero.

Listagem 14.5: `difusao1d-ana.py` — Solução analítica da equação da difusão

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# difusao1d-ana: solução analítica de
#
# du/dt = D du^2/dx^2
#
# u(x,0) = 2x(1-x)
# u(0,t) = 0
# u(1,t) = 0
#
# uso: ./difusao1d-ana.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('difusao1d-ana.dat','wb')
dx = 0.001
dt = 0.0005
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
nx = int(1.0/dx)              # número de pontos em x
nt = int(1.0/dt)              # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
from math import pi, sin, exp
epsilon = 1.0e-6              # precisão da solução analítica
D = 2.0                       # difusividade
dpiq = D*pi*pi                # pi^2 D
dzpic = 16/(pi*pi*pi)         # 16/pi^3
def ana(x,t):
   s = 0.0
   ds = epsilon
   n = 0
   while abs(ds) >= epsilon:
      dnm1 = 2*n + 1          # (2n+1)
      dnm1q = dnm1*dnm1       # (2n+1)^2
      dnm1c = dnm1q*dnm1      # (2n+1)^3
      ds = exp(-dnm1q*dpiq*t)
      ds *= sin(dnm1*pi*x)
      ds /= dnm1c
      s += ds
      n += 1
   return s*dzpic
from numpy import zeros
u = zeros(nx+1,float)         # um array para conter a solução
for n in range(nt+1):         # loop no tempo
   t = n*dt
   print(t)
   for i in range(nx+1):      # loop no espaço
      xi = i*dx
      u[i] = ana(xi,t)
   u.tofile(fou)              # imprime uma linha com os novos dados
fou.close()
```

Listagem 14.6: `divisao1d-ana.py` — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# divisao1d-ana.py: imprime em <arq> <m>+1 saídas de
# difusao1d-ana a cada <n> intervalos de tempo
#
# uso: ./divisao1d-ana.py <m> <n>
# ----------------------------------------------------------
from sys import argv
dx = 0.001
dt = 0.0005
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dt = %9.4f' % dt)
nx = int(1.0/dx)              # número de pontos em x
print('# nx = %9d' % nx)
m = int(argv[1])               # m saídas
n = int(argv[2])               # a cada n intervalos de  tempo
print('#  m = %9d' % m)
print('#  n = %9d' % n)
fin = open('difusao1d-ana.dat',
          'rb')                # abre o arquivo com os dados
from numpy import fromfile
u = fromfile(fin,float,nx+1)   # lê a condição inicial
v = [u]                        # inicializa a lista da "transposta"
for it in range(m):            # para <m> instantes:
   for ir in range(n):         # lê <ir> vezes, só guarda a última
      u = fromfile(fin,float,nx+1)
   v.append(u)                 # guarda a última
founam = 'divisao1d-ana.dat'
print(founam)
fou = open(founam,'wt')        # abre o arquivo de saída
for i in range(nx+1):
   fou.write('%10.6f' % (i*dx))    # escreve o "x"
   fou.write('%10.6f' % v[0][i])   # escreve a cond inicial
   for k in range(1,m+1):
      fou.write('%10.6f' % v[k][i])# escreve o k-ésimo
   fou.write('\n')
fou.close()
```

Figura 14.8: Solução analítica da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$.

Esquema explícito Talvez o esquema explícito mais óbvio para discretizar (14.33) seja

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \tag{14.39}$$

A derivada parcial em relação ao tempo é de $O(\Delta t)$, enquanto que a derivada segunda parcial em relação ao espaço é, como vimos em (14.25), de $O(\Delta x^2)$. Mas não nos preocupemos muito, ainda, com a acurácia do esquema numérico. Nossa primeira preocupação, como você já sabe, é outra: o esquema (14.39) é *estável*?

Explicitamos u_i^{n+1} em (14.39):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \mathrm{Fo}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right], \tag{14.40}$$

onde

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \tag{14.41}$$

é o *número de Fourier de grade* (Jaluria e Torrance, 1986, capítulo 3). A análise de estabilidade de von Neumann agora produz

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \\
&\quad \mathrm{Fo}\left[\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right], \\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 + \mathrm{Fo}\left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right] \\
&= 1 + 2\mathrm{Fo}\left[\cos(k_l\Delta x) - 1\right] \\
&= 1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)
\end{aligned} \tag{14.42}$$

A análise de estabilidade requer que $\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right| \leq 1$:

$$\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = 1 - 8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) \leq 1$$

ou

$$\begin{aligned}
-8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) &\leq 0, \\
8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\left[-1 + 2\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] &\leq 0, \\
\mathrm{Fo} &\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{14.43}$$

Podemos agora calcular o número de Fourier que utilizamos para plotar a solução analítica (verifique nas listagens 14.5 e 14.6):

$$\mathrm{Fo} = \frac{2 \times 0{,}0005}{(0{,}001)^2} = 1000.$$

Utilizar os valores $\Delta x = 0{,}0005$ e $\Delta t = 0{,}001$ levaria a um esquema instável. Precisamos *diminuir* Δt e/ou *aumentar* Δx. Com $\Delta t = 0{,}00001$ e $\Delta x = 0{,}01$,

$$\mathrm{Fo} = \frac{2 \times 0{,}00001}{(0{,}01)^2} = 0{,}2 < 0{,}5 \qquad \text{(OK)}.$$

Nós esperamos que nosso esquema explícito agora rode muito lentamente. Mas vamos implementá-lo. O programa que implementa o esquema é o `difusao1d-exp.py`, mostrado na listagem 14.7.

Listagem 14.7: `difusao1d-exp.py` — Solução numérica da equação da difusão: método explícito.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# difusao1d-exp resolve uma equação de difusão com um método
# explícito
#
# uso: ./difusao1d-exp.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('difusao1d-exp.dat','wb')
dx = 0.01
dt = 0.00001
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
from numpy import zeros
nx = int(round(1.0/dx,0))      # número de pontos em x
nt = int(round(1.0/dt,0))      # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
u = zeros((2,nx+1),float)      # apenas 2 posições no tempo
                               # são necessárias!
def CI(x):                     # define a condição inicial
   if 0 <= x <= 1.0:
      return 2.0*x*(1.0-x)
   else:
      return 0.0
for i in range(nx+1):          # monta a condição inicial
   xi = i*dx
   u[0,i] = CI(xi)
u[0].tofile(fou)               # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
D = 2.0                       # difusividade
Fon = D*dt/((dx)**2)          # número de Fourier
print("Fo = %10.6f" % Fon)
for n in range(nt):           # loop no tempo
   print(n)
   for i in range(1,nx):      # loop no espaço
      u[new,i] = u[old,i] + Fon*(u[old,i+1] - 2*u[old,i] + u[old,i-1])
   u[new,0] = 0.0             # condição de contorno, x = 0
   u[new,nx] = 0.0            # condição de contorno, x = 1
   u[new].tofile(fou)         # imprime uma linha com os novos dados
   (old,new) = (new,old)      # troca os índices
fou.close()
```

Listagem 14.8: `divisao1d-exp.py` — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# divisao1d-exp.py: imprime em <arq> <m>+1 saídas de
# difusao1d-exp a cada <n> intervalos de tempo
#
# uso: ./divisao1d-exp.py <m> <n>
# ----------------------------------------------------------
# from __future__ import print_function
# from __future__ import division
from sys import argv
dx = 0.01
dt = 0.00001
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dt = %9.4f' % dt)
nx = int(round(1.0/dx,0))      # número de pontos em x
nt = int(round(1.0/dt,0))      # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
m = int(argv[1])               # m saídas
n = int(argv[2])               # a cada n intervalos de  tempo
print('#  m = %9d' % m)
print('#  n = %9d' % n)
fin = open('difusao1d-exp.dat',
         'rb')                 # abre o arquivo com os dados
from numpy import fromfile
u = fromfile(fin,float,nx+1)   # lê a condição inicial
v = [u]                        # inicializa a lista da "transposta"
for it in range(m):            # para <m> instantes:
   for ir in range(n):         # lê <ir> vezes, só guarda a última
      u = fromfile(fin,float,nx+1)
   v.append(u)                 # guarda a última
founam = 'divisao1d-exp.dat'
fou = open(founam,'wt')        # abre o arquivo de saída
for i in range(nx+1):
   fou.write('%10.6f' % (i*dx))    # escreve o "x"
   fou.write('%10.6f' % v[0][i])   # escreve a cond inicial
   for k in range(1,m+1):
      fou.write('%10.6f' % v[k][i])# escreve o k-ésimo
   fou.write('\n')
fou.close()
```

Figura 14.9: Solução numérica com o método explícito (14.40) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica.

O programa `divisao1d-exp.py`, mostrado na listagem 14.8, seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização:

[`./divisao1d-exp.py 3 5000`] .

O resultado da solução numérica com o método explícito está mostrado na figura 14.9: ele é impressionantemente bom, embora seja computacionalmente muito caro. A escolha judiciosa de Δt e Δx para obedecer ao critério (14.43) foi fundamental para a obtenção de um bom resultado "de primeira", sem a necessidade dolorosa de ficar tentando diversas combinações até que o esquema se estabilize e produza bons resultados.

Esquemas implícitos Embora o esquema explícito que nós utilizamos acima seja acurado, ele é *lento* — se você programou e rodou `difusao1d-exp.py`, deve ter notado *alguma* demora para o programa rodar. Embora nossos computadores estejam ficando a cada dia mais rápidos, isso não é desculpa para utilizar mal nossos recursos computacionais (é claro que, ao utilizarmos uma linguagem interpretada — Python — para programar, nós *já* estamos utilizando muito mal nossos recursos; no entanto, nosso argumento é didático: com uma linguagem mais simples, podemos aprender mais rápido e errar menos. Além disso, todos os ganhos *relativos* que obtivermos se manterão em qualquer outra linguagem)

Vamos portanto fazer uma mudança fundamental nos nossos esquemas de diferenças finitas: vamos calcular a derivada espacial no instante $n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= D\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}, \\
u_i^{n+1} - u_i^n &= \mathrm{Fo}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}), \\
-\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} &= u_i^n. \qquad (14.44)
\end{aligned}$$

Reveja a discretização (14.5)–(14.9): para $i = 1, \ldots, N_x - 1$, (14.44) acopla 3 valores das incógnitas u^{n+1} no instante $n+1$. Quando $i = 0$, e quando $i = N_x$, não podemos utilizar (14.44), porque não existem os índices $i = -1$, e $i = N_x + 1$.

Quando $i = 1$ e $i = N_x - 1$, (14.44) precisa ser modificada, para a introdução das *condições de contorno*: como $u_0^n = 0$ e $u_{N_x}^n = 0$ para qualquer n, teremos

$$(1 + 2\text{Fo})u_1^{n+1} - \text{Fo}u_2^{n+1} = u_1^n, \tag{14.45}$$

$$-\text{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + 2\text{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} = u_{N_x-1}^n. \tag{14.46}$$

Em resumo, nossas incógnitas são $u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \ldots u_{N_x-1}^{n+1}$ ($N_x - 1$ incógnitas), e seu cálculo envolve a solução do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1+2\text{Fo} & -\text{Fo} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\text{Fo} & 1+2\text{Fo} & -\text{Fo} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -\text{Fo} & 1+2\text{Fo} & -\text{Fo} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\text{Fo} & 1+2\text{Fo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n+1} \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^n \\ u_{N_x-1}^n \end{bmatrix}. \tag{14.47}$$

A análise de estabilidade de von Neumann procede agora da maneira usual:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{n+1} &= \epsilon_i^n + \text{Fo}(\epsilon_{i+1}^{n+1} - 2\epsilon_i^{n+1} + \epsilon_{i-1}^{n+1}) \\
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} \\
&\quad + \text{Fo}\left(\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x}\right. \\
&\quad \left. + \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right), \\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 + \mathrm{e}^{a\Delta t}\text{Fo}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right), \\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 + \mathrm{e}^{a\Delta t}2\text{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right), \\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{e}^{a\Delta t}4\text{Fo}\,\text{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right), \\
\mathrm{e}^{a\Delta t}\left[1 + 4\text{Fo}\,\text{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] &= 1, \\
|\mathrm{e}^{a\Delta t}| &= \frac{1}{1 + 4\text{Fo}\,\text{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)} \leq 1 \qquad \textit{sempre}.
\end{aligned} \tag{14.48}$$

Portanto, o esquema implícito (14.44) é incondicionalmente estável, e temos confiança de que o programa correspondente não se instabilizará.

Existem várias coisas atraentes para um programador em (14.47). Em primeiro lugar, a matriz do sistema é uma matriz banda tridiagonal; sistemas lineares com esse tipo de matriz são particularmente simples de resolver, e estão disponíveis na literatura (por exemplo: Press et al., 1992, seção 2.4, subrotina `tridag`). Em segundo lugar, a matriz do sistema é *constante*: ela só precisa ser montada uma vez no programa, o que torna a solução numérica potencialmente muito rápida.

Nós vamos começar, então, construindo um pequeno módulo, convenientemente denominado `alglin.py`, que exporta a função `triad`, que resolve um sistema tridiagonal, mostrado na listagem 14.9.

Em `triad`, a diagonal inferior é armazenada em `a`, sendo que o elemento `a[0]` não é utilizado; a diagonal principal é armazenada em `b`, e a diagonal superior é armazenada em `c`, sendo que o último elemento dessa linha, `c[n-1]`, não é utilizado.

Em seguida, o programa `difusao1d-imp.py` resolve o problema com o método implícito. Ele está mostrado na listagem 14.10. A principal novidade está nas linhas 42–46, e depois novamente na linha 56. Em Python e Numpy, é possível especificar sub-listas, e sub-*arrays*, com um dispositivo denominado *slicing*, que

Listagem 14.9: `alglin.py` — Exporta uma rotina que resolve um sistema tridiagonal.

```
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ---------------------------------------------------------------------
# alglin.py implementa uma solução de um sistema linear com matriz
# tridiagonal
# ---------------------------------------------------------------------
from sys import exit
from numpy import zeros
def triad(a,b,c,d):
    n = len(a);
    cc = zeros(n,float)
    dd = zeros(n,float)
    cc[0] = c[0]/b[0] ;
    for i in range(1,n-1):
        cc[i] = (c[i])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
    dd[0] = d[0]/b[0] ;
    for i in range(1,n):
        dd[i] = (d[i] - a[i]*dd[i-1])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
    x = zeros(n,float)
    x[n-1] = dd[n-1] ;
    for i in range (n-2,-1,-1):
        x[i] = dd[i] - cc[i]*x[i+1]
    return x
```

torna a programação mais compacta e clara. Por exemplo, na linha 43, todos os elementos `A[1]`... `A[nx-1]` recebem o valor `-Fon`.

Existe um programa `divisao1d-imp.py`, mas ele não precisa ser mostrado aqui, porque as modificações, por exemplo a partir de `divisao1d-exp.py`, são demasiadamente triviais para justificarem o gasto adicional de papel. Para $\Delta t = 0{,}001$, e $\Delta x = 0{,}01$, o resultado do método implícito está mostrado na figura 14.10

Nada mal, para uma economia de 100 vezes (em relação ao método explícito) em passos de tempo! (Note entretanto que a solução, em cada passo de tempo, é um pouco mais custosa, por envolver a solução de um sistema de equações acopladas, ainda que tridiagonal.)

Crank-Nicholson A derivada espacial em (14.33) é aproximada, no esquema implícito (14.44), por um esquema de $O(\Delta x^2)$. A derivada temporal, por sua vez, é apenas de $O(\Delta t)$. Mas é possível consertar isso! A idéia é substituir (14.44) por

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{2}\left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right],$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n + u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right]. \tag{14.49}$$

Com essa mudança simples, a derivada espacial agora é uma média das derivadas em n e $n+1$, ou seja: ela está *centrada* em $n+1/2$. Com isso, a derivada temporal do lado esquerdo torna-se, na prática, um esquema de ordem 2 centrado em $n+1/2$!

Como sempre, nosso trabalho agora é verificar a estabilidade do esquema numérico. Para isto, fazemos

$$\epsilon_i^{n+1} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\epsilon_{i+1}^{n+1} - 2\epsilon_i^{n+1} + \epsilon_{i-1}^{n+1}\right] = \epsilon_i^n + \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\epsilon_{i+1}^n - 2\epsilon_i^n + \epsilon_{i-1}^n\right],$$

e substituímos um modo de Fourier:

$$\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)}\left[e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left(e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right)\right] =$$

Listagem 14.10: `difusao1d-imp.py` — Solução numérica da equação da difusão: método implícito.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# difusao1d-imp resolve uma equação de difusão com um método
# implícito
#
# uso: ./difusao1d-imp.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('difusao1d-imp.dat','wb')
dx = 0.01                       # define a discretização em x
dt = 0.001                      # define a discretização em t
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
nx = int(round(1.0/dx,0))       # número de pontos em x
nt = int(round(1.0/dt,0))       # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
from numpy import zeros
u = zeros((2,nx+1),float)       # apenas 2 posições no tempo
                                # são necessárias!
def CI(x):                      # define a condição inicial
   if 0 <= x <= 1.0:
      return 2.0*x*(1.0-x)
   else:
      return 0.0
for i in range(nx+1):           # monta a condição inicial
   xi = i*dx
   u[0,i] = CI(xi)
u[0].tofile(fou)                # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
D = 2.0                         # difusividade
Fon = D*dt/((dx)**2)            # número de Fourier
print("Fo = %10.6f" % Fon)
A = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
B = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
C = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
# ----------------------------------------------------------
# cuidado, "linha" e "coluna" abaixo não significam as reais
# linhas e colunas do sistema de equações, mas sim a forma
# de armazenar uma matriz tridiagonal
# ----------------------------------------------------------
A[0] = 0.0                      # zera A[0]
A[1:nx-1] = -Fon                # preenche a diagonal inferior
B[0:nx-1] = 1.0 + 2*Fon         # preenche a diagonal
C[0:nx-2] = -Fon                # preenche a diagonal superior
C[nx-2] = 0.0                   # zera C[nx-2]
# ----------------------------------------------------------
# importa triad
# ----------------------------------------------------------
from alglin import triad
for n in range(nt):            # loop no tempo
   print(n)
# ----------------------------------------------------------
# atenção: calcula apenas os pontos internos de u!
# ----------------------------------------------------------
   u[new,1:nx] = triad(A,B,C,u[old,1:nx])
   u[new,0] = 0.0              # condição de contorno, x = 0
   u[new,nx] = 0.0             # condição de contorno, x = 1
   u[new].tofile(fou)          # imprime uma linha com os
                               # novos dados
   (old,new) = (new,old)       # troca os índices
fou.close()                    # fecha o arquivo de saída, e
                               # fim.
```

Figura 14.10: Solução numérica com o método implícito (14.44) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica.

$$\xi_l e^{at_n}\left[e^{ik_l i\Delta x} + \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left(e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2e^{ik_l i\Delta x} + e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
e^{a\Delta t}\left[1 - \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left(e^{ik_l\Delta x} - 2 + e^{-ik_l\Delta x}\right)\right] &= \left[1 + \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left(e^{ik_l\Delta x} - 2 + e^{-ik_l\Delta x}\right)\right] \\
e^{a\Delta t}\left[1 - \mathrm{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right)\right] &= \left[1 + \mathrm{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right)\right] \\
e^{a\Delta t}\left[1 + 2\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] &= \left[1 - 2\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right] \\
e^{a\Delta t} &= \frac{1 - 2\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)}{1 + 2\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

É fácil notar que $\left|e^{a\Delta t}\right| < 1$, e o esquema numérico de Crank-Nicholson é incondicionalmente estável. O esquema numérico de Crank-Nicholson é similar a (14.44):

$$-\frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{i-1}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{i+1}^{n+1} = \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{i-1}^{n} + (1-\mathrm{Fo})u_i^{n} + \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{i+1}^{n} \tag{14.50}$$

Para as condições de contorno de (14.35), as linhas correspondentes a $i = 1$ e $i = N_x - 1$ são

$$(1+\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_2^{n+1} = (1-\mathrm{Fo})u_1^{n} + \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_2^{n}, \tag{14.51}$$

$$-\frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} = \frac{\mathrm{Fo}}{2}u_{N_x-2}^{n} + (1-\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n} \tag{14.52}$$

As mudanças no código de `difusao-imp.py` são relativamente fáceis de se identificar. O código do programa que implementa o esquema numérico de Crank-Nicholson, `difusao1d-ckn.py`, é mostrado na listagem 14.11.

A grande novidade computacional de `difusao1d-ckn.py` é a linha 55: com os `arrays` proporcionados por Numpy, é possível escrever (14.50) *vetorialmente*: note

Figura 14.11: Solução numérica com o método de Crank-Nicholson ((14.50)) (círculos) *versus* a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0{,}05$, $t = 0{,}10$ e $t = 0{,}15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica.

que não há necessidade de fazer um *loop* em x para calcular cada elemento `d[i]` individualmente. O mesmo tipo de facilidade está disponível em FORTRAN90, FORTRAN95, etc.. Com isso, a implementação computacional dos cálculos gerada por Numpy (ou pelo compilador FORTRAN) também é potencialmente mais eficiente.

O método de Crank-Nicholson possui acurácia $O(\Delta t)^2$, portanto ele deve ser capaz de dar passos ainda mais largos no tempo que o método implícito (14.44); no programa `difusao1d-ckn.py`, nós especificamos um passo de tempo 5 vezes maior do que em `difusao1d-imp.py`.

O resultado é uma solução cerca de 5 vezes mais rápida (embora, novamente, haja mais contas agora para calcular o vetor de "carga" `d`), e é mostrado na figura 14.11.

Exemplo 14.2 Dada a equação da difusão unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L,$$

e o esquema de discretização

$$\begin{aligned}
\Delta x &= L/N_x, \\
x_i &= i\Delta x, \qquad i = 0, \ldots, N_x, \\
t_n &= t\Delta t, \\
u_i^n &= u(x_i, t_n), \\
\frac{1}{2\Delta t}\left[(u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n)\right] &= D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},
\end{aligned}$$

obtenha o critério de estabilidade por meio de uma análise de estabilidade de von Neumann.

SOLUÇÃO

Suponha que a equação diferencial se aplique ao erro:

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l e^{at_n} e^{ik_l i\Delta x} \Rightarrow$$

Listagem 14.11: `difusao1d-ckn.py` — Solução numérica da equação da difusão: esquema de Crank-Nicholson.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# difusao1d-ckn resolve uma equação de difusão com o método
# de Crank-Nicholson
#
# uso: ./difusao1d-ckn.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('difusao1d-ckn.dat','wb')
dx = 0.01                       # define a discretização em x
dt = 0.005                      # define a discretização em t
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dt = %9.4f' % dt)
nx = int(round(1.0/dx,0))       # número de pontos em x
nt = int(round(1.0/dt,0))       # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
from numpy import zeros
u = zeros((2,nx+1),float)       # apenas 2 posições no tempo
                                # são necessárias!
def CI(x):                      # define a condição inicial
   if 0 <= x <= 1.0:
      return 2.0*x*(1.0-x)
   else:
      return 0.0
for i in range(nx+1):           # monta a condição inicial
   xi = i*dx
   u[0,i] = CI(xi)
u[0].tofile(fou)                # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
D = 2.0                         # difusividade
Fon = D*dt/((dx)**2)            # número de Fourier
print("Fo = %10.6f" % Fon)
A = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
B = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
C = zeros((nx-1),float)         # cria a matriz do sistema
# ----------------------------------------------------------
# armazena a matriz do sistema em A, B, C.
# ----------------------------------------------------------
A[0] = 0.0                      # zera A[0]
A[1:nx-1] = -Fon/2.0            # preenche o fim da diagonal
                                # inferior
B[0:nx-1] = 1.0 + Fon           # preenche a diagonal principal
C[0:nx-2] = -Fon/2.0            # preenche o início da
                                # diagonal superior
C[nx-2] = 0.0                   # zera C[nx-2]
# ----------------------------------------------------------
# importa triad
# ----------------------------------------------------------
from alglin import triad
for n in range(nt):             # loop no tempo
   print(n)
# ----------------------------------------------------------
# recalcula o vetor de carga vetorialmente
# ----------------------------------------------------------
   d = (Fon/2)*u[old,0:nx-1] + (1 - Fon)*u[old,1:nx] + \
       (Fon/2)*u[old,2:nx+1]
# ----------------------------------------------------------
# atenção: calcula apenas os pontos internos de u!
# ----------------------------------------------------------
   u[new,1:nx] = triad(A,B,C,d)
   u[new,0] = 0.0               # condição de contorno, x = 0
   u[new,nx] = 0.0              # condição de contorno, x = 1
   u[new].tofile(fou)           # imprime uma linha com os
                                # novos dados
   (old,new) = (new,old)        # troca os índices
fou.close()                     # fecha o arquivo de saída, e
                                # fim.
```

Então

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{ik_l(i+1)\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{ik_l(i+1)\Delta x}) + (\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{ik_l(i-1)\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right]$$
$$= D\frac{\xi_l e^{at_n} e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l e^{at_n} e^{ik_l i\Delta x} + \xi_l e^{at_n} e^{ik_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2};$$
$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(\xi_l e^{a\Delta t} e^{ik_l(i+1)\Delta x} - \xi_l e^{ik_l(i+1)\Delta x}) + (\xi_l e^{a\Delta t} e^{ik_l(i-1)\Delta x} - \xi_l e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right] =$$
$$D\frac{\xi_l e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l e^{ik_l i\Delta x} + \xi_l e^{ik_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2};$$
$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(\,e^{a\Delta t} e^{ik_l(i+1)\Delta x} - \,e^{ik_l(i+1)\Delta x}) + (\,e^{a\Delta t} e^{ik_l(i-1)\Delta x} - \,e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right] =$$
$$D\frac{e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2\,e^{ik_l i\Delta x} + \,e^{ik_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2};$$
$$\left[(\,e^{a\Delta t} e^{ik_l(i+1)\Delta x} - \,e^{ik_l(i+1)\Delta x}) + (\,e^{a\Delta t} e^{ik_l(i-1)\Delta x} - \,e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right] =$$
$$\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\left[e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2\,e^{ik_l i\Delta x} + \,e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right].$$

Segue-se que

$$e^{a\Delta t}\left[e^{ik_l(i+1)\Delta x} + e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right] = e^{ik_l(i+1)\Delta x} + e^{ik_l(i-1)\Delta x} +$$
$$2\mathrm{Fo}\left[e^{ik_l(i+1)\Delta x} - 2\,e^{ik_l i\Delta x} + \,e^{ik_l(i-1)\Delta x}\right]$$
$$e^{a\Delta t}\left[e^{ik_l\Delta x} + e^{-ik_l\Delta x}\right] = e^{ik_l\Delta x} + e^{-ik_l\Delta x} + 2\mathrm{Fo}\left[e^{ik_l\Delta x} - 2 + e^{-ik_l\Delta x}\right]$$
$$e^{a\Delta t} = 1 + 2\mathrm{Fo}\frac{2\cos(k_l\Delta x) - 2}{2\cos(k_l\Delta x)}$$
$$= 1 + 2\mathrm{Fo}\frac{\cos(k_l\Delta x) - 1}{\cos(k_l\Delta x)}$$
$$= 1 - 4\mathrm{Fo}\frac{\mathrm{sen}^2(k_l\Delta x/2)}{\cos(k_l\Delta x)}.$$

A função

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}^2(x/2)}{\cos(x)}$$

possui singularidades em $\pi/2 + k\pi$, e muda de sinal em torno destas singularidades: não é possível garantir que $|e^{a\Delta t}| \leq 1$ uniformemente, e o esquema é incondicionalmente instável.

Exemplo 14.3 Considere um esquema de diferenças finitas implícito "clássico" para a equação da difusão:

$$-\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \qquad i = 1, \ldots, N_x - 1.$$

onde $\mathrm{Fo} = D\Delta t/\Delta x^2$, e D é a difusividade. Sabemos que a equação acima em geral não vale para a primeira ($i = 1$) e última ($i = N_x - 1$) linhas. Obtenha essas linhas para as condições de contorno

$$u(0, t) = \alpha,$$
$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = \beta,$$

sendo α e β constantes, onde $x = 0$ corresponde ao ponto de grade $i = 0$, e $x = L$ corresponde ao ponto de grade $i = N_x$.

SOLUÇÃO

A primeira linha fica

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}\alpha + (1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n, \\
(1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^n &= u_1^n + \mathrm{Fo}\alpha.
\end{aligned}$$

A aproximação da derivada em $x = L$ é

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \approx \frac{u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1}}{\Delta x} = \beta \;\Rightarrow \\
u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1} = \beta\Delta x, \\
u_{N_x}^{n+1} = u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x,
\end{aligned}$$

de forma que a última linha fica

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n, \\
-\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\left[u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x\right] &= u_{N_x-1}^n, \\
-\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\beta\Delta x &= u_{N_x-1}^n, \\
-\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n + \mathrm{Fo}\beta\Delta x \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 14.4 Considere a equação de advecção-difusão unidimensional

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U\frac{\partial\phi}{\partial x} = D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - K\phi, \qquad 0 \le x \le \infty, \qquad t > 0, \tag{14.53}$$

com condições iniciais e de contorno

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0, \\
\phi(0,t) &= \Phi_M, \\
\phi(\infty,t) &= 0.
\end{aligned}$$

A solução analítica é (O'Loughlin e Bowmer, 1975; Dias, 2003)

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) = \frac{\Phi_M}{2}\Bigg[&\exp\left(\frac{Ux}{2D}(1+(1+2H)^{1/2})\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x+Ut(1+2H)^{1/2}}{\sqrt{4Dt}}\right) + \\
&\exp\left(\frac{Ux}{2D}(1-(1+2H)^{1/2})\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x-Ut(1+2H)^{1/2}}{\sqrt{4Dt}}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{14.54}$$

onde

$$H = 2KD/U^2. \tag{14.55}$$

a) Mostre que (14.54) atende à equação diferencial. Você pode fazer tudo analiticamente com lápis e papel, ou usar Maxima.

b) Discretize (14.53) usando um esquema *upwind* implícito para $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ e um esquema totalmente implícito no lado direito. Faça

$$\Delta x = 0{,}01 = L/N, \tag{14.56}$$

$$x_i = i\Delta x. \tag{14.57}$$

c) Resolva (14.53) numericamente com o esquema obtido acima para $U = 1$, $D = 2$, $K = 1$ e $\Phi_M = 1$ e compare graficamente com a solução analítica em $t = 0{,}333$, $t = 0{,}666$ e $t = 0{,}999$. Por tentativa e erro, escolha L suficientemente grande para representar numericamente o "infinito".

SOLUÇÃO
a)

```
a : U*x/(2*D) ;
h : 2*K*D/U^2 ;
s : (1 + 2*h)**(1/2) ;
e1 : (x + U*t*s)/(sqrt(4*D*t)) ;
e2 : (x - U*t*s)/(sqrt(4*D*t)) ;
fi : (1/2)*(exp(a*(1 + s))*erfc(e1) + exp(a*(1-s))*erfc(e2)) ;
diff(fi,t) + U*diff(fi,x) - D*diff(fi,x,2) + K*fi ;
expand(%) ;
ratsimp(%) ;
```

b)

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}+U\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}=D\frac{\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}-K\phi_i^{n+1}$$
$$\phi_i^{n+1}-\phi_i^n+\frac{U\Delta t}{\Delta x}(\phi_i^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1})=\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1})-(K\Delta t)\phi_i^{n+1}$$
$$\phi_i^{n+1}-\phi_i^n+\mathrm{Co}(\phi_i^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1})=\mathrm{Fo}(\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1})-\mathrm{Ka}\phi_i^{n+1}$$

Passando todos os termos em $(n+1)$ para o lado esquerdo, e todos os termos em n para o lado direito, tem-se

$$-(\mathrm{Fo}+\mathrm{Co})\phi_{i-1}^{n+1}+(1+2\mathrm{Fo}+\mathrm{Co}+\mathrm{Ka})\phi_i^{n+1}-\mathrm{Fo}\phi_{i+1}^{n+1}=\phi_i^n,$$

onde

$$\mathrm{Co}=\frac{U\Delta t}{\Delta x},$$
$$\mathrm{Fo}=\frac{D\Delta t}{\Delta x^2},$$
$$\mathrm{Ka}=K\Delta t.$$

Como sempre, as condições de contorno produzem linhas especiais: para $i=1$ e $i=N_x$ teremos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\phi_0^{n+1}&=\Phi_M \qquad\Rightarrow\\ +(1+2\mathrm{Fo}+\mathrm{Co}+\mathrm{Ka})\phi_1^{n+1}-\mathrm{Fo}\phi_2^{n+1}&=\phi_1^n+(\mathrm{Fo}+\mathrm{Co})\Phi_M;\\ \Phi_N&=0 \qquad\Rightarrow\\ -(\mathrm{Fo}+\mathrm{Co})\phi_{N-2}^{n+1}+(1+2\mathrm{Fo}+\mathrm{Co}+\mathrm{Ka})\phi_{N-1}^{n+1}&=\phi_i^n\end{aligned}$$

A listagem 14.12 mostra a implementação do esquema numérico acima com as condições de contorno.
A comparação entre a solução numérica (pontos) e a solução analítica (linhas contínuas) para os 3 instantes especificados está mostrada na figura 14.12

Exercícios Propostos

14.8 Discretize o problema

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}=0,\qquad \phi(0)=1,\qquad \phi(1)=5$$

com um esquema de diferenças finitas centradas para a derivada segunda. Use $\Delta x=0.2$. Obtenha as matrizes $[A]$ (5×5) e $[B]$ (5×1) do problema

$$[A][\phi]=[B]$$

(ou seja: obtenha $[A]$ e $[B]$ em *números*). Não é preciso resolver o sistema de equações. Dica: as condições de contorno modificam a primeira e a última linha de $[A]$ e de $[B]$.

Listagem 14.12: Implementação de um esquema numérico implícito para a equação da difusão-advecção.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ------------------------------------------------------------------
# difadv-imp resolve uma equação de difusão com um método
# implícito
#
# uso: ./difadv-imp.py
# ------------------------------------------------------------------
fou = open('difadv-imp.dat','wb')
dx = 0.01                               # define a discretização em x
dt = 0.001                              # define a discretização em t
print('# dx = %9.4f' % dx)
print('# dy = %9.4f' % dt)
nx = int(round(10.0/dx,0))              # número de pontos em x
nt = int(round(1.0/dt,0))               # número de pontos em t
print('# nx = %9d' % nx)
print('# nt = %9d' % nt)
from numpy import zeros
u = zeros((2,nx+1),float)               # apenas 2 posições no tempo
                                        # são necessárias!
u[0,0:nx+1] = 0.0                       # monta a condição inicial
u[0].tofile(fou)                        # imprime a condição inicial
old = 0
new = 1
U = 1.0                                 # advecção
D = 2.0                                 # difusividade
K = 1.0                                 # coeficiente de decaimento
FIM = 1.0                               # CC
Cou = U*dt/dx                           # número de Courant
Fon = D*dt/((dx)**2)                    # número de Fourier
Kai = K*dt                              # número de decaimento
A = zeros((nx-1),float)                 # cria a matriz do sistema
B = zeros((nx-1),float)                 # cria a matriz do sistema
C = zeros((nx-1),float)                 # cria a matriz do sistema
# ------------------------------------------------------------------
# cuidado, "linha" e "coluna" abaixo não significam as reais linhas e
# colunas do sistema de equações, mas sim a forma de armazenar uma
# matriz tridiagonal
# A -> diagonal inferior
# B -> diagonal principal
# C -> diagonal superior
# ------------------------------------------------------------------
A[0] = 0.0                              # zera A[0]
A[1:nx-1] = -(Fon+Cou)                  # preenche o fim da 1a linha
B[0:nx-1] = 1.0 + 2*Fon + Cou + Kai     # preenche a segunda linha
C[0:nx-2] = -Fon                        # preenche o início da 2a linha
C[nx-2] = 0.0                           # zera D[nx-2]
# ------------------------------------------------------------------
# importa uma adaptação de tridag de Numerical Recipes para Python
# ------------------------------------------------------------------
from alglin import triad
d = zeros(nx-1,float)                   # aloca b com o tamanho certo
for n in range(nt):                     # loop no tempo
   print(n)
# ------------------------------------------------------------------
# atenção: calcula apenas os pontos internos de u!
# ------------------------------------------------------------------
   d[0]      = u[old,1] + (Fon + Cou)*FIM
   d[1:nx-1] = u[old,2:nx]
   u[new,1:nx] = triad(A,B,C,d)
   u[new,0] = FIM                       # condição de contorno, x = 0
   u[new,nx] = 0.0                      # condição de contorno, x = 10
   u[new].tofile(fou)                   # imprime uma linha com os
                                        # novos dados
   (old,new) = (new,old)                # troca os índices
fou.close()                             # fecha o arquivo de saída, e
                                        # fim.
```

Figura 14.12: Comparação entre as soluções analítica (linhas) e numérica com um esquema implícito (pontos) da equação da difusão-advecção com termo de decaimento, para $t = 0{,}333$, $t = 0{,}666$ e $t = 0{,}999$.

14.9 Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L,$$

com condições iniciais e de contorno

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = c, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0,$$

onde c é uma constante. Dado o esquema de discretização implícito clássico,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

para $N_x = 8$, obtenha o sistema de equações lineares

$$[A][u]^{n+1} = [b]$$

onde os $A_{i,j}s$ dependem do número de grade de Fourier, e os $b_i s$ dependem dos $u_i^n s$. Em outras palavras, *escreva explicitamente a matriz quadrada* $[A]$ *e a matriz-coluna* $[b]$ *para* $N_x = 8$.

14.10 O problema difusivo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\
\phi(0,t) &= \phi_0, \\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0, \\
\phi(x,0) &= f(x),
\end{aligned}$$

possui discretização

$$-\mathrm{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})\phi_i^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n, \tag{14.58}$$

onde

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

e $i = 1, \ldots, N-1$ (i é o índice do eixo x). Modifique (14.58) para levar em conta as condições de contorno, e mostre como ficam as 1ª e última linhas da matriz do sistema de equações que deve ser resolvido a cada passo.

14.11 Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k\phi,$$

onde $D > 0$ e $k > 0$, a sua discretização com um esquema de diferenças finitas totalmente implícito, progressivo no tempo e centrado no espaço, produz uma equação geral do tipo

$$A\phi_{i-1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n,$$

onde como sempre ϕ_i^n é a aproximação em grade de $\phi(i\Delta x, n\Delta t)$. Obtenha A, B e C em função dos parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \mathrm{Fo} &= \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}, \\ \mathrm{Kt} &= k\Delta t. \end{aligned}$$

14.12 Dada a equação diferencial não-linear de Boussinesq,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right], \\ h(x,0) &= H, \\ h(0,t) &= H_0, \\ \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=1} &= 0, \end{aligned}$$

obtenha uma discretização linearizada da mesma em diferenças finitas do tipo

$$h(x_i, t_n) = h(i\Delta x, n\Delta t) = h_i^n$$

da seguinte forma:

- discretize a derivada parcial em relação ao tempo com um esquema progressivo no tempo entre n e $n+1$;
- aproxime h dentro do colchete por h_i^n (este é o truque que lineariza o esquema de diferenças finitas) *e mantenha-o assim*;
- utilize esquemas de diferenças finitas implícitos centrados no espaço para as derivadas parciais em relação a x, *exceto no termo h_i^n do item anterior*.

Não mexa com as condições de contorno.

14.13 Dada a equação da onda com as condições iniciais abaixo,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad \phi(x,0) = x(1-x), \qquad \frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t} = 1, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t \le 1,$$

a) Obtenha uma discretização de diferenças finitas totalmente implícita.

b) Sua discretização certamente envolve ϕ_i^{n-1}, ϕ_i^n, e ϕ_i^{n+1} *simultaneamente*. Portanto, se $N = 1/\Delta x$ é o número de intervalos discretizados em x, você obviamente precisa alocar no mínimo uma matriz $3 \times (N+1)$ para marchar no tempo os valores de ϕ (certo?). À medida que você marcha no tempo t, os índices das 3 linhas dessa matriz (que vamos chamar de m, n, p) devem ser como se segue:

t	(m, n, p)
0	0, 1, 2
Δt	1, 2, 0
$2\Delta t$	2, 0, 1
$3\Delta t$	0, 1, 2
$\vdots$	$\vdots$

Escreva um trecho de programa em Python que transforma a "velha" tripla (m, n, p) na "nova" tripla (m, n, p) segundo o esquema acima.

14.3 – Difusão em 2 Dimensões: ADI, e equações elíticas

Considere a equação da difusão em 2 dimensões,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{14.59}$$

Como sempre, nós queremos ser muito concretos, e trabalhar com um problema que possua solução analítica. Considere então a condição inicial

$$u(x, y, 0) = u_0 \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{L^2}\right); \tag{14.60}$$

a solução analítica é

$$u(x, y, t) = \frac{u_0}{1 + 4tD/L^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{L^2 + 4Dt}\right). \tag{14.61}$$

Na verdade esta solução se "espalha" por todo o plano xy, mas nós podemos trabalhar com um problema finito em x e y, por exemplo, fazendo $-L \leq x \leq L$, $-L \leq y \leq L$, e impondo condições de contorno que se ajustem *exatamente* à solução analítica:

$$u(-L, y, t) = \frac{u_0}{1 + 4tD/L^2} \exp\left(-\frac{(L^2 + y^2)}{L^2 + 4Dt}\right), \tag{14.62}$$

$$u(L, y, t) = \frac{u_0}{1 + 4tD/L^2} \exp\left(-\frac{(L^2 + y^2)}{L^2 + 4Dt}\right), \tag{14.63}$$

$$u(x, -L, t) = \frac{u_0}{1 + 4tD/L^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + L^2)}{L^2 + 4Dt}\right), \tag{14.64}$$

$$u(x, L, t) = \frac{u_0}{1 + 4tD/L^2} \exp\left(-\frac{(x^2 + L^2)}{L^2 + 4Dt}\right). \tag{14.65}$$

Agora, nós vamos fazer $D = 2$ (como antes) e $L = 1$, e resolver o problema numericamente. Nossa escolha recairá sobre um método simples, e de $O(\Delta t)^2$, denominado ADI (*alternating-direction implicit*). Este método nos proporcionará um exemplo de uma técnica denominada *operator splitting* ou *time splitting*, que nós vamos traduzir como "separação de operadores" Esta técnica consiste em marchar implicitamente em uma dimensão espacial de cada vez, mantendo a outra dimensão "explícita". Portanto, nós vamos utilizar *dois* esquemas diferentes de diferenças finitas (na prática), para resolver o problema! Ei-los

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = D\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right) \tag{14.66}$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+2} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} = D\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+2} - 2u_{i,j}^{n+2} + u_{i,j-1}^{n+2}}{\Delta y^2}\right) \tag{14.67}$$

Examine cuidadosamente (14.66) e (14.67): na primeira, note que o esquema é implícito em x; na segunda, a situação se reverte, e o esquema é implícito em y. É claro que nós vamos precisar de duas análises de estabilidade de von Neumann, uma para cada equação.

Além disto, por simplicidade vamos fazer $\Delta x = \Delta y = \Delta$, de maneira que só haverá um número de Fourier de grade no problema,

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta^2}, \tag{14.68}$$

e então teremos, para x:

$$
\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n} &= \mathrm{Fo}\left(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right),\\
u_{i,j}^{n+1} - \mathrm{Fo}\left(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}\right) &= u_{i,j}^{n} + \mathrm{Fo}\left(u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}\right),\\
-\mathrm{Fo}u_{i-1,j}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{i,j}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1,j}^{n+1} &= \mathrm{Fo}u_{i,j-1}^{n} + (1-2\mathrm{Fo})u_{i,j}^{n} + \mathrm{Fo}u_{i,j+1}^{n}
\end{aligned}
\tag{14.69}
$$

Na dimensão y,

$$
\begin{aligned}
u_{i,j}^{n+2} - u_{i,j}^{n+1} &= \mathrm{Fo}\left(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+2} - 2u_{i,j}^{n+2} + u_{i,j+1}^{n+2}\right),\\
u_{i,j}^{n+2} - \mathrm{Fo}\left(u_{i,j-1}^{n+2} - 2u_{i,j}^{n+2} + u_{i,j+1}^{n+2}\right) &= u_{i,j}^{n+1} + \mathrm{Fo}\left(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}\right),\\
-\mathrm{Fo}u_{i,j-1}^{n+2} + (1+2\mathrm{Fo})u_{i,j}^{n+2} - \mathrm{Fo}u_{i,j+1}^{n+2} &= \mathrm{Fo}u_{i-1,j}^{n+1} + (1-2\mathrm{Fo})u_{i,j}^{n+1} + \mathrm{Fo}u_{i+1,j}^{n+1}
\end{aligned}
\tag{14.70}
$$

Se nós utilizarmos (novamente por simplicidade) o mesmo número de pontos $N+1$ em x e em y, teremos o seguinte mapeamento para a nossa grade:

$$N = \frac{2L}{\Delta}; \tag{14.71}$$

$$x_i = -L + i\Delta, \qquad i = 0, \ldots, N, \tag{14.72}$$

$$y_j = -L + j\Delta, \qquad j = 0, \ldots, N, \tag{14.73}$$

e portanto $-L \leq x_i \leq L$ e $-L \leq y_j \leq L$. Lembrando que os valores de $u_{0,j}$, $u_{N,j}$, $u_{i,0}$ e $u_{i,N}$ estão especificados, há $(N-1)^2$ incógnitas para serem calculadas. A beleza de (14.69) e (14.70) é que em vez de resolver a cada passo (digamos) $2\Delta t$ um sistema de $(N-1)^2$ incógnitas, nós agora podemos resolver a cada passo Δt $N-1$ sistemas de $(N-1)$ incógnitas, alternadamente para $u_{1,\ldots,N-1;j}$ e $u_{i;1,\ldots,N_1}$.

É claro que o céu é o limite: poderíamos, por exemplo, em vez de usar um esquema totalmente implícito, usar Crank-Nicholson em cada avanço Δt; isto nos daria imediatamente um esquema com acurácia de ordem Δt^2. No entanto, assim como está o método ADI já é suficientemente sofisticado para nosso primeiro encontro com esse tipo de problema. Devemos, portanto, programá-lo. Vamos, inicialmente, programar a solução analítica, na listagem 14.13.

A solução analítica do problema para os instantes de tempo $t = 0$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}2$ e $t = 0{,}3$ está mostrada na figura 14.13

Listagem 14.13: `difusao2d-ana.py` — Solução analítica da equação da difusão bidimensional.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------
# difusao2d-ana: solução analítica de
#
# du/dt = D (du^2/dx^2 + du^2/dy^2)
#
# u(x,0) = T0 exp(-(x^2 + y^2)/L^2)
#
# com T0 = 1, D = 2, L = 1, em um domínio (-L,-L) até (L,L)
#
# uso: ./difusao2d-ana.py
# ----------------------------------------------------------
fou = open('difusao2d-ana.dat','wb')
dd = 0.01
dt = 0.001
print('# dd = %9.4f' % dd)
print('# dt = %9.4f' % dt)
nn = int(2.0/dd)              # número de pontos em x e em y
nt = int(1.0/dt)              # número de pontos em t
print('# nn = %9d' % nn)
print('# nt = %9d' % nt)
from math import exp
def ana(x,y,t):
   return (1.0/(1.0 + 8*t))*exp(-(x**2 + y**2))
from numpy import zeros
u = zeros((nn+1,nn+1),float)  # um array para conter a solução
for n in range(nt+1):         # loop no tempo
   t = n*dt
   print(t)
   for i in range(nn+1):      # loop no espaço
      xi = -1 + i*dd
      for j in range(nn+1):
         yj = -1 + j*dd
         u[i,j] = ana(xi,yj,t)
   u.tofile(fou)              # imprime uma matriz com os dados
fou.close()
```

Figura 14.13: Solução analítica da equação da difusão bidimensional, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}2$ e $t = 0{,}3$

Em seguida, o esquema numérico ADI está implementado na listagem 14.14. O resultado é mostrado na figura 14.14.

Listagem 14.14: `difusao2d-adi.py` — Solução numérica da equação da difusão bidimensional, esquema ADI.

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ------------------------------------------------------------------
# difusao2d-adi resolve uma equação de difusão com um método implícito
#
# uso: ./difusao2d-adi.py
# ------------------------------------------------------------------
fou = open('difusao2d-adi.dat','wb')
dd = 0.02                           # define a discretização em x,y
dt = 0.001                          # define a discretização em t
print('# dd = %9.4f' % dd)
print('# dt = %9.4f' % dt)
nn = int(round(2.0/dd,0))           # número de pontos em x,y
nt = int(round(1.0/dt,0))           # número de pontos em t
print('# nn = %9d' % nn)
print('# nt = %9d' % nt)
from numpy import zeros
u = zeros((2,nn+1,nn+1),float)      # apenas 2 posições no tempo
                                    # são necessárias!
from math import exp
def CCy(y):
   return (1.0/aux)*exp( - (1.0 + y*y)/aux)
def CCx(x):
   return (1.0/aux)*exp( - (1.0 + x*x)/aux)
def CI(x, y):
   return exp(-(x*x + y*y))
for i in range(nn+1):               # monta a condição inicial
   xi = -1.0 + i*dd                 # inteira, até as fronteiras
   for j in range(nn+1):            # inclusive
      yj = -1.0 + j*dd
      u[0,i,j] = CI(xi,yj)
u[0].tofile(fou)                    # imprime a condição inicial
D = 2.0                             # difusividade
Fon = D*dt/((dd)**2)                # número de Fourier
print("Fo = %10.6f" % Fon)
A = zeros((nn-1),float)             # cria a matriz do sistema
B = zeros((nn-1),float)             # cria a matriz do sistema
C = zeros((nn-1),float)             # cria a matriz do sistema
# ------------------------------------------------------------------
# monta a matriz do sistema
# ------------------------------------------------------------------
A[0]       = 0.0                    # zera A[0,0]
A[1:nn-1]  = -Fon                   # preenche o fim da 1a linha
B[0:nn-1]  = 1.0 + 2*Fon            # preenche a segunda linha
C[0:nn-2]  = -Fon                   # preenche o início da 2a linha
C[nn-2]    = 0.0                    # zera A[2,nn-2]
# ------------------------------------------------------------------
# importa triad
# ------------------------------------------------------------------
from alglin import triad
old = 0                             # o velho truque!
new = 1
n = 0
d = zeros(nn-1,float)
while (n < nt+1):                   # loop no tempo
   n += 1
   print(n)
# ------------------------------------------------------------------
# varre na direção x
# ------------------------------------------------------------------
   t = n*dt
   aux = 1.0 + 8.0*t
   for j in range(nn+1):       # CC ao longo de x
      yj = -1.0 + j*dd
      u[new,0,j]  = CCy(yj)
      u[new,nn,j] = CCy(yj)
   for j in range(1,nn):       # nn-1 varreduras em x (logo, loop em y)
```

```
        yj = -1.0 + j*dd
        d[1:nn-2] = Fon*u[old,2:nn-1,j-1] \
                                + (1.0 - 2*Fon)*u[old,2:nn-1,j] \
                                + Fon*u[old,2:nn-1,j+1]
        d[0] = Fon*u[old,1,j-1] + (1.0 - 2*Fon)*u[old,1,j] \
                                + Fon*u[old,1,j+1] \
                                + Fon*u[new,0,j]
        d[nn-2] = Fon*u[old,nn-1,j-1] + (1.0 - 2*Fon)*u[old,nn-1,j] \
                                + Fon*u[old,nn-1,j+1] \
                                + Fon*u[new,nn,j]
        u[new,1:nn,j] = triad(A,B,C,d)
    u[new].tofile(fou)
# ---------------------------------------------------------------------
# varre na direção y
# ---------------------------------------------------------------------
    (new,old) = (old,new)
    n += 1
    print(n)
    t = n*dt
    aux = 1.0 + 8.0*t
    for i in range(nn+1):       # CC ao longo de y
        xi = -1.0 + i*dd
        u[new,i,0]  = CCx(xi)
        u[new,i,nn] = CCx(xi)
    for i in range(1,nn):       # nn-1 varreduras em y (logo, loop em x)
        xi = -1.0 + i*dd
        d[1:nn-2] = Fon*u[old,i-1,2:nn-1] \
                                  + (1.0 - 2*Fon)*u[old,i,2:nn-1] \
                                  + Fon*u[old,i+1,2:nn-1]
        d[0] = Fon*u[old,i-1,1] + (1.0 - 2*Fon)*u[old,i,1] \
                                + Fon*u[old,i+1,1] \
                                + Fon*u[new,i,0]
        d[nn-2] = Fon*u[old,i-1,nn-1] + (1.0 - 2*Fon)*u[old,i,nn-1] \
                                + Fon*u[old,i+1,nn-1] \
                                + Fon*u[new,i,nn]
        u[new,i,1:nn] = triad(A,B,C,d)
    u[new].tofile(fou)
    (new,old) = (old,new)
fou.close()                     # fecha o arquivo de saída, e fim.
```

Exemplo 14.5 Utilizando a análise de estabilidade de von Neumann, mostre que o esquema numérico correspondente à primeira das equações acima é incondicionalmente estável. Suponha $\Delta x = \Delta y = \Delta s$.

SOLUÇÃO

Inicialmente, rearranjamos o esquema de discretização, multiplicando por Δt e dividindo por Δx^2:

$$u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n} = \mathrm{Fo}\left[u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}\right],$$

onde

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta s^2}.$$

Faça agora

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t, \\ x_i &= i\Delta s, \\ y_j &= j\Delta s, \\ \epsilon_i^n &= \sum_{l,m} \xi_{l,m} \mathrm{e}^{at_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m y_j}, \end{aligned}$$

e substitua o modo (l, m) no esquema de discretização:

$$\xi_{l,m}\mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s} - \xi_{l,m}\mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s} =$$

Figura 14.14: Solução numérica da equação da difusão bidimensional com o esquema ADI, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0{,}1$, $t = 0{,}2$ e $t = 0{,}3$

$$\begin{aligned}\mathrm{Fo}\Big[&\xi_{l,m}\mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s} - 2\xi_{l,m}\mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s}\\ &+\xi_{l,m}\mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s}\\ &+\xi_{l,m}\mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m(j+1)\Delta s} - 2\xi_{l,m}\mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s} + \xi_{l,m}\mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m(j-1)\Delta s}\Big].\end{aligned}$$

Nós imediatamente reconhecemos o fator comum

$$\xi_{l,m}\mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_m j\Delta s},$$

e simplificamos:

$$\mathrm{e}^{a\Delta t} - 1 = \mathrm{Fo}\left[\mathrm{e}^{a\Delta t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta s} - 2\mathrm{e}^{a\Delta t} + \mathrm{e}^{a\Delta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta s} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_m\Delta s} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m\Delta s}\right];$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{a\Delta t}\left[1 - \mathrm{Fo}(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta s} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta s})\right] &= 1 + \mathrm{Fo}\left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_m\Delta s} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_m\Delta s}\right],\\ \mathrm{e}^{a\Delta t}\left[1 - 2\mathrm{Fo}(\cos(k_l\Delta s) - 1)\right] &= 1 + 2\mathrm{Fo}(\cos(k_m\Delta s) - 1),\\ \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right| &= \left|\frac{1 + 2\mathrm{Fo}(\cos(k_m\Delta s) - 1)}{1 - 2\mathrm{Fo}(\cos(k_l\Delta s) - 1)}\right|,\\ \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right| &= \left|\frac{1 - 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_m\Delta s}{2}\right)}{1 + 4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta s}{2}\right)}\right| \le 1 \;\blacksquare\end{aligned}$$

14.4 – Trabalhos Computacionais

Esta seção contém diversas propostas de trabalhos computacionais. Eles são mais longos que os exercícios propostos, e requerem considerável dedicação e *tempo*. Os trabalhos desta seção mostram diversas aplicações de métodos numéricos, e lhe dão a oportunidade de ganhar uma prática considerável em programação. Não há, intencionalmente, solução destes trabalhos. Cabe a você, talvez juntamente com o seu professor, certificar-se de que os programas estão corretos. Vários dos trabalhos incluem soluções analíticas que podem ajudar nessa verificação.

Dispersão atmosférica de poluentes

Considere o problema de dispersão atmosférica

$$U\frac{\partial C}{\partial x} = K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \tag{14.74}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \tag{14.75}$$

$$\frac{\partial C(x,0)}{\partial z} = \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0, \tag{14.76}$$

$$C(0,z) = \frac{Q}{U}B(z), \tag{14.77}$$

onde $h = 1000\,\mathrm{m}$ representa a altura da camada-limite atmosférica; $Q = 1000\,\mu\mathrm{g\,s^{-1}}$ é a vazão mássica de poluente emitida pela chaminé, $U = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e $K = 10\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ são duas constantes que representam, respectivamente, uma velocidade de advecção e um coeficiente de difusão turbulenta na vertical, e

$$\alpha^2 = \frac{K}{U}, \tag{14.78}$$

$$B(z) = \begin{cases}\frac{1}{\sigma}, & |z - z_e| \le \sigma/2,\\ 0, & |z - z_e| > \sigma/2.\end{cases} \tag{14.79}$$

Em (14.79), a função $B(z)$ representa uma emissão localizada em uma região delgada, de espessura $\sigma = 10\,\mathrm{m}$, em torno da altura de emissão (a altura da chaminé) $z_e = 300\,\mathrm{m}$.

Postulamos que a solução analítica é

$$C(x,z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-k_n^2\alpha^2 x}\cos(k_n z), \tag{14.80}$$

onde

$$k_n = \frac{\pi n}{h}. \tag{14.81}$$

É fácil verificar que a solução postulada atende à equação diferencial (14.75). Além disso, observe que (14.80) atende automaticamente às condições de contorno (14.76). Finalmente, a integral em z de (14.80) é constante:

$$\int_0^h C(x,z)\,dz = \frac{a_0 h}{2}. \tag{14.82}$$

Precisamos dos coeficientes de Fourier: em $x = 0$,

$$\frac{Q}{U}B(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n z). \tag{14.83}$$

Para calcular a_0, simplesmente integre:

$$\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\,\mathrm{d}z = h\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^h a_n\cos(k_n z)\,\mathrm{d}z}_{\equiv 0} \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2Q}{hU}. \tag{14.84}$$

Para os demais coeficientes, $m > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{U}B(z)\cos(k_m z) &= \frac{a_0}{2}\cos(k_m z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(k_n z)\cos(k_m z),\\
Q\int_0^h B(z)\frac{\cos(k_m z)}{U}\,\mathrm{d}z &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z,\\
\frac{Q}{U\sigma}\int_{z_e-\sigma/2}^{z_e+\sigma/2}\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z,\\
\frac{2Q}{U\sigma k_m}\operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e) &= \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z\\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{14.85}$$

As funções no lado direito de (14.85) são ortogonais:

$$\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ h/2 & m = n \neq 0.\end{cases} \tag{14.86}$$

Segue-se que

$$a_m = \frac{4Q}{U\sigma\pi m} \operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e). \tag{14.87}$$

a) Programe a solução analítica truncando a série do 200º harmônico (**obrigatoriamente**):

$$\widehat{C}(x,z) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N=200} a_n \mathrm{e}^{-k_n^2\alpha^2 x}\cos(k_n z). \tag{14.88}$$

Discuta a convergência da série de Fourier para valores de N diferentes de 200. Plote alguns resultados.

b) Resolva (14.75) numericamente, utilizando o esquema implícito (14.44). *Cuidado! O tratamento das condições de contorno é por sua conta.*

A condição inicial, dada por (14.77), apresenta um problema numérico potencialmente grande, e precisa ser discutida com mais detalhe. De fato, $B(z) \neq 0$ em uma região muito fina, de largura $\sigma = 10\,\mathrm{m}$, o que representa apenas 1% do domínio. Portanto, qualquer erro na sua representação repercutirá negativamente no esquema numérico. Para que a solução numérica seja acurada, portanto, os seguintes passos são essenciais:

1. Defina uma discretização vertical Δz bem menor do que σ.

2. Defina $B(z)$ por pontos com resolução Δz; seja $[i_a, i_b]$ o intervalo de índices para os quais $B(z_i) \neq 0$. Então, é fundamental que a integral *numérica* de $B(z)$ também seja unitária. Em outras palavras, *você deve se certificar de que*

$$\sum_{i\in[i_a,i_b]} B(z_i)\Delta z = 1.$$

Solução linearizada da equação de Boussinesq para águas subterrâneas por analogia com a equação da difusão-advencção

Resolva a equação de Boussinesq

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

com condições iniciais e de contorno

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= F(x),\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial\phi(1,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}$$

A solução analítica desse problema é dada por

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \frac{F(x)}{1+at},\\
a &= [B(2/3,1/2)]^2/6,\\
x &= I(2/3,1/2,F^3),\\
F^3 &= I^{-1}(2/3,1/2,x),\\
F(x) &= \left[I^{-1}(2/3,1/2,x)\right]^{1/3},
\end{aligned}$$

Figura 14.15: Solução correta do problema para $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. As linhas cheias são a solução analítica, e os pontos a solução numérica.

onde B é a função beta, I é a função beta incompleta, e I^{-1} é a sua inversa.

Para isso, compare a equação de Boussinesq com a de advecção-difusão unidimensional

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - U\frac{\partial \phi}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{14.89}$$

A idéia é linearizar ambos os termos não lineares com

$$U = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}\right]^n \approx \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x},$$
$$D = \phi_i^n,$$

calculados no passo de tempo anterior.

a) Discretize (14.89) usando um esquema implícito centrado para $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Faça

$$\Delta x = 0{,}001, \tag{14.90}$$
$$\Delta t = 0{,}001. \tag{14.91}$$

b) Resolva (14.89) numericamente com o esquema obtido acima para $0 \le x \le 1$ e $0 \le t \le 2$.

A sua solução deve gerar pelo menos uma figura semelhante à figura para os tempos $t = 0, 0.5, 1, 1.5$ e 2. 14.15

Solução numérica da espiral de Ekman

Em Mecânica dos Fluidos Geofísica, a espiral de Ekman é o padrão de velocidade que resulta do equilíbrio entre a força de Coriolis e as forças de atrito devidas à turbulência. Para a camada-limite atmosférica, um modelo muito simples (Kundu, 1990, seção 13.7) — e irrealista! — postula uma viscosidade cinemática turbulenta ν_W constante. O vetor velocidade é (u, v), e as equações do movimento nas direções x e y são, respectivamente,

$$0 = fv + \nu_W \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}, \tag{14.92}$$

$$0 = f(U - u) + \nu_W \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}. \tag{14.93}$$

O vetor $(U, 0)$ é denominado *vento geostrófico*, e $f \cong 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ (a 45° de latitude Norte) é o parâmetro de Coriolis. As condições de contorno do problema são

$$u(0) = 0, \qquad v(0) = 0, \tag{14.94}$$

$$u(+\infty) = U, \qquad v(+\infty) = 0. \tag{14.95}$$

A solução apresentada por Kundu usa variáveis complexas. Constrói-se uma velocidade complexa

$$W \equiv U + \mathrm{i}V \tag{14.96}$$

($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$) de tal forma que (14.92)–(14.93) podem ser escritas compactamente

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{i}f}{\nu_W}(W - U) = 0 \tag{14.97}$$

(Cuidado! z é *real*!). A equação tem solução

$$W = U\left[1 - \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})z/\delta}\right], \tag{14.98}$$

com

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2\nu_W}{f}}, \tag{14.99}$$

ou seja:

$$u = U\left[1 - \mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(z/\delta)\right], \tag{14.100}$$

$$v = U\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{sen}(z/\delta). \tag{14.101}$$

O seu trabalho é obter uma aproximação numérica para (14.98) (ou, o que dá no mesmo, para (14.100)–(14.101)), resolvendo o problema *transiente*

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\mathrm{i}f}{\nu_W}(W - U) = 0. \tag{14.102}$$

com as condições iniciais e de contorno

$$W(z, 0) = 0, \tag{14.103}$$

$$W(0, t) = 0, \tag{14.104}$$

$$W(H, t) = U, \tag{14.105}$$

observando que $W(z, \infty)$ (quando $\partial W/\partial t \to 0$) é a solução de (14.97). Você utilizará $H \gg \delta$ para aproximar a solução analítica, que vale para um domínio (semi-)infinito. Valores que dão a ordem de grandeza correta na atmosfera são: $U = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\nu_W = 50\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, $f = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$, $\delta = 1000\,\mathrm{m}$, $H = 10000\,\mathrm{m}$. Embora seja possível resolver diretamente (14.102) no computador, é muito útil adimensionalizar! Fazemos

$$t = f\tau,$$
$$z = \delta\zeta,$$
$$W = \phi U,$$

Figura 14.16: Parte real de $\phi(\zeta, \tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica.

e obtemos o problema (já com os valores numéricos indicados acima):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1). \tag{14.106}$$

As condições inciais e de contorno são

$$\phi(\zeta, 0) = 0, \tag{14.107}$$
$$\phi(0, t) = 0, \tag{14.108}$$
$$\phi(10, t) = 1. \tag{14.109}$$

O problema a ser resolvido numericamente agora é:

a) Discretize a equação usando um esquema totalmente implícito para $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}$ e para ϕ. Você deve descrever a discretização e explicar o esquema numérico resultante.

b) Resolva a equação numericamente com o esquema obtido acima, usando. $\Delta\zeta = 0{,}005$ e $\Delta\tau = 0{,}01$ em sua solução.

A sua solução deve gerar pelo menos duas figuras semelhantes às figuras 14.16 e 14.17. Elas mostram as partes real e imaginária de ϕ (que correspondem a u/U e a v/U) nos instantes adimensionais $\tau = 5, 25, 50$ e 100.

Atenção: você vai precisar modificar a rotina `triad` (Listagem 14.9) para que ela seja capaz de lidar com números complexos.

Uma análise numérica da equação não-linear de Boussinesq e de suas soluções aproximadas

Dada a equação de Boussinesq para um aquífero subterrâneo (Boussinesq, 1903)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k_0}{n_e}\frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right], \qquad t \geq 0;\ 0 \leq x \leq B \tag{14.110}$$

com condições iniciais e de contorno

$$h(x, 0) = H, \qquad h(0, t) = H_0 < H, \qquad \frac{\partial h(B, t)}{\partial x} = 0 \tag{14.111}$$

Figura 14.17: Parte imaginária de $\phi(\zeta,\tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica.

ela pode ser adimensionalizada da seguinte forma (Brutsaert, 2005, seção 10.3.5):

$$\phi \equiv \frac{h}{H}, \qquad \eta \equiv \frac{x}{B}, \qquad \tau \equiv \frac{k_0 H}{n_e B^2} t. \tag{14.112}$$

Em (14.110)–(14.112), h é a carga hidráulica, e representa o nível da superfície freática ("lençol freático"), k_0 é a condutividade hidráulica saturada, n_e é a porosidade drenável, x é a posição horizontal, e t é o tempo.

A vazão em $x = 0$ também pode ser adimensionalizada:

$$\begin{aligned} q(t) &= k_0 h(0,t) \frac{\partial h(0,t)}{\partial x} \\ &= k_0 H^2 \frac{h(0,t)}{H} \frac{1}{B} \frac{\partial \frac{h(0,t)}{H}}{\partial \frac{x}{B}} \\ &= \frac{k_0 H^2}{B} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] (0,\tau) \\ &= \frac{k_0 H^2}{B} \chi(\tau), \end{aligned} \tag{14.113}$$

onde $\chi(\tau)$ é a vazão adimensional efluente do maciço poroso em $\eta = 0$.

Nas variáveis acima, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \qquad \tau \geq 0, \ 0 \leq \eta \leq 1, \tag{14.114}$$

com condições iniciais e de contorno

$$\phi(\eta, 0) = 1, \qquad \phi(0,\tau) = \Phi_0 < 1, \qquad \frac{\partial \phi(1,\tau)}{\partial \eta} = 0. \tag{14.115}$$

Tempos longos

Quando $\Phi_0 = 0$, com a condição inicial

$$\phi(\eta, 0) = F(\eta) \tag{14.116}$$

substituindo a primeira das equações (14.115), existe a solução analítica (Boussinesq, 1904):

$$\phi(\eta, t) = \frac{F(\eta)}{1 + \alpha\tau}, \tag{14.117}$$

$$\chi(\tau) = \frac{\beta}{(1+\alpha\tau)^2}, \tag{14.118}$$

$$\alpha = [B(2/3, 1/2)]^2/6, \tag{14.119}$$

$$\beta = B(2/3, 1/2)/3, \tag{14.120}$$

$$\eta = I_{F^3(2/3,1/2)}, \tag{14.121}$$

onde $B(\alpha, \beta)$ é a função Beta, e $I_x(\alpha, \beta)$ é a função Beta incompleta (Press et al., 1992, seção 6.4). Note que $[F(\eta)]^3$ é a função inversa de $I_x(2/3, 1/2)$. Uma importante limitação desta solução é que ela somente é válida para uma condição inicial muito específica, dada pela função Beta incompleta inversa $F(\eta)$. Outra limitação é que ela só se aplica a $\Phi_0 = 0$. Ela pode ser muito útil, entretanto, para verificar a qualidade de soluções numéricas da equação não-linear (14.114).

Tempos longos, solução linearizada

Considere novamente (14.110), linearizada:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{pk_0H}{n_e}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial (h/H)}{\partial t} &= \frac{pk_0H}{n_e}\frac{\partial^2 (h/H)}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{pk_0H}{n_e}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{pk_0H}{n_eB^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= p\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}.
\end{aligned} \tag{14.122}$$

A equação (14.122) tem solução em série de Fourier, da forma

$$\phi(\eta, \tau) = \Phi_0 + \frac{4(1-\Phi_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\eta\right)\exp\left(-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}p\tau\right). \tag{14.123}$$

Seguindo Brutsaert e Lopez (1998) e Chor e Dias (2015), nós calcularemos p em função de Φ_0 como:

$$p = 0.3465 + 0.6535\Phi_0. \tag{14.124}$$

Nossos objetivos

O objetivo deste trabalho são:

1. Produzir um esquema numérico de solução que possa ser comparado com a solução analítica (14.117)–(14.121) quando $\Phi_0 = 0$.

2. Analisar o comportamento das soluções analíticas linearizadas para diversos casos $0 < \Phi_0 < 1$, comparando-as com as soluções numéricas correspondentes da equação não-linear.

1ª tarefa

Crie um programa que calcula a solução analítica dada pelas equações (14.116)–(14.121). Verifique como os perfis $\phi(\eta, \tau)$ evoluem no tempo. Para fazer isso, ajudará muito se você instalar a módulo adicional `scipy`. As funções Beta e Beta incompleta que aparecem em (14.119), (14.120) e (14.121) são implementadas nas

funções `beta` e `betainc` de `scipy.special`. No seu programa, faça então:

[`from scipy.special import beta, betainc`],

e use `beta` e `betainc` da forma adequada.

Agora, plote a solução analítica $\phi(\eta, \tau)$ para $\tau = 0{,}01$, $0{,}1$ e $1{,}0$.

Solução numérica da equação não-linear

O primeiro passo é discretizar a equação diferencial não-linear, "linearizando-a" por meio do expediente de aplicar parte da discretização utilizando o instante de tempo anterior. Faça

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i+1/2} \approx \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n}{2} \left[\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}}{\Delta \eta} \right]; \tag{14.125}$$

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i-1/2} \approx \frac{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{2} \left[\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right]; \tag{14.126}$$

como estamos usando o "ϕ" do passo tempo anterior (n), isso na prática linearliza o esquema. Vamos simplificar a notação:

$$\overline{\phi}_i^n \equiv \frac{\phi_{i+1}^n + \phi_i^n}{2}, \qquad \overline{\phi}_{i-1}^n \equiv \frac{\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{2}, \tag{14.127}$$

o que nos permite reescrever (14.125)–(14.126) como

$$\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i+1/2} \approx \overline{\phi}_i^n \left[\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}}{\Delta \eta} \right]; \qquad \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i-1/2} \approx \overline{\phi}_{i-1}^n \left[\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right]. \tag{14.128}$$

Podemos agora calcular a segunda derivada (aproximada):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_i &\approx \frac{1}{\Delta \eta} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i+1/2} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\bigg|_{i-1/2} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta \eta} \left[\overline{\phi}_i^n \left[\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}}{\Delta \eta} \right] - \overline{\phi}_{i-1}^n \left[\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \right]. \end{aligned} \tag{14.129}$$

O esquema numérico agora é

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{\Delta \eta} \left[\overline{\phi}_i^n \left[\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1}}{\Delta \eta} \right] - \overline{\phi}_{i-1}^n \left[\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta \eta} \right] \right] \tag{14.130}$$

ou

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{\Delta t}{\Delta \eta^2} \left[\overline{\phi}_i^n \left(\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1} \right) - \overline{\phi}_{i-1}^n \left(\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1} \right) \right] \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \mathrm{Fo} \left[\overline{\phi}_i^n \left(\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_i^{n+1} \right) - \overline{\phi}_{i-1}^n \left(\phi_i^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1} \right) \right] \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \mathrm{Fo} \overline{\phi}_{i-1}^n \phi_{i-1}^{n+1} - \mathrm{Fo} \left(\overline{\phi}_{i-1}^n + \overline{\phi}_i^n \right) \phi_i^{n+1} + \mathrm{Fo} \overline{\phi}_i^n \phi_{i+1}^{n+1}. \end{aligned}$$

O esquema numérico pode ser rearrumado da seguinte maneira:

$$- \left[\mathrm{Fo} \overline{\phi}_{i-1}^n \right] \phi_{i-1}^{n+1} + \left[1 + \mathrm{Fo} \left(\overline{\phi}_{i-1}^n + \overline{\phi}_i^n \right) \right] \phi_i^{n+1} - \left[\mathrm{Fo} \overline{\phi}_i^n \right] \phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n \tag{14.131}$$

Talvez seja prático definir os coeficientes a seguir. Para $1 \leq i \leq N_x - 2$:

$$A_{i-1}^n \equiv - \left[\mathrm{Fo} \overline{\phi}_{i-1}^n \right], \tag{14.132}$$

$$B_{i-1}^n \equiv \left[1 + \mathrm{Fo}\left(\overline{\phi}_{i-1}^n + \overline{\phi}_i^n\right)\right], \tag{14.133}$$

$$C_{i-1}^n \equiv -\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_i^n\right], \tag{14.134}$$

e então reescrever

$$A_{i-1}^n \phi_{i-1}^{n+1} + B_{i-1}^n \phi_i^{n+1} + C_{i-1}^n \phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n. \tag{14.135}$$

As condições de contorno agora são as seguintes: para a primeira linha, teremos

$$B_0^n \phi_1^{n+1} + C_0^n \phi_2^{n+1} = \phi_i^n - A_0^n \Phi_0. \tag{14.136}$$

Já na última linha, $i = N_x - 1$, e teremos

$$\phi_{N_x-1}^{n+1} = \phi_{N_x}^{n+1} \tag{14.137}$$

e portanto

$$A_{N_x-2}^n \equiv -\left[\mathrm{Fo}\overline{\phi}_{N_x-2}^n\right], \tag{14.138}$$

$$B_{N_x-2}^n \equiv \left[1 + \mathrm{Fo}\left(\overline{\phi}_{N_x-2}^n\right)\right]; \tag{14.139}$$

a última linha será

$$A_{N_x-2}^n \phi_{N_x-1}^{n+1} + B_{N_x-2}^n \phi_{N_x-1}^{n+1} = \phi_{N_x-1}^n. \tag{14.140}$$

Como sempre, uma boa notação torna as coisas quase triviais: notação é importante!

2ª tarefa

Agora, implemente o esquema numérico. Crie um programa para comparar a solução analítica que você programou acima com a solução numérica que você implementou. Atente para a condição inicial que você deve usar, que é a dada pela equação (14.116). Sugestão: use incrementos $\Delta\eta = 0{,}0001$ e $\Delta\tau = 0{,}0001$. Minha comparação é excelente, como podemos ver na figura 14.18. Os instantes mostrados do esquema numérico são os mesmos de antes, é claro: $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$ e $\tau = 1{,}0$.

3ª tarefa

Escreva um programa para calcular a solução analítica aproximada dada pela equação (14.123). O valor de Φ_0 deve ser um argumento do programa, para que você possa calcular a solução analítica em função da condição de contorno à esquerda. Novamente, o programa deve imprimir as soluções para $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$.

4ª tarefa

Agora escreva um programa para resolver o problema definido pelas equações (14.114)–(14.115) numericamente. Esse programa também deve ter com argumento Φ_0. Tendo feito isso, compare os resultados da solução não-linear com os resultados da solução linearizada calculada anteriormente, para $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$. A figura 14.19 mostra a minha comparação para $\phi(\eta, 0) = 0$. Repita, para $\Phi_0 = 0{,}25$, 0,50 e 0,75. (vide figuras 14.20, 14.21 e 14.22).

Como você interpreta os resultados obtidos em função de Φ_0?

Figura 14.18: Comparação do esquema numérico com a solução analítica de Boussinesq (1904). De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$

Figura 14.19: Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$.

Figura 14.20: Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}25$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$.

Figura 14.21: Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}50$. De cima para baixo, $\tau = 0{,}01$, $\tau = 0{,}1$, e $\tau = 1{,}0$.

Figura 14.22: Comparação da solução numérica completa de (14.114)–(14.115) com a solução linearizada (14.123) para $\Phi_0 = 0{,}75$.

15

Espaços normados e séries de Fourier

Volte à seção 5.2: a *essência* de um espaço vetorial é:

- Existe um conjunto $\mathbb{V}$ de objetos;
- Existe um *campo escalar* $\mathbb{F}$ associado;
- Existem duas regras:
  1. adição em $\mathbb{V}$:
  $$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{V};$$
  2. multiplicação por um escalar:
  $$\alpha \in \mathbb{F}; \boldsymbol{u} \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}.$$

Além disto, é claro que é preciso sempre verificar os 8 axiomas definidores da Álgebra Linear, (5.7)–(5.14). Neste capítulo, nós vamos algumas vezes admitir implicitamente a validade desses últimos.

No caso mais geral, e muito útil para nós aqui, o campo escalar pode ser o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Uma das coisas importantes deste capítulo é que nós vamos muitas vezes trabalhar com a idéia de que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

15.1 – O produto interno

Definição 15.1 O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de um espaço vetorial $\{\mathbb{V}, \mathbb{C}\}$ é uma função:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &\mapsto \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

que atende às propriedades (15.1)–(15.5).

As propriedades definidoras do produto interno são:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^* , \tag{15.1}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + z \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, z \rangle , \tag{15.2}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle , \tag{15.3}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0, \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \tag{15.4}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0, \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{15.5}$$

Antes de mais nada: o produto interno é um *número*; no caso mais geral que estamos tratando aqui, um número complexo; não custa repetir: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{C}$. (15.1) dá ao produto interno a propriedade de *simetria hermitiana*; (15.2)–(15.3) dão ao produto interno a propriedade de *linearidade*, e (15.4)–(15.5) dão ao produto interno a propriedade de *positividade* (Greenberg, 1978, seção 17.2).

Sem perda de tempo, é importante identificarmos o que acontece com os análogos de (15.2)–(15.3) se a soma e o produto por escalar estiverem no primeiro, e não no segundo elemento do produto interno. Por exemplo, para a soma,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \rangle^* \\ &= \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle^* + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle^* \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle , \end{aligned} \tag{15.6}$$

e portanto a propriedade distributiva também se aplica quando a soma é no primeiro elemento do produto interno. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \alpha \boldsymbol{x} \rangle^* \\ &= (\alpha \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle)^* \\ &= \alpha^* \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^* \\ &= \alpha^* \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle . \end{aligned} \tag{15.7}$$

Portanto, a multiplicação por escalar no primeiro elemento do produto interno é diferente, e o que "sai" do produto interno é o conjugado do escalar. Guarde bem esse fato.

Infelizmente, existem *duas* maneiras distintas, mas igualmente válidas, de se impor as propriedades do produto interno. De fato, em vez de (15.2)–(15.3), nós poderíamos ter imposto

$$\left.\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle , \\ \langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle . \end{aligned}\right\} \quad \text{Não use essas definições!}$$

Essas equações permanecerão não-numeradas para não causar confusão: *você não deve usar a segunda equação acima*, porque nossa escolha foi por (15.3), mas outros textos podem adotá-las, junto com as definições correspondentes de produtos internos. Portanto, não se espante se você encontrar definições diferentes em alguns livros. Conforme vimos, o resultado da primeira equação acima é indiferente — e portanto você pode usá-la livremente — mas a segunda equação é incompatível com (15.7).

Uma das principais aplicações do produto interno é a possibilidade de definir com ele *normas* e *ângulos*. Em primeiro lugar note que (15.4)–(15.5) utilizam implicitamente o fato de que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}$. De fato, (15.1) nos dá

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^* \Rightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}. \tag{15.8}$$

Além disso, (15.4)–(15.5) garantem que o produto interno de um vetor consigo próprio é sempre positivo, e é isso que nos permite agora definir a *norma* de um vetor:

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} . \tag{15.9}$$

Conforme veremos logo em seguida, existem em princípio infinitos produtos internos para cada espaço vetorial; portanto, existem infinitas normas possíveis, embora algumas sejam particularmente indicadas em algumas situações.

Definição 15.2 Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com um produto interno $\langle , \rangle$, e uma base $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$:

- Um vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ é *unitário* quando $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$.
- Dois vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ são *ortogonais* quando $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$.
- A base E é ortonormal quando

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo 15.1 O produto interno usual no espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}, x_i \in \mathbb{C}$, é definido por

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i.$$

Para nos assegurarmos de que esse é um produto interno legítimo, devemos verificar (15.1)–(15.5):

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^* x_i\right)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^* x_i\right)^* = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^* \,; \ \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^* y_i + x_i^* z_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^* z_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \,; \ \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* (\alpha y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \,; \ \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0 \ \blacksquare \checkmark\checkmark
\end{aligned}$$

Exemplo 15.2 O mesmo *cálculo* formal se aplica quando utilizamos as *componentes* $(x_1, \ldots, x_n)$ de um vetor $\boldsymbol{x}$ em uma base ortonormal $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Note que o *significado* de $x_1, \ldots, x_n$ agora é diferente do exemplo 15.1:

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i; \qquad \boldsymbol{y} = y_j \boldsymbol{e}_j.$$

Naturalmente, estamos utilizando novamente a convenção de soma de Einstein. Utilizando o fato de que $\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = \delta_{ij}$, temos agora

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \left\langle x_i \boldsymbol{e}_i, y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= x_i^* y_j \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= x_i^* y_j \delta_{ij} \\
&= x_i^* y_i \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que às vezes basta que o campo escalar do espaço vetorial seja o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Neste caso, (15.1)–(15.5), simplificam-se para

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle , \tag{15.10}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle , \tag{15.11}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle = \langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle , \tag{15.12}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0, \ \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \tag{15.13}$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0, \ \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{15.14}$$

onde $\alpha, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{R}$.

Exercícios Propostos

15.1 Dadas as 5 propriedades clássicas (15.1)–(15.5) de um produto interno em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), verifique se

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k)$$

é um produto interno legítimo em $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$. Sua resposta deve ser justificada *matematicamente* — não vale só responder "sim" ou "não".

15.2 Considere uma base $E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ *não necessariamente ortonormal* de um espaço vetorial genérico $\mathbb{V}$. Um vetor $\boldsymbol{x}$ qualquer de $\mathbb{V}$ é $\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$. A representação matricial de $\boldsymbol{x}$ é $[\boldsymbol{x}] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$.

a) Se $\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = M_{i,j}$, mostre que $M_{i,j} = M_{j,i}^*$.

b) Exprima $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ matricialmente, em função de $[\boldsymbol{x}]$, $[\boldsymbol{y}]$ e de $[\boldsymbol{M}]$, onde $[\boldsymbol{M}]$ é a matriz cujos elementos são os $M_{i,j}s$ definidos acima.

15.2 – A desigualdade de Schwarz

A desigualdade é uma entre muitas do mesmo tipo, e vale a pena ao leitor interessado um mergulho mais amplo; veja Steele (2004). Mas *pelo menos* a que tem este nome precisa ser bem conhecida:

$$| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle | \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|. \tag{15.15}$$

A prova é a seguinte: se $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \alpha \langle \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \alpha^* \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \alpha \alpha^* \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \alpha^* \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* + \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \alpha \alpha^* \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle . \end{aligned}$$

Em particular, escolha

$$\alpha = -\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^*}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle};$$

obtenha:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \left[\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^*}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \right]^* - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^*}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \left[\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^*}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \right] \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \frac{| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle |^2}{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle} \ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle |^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \ \blacksquare$$

Exemplo 15.3 Seja $\mathbb{V} = \{(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$, *i.e.*, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. O produto interno canônico é

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Note que não é x_i^*, mas sim x_i, porque $x_i \in \mathbb{R}$. Com esse produto interno, a norma é

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \\
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).
\end{aligned}$$

Entretanto, existem muitos outros produtos internos possíveis. Um deles é particularmente interessante porque nos leva ao fato de que o coeficiente de correlação amostral entre dois conjuntos de dados é menor ou igual a um em módulo. Para ver isso, defina agora os seguintes momentos amostrais:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &\equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\overline{y} &\equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \\
s_x^2 &\equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \\
s_y^2 &\equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2, \\
c_{xy} &\equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).
\end{aligned}$$

Nossa questão agora em termos de Álgebra Linear é: será que

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv c_{xy} \tag{15.16}$$

é um produto interno legítmo? (Note que ele é diferente do produto interno canônico definido logo acima para $\mathbb{R}^n$.) Verificamos mais uma vez (15.10)–(15.14):

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle, \ \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{y} \rangle &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\left[\alpha(y_i - \overline{y}) + \beta(z_i - \overline{z})\right] \\
&= \alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + \beta\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(z_i - \overline{z}) \\
&= \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle, \ \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \geq 0. \ \checkmark
\end{aligned}$$

Note que nós condensamos (15.10)–(15.12) em apenas 2 verificações, indicadas pelos dois primeiros $\checkmark s$. Infelizmente, não é possível atender (15.14); note que

$$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}) \Rightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0.$$

A conclusão é que c_{xy} não é um produto interno "clássico". O problema é "técnico" (do ponto de vista matemático): existem vetores não nulos para os quais o "produto interno" (15.16) produz $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$. O problema, entretanto, é contornável: basta que nós trabalhemos com vetores $\boldsymbol{x}'$ cujas componentes são

$$x_i' \equiv x_i - \overline{x}.$$

De fato, é usual em probabilidade e estatística trabalharmos com grandezas definidas "em torno da média", e é muito comum encontrarmos variáveis aleatórias e processos estocásticos cujas propriedades independem do valor da média.
Agora, é trivial verificar que (15.10)–(15.14) valem para o conjunto dos $\boldsymbol{x}'s$ e temos então que o que o coeficiente de correlação amostral é

$$r_{xy} \equiv \frac{c_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle}{\|\boldsymbol{x}'\| \|\boldsymbol{y}'\|} \Rightarrow |r_{xy}| \leq 1 \blacksquare$$

15.3 – Espaços vetoriais de dimensão infinita

Muitos espaços vetoriais que nos são apresentados no início da Álgebra Linear são de dimensão *finita*. Por exemplo, dos 4 vetores apresentados na página 120, os 3 primeiros existem em espaços vetoriais cujas dimensões são, respectivamente, 3, 3 e 4. Mas o último exemplo, o da função sen $\frac{2\pi x}{L}$, é um caso de um vetor em um espaço de dimensão infinita.

De fato, um tipo de espaço vetorial extremamente importante e útil em Álgebra Linear é aquele cujos elementos são *funções*. Vamos aos poucos. Quando o domínio das funções componentes do espaço vetorial é um conjunto *finito* de pontos, é possível defini-las por simples enumeração. Por exemplo, considere as funções do tipo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} &\to \mathbb{R}, \\ x \in \mathbb{D} &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que o conjunto das funções $\mathbb{V} = \{f\}$ definidas acima juntamente com as operações

$$(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x), \tag{15.17}$$
$$(\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x), \tag{15.18}$$

constitui-se em um espaço vetorial com campo escalar (por exemplo) $\mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Agora, cada função de $\mathbb{V}$ pode ser representada simplesmente por um *vetor algébrico* de $\mathbb{R}^{10}$ contendo os valores da função em cada ponto do domínio. Por exemplo, se f e g forem definidas por

$$\begin{aligned} f(1) &= 11 & g(1) &= 10, \\ f(2) &= 22 & g(2) &= 9, \\ f(3) &= 33 & g(3) &= 8, \\ f(4) &= 44 & g(4) &= 7, \\ f(5) &= 55 & g(5) &= 6, \\ f(6) &= 66 & g(6) &= 5, \\ f(7) &= 77 & g(7) &= 4, \\ f(8) &= 88 & g(8) &= 3, \\ f(9) &= 99 & g(9) &= 2, \end{aligned}$$

$$f(10) = 100 \qquad\qquad g(10) = 1,$$

então f e g podem ser representadas respectivamente pelos vetores algébricos

$$(11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 100), \qquad (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Num caso simples como este, é imediato "imaginar" um produto interno para $\mathbb{V}$, "tomando emprestado" do produto interno canônico em $\mathbb{R}^{10}$ (com campo escalar $\mathbb{R}$) e fazendo

$$\langle f, g\rangle \equiv \sum_{i=1}^{10} f(i)g(i). \tag{15.19}$$

É simples provar que (15.19) de fato representa um produto interno que atende às condições (15.1)–(15.5). (Faça isso! Lembre-se de que nesse caso o campo escalar é $\mathbb{R}$, e não $\mathbb{C}$.) As coisas ficam mais complicadas, entretanto, quando o domínio das funções de $\mathbb{V}$ possui um número infinito de pontos. Por exemplo, se $\mathbb{V}$ é o conjunto das funções

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x), \end{aligned}$$

existem infinitos pontos x no intervalo fechado $[0, 1]$. Enumerar todos eles é impossível, e portanto é impossível fazer uma "tabela" com os valores de f. Mesmo assim, ainda é possível aproveitar a idéia de (15.19) "aproximando" $f(x)$ por um número finito de seus valores. Por exemplo, os pontos

$$x_i = (i - 1/2)\Delta x, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \Delta x = 1/n,$$

são igualmente espaçados entre $1/(2n)$ e $1 - 1/(2n)$ (ou seja: "dentro" do intervalo $[0, 1]$). Se nós tomarmos os n valores das funções f, g nesses pontos como "representativos", eles são $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$, $(g(x_1), \ldots, g(x_n))$, e com eles nós podemos definir um produto interno de forma análoga a (15.19):

$$\langle f, g\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i). \tag{15.20}$$

Agora, é claro que

$$\langle f, g\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)\,\Delta x \tag{15.21}$$

é um produto interno igualmente válido (*mostre isso!*), e você já deve estar vendo onde estamos chegando: quando $n \to \infty$, (15.21) tende a uma integral de Riemman.

De forma bem geral, se $\mathbb{V}$ é o conjunto das funções *quadrado-integráveis*

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto z = f(x), \end{aligned}$$

um produto interno para $\mathbb{V}$ (agora com campo escalar $\mathbb{C}$) é

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15.22}$$

A condição de as funções serem quadrado-integráveis é um requisito natural para a existência da norma. De fato,

$$\|f(x)\|^2 = \int_a^b f^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x;$$

para que a norma exista, nós requeremos que a integral seja finita, ou seja: se

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty,$$

$f(x)$ é quadrado-integrável.

Exemplo 15.4 A função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

não é quadrado-integrável.
De fato,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 = \int_0^1 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = +\infty \blacksquare$$

Exemplo 15.5 A função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad 1 \leq x \leq 2$$

é quadrado-integrável.
De fato,

$$\int_1^2 |f(x)|^2 = \int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 < \infty \blacksquare$$

O conjunto das funções reais ou complexas quadrado-integráveis definidas no intervalo real $[a, b]$ constitui-se em um espaço vetorial. Os fatos que tornam isto verdade são que a soma de duas funções quadrado-integráveis é novamente uma função quadrado-integrável; e que o produto de uma função quadrado-integrável por um escalar é novamente uma função quadrado-integrável. Para provar isso, considere o seguinte fato: se u e v são dois números complexos,

$$\operatorname{Re} u^* v \leq |u||v|.$$

Mas isso é uma consequência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz! De fato, considere o espaço vetorial elementar formado pelo próprio conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com campo escalar também igual ao próprio $\mathbb{C}$. É evidente que $u^* v$ é um produto interno legítimo deste espaço. Portanto,

$$\operatorname{Re} u^* v \leq |u^* v| \leq |u||v|. \tag{15.23}$$

Além disto,

$$[|u| - |v|]^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \geq 0 \;\Rightarrow\; |u|^2 + |v|^2 \geq 2|u||v|. \tag{15.24}$$

Agora, dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ quadrado-integráveis no intervalo $[a, b]$, considere a sua soma $h(x) = f(x) + g(x)$:

$$\begin{aligned} |h(x)|^2 &= |f(x) + g(x)|^2 \\ &= (f(x) + g(x))^* (f(x) + g(x)) \\ &= (f^*(x) + g^*(x))(f(x) + g(x)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f^*(x)f(x) + g^*(x)g(x) + f^*(x)g(x) + (f^*(x)g(x))^* \\
&= |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}(f^*(x)g(x)) \\
&\leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)| \\
&\leq 2\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right). \qquad (15.25)
\end{aligned}
$$

Note o uso de (15.23) para se obter a penúltima linha, e de (15.24) para obter a última linha de (15.25). Segue-se que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |h(x)|^2\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b 2\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty. \qquad (15.26)
\end{aligned}
$$

Isto prova que a soma de duas funções quadrado-integráveis é também quadrado-integrável. O produto por escalar é trivial: se $f(x)$ é quadrado integrável,

$$
\int_a^b |\alpha f(x)|^2\,\mathrm{d}x = |\alpha|^2 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \qquad (15.27)
$$

Retorne agora ao produto interno definido em (15.22): ele é legítimo? Sim; primeiramente, note que se f e g forem quadrado-integráveis, a integral (15.22) sempre existe:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)^* g(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_a^b |f^*(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f^*(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right)\,\mathrm{d}x < \infty, \qquad (15.28)
\end{aligned}
$$

onde novamente nós utilizamos (15.23). Cabe ainda verificar a lista de propriedades definidoras (15.1)–(15.5):

$$
\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int_a^b g^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right]^* = \langle g, f\rangle^*, \ \checkmark \\
\langle f, \alpha g + \beta h\rangle &= \int_a^b f^*(x)[\alpha g(x) + \beta h(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha\int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b f^*(x)h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha\,\langle f, g\rangle + \beta\,\langle f, h\rangle, \ \checkmark\checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_a^b f^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0. \ \checkmark\checkmark\checkmark
\end{aligned}
$$

Notação Quando o espaço vetorial for formado por *funções*, é usual omitir a notação vetorial. Assim, utilizaremos f, ou $f(x)$, e não $\boldsymbol{f}$. Observe o uso desta notação já nas equações acima.

Exemplo 15.6 Seja $\mathbb{V}$ o conjunto das funções

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

com

$$\int_x \int_y |f(x, y)|^2 \varphi_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x < \infty, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\varphi(x, y) > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e

$$\int_x \int_y \varphi_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1.$$

Este conjunto constitui um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com campo escalar $\mathbb{R}$ (demonstração a seu encargo). Agora, se $f, g \in \mathbb{V}$, defina

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_x \int_y f(x, y) g(x, y) \varphi_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

Este é um produto interno legítimo, pois (*prove isso!*)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle \qquad \text{(note que o campo escalar é } \mathbb{R}\text{, e não } \mathbb{C}\text{)},\ \checkmark \\ \langle f, \alpha g + \beta h \rangle &= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle,\ \checkmark\checkmark \\ \langle f, f \rangle &> 0,\ f(x) \not\equiv 0,\ \checkmark\checkmark\checkmark \\ \langle f, f \rangle &= 0,\ f(x) \equiv 0.\ \checkmark\checkmark\checkmark\checkmark \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

15.3 Se o produto interno entre duas funções complexas de uma variável real no intervalo fechado $[1, 2]$ for definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_1^2 f^*(x) g(x) w(x)\, \mathrm{d}x$$

com $w(x) = \ln(x)$, calcule $\left\langle x, x^2 \right\rangle$.

15.4 Seja $\mathbb{V}$ o conjunto das funções $f(x)$ complexas de uma variável independente x real, tais que a integral

$$\int_{-L/2}^{+L/2} |f(x)|^2 w(x)\, \mathrm{d}x$$

existe, com

$$w(x) = \cos \frac{\pi x}{L} \geq 0 \qquad \text{em} - L/2 \leq x \leq +L/2.$$

Se $f(x), g(x) \in \mathbb{V}$, mostre que

$$\langle f(x), g(x) \rangle \equiv \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x) g(x) w(x)\, \mathrm{d}x$$

é um produto interno legítimo.

15.5 Para o mesmo produto interno da questão 15.4, verifique se o conjunto de funções

$$e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi n x}{L}}, \qquad -L/2 \le x \le +L/2, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ \pm 3, \ldots$$

é ortogonal ou não. Sugestão: fazendo

$$w(x) = \cos\frac{\pi x}{L} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}}}{2},$$

as integrais definidoras dos produtos internos ficam mais fáceis de calcular.

15.6 Sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ \boldsymbol{y} &= (1, 1, \ldots, 1), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= 1. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{n}.$$

15.7 Utilizando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, é possível mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-|x|}}}{1 + |x|}\,\mathrm{d}x \le \alpha,$$

onde α é um número real positivo. Encontre α.

15.4 – Séries de Fourier

Considere uma base finita e ortogonal de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno e com campo escalar $\mathbb{C}$: $E = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Como sabemos, qualquer vetor $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{V}$ pode ser escrito em função dos vetores da base:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i. \tag{15.29}$$

O que torna a ortogonalidade particularmente atraente é a facilidade com que u_i pode ser obtido. Primeiramente, note que a ortogonalidade significa que

$$\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle = 0, \qquad j \ne i.$$

Então, uma aplicação sistemática e elementar do produto interno nos dá

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{u} \rangle &= \left\langle \boldsymbol{e}_j, \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{e}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{e}_j, u_i \boldsymbol{e}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle \\ &= u_j \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle \ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$u_j = \frac{\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{u} \rangle}{\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle}. \tag{15.30}$$

Na equação acima, note que o único termo que sobrevive do somatório envolvendo $\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \rangle$ é $i = j$: para todos os outros, o produto interno é nulo devido à ortogonalidade.

A boa notícia é que no caso de espaços vetoriais de dimensão infinita, ainda é possível decompor um vetor em uma base *à là* (15.29), exceto que n deve ser substituído devidamente por ∞.

Considere novamente o espaço das funções complexas quadrado-integráveis no intervalo real $[a, b]$, com $b - a = L$. Uma base famosa nesse espaço é o conjunto das funções

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{15.31}$$

A idéia, portanto, é que deve ser possível "decompor" uma função $f(x)$ quadrado-integrável em $[a, b]$ como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}}. \tag{15.32}$$

Esta é uma idéia ousada, que quando apareceu pela primeira vez encontrou uma considerável resistência (Penrose, 2007, seção 9.6). A discussão sobre a validade da decomposição (15.32) é profunda: em particular, em que sentido vale o sinal de "="? Nossa abordagem aqui vai ser bem pragmática (e críticos bem embasados diriam: bem não-matemática!), e nós vamos *supor* a validade de (15.32) *em algum sentido*.

Se você já estava desconfiando, eis a confirmação: (15.32) é uma *série de Fourier*. Se vale (15.32), a questão obviamente é como calcular os coeficientes de Fourier c_n. Com o produto interno adequado, (15.22), entretanto, este é um exercício praticamente elementar. Comece por observar que as funções (15.31) são ortogonais sob o produto interno (15.22):

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi i m x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle &= \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i m x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}{L}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{L}{2\pi \mathrm{i}(n-m)} \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}{L}} \frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)}{L} \, \mathrm{d}x \ (n \neq m) \\
&= \frac{L}{2\pi \mathrm{i}(n-m)} \left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m) b}{L}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)a}{L}} \right] \\
&= \frac{L}{2\pi \mathrm{i}(n-m)} \left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m)(a+L)}{L}} - \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)a}{L}} \right] \\
&= \frac{L}{2\pi \mathrm{i}(n-m)} \left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi i (n-m) a}{L}} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)\cancel{L}}{\cancel{L}}} - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Mas $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(n-m)} = 1$, donde

$$\left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi i m x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle = 0, \ m \neq n. \tag{15.33}$$

O caso $m = n$ também é importante, porém trivial:

$$\left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\rangle = \left\| \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}} \right\|^2 = \int_a^b \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-n)x}{L}} \, \mathrm{d}x = L. \tag{15.34}$$

Listagem 15.1: Coeficientes de Fourier de $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$

```
(%i1) declare([n],integer);
(%o1)                                   done
(%i2) f : x*exp(-2*%pi*%i*n*x);
                                     - 2 %i %pi n x
(%o2)                              x %e
(%i3) integrate(f,x,0,1);
                                     - 2 %i %pi n
                    (2 %i %pi n + 1) %e                    1
(%o3)               ------------------------------ - ---------
                                  2  2                    2  2
                              4 %pi  n                4 %pi  n
(%i4) factor(%);
                     - 2 %i %pi n    2 %i %pi n
                   %e              (%e            - 2 %i %pi n - 1)
(%o4)            - ---------------------------------------------
                                        2  2
                                    4 %pi  n
```

Estamos agora em condições de calcular os $c_n s$. Literalmente copiando o desenvolvimento de (15.30), temos:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, f(x)\right\rangle &= \left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}\right\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, c_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}\right\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, e^{\frac{2\pi i n x}{L}}\right\rangle \\
&= c_m \left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, e^{\frac{2\pi i m x}{L}}\right\rangle \Rightarrow \\
c_m &= \frac{\left\langle e^{\frac{2\pi i m x}{L}}, f(x)\right\rangle}{L} \\
&= \frac{1}{L}\int_a^b e^{-\frac{2\pi i m x}{L}} f(x)\,dx. \qquad (15.35)
\end{aligned}$$

Exemplo 15.7 Obtenha a série de Fourier complexa de

$$f(x) = x,\ 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO

O problema se resume ao cálculo dos $c_n s$ com $L = 1 - 0 = 1$,

$$c_n = \int_0^1 x e^{-(2\pi i n x)}\,dx.$$

Por exemplo, com Maxima nós o resultado mostrado na listagem 15.1. Mas n é inteiro (Maxima não "percebeu"!), e $e^{-2\pi i n} = e^{2\pi i n} = 1$. Isso permite simplificar:

$$c_n = -\frac{1 - 2\pi i n - 1}{4\pi^2 n^2} = \frac{2\pi i n}{4\pi^2 n^2} = \frac{i}{2\pi n},\ n \ne 0.$$

É evidente que o cálculo para $n = 0$ tem que ser feito separadamente:

$$c_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

O resultado é

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} \left[\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{2\pi n} 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(2\pi n x) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \mathrm{sen}(2\pi n x), \ 0 \leq x \leq 1 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

O exemplo 15.7 mostra, em retrospecto, um fato óbvio: se a função $f(x) \in \mathbb{R}$, então evidentemente o resultado final deve poder ser expresso como uma série contendo termos puramente reais.

No caso mais geral, as séries que surgirão serão séries *trigonométricas*, que é a forma mais usual de se apresentar (pelo menos da primeira vez) séries de Fourier. Estas séries são particularmente simples de se obter a partir da série complexa (15.32). Primeiramente, note que, usando (15.35), e a hipótese de que $f(x) \in \mathbb{R}$,

$$c_n^* = \left[\frac{1}{L}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\,\mathrm{d}x\right]^* = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}(-n)x}{L}}\,\mathrm{d}x = c_{-n}.$$

Isso permite reescrever (15.32):

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} + c_n^* \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} + \left(c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\right)^*\right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left[c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\right] \qquad (15.36)
\end{aligned}$$

Já neste ponto fica auto-evidente que a série de Fourier é puramente real. Prossiga, escrevendo de forma abreviada:

$$\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} = C + \mathrm{i}S, \qquad (15.37)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} = C - \mathrm{i}S \qquad (15.38)$$

onde $C = \cos(2\pi n x/L)$, $S = \mathrm{sen}(2\pi n x/L)$. Desta forma,

$$c_n = \frac{1}{L}\int_a^b [C - \mathrm{i}S] f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (15.39)$$

e

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\left\{c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\right\} &= 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{L}\int_a^b [C(\xi) - \mathrm{i}S(\xi)] f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \times [C(x) + \mathrm{i}S(x)]\right\} \\
&= \underbrace{\frac{2}{L}\left[\int_a^b C(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]}_{A_n} C(x) + \underbrace{\frac{2}{L}\left[\int_a^b S(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]}_{B_n} S(x) \qquad (15.40)
\end{aligned}$$

Isso nos leva rapidamente às fórmulas "clássicas"

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \end{aligned} \tag{15.41}$$

com

$$A_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi, \tag{15.42}$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi. \tag{15.43}$$

Exemplo 15.8 Obtenha a série trigonométrica de Fourier (equações (15.41), (15.42) e (15.43)) da função $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$.

SOLUÇÃO
É evidente que se trata da mesma função do exemplo anterior, 15.7. Portanto, o resultado tem que ser o mesmo! Começamos com o cálculo dos $A_n s$

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1 \\ A_n &= 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

A confirmação da segunda integral com Maxima é

```
(%i1) declare([n],integer);
(%o1)                                  done
(%i2) f : x*cos(2*n*%pi*x) ;
(%o2)                            x cos(2 %pi n x)
(%i3) integrate(f,x,0,1);
(%o3)                                    0
```

Analogamente,

$$B_n = 2\int_0^1 x\operatorname{sen}(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}$$

conforme podemos novamente verificar com Maxima:

```
(%i1) declare([n],integer);
(%o1)                                  done
(%i2) f : x*sin(2*n*%pi*x);
(%o2)                            x sin(2 %pi n x)
(%i3) integrate(f,x,0,1);
                                         1
(%o3)                                - -------
                                       2 %pi n
```

Portanto, confirmando o resultado do exemplo 15.7, temos de novo

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}(2\pi n x).$$

Exercícios Propostos

15.8 Considere a série de Fourier complexa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}, \qquad -L/2 \le x \le +L/2;$$

obtenha os $c_n s$ e consequentemente a série, para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L/2 \le x < 0\,; \\ 1, & 0 \le x \le +L/2. \end{cases}$$

Sugestão: Como sempre, multiplique ambos os lados da série por $e^{-\frac{2im\pi x}{L}}$, integre termo a termo, aplique a ortogonalidade das exp$s$ etc..

15.9 Obtenha a série de trigonométrica de Fourier de $f(x) = 1$, $-\pi \le x \le +\pi$.

15.10 Ache a série trigonométrica de Fourier (isto é: a série em senos e cossenos) de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

15.11 Seja

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \frac{T}{2} < t \le T, \end{cases}$$

onde F_0 é uma constante. Obtenha os coeficientes c_n de Fourier da série

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi int}{T}}.$$

15.12 Obtenha a série *trigonométrica* de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

15.13 Calcule a série de Fourier complexa de

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x \in [0, 1].$$

15.5 – Extensões par e ímpar de uma função

As definições clássicas de função par e função ímpar são

Definição 15.3 Seja

$$\begin{aligned} f : [-l, l] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

uma função f definida em um domínio simétrico em relação à origem, $[-l, l]$. Então:

- se $f(-x) = f(x)$, f é uma função *par*;

- se $f(-x) = -f(x)$, f é uma função *ímpar*.

Se nenhum dos casos acontece, é sempre possível decompor f em uma parte par e uma parte ímpar; de fato, para *qualquer* f definida em um domínio simétrico, é possível escrever

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{f_P(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{f_I(x)};$$

é elementar mostrar que $f_P(x)$ é par, e que $f_I(x)$ é ímpar.

É fundamental notar que nenhuma função pode ser par ou ímpar a não ser que seu domínio seja simétrico, mas esta não é uma condição suficiente; conforme vimos acima, mesmo uma função definida em um domínio simétrico pode não ser nem par, nem ímpar.

Considere agora o caso de uma função real definida no intervalo $[0, +l]$. Esta função pode ser *estendida* para o intervalo simétrico $[-l, +l]$ de diversas formas. O termo *estender* tem aqui um significado bem específico: ele significa especificar uma nova função com domínio $[-l, +l]$, *mantendo* os valores da f original em $[0, +l]$, e atribuindo novos valores no intervalo $[-l, 0)$.

Duas extensões particularmente interessantes do ponto de vista das séries trigonométricas de Fourier são a extensão par, e a extensão ímpar. Assim, dada a função

$$\begin{aligned} f : [0, +l] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

a sua extensão par é a função

$$\begin{aligned} f_P : [-l, +l] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto y = f_P(x) \end{aligned}$$

tal que

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{15.44}$$

De forma análoga, a sua extensão ímpar é a função

$$\begin{aligned} f_I : [-l, +l] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto y = f_I(x) \end{aligned}$$

tal que

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases} \tag{15.45}$$

Exemplo 15.9 A extensão par da função $f(x) = x,\ x \in [0, 1]$, é a função $f_P(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$. A sua extensão ímpar é a função $f_I(x) = x,\ x \in [-1, 1]$.

O cálculo de séries de Fourier destas extensões par e ímpar leva a algumas fórmulas particularmente simples. Note entretanto que nada desta seção é em princípio novo, e que as fórmulas gerais para séries trigonométricas são sempre suficientes para resolver qualquer problema, desde que acompanhadas de algum raciocínio. Dito isso, considere o cálculo da série de Fourier da extensão par $f_P(x)$ de uma função $f(x)$, definida conforme (15.44). Então $a = -l$, $b = +l$ e $L = 2l$. Utilizando (15.41), (15.42) e (15.43) obtemos:

$$f_P(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2\pi nx}{2l} + B_n \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{2l}$$

com

$$A_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{+l} f_P(x)\cos\frac{2\pi nx}{2l}\,\mathrm{d}x.$$

Além das simplificações óbvias envolvendo o cancelamento do fator 2, note que o integrando é o produto de duas funções pares (f_P e cos), e portanto é ele mesmo uma função par. Ora, a integral de uma função par em um domínio simétrico é duas vezes a integral entre 0 e $+l$, donde

$$A_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{+l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(extensão par).} \tag{15.46}$$

Já o cálculo de B_n produz

$$B_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{+l} f_P(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{2l}\,\mathrm{d}x.$$

Agora f_P é par, e sen é ímpar, de forma que o integrando é uma função ímpar. A integral de uma função ímpar em um domínio símetrico é nula, donde

$$B_n = 0 \qquad \text{(extensão par).} \tag{15.47}$$

A série de Fourier de $f_P(x)$ será portanto

$$f_P(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi nx}{l}\,\mathrm{d}x. \tag{15.48}$$

É claro que isso faz todo sentido: uma função par só pode ser decomposta em funções pares, que neste caso são os cossenos.

De forma análoga, considere a extensão ímpar $f_I(x)$ da f. Utilizando (15.41), (15.42) e (15.43) obtemos:

$$f_I(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2\pi nx}{2l} + B_n \operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{2l}$$

com

$$A_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{+l} f_I(x)\cos\frac{2\pi nx}{2l}\,\mathrm{d}x.$$

Agora, o integrando é o produto de uma função ímpar (f_I) por uma par (cos); o integrando é uma função ímpar, e sua integral em um domínio simétrico é nula, donde

$$A_n = 0 \qquad \text{(extensão ímpar).} \tag{15.49}$$

Já o cálculo de B_n produz

$$B_n = \frac{2}{2l}\int_{-l}^{+l} f_I(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi nx}{2l}\,\mathrm{d}x,$$

e o que temos agora é um integrando formado pelo produto de duas funções ímpares (f_I e sen); o integrando agora é par, e sua integral é duas vezes a integral entre 0 e $+l$:

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^{+l} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(extensão ímpar).} \tag{15.50}$$

A série de Fourier de $f_P(x)$ será portanto

$$f_P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n x}{l}\,\mathrm{d}x. \tag{15.51}$$

Novamente, isso faz todo o sentido, pois uma função ímpar só pode ser decomposta em funções ímpares (neste caso, os senos).

Exemplo 15.10 Calcule a série de Fourier da extensão par de $f(x) = x,\ x \in [0,1]$.

SOLUÇÃO
Como já vimos, a extensão par é $f_P(x) = |x|$. No nosso caso, $L = 2$, $l = 1$, e

$$A_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1.$$

O caso mais geral é

$$A_n = 2\int_0^1 x\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

Isso pode ser calculado, por exemplo, com Maxima:

```
(%i1) declare([n],integer);
(%o1)                                  done
(%i2) 2*integrate(x*cos(%pi * n * x),x,0,1);
                                        n
                                   (- 1)         1
(%o2)                            2 (------- - -------)
                                        2  2       2  2
                                   %pi  n     %pi  n
(%i3) factor(%);
                                              n
                                   2 ((- 1)  - 1)
(%o3)                              --------------
                                         2  2
                                     %pi  n
```

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

A série de Fourier desejada tem a forma

$$f_P(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(\pi n x) \ \blacksquare$$

Exemplo 15.11 Calcule a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x) = x,\ x \in [0,1]$.

SOLUÇÃO
Agora, temos que calcular simplesmente

$$B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\,\mathrm{sen}(\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

Com Maxima, novamente,

```
(%i1) declare ( [n],integer);
(%o1)                                   done
(%i2) 2*integrate(x*sin(%pi * n *x),x,0,1);
                                                n
                                         2 (- 1)
(%o2)                                  - --------
                                          %pi n
```

donde

$$B_n = -\frac{2(-1)^n}{\pi n}$$

e

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \operatorname{sen}(\pi n x) \blacksquare$$

Repare que nos exemplos 15.8, 15.10, e 15.11, nós encontramos *três* séries de Fourier distintas, todas as quais convergem pontualmente para $f(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$. No entanto, a primeira série representa uma função periódica com período $L = 1$, enquanto que as duas últimas representam duas funções periódicas *distintas* (que coincidem entretanto em $[0, 1]$), de período $L = 2$.

Exemplo 15.12 Calcule a série de Fourier da função $f(x) = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

SOLUÇÃO
Está claro que a função é par; portanto, teremos necessariamente

$$B_n(x) = 0.$$

Prossiga para o cálculo dos $A_n s$

$$A_0(x) = \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

e

$$A_n(x) = \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\cos\frac{2\pi n x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

Com Maxima,

```
(%i1) declare([n],integer);
(%o1)                                   done
(%i2) 2*integrate((1-x^2)*cos(%pi * n *x),x,0,1) ;
                                                n
                                         4 (- 1)
(%o2)                                  - --------
                                            2  2
                                         %pi  n
```

donde

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) \blacksquare$$

Exemplo 15.13

Para a função $f(x)$ mostrada na figura em linha grossa, e definida no intervalo $[0, 2]$, obtenha a série de Fourier da sua extensão *ímpar* em $[-2, +2]$.

SOLUÇÃO
Seja $f_I(x)$ a extensão ímpar de $f(x)$, definida por

$$f_I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \geq 2, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

A série de Fourier de $f_I(x)$ contém apenas senos:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{L}$$

onde $L = 4$, e

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{L} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} f(x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mas $f(x) = 2 - x$, e portanto

$$B_n = \int_0^2 (2 - x) \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi n}.$$

Portanto, a série de fourier da extensão ímpar de $f(x)$ é

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{\pi nx}{2} \quad \blacksquare$$

Exercícios Propostos

15.14 Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, obtenha a série de Fourier da *extensão par* de $f(x)$. Dica:

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(a + b)x] \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(a - b)x] \, \mathrm{d}x.$$

15.15 Obtenha uma série de Fourier *contendo apenas senos* que aproxime a função $f(x) = x^2$ no intervalo [0,1].

Listagem 15.2: Os primeiros 6 polinômios de Legendre

```
(%i1) load(orthopoly);
(%o1)    /usr/local/share/maxima/5.20.1/share/orthopoly/orthopoly.lisp
(%i2) p0 : expand(legendre_p(0,x));
(%o2)                                  1
(%i3) p1 : expand(legendre_p(1,x));
(%o3)                                  x
(%i4) p2 : expand(legendre_p(2,x));
                                      2
                                  3 x     1
(%o4)                             ---- - -
                                   2      2
(%i5) p3 : expand(legendre_p(3,x));
                                     3
                                 5 x     3 x
(%o5)                            ---- - ---
                                  2      2
(%i6) p4 : expand(legendre_p(4,x));
                                  4        2
                             35 x     15 x     3
(%o6)                        ----- - ----- + -
                               8        4      8
(%i7) p5 : expand(legendre_p(5,x));
                                5        3
                           63 x     35 x     15 x
(%o7)                      ----- - ----- + ----
                             8        4       8
(%i8) p6 : expand(legendre_p(6,x));
                            6         4         2
                      231 x     315 x     105 x     5
(%o8)                 ------ - ------ + ------ - --
                        16        16        16      16
```

15.16 Se $f(x) = 1,\ 0 < x \leq 1$, obtenha a série de Fourier da extensão ímpar de $f(x)$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

15.17 Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, obtenha a série de Fourier trigonométrica (em senos e cossenos) da extensão ímpar de f.

15.18 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Obtenha a série de Fourier da *extensão ímpar* de $f(x)$.

15.19 Se

$$f(x) = \cos(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi/2,$$

e se $f_I(x)$ é a extensão *ímpar* de $f(x)$ entre $-\pi/2$ e $+\pi/2$, obtenha a série de Fourier de $f_I(x)$.

15.6 – Além de senos e cossenos

Nem todas as séries de Fourier precisam necessariamente ser formadas por sen, cos ou exponenciais complexas. Considere por exemplo os 6 primeiros polinômios de Legendre, como nos são dados por Maxima na listagem 15.2: Os polinômios de Legendre $P_n(x)$ são definidos em $[-1, 1]$; ao contrário do que acontece com as séries trigonométricas, não temos tanta liberdade de escolha para os limites do intervalo

de definição, que precisam ser simétricos e em geral são normalizados para $[-1, 1]$. Os polinômios são ortogonais:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \neq m, \tag{15.52}$$

e

$$\int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2m+1}. \tag{15.53}$$

Alguns exemplos com Maxima:

```
(%i9) integrate(p1*p3,x,-1,1);
(%o9)                                   0
(%i10) integrate(p3*p6,x,-1,1);
(%o10)                                  0
(%i11) integrate(p4*p4,x,-1,1);
                                        2
(%o11)                                  -
                                        9
```

Exemplo 15.14 Calcule os 6 primeiros coeficientes da série de Fourier-Legendre de $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$, $-1 \leq x \leq +1$.

SOLUÇÃO

Note que $\cos(\pi x/2)$ é par; é de se esperar que apenas os coeficientes c_0, c_2, c_4 e c_6 sejam não-nulos. Se

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

o cálculo dos $c_n s$ é

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) P_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

onde estaremos truncando a série em 6, por simplicidade. Novamente, os cálculos podem ser feitos muito rapidamente com Maxima. Faremos todos os 6, para confirmar empiricamente que $c_1 = c_3 = c_5 = 0$:

```
(%i1) c[n] := ((2*n+1)/2)*
      integrate(cos(%pi*x/2)*legendre_p(n,x),x,-1,1) ;
                  2 n + 1                %pi x
(%o1)        c   := ------- integrate(cos(-----) "P" (x), x, - 1, 1)
              n        2                    2        n
(%i2) c[0] ;
                                          2
(%o2)                                    ---
                                         %pi
(%i3) c[1];
(%o3)                                     0
(%i4) c[2];
                                            2
                                 5 (2 %pi  - 24)
(%o4)                            ---------------
                                            3
                                       %pi
(%i5) c[3];
(%o5)                                     0
(%i6) c[4];
                                   4           2
                            9 (2 %pi  - 360 %pi  + 3360)
(%o6)                       ----------------------------
                                            5
                                       %pi
(%i7) c[5];
(%o7)                                     0

(%i8) c[6];
```

```
                    6            4              2
                13 (2 %pi  - 1680 %pi  + 151200 %pi  - 1330560)
(%o8)           ------------------------------------------------
                                     7
                                  %pi
```

Exercícios Propostos

15.20 O conjunto dos polinômios de Legendre,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

forma uma base ortogonal para as funções reais contínuas no intervalo $[-1, 1]$. Obtenha os coeficientes de Fourier c_n de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

para $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Observação: o produto interno desta questão é

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

15.7 – A desigualdade de Bessel, e a igualdade de Parseval

Esta seção é basicamente a resolução do problema 17.25 de Greenberg (1978). Seja $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots$ uma base ortonormal de um espaço $\mathbb{V}$ de dimensão infinita. Seja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{V}$; temos que

$$\boldsymbol{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \boldsymbol{e}_n. \tag{15.54}$$

Usando a ortonormalidade, e lembrando que $\langle \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_n \rangle = \delta_{mn}$,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_n \rangle, \\ \langle \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y} \rangle &= \alpha_m. \end{aligned} \tag{15.55}$$

A equação (15.54) é denominada, genericamente, de uma *série de Fourier* — mesmo que os $\boldsymbol{e}_n s$ não sejam senos, cossenos, ou exponenciais complexas: por exemplo, na seção 15.6 os $\boldsymbol{e}_n s$ são os polinômios de Legendre; os coeficientes α_m em (15.55) são os *coeficientes de Fourier* da série. Seja agora um conjunto *finito* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ de vetores ortonormais. Desejamos uma aproximação

$$\boldsymbol{y} \approx \widehat{\boldsymbol{y}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \tag{15.56}$$

de tal forma que

$$\left\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2$$

seja mínimo. A questão é encontrar os coeficientes a_k que minimizem a diferença, ou seja: trata-se do método dos mínimos quadrados. Mas

$$0 \leq \left\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \left\langle \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{y} - \sum_{l=1}^{n} a_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle .$$

Antes de prosseguirmos, considere o resultado auxiliar

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (a_k - \alpha_k)^* (a_k - \alpha_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^* a_k - \alpha_k^* a_k - a_k^* \alpha_k + \alpha_k^* \alpha_k \right] \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^* a_k - \alpha_k^* a_k - a_k^* \alpha_k \right] &= \sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 . \end{aligned} \tag{15.57}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 &= \left\langle \boldsymbol{y} - \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{y} - \sum_{l=1}^{n} a_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \sum_{l=1}^{n} \langle \boldsymbol{y}, a_l \boldsymbol{e}_l \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle a_k \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{y} \rangle + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle a_k \boldsymbol{e}_k, a_l \boldsymbol{e}_l \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle - \sum_{l=1}^{n} a_l \underbrace{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_l \rangle}_{\alpha_l^*} - \sum_{k=1}^{n} a_k^* \underbrace{\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{y} \rangle}_{\alpha_k} + \sum_{k=1}^{n} a_k^* a_k \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^* a_k - \alpha_k^* a_k - a_k^* \alpha_k \right] \\ &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 . \end{aligned}$$

Portanto, os $a_k s$ ótimos (os que minimizam a norma da diferença entre $\boldsymbol{y}$ e sua aproximação) são os que zeram o primeiro somatório acima: $a_k = \alpha_k$, que são os próprios coeficientes de Fourier, dados por (15.55). Segue-se imediatamente que

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle . \tag{15.58}$$

(15.58) é a *desigualdade de Bessel*. Ela vale para *qualquer* n, e portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle : \tag{15.59}$$

a série do lado esquerdo *converge*; como acontece em qualquer série convergente,

$$|\alpha_k|^2 \to 0, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k \to 0.$$

Esse é o *lema de Riemman-Lebesgue*. Na verdade, em (15.59), vale a igualdade. Vale a pena reescrevê-la:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle ; \tag{15.60}$$

(15.60) é a *igualdade de Parseval*.

No caso em que a base é formada por exponenciais complexas, vamos rededuzi-la: supondo novamente a validade de (15.32),

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}, \\
f^*(x)f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* c_n \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}, \\
\int_a^b f^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* c_n \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}\,\mathrm{d}x, \\
\int_a^b f^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* c_n L\delta_{mn}, \\
\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \qquad (15.61)
\end{aligned}$$

Retorne agora a (15.39): para $n > 0$, está claro que

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \left[\cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right)\right] f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}\left[A_n - \mathrm{i}B_n\right] \Rightarrow \\
|c_n|^2 &= \frac{1}{4}\left[A_n^2 + B_n^2\right].
\end{aligned}$$

Consequentemente, em termos dos coeficientes da série trigonométrica de Fourier, a igualdade de Parseval é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\
&= c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 \\
&= \frac{1}{4}A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n^2 + B_n^2\right]. \qquad (15.62)
\end{aligned}$$

Para cada conjunto de coeficientes de Fourier calculados, a igualdade de Parseval produz a soma de uma série.

Exemplo 15.15 Do exemplo 15.7, para $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}, \\
c_n &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\right|^2, \\
\frac{1}{3} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},
\end{aligned}$$

Figura 15.1: Significado geométrico da aproximação de mínimos quadrados 15.56

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \blacksquare$$

Esse resultado foi obtido pela primeira vez, de outra maneira, por Euler em 1735: veja http://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem.

O significado geométrico da aproximação (15.56) é mostrado na figura 15.1.

O vetor $\boldsymbol{y}$ está em $\mathbb{V}$ (aqui representado pelo $\mathbb{R}^3$); a sequência de vetores $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ gera um subespaço $\mathbb{S}$ de $\mathbb{V}$ (aqui representado pelo plano indicado pelo polígono hachuriado). A aproximação $\widehat{\boldsymbol{y}}$, dada por (15.56), pertence a $\mathbb{S}$. Já a diferença

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}} \tag{15.63}$$

é *perpendicular* a $\mathbb{S}$, e a $\widehat{\boldsymbol{y}}$. De fato, em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com dimensão potencialmente infinita,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \boldsymbol{e}_k; \\ \langle \boldsymbol{d}, \widehat{\boldsymbol{y}} \rangle &= \left\langle \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \boldsymbol{e}_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k^* \alpha_l \langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l \rangle = 0 \end{aligned}$$

(pois $\langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l \rangle = \delta_{kl}$).

Também é evidente (mostre!) que, para qualquer $\widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{S}$,

$$\langle \widehat{\boldsymbol{x}} - \widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{d} \rangle = 0. \tag{15.64}$$

Em seguida, expandimos (15.64) e obtemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{d} \rangle - \langle \widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{d} \rangle &= 0; \\ \langle \widehat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{d} \rangle &= 0, \end{aligned} \tag{15.65}$$

o que também é, geometricamente, "óbvio" (veja novamente a figura 15.1.)

Figura 15.2: Aproximação do Exercício 15.21

Exercícios Propostos

15.21 Desejamos aproximar a função $f(x) = \cos(\pi x/2)$ em $x \in [-1, 1]$ usando uma base de funções *ortonormais*

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ p_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x, \\ p_2(x) &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{3x^2-1}{2}\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} p_0(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2^{3/2}}{\pi}, \\ \int_{-1}^{+1} p_2(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2-48}{\pi^3}\right], \end{aligned}$$

obtenha α_0, α_1, e α_2 tais que $\left\|f(x) - \widehat{f}(x)\right\|$ seja mínima, com $\widehat{f}(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)$. A $\widehat{f}(x)$ resultante, com os αs corretos, é mostrada na figura 15.2.

15.22 Os polinômios de Laguerre de grau n são definidos em $[0, +\infty)$ pela fórmula

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)^n x^n.$$

Você não vai precisar usar a relação de recursão nesta questão. Os polinômios de Laguerre formam uma base *ortonormal* das funções reais em $[0, +\infty)$ para o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Os 3 primeiros polinômios são $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$. Para $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$, obtenha α_0, α_1 e α_2 tais que $\left\|h(x) - \widehat{h}(x)\right\|$ seja mínima (*a norma é definida em relação ao produto interno dado acima!*), com $\widehat{h}(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$.

15.8 – Mínimos quadrados e estatística

Vamos agora considerar uma série de modelos estatísticos lineares em $\mathbb{S}$, do mais simples para o mais completo. Nós nos inspiraremos na seção 7.6 de Kreider et al. (1966).

Considere primeiramente um conjunto de n valores $(y_1, \ldots, y_n)$ amostrais. Nosso primeiro modelo (estatístico) é o mais simples do mundo, e supõe que o (verdadeiro) y é constante:

$$y = c$$

Obviamente, isso é impossível, porque os $y_i s$ variam! Continuando (apesar da aparente contradição), existirá algum vetor $\widehat{\boldsymbol{y}} = \underbrace{(c, c, \ldots, c)}_{n \text{ vezes}} \in \mathbb{S}$ que seja o mais *próximo* de $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$?

Note que conceitualmente temos $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, com $\dim \mathbb{V} = n$. As observações $(y_1, \ldots, y_n)$ constituem um vetor do $\mathbb{R}^n$.

Já o nosso vetor $\widehat{\boldsymbol{y}}$ reside em um subespaço *unidimensional* do $\mathbb{R}^n$, a saber o subespaço $\mathbb{S}$ gerado pelo vetor

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ vezes}}.$$

Sabemos que c minimiza

$$\|\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - c)^2.$$

Portanto, c é um estimador de mínimos quadrados. Agora,

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \alpha \boldsymbol{e}_1,$$

de modo que α é o coeficiente de Fourier dado por

$$\alpha = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1), (y_1, \ldots, y_n) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

O vetor $\widehat{\boldsymbol{y}}$ será

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \alpha \boldsymbol{e}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i \right] \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right] (1, \ldots, 1),$$

de forma que

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

é, simplesmente, a média amostral ■

Considere em seguida um modelo um pouco mais sofisticado. Temos n observações de uma variável "causal" x, e cremos que a variável y depende de x segundo

$$y = cx$$

Existe agora, portanto, um vetor de observações da variável independente x, dado por $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, e um vetor de observações da variável dependente y, dado por

$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Em seguida nós procuramos estimar um vetor $\widehat{\boldsymbol{y}}$ "próximo" de $\boldsymbol{y}$ de tal maneira que

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1 &= cx_1, \\ \widehat{y}_2 &= cx_2, \\ &\vdots \\ \widehat{y}_n &= cx_n. \end{aligned}$$

Nosso modelo estatístico, portanto, é da forma

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \alpha \boldsymbol{e}_1,$$

onde $\boldsymbol{e}_1$ necessariamente tem que ser

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como antes,

$$\alpha = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \right\rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}.$$

Finalmente,

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \alpha \boldsymbol{e}_1 = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \right] (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}(1, 1, \ldots, 1),$$

donde

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \blacksquare$$

Nosso próximo, e último, modelo, é o mais "sofisticado":

$$\widehat{y} = a + bx. \tag{15.66}$$

Vetorialmente, dado um vetor $\boldsymbol{x}$ de observações, escrevemos

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = a\boldsymbol{f}_1 + b\boldsymbol{f}_2,$$

onde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= (1, \ldots, 1), \\ \boldsymbol{f}_2 &= (x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Como antes, obtemos um primeiro vetor unitário

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1).$$

Note entretanto que $\boldsymbol{e}_1$ *não* é perpendicular a $\boldsymbol{f}_2$: em outras palavras, não basta aqui normalizar $\boldsymbol{f}_2$. Primeiramente, precisamos encontrar uma combinação linear de $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ que seja perpendicular a $\boldsymbol{e}_1$. Não é difícil ver que o vetor

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \left\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2 \right\rangle \boldsymbol{e}_1$$

atende a essa condição. Como antes,

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1), (x_1,\ldots,x_n) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

O vetor $\boldsymbol{g}_2$ será, portanto,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_2 &= (x_1,\ldots,x_n) - \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \right] \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1) \\
&= (x_1,\ldots,x_n) - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right] (1,\ldots,1) \\
&= (x_1 - \overline{x},\ldots,x_n - \overline{x}),
\end{aligned}$$

onde

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Em seguida, normalizamos $\boldsymbol{g}_2$, obtendo

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}(x_1 - \overline{x},\ldots,x_n - \overline{x}).$$

Para atender (15.66), devemos ter

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = a\boldsymbol{f}_1 + b\boldsymbol{f}_2 = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2, \tag{15.67}$$

onde os coeficientes de Fourier na base ortonormal $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ são

$$\begin{aligned}
\alpha &= \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{y} \rangle, \\
\beta &= \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y} \rangle.
\end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1), (y_1,\ldots,y_n) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i, \\
\beta &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}(x_1 - \overline{x},\ldots,x_n - \overline{x}), (y_1,\ldots,y_n) \right\rangle \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},
\end{aligned}$$

com (naturalmente)

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Levando em (15.67),

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} y_i \right] \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1) +$$

$$\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}\right] \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}(x_1 - \overline{x}, \ldots, x_n - \overline{x}),$$

$$\widehat{y}_i = \overline{y} + \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right](x_i - \overline{x}),$$

ou

$$\widehat{y} = a + bx$$

em geral, com

$$b = \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right],$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \blacksquare$$

16

A Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma das ferramentas mais poderosas de Matemática Aplicada. Ela é usada para decompor uma função de acordo não com o seu comportamento local ("$f(x)$"), mas com o comportamento sobre um conjunto de escalas ("$\widehat{f}(k)$"), onde k é um número de onda (uma frequência angular). À medida que nos acostumarmos com o cálculo de transformadas de Fourier, e com suas propriedades, nós poderemos começar a "entender" o par $f(x) \leftrightarrow \widehat{f}(k)$ como duas faces de uma mesma moeda, ou seja: como uma única *entidade*, que nós usualmente identificamos no domínio do espaço-tempo ($f(x)$), mas que possui uma existência igualmente "real" e válida no domínio da frequência ($\widehat{f}(k)$).

16.1 – Definição e o teorema da inversão

A transformada de Fourier será definida neste texto como

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(k) = \widehat{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x. \tag{16.1}$$

O resultado mais importante de toda a teoria, sem dúvida, é o

---

Teorema 16.1 (teorema da inversão) Se $\widehat{f}(k)$ é definida por (16.1), então

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k. \tag{16.2}$$

Existem diversas formas de provar o teorema 16.1, mas o rigor e a profundidade variam muito. A forma rigorosa da prova envolve o uso dos assim chamados *Lemas de Riemman-Lebesgue*: esse é o caminho adotado por Zemanian (1987, seção 7.2), e Dettman (1988, seção 8.1). Greenberg (1978) é tão conciso que praticamente só enuncia (16.1) e (16.2) em seu capítulo 6; o resultado, entretanto, já foi obtido formalmente no capítulo 5. Butkov (1988) apresenta a mesma demonstração formal. Finalmente, Saichev e Woyczyński (1997, seção 3.2) apresentam uma demonstração atraente, com o uso da delta de Dirac. Vamos começar pela demonstração formal de Greenberg (1978), e de Butkov (1988). Do capítulo 15, nós temos a forma complexa de séries de Fourier e o cálculo de seus coeficientes. Para uma $f(x)$ definida no intervalo simétrico $a = -l$, $b = +l$ com $L = 2l$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi n x}{l}}, \tag{16.3}$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi n x}{l}}\,\mathrm{d}x, \tag{16.4}$$

cuja reunião nos dá

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi n \xi}{l}}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi n x}{l}}. \tag{16.5}$$

Adotamos agora a definição dos números de onda

$$k_n \equiv \frac{\pi n}{l}, \tag{16.6}$$

de modo que a distância entre k_n e k_{n+1} é $\Delta k = \pi/l$; levando em (16.5),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\xi}\,\mathrm{d}\xi\right] e^{\mathrm{i}k_n x}\frac{\pi}{l} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\Delta k \Rightarrow \\ f(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,dk \end{aligned} \tag{16.7}$$

quando $l \to \infty$. Note que (16.7) nada mais é do que o teorema 16.1.

Veja agora uma abordagem parecida com a de Saichev e Woyczyński (1997) (porém simplificada mais ainda). Parta de (16.1), e escreva agora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi, \\ \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-ik\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \\ \int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-ik\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\ &= \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\left[\int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ik(x-\xi)}}{2\pi}\,\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

De (13.13), a integral entre colchetes é simplesmente $\delta(x-\xi) = \delta(\xi - x)$; então,

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \int_{\xi=\infty}^{+\infty} f(\xi)\delta(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi = f(x),$$

e temos, mais uma vez (e com considerável elegância), o teorema 16.1.

16.2 – O cálculo de algumas transformadas

Esta é uma seção de "mãos à obra", com alguns cálculos de transformadas de Fourier resolvidos.

Exemplo 16.1 Calcule $\widehat{f}(k)$ para

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

SOLUÇÃO

A fração no argumento é para nos lembrarmos de que em geral, em aplicações, é preciso levar em consideração as dimensões físicas. Assim, se x é uma distância ao longo de uma reta,

$$[\![x]\!] = [\![a]\!] = \mathsf{L}.$$

O cálculo padrão é

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\mathrm{i}kx\right]}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aqui, o "truque" padrão é "completar o quadrado". Observe como x aparece com as potências 2 e 1 acima; a idéia é encontrar um binômio de x e uma constante que resulte em um quadrado perfeito. A técnica é sistemática:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,\\ \alpha &= \frac{x}{a},\\ 2\alpha\beta &= \mathrm{i}kx,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\mathrm{i}kx}{2\alpha} = \frac{\mathrm{i}kxa}{2x} = \frac{\mathrm{i}ka}{2},\\ \beta^2 &= -\frac{k^2a^2}{4}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\mathrm{i}kx &= \left(\frac{x}{a}\right)^2+\mathrm{i}kx-\frac{k^2a^2}{4}+\frac{k^2a^2}{4}\\ &= \left(\frac{x}{a}+\frac{\mathrm{i}ka}{2}\right)^2+\frac{k^2a^2}{4}\end{aligned}$$

A transformada desejada é

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}+\frac{\mathrm{i}ka}{2}\right)^2-\frac{k^2a^2}{4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}+\frac{\mathrm{i}ka}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Essa não é uma integral elementar, e precisa ser calculada com um certo cuidado. Faça

$$z = \xi+\mathrm{i}\eta = \frac{x}{a}+\frac{\mathrm{i}ka}{2}, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}x/a,$$

e reescreva

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}a\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}\int_{-\infty+\frac{\mathrm{i}ka}{2}}^{+\infty+\frac{\mathrm{i}ka}{2}} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Essa é uma integral de *linha* no plano complexo; em primeiro lugar, note que neste exemplo a parte real de z não é x, mas sim $\xi = x/a$; a parte imaginária é η, e o caminho de integração é a reta $\eta = ka/2$.

Em seguida, note que $g(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ é uma função *analítica* em todo o plano $\xi\times\eta$, e portanto pelo teorema de Cauchy qualquer integral em um contorno fechado de $g(z)$ é nula. Em seguida, considere o contorno mostrado na figura 16.1.

Pelo teorema de Cauchy, então,

$$\int_{ABCD} g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

O trecho CD produz uma integral puramente real, e bem conhecida no $\lim L\to\infty$:

$$\lim_{L\to\infty}\int_{CD} g(z)\,dz = \lim_{L\to\infty}\int_{+L}^{-L} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{\pi}.$$

Figura 16.1: O contorno de integração de $g(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$.

A esperança aqui é que $\left|\int_{BC,DA}\right| \to 0$ quando $L \to \infty$, de tal maneira que a integral que precisamos calcular, $\int_{AB} g(z)\,\mathrm{d}z$, seja dada em função da integral conhecida $\int_{CD} g(z)\,\mathrm{d}z$. A verificação não é muito difícil:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{BC} g(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq \int_{BC} |g(z)\,\mathrm{d}z| \\
&= \int_{\eta=0}^{ka/2} \left|\mathrm{e}^{-z^2}\right| \mathrm{d}z \\
&= \int_{\eta=0}^{ka/2} \left|\mathrm{e}^{-(L+i\eta)^2}\right| \mathrm{d}\eta \\
&= \int_{\eta=0}^{ka/2} \left|\mathrm{e}^{-(L^2+i2L\eta-\eta^2)}\right| \mathrm{d}\eta \\
&= \mathrm{e}^{-L^2} \int_{\eta=0}^{ka/2} \left|\mathrm{e}^{-i2L\eta}\right| \left|\mathrm{e}^{-\eta^2}\right| \mathrm{d}\eta \\
&= \mathrm{e}^{-L^2} \int_{\eta=0}^{ka/2} \mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta \ \to 0 \text{ quando } L \to \infty.
\end{aligned}$$

Por um procedimento similar,

$$\lim_{L\to\infty} \left|\int_{DA} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}ka/2}^{+\infty+\mathrm{i}ka/2} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}ka/2}^{+\infty+\mathrm{i}ka/2} g(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = +\sqrt{\pi}.$$

A transformada de Fourier desejada pode agora ser calculada, finalmente:

$$\widehat{f}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} a\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}.$$

Uma característica geral dos pares de transformadas de Fourier é que quanto mais "espalhada" for $f(x)$, mais "concentrada" será $\widehat{f}(k)$, e vice-versa. A figura 16.2 mostra esse fato para os pares

$$\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}$$

Figura 16.2: O princípio da incerteza entre $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$, para o par $\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a \mathrm{e}^{-\frac{k^2 a^2}{4}}$ com $a = 4$: quanto mais "espalhada" for $f(x)$, mais "concentrada" será $\widehat{f}(k)$, e vice-versa.

com $a = 4$; esse resultado, denominado "princípio da incerteza", será deduzido na seção 16.7.

Exemplo 16.2 Se

$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{x^2 + a^2},$$

obtenha $\widehat{f}(k)$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} \left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right] \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cos\left(ka\frac{x}{a}\right) \, \mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right),
\end{aligned}$$

pois o integrando envolvendo $\mathrm{sen}(\cdot)$ é uma função ímpar e a integral correspondente se anula.
Fazendo $\xi = x/a$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{2a}{2\pi} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\cos(ka\xi)}{1 + \xi^2} \, \mathrm{d}\xi = \frac{a}{2} \mathrm{e}^{-|ka|} \quad \blacksquare$$

Exemplo 16.3 Se

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |k| < k_0, \\ 0, & |k| > k_0, \end{cases}$$

calcule $g(x)$.

SOLUÇÃO

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}k$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i x}\int_{-k_0}^{+k_0} e^{+ikx}\,d(ikx)\\
&= \frac{1}{2\pi i x}\left[e^{+ik_0x} - e^{-ik_0x}\right]\\
&= \frac{1}{\pi x}\operatorname{sen}(k_0x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exemplo 16.4 Calcule a transformada de Fourier de

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1;\\ x+1, & -1 \le x \le 0;\\ 1-x, & 0 < x \le 1.\end{cases}
$$

SOLUÇÃO
Note que f é par.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\cos(kx) - i\operatorname{sen}(kx)\right]\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1-\cos k}{\pi k^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

16.1 Se $\mathscr{F}[f(x)]$ indica a transformada de Fourier de $f(x)$, prove que

$$
\mathscr{F}[f(x-a)] = e^{-ika}\mathscr{F}[f(x)].
$$

16.2

a) Seja

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1,\\ 0, & |x| > 1.\end{cases}
$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) Usando o resultado de a) e escrevendo $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$
\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\,dk.
$$

16.3

a) Seja

$$
f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1,\\ 0, & |x| > 1.\end{cases}
$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) Usando o resultado do problema 16.2; de a); e escrevendo $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$
\int_0^{\infty} \frac{\cos(k)-1}{k^2}\,dk.
$$

16.4 Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{x}{|x|}, & 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

16.5 Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2},$$

obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Simplifique ao máximo sua resposta.

16.3 – Linearidade; a transformada das derivadas

A transformada de Fourier é *linear*: se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções transformáveis, então

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x + \frac{\beta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\widehat{f}(k) + \beta\widehat{g}(k). \end{aligned} \tag{16.8}$$

Suponha que $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$ possuam um comportamento muito bom no infinito, de tal maneira que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \tag{16.9}$$

$$\lim_{k\to\pm\infty} \widehat{f}(k) = 0. \tag{16.10}$$

Intuitivamente, essas condições são necessárias para a existência "clássica" das integrais (16.1) e (16.2). A integral (13.13), por outro lado, sugere que nós poderemos tomar liberdades consideráveis com transformadas de Fourier e ainda assim obter resultados corretos. Mas vamos aos poucos. Calculemos a transformada de Fourier da derivada de $f(x)$, integrando por partes:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}f(x) + (\mathrm{i}k)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right]_{-\infty}^{+\infty}; \end{aligned}$$

usando (16.9),

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\} &= \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}k\widehat{f}(k). \end{aligned} \tag{16.11}$$

E é claro que isso pode ser estendido para a n-ésima derivada:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right\} = (\mathrm{i}k)^n\widehat{f}(k). \tag{16.12}$$

Juntas, a propriedade de linearidade (16.8) e a fórmula para as derivadas (16.12) vão permitir transformar equações diferenciais em algébricas. Esse é um dos grandes poderes da transformada de Fourier.

Uma relação oposta a (16.12) é ocasionalmente útil:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}k}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}k}\,\mathrm{d}k \\ &= \left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\widehat{f}(k) - (\mathrm{i}x)\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\right]_{-\infty}^{+\infty};\end{aligned}$$

usando (16.10),

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}k}\right\} &= -(\mathrm{i}x)\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\ &= -\mathrm{i}xf(x). \qquad (16.13)\end{aligned}$$

Novamente, isso pode ser estendido para a n-ésima derivada:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^n\widehat{f}}{\mathrm{d}k^n}\right\} = (-\mathrm{i}x)^n f(x). \qquad (16.14)$$

Exemplo 16.5 Se $x(t)$ e $y(t)$ são relacionadas por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y(t) = \frac{1}{T}x(t),$$

obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em função de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO

Quando a variável independente é o *tempo* t, em lugar do espaço x, é comum se escrever a transformada de Fourier:

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

A transformada de Fourier da equação diferencial agora produz

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\omega)\widehat{y}(\omega) + \frac{1}{T}\widehat{y}(\omega) &= \frac{1}{T}\widehat{x}(\omega) \\ (\mathrm{i}\omega T + 1)\widehat{y}(\omega) &= \widehat{x}(\omega), \\ \widehat{y}(\omega) &= \frac{\widehat{x}(\omega)}{1 + \mathrm{i}\omega T}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 16.6 Utilizando a transformada de Fourier, resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \\ c(x,0) &= \frac{M}{A}\delta(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO

Nas equações acima, M representa uma massa de soluto injetada instantaneamente em $x = 0$; A possui dimensão de área, para fazer com que c possua dimensão de concentração volumétrica (ML^{-3}).

A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{i}k)^2 D\,\widehat{c}$$

Note que usamos uma derivada ordinária em relação ao tempo, pois embora $\widehat{c}$ seja função de k e t, não há derivadas de $\widehat{c}$ em relação ao número de onda k. A EDO acima é de fácil solução:

$$\widehat{c}(k,t) = \widehat{c}_0 \mathrm{e}^{-Dk^2 t}.$$

Agora,

$$\widehat{c}_0 = \frac{M}{2\pi A}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2\pi A},$$

donde

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{M}{2\pi A}\mathrm{e}^{-Dk^2 t}.$$

Agora, do exemplo 16.1, sabemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{\pi}}{a}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}},\\
\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Dt &= \frac{a^2}{4},\\
a^2 &= 4Dt,\\
a &= 2\sqrt{Dt},\\
c(x,t) &= \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 16.7 Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + c\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \qquad \phi(x,0) = H(x) - H(x-a),$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}$$

a) obtenha $\widehat{\phi}(k,t) = \mathscr{F}\{\phi(x,t)\}$;

b) escreva $\phi(x,t)$ como a anti-transformada de Fourier de $\widehat{\phi}(k,t)$; *não tente resolver a integral!*

SOLUÇÃO

a) A transformada da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}kc\widehat{\phi} &= 0\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} &= -\mathrm{i}kc\mathrm{d}t\\
\widehat{\phi}(k,t) &= \widehat{\phi}(k,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{\phi(x,0)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ak}\right].\end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier da solução é

$$\widehat{\phi}(k,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ak}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}.$$

b) A solução será

$$\phi(x,t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ak}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \blacksquare$$

Exemplo 16.8 Sabendo que

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2k^2t}\cos(bk)\,\mathrm{d}k = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}},$$

Resolva usando obrigatoriamente transformada de Fourier em x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x} &= a^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\\ c(x,0) &= \frac{M}{A}\delta(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO
A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}ku\widehat{c} &= -a^2k^2\widehat{c};\\ \frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} &= -[\mathrm{i}ku+a^2k^2]\widehat{c};\\ \widehat{c}(k,t) &= \widehat{c}(k,0)\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}.\end{aligned}$$

O valor inicial é simplesmente

$$\begin{aligned}\widehat{c}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{M}{A}\delta(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{M}{2\pi A}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}c(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{c}(k,t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{M}{2\pi A}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ut)}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2t}\cos(k(x-ut))\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{2\pi A}\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}}$$
$$= \frac{M}{A}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \blacksquare$$

Exercícios Propostos

16.6 Se $f(x)$ é uma função qualquer de x, e se sua transformada de Fourier é $\mathscr{F}\{f(x)\}$, mostre que

$$\mathscr{F}\{xf(x)\} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k},$$

usando obrigatoriamente o fato:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] = -\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

16.7 A distribuição delta de Dirac, $\delta(x)$, possui a propriedade bem conhecida

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x)\,dx = f(a).$$

a) Utilize a propriedade acima para calcular a transformada de Fourier de $\delta(x)$,

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

b) Sabendo agora que

$$H(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

e utilizando *obrigatoriamente* a propriedade

$$\mathscr{F}[f'(x)] = \mathrm{i}k\widehat{f}(k),$$

obtenha $\mathscr{F}[H(x)] = \widehat{H}(k)$. Dica: é óbvio que você tem que usar o fato de que a $\delta(x)$ é a derivada (no sentido amplo da teoria das distribuições) de $H(x)$.

16.8 Observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(k-k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x},$$

e *utilizando obrigatoriamente transformadas de Fourier*, resolva:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{z}{L} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}$$

onde $z(x)$ é uma função complexa de uma variável real.

16.9 Resolva *parcialmente* a equação da difusão-advecção

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

sujeita apenas à condição inicial de um lançamento instantâneo de massa M:

$$C(x,0) = M\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição Delta de Dirac:

a) Calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial,

$$\widehat{C}(k,t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(x,t)\exp(-\mathrm{i}kx)\,dx,$$

e obtenha uma equação diferencial ordinária de $\widehat{C}$ em t.

b) Faça a transformada de Fourier de $C(x,0)$, e obtenha $\widehat{C}(k,0)$.

16.10 Um rio com condição inicial para a concentração $c(x,0) = 0$ é atacado em $x = 0$ por um despejo contínuo de Q kg s^{-1} de dejetos suínos. O dono dos porquinhos deseja saber qual é a concentração de dejetos (em kg m^{-3}) em função da posição x ao longo do rio e do tempo t. Se $c(x,t)$ é a concentração, a equação diferencial que a modela é

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \beta c + \frac{Q}{A}\delta(x),$$

onde U, D, β são constantes, A é a área constante da seção transversal do rio, e $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac. Você é a/o engenheira/o ambiental encarregada/o de resolver o problema.

a) Dimensionalmente, $[\![U]\!] = \mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$, $[\![D]\!] = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$ e $[\![\beta]\!] = \mathsf{T}^{-1}$; o que significam U, D e β?

b) Calcule a transformada de Fourier da equação acima (em relação a x), e obtenha uma equação diferencial *ordinária* em $\widehat{c}(k,t)$. Resolva essa equação.

c) Finalmente, mostre que

$$c(x,t) = \frac{Q}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-(Dk^2+\beta+\mathrm{i}kU)t}}{Dk^2+\beta+\mathrm{i}kU}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k.$$

16.11 Utilizando obrigatoriamente transformada de Fourier, resolva:

$$b\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \phi(x,0) = m\delta(x).$$

Observação: um resultado muito útil, que você pode utilizar sem ter que provar, é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ak^2+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx)\mathrm{e}^{-ak^2}\,\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

16.12 Esta questão continua o exemplo 16.7. Prove que

$$H(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,dk$$

por meio dos seguintes passos:

a)

$$\mathscr{F}\{\delta(x)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi};$$

b)

$$\frac{1}{2\pi} = \mathscr{F}\{\delta(x)\} = \mathrm{i}k\mathscr{F}\{H(x)\} = \mathrm{i}k\widehat{H}(k).$$

Nos passos acima, $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac.

16.13 Esta questão continua o exemplo 16.7. Use o resultado do problema 16.12 para provar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} - e^{\mathrm{i}k(x-ct-a)}\right] \mathrm{d}k = H(x-ct) - H(x-ct-a);$$

e mais ainda: qual a conexão deste resultado com o exemplo 16.7?

16.14 Esta questão é dividida em duas etapas. Dado o par de transformada-antitransformada de Fourier

$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leftrightarrow\; \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{f}(k)\right\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\widehat{f}(k)\,\mathrm{d}k,$$

algumas integrais podem não existir no sentido clássico, mas apenas no sentido de distribuições.

a) Obtenha a transformada de Fourier de $g(x) = 1$. Sugestão: calcule a antitransformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(k)$.

b) Utilizando o resultado acima, e

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}\widehat{g}}{\mathrm{d}k}\right\} = -\mathrm{i}xg(x),$$

calcule a transformada de Fourier de $f(x) = x$.

16.15 Este problema é sobre a função sinal, $\mathrm{snl}(x)$.

a) Mostre que, se $f(x) \in \mathbb{R}$, $\mathscr{F}\{f(-x)\} = \widehat{f}^*(k)$.

b) Se

$$\mathrm{snl}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

mostre que $\mathrm{snl}(x) = H(x) - H(-x)$.

c) Com os resultados acima, e utilizando os resultados do problema 16.12 para $\widehat{H}(k)$, calcule $\mathscr{F}\{\mathrm{snl}(x)\}(k)$.

16.16 Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x).$$

16.4 – O teorema da convolução

A convolução entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ (no sentido da transformada de Fourier; não confundir com a operação de convolução associada à transformada de Laplace) é

$$[f * g](x) \equiv \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{16.15}$$

Teorema 16.2 (teorema da convolução).

$$\mathscr{F}\{f * g\} = 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k). \tag{16.16}$$

A transformada de Fourier da convolução é

$$\mathscr{F}\left[f * g\right](k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{16.17}$$

Faça

$$\begin{aligned} \xi &= x - y \\ \eta &= y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \xi + \eta \\ y &= \eta \end{aligned} \tag{16.18}$$

Nesses casos, sempre comece calculando o jacobiano! O jacobiano da transformação de variáveis é

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{16.19}$$

Continuando,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left[f * g\right](k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta} f(\xi)g(\eta) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| \mathrm{d}\eta\ \mathrm{d}\xi \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} g(\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\eta}\,\mathrm{d}\eta\right] \\ &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 16.9 Seja $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória X. Por definição, a *função característica* de X é a Transformada de Fourier de f_X:

$$\widehat{f_X}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kX}\right\rangle.$$

A função característica de uma função $Y = g(X)$, por conseguinte, é

$$\widehat{f_Y}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kg(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kg(X)}\right\rangle.$$

Finalmente, se $Z = g(X,Y)$, a função característica de Z é

$$\widehat{f_Z}(k) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kg(x,y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kg(X,Y)}\right\rangle.$$

a) Seja agora $Z = g(X,Y) = X + Y$, onde X e Y são duas variáveis aleatórias independentes (portanto, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$); insira esse g na expressão acima, e calcule $\widehat{f_Z}$.

b) Use o teorema da convolução,

$$\mathscr{F}\left[f_X * f_Y\right] = 2\pi\widehat{f_X}(k)\widehat{f_Y}(k),$$

para calcular agora uma expressão para $f_Z(z)$ em função de f_X e de f_Y.

SOLUÇÃO
a) Como X e Y são independentes, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$; então,

$$\begin{aligned}\widehat{f_Z}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x+y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\,\mathrm{d}y\right] \\ &= 2\pi\widehat{f_X}(k)\widehat{f_Y}(k).\end{aligned}$$

b) Olhando agora para o teorema da convolução,

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{f_Z}(k)\right] \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left[2\pi\widehat{f_X}(k)\widehat{f_Y}(k)\right] \\ &= \mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}\left[f_X(x) * f_Y(y)\right]\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-\xi)f_Y(\xi)\,\mathrm{d}\xi \;\blacksquare\end{aligned}$$

O teorema da convolução possui uma versão "inversa":

Teorema 16.3 (teorema da convolução, versão inversa):

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{f}(k) * \widehat{g}(k)\right\} = f(x)g(x). \tag{16.20}$$

Um dos aspectos mais interessantes da operação de convolução é o seu uso na definição e uso de filtros. Tecnicamente, a filtragem de uma função ϕ com um filtro G é dada pela operação

$$\widetilde{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = G(x) * \phi(x). \tag{16.21}$$

Em (16.21), nós vamos supor que

$$G(\pm\infty) = 0. \tag{16.22}$$

Um fato importantíssimo é que a operação de filtragem comuta com a derivada em relação a x:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widetilde{\phi}}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G(x) * \phi(x)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}G(x-\xi)}{\mathrm{d}x}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{\mathrm{d}G(x-\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right]\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= -G(x-\xi)\phi(\xi)\Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi)\frac{\mathrm{d}\phi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

Em virtude de (16.22),

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\phi}}{\mathrm{d}x} = G(x) * \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \widetilde{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}}. \tag{16.23}$$

É trivial mostrar que

$$\frac{\mathrm{d}^n\widetilde{\phi}}{\mathrm{d}x^n} = G(x) * \frac{\mathrm{d}^n\phi}{\mathrm{d}x^n} = \widetilde{\frac{\mathrm{d}^n\phi}{\mathrm{d}x^n}} \;\blacksquare \tag{16.24}$$

Uma aplicação particularmente poderosa de filtragem é a utilização de soluções envolvendo a delta de Dirac para gerar soluções mais gerais. Por exemplo, considere o problema

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}, \qquad \widetilde{\phi}(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Do exemplo 16.6, sabemos que

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

é solução de

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\ \phi(x,0) &= \delta(x). \end{aligned}$$

Aplicamos agora a convolução com $f(x)$ a todas as linhas acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} * f(x) &= D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} * f(x), \\ \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial x^2}, \\ \widetilde{\phi}(x,0) = \phi(x,0) * f(x) &= \delta(x) * f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Mas esse é exatamente o problema que desejamos resolver. Logo,

$$\widetilde{\phi}(x,t) = \phi(x,t) * f(x) = \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \ \blacksquare$$

Exercícios Propostos

16.17 Sabendo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[H(k+1) - H(k-1)\right], \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi(k^2+1)}, \end{aligned}$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, calcule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{x-\xi} \mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.$$

16.18 Baseando-se na prova do teorema 16.2, prove o teorema 16.3.

16.19 Dada a equação íntegro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} &= -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi)c(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ c(x,0) &= M\delta(x), \end{aligned}$$

onde u, β e M são constantes positivas e $c = c(x,t)$, obtenha uma expressão para

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} c(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

sabendo que

$$\mathscr{F}\{f * g\}(k) = 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k), \qquad \mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\} = \mathrm{i}k\widehat{f}(k).$$

Nas expressões acima, $\mathscr{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(k)$ denota a transformada de Fourier. Sugestão: a) obtenha a transformada de Fourier da equação, e da condição inicial; b) resolva a equação diferencial resultante em t para $\widehat{c}(k,t)$.

16.20 Se $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, $-\infty < x < +\infty$, calcule $[f * g](x)$ (no sentido de convolução de Fourier). Sugestão:

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|} \operatorname{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{I_2}.$$

Note que ξ não muda de sinal em I_1 (onde $\xi \le 0$) nem em I_2 (onde $\xi > 0$): portanto, remova o módulo e trabalhe os sinais. Continue, reunindo novamente a expressão resultante em uma única integral, e integre, lembrando que "minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b, seno b cosseno a". Na parte final, você pode usar

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}.$$

16.21 Sabendo que

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} \leftrightarrow \frac{a}{2}\mathrm{e}^{-|ka|}$$

formam um par de transformada-antitransformada de Fourier, encontre

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\}.$$

Deixe sua resposta na forma de uma integral de convolução.

16.5 – O teorema de Parseval

O teorema de Parseval é a contrapartida da igualdade de Parseval para séries de Fourier, obtida na seção 15.7.

Teorema 16.4 (teorema de Parseval). Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções reais da variável real x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k)\,\mathrm{d}k.$$

A prova parte de

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x, \qquad \widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k)\,\mathrm{d}k &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercícios propostos

16.22 Seja $f(x)$ uma função *complexa* da variável real x; então valem as seguintes relações com a transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$:

$$f(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k, \tag{16.25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}k\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k, \tag{16.26}$$

$$f^*(x) = \int_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}^*(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx}\,\mathrm{d}l.) \tag{16.27}$$

Sabendo que

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x,$$

e utilizando (16.26) e (16.27) para substituir $\partial f/\partial x$ e $f^*(x)$ na integral a seguir, obtenha $G(k)$ em

$$-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f^*(x)\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int_{k=-\infty}^{+\infty} G(k)\,\mathrm{d}k,$$

onde $G(k)$ deve ser expresso em função de k e de $\widehat{f}(k)$.

16.6 – A fórmula da inversa da transformada de Laplace

Considere a identidade

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{16.28}$$

Suponha agora

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}f(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Suponha também que $f(t)$ seja "de ordem exponencial": $f(t) < K\mathrm{e}^{ct}$, para $\gamma > c$; então,

$$\mathrm{e}^{-\gamma t}f(t) < K\mathrm{e}^{(c-\gamma)t} = K\mathrm{e}^{-(\gamma-c)t} \to 0$$

quando $t \to \infty$.

Agora, de (16.28),

$$\mathrm{e}^{-\gamma t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{t=0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\underbrace{-(\gamma+\mathrm{i}\omega)t}_{=s}}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\underbrace{+(\gamma+\mathrm{i}\omega)t}_{=s}}\,\mathrm{d}\omega.$$

Fazendo $s = \gamma + \mathrm{i}\omega$ e notando que ω está variando para γ constante, $\mathrm{d}s = \mathrm{i}\mathrm{d}\omega \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s=\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{st}\left[\int_{t=0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s,$$

e isso define a fórmula de inversão:

$$\overline{f}(s) \equiv \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t, \tag{16.29}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s=\gamma-\mathrm{i}\infty}^{s=\gamma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{+st}\overline{f}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{16.30}$$

Todas as singularidades de $\overline{f}(s)$ devem estar à esquerda da reta $z = \gamma$.

16.7 – O princípio da incerteza para transformadas de Fourier

Dada uma função complexa

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto y = f(\xi), \end{aligned}$$

o quadrado de sua *norma* (sob o produto interno canônico — veja (15.9)) é

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi. \tag{16.31}$$

Integremos por partes:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f^*(\xi) f(\xi)}_{u}\ \underbrace{\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}v} \\ &= \underbrace{\xi |f(\xi)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[f^*(\xi) f(\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \xi \left[f^*(\xi)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}\xi} f(\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi \\ &= -2\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi f^*(\xi)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\}, \\ &= 2\left|\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi f^*(\xi)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\}\right|. \end{aligned}$$

onde nós supusemos que $f(\xi)$ decai rápido o suficiente no infinito:

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \xi |f(\xi)|^2 = 0.$$

Agora note que, para uma função complexa $g(\xi)$,

$$\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left\{g(\xi)\right\}\,\mathrm{d}\xi \le \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)|\,\mathrm{d}\xi.$$

Fazendo-se $g(\xi) = \xi f^*(\xi)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}$, portanto,

$$\|f\|^2 \le 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi||f(\xi)|\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|\,\mathrm{d}\xi \le 2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2\,\mathrm{d}\xi\right]^{1/2}. \tag{16.32}$$

A segunda desigualdade acima é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. O segundo colchete do lado direito pode ser reescrito com o teorema de Parseval (16.4):

$$\begin{aligned} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\right|^2\,\mathrm{d}\xi &= 2\pi\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}}\right|^2\,\mathrm{d}\kappa \\ &= 2\pi\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{i}\kappa\widehat{f}(\kappa)\right|^2\,\mathrm{d}\kappa \\ &= 2\pi\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty}\kappa^2\left|\widehat{f}(\kappa)\right|^2\,\mathrm{d}\kappa. \end{aligned}$$

Retornando a (16.32),

$$\|f\|^2 \leq 2\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right]^{1/2} \left[\int_{\kappa-\infty}^{+\infty} \kappa^2 \left|\widehat{f}(\kappa)\right|^2 \,\mathrm{d}\kappa\right]^{1/2}. \tag{16.33}$$

Para qualquer par de valores reais x_0, k_0, a relação (16.33) pode ser generalizada: fazendo-se

$$\xi = x - x_0, \tag{16.34}$$

$$\kappa = k - k_0, \tag{16.35}$$

$$\psi(x) = f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\xi} = f(x - x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(x-x_0)}, \tag{16.36}$$

segue-se que

$$|\psi(x)| = |f(x - x_0)|, \tag{16.37}$$

$$\|\psi\|^2 = \|f\|^2. \tag{16.38}$$

A transformada de Fourier de $\psi(x)$ é

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(x-x_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(x-x_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\widehat{f}(\kappa),
\end{aligned} \tag{16.39}$$

donde

$$\left|\widehat{\psi}(k)\right| = \left|\widehat{f}(\kappa)\right|. \tag{16.40}$$

Levando (16.34)–(16.40) em (16.33), encontramos o princípio da incerteza em sua forma mais geral:

$$\|\psi\|^2 \leq 2\sqrt{2\pi}\left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 \,|\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{k=-\infty}^{+\infty} (k - k_0)^2 \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \,\mathrm{d}k\right]^{1/2} \blacksquare \tag{16.41}$$

A desigualdade (16.41) expressa o fato, já comentado na seção 16.2, de que quanto mais "concentrada" for $\psi(x)$, mais "espalhada" será sua transformada $\widehat{\psi}(k)$, e vice-versa: veja novamente a figura 16.2.

Devemos notar que o nome, *princípio da incerteza*, é herdado do princípio da incerteza de Heisenberg em Mecânica Quântica, e não é bom. Talvez fosse melhor chamar (16.33) e (16.41) de teoremas de dispersão para transformadas de Fourier, uma vez que eles são deduzidos a partir da definição de transformadas de Fourier, enquanto que um princípio é mais comumente uma relação ou lei da Física que não necessita de dedução. De fato, a conexão de (16.33) e (16.41) com o princípio da incerteza de Heisenberg necessita de elementos adicionais descobertos experimentalmente, e será apresentada no exemplo 16.11.

Exemplo 16.10 O valor mínimo para o produto das dispersões de $\psi(x)$ e $\widehat{\psi}(k)$ é atingido para um par de gaussianas. De fato, se

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\\ \widehat{\psi}(k) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}a\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}},\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\frac{\pi}{2}},\\ \int_{x=-\infty}^{+\infty}|x|^2\,|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{\pi}a^3}{2^{5/2}},\\ \int_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^2\left|\widehat{\psi}(k)\right|^2\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\pi}a}.\end{aligned}$$

O lado direito de (16.41) torna-se

$$2\sqrt{2\pi}\left[\frac{\sqrt{\pi}a^3}{2^{5/2}}\frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\pi}a}\right]^{1/2} = 2\sqrt{2\pi}\frac{a}{4} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

de forma que (16.41) torna-se uma igualdade ■

Exemplo 16.11 O princípio da incerteza de Heisenberg
Neste exemplo, nós apresentamos uma exposição simples, e talvez até ingênua, do princípio de incerteza de Heisenberg. O objetivo *não* é uma introdução formal à Mecânica Quântica. Na figura 16.3, considere o movimento harmônico (MHS) simples de uma partícula no plano ξ, η com velocidade angular constante ω. A partícula descreve um círculo de raio R. A posição da partícula $x(t)$ ao longo do círculo é

$$\begin{aligned}x(t) &= R\theta = R\omega t;\\ \frac{x}{R} &\equiv k_1 x = \omega t,\end{aligned}$$

onde $k_1 = 1/R$ é o (único) número de onda. Num contexto clássico, se m é a massa da partícula, sua velocidade e quantidade de movimento são

$$\begin{aligned}v &= \omega R,\\ p &= mv = m\omega R.\end{aligned}$$

Neste ponto, precisamos introduzir conceitos não-clássicos, isto é, conceitos de Mecânica Quântica. Para isso, vamos seguir a abordagem particularmente simples e clara do capítulo II ("The old quantum theory") de Pauling e Wilson (1985). Os principais marcos do início da Mecânica Quântica são os trabalhos de Planck (1901) (emissão de radiação por um corpo negro), Einstein (1905) (o efeito fotoelétrico) e os trabalhos independentes de Wilson (1915) e Sommerfeld (1916). Esses últimos postulam que "órbitas clássicas" (como o MHS que acabamos de descrever) só podem existir para casos discretos em que

$$\oint p\,\mathrm{d}x = nh, \tag{16.42}$$

onde n é um inteiro, e $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2\,kg\,s^{-1}}$ é a constante de Planck. Em (16.42) a integral deve ser calculada sobre uma "órbita" fechada, como indica o símbolo de integral.

Figura 16.3: Movimento harmônico simples de uma partícula, "quantizado": a ação $p \times 2\pi R$ só pode assumir múltiplos inteiros da constante de Planck h.

Para o MHS, a velocidade escalar (no sentido clássico) e portanto a quantidade de movimento escalar são constantes, de forma que, para $n = 1$, (16.42) produz

$$\begin{aligned} p_1 \times 2\pi R &= h, \\ p_1 &= \frac{1}{R}\frac{h}{2\pi} = k_1\hbar, \end{aligned} \tag{16.43}$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida. Embora obtida aqui para um caso muito simples e particular, (16.43) tem validade geral em Mecânica Quântica, e nos informa que a quantidade de movimento de uma partícula é proporcional ao seu número de onda. O reconhecimento da validade geral de (16.43) deve-se a de Broglie (1925), ou seja: é muito posterior aos trabalhos de Wilson e Sommerfeld.

A estranheza da Mecânica Quântica é que, *antes de realizarmos uma medição*, não podemos saber onde exatamente está a nossa partícula realizando um MHS (ou o equivalente quântico disso), mas somente a probabilidade de ela se encontrar em torno de x; agora a partícula possui uma função de onda de sua posição, dada pelo número complexo

$$\psi_x(x) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2\pi R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{ik_1 x}, \tag{16.44}$$

— note que ψ_x "gira" em torno do círculo com velocidade angular ω — e a função densidade de probabilidade da posição da partícula é

$$f_X(x) = |\psi_x(x)|^2 = \frac{|e^{ik_1 x}|^2}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R}, \tag{16.45}$$

ou seja: a partícula pode estar em qualquer ponto ao longo do círculo com igual densidade de probabilidade. Nós lançamos mão do subscrito x em ψ_x porque precisaremos diferenciar entre coeficientes de Fourier (e a transformada de Fourier) para o número de onda k e para a quantidade de movimento p, conforme veremos em seguida.

É fácil reconhecer que (16.44) é o caso particular de uma série de Fourier com um único termo $\widehat{\psi}_{k1}$ é dado por (veja (15.35))

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{k1} &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi R} \psi_x(x) e^{\frac{-2\pi i x}{2\pi R}}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \psi_x(x) e^{-ik_1 x}\, dx \end{aligned} \tag{16.46}$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{ik_1 x} e^{-ik_1 x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}. \tag{16.47}$$

Consequentemente, vale também a igualdade de Parseval (15.61), que neste caso muito simples reduz-se a

$$\int_0^{2\pi R} |\psi_x(x)|^2\, dx = 2\pi R \left|\widehat{\psi}_{k1}\right|^2,$$
$$1 = 2\pi R \left|\widehat{\psi}_{k1}\right|^2.$$

O interessante aqui é a interpretação física de (16.44) e (16.46): de (16.43), sabemos que k_1 é proporcional à quantidade de movimento p_1; a quantidade $2\pi R\,|\psi_{k1}|^2$ agora é a probabilidade (digamos, $\left|\widehat{\psi}_{p1}\right|^2$) de que a quantidade de movimento p seja igual a $k_1/\hbar$, probabilidade esta que é igual a 1, já que $p = p_1$ é constante (no caso muito simples do MHS) para qualquer posição $x(t)$.

Nós vamos generalizar esses resultados em duas etapas. Inicialmente, considere um movimento periódico qualquer, ou seja: a função de onda $\psi_x(x)$ ainda é periódica, porém sem nenhuma outra restrição (exceto que seja quadrado-integrável). Em lugar de (16.44), agora temos uma série de Fourier

$$\psi_x(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}_{kn} e^{ik_n x}, \tag{16.48}$$

onde a quantidade de movimento associada a cada harmônico é (compare com (16.42)–(16.43)):

$$p_n = k_n\hbar = nk_1\hbar. \tag{16.49}$$

A desigualdade de Parseval é

$$\int_0^{2\pi R} |\psi_x(x)|^2\, dx = 2\pi R \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}_{kn}\right|^2,$$

e a quantidade $2\pi R\left|\widehat{\psi}_{kn}\right|^2$ é a probabilidade de que a quantidade de movimento seja igual a p_n. Isso é o mesmo que dizer que

$$\widehat{\psi}_{pn} = \sqrt{2\pi R}\,\widehat{\psi}_{kn} \tag{16.50}$$

é a *função de onda* da quantidade de movimento.

Em seguida, suspenda a exigência de periodicidade para $\psi_x(x)$: isso obviamente é equivalente a mudar a sua representação em série para uma transformada de Fourier. Nós especificamos que $|\psi_x(x)|^2$ é a densidade de probabilidade $f_X(x)$ de encontrar uma partícula na posição x; o quadrado da norma de ψ_x é a integral da densidade de probabilidade:

$$\|\psi_x\|^2 = \int_{x=\infty}^{+\infty} |\psi_x(x)|^2\, dx = 1.$$

Dada $\psi_x(x)$, a densidade de probabilidade (a menos de uma constante) de que a partícula possua quantidade de movimento $p = k\hbar$ é obtida a partir da transformada de Fourier de $\psi_x(x)$:

$$\widehat{\psi}_k(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \psi_x(x) e^{-ikx}\, dx. \tag{16.51}$$

Esse $\widehat{\psi}_k(k)$, segundo nossa definição de transformada de Fourier, ainda não é a função de onda da quantidade de movimento, porque precisamos normalizá-la, da mesma forma que fizemos em (16.50) multiplicando $\widehat{\psi}_{kn}$ por $\sqrt{2\pi R}$. Em primeiro lugar, generalizando (16.43) e (16.49), valem agora

$$p = k\hbar, \tag{16.52}$$
$$dp = \hbar dk. \tag{16.53}$$

Imporemos que $\left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2$ seja a densidade de probabilidade da quantidade de movimento $f_P(p)$, com integral igual a 1; com o teorema de Parseval 16.4,

$$1 = \int_{x=-\infty}^{+\infty} |\psi_x(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{\psi}_k(k)\right|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{p=1}^{\infty} \left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 \, \mathrm{d}p \tag{16.54}$$

de forma que a função de onda para a quantidade de movimento é tal que

$$\left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\widehat{\psi}_k(k)\right|^2. \tag{16.55}$$

A especificação do "estado quântico" de uma partícula agora está completa: sua função de onda de posição é $\psi_x(x)$ e sua função de onda de quantidade de movimento é $\widehat{\psi}_p(p)$. Uma pode ser obtida da outra a partir de pares de transformada–transformada inversa de Fourier, e o número de onda k está relacionado à quantidade de movimento p por (16.52).
Resta obter o princípio da incerteza de Heisenberg. A posição e a quantidade de movimento médias são

$$\mu_X = \int_{x=-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\psi_x(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{16.56}$$

$$\mu_P = \int_{p=-\infty}^{+\infty} p f_P(p) \, \mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{+\infty} p \left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 \, \mathrm{d}p, \tag{16.57}$$

e as variâncias respectivas são

$$\sigma_X^2 = \int_{x=-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \, |\psi_x(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \tag{16.58}$$

$$\sigma_P^2 = \int_{p=-\infty}^{+\infty} (p-\mu_P)^2 f_P(p) \, \mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{+\infty} (p-\mu_P)^2 \left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 \, \mathrm{d}p. \tag{16.59}$$

Com esses elementos em mãos, aplicamos (16.41) com $x_0 = \mu_X$, e $\hbar k_0 = \mu_P$; inicialmente, note (com a ajuda de (16.52) e (16.54)) que

$$2\pi \int_{k=-\infty}^{+\infty} (k-k_0)^2 \left|\widehat{\psi}_k(k)\right|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\hbar^2} (p-\mu_P)^2 \left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 \, \mathrm{d}p; \tag{16.60}$$

então (16.41) fica

$$\begin{aligned} \|\psi_x\|^2 = 1 &\leq 2 \left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 \, |\psi_x(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[2\pi \int_{k=-\infty}^{+\infty} (k-k_0)^2 \left|\widehat{\psi}_k(k)\right|^2 \, \mathrm{d}k\right]^{1/2} \\ &= \frac{2}{\hbar} \left[\int_{x=-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \, |\psi_x(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right]^{1/2} \left[\int_{p=-\infty}^{+\infty} (p-\mu_P)^2 \left|\widehat{\psi}_p(p)\right|^2 \, \mathrm{d}p\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sigma_X \sigma_P \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{16.61}$$

que é o princípio da incerteza de Heisenberg (1927) em sua forma moderna. A publicação do princípio da incerteza é um pouco posterior ao artigo de de Broglie, o que talvez indique um progressivo amadurecimento das ideias em Mecânica Quântica; segundo (16.61), não é possível conhecer ao mesmo tempo a posição e a quantidade de movimento de uma partícula. Ao determinarmos mais acuradamente x, a incerteza (σ_P) sobre p aumenta, e vice-versa.

17

Funções de Green e a teoria de Sturm-Liouville

A teoria de Sturm-Liouville permite identificar uma ampla classe de operadores diferenciais denominados "auto-adjuntos". O conceito de operador auto-adjunto estende a idéia de simetria para espaços vetoriais complexos. Esses operadores podem então ser diagonalizados e, consequentemente, resolvidos com relativa facilidade. As bases de autofunções que diagonalizam os operadores aparecem também de forma natural no processo. A principal aplicação talvez seja a solução de equações diferenciais parciais pelo método de separação de variáveis, que será vista no capítulo 18, mas a teoria e suas aplicações são úteis em muitos outros contextos, incluindo métodos numéricos (por exemplo, veja Kumar e Sharan (2010)).

17.1 – Operadores auto-adjuntos

Seja $\boldsymbol{L}$ um operador linear em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &: \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \\ &\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Definição 17.1 Se $\boldsymbol{L}$ é um operador linear, $\boldsymbol{L}^{\#}$ é seu operador *adjunto* quando

$$\left\langle \boldsymbol{L}^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}. \tag{17.1}$$

O operador adjunto possui as propriedades:

$$\left(\boldsymbol{L}^{\#}\right)^{\#} = \boldsymbol{L}, \tag{17.2}$$

$$(\alpha \boldsymbol{L})^{\#} = \alpha^{*} \boldsymbol{L}^{\#}, \tag{17.3}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\#} = \boldsymbol{A}^{\#} + \boldsymbol{B}^{\#}, \tag{17.4}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\#} = \boldsymbol{B}^{\#} \cdot \boldsymbol{A}^{\#}. \tag{17.5}$$

Cada uma delas pode ser provada com facilidade utilizando as propriedades do produto interno vistas na seção 15.1:

$$\left\langle (\boldsymbol{L}^{\#})^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L}^{\#} \cdot \boldsymbol{y} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle L^{\#} \cdot \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \right\rangle^{*} \\
&= \langle \boldsymbol{y}, L \cdot \boldsymbol{x} \rangle^{*} \\
&= \langle L \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle (\alpha L)^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \alpha L \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \langle \boldsymbol{x}, L \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \left\langle L^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle (\alpha^{*} L^{\#}) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle (A + B)^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, (A + B) \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, A \cdot \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, B \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \left\langle A^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle + \left\langle B^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle A^{\#} \cdot \boldsymbol{x} + B^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle (A^{\#} + B^{\#}) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \,;
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\left\langle (A \cdot B)^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, (A \cdot B) \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}, A \cdot (B \cdot \boldsymbol{y}) \rangle \\
&= \left\langle A^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, B \cdot \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle B^{\#} \cdot (A^{\#} \cdot \boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle (B^{\#} \cdot A^{\#}) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

A definição de um operador *auto-adjunto* segue-se então naturalmente:

Definição 17.2 L é um operador *auto-adjunto* quando $L^{\#} = L$.

17.2 – A matriz adjunta

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\top},\ x_i \in \mathbb{C}\}$; seja $[A]$ uma matriz que opera linearmente em $\mathbb{V}$:

$$
\begin{aligned}
A : \mathbb{V} &\to \mathbb{V}, \\
[\boldsymbol{x}] &\mapsto [\boldsymbol{y}] = [A][\boldsymbol{x}].
\end{aligned}
$$

(Observe que o *operador* linear é A; ele é definido pelo produto da *matriz* quadrada $[A]$ pela matriz-coluna $[\boldsymbol{x}]$.)

O produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$ é

$$
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv [\boldsymbol{x}^{*}]^{\top} [\boldsymbol{y}].
$$

Por definição, a *matriz adjunta* de $[A]$ será

$$
\begin{aligned}
[\left([A^{\#}][x]\right)^{*}]^{\top}[y] &= [x^{*}]^{\top}[A][y],\\
[[A^{\#^{*}}][x^{*}]]^{\top}[y] &= [x^{*}]^{\top}[A][y],\\
[x^{*}]^{\top}[A^{\#^{*}}]^{\top}[y] &= [x^{*}]^{\top}[A][y],\\
[A^{\#^{*}}]^{\top} &= [A],\\
[A^{\#^{*}}] &= [A]^{\top},\\
[A^{\#}] &= ([A]^{\top})^{*},\\
[A^{\#}] &= [A^{*}]^{\top}.
\end{aligned}
$$

Para obter a *matriz-adjunta*, portanto,

a) calcule o conjugado de cada elemento;

b) transponha.

Exemplo 17.1 Calcule a matriz adjunta de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO

$$
\begin{aligned}
[A^{*}] &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{bmatrix};\\
[A^{*}]^{\top} &= \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 3 & 2+\mathrm{i} \end{bmatrix} = [A^{\#}] \blacksquare
\end{aligned}
$$

17.3 – Autovalores e autovetores de operadores auto-adjuntos

Na seção 5.9, nós introduzimos formalmente autovalores e autovetores, e o teorema 5.12 afirma que os autovalores de uma transformação simétrica, cuja matriz possui elementos reais, são reais. Esta é uma boa ocasião para você rever esses conteúdos. Vamos generalizar esse resultado, agora, para operadores (e, consequentemente, transformações) auto-adjuntos.

Considere um problema de autovalor-autovetor de um operador $\boldsymbol{L}$ auto-adjunto:

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{17.6}$$

e sejam λ e $\boldsymbol{x}$ um autovalor e o autovetor associado. Da definição 17.1 e do fato de que $\boldsymbol{L}^{\#} = \boldsymbol{L}$ segue-se que, para $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$,

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{x} \rangle,\\
\langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x} \rangle,\\
\lambda^{*} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \implies\\
\lambda^{*} &= \lambda,
\end{aligned} \tag{17.7}
$$

pois $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ sempre (já que o autovetor $\boldsymbol{x}$ nunca é nulo). Portanto, *os autovalores de operadores auto-adjuntos são sempre reais*.

Considere agora um par de autovalores distintos, λ^i e λ^{ii}, de um operador $\boldsymbol{L}$ auto-adjunto, e seus autovetores respectivos, $\boldsymbol{x}^i$ e $\boldsymbol{x}^{ii}$. Provemos que $\boldsymbol{x}^i$ e $\boldsymbol{x}^{ii}$ são ortogonais. Novamente, do fato de que $\boldsymbol{L}$ é auto-adjunto, segue-se que

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle,\\
\left\langle \lambda^i\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x}^i, \lambda^{ii}\boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle,\\
[\lambda^i]^* \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= \lambda^{ii} \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle,\\
\lambda^i \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= \lambda^{ii} \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle,\\
(\lambda^i - \lambda^{ii}) \left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= 0 \;\Rightarrow\\
\left\langle \boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x}^{ii}\right\rangle &= 0 \;\blacksquare
\end{aligned} \tag{17.8}$$

17.4 – Operadores diferenciais adjuntos

Seja

$$L \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T},$$

operando sobre funções reais no intervalo $0 \le t \le 1$, satisfazendo a condição inicial $x(0) = 0$, com produto interno

$$\langle x(t), y(t)\rangle \equiv \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como é tradicional quando os elementos do espaço vetorial são funções, note que dispensamos o uso de negrito para $x(t)$, $y(t)$, L, etc.. Além disso, como $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais, não há necessidade do conjugado complexo. Note também que as funções $x(t)$ e $y(t)$ precisam ser diferenciáveis. Vamos agora encontrar o operador adjunto $L^{\#}$. Por definição,

$$\left\langle L^{\#}x(t), y(t)\right\rangle = \langle x(t), Ly(t)\rangle = \int_0^1 x(t)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y\right]\mathrm{d}t.$$

Aqui, o mecanismo formal para a troca de lugar do operador — ou seja, para que $x(t)$ passe a sofrer diferenciação — é necessariamente a integração por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(t)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y\right]\mathrm{d}t &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{T}\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t\\
&= xy\Big|_0^1 - \int_0^1 y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T}\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Olhe primeiro para os valores no contorno. Já impusemos $y(0) = 0$, o que resolve o problema das condições de contorno em $t = 0$. Em $t = 1$, y é não-especificado, e devemos impor $x(1) = 0$. Com isso,

$$xy\Big|_0^1 = 0;$$

prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(t)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y\right]\mathrm{d}t &= -\int_0^1 y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T}\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left[-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}x\right] y\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nós concluímos portanto que

$$L^{\#} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}, \qquad x(1) = 0;$$

Portanto, L não é um operador auto-adjunto.

17.5 – Funções de Green

Considere de novo o problema

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}\phi = \frac{1}{T}f(t), \qquad \phi(0) = a. \tag{17.9}$$

Aqui, o operador diferencial é $L \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t + 1/T$, $\phi(0) = 0$, e seu operador adjunto é $L^{\#} \equiv -\mathrm{d}/\mathrm{d}t + 1/T$, $\phi(\text{fim}) = 0$ (se houver um fim). Vejamos como ocorre a solução do problema usando o *método das funções de Green*: multiplique a equação diferencial por uma função não-especificada e integre de 0 a $+\infty$:

$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{T}\phi\right]\mathrm{d}\tau = \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Note que a variável independente passou de "t" para "τ". Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} G\,\mathrm{d}\phi + \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G\phi\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} Gf\,\mathrm{d}\tau,\\
G\phi\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \phi\mathrm{d}G + \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G\phi\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} Gf\,\mathrm{d}\tau,\\
G(t,\tau)\phi(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} \underbrace{\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{T}G\right]}_{L^{\#}}\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Neste ponto, nós reconhecemos os seguintes fatos:

- é conveniente preservar $\phi(0) = a$, que é a condição inicial do problema;
- é inconveniente manter $\phi(\infty)$; portanto, devemos escolher $G(t,\infty) = 0$;
- a integral do lado direito é o truque — *i.e.*, o caminho — para a solução. Se $L^{\#} = \delta(\tau - t)$, então

$$\int_0^{\infty} L^{\#}\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} \delta(\tau - t)\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi(t).$$

Suponha portanto que seja possível achar um G tal que

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{T}G = \delta(\tau - t); \tag{17.10}$$

nesse caso, teremos encontrado

$$\begin{aligned}
-G(t,0)\phi(0) + \phi(t) &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\
\phi(t) &= G(t,0)\phi(0) + \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned} \tag{17.11}$$

que é a solução do problema.

Para resolver (17.10), tente $G = uv$, e substitua:

$$\begin{aligned}
-\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\right] + \frac{1}{T}uv &= \delta(\tau - t),\\
u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{T}v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t).
\end{aligned}$$

Force

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{T}v = 0 \;\Rightarrow \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{1}{T}\,\mathrm{d}\tau, \\
\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\xi=0}^{\tau} \frac{\mathrm{d}\xi}{T} \\
\ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} &= \frac{\tau}{T}, \\
v &= v(t,0)\mathrm{e}^{\tau/T}.
\end{aligned}
$$

Substitua:

$$
\begin{aligned}
-v(t,0)\mathrm{e}^{\tau/T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\tau/T}\delta(\tau - t) \\
\int_0^{\tau} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{v(t,0)}\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\xi/T}\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi \\
u(t,\tau) - u(t,0) &= -\frac{1}{v(t,0)}H(\tau - t)\mathrm{e}^{-t/T}, \\
u(t,\tau) &= u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)}H(\tau - t)\mathrm{e}^{-t/T}.
\end{aligned}
$$

Com isso nós agora temos a função de Green

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau) \\
&= u(t,0)v(t,0)\mathrm{e}^{\tau/T} - H(\tau - t)\mathrm{e}^{\tau/T}\mathrm{e}^{-t/T} \\
&= \left[G(t,0) - H(\tau - t)\mathrm{e}^{-t/T}\right]\mathrm{e}^{\tau/T} \qquad (17.12)
\end{aligned}
$$

Isto nos permite o passo final, que é o cálculo de $G(t,0)$. Da condição

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau) = 0,$$

e observando também que

$$\lim_{\tau\to\infty} H(\tau - t) = 1,$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[G(t,0) - \mathrm{e}^{-t/T}\right]\mathrm{e}^{\tau/T} = 0 \;\Leftrightarrow\; G(t,0) = \mathrm{e}^{-t/T}.$$

Por fim,

$$G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{T}}; \qquad (17.13)$$

A solução do problema será agora

$$\phi(t) = \phi(0)\mathrm{e}^{-t/T} + \frac{1}{T}\int_0^{\infty} [1 - H(\tau - t)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{T}} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (17.14)$$

$$= \phi(0)\mathrm{e}^{-t/T} + \frac{1}{T}\int_0^{t} \mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{T}} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \phi(0)\mathrm{e}^{-t/T} + \frac{1}{T}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} * f(t)\right]. \qquad (17.15)$$

Comentários importantes:

Sensibilidade às condições iniciais — A importância da condição inicial $\phi(0)$ na solução (17.15) é desprezível para $t \gg T$. Fisicamente, T pode ser interpretado como um tempo característico do sistema modelado pela equação (17.9). Ele também pode ser interpretado como uma "memória" do sistema físico: após muitos Ts, o sistema se "esquece" de sua condição inicial $\phi(0)$.

Princípio da causalidade — O efeito de $[1 - H(\tau - t)]$ em (17.14) é limitar a integral que ia de 0 a ∞ à integral final, em (17.15), que vai de 0 a t. Isso torna impossível que $f(\tau)$ para $\tau > t$ influencie a solução $\phi(t)$, o que é "óbvio" fisicamente: o futuro não pode influenciar o presente. Esse fato extremamente razoável às vezes é encontrado na literatura sob o nome ligeiramente pomposo de "Princípio da Causalidade".

Será possível encontrar a função de Green $G(t,\tau)$ utilizando transformada de Laplace? Sim! Começamos avaliando a transformada de Laplace da delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\delta(\tau - t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-s\tau}\delta(\tau - t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{-st}; \\
\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{\tau/T}\} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\tau/T}\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(1/T-s)\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1/T-s)}\mathrm{e}^{(1/T-s)\tau}(1/T-s)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{-1}{(1/T-s)}.
\end{aligned}$$

A transformada de Laplace de (17.10) é então:

$$\begin{aligned}
-\Big(s\overline{G}(s) - G(t,0)\Big) + \frac{1}{T}\overline{G}(s) &= \mathrm{e}^{-st}, \\
\overline{G}\left[-s + \frac{1}{T}\right] &= -G(t,0) + \mathrm{e}^{-st} \\
\overline{G}(s) &= \frac{1}{(1/T-s)}\left[-G(t,0) + \mathrm{e}^{-st}\right] \\
\overline{G}(s) &= \frac{G(t,0)}{s-1/T} - \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s-1/T} \\
G(t,\tau) &= G(t,0)\mathrm{e}^{\tau/T} - \int_{\xi=0}^{t} \mathrm{e}^{(\tau-\xi)/T}\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= G(t,0)\mathrm{e}^{\tau/T} - H(\tau - t)\mathrm{e}^{(\tau-t)/T} \\
&= \left[G(t,0) - H(\tau - t)\mathrm{e}^{-t/T}\right]\mathrm{e}^{\tau/T}.
\end{aligned}$$

Observe como este último resultado é o *mesmo* que havíamos obtido em (17.12); a partir daquele ponto, todos os passos se repetem. Portanto, nossa função de Green é (obviamente) a mesma que (17.13), e a solução do problema é também a mesma que (17.15).

Exemplo 17.2 Obtenha a solução de

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f(t), \quad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}\tau} = \dot{x}_0, \quad x(0) = x_0$$

pelo método das funções de Green.

SOLUÇÃO
Multiplicamos por $G(t,\tau)$ e integramos:

$$\int_0^{\infty} G(t,\tau)\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega^2 x\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Nesse ponto, nós integramos por partes duas vezes, e encontramos *duas* condições para G e sua derivada quando $\tau \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\bigg|_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\infty \omega^2 G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau) = 0 \;&\Rightarrow \\
-G(t,0)\dot{x}_0 - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\infty \omega^2 G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
-G(t,0)\dot{x}_0 - \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}x(\tau)\bigg|_{\tau=0}^{\infty} - \int_0^\infty x(\tau)\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\tau^2}\,\mathrm{d}\tau\right] & \\
+\int_0^\infty \omega^2 G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau} = 0 \;&\Rightarrow \\
-G(t,0)\dot{x}_0 + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}x_0 + & \\
\int_0^\infty x(\tau)\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega^2 G(t,\tau)\right]}_{=\delta(\tau-t)}\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

donde

$$
x(t) = G(t,0)\dot{x}_0 - \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}x_0 + \int_0^\infty G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.
$$

O cálculo da função de Green $G(t,\tau)$ (utilizando transformada de Laplace) se segue:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\tau^2} + \omega^2 G &= \delta(\tau - t), \\
s^2\overline{G} - sG(t,0) - \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau} + \omega^2\overline{G} &= \mathrm{e}^{-st} \\
\overline{G}(s^2+\omega^2) &= sG(t,0) + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau} + \mathrm{e}^{-st} \\
\overline{G}(s) &= G(t,0)\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

A inversa é

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= G(t,0)\cos(\omega\tau) + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau) + \frac{1}{\omega}\int_{\xi=0}^{\tau}\operatorname{sen}(\omega(\tau-\xi))\delta(\xi-t)\,\mathrm{d}\xi \\
&= G(t,0)\cos(\omega\tau) + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau) + \frac{H(\tau-t)}{\omega}\operatorname{sen}(\omega(\tau-t)) \\
&= G(t,0)\cos(\omega\tau) + \frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega\tau) \\
&+ \frac{H(\tau-t)}{\omega}\left[\operatorname{sen}(\omega\tau)\cos(\omega t) - \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega\tau)\right] \\
&= \left[G(t,0) - H(\tau-t)\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}\right]\cos(\omega\tau) \\
&+ \left[\frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau} + H(\tau-t)\cos(\omega t)\right]\frac{\operatorname{sen}(\omega\tau)}{\omega}
\end{aligned}
$$

Quando $\tau \to \infty$, as funções $\operatorname{sen}(\omega\tau)$ e $\cos(\omega\tau)$ não tendem para nenhum limite definido, enquanto que $H(\tau-t) \to 1$; devemos então fazer os termos dentro dos colchetes identicamente nulos (nesse limite), o que nos dá

$$
\begin{aligned}
G(t,0) &= \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}, \\
\frac{\mathrm{d}G(t,0)}{\mathrm{d}\tau} &= -\cos(\omega t).
\end{aligned}
$$

Substituímos agora:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau) &= [1-H(\tau-t)]\,\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}\cos(\omega\tau) - [1-H(\tau-t)]\cos(\omega t)\frac{\operatorname{sen}(\omega\tau)}{\omega}\\
&= [1-H(\tau-t)]\,(\operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega\tau) - \operatorname{sen}(\omega\tau)\cos(\omega t))\\
&= [1-H(\tau-t)]\,\frac{\operatorname{sen}(\omega(t-\tau))}{\omega} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 17.3 Obtenha a solução de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{T_0}{(T+t)^2}x = \frac{1}{T}f(t)$$

Pelo método das funções de Green.

SOLUÇÃO
Inicialmente, note que o enunciado do problema é feito para explicitar a consistência dimensional. Se

$$\begin{aligned}
[\![x]\!] &= [\![f]\!],\\
[\![t]\!] &= [\![T_0]\!] = [\![T]\!],
\end{aligned}$$

então a equação diferencial é dimensionalmente consistente. Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{T_0}{(T+\tau)^2}x &= \frac{1}{T}f(\tau),\\
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + x\frac{T_0}{(T+\tau)^2}G(t,\tau) &= \frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau),\\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{T_0}{(T+\tau)^2}G(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Integrando o primeiro termo do lado esquerdo por partes:

$$xG\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{\infty} x\frac{T_0}{(T+\tau)^2}G\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty}\frac{1}{T}Gf\,\mathrm{d}\tau.$$

Para eliminar a dependência de $x(\infty)$, fazemos $G(t,\infty) = 0$; então,

$$-x(0)G(t,0) + \int_0^{\infty} x\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{T_0}{(T+\tau)^2}G\right]\mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty}\frac{1}{T}Gf\,\mathrm{d}\tau.$$

Como sempre, o método das funções de Green requer agora que o termo entre colchetes seja igual a $\delta(\tau-t)$ pois, nesse caso,

$$x(t) = x(0)G(t,0) + \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{1}{T}G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Precisamos portanto resolver a equação diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{T_0}{(T+\tau)^2}G = \delta(\tau-t).$$

Essa é uma equação de ordem 1 apenas, porém com coeficientes não-constantes, de modo que não é uma boa idéia tentar uma solução por transformada de Laplace. Tentemos, portanto,

$$G(t,\tau) = u(t,\tau)v(t,\tau);$$

inserindo essa tentativa na equação diferencial, obtém-se

$$u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{T_0}{(T+\tau)^2}v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \delta(\tau-t),$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{T_0}{(T+\tau)^2} v = 0 \;\Rightarrow \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{T_0}{(T+\tau)^2} v, \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{T_0\,\mathrm{d}\tau}{(T+\tau)^2}, \\
\int_{v=v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\theta=0}^{\tau} \frac{T_0\,\mathrm{d}v}{(T+\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta, \\
\ln v(t,\tau) - \ln v(t,0) &= \frac{T_0}{T} - \frac{T_0}{T+\tau} = \frac{T_0\tau}{T(T+\tau)}, \\
\ln \frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} &= \frac{T_0\tau}{T(T+\tau)}, \\
v(t,\tau) &= v(t,0)\exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)}\right].
\end{aligned}
$$

Com isso, a equação diferencial em u é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} &= -\frac{1}{v(t,0)}\exp\left[-\frac{T_0\theta}{T(T+\theta)}\right]\delta(\theta - t), \quad \int_0^{\tau} \ldots \;\Rightarrow \\
u(t,\tau) &= u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)} H(\tau - t)\exp\left[-\frac{T_0 t}{T(T+t)}\right].
\end{aligned}
$$

Obtemos agora a função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau) \\
&= \underbrace{u(t,0)v(t,0)}_{G(t,0)}\exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)}\right] - H(\tau - t)\exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)} - \frac{T_0 t}{T(T+t)}\right] \\
&= \exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)}\right]\left[G(t,0) - H(\tau - t)\exp\left(-\frac{T_0 t}{T(T+t)}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Note que quando $\tau \to \infty$, $H(\tau - t) = 1$, e o segundo colchete deve se anular; portanto,

$$
G(t,0) = \exp\left[-\frac{T_0 t}{T(T+t)}\right],
$$

e

$$
G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)} - \frac{T_0 t}{T(T+t)}\right].
$$

A solução fica, finalmente,

$$
x(t) = x(0)\exp\left[-\frac{T_0 t}{T(T+t)}\right] + \int_{\tau=0}^{t} \exp\left[\frac{T_0\tau}{T(T+\tau)} - \frac{T_0 t}{T(T+t)}\right] f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\blacksquare
$$

Exercícios Propostos

17.1 Ache a função de Green do problema

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = \operatorname{sen}(x), \quad y(0) = 3.
$$

17.2 Considere a equação diferencial

$$
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = f(x), \qquad y(0) = 0.
$$

a) Se x tem dimensão de comprimento ($[\![x]\!] = L$), e y tem dimensão de massa ($[\![y]\!] = M$), qual é a dimensão de $f(x)$?

b) Obtenha a função de Green deste problema (Sugestão: re-escreva a equação diferencial de tal forma que o coeficiente de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ seja 1).

17.3 Dada a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{T^2}y = \frac{af(t)}{T},$$

onde as dimensões físicas das variáveis são $[\![y]\!] = [\![f]\!]$, e $[\![T]\!] = [\![t]\!]$,

a) Quem é $[\![a]\!]$?

b) Obtenha a função de Green $G(t, \tau)$ da equação diferencial.

17.4 Calcule a função de Green $G(\xi, x)$ da equação diferencial

$$(1 + x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6xy = 2x.$$

SUGESTÃO: Divida a equação por $(1+x^2)$, e troque o nome de x para ξ antes de multiplicar por G e integrar por partes.

17.5 Obtenha a função de Green da equação diferencial

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = f(x),$$
$$y(0) = y_0.$$

17.6 Obtenha a função de Green de

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{x}{L}\right)y = f(x), \quad y(1) = y_1,$$

onde L é uma constante, e $f(x)$ é o forçante do sistema. Atenção: esse problema tem condição inicial em $x = 1$: todas as integrais devem ser entre 1 e ∞.

17.7 Obtenha a função de Green de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (\operatorname{tg} x)y = f(x), \qquad y(0) = y_0.$$

17.8

A figura acima mostra a modelagem de um sistema como um conjunto de duas "caixas" idênticas em seqüência. A seqüência de operações da figura corresponde ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{T} = \frac{x}{T},\ y(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{z}{T} = \frac{y}{T},\ z(0) = 0.$$

Sabendo que a resposta de cada uma das caixas é produzida pelas convoluções

$$y(\xi) = \int_{\tau=0}^{\xi} \mathrm{e}^{-\frac{\xi-\tau}{T}} \frac{x(\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau, \qquad z(t) = \int_{\xi=0}^{t} \mathrm{e}^{-\frac{t-\xi}{T}} \frac{y(\xi)}{T}\,\mathrm{d}\xi,$$

substitua a expressão para $y(\xi)$ da primeira integral na segunda, obtenha uma integral dupla sobre a região hachuriada do plano ξ, τ mostrada na figura abaixo, troque a ordem de

integração entre ξ e τ com o auxílio da figura, e prove o resultado

$$z(t) = \int_{\tau=0}^{t} G(t,\tau)\frac{x(\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau,$$
$$G(t,\tau) = \frac{(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T},$$

de forma que $G(t,\tau)$ pode ser interpretado como a função de Green do sistema formado pelas duas caixas.

17.9 E. Âmbien & Tal é um Engenheiro Ambiental. Ele foi chamado para estudar um caso de um lançamento acidental de uma substância tóxica em um rio. A concentração desta mesma substância foi medida em uma seção do rio alguns quilômetros a jusante. O intervalo de discretização do problema é de uma hora. O despejo da substância tóxica durou 4 horas.

A tabela que registra o lançamento da substância no rio ao longo do tempo é a seguinte:

hora	1	2	3	4	5	6	7
lançamento (ton.)	1	1	1	1	0	0	0

A nuvem tóxica demorou 7 horas para passar pela seção de jusante.

A tabela que registra a passagem da nuvem tóxica na seção de jusante ao longo do tempo é a seguinte:

hora	1	2	3	4	5	6	7
concentração (mg/l)	0.50	0.75	0.90	1.00	0.50	0.25	0.10

Âmbien precisa desenvolver rapidamente um modelo para prever o efeito de futuros lançamentos acidentais.

Âmbien decidiu que uma boa maneira de fazer isto é encontrar uma função de resposta unitária (ou seja: a função de Green) do "sistema" rio entre o ponto de lançamento e a seção de interesse.

Para encontrar a função de Green, Âmbien montou uma tabela como se segue:

lançamento (ton.)	1	1	1	1	0	0	0
hora 1:	G_1	G_2	G_3	G_4	0	0	0
hora 2:	0	G_1	G_2	G_3	G_4	0	0
hora 3:	0	0	G_1	G_2	G_3	G_4	0
hora 4:	0	0	0	G_1	G_2	G_3	G_4
concentração (mg/l)	0.50	0.75	0.90	1.00	0.50	0.25	0.10

Prossiga com o raciocínio (brilhante) de Âmbien, e obtenha a função de Green discreta G_1, G_2, G_3, G_4 onde: G_1 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 1; G_2 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 2; G_3 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 3, e G_4 é a resposta do sistema a um estímulo unitário durante a hora 4.

Observação: as unidades deste problema (toneladas, e mg/l), são apenas para dar um mínimo de realismo ao enunciado, e não têm maior significado na solução do problema.

17.6 – A teoria de flambagem de Euler

Vamos começar com um exemplo motivador: a Teoria de Flambagem de Euler. Trata-se de resolver o problema de uma carga atuando sobre um pilar vertical apoiado em roletes em ambas as extremidades, como mostrado na figura 17.1. A equação diferencial é

$$EIy'' + Py = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(L) = 0.$$

Figura 17.1: Pilar sobre roletes, carregado verticalmente

Nas equações acima, E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia geométrico da seção transversal em relação a um eixo horizontal através de seu centróide, y é a deflecção do pilar e L é o seu comprimento.

Começamos resolvendo normalmente a EDO:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{P}{EI}y &= 0, \\ k^2 &\equiv \frac{P}{EI}, \\ y &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx). \end{aligned}$$

As condições de contorno exigem que

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \;&\Rightarrow & A &= 0, \\ y(L) = 0 \;&\Rightarrow & B\,\mathrm{sen}(kL) &= 0, \\ kL = n\pi, & & k &= \frac{n\pi}{L}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

A menor carga que produz flambagem no pilar ocorrerá para $n = 1$, e é a carga crítica:

$$P_{\text{crít.}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \blacksquare$$

17.7 – A equação de Sturm-Liouville

Considere a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y + \lambda w(x)y(x) = 0 \tag{17.16}$$

no intervalo $[a, b]$, juntamente com as condições de contorno

$$\alpha y(a) + \beta\frac{\mathrm{d}y(a)}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{17.17}$$

$$\gamma y(b) + \delta \frac{\mathrm{d}y(b)}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{17.18}$$

com $p(x) > 0$ e $w(x) > 0$ em $[a, b]$. Comece observando que este na verdade é um problema de autovalor-autovetor:

$$Ly = \lambda y,$$

com

$$L \equiv -\frac{1}{w(x)} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) + q(x) \right]; \tag{17.19}$$

L é denominado um *operador de Sturm-Liouville*. Essa é uma forma elegante de ver as coisas. Defina agora o produto interno

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x) g(x) w(x) \, \mathrm{d}x; \tag{17.20}$$

note que nossas funções são *complexas* em uma variável real: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Temos então o

---

Teorema 17.1 (teorema de Sturm-Liouville). O problema

$$L\phi = \lambda \phi$$

com L definido em (17.19) possui uma sequência de autovalores λ_n e autofunções ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, com as propriedades

1. $\lambda_n \in \mathbb{R}$; existe um único λ_n para cada ϕ_n;
2. $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;
3. $m \neq n \Rightarrow \langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$, com o produto interno definido em (17.20).

Dada qualquer função $y(x)$, os $\phi_n s$ proporcionam uma série de Fourier, com

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \qquad a_n = \frac{\langle y, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle};$$

a série converge pontualmente exceto nos pontos de descontinuidade de $y(x)$, onde a convergência é para $(y(x_+) + y(x_-))/2$.

Na verdade, o operador de Sturm-Liouville é auto-adjunto. Esse é o conteúdo da *identidade de Lagrange*:

Teorema 17.2 (Identidade de Lagrange): para $u, v \in \mathbb{V}$, se L é o operador de Sturm-Liouville,

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle . \tag{17.21}$$

A prova se segue:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_a^b \left\{ -\frac{1}{w} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right) + qu \right] \right\}^* v(x) w(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right) + qu \right\}^* v(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

(pois $w^* = w$); nesse ponto, precisamos de $p, q, w \in \mathbb{R}$ para continuar:

$$-\int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right)v + qu^*v\right]\mathrm{d}x = -\left[\int_a^b v\mathrm{d}\left(p\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right) + \int_a^b qu^*v\,\mathrm{d}x\right].$$

O grosso do trabalho está na primeira integral à direita do sinal de igual, que deve ser calculada por partes (duas vezes; o operador de Sturm-Liouville é de segunda ordem):

$$\begin{aligned}\int_a^b v\,\mathrm{d}\left(p\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right) &= vp\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b - \int_a^b p\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\ &= vp\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b - \left[pu^*\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\bigg|_a^b - \int_a^b u^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\right] \\ &= p(x)\left[v\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x} - u^*\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]_a^b + \int_a^b u^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nesse ponto a grande questão é provar que os termos de contorno são nulos, utilizando as condições de contorno (17.17)–(17.18) prescritas para a teoria. Vejamos:

$$\begin{aligned}&\beta\left[v(a)\frac{\mathrm{d}u^*(a)}{\mathrm{d}x} - u^*(a)\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &\quad= \alpha\left[v(a)u^*(a) - u^*(a)v(a)\right] + \beta\left[v(a)\frac{\mathrm{d}u^*(a)}{\mathrm{d}x} - u^*(a)\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &\quad= v(a)\left[\alpha u^*(a) + \beta\frac{\mathrm{d}u^*(a)}{\mathrm{d}x}\right] - u^*(a)\left[\alpha v(a) + \beta\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\right].\end{aligned}$$

Observe como nesse ponto é imprescindível que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; nesse caso, prosseguimos

$$\begin{aligned}&\beta\left[v(a)\frac{\mathrm{d}u^*(a)}{\mathrm{d}x} - u^*(a)\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\right] = \\ &\qquad v(a)\left[\alpha u(a) + \beta\frac{\mathrm{d}u(a)}{\mathrm{d}x}\right]^* - u^*(a)\left[\alpha v(a) + \beta\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}x}\right] = 0,\end{aligned}$$

pois ambos os colchetes são nulos em virtude de (17.17). A prova para o extremo $x = b$ é análoga (faça-a!). Agora, com a anulação dos termos de contorno,

$$\begin{aligned}\langle Lu, v\rangle &= -\int_a^b \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + qu\right\}^* v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b u^*(x)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + qv\right\}\mathrm{d}x \\ &= \langle u, Lv\rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Portanto, o operador de Sturm-Liouville, (17.19), é auto-adjunto. Esse fato permite agora provar partes do teorema 17.1 com facilidade. Primeiramente, os autovalores são reais. De fato, se

$$L\phi = \lambda\phi,$$

$$\begin{aligned}\langle \phi, L\phi\rangle &= \langle \phi, \lambda\phi\rangle = \lambda\langle \phi, \phi\rangle; \\ \langle L\phi, \phi\rangle &= \langle \lambda\phi, \phi\rangle = \lambda^*\langle \phi, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Lembre-se de que $\langle \phi, \phi \rangle > 0$, pois $\phi \neq 0$ (já que ϕ é uma auto-função); mas

$$\begin{aligned} \langle \phi, L\phi \rangle &= \langle L\phi, \phi \rangle \;\Rightarrow \\ \lambda \langle \phi, \phi \rangle &= \lambda^* \langle \phi, \phi \rangle \;\Rightarrow \\ \lambda &= \lambda^* \;\Rightarrow\; \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{17.22}$$

Finalmente, duas autofunções de autovalores diferentes são ortogonais. Sejam

$$\begin{aligned} L\phi_m &= \lambda_{(m)}\phi_m, \\ L\phi_n &= \lambda_{(n)}\phi_n, \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, L\phi_n \rangle &= \left\langle \phi_m, \lambda_{(n)}\phi_n \right\rangle = \lambda_{(n)} \langle \phi_m, \phi_n \rangle ; \\ \langle L\phi_m, \phi_n \rangle &= \left\langle \lambda_{(m)}\phi_m, \phi_n \right\rangle = \lambda^*_{(m)} \langle \phi_m, \phi_n \rangle . \end{aligned}$$

Devido à identidade de Lagrange, as duas linhas acima são iguais; além disso, lembrando que os dois autovalores são reais, temos

$$\begin{aligned} \left[\lambda_{(n)} - \lambda^*_{(m)}\right] \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= 0, \\ \left[\lambda_{(n)} - \lambda_{(m)}\right] \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= 0, \;\Rightarrow \\ \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= 0, \end{aligned}$$

e portanto as autofunções são ortogonais.

Exemplo 17.4 Resolva o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}x} = 0, \; \frac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

SOLUÇÃO

A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx), \\ y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]. \end{aligned}$$

Em $x = 0$, $\mathrm{sen}(kx) = 0$, $\cos(kx) = 1 \Rightarrow B = 0$. Segue-se que

$$\begin{aligned} -kA\,\mathrm{sen}(kh) &= 0, \\ kh &= n\pi, \\ k_n^2 &= \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \; n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

As autofunções do problema são

$$y_n = \cos\left(\frac{n\pi x}{h}\right) \;\blacksquare$$

Exemplo 17.5 Obtenha todos os autovalores e autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(0) &= y(1), \\ y'(0) &= y'(1). \end{aligned}$$

Você pode usar o seguinte fato: $2k(1 - \cosh(k)) < 0, \qquad \forall k > 0.$

SOLUÇÃO
Discutimos os sinais.
Se $\lambda < 0$, faça $\lambda = -k^2$ para $k > 0$;

$$\begin{aligned} r^2 - k^2 &= 0, \\ r &= \pm k, \\ y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx), \\ y'(x) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cos(kx)\right]. \end{aligned}$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$\begin{aligned} y(0) = y(1) \qquad &\Rightarrow \qquad A = A\cosh(k) + B\,\mathrm{senh}(k), \\ y'(0) = y'(1) \qquad &\Rightarrow \qquad kB = k[A\,\mathrm{senh}(k) + B\cosh(k)]. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \cosh(k) - 1 & \mathrm{senh}(k) \\ k\,\mathrm{senh}(k) & k(\cosh(k) - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e o determinante da matriz do sistema é

$$2k(1 - \cosh(k)) < 0 \qquad \forall k > 0.$$

Portanto, a única solução possível é $A = B = 0$, e $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.

Para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} y'' &= 0, \\ y(x) &= Ax + B, \\ y'(x) &= A. \end{aligned}$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$\begin{aligned} y(0) = y(1) \qquad &\Rightarrow \qquad B = A + B, \\ y'(0) = y'(1) \qquad &\Rightarrow \qquad A = A, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 &= A, \\ A &= A. \end{aligned}$$

Portanto $A = 0$, e B é qualquer valor. $\lambda = 0$ é autovalor, e uma autofunção associada é $y_0 = 1$.

Para $\lambda > 0$, faça $\lambda = k^2$, para $k > 0$:

$$\begin{aligned} r^2 + k^2 &= 0, \\ r^2 &= -k^2, \\ r &= \pm k\mathrm{i}, \\ y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx), \end{aligned}$$

$$y'(x) = k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right].$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$\begin{aligned} y(0) = y(1) \qquad &\Rightarrow \qquad A = A\cos(k) + B\,\mathrm{sen}(k), \\ y'(0) = y'(1) \qquad &\Rightarrow \qquad kB = k[-A\,\mathrm{sen}(k) + B\cos(k)]. \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \cos(k) - 1 & \mathrm{sen}(k) \\ -k\,\mathrm{sen}(k) & k(\cos(k) - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e o determinante da matriz do sistema é

$$2k(1 - \cos(k)) = 0,$$

que nós forçamos a ser nulo para que haja soluções $[A, B]^\top \neq [0, 0]^\top$. Mas $k > 0$, donde

$$\begin{aligned} \cos(k) &= 1, \\ k &= 2n\pi, \qquad n > 0. \end{aligned}$$

Os autovalores não-nulos portanto são

$$\lambda_n = 4n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $k = 2n\pi$ no sistema de equações, descobrimos que A e B podem ser quaisquer! Portanto, para cada $n > 0$, existem 2 autofunções associadas,

$$y_{n1}(x) = \cos(2n\pi x), \qquad y_{n2}(x) = \mathrm{sen}(2n\pi x) \blacksquare$$

Exemplo 17.6 Para $\epsilon \ll 1$, e expandindo em série de Taylor sempre que necessário para produzir soluções analíticas, resolva o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}y(\epsilon h)}{\mathrm{d}x} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}y(h)}{\mathrm{d}x} &= 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

Como antes,

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx), \\ y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]. \end{aligned}$$

Em $x = \epsilon h$,

$$y'(\epsilon h) = k\left[-A\,\mathrm{sen}(\epsilon kh) + B\cos(\epsilon kh)\right].$$

A expansão mais curta possível em série de Taylor da expressão acima é

$$\begin{aligned} y'(\epsilon h) &\approx k\left[-A\epsilon kh + B\right] = 0, \\ \epsilon Akh &= B. \end{aligned}$$

Em $x = h$,

$$y'(h) = k\left[-A\,\mathrm{sen}(kh) + B\cos(kh)\right] = 0,$$

$$\begin{aligned} -A\,\mathrm{sen}(kh) + \epsilon Akh\cos(kh) &= 0, \\ \mathrm{sen}(kh) &= \epsilon kh\cos(kh), \\ \mathrm{tg}(kh) &= \epsilon kh. \end{aligned} \tag{17.23}$$

A equação (17.23) não possui solução analitica. A figura 17.2 mostra (graficamente) a solução dessa equação para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ com $\epsilon = 0{,}1$: as soluções k_n (os autovalores) são simplesmente as abscissas das diversas interseções de $\mathrm{tg}(kh)$ com ϵkh. Note que para $n = 0$, $k_0^2 = 0$ é autovalor, e que $y_0 = 1$ é uma autofunção, da mesma forma que no exemplo 17.4. Note também que até $n = 5$ (pelo menos), essas abscissas ainda estão razoavelmente próximas de $n\pi$. Faz sentido, portanto, expandir $\mathrm{tg}(x)$ em série de Taylor na vizinhança de cada um desses valores:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}(kh) &\approx kh - n\pi + \frac{1}{3}(kh - n\pi)^3 - \ldots \Rightarrow \\ \epsilon kh &= kh - n\pi + \frac{1}{3}(kh - n\pi)^3 \end{aligned}$$

Esta última é uma equação cúbica, que tem solução analítica. Resolvendo (com Maxima) para $kh - n\pi$, a raiz real é

$$kh - n\pi = \left[\frac{\sqrt{9(\epsilon kh)^2 + 4}}{2} + \frac{3\epsilon kh}{2}\right]^{1/3} - \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{9(\epsilon kh)^2+4}}{2} + \frac{3\epsilon kh}{2}\right]^{1/3}}.$$

Essa equação ainda é implícita em k, mas talvez consigamos alguma coisa substituindo kh por $n\pi$ do lado direito:

$$k_n h \approx n\pi + \left[\frac{\sqrt{9(\epsilon n\pi)^2 + 4}}{2} + \frac{3\epsilon n\pi}{2}\right]^{1/3} - \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{9(\epsilon n\pi)^2+4}}{2} + \frac{3\epsilon n\pi}{2}\right]^{1/3}}. \tag{17.24}$$

Os valores de $k_n h$ obtidos pela aproximação (17.24) são mostrados pelas linhas verticais tracejadas na figura 17.2. Os resultados são visualmente muito bons até $n = 4$, e superestimam visivelmente (mas por pouco) $k_5 h$. Finalmente, as autofunções do problema são

$$y_n(x) = \cos(k_n x) + \epsilon k_n h\,\mathrm{sen}(k_n x) \blacksquare$$

Exemplo 17.7 Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(L) = 0.$$

SOLUÇÃO
Se $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})L} + c_2 c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda > 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = 0$:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

As condições de contorno levam a

$$c_1 = 0,$$

Figura 17.2: Gráfico da solução de $\mathrm{tg}(kh) = \epsilon kh$.

$$c_2 L \mathrm{e}^{-2L} = 0,$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda = 0$ não é autovalor.
Se $\lambda < 0$:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(3\sqrt{-\lambda}x)\right).$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ \mathrm{e}^{-2L} c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}L) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{-\lambda}L &= n\pi, \\ \lambda_n &= -\frac{\pi^2 n^2}{9L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

As autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = \mathrm{e}^{-2x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \blacksquare$$

Exercícios propostos

17.10 Considere o problema geral de Sturm-Liouville,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y(x) + \lambda w(x)y(x) = 0.$$

e o caso particular

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y &= 0, \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

a) Mostre que as condições de contorno do caso particular garantem a condição de ortognonalidade, $p(x)\left[y_n \frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}x} - y_m \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right]_a^b = 0$.

b) Mostre que a solução geral é da forma

$$y(x) = \begin{cases} e^x \left[A \operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}x) + B \cosh(\sqrt{1-\lambda}x) \right], & \lambda \neq 1, \\ e^x (C + Dx), & \lambda = 1. \end{cases}$$

c) $\lambda = 1$ não é um autovalor; por quê? (Lembre-se: não valem autovetores nulos em Álgebra Linear).

d) Para $\lambda \neq 1$, mostre que $B = 0$, e que $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,\pi) = 0$.

e) Agora use $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,x) = i \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda - 1}\,x)$, e mostre que os autovalores são $\lambda_n = 1 + n^2$.

17.11 As raízes da equação característica de uma EDO de coeficientes constantes, homogênea, de ordem 2, são

$$r_1 = -1 + 2\sqrt{\lambda},$$
$$r_2 = -1 - 2\sqrt{\lambda}.$$

Escreva a EDO na forma de uma equação diferencial de Sturm-Liouville, onde λ é o autovalor. Observação: por uma questão de consistência com a Teoria de Sturm-Liouville, a função-peso $w(x)$ que multiplica λy na Equação de Sturm-Liouville deve ser positiva.

17.12 Um problema de Sturm-Liouville é constituído da equação diferencial ordinária

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0,$$

e de condições de contorno homogêneas do tipo

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0,$$
$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0.$$

Se

$$y'' + \lambda y = 0 \ (0 < x < L), \qquad y(0) = 0, \ y(L) = 0,$$

identifique $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$, α, β, γ e δ. Obtenha os autovalores λ_n e as autofunções $y_n(x)$ do problema. *Note que, para fazer isso, é preciso discutir os sinais de λ.*

17.13 Mostre que o operador diferencial da equação de Legendre,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \ \ -1 < x < 1,$$

é auto-adjunto. Suponha que $y(-1)$ e $y(+1)$ são *valores finitos*, isto é:

$$\lim_{x \to \pm 1} y(x) \neq \pm\infty.$$

17.14 Dado o problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

a) [10] Discuta os sinais de λ.

b) [10] Obtenha a equação transcendental (neste caso, uma equação que não pode ser resolvida analiticamente) para λ_n.

c) [5] Com o auxílio da figura acima, obtenha sua melhor estimativa numérica para $\lambda_5, \lambda_6, \ldots, \lambda_{10}$ (em outras palavras, para n "grande", $\lambda_n \sim$?): você pode, e *deve*, deixar os valores de π indicados.

17.15 Dado o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= 0, \\ y'(0) &= 0, \\ y(1) + y'(1) &= 0, \end{aligned}$$

a) Encontre a equação (que não pode ser resolvida algebricamente) cujas (infinitas) soluções dão os autovalores λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Desenhe uma figura mostrando estas soluções como interseções de 2 funções de λ.

c) Encontre as autofunções $y_n(x)$.

18

Equações diferenciais parciais

O objetivo deste capítulo é o de proporcionar uma visão *ampla* do tema, discutindo diferentes abordagens à solução de equações diferenciais parciais. É claro, entretanto, que o cavalo de batalha continua a ser o método de separação de variáveis. Mas não é por ele que nós vamos começar.

18.1 – Introdução ao método das características

Considere a equação diferencial parcial de ordem 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{18.1}$$

$$u(x,0) = g(x) \tag{18.2}$$

com c = constante. Suponha que $t = T(s)$, $x = X(s)$, e aplique a fórmula da derivada total; com $u = U(s)$, temos:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}. \tag{18.3}$$

Comparando (18.1) com (18.3):

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 1, \tag{18.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = c, \tag{18.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{18.6}$$

com

$$U(s=0) = u(X(0), T(0)) = g(X(0)). \tag{18.7}$$

A integração de (18.4)– (18.6) produz

$$T(s) = s + T(0); \tag{18.8}$$

$$X(s) = cs + X(0); \tag{18.9}$$

$$U(s) = \text{cte} = U(0) = g(X(0)). \tag{18.10}$$

Na figura 18.1, note que é razoável fazer $T(0) = 0$, ou seja: impor que as origens de t e de s coincidam. Mas agora a máquina do cálculo diferencial e integral entra em ação, e nós nos tornamos apenas mecânicos!

$$u(x,t) = U(s)$$

Figura 18.1: O método das características para a propagação de uma onda com celeridade constante c.

$$
\begin{aligned}
&= g(X(0)) \\
&= g(X(s) - cs) \\
&= g(x - ct). \qquad (18.11)
\end{aligned}
$$

A solução é uma *equação de onda*: a forma da condição original, $g(x)$, simplesmente se translada ao longo do tempo: veja a figura 18.1.

Exemplo 18.1 Resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = xt, \qquad u(x,0) = g(x)$$

com o método das características.

SOLUÇÃO
Faça $u = U(s)$, $x = X(s)$ e $t = T(s)$ e escreva a derivada total:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};$$

Comparando,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s), \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1, \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= T(s).
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema acoplado,

$$
\begin{aligned}
T(s) &= s = t; \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= s, \\
X(s) &= \frac{1}{2}s^2 + X(0), \\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \left[\frac{1}{2}s^2 + X(0)\right]s, \\
&= \frac{1}{2}s^3 + X(0)s;
\end{aligned}
$$

$$U(s) = \frac{1}{8}s^4 + \frac{X(0)}{2}s^2 + U(0).$$

Mas:

$$U(0) = U(X(0), 0) = g(X(0));$$
$$U(s) = \frac{1}{8}s^4 + \frac{X(0)}{2}s^2 + g(X(0)).$$

Basta agora escrever:

$$X(0) = X(s) - \frac{1}{2}s^2,$$
$$U(s) = \frac{1}{8}s^4 + \frac{(X(s) - (1/2)s^2)}{2}s^2 + g\left(X(s) - (1/2)s^2\right);$$
$$u(x,t) = t^4/8 + (xt^2/2) - (t^4/4) + g(x - t^2/2) \blacksquare$$

Exemplo 18.2 Resolva

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = -yu \qquad u(0,y) = f(y),$$

com o método das características.

SOLUÇÃO
Faça $u = U(s)$, $y = Y(s)$ e $x = X(s)$, e escreva a derivada total:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s};$$

comparando,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = -Y(s)U(s),$$
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = X(s)^2.$$

Resolvendo agora o sistema acoplado, impondo $X(0) = 0$,

$$X(s) = s;$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = s^2,$$
$$Y(s) = \frac{1}{3}s^3 + Y(0);$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = -\left[\frac{1}{3}s^3 + Y(0)\right]U(s),$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{U} = -\left[\frac{1}{3}s^3 + Y(0)\right]\mathrm{d}s,$$
$$\ln\frac{U(s)}{U(0)} = -\left[\frac{1}{12}s^4 + Y(0)s\right].$$

A condição inicial $U(0)$ é obtida "mecanicamente":

$$U(0) = u(0, Y(0)) = f(Y(0)) = f(y - x^3/3),$$

onde nós já substituímos $x = X(s) = s$. Utilizando $Y(0)$ mais uma vez:

$$u(x,y) = f(y - x^3/3)\exp\left[-\frac{1}{12}x^4 - (y - x^3/3)x\right]$$
$$= f(y - x^3/3)\exp\left[-yx + \frac{1}{4}x^4\right] \blacksquare$$

A "condição inicial" do método das características *não precisa ser em* $t = 0$. Considere o seguinte problema:

Exemplo 18.3 Seja

$$t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = xt$$

com $u = 1$ na curva $\Gamma : x + t = 1$. Mostre que a solução é $U(s) = 1 + \frac{X_0T_0}{2}\left[e^{2s} - 1\right]$ sobre cada curva característica dada por $X(s) = X_0e^s,\ T(s) = T_0e^s,\ X_0 + T_0 = 1$.

SOLUÇÃO
Suponha $X = X(s)$, $T = T(s)$ partindo de um ponto qualquer da curva $X_0 + T_0 = 1$ em uma direção transversal à mesma. Sobre a curva característica, $U = U(s)$, e comparamos:

$$\begin{aligned} t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} &= xt, \\ \frac{dT}{ds}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dX}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{dU}{ds}. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= X \Rightarrow X(s) = X_0e^s, \\ \frac{dT}{ds} &= T \Rightarrow T(s) = T_0e^s, \\ \frac{dU}{ds} &= XT = X_0T_0e^{2s} \Rightarrow U(s) - U_0 = X_0T_0\left[e^{2s}/2 - 1/2\right]; \\ U(0) = 1 &\Rightarrow U_0 = 1; \\ U(s) &= 1 + X_0T_0\left[e^{2s}/2 - 1/2\right], \end{aligned}$$

com $X_0 + T_0 = 1$ ■

Considere agora, novamente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t)u \tag{18.12}$$

onde $c(x,t)$ e $f(x,t)$ são funções não especificadas de x e de t.

Faça $u = U(s)$, $x = X(s)$, $t = T(s)$; então,

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dX}{ds}.$$

Comparando,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= f(X(s),T(s))U(s), \\ \frac{dT}{ds} &= 1, \\ \frac{dX}{ds} &= c(X(s),T(s)). \end{aligned}$$

Como sempre, $t = T(s) = s$; substituindo em X, temos a equação de uma *linha característica* no plano xt:

$$\frac{dX}{dt} = c(X,t),$$

cuja solução é da forma

$$X(t) = X(0) + \int_{\tau=0}^{t} c(X(\tau),\tau)d\tau.$$

Note que essa última equação ainda é *implícita* em $X(t)$, mas isso não importa! O importante aqui é que podemos obter *em princípio* uma *família* de curvas em função do parâmetro $X(0)$.

A forma de (18.12) é o mais importante aqui (sem "conhecermos" $c(x,t)$, é impossível "resolver" completamente o problema): na próxima seção, nós vamos nos inspirar em (18.12) para generalizar o método das características para situações em que $\boldsymbol{u}(x,t)$ é um vetor, e aplicar essa generalização para classificar equações diferenciais parciais.

Exercícios Propostos

18.1 Utilizando o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta k \frac{\partial u}{\partial k} - \beta u + \nu k^2 u = 0, \qquad u(k,0) = f(k)$$

para $u(k,t)$.

18.2 Resolva a equação diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha \kappa^{-5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi; \qquad \psi(\kappa,0) = f(\kappa)$$

(onde α é uma constante, e $f(\kappa)$ é uma condição inicial conhecida), transformando o lado esquerdo na derivada total $d\psi/d\kappa$, identificando as linhas características, e integrando.

18.3 Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

18.4 Obtenha $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{e}^{-t}\frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

18.2 – O método das características e a classificação de Equações Diferenciais Parciais

Suponha agora que $\boldsymbol{u}(x,t) \in \mathbb{R}^2$; a generalização de (18.12) para duas dimensões é

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + C(x,t)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\boldsymbol{u}, \tag{18.13}$$

onde $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{F}$ são tensores, representados por matrizes 2×2 em uma base particular. Supondo como antes que $x = X(s)$, $t = T(s)$, a derivada total de $\boldsymbol{u}$ em relação a s é

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}.$$

A comparação com (18.13) sugere

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = C(X(s),T(s)).$$

A segunda equação acima, entretanto, é absurda: o lado esquerdo é um escalar, e o lado direito é um tensor. É preciso lidar com cada uma das funções incógnitas de $\boldsymbol{u}$ separadamente.

Suponha agora que C possua dois autovetores LI, associados a dois autovalores λ_1 e λ_2. Nesse caso, podemos escrever (18.13) na base dos autovetores como

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

ou

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = f_{11}u_1 + f_{12}u_2, \tag{18.14}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = f_{21}u_1 + f_{22}u_2. \tag{18.15}$$

Essa é uma situação muito mais próxima do método das características unidimensional que apresentamos na seção anterior. Por exemplo, podemos fazer $t = T_1(s)$, $x = X_1(s)$, $u_1 = U_1(s)$, e obter

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}s}.$$

A comparação com (18.14) produz

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}s} = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}s} = \lambda_1.$$

É evidente que o mesmo pode ser feito para (18.15). Isso nos dará duas curvas parametrizadas em s: $(x,t) = (X_1(s), T_1(s))$ e $(x,t) = (X_2(s), T_2(s))$. Essas são as curvas características do sistema (18.13).

A conexão com equações diferenciais parciais de ordem *dois* se segue. Considere uma equação diferencial parcial de ordem 2, linear, do tipo

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} = F. \tag{18.16}$$

Nós vamos permitir que A, B, C sejam funções genéricas de x, y, e que o termo F seja ainda mais geral. Por exemplo, F poderá conter inclusive derivadas de ordem 1 de ϕ. O plano é reescrever (18.16) na forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{C} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{F}.$$

Isso pode ser feito com

$$u = \phi_x \qquad \text{e} \qquad v = \phi_y$$

donde se seguem duas equações acopladas:

$$Au_x + 2Bu_y + Cv_y = F,$$
$$v_x = u_y;$$

melhor ainda,

$$u_x + \frac{2B}{A}u_y + \frac{C}{A}v_y = \frac{F}{A},$$

$$v_x - u_y = 0.$$

Agora temos a forma "correta":

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2B/A & C/A \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F/A \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz da equação acima possui os autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Dependendo dos autovalores que nós encontrarmos, nós classificaremos a EDP (18.16) como se segue:

$$\Delta = B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{Elítica,} \\ = 0 & \text{Parabólica,} \\ > 0 & \text{Hiperbólica.} \end{cases}$$

Vejamos, a seguir, alguns exemplos de interesse prático em Engenharia.

Exemplo 18.4 Classifique e analise a equação da difusão,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

SOLUÇÃO Fazendo $x = x$, $t = y$ em (18.16), temos $A = \alpha^2$, $B = 0$ e $C = 0$. Consequentemente, $B^2 - AC = 0$, e a EDP é parabólica. Existe apenas um autovalor, $\lambda = 0$.

Exemplo 18.5 Classifique e analise a equação da onda,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

SOLUÇÃO
De forma análoga à do Exemplo 18.4, $A = c^2$, $B = 0$ e $C = -1$; $B^2 - AC = c^2 >$, e a EDP é hiperbólica.

Exemplo 18.6 Classifique e analise a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

SOLUÇÃO
Com $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$, $B^2 - AC = 1$, e a equação é elítica.

Exemplo 18.7 Classifique e analise a equação de difusão-advecção,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} - D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

SOLUÇÃO
Com $A = -D$, $B = 0$ e $C = 0$, $B^2 - AC = 0$, e a equação é parabólica.

Exercícios Propostos

18.5 Mostre que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

é uma EDP parabólica.

18.3 – O método de separação de variáveis para problemas parabólicos

A equação da difusão em coordenadas cartesianas

Considere a equação da difusão

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tag{18.17}$$

com condições iniciais e de contorno

$$\phi(x,0) = f(x), \tag{18.18}$$

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0. \tag{18.19}$$

Tente

$$\phi(x,t) = X(x)T(t),$$

e substitua:

$$X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 T(t)\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2},$$

$$\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda$$

Em x, isso é um problema de Sturm-Liouville

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(L) = 0, \tag{18.20}$$

com solução clássica

$$X(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{18.21}$$

Segue-se que

$$\frac{T'}{T} = -\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2},$$

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}.$$

A solução geral do problema é do tipo

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

O cálculo dos $A_n s$ vem da condição inicial do problema:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = \phi(x,0) = f(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L} = f(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x = \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,$$

$$A_m \frac{L}{2} = \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,$$

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Um problema parabólico não-linear

A equação de Boussinesq para águas subterrâneas, adimensionalizada, tem a forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

As condições de contorno que utilizaremos são

$$\begin{aligned} \eta(0,t) &= 0, \qquad t \geq 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}(1,t) &= 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

A condição inicial que utilizaremos é *incompleta*, e envolve apenas um ponto do perfil inicial:

$$\eta(1,0) = 1; \tag{18.22}$$

em um problema linear tradicional, a condição correspondente seria

$$\eta(x,0) = f(x).$$

Conforme veremos, o problema tem solução analítica possível apenas para uma particular forma para $f(x)$: as soluções que obteremos serão *auto-similares*. O que isso significa, e porque as soluções analíticas desse problema não-linear são apenas possíveis para particulares formas funcionais de $f(x)$ ficará claro na sequência.

Como sempre, tentamos

$$\eta = X(x)T(t)$$

e substituímos na equação original, que nos dá

$$\begin{aligned} X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(XTT\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right) \\ X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right) \\ \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(X\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right) = c_1. \end{aligned}$$

Num ambiente tradicional, procuraríamos agora o problema de Sturm-Liouville; no entanto, nenhuma das duas equações diferenciais que nós podemos obter a partir do método de separação de variáveis produz um problema de Sturm-Liouville! Estamos perdidos, e a Teoria de Sturm-Liouville não nos guiará para a solução. Precisaremos ser mais "empíricos", e ir tateando no rumo da solução. A equação ordinária em T é

$$\frac{\mathrm{d}T}{T^2} = c_1 \mathrm{d}t,$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{T} - c_2 &= c_1 t \\
-\frac{1}{T} &= c_2 + c_1 t \\
-T &= \frac{1}{c_2 + c_1 t} \\
&= \frac{1}{c_2 + c_1 t} \times \frac{c_2}{c_2} \\
&= \frac{1}{c_2} \frac{1}{c_2 + c_1 t} \times \frac{1}{\frac{1}{c_2}} \\
&= \frac{1}{c_2} \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_2} t} \equiv \frac{1}{c_2} \frac{1}{(1 + at)}.
\end{aligned}
$$

Nesse ponto, nós "descobrimos" um tipo de solução que tem a forma

$$
\eta = \frac{X/c_2}{-(1 + at)}.
$$

É claro que é conveniente mudarmos um pouco a forma da solução; sem perda de generalidade, fazemos

$$
-F(x) \equiv \frac{X(x)}{c_2} \quad \Rightarrow \quad \eta(x, t) = \frac{F(x)}{1 + at}. \tag{18.23}
$$

Essa é a forma na qual procuraremos, a partir de agora, uma solução. Note também que, uma vez que a equação de Boussinesq que estamos tentando resolver é não linear, não há a possibilidade de somar (infinitos) termos de uma série: ou resolvemos o problema com uma única $F(x)$, ou nada feito! Portanto, a solução apontada por (18.23) é uma solução *auto-similar*: a forma da superfície freática, $F(x)$, uma vez atingida, não muda mais!

É nesse sentido que a solução que estamos obtendo não é suficientemente "geral": na verdade, nós estamos encontrando a solução de um problema após a superfície freática ter evoluído, desde uma forma inicial arbitrária $f(x)$, para a forma auto-similar $F(x)$ que se manterá até o fim do problema.

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{X} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(X \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} \right) &= c_1, \\
\frac{1}{\frac{-X}{c_2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\left(\frac{-X}{c_2} \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{-X}{c_2} \right) \right) &= -\left(\frac{c_1}{c_2} \right) = -a, \\
\frac{1}{F} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(F \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \right) &= -a.
\end{aligned}
$$

Com a ajuda de

$$
F \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{F^2}{2} \right),
$$

ficamos com

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{F} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{F^2}{2} \right) \right] &= -a \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{F^2}{2} \right) \right] &= -aF.
\end{aligned}
$$

A substituição que se segue é à primeira vista um pouco estranha, mas válida!

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F^2}{2}\right), \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -aF, \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}(F^2/2)}{p}. \end{aligned}$$

A idéia é eliminar x (!), do que resulta

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\frac{\mathrm{d}(F^2/2)}{p}} &= -aF, \\ p\mathrm{d}p &= -aF(F\mathrm{d}F), \\ \frac{p^2}{2} &= -a\frac{F^3}{3} + c_3. \end{aligned}$$

Podemos agora reintroduzir a dependência em x; ao mesmo tempo, mudamos as variáveis de integração de x para ξ, e de F para y:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}F^2/2}{\mathrm{d}x}\right]^2 &= -\frac{2a}{3}F^3 + 2c_3, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{y^2}{2}\right) &= \left(2c_3 - \frac{2a}{3}y^3\right)^{1/2}, \\ \frac{y\mathrm{d}y}{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}y^3\right)^{1/2}} &= \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Agora, integramos para recuperar os símbolos x e F:

$$\begin{aligned} \int_0^F \frac{y\mathrm{d}y}{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}y^3\right)^{1/2}} &= \int_0^x \mathrm{d}\xi \\ \int_0^{F(x)} \frac{y\mathrm{d}y}{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}y^3\right)^{1/2}} &= x. \end{aligned}$$

Observe que o que é calculável é o lado *esquerdo*: portanto, é mais natural pensar em (quer dizer: calcular) $x(F)$ do que $F(x)$!

As integrais acima dão conta das condições de contorno, mas ainda precisamos impor nossa "condição inicial" $\partial\eta(1,t)/\partial x = 0$, que se traduz em

$$\frac{\mathrm{d}F(1)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Mas como não "temos" $F(x)$, e sim $x(F)$, nós vamos precisar da regra de Leibnitz:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}, \\ 1 &= \frac{F}{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}F^3\right)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}, \\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \frac{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}F^3\right)}{F} \end{aligned}$$

Porém,

$$F(1) = 1,$$
$$\frac{\mathrm{d}F(1)}{\mathrm{d}x} = 0,$$

donde

$$2c_3 - \frac{2a}{3} = 0 \;\Rightarrow\; c_3 = \frac{a}{3};$$

donde nós retornamos para

$$x = \int_0^{F(x)} \frac{y\mathrm{d}y}{\left(2c_3 - \frac{2a}{3}y^3\right)^{1/2}},$$
$$x = \left(\frac{3}{2a}\right)^{1/2} \int_0^{F(x)} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(1-y^3)^{1/2}}. \tag{18.24}$$

É claro que falta obter o valor de a; usando (18.22):

$$\eta(1,0) = 1, \tag{18.25}$$
$$F(1) = 1, \tag{18.26}$$
$$1 = \left(\frac{3}{2a}\right)^{1/2} \int_0^1 y(1-y^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}y. \tag{18.27}$$

O valor de a fica assim implicitamente determinado. Em termos de funções da Física Matemática, entretanto, é conveniente avançar um pouco mais, e utilizar a *função Beta*, definida por

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,\mathrm{d}u, \tag{18.28}$$

que é convenientemente tabelada em diversas referências.

A comparação entre (18.27) e (18.28) sugere imediatamente $u = y^3$; então,

$$y = u^{1/3},$$
$$\mathrm{d}y = \frac{1}{3}u^{-2/3}\,\mathrm{d}u,$$
$$1 = \left(\frac{1}{6a}\right)^{1/2} \int_0^1 u^{-1/3}(1-u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$1 = \left(\frac{1}{6a}\right)^{1/2} B(2/3, 1/2),$$
$$a = [B(2/3,1/2)]^2/6. \tag{18.29}$$

Retornemos agora para (18.24):

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{3}{2a}\right)^{1/2} \int_0^{F(x)} y(1-y^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{3\times 6}{2[B(2/3,1/2)]^2}\right)^{1/2} \int_0^{F(x)} y(1-y^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{B(2/3,1/2)} \int_0^{F(x)} y(1-y^3)^{-1/2}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{B(2/3,1/2)} \int_0^{F^3(x)} u^{-1/3}(1-u)^{-1/2}\, du \Rightarrow$$
$$x = I_{F^3}(2/3,1/2). \tag{18.30}$$

A equação (18.30) é uma função Beta incompleta $I_{F^3}(2/3,1/2)$ (veja Press et al., 1992, seção 6.4).

Um problema parabólico cilíndrico

Considere um anel cilíndrico com altura h, raio r, e espessura Δr "cravado" (virtualmente) no solo. A equação de balanço de massa para este volume de controle é

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \oint_S \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\, dS = 0. \tag{18.31}$$

A massa de água dentro do anel é

$$\int_V \rho\, dV = f\rho\,(2\pi r\Delta r h)\,, \tag{18.32}$$

onde ρ é a massa específica da água (aqui suposta constante), e f é a porosidade do solo.

Suponha por simplicidade que o fluxo médio $\boldsymbol{u}$ é horizontal e perfeitamente radial, sendo dado pela lei de Darcy na forma

$$u_r = -k\frac{\partial h}{\partial r}. \tag{18.33}$$

A integral de superfície será então

$$\oint_S \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\, dS = 2\pi\rho\left\{\left[-shk\frac{\partial h}{\partial s}\right]_{s=r+\Delta r} + \left[shk\frac{\partial h}{\partial s}\right]_{s=r}\right\} \tag{18.34}$$

Donde

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi f\rho r h) = \frac{\left[(r+\Delta r)h(r+\Delta r)k\frac{\partial h(r+\Delta r)}{\partial r} - rh(r)k\frac{\partial h(r)}{\partial r}\right]}{\Delta r}$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rh\frac{k}{f}\frac{\partial h}{\partial r}\right] \tag{18.35}$$

Esta é a equação de Boussinesq, não-linear, para escoamento em solo. A linearização óbvia aqui é fazer $h = \overline{h}$ no termo intermediário do lado direito, obtendo-se

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\overline{h}k}{f}r\frac{\partial h}{\partial r}\right] \tag{18.36}$$

A partir deste ponto fazemos $\alpha^2 = \overline{h}k/f$, e nos concentramos na solução de um problema linear. O problema que escolhemos é manter um cilindro de raio b e altura H de solo inicialmente seco, rodeado por solo uniformemente saturado até a altura H. O problema se torna

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial h}{\partial r}\right]$$

com

$$h(r,0) = 0, \qquad 0 \le r \le b,$$
$$h(b,t) = H,$$

$$\frac{\partial h(0,t)}{\partial r} = 0.$$

Uma das condições de contorno (em $r = 0$) é homogênea (derivada nula), mas a outra (em $r = b$) não. Isso entretanto pode ser facilmente remediado, fazendo

$$h(r,t) = H + u(r,t),$$

o que produz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r}\right]$$

e

$$u(r,0) = -H, \qquad 0 \le r \le b, \tag{18.37}$$

$$u(b,t) = 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial r} = 0. \tag{18.39}$$

Substituindo

$$u(r,t) = RT$$

na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial RT}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial RT}{\partial r}\right] \\
RT' &= \frac{\alpha^2}{r}\frac{\partial rTR'}{\partial r} \\
RT' &= \frac{a^2 T}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] \\
\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} &= \frac{1}{rR}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] = -\lambda.
\end{aligned}$$

O sinal de menos em λ é arbitrário. Seria possível atacar diretamente o problema de Sturm-Liouville em R; resolvendo em vez disso para T, entretanto, obtemos

$$T(t) = T_0 e^{-\lambda\alpha^2 t}.$$

Usar $\lambda < 0$ produz uma solução que explode quando $t \to \infty$, o que não é físico; usar $\lambda = 0$ produz uma solução independente de t, o que também não é. Portanto, usaremos $\lambda > 0$. O problema de Sturm-Liouville em R será

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + \lambda r R = 0,$$

com condições de contorno homogêneas padrão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(0)}{\partial r} &= 0, \\
R(b) &= 0.
\end{aligned}$$

é evidente que, na forma padrão da equação de Sturm-Liouville, temos $p(r) = r$, $q(r) = 0$ e $w(r) = r$. Expandindo,

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \lambda R = 0$$

Figura 18.2: Funções de Bessel de ordem 0

que deve ser comparada à equação geral de Bessel de ordem μ:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 0$$

Fazemos portanto $\lambda = k^2$, e dividimos a equação em R por k^2:

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}(kr)^2} + \frac{1}{(kr)}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}(kr)} + R = 0,$$

que está, agora, na forma de uma equação diferencial de Bessel de ordem zero.

A solução geral é da forma

$$R(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr),$$

e deve atender às condições de contorno homogêneas. Vamos nos recordar das formas de $J_0(kr)$, e $Y_0(kr)$.

A figura 18.2 mostra as funções J_0 e Y_0. $Y_0(kr)$ possui uma singularidade logaritmica, e não pode atender à condição de derivada nula em $r = 0$, a não ser que $B = 0$. E quanto à derivada de J_0 em $r = 0$? Uma rápida consulta a Abramowitz e Stegun (1972) (equação 9.1.10) fornece a série

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{(k!)^2}.$$

Os expoentes de x são todos pares; $J_0(x)$ é uma função *par*, e $J_0'(0) = 0$. Portanto, $J_0(kr)$ atende à condição de contorno em $r = 0$. A condição de contorno homogênea em $r = b$ requer

$$J_0(kb) = 0;$$

Os autovalores $\lambda_n = k_n^2$ serão os *zeros* da função de Bessel de primeiro tipo, e ordem zero. Os 20 primeiros autovalores são dados por (Abramowitz e Stegun, 1972, Tabela 9.5, 1ª coluna) e reproduzidos na tabela 18.1

Com os autovalores em mãos, nós prosseguimos para obter a solução em série do problema. Ela será

$$h(r,t) = H + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 \alpha^2 t} J_0(k_n r)$$

Em particular, como os $k_n b$ são os zeros de $J_0(x)$,

$$h(b,t) = H + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n^2 \alpha^2 t} \underbrace{J_0(k_n b)}_{=0} = 0.$$

Tabela 18.1: 20 primeiros zeros de $J_0(x)$.

n	$k_n b$	n	$k_n b$
1	2,4048255577	11	33,7758202136
2	5,5200781103	12	36,9170983537
3	8,6537279129	13	40,0584257646
4	11,7915344391	14	43,1997917132
5	14,9309177086	15	46,3411883717
6	18,0710639679	16	49,4826098974
7	21,2116366299	17	52,6240518411
8	24,3524715308	18	55,7655107550
9	27,4934791320	19	58,9069839261
10	30,6346064684	20	62,0484691902

Finalmente, precisamos calcular os coeficientes A_n, o que fazemos impondo a condição inicial do problema:

$$\begin{aligned}
h(r,0) = H + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) &= 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) &= -H \\
\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{r=0}^{b} r J_0(k_n r) J_0(k_m r)\, dr &= -H \int_{r=0}^{b} r J_0(k_m r)\, dr \\
A_m \int_{r=0}^{b} r J_0^2(k_m r)\, dr &= -H \int_{r=0}^{b} r J_0(k_m r)\, dr.
\end{aligned}$$

A última linha foi obtida, como de costume, invocando a ortogonalidade das autofunções do problema de Sturm-Liouville.

Para calcular as duas integrais restantes, são necessários dois resultados padrão da teoria de funções de Bessel. O primeiro é (Jeffrey, 2003, 17.13.1.1-4)

$$\int_0^1 x J_n^2(ax)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(a), \;\; J_n(a) = 0.$$

Fazendo $r = xb$, $\mathrm{d}r = b\mathrm{d}x$, (e impondo $k_m = a/b$ na segunda linha abaixo):

$$\begin{aligned}
\int_{r=0}^{b} \frac{r}{b} J_n^2(a\frac{r}{b})\, \frac{dr}{b} &= \frac{1}{2} J_{n+1}^2(a) \\
\int_{r=0}^{b} r J_n^2(k_m r)\, dr &= \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(k_m b).
\end{aligned}$$

Já para a integral do lado direito, nós aplicamos diretamente a fórmula (Jeffrey, 2003, 17.12.1.1-1)

$$\begin{aligned}
\int x J_0(ax)\, \mathrm{d}x &= \frac{x}{a} J_1(ax) \;\; \Rightarrow \\
\int_0^b r J_0(k_m r)\, dr &= \frac{b}{k_m} J_1(k_m b),
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
A_m \frac{b^2}{2} J_1^2(k_m b) &= -H \frac{b}{k_m} J_1(k_m b), \\
A_m &= -\frac{2H}{k_m b} \frac{1}{J_1(k_m b)}, \\
h(r,t) &= H - \frac{2H}{b} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 \alpha^2 t} \frac{J_0(k_n r)}{k_n J_1(k_n b)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uma equação parabólica não-homogênea

Considere a equação

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + F(x,t), \\
\phi(x,0) &= 0, \\
\phi(0,t) &= 0, \\
\phi(L,t) &= 0,
\end{aligned}
$$

onde $F(x,t)$ é uma função qualquer de x e t. Embora as condições de contorno sejam homogêneas, a equação não é diretamente tratável pelo método de separação de variáveis. De fato, se tentarmos

$$
\phi(x,t) = X(x)T(t),
$$

obteremos

$$
\begin{aligned}
X \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + F(x,t); \\
\frac{1}{\alpha^2 T} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X} \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{F(x,t)}{XT},
\end{aligned}
$$

e não há uma maneira óbvia de separar o último termo à direita em funções somente de X e somente de T.

Por outro lado, note que as condições de contorno $\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$ sugerem que as autofunções e autovalores

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},
$$

podem ser úteis, uma vez que os $X_n s$ atendem automaticamente às condições de contorno. Tentemos, portanto, decompor $F(x,t)$ na base dos $X_n s$:

$$
F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{18.40}
$$

$$
F(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right),
$$

$$
\int_0^L F(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \underbrace{\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x}_{\frac{L}{2}\delta_{mn}},
$$

$$
\int_0^L F(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = F_m(t) \frac{L}{2},
$$

$$F_m(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Portanto, é sempre possível decompor $F(x,t)$ na forma (18.40). Agora, tentamos

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$$

e substituímos ambas as séries na equação original:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)T_n(t) = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)T_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 T_n - F_n(t)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0.$$

Claramente, temos uma EDO de 1ª ordem não-homogênea para cada n dentro do colchete. Correndo o risco de entediar o leitor ou a leitora, fazemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 T_n &= F_n(t),\\
T_n(t) &= u(t)v(t),\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 uv &= F_n(t),\\
\underbrace{u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 v\right]}_{=0} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= F_n(t),\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 v,\\
v(t) &= v(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t};\\
v(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= F_n(t),\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(0)}\mathrm{e}^{\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 \tau}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
\int_{u(0)}^{u(t)}\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(0)}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 \tau}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
u(t) &= u(0) + \frac{1}{v(0)}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 \tau}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
T_n(t) &= \left[u(0) + \frac{1}{v(0)}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 \tau}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right]v(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t}\\
&= T_n(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t} + \int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 (t-\tau)}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

A solução geral, portanto, é da forma

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[T_n(0)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t} + \int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 (t-\tau)}F_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right].$$

Note que a solução atende automaticamente às condições de contorno $\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0$. Resta determinar $T_n(0)$; porém,

$$\phi(x,0) = 0,$$

Figura 18.3: Esvaziamento de um maciço poroso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(0) = 0,$$

$$T_n(0) = 0,$$

e a solução final é

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 (t-\tau)} F_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \blacksquare$$

Exercícios Propostos

A figura 18.3 mostra 3 estágios do esvaziamento de um maciço poroso de porosidade drenável f e conditividade hidráulica saturada k. Em $t = 0$, todo o maciço está saturado até a altura H; em um instante intermediário, formou-se uma superfície freática, e em $t = \infty$ a superfície freática alcança (assintoticamente, apenas) o nível H_0 do canal para o qual ela drena. A região hachurada indica um contorno impermeável. A equação governante é a equação não-linear de Boussinesq,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{f}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

As questões 18.6–18.10 referem-se a este problema.

18.6 Linearize a equação de Boussinesq, obtendo

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k\overline{h}}{f}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \equiv \alpha^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Explique como a linearização pode ser feita, e sugira um valor **razoável** para $\overline{h}$.

18.7 Abaixo estão as condições iniciais e de contorno do problema. Explique fisicamente cada uma delas.

$$h(x,0) = H,$$
$$h(0,t) = H_0,$$
$$\frac{\partial h(L,t)}{\partial x} = 0$$

18.8 Faça

$$\phi(x,t) = h(x,t) - H_0;$$

note que H_0 é constante; obtenha a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Mostre que as condições de contorno em ϕ são mais simples:

$$\phi(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} = 0.$$

18.9 Separe as variáveis: $\phi(x,t) = X(x)T(t)$. Obtenha

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Discuta o sinal de λ em função das condições de contorno em $X(0)$ e $dX(L)/dx$. Mostre que apenas $\lambda < 0$ produz soluções não-triviais. **Sugestão:** para $\lambda > 0$ a imposição das condições de contorno é muito mais fácil se a solução for expressa em termos de $\cosh(\cdot)$ e $\operatorname{senh}(\cdot)$.

18.10 Mostre que as autofunções possíveis são do tipo

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right).$$

18.11 Considere novamente o problema

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad h(x,0) = H, \qquad h(0,t) = H_0 \le H, \qquad \frac{\partial h(L,t)}{\partial x} = 0.$$

Suponha que em vez de fazer $h(x,t) = H_0 + \phi(x,t)$, e forçar a condição de contorno homogênea $\phi(0,t) = 0$, você tente diretamente uma solução por separação de variáveis: $h(x,t) = X(x)T(t)$. A imposição da condição de contorno em $x = 0$ produzirá $h(0,t) = H_0 = X(0)T(t)$. Como é possível que uma constante seja igual a $T(t)$? (A não ser que . . .) Ao mesmo tempo, a separação de variáveis leva a

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lambda.$$

Discuta o sinal de λ integrando inicialmente em T (e não em X, como fizemos em sala de aula). Mostre que $\lambda > 0$ é fisicamente impossível. Agora, entretanto, $\lambda = 0$ tem um papel importante na solução: qual? Mostre que o resultado desta discussão dos sinais de λ e da condiçao de contorno não-homogênea acaba dando no mesmo que $h(x,t) = H_0 + \eta(x,t)$. Explique como você encaminharia o restante da solução, *sem resolvê-la*.

18.12 Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x).
\end{aligned}$$

18.13 Resolva usando obrigatoriamente o método de separação de variáveis:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

com condições inicial e de contorno ($H(x)$ é a função de Heaviside)

$$c(x,0) = 2c_0H(x - L/2); \qquad \frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial c(L,t)}{\partial x} = 0.$$

Figura 18.4: Condições inicial e de contorno para o problema 18.17.

18.14 Utilizando o método de separação de variáveis, resolva (veja o trabalho "Dispersão atmosférica de poluentes" na seção 14.4)

$$\begin{aligned} U\frac{\partial C}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= \alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial C(x,0)}{\partial z} &= \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0, \\ C(0,z) &= \frac{Q}{U}B(z), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{K}{U}, \\ B(z) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & |z - z_e| \le \sigma/2, \\ 0, & |z - z_e| > \sigma/2. \end{cases} \end{aligned}$$

18.15 Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi\frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,0) = 1.$$

Sugestão: a solução é muito parecida com a solução da equação de Boussinesq, só que mais fácil.

18.16 Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, resolva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

18.17 Para as condições inicial e de contorno da figura 18.4, resolva a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Atenção: a condição em $x = L$ é *não-homogênea*. Sugestão: para obter condições de contorno homogêneas, subtraia de $T(x,t)$ a solução para o regime permanente.

18.18 Resolva a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned} \phi(x,0) &= \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \\ \phi(0,t) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Você pode usar as fórmulas a seguir (se forem, e as que forem, úteis) sem demonstração.

$$\begin{aligned} \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{L}{2} \\ \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx &= \frac{L}{2} \\ \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= 0, \qquad n > 1 \\ \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) &= \frac{4L(-1)^{n-1}}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2} \\ \int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) &= \frac{2(2n-1)(-1)^n L}{\pi(2n-3)(2n+1)} \end{aligned}$$

18.19 Fazendo $u(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0,t) &= 0, \\ u(1,0) &= 1. \end{aligned}$$

18.20 Obtenha por *separação de variáveis* uma solução "livre" (isto é: independente de condições iniciais ou de contorno) para a EDP

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h^n)}{\partial x} = 0, \qquad n > 1$$

em função de 3 constantes de integração k_1, k_2 e k_3 (*não se preocupe: elas surgirão naturalmente*).

18.4 – O método de separação de variáveis para problemas elíticos

Considere a equação de Laplace em coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi \frac{\partial U}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right] = 0. \qquad (18.41)$$

Definição 18.1 Um problema é dito *axissimétrico* quando

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \;\Rightarrow\; U = U(r,\phi).$$

A equação de Laplace para um problema axissimétrico, portanto, reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)=0. \tag{18.42}$$

Uma tentativa sistemática de solução de (18.42) é da forma

$$\begin{aligned}
U(r,\phi) &= R(r)\Phi(\phi),\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(R\Phi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial(R\Phi)}{\partial\phi}\right) &= 0,\\
\Phi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right) &= 0,\\
\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{\Phi\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

O argumento padrão do método de separação de variáveis agora requer

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{\Phi\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right)=\lambda. \tag{18.43}$$

Começando pela equação em ϕ, teremos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\Phi\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right) &= \lambda,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right) &= -\lambda\Phi\operatorname{sen}\phi,\\
\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\cos\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}+\lambda\Phi\operatorname{sen}\phi &= 0.
\end{aligned}$$

A solução dessa equação necessita de uma mudança de variável. Vamos fazê-la detalhadamente. Seja

$$\begin{aligned}
x &= \cos\phi \quad\Rightarrow\\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} &= -\operatorname{sen}\phi;\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi} &= \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}=-\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Para a derivada segunda, um longo caminho:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right)(-\operatorname{sen}\phi)\\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\operatorname{sen}\phi)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}-\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right](-\operatorname{sen}\phi)\\
&= \left[-\cos\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}-\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right](-\operatorname{sen}\phi)
\end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\phi},$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} &= \left[+\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} - \operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\right](-\operatorname{sen}\phi)\\ &= -\cos\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}^2\phi\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}\\ &= -x\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}.\end{aligned}$$

de volta à equação diferencial em Φ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\phi} + \lambda\Phi = 0,\\ -x\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\left(-\operatorname{sen}\phi\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda\Phi = 0\\ (1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} + \lambda\Phi = 0.\end{aligned}$$

Esta é a equação diferencial de Legendre. Ela possui soluções em série em torno de $x = 0$ (que é, lembre-se, um ponto ordinário da equação), mas o problema é que estas séries *divergem* em $x = \pm 1$ — a não ser que elas terminem, isto é, que as soluções sejam *polinômios*. Isto acontece para

$$\lambda_n = n(n+1),\ n \geq 0$$

(estes são os autovalores!), e as soluções

$$\Phi_n(x) = P_n(x) = P_n(\cos\phi), \tag{18.44}$$

que são as autofunções, são os já conhecidos *Polinômios de Legendre* de ordem n.

O problema em r agora fica

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = n(n+1),\\ r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - n(n+1)R = 0\end{aligned}$$

— mas esta é uma equação de Euler. A solução procurada é do tipo

$$R = r^m$$

e a equação característica será

$$\left[m^2 + m - n^2 - n\right] r^m = 0.$$

É evidente que $m = n$ é uma raiz, mas há outra! De fato, com um pouco de esforço de manipulação algébrica, nós fazemos

$$\begin{aligned}m &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n(n+1)}}{2},\\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{4n^2+4n+1}}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1 \pm \sqrt{(2n+1)^2}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm (2n+1)}{2} \\
&= \begin{cases} n, \\ -(n+1). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Finalmente, estamos em condições de escrever a solução geral:

$$
U(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos(\phi)), \tag{18.45}
$$

com $0 \le \phi \le \pi$, $-1 \le \cos\phi \le 1$.

Exemplo 18.8 Lamb (1945) é um livro muito antigo — mas também extraordinariamente rico de exemplos interessantes de Matemática Aplicada. No Art. 91, Lamb considera o movimento de uma bolha esférica em expansão causada pela explosão de uma mina.
O escoamento do fluido em torno da explosão é suposto potencial, com

$$
\nabla^2 U = 0
$$

Se o problema é perfeitamente esférico, então U não é função de ϕ; em (18.45), isto só é possível se apenas $P_0(\cos(\phi)) = 1$ participar da solução. Devemos ter

$$
U = \frac{B}{r}, \tag{18.46}
$$

$$
\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} U = \frac{B}{r^2} \boldsymbol{e}_r \tag{18.47}
$$

Para o escoamento potencial, vale a equação de Bernoulli não-permanente (Kundu, 1990, seção 15; atenção para a notação adotada aqui em (18.47), que é diferente.)

$$
\frac{\partial U}{\partial t} = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right] \approx \left[\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right],
$$

onde p é a pressão termodinâmica, $u = |\boldsymbol{u}|$ é o módulo da velocidade, g é a aceleração da gravidade e z é a cota. A aproximação (bastante razoável) parte do pressuposto de que a energia associada à onda de pressão e a energia cinética são muito maiores, em uma explosão, do que a energia potencial gravitacional.
Agora seja $R(t)$ o raio da explosão em função do tempo. Nós "adivinhamos" a forma do potencial:

$$
U = \frac{R^2}{r} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}.
$$

Esta forma prevê corretamente o campo de velocidade; de fato,

$$
\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} U = \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{e}_r
$$

e, em $r = R$,

$$
\boldsymbol{u}(R) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{e}_r.
$$

Para aplicar a equação de Bernoulli, calculamos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{2R}{r} \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{R^2}{r} \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2}, \\
\frac{2R \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \right)^2 + R^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2}}{r} &= \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \right)^2
\end{aligned}
$$

Em $r = R$, isso simplifica-se para

$$\frac{p}{\rho} = 2\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$
$$\frac{p}{\rho} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}.$$

Esta ainda é uma equação em duas incógnitas (p e R), mas elas podem ser relacionadas supondo-se que a explosão do gás dentro da bolha procede adiabaticamente:

$$pV^\gamma = \text{constante},$$
$$p\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^\gamma = p_0\left(\frac{4}{3}\pi R_0^3\right)^\gamma,$$
$$pR^{3\gamma} = P_0R_0^{3\gamma},$$
$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}.$$

Atenção: ρ na equação acima é a densidade da *água*, que nós estamos supondo que é constante enquanto a água recede sob o impulso da explosão. A relação adiabática vale para o *gás* em expansão dentro da bolha.
Fazendo

$$c_0^2 \equiv \frac{p_0}{\rho}$$

nós obtemos finalmente a equação diferencial ordinária

$$c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} = \frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 + R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}.$$

Esta é uma equação de ordem 2, que necessita de 2 condições iniciais:

$$R(0) = R_0,$$
$$\frac{\mathrm{d}R(0)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Conforme vimos nas páginas 255–256, a equação diferencial em R possui integral

$$\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{3(\gamma-1)}\left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right].$$

Modernamente, o problema pode ser resolvido com relativa facilidade utilizando-se o método de Runge-Kutta. A equação diferencial de ordem dois corresponde a duas equações diferenciais acopladas,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\left[c_0^2\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{3}{2}Q^2\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = Q,$$

com $Q(0) = 0$, $R(0) = R_0$. Com $Q(0) = 0$, $R(0) = 1\,\mathrm{m}$, $c_0 = 1{,}531 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (que é a velocidade do som na água salgada), e $\gamma = 4/3$, o programa `buum.py` na listagem 18.1 resolve o problema numericamente, usando passos de tempo $\Delta t = 0{,}0001$ s.

Listagem 18.1: Solução numérica de uma explosão de uma mina

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------------------
# buum: a explosão de uma mina
# ----------------------------------------------------------------------
from numpy import zeros
```

```
# ------------------------------------------------------------------
# rkvetor: uma implementação de um runge-kutta multidimensional
# ------------------------------------------------------------------
def rkvetor(
   m,          # número de equações dif. ordinárias do
               # sistema == tamanho de y
   xn,         # ponto de avaliação
   h,          # passo que vou dar
   yn,         # valor atual da função
   ff          # função
):
# ------------------------------------------------------------------
# algumas constantes auxiliares
# ------------------------------------------------------------------
   h2 = h/2.0       # h/2
   h3 = h/3.0       # h/3
   h6 = h/6.0       # h/6
# ------------------------------------------------------------------
# vetores auxiliares
# ------------------------------------------------------------------
   k1 = zeros(m,float)
   k2 = zeros(m,float)
   k3 = zeros(m,float)
   k4 = zeros(m,float)
   yaux = zeros(m,float)
   ynew = zeros(m,float)
# ------------------------------------------------------------------
# primeira chamada de ff
# ------------------------------------------------------------------
   ff(m,xn,yn,k1)
   for i in range(m):
      yaux[i] = yn[i] + k1[i]*h2
   pass
# ------------------------------------------------------------------
# segunda chamada de ff
# ------------------------------------------------------------------
   ff(m,xn+h2,yaux,k2)
   for i in range(m):
      yaux[i] = yn[i] + k2[i]*h2
   pass
# ------------------------------------------------------------------
# terceira chamada de ff
# ------------------------------------------------------------------
   ff(m,xn+h2,yaux,k3)
   for i in range(m):
      yaux[i] = yn[i] + k3[i]*h
   pass
# ------------------------------------------------------------------
# quarta e última chamda de ff
# ------------------------------------------------------------------
   ff(m,xn+h,yaux,k4);
# ------------------------------------------------------------------
# finalmente, avalia a função
# ------------------------------------------------------------------
   for i in range(m):
      ynew[i] = yn[i] + k1[i]*h6 + k2[i]*h3 + k3[i]*h3 + k4[i]*h6
   pass
# ------------------------------------------------------------------
# retorna
# ------------------------------------------------------------------
   return ynew
# ------------------------------------------------------------------
# aqui eu declaro o sistema de equações diferenciais na forma de uma
# function
# ------------------------------------------------------------------
c0 = 1.531e3           # velocidade inicial da explosão
R0 = 1.0               # raio inicial da explosão
gamma = 4.0/3.0        # um gama qualquer
def sislamb(
m,             # o número de equações: deve ser sempre igual a 2!
t,             # o instante de tempo
u,             # o vetor de incógnitas
dudt           # as derivadas
```

```
) :
# ------------------------------------------------------------------
# calcula as derivadas:
# ------------------------------------------------------------------
   dudt[0] = ((c0**2 * (R0/u[1])**(2*gamma)) - 1.5*u[0])/u[1]
   dudt[1] = u[0]
   return dudt
# ------------------------------------------------------------------
# aloca memória para eta
# ------------------------------------------------------------------
eta = zeros((2,2),float)
# ------------------------------------------------------------------
# impõe as condições iniciais
# ------------------------------------------------------------------
eta[0] = [0.0,1.0]
# ------------------------------------------------------------------
# imprime um cabeçalho
# ------------------------------------------------------------------
print("#123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789
0123456789")
print("#␣␣␣␣␣␣␣␣␣tempo␣␣␣␣␣␣␣Q␣␣␣␣␣␣␣␣␣R")
print("%15.8lf␣␣%12.6le␣␣%12.6le" % (0.0,eta[0][0],eta[0][1]))
# ------------------------------------------------------------------
# sem mais delongas, faço um loop no tempo
# ------------------------------------------------------------------
deltat = 0.0001
nt = 100000
old = 0
new = 1
for it in range(nt):
   t = it*deltat
   eta[new] = rkvetor(2,t,deltat,eta[old],sislamb)
# ------------------------------------------------------------------
# imprime uma linha de simulação
# ------------------------------------------------------------------
   print("%15.8lf␣␣%+12.6e␣␣%+12.6e" %
         (t+deltat,eta[new,0],eta[new,1]))
# ------------------------------------------------------------------
# troca os índices de old e new
# ------------------------------------------------------------------
   (new,old) = (old,new)
```

O comando

```
./buum.py > buum.out
```

gera o arquivo de dados `buum.out`, com 3 colunas: o instante t, a função $Q(t) = dR/dt$, e a função $R(t)$.
O gráfico de $t \times R$ é mostrado na figura 18.5.

Um problema elítico em coordenadas cartesianas

O exemplo a seguir mostra um caso típico de problema elítico em que as condições de contorno são não-homogêneas. Para que problemas elíticos tenham alguma "graça" — ou seja, sejam modelos de problemas realistas —, condições não homogêneas são inevitáveis.

Exemplo 18.9 Resolva

$$\nabla^2 \phi = 0$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 2\phi_0, \\
\phi(a,y) &= 3\phi_0, \\
\phi(x,b) &= 5\phi_0, \\
\phi(0,y) &= 2\phi_0.
\end{aligned}$$

Figura 18.5: Solução numérica da explosão de uma mina submarina.

Figura 18.6: Tratamento das condições de contorno não-homogêneas de um problema envolvendo a equação de Laplace.

SOLUÇÃO

Neste exemplo, nenhuma das condições laterais é homogênea. Como a equação de Laplace é *linear*, entretanto, nós podemos "subdividir" o problema em 3 problemas mais simples, como mostra a figura 18.6; se

$$\phi(x, y) = U(x, y) + V(x, y) + W(x, y),$$

é evidente que as condições de contorno de U, de V e de W se somam para produzir as condições de contorno de ϕ; além disto,

$$\nabla^2\phi = \nabla^2 U + \nabla^2 V + \nabla^2 W;$$

segue-se que, se

$$\nabla^2 U = 0, \qquad \nabla^2 V = 0, \qquad \nabla^2 W = 0,$$

então, naturalmente,

$$\nabla^2\phi = 0.$$

O primeiro subproblema é muito simples:

$$U = 2\phi_0 \Rightarrow \nabla^2 U = 0.$$

O segundo subproblema agora é

$$\nabla^2 V = 0,$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} V(x,0) &= 0, \qquad & V(0,y) &= 0, \\ V(x,b) &= 0 \qquad & V(a,y) &= \phi_0. \end{aligned}$$

Note que este é um problema com condições de contorno homogêneas *em* y. Fazemos

$$V(x,y) = X(x)Y(y) \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} X''Y + Y''X &= 0, \\ \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= 0, \;\Rightarrow \\ \frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} &= \lambda. \end{aligned}$$

As condições de contorno se traduzem em

$$\begin{aligned} X(0)Y(y) &= 0, \qquad & X(x)Y(0) &= 0, \\ X(a)Y(y) &= \phi_0, \qquad & X(x)Y(b) &= 0. \end{aligned}$$

É evidente que teremos um problema de Sturm-Liouville em y:

$$Y'' - \lambda Y = 0; \qquad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Uma discussão padrão dos sinais de λ mostra que $\lambda \geq 0$ só gera soluções triviais $Y(y) = 0$, que não podem ser autofunções. para $\lambda < 0$,

$$Y(y) = A\cos(\sqrt{-\lambda}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}y);$$

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad A = 0, \\ Y(b) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \sqrt{-\lambda_n}b = n\pi \\ & \qquad\qquad -\lambda_n b^2 = n^2\pi^2 \\ & \qquad\qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}, \text{ e} \end{aligned}$$

$$Y_n(y) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

A equação para X_n será

$$\begin{aligned} X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X &= 0, \\ X_n(x) &= C_n\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right). \end{aligned}$$

A solução para $V(x,y)$ é da forma

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

As condições de contorno são

$$V(0,y) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Rightarrow C_n = 0.$$

e

$$V(a,y) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Figura 18.7: Uma rotação do domínio da equação de Laplace para V o "transforma" no problema para W.

O cálculo dos coeficientes de Fourier D_n se segue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \mathrm{d}y = \phi_0 \int_0^b \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \mathrm{d}y$$

$$D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \frac{b}{2} = \phi_0 b \left[\frac{1-\cos(m\pi)}{m\pi}\right]$$

$$D_m = \frac{2\phi_0\left[1-\cos(m\pi)\right]}{m\pi \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)}.$$

A solução é

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_0(1-\cos(n\pi))}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Nós *poderíamos* voltar agora e fazer todo o problema para $W(x,y)$: é evidente que ele nos levará a um problema de Sturm-Liouville *em* x. Mas isto não é absolutamente necessário! Olhando novamente para a figura 18.6, vemos que os problemas para V e para W são muito parecidos. Será possível "transformar" o problema V n problema W? Essencialmente sim, se nós girarmos o domínio de V de 90° no sentido positivo, e em seguida refletirmos a figura em torno do eixo vertical. Veja a figura 18.7.
Note que ao final destas operações nós precisamos "ajustar" (de fato, trocar os nomes) as dimensões a e b, e os nomes dos eixos. Isto pode ser feito com a mudança de variáveis

$$\xi = y,$$
$$\eta = x,$$

que na verdade é responsável pelas operacões de rotação e reflexão

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2};$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2};$$

de tal forma que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0.$$

Evidentemente, precisamos:

1. Trocar V por W;
2. Trocar a e b de lugar;
3. Trocar ϕ_0 por $3\phi_0$.

Com estas modificações, a solução para o problema em W é

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\phi_0(1-\cos(n\pi))}{n\pi \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \blacksquare$$

Exemplo 18.10 Resolva

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

com

$$\begin{aligned} \phi(0,y) &= 0, & \phi(L,y) &= 0, \\ \phi(x,M) &= 0, & \phi(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Deixe seu resultado indicado em termos de integrais envolvendo $f(x)$ para os coeficientes de Fourier.

SOLUÇÃO
Como é comum:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= X(x)Y(y), \\ YX'' + XY'' &= 0, \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = -\lambda. \end{aligned}$$

O sinal de menos para λ é uma conveniência algébrica. Olhe para as condições de contorno: um problema homogêneo (Sturm-Liouville) é imediatamente disponível em x; portanto,

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ r^2 + \lambda &= 0, \\ r &= \pm i\sqrt{\lambda}, \\ X(x) &= A(x)\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), \\ X(0) &= X(L) = 0. \end{aligned}$$

As constantes são:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 & &\Rightarrow & A &= 0, \\ X(L) &= 0 & &\Rightarrow & \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) &= n\pi, \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{L}, \\ \lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \\ X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Agora em y:

$$\begin{aligned} Y'' &= \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y, \\ Y'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y &= 0, \\ Y_n &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \end{aligned}$$

As constantes A_n e B_n são obtidas da seguinte forma:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right];$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);$$

$$\int_{x=0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{x=0}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x,$$

$$A_m = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x.$$

Com os $A_m s$ calculados, prosseguimos para obter os $B_n s$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right)\right];$$

$$B_n = -A_n \operatorname{cotgh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right) \blacksquare$$

Exercícios Propostos

18.21 Resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

para o retângulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ e condições de contorno

$$\phi(0, y) = 0, \qquad \phi(x, 0) = 0,$$
$$\phi(a, y) = \phi_0, \qquad \phi(x, b) = 0.$$

18.22 Considere o retângulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$; a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \lambda \phi, \qquad \phi(0, y) = \phi(a, y) = \phi(x, 0) = \phi(x, b) = 0$$

é um problema de autovalores. Utilizando o método de separação de variáveis, $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$, mostre que os autovalores são

$$\lambda_{mn} = -\pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right],$$

e obtenha as autofunções $\phi_{mn}(x, y)$ correspondentes.

18.23 Para a região retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ da figura 18.8, resolva a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

para as condições de contorno indicadas.

18.5 – O método de separação de variáveis para problemas hiperbólicos

Um problema razoavelmente completo de equação da onda em uma dimensão é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tag{18.48}$$

$$\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \tag{18.49}$$

Figura 18.8: Figura do Exercício 18.23.

$$\phi(x,0) = f(x), \tag{18.50}$$

$$\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = g(x). \tag{18.51}$$

Em (18.48), c é a *celeridade* da onda.

O procedimento clássico é

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} &= c^2T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2},\\
\frac{1}{c^2T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}$$

Na última linha acima, temos o argumento clássico do método de separação de variáveis. A questão agora, como sempre, é qual das duas equações (em t ou em x) nós devemos escolher para resolver um problema de Sturm-Liouville. Uma rápida inspeção das condições de contorno deixa evidente que é muito mais fácil escolher x. De fato, nesse caso, devemos ter, partindo de (18.49):

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$$

ou:

$$X(0) = X(L) = 0$$

que estão entre as condições de contorno mais simples de um problema de Sturm Liouville. A equação correspondente de Sturm-Liouville será

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0.$$

Esse é o mesmo problema clássico já resolvido tantas vezes, como por exemplo em (18.20)–(18.21), de maneira que temos

$$X(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Resolvemos agora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2 T_n}\frac{\mathrm{d}^2 T_n}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
\frac{\mathrm{d}^2 T_n}{\mathrm{d}t^2} + \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} T &= 0, \qquad (18.52)\\
T_n(t) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right).
\end{aligned}$$

Note que passamos a usar o subscrito n em T_n, já que agora existe uma solução para cada harmônico conhecido n. Note também que tecnicamente (18.52) *não* é um problema de Sturm-Liouville, já que os autovalores $-n^2\pi^2/L^2$ já são conhecidos.

Nossa solução tem agora a forma

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

Como sempre, precisamos utilizar as condições iniciais (que ainda não foram empregadas) para obter as constantes C_n e D_n. Para tanto, primeiro diferenciamos em relação a t,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(\frac{n\pi c}{L}\right)\left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]$$

ou

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi c}{L}\right)\left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
\end{aligned}$$

De (18.50)–(18.51) segue-se então que, para $t = 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi c}{L}\right) B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}$$

O que resta agora, portanto, é um cálculo clássico de séries de Fourier em senos:

$$\begin{aligned}
f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\\
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^L\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= A_m\frac{L}{2} \Rightarrow\\
A_m &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

analogamente,

$$B_m = \frac{2}{m\pi c}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Exercícios Propostos

18.24 Considere a equação da onda bi-dimensional

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned}\phi(x,y,0) &= \Phi_0(x,y),\\ \phi(0,y,t) &= \phi(a,y,t) = 0,\\ \phi(x,0,t) &= \phi(x,b,t) = 0.\end{aligned}$$

Use a substituição de variáveis

$$\phi(x,y,t) = \psi(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

para obter a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0, \quad k = \omega/c.$$

Esboce os principais passos da solução dessa última equação (*não é preciso resolvê-la*).

18.25 Esta questão a/o guiará para a solução da equação diferencial parcial

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3}, \quad 0 \le x \le L$$

com condições de contorno e iniciais dadas por

$$\begin{aligned}\phi(0,t) &= \phi(L,t) = 0,\\ \phi(x,0) &= 0,\\ \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

com o método de separação de variáveis.

a) Um ataque direto do tipo $\phi(x,t) = X(x)T(t)$ é infrutífero. Tente, e mostre por que ele não funciona.

b) Já o ataque $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$ funciona! Tente, e mostre que

$$f(x) = -\frac{\phi_0}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + c_1x + c_2.$$

c) Com $f(x)$ acima, substitua $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$ nas condições de contorno; mostre que $c_1 = \phi_0/(6L)$ e $c_2 = 0$ produzem $X(0) = X(L) = 0$.

d) Retorne à equação que você conseguiu separar; ela é

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.$$

Resolva a equação para $X(x)$; utilizando as condições homogêneas $X(0) = X(L) = 0$, discuta o sinal de λ e encontre os autovalores λ_n que não produzem soluções triviais.

e) Continue, e resolva a questão até o fim, isto é: ache $\phi(x,t)$. Você deve deixar os coeficientes de Fourier da solução indicados pelas respectivas integrais.

18.26 Zacharias Karl Tamboridéguy é aluno de Engenharia Ambiental da UFPR, e gosta de tocar pandeiro nas (poucas) horas vagas. Seus colegas o conhecem como "Z.K. Tamborim". Ele descobriu que pode modelar as vibrações do "couro" de seu pandeiro de raio a com a equação da onda em coordenadas polares. Se u é o deslocamento do "couro" e se Z.K. Tamborim supuser simetria radial, a equação governante será

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

com condições de contorno e iniciais

$$\begin{aligned} u(a,t) &= 0, \\ u(r,0) &= 0, \\ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} &= v_0(r). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

é a equação diferencial de Bessel de ordem 0, cuja solução geral é $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$, e que $Y_0(x)$ possui uma singularidade logaritmica em $x = 0$, mostre como Z.K. Tamborim obteve a solução $u(r,t)$ para o couro do seu tamborim por separação de variáveis. Em sua solução, você deve deixar os coeficientes de Fourier da solução indicados em termos de integrais envolvendo as funções de Bessel $J_0(x)$, *sem tentar resolvê-las*.

18.27 Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -kx; \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0; \qquad \phi(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = 0.$$

Obtenha uma solução da forma

$$\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x),$$

onde ψ é uma solução da equação de onda homogênea (sem o termo $-kx$), e $u(x)$ é uma solução de regime permanente, que não depende de t.

18.28 Usando o método de separação de variáveis, resolva o problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + bx\cos(t), \\ \phi(x,0) &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) &= 0, \\ \phi(0,t) &= 0, \\ \phi(L,t) &= 0, \end{aligned}$$

onde a e b são constantes positivas. Sugestão: $\{X_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ é um conjunto completo de autofunções que atendem às condições de contorno. Faça $bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(t)\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ e $\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$.

18.6 – A solução de d'Alembert para a equação da onda em um domínio infinito

Considere novamente a equação da onda, porém agora em um domínio infinito, na forma

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\ -\infty \le x \le +\infty,\ t \ge 0 \tag{18.53}$$

$$\phi(x,0) = f(x), \tag{18.54}$$
$$\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = g(x). \tag{18.55}$$

Observe como não há condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ (ou em qualquer outro ponto), uma vez que agora o domínio espacial de validade da equação é infinito.

Nosso objetivo aqui é utilizar as ferramentas da seção 18.2 para obter uma *real* solução do problema (e não apenas classificá-lo, etc.). Façamos portanto

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{18.56}$$
$$v = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \tag{18.57}$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

As duas equações diferenciais de ordem 1 que resultam são

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ou, em forma matricial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.58}$$

A matriz acima possui dois autovalores, $\lambda_1 = c$ e $\lambda_2 = -c$. Os autovetores correspondentes são

$$(1, -1/c),\ (1, 1/c).$$

Sejam $[U, V]^\intercal$ as componentes do vetor de incóginitas na base dos autovetores. Temos

$$(u, v) = U(1, -1/c) + V(1, 1/c),$$

ou

$$u = V + U, \tag{18.59}$$
$$cv = V - U. \tag{18.60}$$

Obtemos:

$$U = \frac{1}{2}(u - cv),$$
$$V = \frac{1}{2}(u + cv).$$

Então, na base dos autovalores:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.61}$$

O sistema está agora desacoplado, e duas equações independentes uma da outra resultam:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{18.62}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - c\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{18.63}$$

As soluções são similares à solução apresentada na solução 18.1, mas talvez valha a pena repetir. Ao longo de uma linha ainda não especificada no plano xt, parametrizada por r, seja

$$U(x,t) = U(X_u(r), T_u(r)) = F(r);$$

a derivada total de F pode ser comparada com (18.62):

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}r} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X_u}{\mathrm{d}r}, \tag{18.64}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_u}{\mathrm{d}r} = 1 \Rightarrow t = T_u(r) = \cancelto{0}{T_u(0)} + r; \tag{18.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_u}{\mathrm{d}r} = c \Rightarrow x = X_u(r) + cr, \tag{18.66}$$

$$x = X_u(0) + ct,$$

$$X_u(0) = x - ct. \tag{18.67}$$

Da identificação de (18.64) com (18.62) segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} = 0 \;\Rightarrow\; F(r) &= F(0),\\
U(x,t) &= U(X_u(r), T_u(r))\\
&= F(r) = F(0) = U(X_u(0), T_u(0)) && (18.68)\\
&= U(X_u(0), 0) = \frac{1}{2}\left[u(X(0),0) - cv(X(0),0)\right]. && (18.69)
\end{aligned}$$

É preciso identificar quem são $u(x,0)$ e $v(x,0)$, mas isso não é muito difícil:

$$u(x,0) = \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = g(x), \tag{18.70}$$

$$v(x,0) = \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial x} = f'(x). \tag{18.71}$$

Utilizando (18.67),

$$U(x,t) = U(X_u(0), 0) = \frac{1}{2}\left[g(x-ct) - cf'(x-ct)\right]. \tag{18.72}$$

Repetindo para V,

$$V(x,t) = V(X_v(s), T_v(s)) = G(s);$$

a derivada total de G pode ser comparada com (18.63):

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T_v}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X_v}{\mathrm{d}s}, \tag{18.73}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_v}{\mathrm{d}s} = 1 \Rightarrow t = T_v(s) = \cancelto{0}{T_v(0)} + s; \tag{18.74}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_v}{\mathrm{d}s} = -c \Rightarrow x = X_v(s) - cs, \tag{18.75}$$

$$x = X_v(0) - cs,$$

$$X_v(0) = x + ct. \tag{18.76}$$

Da identificação de (18.73) com (18.63) segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s} &= 0 \;\Rightarrow\; G(s) = G(0),\\
V(x,t) &= V(X_v(s), T_v(s))\\
&= G(s) = G(0) = V(X_v(0), T_v(0)) && (18.77)\\
&= G(X_v(0), 0) = \frac{1}{2}\left[u(X_v(0), 0) + cv(X_v(0), 0)\right]. && (18.78)
\end{aligned}$$

Utilizando novamente (18.70)–(18.71),

$$V(x,t) = V(X_v(0), 0) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + cf'(x+ct)\right]. \tag{18.79}$$

O par (18.72), (18.79) sugere que talvez o seguinte conjunto de variáveis seja mais "natural" para o problema:

$$\xi = x + ct, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \tag{18.80}$$

$$\eta = x - ct \qquad\qquad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta). \tag{18.81}$$

Suponha agora por simplicidade que $g \equiv 0$ (isso pode ser mudado depois, sem alterar a "essência" do problema). Então, (18.72) e (18.79) produzem

$$U(x,t) = U(\eta) = -\frac{c}{2}f'(\eta), \tag{18.82}$$

$$V(x,t) = V(\xi) = +\frac{c}{2}f'(\xi). \tag{18.83}$$

Naturalmente, em (18.82)–(18.83), as funções de x, t não são as mesmas de ξ, η; o uso dos mesmos símbolos é apenas para não sobrecarregar, ainda mais, a notação.

Essa é uma feliz mudança de variáveis. De fato, agora podemos calcular, rapidamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t},\\
&= c\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - c\frac{\partial\phi}{\partial\eta}, && (18.84)\\
&= c\left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]; && (18.85)\\
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}. && (18.86)
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
u &= V + U,\\
u(x,t) &= V(x,t) + U(x,t),\\
u(x,t) &= \frac{c}{2}\left[f'(x+ct) - f'(x-ct)\right],\\
u(\xi,\eta) &= \frac{c}{2}\left[f'(\xi) - f'(\eta)\right].
\end{aligned}$$

Utilizando (18.85),

$$c\left[\frac{\partial\phi}{\partial\xi} - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right] = \frac{c}{2}\left[f'(\xi) - f'(\eta)\right]. \tag{18.87}$$

Repetimos agora para v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}, \\
&= c\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - c\frac{\partial \phi}{\partial \eta}, && (18.88) \\
&= c\left[\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right]; && (18.89) \\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. && (18.90)
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{c}[V(x,t) - U(x,t)], \\
v(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f'(x+ct) + f'(x-ct)\right], \\
v(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\left[f'(\xi) + f'(\eta)\right].
\end{aligned}$$

Utilizando (18.90),

$$c\left[\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right] = \frac{c}{2}\left[f'(\xi) + f'(\eta)\right]. \tag{18.91}$$

O par de equações (18.87) e (18.91) tem como solução, para as derivadas de ϕ em relação a ξ e a η:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{1}{2}f'(\xi), \tag{18.92}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{1}{2}f'(\eta). \tag{18.93}$$

Esse é um problema clássico, e simples, que tem solução

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[f(\xi) + f(\eta)\right],$$

ou

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right], \tag{18.94}$$

que é a solução de d'Alembert para a equação da onda ■

18.7 – Problemas difusivos com transformações de similaridade

A transformação de Boltzmann, já apresentada nos capítulos 1 e 3, é frequentemente útil em problemas difusivos. Talvez o mais clássico seja o problema em que um meio inicialmente com concetração nula de um soluto A é submetido, instantaneamene, a uma concentração c_0 em $z = 0$. A equação governante é

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2};$$

as condições inicial e de contorno são

$$c(z,0) = 0,$$

$$c(0,t) = c_0,$$
$$c(\infty,t) = 0.$$

Duas condições numericamente iguais $c(z,0) = c(\infty,t) = 0$ sugerem fortemente que a transformação de Boltzmann se aplica. Procuramos agora uma solução da forma

$$\phi = \phi(\xi),$$

com

$$\phi = \frac{c(z,t)}{c_0} \Rightarrow c(z,t) = c_0\phi(\xi(z,t)),$$
$$\xi = \frac{z}{\sqrt{4Dt}} = \frac{z}{\sqrt{4D}}t^{-1/2}.$$

A mudança de variáveis acima envolve o uso da regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}\\ &= -\frac{c_0}{2}\frac{z}{\sqrt{4D}}t^{-3/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\\ &= -\frac{c_0}{2}\frac{z}{\sqrt{4Dt}}t^{-1}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\\ &= -\frac{c_0}{2t}\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}.\end{aligned}$$

Para as derivadas em z,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial z} &= c_0\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}\\ &= \frac{c_0}{\sqrt{4Dt}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi};\\ \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} &= c_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]\frac{\partial\xi}{\partial z}\\ &= c_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\frac{1}{\sqrt{4Dt}}\\ &= \frac{c_0}{4Dt}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}\end{aligned}$$

Substituímos agora em

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2},\\ -\frac{c_0}{2t}\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{c_0 D}{4Dt}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2},\\ \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + 2\xi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= 0.\end{aligned}$$

As duas condições de contorno em ϕ serão:

$$\phi(0) = 1,$$
$$\phi(\infty) = 0.$$

Não é difícil resolver a equação diferencial *em si*, utilizando redução de ordem!

$$
\begin{aligned}
g &\equiv \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi};\\
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi g &= 0;\\
\frac{\mathrm{d}g}{g} &= -2\xi \mathrm{d}\xi;\\
\int_{g_0}^{g(\xi)} \frac{\mathrm{d}g'}{g'} &= -2\int_0^{\xi} \xi' \mathrm{d}\xi';\\
\ln\frac{g(\xi)}{g_0} &= -\mathrm{e}^{-\xi^2};\\
g(\xi) &= -g_0\mathrm{e}^{-\xi^2}\\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= -g_0\mathrm{e}^{-\xi^2}\\
\int_{\phi(0)=1}^{\phi(\xi)} \mathrm{d}\phi' &= -g_0\int_{\xi=0}^{\xi} \mathrm{e}^{-\xi'^2}\,\mathrm{d}\xi'\\
\phi(\xi) - 1 &= -\frac{g_0\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(\xi);\\
\phi(\xi) &= 1 - \frac{g_0\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(\xi).
\end{aligned}
$$

Alguns pontos são importantes se você está vendo este problema pela primeira vez. Um, nós precisamos usar a definição da função erro $\mathrm{erf}(\xi)$:

$$
\mathrm{erf}(\xi) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.
$$

A função erro precisa ser introduzida porque a integral correspondente não pode ser obtida em termos de funções transcedentais elementares (sen, cos, tg, . . . , exp, ln), polinômios, ou funções racionais dessas coisas. A maioria das linguagens computacionais científicas disponíveis no mercado dispõe de uma função erf. A função $\mathrm{erf}(\xi)$ é *ímpar*; e valem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{erf}(0) &= 0,\\
\mathrm{erf}(\infty) &= 1.
\end{aligned}
$$

Dois, precisamos calcular g_0. Note que a condição de contorno

$$
\phi(0) = \frac{c(0,t)}{c_0} = 1
$$

já foi "embutida" na integração da equação diferencial. Mas

$$
\begin{aligned}
&\phi(\infty) = 0 = 1 - \frac{g_0\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow\\
&\frac{g_0\sqrt{\pi}}{2} = 1 \Rightarrow\\
&\phi(\xi) = 1 - \mathrm{erf}(\xi) \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Considere agora uma equação diferencial totalmente diferente:

$$
u\frac{\partial q}{\partial x} = D\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}
$$

Figura 18.9: "O problema de Sutton"

Naturalmente, trata-se de uma versão simplificada (e estacionária: note a ausência da derivada parcial em relação ao tempo) da equação geral de difusão-advecção. Nós vamos utilizá-la para resolver o problema esboçado na figura 18.9, que ficou conhecido na literatura como "O problema de Sutton".

Nesse problema, ar seco sopra sobre um lago, sobre o qual se forma uma camada-limite interna de ar úmido, à medida que o vento (representado por um perfil uniforme em x e em z de velocidade u advecta ar sobre o lago.

Aqui, q é a umidade específica *média*; u é a velocidade do vento *média*; e D é a difusividade turbulenta de vapor d'água na vertical.

Vamos especificar as condições de contorno deste problema:

$$\begin{aligned} q(0,z) &= q_a, \\ q(x,0) &= q_0, \\ q(x,\infty) &= q_a. \end{aligned}$$

Olhando para a figura e considerando a física do problema você consegue explicá-las?

Observe também que $q(0,z) = q(x,\infty)$ sugere fortemente, mais uma vez, a transformação de Boltzmann. Sejamos claros: desejamos reaproveitar a solução que já obtivemos no início deste capítulo! Para tanto, seria muito bom se $q(0,z) = 0$. Mas isso não é um grande problema. Primeiramente, faça

$$\mathcal{X} = \frac{q - q_a}{q_0 - q_a};$$

esta é uma transformação linear na variável q, e portanto segue-se imediatamente que vale

$$u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial z^2}.$$

Na variável $\mathcal{X}$, as condições de contorno são

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(0,z) &= 0, \\ \mathcal{X}(x,0) &= 1, \\ \mathcal{X}(x,\infty) &= 0. \end{aligned}$$

De fato, tentemos

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{4Dx/u}}.$$

Esta variável é adimensional:

$$[\![\xi]\!] = \frac{\mathsf{L}}{(\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}\mathsf{L}\mathsf{T}\,\mathsf{L}^{-1})^{1/2}} = 1.$$

Nosso procedimento agora repete o do início do capítulo, "com x no lugar de t":

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{4D/u}}x^{-3/2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{4Dx/u}}x^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} \\
&= -\frac{1}{2x}\xi\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}.
\end{aligned}$$

Para as derivadas em z,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4Dx/u}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}; \\
\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial z^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right]\frac{\partial \xi}{\partial z} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{4Dx/u}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\right]\frac{1}{\sqrt{4Dx/u}} \\
&= \frac{1}{4Dx/u}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}
\end{aligned}$$

Substituímos agora em

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} &= D\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial z^2}, \\
-u\frac{1}{2x}\xi\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{D}{4Dx/u}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}, \\
\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2} + 2\xi\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} &= 0.
\end{aligned}$$

As duas condições de contorno em ϕ serão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(0) &= 1, \\
\mathcal{X}(\infty) &= 0.
\end{aligned}$$

O problema que temos em mãos é exatamente o mesmo de antes, de forma que já temos a solução!

$$\mathcal{X}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi) \blacksquare$$

Considere agora a seguinte mudança *aparentemente* simples na nossa EDP. Vamos trocar u constante por uma função de z.

Considere a seguinte variação do "problema de Sutton":

$$u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}\right]; \qquad \mathcal{X}(0,z) = 0,\ \mathcal{X}(x,0) = 1,\ \mathcal{X}(x,\infty) = 0.$$

Suponha agora que u e D variam com z segundo

$$u(z) = az^m,$$
$$D(z) = bz^n.$$

Nós vamos supor que vale uma forma bem forte da *analogia de Reynolds* (Reynolds, 1900; Dias, 2013):

$$E/\rho = -D\frac{\partial q}{\partial z},$$
$$\tau/\rho = +D\frac{\partial u}{\partial z} = Dmaz^{m-1} = mabz^{n+m-1}.$$

Aqui, E é o fluxo de massa turbulento de vapor d'água, e τ é o fluxo de quantidade de movimento turbulento. Uma idéia importante em mecânica dos fluidos é que τ não depende de z em uma região próxima da superfície, denominda "sub-camada dinâmica". Se τ não depende de z, então, devemos ter

$$n + m = 1.$$

Além disso, az^m e bz^n não deixam claras as *dimensões*! Podemos contornar esse problema usando um outro conceito clássico em mecânica dos fluidos e turbulência: o conceito de *rugosidade* da superfície. Escrevamos então as equações em termos da velocidade de atrito u_* e dessa rugosidade:

$$\tau/\rho \equiv u_*^2,$$
$$\frac{u}{u_*} = c\left(\frac{z}{z_0}\right)^m.$$

Note também que teremos

$$\tau/\rho = u_*^2 = mab.$$

Agora, é possível obter D em função de u_*, z_0, c e m da seguinte forma:

$$u(z) = az^m = cu_*\left(\frac{z}{z_0}\right)^m,$$
$$D(z) = bz^n = du_*z_0\left(\frac{z}{z_0}\right)^{1-m}.$$

As equações acima foram escritas de forma a explicitar as *dimensões físicas* corretas de u e de D. Nelas, c e d (ao contrário de a e de b) são coeficientes adimensionais. Em seguida,

$$mab = u_*^2,$$
$$m\left(cu_*z_0^{-m}\right)\left(du_*z_0^m\right) = u_*^2,$$
$$d = \frac{1}{mc}.$$

Desse modo, a expressão para a difusividade turbulenta será

$$D = \frac{u_*}{mc}z_0^m z^{1-m}.$$

Reforcemos nosso ponto: nas equações acima, m e c são adimensionais; $[\![u_*]\!] = [\![u]\!] = \mathsf{LT}^{-1}$; $[\![x]\!] = [\![z]\!] = [\![z_0]\!] = \mathsf{L}$ e $[\![D]\!] = \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}$. Usando a variável de similaridade

$$\xi = \frac{mc^2}{(2m+1)^2}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{2m}\frac{z}{x},$$

vamos obter uma equação diferencial *ordinária* na variável independente ξ, e as condições de contorno que ela deve atender. Trata-se de um exercício de aplicação sistemática da regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
\xi &= \left[\frac{mc^2}{(2m+1)^2} z_0^{-2m}\right] z^{2m+1} x^{-1};\\
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\left[\frac{mc^2}{(2m+1)^2} z_0^{-2m}\right] z^{2m+1} x^{-2};\\
\frac{\partial \xi}{\partial z} &= (2m+1)\left[\frac{mc^2}{(2m+1)^2} z_0^{-2m}\right] x^{-1} z^{2m} = \left[\frac{mc^2}{(2m+1)} z_0^{-2m}\right] x^{-1} z^{2m}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} &= u\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\\
&= -u\left[\frac{mc^2}{(2m+1)^2} z_0^{-2m}\right] z^{2m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\\
&= -cu_*\left(\frac{z}{z_0}\right)^m \left[\frac{mc^2}{(2m+1)^2} z_0^{-2m}\right] z^{2m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\\
&= -\frac{mc^3}{(2m+1)^2} u_* z_0^{-3m} z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi};\\
&= -\left[\frac{mc^3 u_* z_0^{-3m}}{(2m+1)^2}\right] z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi};\\
D\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} &= \frac{u_*}{mc} z_0^m z^{1-m}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}\\
&= \frac{u_*}{mc} z_0^m z^{1-m}\left[\frac{mc^2}{(2m+1)} z_0^{-2m}\right] x^{-1} z^{2m}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}\\
&= \left[\frac{u_* c z_0^{-m}}{(2m+1)}\right] z^{m+1} x^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi};\\
\frac{\partial}{\partial z}\left[D\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}\right] &= \left[\frac{u_* c z_0^{-m}}{(2m+1)}\right]\left[(m+1)x^{-1} z^m\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} + z^{m+1} x^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right]\\
&= \left[\frac{u_* c z_0^{-m}}{(2m+1)}\right]\left[(m+1)x^{-1} z^m\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} + \left[\frac{mc^2}{(2m+1)} z_0^{-2m}\right] z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}\right]\\
&= \left[\frac{u_* c z_0^{-m}}{(2m+1)}\right](m+1)x^{-1} z^m\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} + \left[\frac{u_* mc^3 z_0^{-3m}}{(2m+1)^2}\right] z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}.
\end{aligned}$$

Reunindo todos os termos na equação diferencial original:

$$\begin{aligned}
-u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left[D\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z}\right] &= 0;\\
\left[\frac{mc^3 u_* z_0^{-3m}}{(2m+1)^2}\right] z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} + \left[\frac{u_* c z_0^{-m}}{(2m+1)}\right](m+1)x^{-1} z^m\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} &+\\
\left[\frac{u_* mc^3 z_0^{-3m}}{(2m+1)^2}\right] z^{3m+1} x^{-2}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2} &= 0;\\
(2m+1)\left[\frac{mc^2 z_0^{-2m}}{(2m+1)^2}\right] z^{2m+1} x^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} + (m+1)\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi} &+\\
(2m+1)\left[\frac{mc^2 z_0^{-2m}}{(2m+1)^2}\right] z^{2m+1} x^{-1}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2} &= 0.
\end{aligned}$$

A equação diferencial que se obtém é

$$(2m+1)\xi\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}+(m+1)\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}+(2m+1)\xi\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi^2}=0.$$

As condições de contorno em $\mathcal{X}(\xi)$ são as mesmas de antes:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(0)&=1,\\ \mathcal{X}(\infty)&=0.\end{aligned}$$

Vale a pena, por simplicidade, escrever

$$\begin{aligned}\beta&=(2m+1),\\ \delta&=(m+1),\end{aligned}$$

e então reduzir a ordem:

$$\begin{aligned}F&=\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi},\\ \beta\xi\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}+\beta\xi F+\delta F&=0.\end{aligned}$$

Curiosamente, esta é também uma equação separável:

$$\begin{aligned}\beta\xi\mathrm{d}F+\beta\xi F\mathrm{d}\xi+\delta F\mathrm{d}\xi&=0,\\ \beta\mathrm{d}F+\beta F\mathrm{d}\xi+\delta F\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}&=0,\\ \beta\frac{\mathrm{d}F}{F}+\beta\mathrm{d}\xi+\delta\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}&=0,\\ \frac{\mathrm{d}F}{F}&=-\left(1+\frac{\delta}{\beta\xi}\right)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

Integrando, e observando que $\xi>0$,

$$\begin{aligned}\ln|F|&=-\xi+\left(-\frac{\delta}{\beta}\ln(\xi)\right)+c_1\\ &=-\xi+\ln(\xi)^{-\delta/\beta}+c_1,\\ |F(\xi)|&=\exp\left(c_1-\xi+\ln(\xi)^{-\delta/\beta}\right)\ \Rightarrow\\ F(\xi)&=\pm\mathrm{e}^{c_1}\mathrm{e}^{-\xi}\xi^{-\frac{\delta}{\beta}};\\ F(\xi)&=k_1\mathrm{e}^{-\xi}\xi^{-\frac{\delta}{\beta}}.\end{aligned}$$

Uma solução já está praticamente disponível:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}\xi}&=k_1\mathrm{e}^{-\xi}\xi^{-\frac{\delta}{\beta}};\\ \int_\xi^\infty\mathrm{d}\mathcal{X}&=k_1\int_\xi^\infty\mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{\delta}{\beta}}\,\mathrm{d}y;\\ \mathcal{X}(\infty)-\mathcal{X}(\xi)&=k_1\int_\xi^\infty\mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{\delta}{\beta}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Com um pouco de tarimba, é possível ver a função Gama completa:

$$\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{\delta}{\beta}}\,\mathrm{d}y.$$

Além disso, existe a Gama *incompleta*, cuja definição é

$$P(a,\xi)\equiv\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\xi \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}\,\mathrm{d}t.$$

Temos então, em termos dessas criaturas:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\infty)-\mathcal{X}(\xi)&=k_1\left[\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)-\int_0^\xi \mathrm{e}^{-y}y^{-\frac{\delta}{\beta}}\,\mathrm{d}y\right]\\&=k_1\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\left[1-P\left(1-\frac{\delta}{\beta},\xi\right)\right]\\-\mathcal{X}(\xi)&=k_1\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\left[1-P\left(1-\frac{\delta}{\beta},\xi\right)\right].\end{aligned}$$

Mas $P(a,0)=0$; com $\mathcal{X}(0)=1$ temos:

$$\begin{aligned}-1=-\mathcal{X}(0)&=k_1\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right),\\k_1&=-\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)},\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{X}(\xi)=1-P\left(1-\frac{\delta}{\beta},\xi\right)\ \blacksquare$$

Exercícios Propostos

18.29 Um problema difusivo envolve o cálculo da concentração $c(x,t)$ de uma espécie química regida pela equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t}&=v_0\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial c}{\partial x}\right],\\c(x,0)&=0,\\c(0,t)&=c_0,\\c(\infty,t)&=0.\end{aligned}$$

Sabendo que as dimensões físicas do problema são tais que $[\![c]\!]=[\![c_0]\!]$; $[\![x]\!]=\mathsf{L}$; $[\![t]\!]=\mathsf{T}$ e $[\![v_0]\!]=\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}$, e que as variáveis envolvidas são x, t, v_0, $c(x,t)$ e c_0,

a) Encontre as duas variáveis adimensionais ϕ e ξ que governam o problema, de tal maneira que $\phi=\phi(\xi)$.

b) Agora, utilizando o método de transformação de similaridade, encontre a equação diferencial ordinária de ϕ em ξ, e suas condições de contorno. *Não é preciso resolver a equação.*

A

A decomposição de funções racionais em frações parciais

Funções racionais são funções formadas por uma fração, na qual o numerador e o denominador são polinômios. Este tipo de função é bastante comum, e útil. Por exemplo, ele é a base das *aproximações de Padé* (Bender e Orszag, 1978, p. 383–410), um método rápido e acurado de aproximar funções, em geral de forma melhor do que séries de Taylor. Funções racionais também aparecem em integrais próprias e impróprias, e em transformadas de Laplace. A manipulação de funções racionais é grandemente facilitada quando elas são decompostas em *frações parciais*. A teoria geral de frações parciais, e como calculá-las, formam o conteúdo deste apêndice.

A.1 – Conceitos gerais

Um polinômio, naturalmente, é um objeto do tipo

$$P_n(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0.$$

De maneira bastante geral, vamos supor inicialmente que $p_i \in \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$. Dois polinômios podem ser divididos. Uma *fração polinomial* é um objeto do tipo

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

onde o denominador $Q_n(z)$ é o *divisor* ou *quociente*. O *resultado* $E(z)$ e o *resto* $R_r(z)$ também são polinômios. A forma geral de uma divisão polinomial é

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = E(z) + \frac{R_r(z)}{Q_n(z)}, \tag{A.1}$$

onde $r < n$. Quando $m \geq n$, dizemos que a fração polinomial é *imprópria*. Do contrário, ela é uma fração própria. Neste apêndice, nosso interesse é em decompor *frações próprias*. Se $P_m(z)/Q_n(z)$ for imprópria, nós sempre podemos calcular a divisão polinomial (A.1), e então decompor a fração própria $R_r(z)/Q_n(z)$.

Exemplo A.1 Calcule manualmente

$$\frac{-z^3 + 7z^2 - 11z + 5}{z - 1},$$

e mostre que a divisão é exata.

SOLUÇÃO
Veja o exemplo 5.25:

$$E(z) = -z^2 + 6z - 5; \qquad R(z) = 0 \blacksquare$$

Exemplo A.2 Calcule o resultado E e o resto R de

$$\frac{7x^4 + 8x^3 + 2x^2 + x + 4}{2x^2 + 9x + 8}.$$

SOLUÇÃO

Em Maxima, `divide` divide dois polinômios; o resultado e o resto são devolvidos em uma lista:

```
(%i2) P:4+x+2*x^2+8*x^3+7*x^4
                                 4       3       2
(%o2)                         7 x  + 8 x  + 2 x  + x + 4
(%i3) Q:8+9*x+2*x^2
                                       2
(%o3)                               2 x  + 9 x + 8
(%i4) lis:divide(P,Q)
                              2
                         28 x  - 94 x + 319     2111 x + 2520
(%o4)                   [------------------, - -------------]
                                 8                     8
(%i5) E:lis[1]
                                     2
                                 28 x  - 94 x + 319
(%o5)                            ------------------
                                          8
(%i6) R:lis[2]
                                     2111 x + 2520
(%o6)                              - -------------
                                            8
(%i7) expand(P-(R+E*Q))
(%o7)                                       0
```

Portanto,

$$E(x) = \frac{28x^2 - 94x + 319}{8},$$
$$R(x) = -\frac{2111x + 2520}{8} \blacksquare$$

A.2 – Exemplos concretos

Portanto, *fração polinomial* e *função racional* são sinônimos. Vamos nos concentrar, a partir de agora, em funções racionais que são frações polinomiais *próprias*. Novamente: frações polinomiais próprias são objetos do tipo

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

com $n > m$. Um fato muito importante é o *teorema Fundamental da Álgebra*: $Q_n(z)$ sempre terá n raízes complexas (repetidas ou não).

A decomposição em frações parciais consiste em encontrar as raízes de $Q_n(z)$, e escrever P_m/Q_n como uma soma de frações mais simples.

Os exemplos a seguir mostram diversos cálculos de decomposições em frações parciais com Maxima. Eles têm o objetivo de mostrar para você o *padrão* dessas decomposições. Mais tarde, na seção A.5, voltaremos ao seu cálculo manual. Portanto, não se preocupe muito com "como" Maxima faz as decomposições, mas preste atenção aos padrões que emergem. Por simplicidade, todos os exemplos são feitos com coeficientes reais.

Exemplo A.3 Decomponha

$$\frac{2z+4}{-z^2+6z-5}$$

em frações parciais.

SOLUÇÃO
As raízes de $Q(z)$ são $z = 1$ e $z = 5$. Com Maxima,

```
(%i1) partfrac((2*z+4)/(-z^2+6*z-5),z);
                                  3            7
(%o1)                          --------- - ---------
                               2 (z - 1)   2 (z - 5)
```

e portanto

$$\frac{2z+4}{-z^2+6z-5} = \frac{3/2}{z-1} - \frac{7/2}{z-5}.$$

Note como do lado direito aparecem as raízes a de $Q(z)$ na forma $(z-a)$. A decomposição em frações parciais, que Maxima fez para nós, requer o cálculo dos coeficientes $3/2$ e $-7/2$ ■

Exemplo A.4 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^2-2z+1}$$

em frações parciais.

SOLUÇÃO
A raíz dupla de $Q(z)$ é $z = 1$. Com Maxima,

```
(%i1) partfrac((2*z+4)/(z^2-2*z+1),z) ;
                                 2         6
(%o1)                          ----- + --------
                               z - 1           2
                                       (z - 1)
```

e portanto

$$\frac{2z+4}{z^2-2z+1} = \frac{2}{z-1} + \frac{6}{(z-1)^2} \quad ■$$

Às vezes, todos os coeficientes polinomiais de P e de Q são reais, mas algumas das raízes de Q são complexas. Nesses casos, para alguns termos não existem raízes reais a com as quais escrever $z-a$, e o denominador de algumas da frações parciais precisa ser deixado na forma de um polinômio de grau 2, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo A.5 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^3+z^2-2}$$

em frações parciais.

SOLUÇÃO
As raízes de $Q(z)$ são $-1-\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$, e 1. Com Maxima,

```
(%i1) P : 2*z + 4 ;
(%o1)                                  2 z + 4
(%i2) Q : z^3 + z^2 - 2 ;
                                      3    2
(%o2)                                 z  + z  - 2
(%i3) partfrac(P/Q,z);
                                 6            6 z + 8
(%o3)                        --------- - ----------------
                             5 (z - 1)        2
                                        5 (z  + 2 z + 2)
```

Portanto,

$$\frac{2z+4}{z^3+z^2-2} = \frac{6/5}{z-1} - \frac{(6z+8)/5}{z^2+2z+2}.$$

Neste exemplo, $z^2+2z+2 = (z-[-1-\mathrm{i}])(z-[-1+\mathrm{i}])$ teve que ser deixado "como estava". Lembre-se: quando um polinômio com coeficientes reais possui raízes complexas, elas sempre vêm em pares conjugados ■

Eventualmente, pode ser proveitoso decompor a expressão em frações envolvendo as raízes complexas. Neste caso,

Exemplo A.6 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^3+z^2-2}$$

em frações parciais, explicitando as raízes complexas.

SOLUÇÃO
As raízes de $Q(z)$ são $-1-\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$, e 1. Com Maxima,

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) P : 2*z + 4 ;
(%o2)                            2 z + 4
(%i3) Q : z^3 + z^2 - 2 ;
                                 3    2
(%o3)                           z  + z  - 2
(%i4) partfrac(gfactor(P/Q),z);
                  %i - 1                        %i + 1
(%o4) - ------------------------ + -------------------------
        (2 %i - 1) (z + %i + 1)   (- 2 %i - 1) (z - %i + 1)
                                                                  6
                                                             + ---------
                                                               5 (z - 1)
```

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{2z+4}{z^3+z^2-2} &= \frac{(1-\mathrm{i})/(-1+2\mathrm{i})}{z-(-1-\mathrm{i})} + \frac{(1+\mathrm{i})/(-1-2\mathrm{i})}{z-(-1+\mathrm{i})} + \frac{6/5}{z-1}\\ &= \frac{-3/5+\mathrm{i}/5}{z-(-1-\mathrm{i})} + \frac{-3/5-\mathrm{i}/5}{z-(-1+\mathrm{i})} + \frac{6/5}{z-1} \ ■\end{aligned}$$

Naturalmente, raízes complexas também podem ser repetidas. Por exemplo, faça

$$Q(z) = (z-1)\big((z-[-1-\mathrm{i}])(z-[-1+\mathrm{i}])\big)^2 = z^5+3z^4+4z^3-4z-4,$$

e resolva o

Exemplo A.7 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4}$$

em frações parciais.

SOLUÇÃO
Com Maxima,

```
(%i1) P : 2*z + 4 ;
(%o1)                                  2 z + 4
(%i2) Q : z^5 + 3*z^4 + 4*z^3 - 4*z - 4 ;
                                 5      4       3
(%o2)                          z  + 3 z  + 4 z  - 4 z - 4
(%i3) partfrac(P/Q,z);
                        6 z + 18              6 z + 8              6
(%o3)          - ----------------- - ----------------- + ----------
                         2                    2             2   25 (z - 1)
                  25 (z  + 2 z + 2)    5 (z  + 2 z + 2)
```

Portanto,

$$\frac{2z+4}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4} = \frac{6/25}{z-1} - \frac{(6z+18)/25}{z^2+2z+z} - \frac{(6z+8)/5}{(z^2+2z+2)^2} \blacksquare$$

Nos exemplos A.5 e A.7, z^2+2z+2 é um polinômio *irredutível* nos reais: ele não pode ser fatorado na forma $(z-a)(z-b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$, e precisa ser deixado "como está". Observe a analogia entre os Exemplos A.4 e A.7.

Os exemplos que acabamos de ver nos preparam para reconhecer os padrões das decomposições em frações parciais, e compreender melhor as seções A.3 e A.4 que se seguem. Elas são áridas, mas como sempre o esforço de compreendê-las compensa. Os teoremas que vamos encontrar nessas seções explicam os padrões que, esperamos, você acabou de identificar. Os padrões, promovidos a teoremas, sempre se repetirão.

A.3 – Coeficientes complexos

Por incrível que pareça, é melhor começar considerando polinômios com coeficientes complexos, em $z \in \mathbb{C}$. Considere uma expressão do tipo

$$f(z) = \frac{sz-\alpha}{(z-a)(z-b)}. \tag{A.2}$$

com z, α, s, a, b e $f(z) \in \mathbb{C}$. Como vimos, $f(z)$ é uma *função racional*. Note que toda função racional $P_1(z)/Q_2(z)$, onde $P_1(z)$ e $Q_2(z)$ são polinômios de grau 1 (no máximo) e 2 (exatamente), pode ser escrita na forma (A.2). A constante s permite que P_1 seja de grau zero ($s = 0$) ou 1 ($s \neq 0$). Podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{sz-\alpha}{(z-a)(z-b)} &= \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}, \\ &= \frac{A(z-b)+B(z-a)}{(z-a)(z-b)}, \\ sz-\alpha &= (A+B)z - (Ab+Ba). \end{aligned} \tag{A.3}$$

O sistema de equações resultantes em A e B,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \alpha \end{bmatrix}, \tag{A.4}$$

tem solução única para (A, B) desde que o determinante da matriz seja não-nulo, ou seja, desde que $a \neq b$. Resolvendo (A.4), portanto, nós acabamos de resolver nossa primeira decomposição — simples — em frações parciais.

Se $a = b$, então a decomposição (A.3) não é possível. No entanto, a seguinte alternativa é viável:

$$\begin{aligned} \frac{sz-\alpha}{(z-a)(z-a)} &= \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2}, \\ &= \frac{A_1(z-a)+A_2}{(z-a)(z-a)}, \\ sz-\alpha &= A_1 z + (A_2 - A_1 a). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Agora, o sistema de equações resultantes em A_1 e A_2 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

O seu determinante é +1, e uma solução única A_1, A_2 é sempre possível.

Agora, estendemos a decomposição para o caso de um polinômio de grau 3 no denominador, e de grau 2 (no máximo) no numerador. Por simplicidade, suponha inicialmente $a \neq b \neq c \neq a$:

$$\begin{aligned} \frac{(s_1 z-\alpha)}{(z-a)(z-b)} \times \frac{(s_2 z-\gamma)}{(z-c)} &= \left[\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}\right] \frac{s_2 z-\gamma}{z-c}, \\ \frac{(s_1 z-\alpha)(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-b)(z-c)} &= \frac{A(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-c)} + \frac{B(s_2 z-\gamma)}{(z-b)(z-c)}. \end{aligned}$$

A decomposição (A.3) é aplicável para cada uma das duas funções racionais do lado direito, acima:

$$\begin{aligned} \frac{(s_1 z-\alpha)(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-b)(z-c)} &= \frac{A'}{z-a} + \frac{C_1'}{z-c} + \frac{B'}{z-b} + \frac{C_2'}{z-c} \\ &= \frac{A'}{z-a} + \frac{B'}{z-b} + \frac{C_1'+C_2'}{z-c} \\ &= \frac{A'}{z-a} + \frac{B'}{z-b} + \frac{C'}{z-c}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Claramente, (A.6) generaliza (A.3).

Se $b = a \neq c$,

$$\begin{aligned} \frac{(s_1 z-\alpha)}{(z-a)(z-a)} \times \frac{(s_2 z-\gamma)}{(z-c)} &= \left[\frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2}\right] \frac{s_2 z-\gamma}{z-c}, \\ \frac{(s_1 z-\alpha)(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-a)(z-c)} &= \frac{A_1(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-c)} + \frac{A_2(z-\gamma)}{(z-a)^2(z-c)}. \\ &= \left[\frac{A_1(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-c)}\right] + \frac{1}{z-a}\left[\frac{A_2(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-c)}\right] \end{aligned}$$

Novamente, cada um dos colchetes acima tem a forma adequada para a decomposição (A.3):

$$\begin{aligned} \frac{(s_1 z-\alpha)(s_2 z-\gamma)}{(z-a)(z-a)(z-c)} &= \left[\frac{A_1'}{z-a} + \frac{C_1'}{z-c}\right] + \frac{1}{z-a}\left[\frac{A_2'}{z-a} + \frac{C_2'}{z-c}\right] \\ &= \left[\frac{A_1'}{z-a} + \frac{C_1'}{z-c}\right] + \frac{A_2'}{(z-a)^2} + \left[\frac{C_2'}{(z-a)(z-c)}\right] \end{aligned}$$

Usando ainda mais uma vez (A.3) para o último colchete,

$$\begin{aligned}\frac{(s_1z-\alpha)(s_2z-\gamma)}{(z-a)(z-a)(z-c)} &= \frac{A_1'}{z-a}+\frac{A_2'}{(z-a)^2}+\frac{C_1'}{z-c}+\frac{A_3'}{z-a}+\frac{C_3'}{z-c}\\ &= \frac{A_1'+A_3'}{z-a}+\frac{A_2'}{(z-a)^2}+\frac{C_1'+C_2'}{z-c}\\ &= \frac{A_1''}{z-a}+\frac{A_2''}{(z-a)^2}+\frac{C''}{z-c}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Naturalmente, (A.7) generaliza (A.5).

No caso $a = b = c$,

$$\begin{aligned}\frac{s_1z-\alpha}{(z-a)^2}\times\frac{s_2z-\gamma}{(z-a)} &= \left[\frac{A_1}{z-a}+\frac{A_2}{(z-a)^2}\right]\frac{s_2z-\gamma}{(z-a)},\\ \frac{(s_1z-\alpha)(s_2z-\gamma)}{(z-a)^3} &= \left[\frac{A_1(s_2z-\gamma)}{(z-a)^2}\right]+\left[\frac{A_2(s_2z-\gamma)}{(z-a)^2}\right]\frac{1}{z-a}\\ &= \left[\frac{A_1'}{z-a}+\frac{A_2'}{(z-a)^2}\right]+\left[\frac{A_1''}{z-a}+\frac{A_2''}{(z-a)^2}\right]\frac{1}{z-a}\\ &= \frac{A_1'''}{z-a}+\frac{A_2'''}{(z-a)^2}+\frac{A_3'''}{(z-a)^3}; \end{aligned} \tag{A.8}$$

(A.8) é uma outra generalização de (A.5).

Embora um pouco lento e detalhado, esse processo nos permite claramente identificar a lei de formação de que necessitamos para a decomposição geral, em frações parciais, de uma função racional do tipo $f(z) = P_{n-1}(z)/Q_n(z)$, onde $P_{n-1}(z)$ é um polinômio de no máximo grau $n-1$, e $Q_n(z)$ é um polinômio de grau exatamente igual a n.

De fato, seja a_i uma raiz de multiplicidade m_i de $Q_n(z)$. Pelo teorema Fundamental da Álgebra, podemos escrever

$$Q_n(z) = \left[(z-a_1)^{m_1}\right]\left[(z-a_2)^{m_2}\right]\ldots\left[(z-a_p)^{m_p}\right], \tag{A.9}$$

onde $p \le n$, e $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. Note que, sem perda de generalidade, nós sempre vamos supor que $q_n \equiv 1$: se $q_n \neq 1$, basta multiplicar todos os coeficientes de P_{n-1} por $1/q_n$.

As decomposições (A.3)–(A.8) que obtivemos acima sugerem

$$\begin{aligned}\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = &\left[\frac{A_1^{(1)}}{(z-a_1)}+\ldots+\frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z-a_1)^{m_1}}\right]+\\ &\left[\frac{A_1^{(2)}}{(z-a_2)}+\ldots+\frac{A_{m_2}^{(2)}}{(z-a_2)^{m_2}}\right]+\\ &\ldots+\\ &\left[\frac{A_1^{(p)}}{(z-a_p)}+\ldots+\frac{A_{m_p}^{(p)}}{(z-a_p)^{m_p}}\right],\end{aligned}$$

ou:

Teorema A.1 (teorema de decomposição de funções racionais em frações parciais.) Dada a função racional $P_{n-1}(z)/Q_n(z)$, onde $z, P_{n-1}(z), Q_n(z) \in \mathbb{C}$, com $Q_n(z)$ dado por (A.9), e P_{n-1}, Q_n, a_i, m_i e p como definidos acima, então existem n constantes $A_j^{(i)} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z-a_i)^j}. \tag{A.10}$$

Podemos provar o teorema A.1 por indução finita. Suponha que (A.10) seja verdadeira para n; então,

$$\frac{P_n(z)}{Q_{n+1}(z)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(s_k z - \alpha_k)}{\prod_{i=1}^{p}(z-a_i)^{m_i}} \times \frac{s_n z - \gamma}{(z-c)} = \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z-a_i)^j}\right] \frac{sz-\gamma}{z-c}. \tag{A.11}$$

Considere dois casos:

i) Se $c \neq a_i,\ i = 1, \ldots, p$, faça $\gamma = \alpha_n$, $c = a_{p+1}$, $m_{p+1} = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(z)}{Q_{n+1}(z)} &= \left[\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z-a_i)^j}\right] \frac{s_n z - \alpha_n}{z - a_{p+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_i)^j (z-a_{p+1})}\right].\end{aligned} \tag{A.12}$$

Não podemos decompor os termos entre colchetes da última linha acima usando (A.10): $j \leq n$, de forma que o denominador de um deles pode, eventualmente, ser de grau $n+1$. Lembre-se de que em uma dedução por indução finita nós partimos da suposição de que a relação a ser provada, (A.10), vale para n: ainda não podemos supor que ela vale para $n+1$, que é o que estamos tentando provar! Fazemos então:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(z)}{Q_{n+1}(z)} &= \sum_{i=1}^{p} \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i-1} \frac{A_j^{(i)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_i)^j (z-a_{p+1})}\right) + \frac{A_{m_i}^{(i)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_i)^{m_i}(z-a_{p+1})}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left[\left(\sum_{j=1}^{m_i-1} \frac{A_j^{(i)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_i)^j (z-a_{p+1})}\right) + \frac{1}{(z-a_i)^{m_i-1}} \left(\frac{A_{m_i}^{(i)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_i)(z-a_{p+1})}\right)\right].\end{aligned}$$

Agora, cada um dos termos entre parênteses pode ser decomposto:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(z)}{Q_{n+1}(z)} &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i-1} \left[\left(\sum_{k=1}^{j} \frac{B_k^{(ij)}}{(z-a_i)^k}\right) + \frac{C_j^{(i)}}{(z-a_{p+1})}\right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{1}{(z-a_i)^{m_i-1}} \left(\frac{D^{(i)}}{(z-a_i)} + \frac{E^{(i)}}{(z-a_{p+1})}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i-1} \left[\left(\sum_{k=1}^{j} \frac{B_k^{(ij)}}{(z-a_i)^k}\right) + \frac{C_j^{(i)}}{(z-a_{p+1})}\right]\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{D^{(i)}}{(z-a_i)^{m_i}}+\frac{E^{(i)}}{(z-a_i)^{m_i-1}(z-a_{p+1})}\right].$$

Os termos envolvendo $E^{(i)}$ ainda precisam ser decompostos mais uma vez, usando (A.10):

$$\frac{P_n(z)}{Q_{n+1}(z)}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{j}\frac{B_k^{(ij)}}{(z-a_i)^k}\right)+\frac{C^{(ij)}}{(z-a_{p+1})}\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{D^{(i)}}{(z-a_i)^{m_i}}+\left(\sum_{k=1}^{m_{i-1}}\frac{F_k^{(i)}}{(z-a_k)^k}\right)+\frac{G^{(i)}}{(z-a_{p+1})}\right].$$

Todos os expoentes de $(z-a_i)$, $i=1,\ldots,p+1$, acima, estão entre 1 e m_i; podemos, portanto, rearranjar os Bs acima, agrupando-os de acordo com a raiz a_i, e o seu expoente j, como se segue:

$$A'^{(i)}_j\equiv\sum_{I=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_I-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{J}B_k^{(IJ)}\delta_{iI}\delta_{kj}\right)+C_j^{(I)}\delta_{i(p+1)}\delta_{1j}\right]$$
$$+\sum_{I=1}^{p}\left[D^{(I)}\delta_{iI}\delta_{m_Ij}+\left(\sum_{k=1}^{m_{I-1}}F_k^{(I)}\delta_{ik}\delta_{kj}\right)+G^{(I)}\delta_{i(p+1)}\delta_{1j}\right]. \quad \text{(A.13)}$$

Obtemos, finalmente,

$$\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(s_kz-\alpha_k)}{\prod_{i=1}^{p+1}(z-a_i)^{m_i}}=\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A'^{(i)}_j}{(z-a_i)^j}. \quad \text{(A.14)}$$

(A.14) é o mesmo que (A.10), para $n+1$: para $c\neq a_i$, se (A.10) vale para n, então ela vale, também, para $n+1$.

ii) Se $c=a_q$, para $1\leq q\leq p$, então basta fazer $\gamma=\alpha_n$ e incrementar m_q:

$$\mu_i=\begin{cases}m_i, & i\neq q,\\ m_i+1, & i=q;\end{cases}$$

continue:

$$\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(s_kz-\alpha_k)}{\prod_{i=1}^{p}(z-a_i)^{\mu_i}} \quad \text{(A.15)}$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{A_j^{(i)}}{(z-a_i)^j}\right]\frac{s_nz-\alpha_n}{z-a_q}$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{A_j^{(i)}(s_nz-\alpha_n)}{(z-a_i)^j}\right]\frac{1}{(z-a_q)}.$$
$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{p}\left[\sum_{j=1}^{m_i}\frac{A_j^{(i)}(s_nz-\alpha_n)}{(z-a_i)^j(z-a_q)}\right]+\sum_{j=1}^{m_q}\frac{A_j^{(q)}(s_nz-\alpha_n)}{(z-a_q)^{j+1}}. \quad \text{(A.16)}$$

O primeiro somatório (somatório duplo) acima tem a mesma forma de (A.12), e portanto pode ser decomposto imediatamente em frações parciais:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{p}\left[\sum_{j=1}^{m_j}\frac{A_j^{(i)}(s_nz-\alpha_n)}{(z-a_i)^j(z-a_q)}\right]=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{p}\sum_{j=1}^{\mu_i}\left[\frac{B_j^{(i)}}{(z-a_i)^j}\right]+\frac{C_1^{(q1)}}{(z-a_q)} \quad \text{(A.17)}$$

Entretanto, novamente não podemos decompor os termos do segundo somatório de (A.16) usando (A.10): $j \leq n$, de forma que o denominador de um deles pode, eventualmente, ser de grau $n+1$. Fazemos então a decomposição dentro do termo entre colchetes a seguir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_q} \frac{A_j^{(q)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_q)^{j+1}} &= \sum_{j=1}^{m_q} \frac{1}{z-a_q}\left[\frac{A_j^{(q)}(s_n z - \alpha_n)}{(z-a_q)^{j}}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m_q} \frac{1}{z-a_q}\left[\sum_{k=1}^{j} \frac{C_k'^{(ij)}}{(z-a_q)^{k}}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m_q}\sum_{k=1}^{j} \frac{C_k'^{(qj)}}{(z-a_q)^{k+1}} \\
&= \sum_{j=2}^{\mu_q}\sum_{k=2}^{j} \frac{C_k^{(qj)}}{(z-a_q)^{k}} \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

Reunindo (A.17) e (A.18), temos:

$$\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{p}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{B_j^{(i)}}{(z-a_i)^j} + \sum_{j=1}^{\mu_q}\sum_{k=1}^{j} \frac{C_k^{(qj)}}{(z-a_q)^k} \qquad \text{(A.19)}$$

(A.19) já está na forma de frações parciais simples, e agora basta renomear os termos:

$$A_j'^{(i)} \equiv B_j^{(i)} + \sum_{J=1}^{\mu_q}\sum_{k=1}^{J} C_k^{(qJ)}\delta_{iq}\delta_{kj}, \qquad \text{(A.20)}$$

para obter, por fim,

$$\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{A_j'^{(i)}}{(z-a_i)^j} \qquad \text{(A.21)}$$

(A.21) é o mesmo que (A.10), para $n+1$, e agora a demonstração de (A.10) por indução finita está completa ■

A.4 – Coeficientes reais

Frequentemente, desejamos decompor em frações parciais uma função racional *real*,

$$f(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)},$$

onde x, $P_{n-1}(x)$ e $Q_n(x)$ (e seus coeficientes) $\in \mathbb{R}$. Considere inicialmente o caso

$$\frac{P_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{sx-\alpha}{x^2+q_1x+q_0}.$$

Quando as duas raízes de $Q_2(x)$ forem reais, a decomposição segue, trivialmente, (A.3), só que com todos os coeficientes reais:

$$\frac{sx-\alpha}{x^2+q_1x+q_0} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

$s, x, \alpha, q_1, q_0, A, B, a, b \in \mathbb{R}$.

Suponha, entretanto, que $Q_2(x)$ seja irredutível. Neste caso, $P_1(x)/Q_2(x)$ já está em sua forma mais simples, e deve ser deixado como está:

Teorema A.2 Se $P_1(x) = sx - \alpha$ $(x, s, \alpha \in \mathbb{R})$; e $Q_2(x) = x^2 + q_1 x + q_0$ $(q_0, q_1 \in \mathbb{R})$ tiver duas raízes conjugadas complexas (*i.e.*, se ele for irredutível), então a expressão

$$\frac{P_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{sx - \alpha}{x^2 + q_1 x + q_0} \tag{A.22}$$

já está em sua forma mais simples.

De fato, sejam b e b^* as raízes complexas de $Q_2(x)$; em virtude de (A.10), devemos ter

$$\frac{sx - \alpha}{x^2 + q_1 x + q_0} = \frac{B_1'}{x - b} + \frac{B_2'}{x - b^*};$$

a *única* maneira de garantir $P_1(x)/Q_2(x) \in \mathbb{R}$, entretanto, é fazer $B = B_1' = B_2'^*$; então,

$$\begin{aligned}
\frac{B}{(x-b)} + \frac{B^*}{(x-b^*)} &= \frac{B(x-b^*) + B^*(x-b)}{(x-b)(x-b^*)} \\
&= \frac{(B+B^*)x + (Bb^* + B^*b)}{x^2 + q_1 x + q_0}, \\
&= \frac{B_1 x + B_0}{x^2 + q_1 x + q_0},
\end{aligned} \tag{A.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 &= (B + B^*) \in \mathbb{R}, \\
B_0 &= (Bb^* + B^*b) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto, $s = B_1$ e $\alpha = -B_0$, e não há simplificações possíveis com números reais ■

O próximo caso é o de multiplicidade 2 para b e b^*. Novamente, de (A.10) temos:

$$\frac{P_3(x)}{\left[Q_2(x)\right]^2} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{A^*}{x-b^*} + \frac{B^*}{(x-b^*)^2}, \tag{A.24}$$

onde já escrevemos para os coeficientes das 3ª e 4ª frações parciais A^* e B^*, que são a condição necessária e suficiente para que o lado direito da expressão seja puramente real. Antes de prosseguir, observe que a expressão acima possui apenas quatro graus de liberdade, que são as partes real e imaginária de A e B, respectivamente. De fato, rearranjando (A.24), temos

$$\frac{P_3(x)}{\left[Q_2(x)\right]^2} = \frac{A}{x-b} + \frac{A^*}{x-b^*} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B^*}{(x-b^*)^2};$$

note que, como acabamos de observar,

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x-b} + \frac{A^*}{x-b^*} &= \frac{A}{x-b} + \left[\frac{A}{x-b}\right]^* \in \mathbb{R}, \\
\frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B^*}{(x-b^*)^2} &= \frac{B}{(x-b)^2} + \left[\frac{B}{(x-b)^2}\right]^* \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\frac{P_3(x)}{\left[Q_2(x)\right]^2} = \frac{A}{x-b} + \frac{A^*}{x-b^*} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B^*}{(x-b^*)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A(x-b^*)+A^*(x-b)}{(x-b)(x-b^*)} + \frac{B(x-b^*)^2+B^*(x-b)^2}{\big[(x-b)(x-b^*)\big]^2} \\
&= \frac{A(x-b^*)+A^*(x-b)}{(x-b)(x-b^*)} + \frac{B(x^2-2xb^*+b^{*2})+B^*(x^2-2xb+b^2)}{\big[(x-b)(x-b^*)\big]^2} \\
&= \frac{(A+A^*)x-(Ab^*+A^*b)}{Q_2(x)} + \\
&\quad \frac{(B+B^*)x^2-2(Bb^*+B^*b)x+(Bb^{*2}+B^*b^2)}{[Q_2(x)]^2}.
\end{aligned}
$$

No lado direito da última igualdade acima, existem 5 números reais: $(A+A^*)$, $-(Ab^*+A^*b)$, $(B+B^*)$, $-2(Bb^*+B^*b)$ e $(Bb^{*2}+B^*b^2)$ — mas eles não são independentes! De fato, lembre-se de que há apenas 4 números reais originalmente, que são as partes real e imaginária de A e de B, em (A.24).

Façamos agora, por simplicidade,

$$
\begin{aligned}
A_1' &= (A+A^*), \\
A_0' &= -(Ab^*+A^*b), \\
B_2' &= (B+B^*), \\
B_1' &= -2(Bb^*+B^*b), \\
B_0' &= (Bb^{*2}+B^*b^2).
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\frac{P_3(x)}{\big[Q_2(x)\big]^2} = \frac{A_1'x+A_0'}{Q_2(x)} + \frac{B_2'x^2+B_1'x+B_0'}{[Q_2(x)]^2}.
$$

Podemos agora ver com mais clareza os 4 graus de liberdade originais da seguinte maneira: primeiro,

$$
\begin{aligned}
x^2 &\equiv x^2+[q_1x+q_0]-[q_1x+q_0] \\
&= Q_2(x)-[q_1x+q_0]; \\
B_2'x^2 &= B_2'Q_2(x)-B_2'[q_1x+q_0];
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\frac{P_3(x)}{\big[Q_2(x)\big]^2} &= \frac{A_1'x+A_0'}{Q_2(x)} + \frac{B_2'Q_2(x)-B_2'[q_1x+q_0]+B_1'x+B_0'}{[Q_2(x)]^2} \\
&= \frac{[A_1'x+A_0']Q_2(x)+B_2'Q_2(x)+(B_1'-B_2'q1)x+(B_0'-B_2'q_0)}{\big[Q_2(x)\big]^2} \\
&= \frac{[(A_1')x+(A_0'+B_2')]Q_2(x)+(B_1'-B_2'q1)x+(B_0'-B_2'q_0)}{\big[Q_2(x)\big]^2}.
\end{aligned}
$$

As expressões agrupadas entre parênteses na última igualdade acima revelam os 4 graus de liberdade. Rebatizando-as convenientemente, obtemos, finalmente,

$$
\frac{P_3(x)}{\big[Q_2(x)\big]^2} = \frac{A_1x+A_0}{Q_2(x)} + \frac{B_1x+B_0}{\big[Q_2(x)\big]^2}. \tag{A.25}
$$

A generalização de A.25 é o

Teorema A.3 Se $P_{2n-1}(x)$ é um polinômio de grau $2n-1$ real, e $Q_2(x)$ é um polinômio de grau 2 irredutível, então vale a decomposição

$$\frac{P_{2n-1}(x)}{[Q_2(x)]^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{1j}x + B_{0j}}{[Q_2(x)]^j}. \tag{A.26}$$

Podemos provar o teorema A.3 por indução finita. Suponha que (A.26) valha para n. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{2n+1}(x)}{[Q_2(x)]^{n+1}} &= \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \times \frac{P_{2n-1}(x)}{[Q_2(x)]^n} \\
&= \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \times \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{B'_{1j}x + B'_{0j}}{[Q_2(x)]^j}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{P_2(x)\left(B'_{1j}x + B'_{0j}\right)}{[Q_2(x)]^{j+1}}\right] + \frac{P_2(x)\left(B'_{1n}x + B'_{0n}\right)}{[Q_2(x)]^{n+1}}
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Começamos com a parte fácil: para cada um dos termos entre colchetes acima, vale, novamente, (A.26):

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{P_2(x)\left(B'_{1j}x + B'_{0j}\right)}{[Q_2(x)]^{j+1}}\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{j+1} \frac{B_{1k}^{(j)}x + B_{0k}^{(j)}}{[Q_2(x)]^k}\right].$$

O termo que resta em (A.27) pode ser simplificado com o auxílio de A.25

$$\begin{aligned}
\frac{P_2(x)\left(B'_{1n}x + B'_{0n}\right)}{[Q_2(x)]^{n+1}} &= \frac{1}{[Q_2(x)]^{n-1}} \times \frac{P_3(x)}{[Q_2(x)]^2} \\
&= \frac{1}{[Q_2(x)]^{n-1}} \times \left[\frac{Cx + D}{Q_2(x)} + \frac{Ex + F}{[Q_2(x)]^2}\right] \\
&= \frac{Cx + D}{[Q_2(x)]^n} + \frac{Ex + F}{[Q_2(x)]^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Temos portanto

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{[Q_2(x)]^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{j+1} \frac{B_{1k}^{(j)}x + B_{0k}^{(j)}}{[Q_2(x)]^k}\right] + \frac{Cx + D}{[Q_2(x)]^n} + \frac{Ex + F}{[Q_2(x)]^{n+1}},$$

que já está na forma de (A.26) para $n+1$, bastando reescrever

$$B_{1j} = \sum_{J=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{J+1} B_{1k}^{(J)} \delta_{kj} + C\delta_{nj} + E\delta_{(n+1)j}, \tag{A.28}$$

$$B_{0j} = \sum_{J=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{J+1} B_{0k}^{(J)} \delta_{kj} + E\delta_{nj} + F\delta_{(n+1)j} \blacksquare \tag{A.29}$$

Vamos precisar ainda de mais alguns teoremas auxiliares para podermos provar, com mais facilidade, o teorema de decomposição em frações racionais para coeficientes reais. O primeiro deles é o

---

Teorema A.4 Qualquer expressão da forma

$$\frac{P_2(x)}{(x-a)Q_2(x)}$$

onde $P_2(x)$ e $Q_2(x)$ são polinômios reais de grau 2 e $Q_2(x)$ é irredutível em $\mathbb{R}$, pode ser decomposta em

$$\frac{P_2(x)}{(x-a)Q_2(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1x+B_0}{Q_2(x)} \tag{A.30}$$

com $A, B_1, B_0 \in \mathbb{R}$.

De fato, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{P_2(x)}{(x-a)Q_2(x)} &= \frac{p_2x^2+p_1x+p_0}{(x-a)Q_2(x)} \\
&= \frac{1}{x-a} \times \frac{p_2Q_2(x)+[p_1-p_2q_1]x+[p_0-p_2q_0]}{Q_2(x)} \\
&= \frac{p_2Q_2(x)}{(x-a)Q_2(x)} + \frac{[p_1-p_2q_1]x+[p_0-p_2q_0]}{(x-a)Q_2(x)} \\
&= \frac{p_2}{x-a} + \frac{[p_1-p_2q_1]x+[p_0-p_2q_0]}{(x-a)Q_2(x)}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

O primeiro termo acima já está na forma desejada; precisamos portanto mostrar que vale a decomposição em frações parciais para o segundo termo. Para tanto, sejam b e b^* as raízes complexas conjugadas de $Q_2(x)$. O segundo termo é da forma

$$\frac{r_1x+r_0}{(x-a)(x-b)(x-b^*)}$$

com $r_1 = p_1 - p_2q_1$ e $r_0 = p_0 - p_2q_0$. De (A.10) temos imediatamente que

$$\begin{aligned}
\frac{r_1x+r_0}{(x-a)(x-b)(x-b^*)} &= \frac{A'}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{B^*}{x-b^*}, \\
&= \frac{A'}{x-a} + \frac{B_1x+B_0}{Q_2(x)}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

onde já usamos B e B^* porque sabemos que o lado esquerdo é puramente real, e portanto o direito também tem que ser, e a segunda linha segue-se imediatamente de A.23. Reunindo (A.31) e (A.32),

$$\begin{aligned}
\frac{p_2x^2+p_1x+p_0}{(x-a)Q_2(x)} &= \frac{p_2}{x-a} + \frac{A'}{x-a} + \frac{B_1x+B_0}{Q_2(x)} \\
&= \frac{A}{x-a} + \frac{B_1x+B_0}{Q_2(x)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O caminho está aberto para uma generalização mais ou menos óbvia:

Teorema A.5 Qualquer expressão da forma

$$\frac{P_{m+1}(x)}{(x-a)^mQ_2(x)}$$

onde $P_{m+1}(x)$ e $Q_2(x)$ são polinômios reais de graus $m+1$ e 2, e $Q_2(x)$ é irredutível em $\mathbb{R}$, pode ser decomposta em

$$\frac{P_{m+1}(x)}{(x-a)^m Q_2(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{(x-a)^j} + \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)} \tag{A.33}$$

com $A_1, \ldots, A_m, B_1, B_0 \in \mathbb{R}$.

Suponha que (A.33 valha para m; então,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{m+2}(x)}{(x-a)^{m+1} Q_2(x)} &= \frac{sx-\alpha}{(x-a)} \times \frac{P_{m+1}(x)}{(x-a)^m Q_2(x)}, \\
&= \frac{sx-\alpha}{(x-a)} \times \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{(x-a)^j} + \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)} \right] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{A_j (sx-\alpha)}{(x-a)^{j+1}} \right] + \frac{(B_1 x + B_0)(sx-\alpha)}{(x-a) Q_2(x)}.
\end{aligned}$$

O termo entre colchetes pode ser decomposto imediatamente utilizando (A.10) (e observando que todos os coeficientes são necessariamente reais). O segundo termo nada mais é do que a expressão (A.30), do teorema A.4. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{m+2}(x)}{(x-a)^{m+1} Q_2(x)} &= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{A'_j}{(x-a)^j} + \frac{A''_1}{(x-a)} + \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)} \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{A'''_j}{(x-a)^j} + \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)},
\end{aligned} \tag{A.34}$$

e isso prova, por indução finita, o teorema A.5 ■

Temos também o

Teorema A.6 Qualquer expressão da forma

$$\frac{P_{2n}(x)}{(x-a)\,[Q_2(x)]^n}$$

onde $P_{2n}(x)$ e $Q_2(x)$ são polinômios reais de graus $2n$ e 2, e $Q_2(x)$ é irredutível em $\mathbb{R}$, pode ser decomposta em

$$\frac{P_{2n}(x)}{(x-a)\,[Q_2(x)]^n} = \frac{A}{(x-a)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{1j} x + B_{0j}}{[Q_2(x)]^j} \tag{A.35}$$

com $A_1, \ldots, A_m, B_{1j}, B_{0j} \in \mathbb{R}$.

Suponha que (A.35) valha para n; então,

$$\begin{aligned}
\frac{P_{2(n+1)}(x)}{(x-a)\,[Q_2(x)]^{n+1}} &= \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \times \frac{P_{2n}(x)}{(x-a)\,[Q_2(x)]^n} \\
&= \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \times \left[\frac{A}{(x-a)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_{1j} x + B_{0j}}{[Q_2(x)]^j} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{AP_2(x)}{(x-a)Q_2(x)} + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{P_2(x)\left(B_{1j}x + B_{0j}\right)}{[Q_2(x)]^{j+1}} \right]$$

O primeiro termo do lado direito pode ser decomposto usando (A.30):

$$\frac{AP_2(x)}{(x-a)Q_2(x)} = \frac{A'}{x-a} + \frac{B'_1 x + B'_0}{Q_2(x)},$$

enquanto que cada um dos termos entre colchetes pode ser decomposto usando (A.26):

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{P_2(x)\left(B_{1j}x + B_{0j}\right)}{[Q_2(x)]^{j+1}} \right] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{C_k^{(j)} x + D_k^{(j)}}{[Q_2(x)]^k};$$

portanto,

$$\frac{P_{2(n+1)}(x)}{(x-a)\,[Q_2(x)]^{n+1}} = \frac{A'}{x-a} + \frac{B'_1 x + B'_0}{Q_2(x)} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{C_k^{(j)} x + D_k^{(j)}}{[Q_2(x)]^k}.$$

Basta então reagrupar os coeficientes, e observar que a expressão acima já está na forma de A.35 para $n+1$, se:

$$A = A', \tag{A.36}$$

$$B_{1j} = B'_1 \delta_{1j} + \sum_{J=1}^{n} \sum_{k=1}^{J+1} C_k^{(J)} \delta_{kj}, \tag{A.37}$$

$$B_{0j} = B'_0 \delta_{1j} + \sum_{J=1}^{n} \sum_{k=1}^{J+1} D_k^{(J)} \delta_{kj} \ \blacksquare \tag{A.38}$$

Em seguida, vamos ver o que acontece quando temos dois polinômios irredutíveis no denominador, com o

---

Teorema A.7 Qualquer expressão da forma

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)R_2(x)}$$

onde todos os polinômios são reais, e onde $Q_2(x)$ e $R_2(x)$ são dois polinômios irredutíveis de grau 2, pode ser decomposta como

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)R_2(x)} = \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)}, \tag{A.39}$$

com $B_1, B_0, C_1, C_0 \in \mathbb{R}$.

Sejam b, b^* as raízes complexas conjugadas de $Q_2(x)$, e c, c^* as raízes complexas conjugadas de $R_2(x)$. Segue-se imediatamente de (A.10) e de (A.23) que

$$\begin{aligned} \frac{P_3(x)}{Q_2(x)R_2(x)} &= \frac{B}{x-b} + \frac{B^*}{x-b^*} + \frac{C}{x-c} + \frac{C^*}{x-c^*} \\ &= \frac{B_1 x + B_0}{Q_2(x)} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Novamente, temos uma generalização para raízes (complexas) múltiplas em $Q_2(x)$:

Teorema A.8 Qualquer expressão da forma

$$\frac{P_{2m+1}(x)}{[Q_2(x)]^m R_2(x)}$$

onde todos os polinômios são reais, e onde $Q_2(x)$ e $R_2(x)$ são dois polinômios irredutíveis de grau 2, pode ser decomposta como

$$\frac{P_{2m+1}(x)}{[Q_2(x)]^m R_2(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{j1}x + B_{j0}}{[Q_2(x)]^j} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)}, \tag{A.40}$$

com $B_1, B_0, C_1, C_0 \in \mathbb{R}$.

Suponha que (A.40) valha para m. Então,

$$\begin{aligned}\frac{P_{2m+3}(x)}{[Q_2(x)]^{m+1} R_2(x)} &= \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{B_{j1}x + B_{j0}}{[Q_2(x)]^j} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)}\right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\left(B_{j1}x + B_{j0}\right) P_2(x)}{[Q_2(x)]^{j+1}}\right] + \frac{(C_1 x + C_0)\, P_2(x)}{Q_2(x) R_2(x)}.\end{aligned}$$

Todos os termos entre colchetes estão na forma do teorema A.3, equação (A.26); temos então

$$\frac{\left(B_{j1}x + B_{j0}\right) P_2(x)}{[Q_2(x)]^{j+1}} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{B'^{(j)}_{k1} x + B'^{(j)}_{k0}}{[Q_2(x)]^k}.$$

Já o termo restante está diretamente na forma do teorema A.7, equação (A.39):

$$\frac{(C_1 x + C_0)\, P_2(x)}{Q_2(x) R_2(x)} = \frac{B''_1 x + B''_0}{Q_2(x)} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)}.$$

Reunindo tudo, teremos

$$\frac{P_{2m+3}(x)}{[Q_2(x)]^{m+1} R_2(x)} = \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{B'^{(j)}_{k1} x + B'^{(j)}_{k0}}{[Q_2(x)]^k}\right] + \frac{B''_1 x + B''_0}{Q_2(x)} + \frac{C_1 x + C_0}{R_2(x)},$$

que já está na forma, para $m+1$, do teorema A.8, equação (A.40), bastando fazer

$$B_{j1} = \sum_{J=1}^{m} \sum_{k=1}^{J+1} B'^{(J)}_{k1} \delta_{kj} + B''_1 \delta 1 j, \tag{A.41}$$

$$B_{j0} = \sum_{J=1}^{m} \sum_{k=1}^{J+1} B'^{(J)}_{k0} \delta_{kj} + B''_0 \delta 1 j \ \blacksquare \tag{A.42}$$

Prosseguimos agora para generalizar os resultados com polinômios reais para qualquer ordem. Sejam então $a_i \in \mathbb{R}$ uma raiz de multiplicidade m_i, e (b_i, b_i^*) *pares* de raízes complexas de multiplicidade n_i, de um polinômio $Q_n(x)$ real com coeficientes reais. Pelo teorema Fundamental da Álgebra, podemos escrever

$$\begin{aligned}Q_n(x) = &\left[(x-a_1)^{m_1}\right]\left[(x-a_2)^{m_2}\right]\ldots\left[(x-a_p)^{m_p}\right]\times \\ &\left[\left((x-b_1)(x-b_1^*)\right)^{n_1}\right]\left[\left((x-b_2)(x-b_2^*)\right)^{n_2}\right]\ldots\left[\left((x-b_q)(x-b_q^*)\right)^{n_q}\right],\end{aligned} \tag{A.43}$$

com $m_1 + m_2 + \ldots + m_p + 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_q) = n$. Mas

$$(x - b_i)(x - b_i^*) = x^2 + q_{1i}x + q_{0i} \equiv Q_2^{(i)}(x),$$

com $q_{1i}, q_{0i} \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$Q_n(x) = \left[(x - a_1)^{m_1}\right]\left[(x - a_2)^{m_2}\right] \ldots \left[(x - a_p)^{m_p}\right] \times \\ \left[\left(Q_2^{(1)}(x)\right)^{n_1}\right]\left[\left(Q_2^{(2)}(x)\right)^{n_2}\right] \ldots \left[\left(Q_2^{(q)}(x)\right)^{n_q}\right]. \quad \text{(A.44)}$$

As decomposições (A.22) e (A.25) que obtivemos acima sugerem

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = & \left[\frac{A_1^{(1)}}{(z - a_1)} + \ldots + \frac{A_{m_1}^{(1)}}{(z - a_1)^{m_1}}\right] + \\
& \left[\frac{A_1^{(2)}}{(z - a_2)} + \ldots + \frac{A_{m_2}^{(2)}}{(z - a_2)^{m_2}}\right] + \\
& \ldots + \\
& \left[\frac{A_1^{(p)}}{(z - a_p)} + \ldots + \frac{A_{m_p}^{(p)}}{(z - a_p)^{m_p}}\right] + \\
& \left[\frac{B_{11}^{(1)}x + B_{10}^{(1)}}{Q_2^{(1)}(x)} + \ldots + \frac{B_{n_1 1}^{(1)}x + B_{n_1 0}^{(1)}}{[Q_2^{(1)}(x)]^{n_1}}\right] + \\
& \left[\frac{B_{11}^{(2)}x + B_{10}^{(2)}}{Q_2^{(2)}(x)} + \ldots + \frac{B_{n_2 1}^{(2)}x + B_{n_1 0}^{(2)}}{[Q_2^{(2)}(x)]^{n_2}}\right] + \\
& \ldots + \\
& \left[\frac{B_{11}^{(q)}x + B_{10}^{(q)}}{Q_2^{(q)}(x)} + \ldots + \frac{B_{n_q 1}^{(q)}x + B_{n_1 0}^{(q)}}{[Q_2^{(q)}(x)]^{n_q}}\right],
\end{aligned}$$

ou:

Teorema A.9 (teorema de decomposição de funções racionais em frações parciais reais.) Dada a função racional $P_{n-1}(x)/Q_n(x)$, onde $x, P_{n-1}(x), Q_n(x) \in \mathbb{R}$, com $Q_n(x)$ dado por (A.44), e P_{n-1}, Q_n, (a_i, m_i e p), (b_i, n_i e q) como definidos acima, então existem constantes $A_j^{(i)}, B_{j1}^{(i)}, B_{j0}^{(i)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{A_j^{(i)}}{(x - a_i)^j}\right] + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{B_{j1}^{(i)}x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j}\right]. \quad \text{(A.45)}$$

Novamente, a prova é por indução finita. Se passarmos de $Q_n(x)$ para $Q_{n+1}(x)$ pela inclusão de uma nova raiz (necessariamente) real, então

$$\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} = \frac{P_{n-1}}{Q_n(x)} \times \frac{s_n x - \gamma}{(x - c)}.$$

Considere dois casos:

i) Se $c \neq a_i$, $i = 1, \ldots, p$, faça $\gamma = \alpha_n$, $c = a_{p+1}$, $m_{p+1} = 1$, e como sempre suponha que (A.45) vale para n:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} &= \frac{s_n x - \alpha_n}{(x - a_{p+1})} \times \left\{ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)}}{(x - a_i)^j} \right] + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j} \right] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)} (s_n x - \alpha_n)}{(x - a_i)^j (x - a_{p+1})} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) (s_n x - \alpha_n)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j (x - a_{p+1})} \right].
\end{aligned}$$

No primeiro somatório, usamos mais uma vez A.10 para cada termo entre colchetes:

$$\frac{A_j^{(i)} (s_n x - \gamma)}{(x - a_i)^j (x - a_{p+1})} = \sum_{k=1}^{j} \frac{A'^{(ij)}_k}{(x - a_i)^k} + \frac{A''^{(ij)}}{x - a_{p+1}}.$$

No segundo somatório, usamos A.35 para cada termo entre colchetes:

$$\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) (s_n x - \alpha_n)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j (x - a_{p+1})} = \frac{A'''^{(ij)}}{x - a_{p+1}} + \sum_{k=1}^{j} \frac{B'^{(ij)}_{k1} x + B'^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^k}$$

Obviamente, isso coloca imediatamente $P_n(x)/Q_{n+1}(x)$ na forma de A.45:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{A'^{(ij)}_k}{(x - a_i)^k} + \frac{A''^{(ij)}}{x - a_{p+1}} \\
&+ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A'''^{(ij)}}{x - a_{p+1}} + \sum_{k=1}^{j} \frac{B'^{(ij)}_{k1} x + B'^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^k} \right],
\end{aligned}$$

e este caso está provado, bastando reescrever, em nome da concisão,

$$\begin{aligned}
A_j^{(i)} &= \sum_{I=1}^{p} \sum_{J=1}^{m_I} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{J} A'^{(IJ)}_k \delta_{Ii} \delta_{kj} \right] + A''^{(IJ)} \delta_{(p+1)i} \delta_{1j} \right\} \\
&+ \sum_{I=1}^{q} \sum_{J=1}^{n_I} A'''^{(IJ)} \delta_{(p+1)i} \delta_{1j}, \\
B_{j1}^{(i)} &= \sum_{I=1}^{q} \sum_{J=1}^{n_I} \sum_{k=1}^{J} B'^{IJ}_{k1} \delta_{Ii} \delta_{kj}, \\
B_{j0}^{(i)} &= \sum_{I=1}^{q} \sum_{J=1}^{n_I} \sum_{k=1}^{J} B'^{IJ}_{k0} \delta_{Ii} \delta_{kj}.
\end{aligned}$$

ii) Se $c = a_r$, $1 \leq r \leq p$, então basta fazer $\gamma = \alpha_n$ e incrementar m_r:

$$\mu_i = \begin{cases} m_i, & i \neq r, \\ m_i + 1, & i = r; \end{cases}$$

continue:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} &= \frac{s_n x - \alpha_n}{(x-a_r)} \times \left\{ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j} \right] + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j} \right] \right\} \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)} \left(s_n x - \alpha_n\right)}{(x-a_i)^j (x-a_r)} \right] + \sum_{j=1}^{m_r} \left[\frac{A_j^{(r)} \left(s_n x - \alpha_n\right)}{(x-a_r)^{j+1}} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) \left(s_n x - \alpha_n\right)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j (x-a_r)} \right].
\end{aligned}$$

No primeiro somatório acima, usamos mais uma vez A.10 para cada termo entre colchetes:

$$\frac{A_j^{(i)} \left(s_n x - \gamma\right)}{(x-a_i)^j (x-a_r)} = \sum_{k=1}^{j} \frac{{A'}_k^{(ij)}}{(x-a_i)^k} + \frac{A''^{(ij)}}{x-a_r}.$$

Cada termo entre colchetes do segundo somatório também pode ser trivialmente decomposto, pelo mesmo motivo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_r} \frac{A_j^{(r)} \left(s_n x - \alpha_n\right)}{(x-a_r)^{j+1}} &= \sum_{j=2}^{\mu_r} \frac{A_{j-1}^{(r)} \left(s_n x - \alpha_n\right)}{(x-a_r)^j} \\
&= \sum_{j=2}^{\mu_r} \sum_{k=1}^{j} \frac{{A'''}_k^{(j)}}{(x-a_r)^k}.
\end{aligned}$$

No terceiro somatório, usamos A.35 para cada termo entre colchetes:

$$\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) \left(s_n x - \alpha_n\right)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j (x-a_r)} = \frac{A''''^{(ij)}}{x-a_r} + \sum_{k=1}^{j} \frac{{B'}_{k1}^{(ij)} x + {B'}_{k0}^{(ij)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^k}$$

Agora, isso coloca novamente $P_n(x)/Q_{n+1}(x)$ na forma de A.45:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_{n+1}(x)} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{j} \frac{{A'}_k^{(ij)}}{(x-a_i)^k} + \frac{A''^{(ij)}}{x-a_r} \\
&+ \sum_{j=2}^{\mu_r} \sum_{k=1}^{j} \frac{{A'''}_k^{(j)}}{(x-a_r)^k} \\
&+ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A''''^{(ij)}}{x-a_r} + \sum_{k=1}^{j} \frac{{B'}_{k1}^{(ij)} x + {B'}_{k0}^{(ij)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^k} \right],
\end{aligned}$$

e este caso está provado, bastando reescrever, em nome da concisão,

$$\begin{aligned}
A_j^{(i)} &= \sum_{\substack{I=1 \\ I \neq r}}^{p} \sum_{J=1}^{m_I} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{J} {A'}_k^{(IJ)} \delta_{Ii} \delta_{kj} \right] + A''^{(IJ)} \delta_{(p+1)i} \delta_{1j} \right\} \\
&+ \sum_{J=2}^{\mu_r} \sum_{k=1}^{J} {A'''}_k^{(J)} \delta_{ri} \delta_{kj} + \sum_{I=1}^{q} \sum_{J=1}^{n_I} A''''^{(IJ)} \delta_{ri} \delta_{1j},
\end{aligned}$$

$$B_{j1}^{(i)} = \sum_{I=1}^{q}\sum_{J=1}^{n_I}\sum_{k=1}^{J} B'^{IJ}_{k1}\delta_{Ii}\delta_{kj}\,,$$

$$B_{j0}^{(i)} = \sum_{I=1}^{q}\sum_{J=1}^{n_I}\sum_{k=1}^{J} B'^{IJ}_{k0}\delta_{Ii}\delta_{kj}.$$

A outra possibilidade é passarmos de $Q_n(x)$ para $Q_{n+2}(x)$ pela inclusão de um par de raízes complexas conjugadas:

$$\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+2}(x)} = \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)} \times \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Novamente, precisamos considerar dois casos:

i) Se $Q_2(x) \neq Q_2^{(i)}, i = 1,\ldots,q$, faça $Q_2(x) = Q_2^{(q+1)}(x)$, $n_{q+1} = 1$. Agora, suponha que (A.45) vale para n; então,

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+2}(x)} &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j}\right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2^{(q+1)}(x)} \\ &+ \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{B_{j1}^{(i)}x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j}\right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2^{(q+1)}(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\frac{A_j^{(i)}P_2(x)}{(x-a_i)^j Q_2^{(q+1)}(x)}\right] + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{\left(B_{j1}^{(i)}x + B_{j0}^{(i)}\right)P_2(x)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j Q_2^{(q+1)}(x)}\right].\end{aligned}$$

Para cada termo entre colchetes do primeiro somatório acima, podemos aplicar o teorema A.5, expressão (A.33):

$$\frac{A_j^{(i)}P_2(x)}{(x-a_i)^j Q_2^{(q+1)}(x)} = \left[\sum_{k=1}^{j}\frac{A'^{(ij)}_k}{(x-a_i)^k}\right] + \frac{B'^{(ij)}_1 + B'^{(ij)}_0}{Q_2^{(q+1)}(x)}.$$

Para os termos entre colchetes no segundo somatório (duplo), é preciso ter um pouco de cuidado, porque, eventualmente, j pode alcançar n, e nesse caso não podemos mais aplicar, *a priori*, (A.45). Note entretanto que já temos o resultado auxiliar do teorema A.8 expressão(A.40):

$$\frac{\left(B_{j1}^{(i)}x + B_{j0}^{(i)}\right)P_2(x)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j Q_2^{(q+1)}(x)} = \sum_{k=1}^{j}\frac{B''^{(ij)}_{k1}x + B''^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}\right]^k} + \frac{C_1^{(ij)}x + C_0^{(ij)}}{Q_2^{(q+1)}}.$$

Podemos, portanto, novamente reunir todos os nossos resultados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+2}(x)} &= \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{m_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\frac{A'^{(ij)}_k}{(x-a_i)^k}\right] + \frac{B'^{(ij)}_1 + B'^{(ij)}_0}{Q_2^{(q+1)}(x)}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^{q}\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\frac{B''^{(ij)}_{k1}x + B''^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}\right]^k}\right] + \frac{C_1^{(ij)}x + C_0^{(ij)}}{Q_2^{(q+1)}}\right].\end{aligned}$$

A expressão acima já está na forma de (A.45), para $n+2$, desde que:

$$A_j^{(i)} = \sum_{J=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{J} A'^{iJ} \delta_{kj}, \tag{A.46}$$

$$B_{j1}^{(i)} = \sum_{J=1}^{m_i} B'^{iJ}_{1} \delta_{(q+1)i}\delta_{1j} + \left[\sum_{J=1}^{n_i} \left[\sum_{k=1}^{J} B''^{(iJ)}_{k1} \delta_{kj} \right] + C_1^{(iJ)} \delta_{(q+1)i}\delta_{1j} \right], \tag{A.47}$$

$$B_{j0}^{(i)} = \sum_{J=1}^{m_i} B'^{(iJ)}_{0} \delta_{(q+1)i}\delta_{1j} + \left[\sum_{J=1}^{n_i} \left[\sum_{k=1}^{J} B''^{iJ}_{k0} \delta kj \right] + C_0^{(iJ)} \delta_{(q+1)i}\delta_{1j} \right], \tag{A.48}$$

o que completa a prova por indução finita para este caso.

ii) Se $Q_2(x) = Q_2^{(r)}(x)$, $1 \leq r \leq p$, então basta incrementar m_r:

$$\mu_i = \begin{cases} m_i, & i \neq r, \\ m_i + 1, & i = r; \end{cases}$$

continue:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+2}(x)} &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j} \right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2^{(r)}(x)} \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j} \right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2^{(r)}(x)} + \sum_{j=1}^{n_r} \left[\frac{B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}}{\left[Q_2^{(r)}(x)\right]^j} \right] \times \frac{P_2(x)}{Q_2^{(r)}(x)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_i} \left[\frac{A_j^{(i)} P_2(x)}{(x-a_i)^j Q_2^{(r)}(x)} \right] \\
&+ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) P_2(x)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j Q_2^{(r)}(x)} \right] + \sum_{j=1}^{n_r} \left[\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) P_2(x)}{\left[Q_2^{(r)}(x)\right]^{j+1}} \right].
\end{aligned}$$

Para cada termo entre colchetes do primeiro somatório acima, podemos aplicar o teorema A.5, expressão (A.33):

$$\frac{A_j^{(i)} P_2(x)}{(x-a_i)^j Q_2^{(r)}(x)} = \left[\sum_{k=1}^{j} \frac{A'^{(ij)}_{k}}{(x-a_i)^k} \right] + \frac{B'^{(ij)}_{1} + B'^{(ij)}_{0}}{Q_2^{(r)}(x)}.$$

Para os termos entre colchetes no segundo somatório (duplo), podemos aplicar o teorema A.8, equação (A.40):

$$\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) P_2(x)}{\left[Q_2^{(i)}(x)\right]^j Q_2^{(r)}(x)} = \sum_{k=1}^{j} \frac{B''^{(ij)}_{k1} x + B''^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}\right]^k} + \frac{C_1^{(ij)} x + C_0^{(ij)}}{Q_2^{(r)}}.$$

Finalmente, para o último somatório, aplicamos o teorema A.3 e a equação (A.26):

$$\frac{\left(B_{j1}^{(i)} x + B_{j0}^{(i)}\right) P_2(x)}{\left[Q_2^{(r)}(x)\right]^{j+1}} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{B'''^{(r(j+1))}_{k1} x + B'''^{(r(j+1))}_{k0}}{\left[Q_2^{(r)}(x)\right]^k}.$$

Podemos, portanto, novamente reunir todos os nossos resultados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+2}(x)} &= \sum_{i=1}^{p}\left[\sum_{j=1}^{m_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\frac{A'^{(ij)}_{k}}{(x-a_i)^k}\right]+\frac{B'^{(ij)}_{1}+B'^{(ij)}_{0}}{Q_2^{(r)}(x)}\right]\\ &+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{q}\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{j}\frac{B''^{(ij)}_{k1}x+B''^{(ij)}_{k0}}{\left[Q_2^{(i)}\right]^k}\right]+\frac{C_1^{(ij)}x+C_0^{(ij)}}{Q_2^{(r)}}\right]\\ &+\sum_{j=2}^{\mu_r}\sum_{k=1}^{j}\frac{B'''^{(rj)}_{k1}x+B'''^{(rj)}_{k0}}{\left[Q_2^{(r)}(x)\right]^k}.\end{aligned}$$

A expressão acima já está na forma de (A.45), para $n+2$, desde que:

$$A_j^{(i)} = \sum_{J=1}^{m_i}\sum_{k=1}^{J} A'^{iJ}\delta_{kj}, \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}B_{j1}^{(i)} &= \sum_{J=1}^{m_i} B'^{(iJ)}_{1}\delta_{ri}\delta_{1j}+\left[\sum_{J=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{J}B''^{(iJ)}_{k1}\delta_{kj}\right]+C_1^{(iJ)}\delta_{ri}\delta_{1j}\right]\\ &+\sum_{J=2}^{\mu_r}\sum_{k=1}^{J}B'''^{(rJ)}_{k1}\delta_{ri}\delta_{kj},\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}B_{j0}^{(i)} &= \sum_{J=1}^{m_i} B'^{(iJ)}_{0}\delta_{ri}\delta_{1j}+\left[\sum_{J=1}^{n_i}\left[\sum_{k=1}^{J}B''^{(iJ)}_{k0}\delta_{kj}\right]+C_0^{(iJ)}\delta_{ri}\delta_{1j}\right]\\ &+\sum_{J=2}^{\mu_r}\sum_{k=1}^{J}B'''^{(rJ)}_{k0}\delta_{ri}\delta_{kj},\end{aligned} \tag{A.51}$$

o que completa a prova de todos os casos reais de decomposição em frações parciais ■

A.5 – Exemplos concretos, detalhados

Exemplo A.8 Decomponha

$$\frac{2z+4}{-z^2+6z-5}$$

SOLUÇÃO
Precisamos fatorar o denominador. Isso é fácil, pois trata-se de um polinômio do 2º grau, cujas raízes são 1 e 5. Então, devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{2z+4}{-z^2+6z-5} = \frac{-2z-4}{z^2-6z+5} &= \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-5}\\ &= \frac{A(z-5)+B(z-1)}{z^2-6z+5}\\ &= \frac{(A+B)z+(-5A-B)}{z^2-6z+5} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A+B &= -2,\\ -5A-B &= -4 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$A = 3/2,$$
$$B = -7/2 \blacksquare$$

Exemplo A.9 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^3 - z^2 - 2}$$

em frações parciais.

SOLUÇÃO
O denominador é um polinômio de 3º grau. No entanto, é evidente que 1 é raiz. Dividimos portanto o denominador por $z - 1$:

```
(%i1) (z^3 + z^2 - 2)/(z-1);
                                    3     2
                                   z  + z  - 2
(%o1)                              -----------
                                      z - 1
(%i2) ratsimp(%);
                                   2
(%o2)                             z  + 2 z + 2
```

Este último polinômio *não tem* raízes reais, e deve ser deixado como está. A forma da decomposição em frações parciais, portanto, é

$$\begin{aligned}\frac{2z+4}{z^3+z^2-2} &= \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+2z+2} \\ &= \frac{A(z^2+2z+2) + (Bz+C)(z-1)}{z^2+2z+2} \\ &= \frac{(A+B)z^2 + (2A-B+C)z + (2A-C)}{z^2+2z+2}.\end{aligned}$$

O sistema de equações lineares a resolver é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Donde $A = 6/5$, $B = -6/5$, e $C = -8/5$ $\blacksquare$

Exemplo A.10 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^3 - z^2 - 2}$$

em frações parciais, explicitando as raízes complexas.

SOLUÇÃO
As raízes complexas são as raízes de $z^2 + 2z + 2 = 0$, que são $-1 - \mathrm{i}$ e $-1 + \mathrm{i}$. A forma da decomposição em frações parciais, portanto, é

$$\begin{aligned}\frac{2z+4}{z^3+z^2-2} &= \frac{A}{-1-\mathrm{i}} + \frac{B}{-1+\mathrm{i}} + \frac{C}{z-1} \\ &= \frac{A[z-(-1+\mathrm{i})][z-1] + B[z-(-1-\mathrm{i})][z-1] + C[z-(-1+\mathrm{i})][z-(-1-\mathrm{i})]}{z^3+z^2-2}.\end{aligned}$$

O polinômio obtido no denominador, com a ajuda de Maxima, é

```
(%i1) linel : 70 ;
(%o1)                                70
(%i2) z1 : -1 - %i ;
(%o2)                             - %i - 1
(%i3) z2 : -1 + %i ;
(%o3)                              %i - 1
(%i4) z3 : 1 ;
(%o4)                                1
(%i5) A*(z-z1)*(z-z3) + B*(z-z2)*(z-z3) + C*(z-z1)*(z-z2) ;
(%o5) (z - %i + 1) (z + %i + 1) C + (z - 1) (z - %i + 1) B
                                                 + (z - 1) (z + %i + 1) A
(%i6) expand(%);
        2                      2                              2
(%o6) z  C + 2 z C + 2 C + z  B - %i z B + %i B - B + z  A + %i z A
                                                                - %i A - A
(%i7) rat(%,z);
                         2
(%o7)/R/ (C + B + A) z  + (2 C - %i B + %i A) z + 2 C + (%i - 1) B
                                                      + (- %i - 1) A
```

O sistema de equações lineares a resolver é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ -1-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Donde $A = -3/5 + \mathrm{i}/5$, $B = -3/5 - \mathrm{i}/5$, $C = 6/5$ ■

Exemplo A.11 Decomponha

$$\frac{2z+4}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4}$$

em frações parciais.
Novamente, $z = 1$ é uma raiz. A divisão do denominador por $z - 1$ produz

```
(%i1) ratsimp((z^5 + 3*z^4 + 4*z^3 - 4*z - 4)/(z-1));
                              4       3       2
(%o1)                        z  + 4 z  + 8 z  + 8 z + 4
```

Por tentativa e erro, é possível identificar o polinômio acima como um quadrado perfeito de ordem 2. De fato, note que

$$(z^2+bz+c)^2 = z^4 + 2bz^3 + (2c+b^2)z^2 + 2bcz + c^2;$$

portanto, se $b = 2$ e $c = 2$, então $2b = 4$, $2c + b^2 = 8$, $2bc = 8$ e $c^2 = 4$. Segue-se que o denominador pode ser fatorado em

$$z^5 + 3z^4 + 4z^3 - 4z - 4 = (z-1)((z^2+2z+2)^2),$$

onde, como já vimos nos exemplos A.9 e A.10, $z^2 + 2z + 2$ é um polinômio irredutível. A decomposição em frações parciais, portanto, será da forma

$$\begin{aligned}\frac{2z+4}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4} &= \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2+2z+2} + \frac{Dz+E}{(z^2+2z+2)^2} \\ &= \frac{A(z^2+2z+2)^2 + (Bz+C)(z-1)(z^2+2z+2) + (Dz+E)(z-1)}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4} = \\ &\frac{(A+B)z^4 + (4A+B+C)z^3 + (8A+C+D)z^2 + (8A-2B-D+E)z + (4A-2C-E)}{z^5+3z^4+4z^3-4z-4},\end{aligned}$$

onde a última linha acima foi obtida com a ajuda de Maxima:

```
(%i1) linel : 70 ;
(%o1)                                70
(%i2) p1 : (z-1);
(%o2)                              z - 1
(%i3) p2 : (z^2 + 2*z + 2);
                                 2
(%o3)                           z  + 2 z + 2
(%i4) expand(A*(p2**2) + (B*z + C)*p1*p2  + (D*z + E)*p1) ;
                  2            3       2            4       3
(%o4) z E - E + z  D - z D + z  C + z  C - 2 C + z  B + z  B - 2 z B
                                     4         3         2
                                  + z  A + 4 z  A + 8 z  A + 8 z A + 4 A
(%i5) rat(%,z);
                   4                    3                    2
(%o5)/R/ (B + A) z  + (C + B + 4 A) z  + (D + C + 8 A) z
                                  + (E - D - 2 B + 8 A) z - E - 2 C + 4 A
```

Obtivemos portanto o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

donde $A = 6/25$, $B = -6/25$, $C = -18/25$, $D = -6/5$, e $E = -8/5$ ■

B

Algumas funções especiais

Algumas equações diferenciais (em geral de ordem 2) a coeficientes não constantes ocorrem com tanta frequência que acabam recebendo nomes e soluções padronizadas. A rigor, isso também acontece com algumas equações a coeficientes constantes, de forma que não deveríamos nos surpreender. Por exemplo, a equação de ordem 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0$$

"gera" a bem-conhecida função

$$y(x) = \mathrm{e}^x.$$

Da mesma forma, a equação a coeficientes constantes de ordem 2

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = 0$$

"gera" as funções

$$y_1(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad y_2(x) = \cos(x).$$

B.1 – A equação de Legendre e os polinômios de Legendre

Comecemos portanto a investigar as soluções da *Equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{B.1}$$

utilizando séries em torno de $x = 0$. Note que $x = 0$ *não é um ponto singular*, mas sim um ponto regular! É mais ou menos óbvio que os pontos singulares da equação de Legendre são $x = \pm 1$. Mesmo assim, apenas por economia, tentemos uma solução "de Frobenius":

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na EDO,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[-(n+r-1)(n+r)-2(n+r)+\lambda\right]a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} = 0;$$

ou:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(-n-r+1-2)+\lambda\right]a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}=0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[-(n+r)(n+r+1)+\lambda\right]a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}=0.$$

Fazemos

$$\begin{aligned} m+r &= n+r-2,\\ m &= n-2,\\ n &= m+2, \end{aligned}$$

e reescrevemos o segundo somatório:

$$\sum_{m=-2}^{\infty}(m+r+1)(m+r+2)a_{m+2}x^{m+r}.$$

Escrevemos em separado os dois primeiros termos desse somatório, e reunimos todo o restante em uma soma de 0 a ∞, como se segue:

$$(r-1)ra_0x^{r-2}+r(r+1)a_1x^{r-1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[-(n+r)(n+r+1)+\lambda\right]a_n+\left[(n+r+1)(n+r+2)\right]a_{n+2}\right\}x^{n+r}=0.$$

Queremos $a_0 = 0$, e portanto as raízes da equação indicial são $r = 1$ e $r = 0$. Elas diferem por um inteiro, e portanto a menor pode levar a duas soluções LI. De fato, escolhendo $r = 0$, observa-se imediatamente que tanto a_0 quanto a_1 são arbitrários. A relação de recursão, por sua vez, avançará de 2 em 2 termos. Fazendo $r = 0$, ela será:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-n(n+1)+\lambda\right]a_n+(n+1)(n+2)a_{n+2},\\ a_{n+2} &= \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n \end{aligned} \tag{B.2}$$

Partindo de $a_0 = 1$, obtemos a série

$$y_1(x) = 1-\frac{\lambda}{2}x^2-\frac{(6-\lambda)\lambda}{24}x^4-\frac{(20-\lambda)(6-\lambda)\lambda}{720}x^6-\ldots;$$

e partindo de $a_1 = 1$ obtemos

$$y_2(x) = x+\frac{(2-\lambda)}{6}x^3+\frac{(12-\lambda)(2-\lambda)}{120}x^5+\ldots.$$

A solução geral é do tipo

$$y(x) = a_0y_1(x)+a_1y_2(x).$$

Um caso particular interessante é quando $\lambda = n(n+1)$; então, (B.2) mostra claramente que $a_{n+2} = 0$, *e o último termo da série é* a_n: a série torna-se um polinômio

de grau n, $P_n(x)$. Estes são os *polinômios de Legendre*. Convencionalmente, as constantes a_0 e a_1 são escolhidas de tal forma que todos os polinômos de Legendre obedecem à condição de padronização

$$P_n(1) = 1.$$

Os seis primeiros polinômios de Legendre foram obtidos na listagem 15.2.

Os polinômios de Legendre de qualquer grau podem ser obtidos pela *fórmula de Rodrigues*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]. \tag{B.3}$$

Um outro ponto importante é que os $P_n(x)$ são mutuamente ortogonais, com peso $w(x) = 1$ (veja o capítulo 17):

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{mn} \frac{2}{2n+1}. \tag{B.4}$$

Finalmente, existe a *função geradora dos polinômios de Legendre*,

$$(1 - 2xr + r^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n, \qquad |x| < 1,\ |r| < 1. \tag{B.5}$$

Para detalhes, veja Lebedev (1972, capítulo 4) e Greenberg (1998, seção 4.4).

C

Soluções de exercícios propostos selecionados

Capítulo 1

Exercício 1.1
G tem dimensões

$$\begin{aligned}
[\![G]\!] &= \left[\!\!\left[\frac{Fr^2}{Mm}\right]\!\!\right] \\
&= \frac{\mathsf{MLT}^{-2}\mathsf{L}^2}{\mathsf{M}^2} \\
&= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}.
\end{aligned}$$

A lista de variáveis e suas dimensões é

$$\begin{aligned}
[\![\rho]\!] &= \mathsf{ML}^{-3}, \\
[\![D]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![n]\!] &= \mathsf{T}^{-1}, \\
[\![G]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}.
\end{aligned}$$

Com 4 variáveis e 3 dimensões fundamentais, esperamos que haja um único grupo:

$$\begin{aligned}
\Pi &= GD^a n^b \rho^c, \\
[\![\Pi]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}\,[\mathsf{L}]^a\left[\mathsf{T}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c \\
1 &= \mathsf{M}^{-1+c}\mathsf{L}^{3+a-3c}\mathsf{T}^{-2-b}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
c &= 1, \\
a + 0b - 3c &= -3 \;\Rightarrow a = 0, \\
0a - b + 0c &= 2 \;\Rightarrow b = -2
\end{aligned}$$

e

$$\Pi = \frac{G\rho}{n^2} \;\blacksquare$$

Exercício 1.2
Primeiramente, fazemos uma lista das variáveis e das suas dimensões:

Variável	h	u_*	$\overline{w\theta}\|_0$	Θ_m	dh/dt	$\overline{w\theta}\|_i$	g	γ_θ
Dimensão	L	LT^{-1}	$\Theta\mathsf{LT}^{-1}$	Θ	LT^{-1}	$\Theta\mathsf{LT}^{-1}$	LT^{-2}	$\Theta\mathsf{L}^{-1}$

Observe que existem apenas 3 dimensões no problema, L, T e Θ, equanto que há 8 variáveis. Logo, nós esperamos 5 grupos adimensionais. Vamos escolher 3 variáveis, h, u_* e $\overline{w\theta}|_0$, que estarão potencialmente presentes em todos os grupos. Fazemos:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= h^a u_*^b (\overline{w\theta}|_0)^c \Theta_m, \\
1 &= (\mathsf{L})^a (\mathsf{LT}^{-1})^b (\mathsf{LT}^{-1}\Theta)^c \Theta, \\
1 &= \mathsf{L}^{a+b+c}\mathsf{T}^{-b-c}\Theta^{c+1}, \\
a+b+c &= 0, \\
-b-c &= 0, \\
c &= -1,
\end{aligned}$$

donde: $c = -1$, $b = 1$, $a = 0$, e

$$\Pi_1 = \frac{u_*\Theta_m}{\overline{w\theta}|_0}.$$

Em seguida,

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= h^a u_*^b (\overline{w\theta}|_0)^c \mathrm{d}h/\mathrm{d}t, \\
1 &= (\mathsf{L})^a (\mathsf{LT}^{-1})^b (\mathsf{LT}^{-1}\Theta)^c \mathsf{LT}^{-1}, \\
1 &= \mathsf{L}^{a+b+c+1}\mathsf{T}^{-b-c-1}\Theta^{c}, \\
a+b+c &= -1, \\
-b-c &= +1, \\
c &= 0,
\end{aligned}$$

donde: $c = 0$, $b = -1$, $a = 0$, e

$$\Pi_2 = \frac{\mathrm{d}h/\mathrm{d}t}{u_*}.$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= h^a u_*^b (\overline{w\theta}|_0)^c (\overline{w\theta}|_i), \\
1 &= (\mathsf{L})^a (\mathsf{LT}^{-1})^b (\mathsf{LT}^{-1}\Theta)^c \mathsf{LT}^{-1}\Theta, \\
1 &= \mathsf{L}^{a+b+c-1}\mathsf{T}^{-b-c-1}\Theta^{c+1}, \\
a+b+c &= -1, \\
-b-c &= +1, \\
c &= -1,
\end{aligned}$$

donde: $c = -1$, $b = 0$, $a = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{\overline{w\theta}|_i}{\overline{w\theta}|_0}.$$

$$\Pi_4 = h^a u_*^b (\overline{w\theta}|_0)^c g,$$

$$
\begin{aligned}
1 &= (\mathsf{L})^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^b(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}\Theta)^c\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2},\\
1 &= \mathsf{L}^{a+b+c+1}\mathsf{T}^{-b-c-2}\Theta^c,\\
a+b+c &= -1,\\
-b-c &= +2,\\
c &= 0,
\end{aligned}
$$

donde: $c = 0$, $b = -2$, $a = 1$, e

$$\Pi_4 = \frac{gh}{u_*^2}.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\Pi_5 &= h^a u_*^b(\overline{w\theta}|_0)^c\gamma_\theta,\\
1 &= (\mathsf{L})^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^b(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}\Theta)^c\Theta\mathsf{L}^{-1},\\
1 &= \mathsf{L}^{a+b+c-1}\mathsf{T}^{-b-c}\Theta^{c+1},\\
a+b+c &= 1,\\
-b-c &= 0,\\
c &= -1,
\end{aligned}
$$

donde: $c = -1$, $b = 1$, $a = 1$, e

$$\Pi_5 = \frac{hu_*\gamma_\theta}{\overline{w\theta}|_0}.$$

Exercício 1.3
As variáveis e suas dimensões são

L	L
d	L
c	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}$
g	$\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}$

Há 4 variáveis e 2 dimensões fundamentais; deve haver 2 grupos adimensionais. Escolhemos L e g para participarem de todos eles. Então:

$$\Pi_1 = dL^a g^b$$

donde $a = -1$, $b = 0$.

$$\Pi_1 = d/L.$$

$$\Pi_2 = cL^a g^b$$

donde $a = b = -1/2$.

$$\Pi_2 = \frac{c}{\sqrt{gL}}$$

Observação: Em Mecânica dos Fluidos, é mais comum usar

$$\Pi_1 = \frac{d}{L}, \qquad \Pi_2 = \frac{c}{\sqrt{gd}}$$

e interpretar Π_2 como um número de Froude. Ambas as opções são válidas, e equivalentes.

Exercício 1.4

Considere como grandezas fundamentais (por exemplo) M, L, e T; t, E, ρ devem conter, entre si, as 3 grandezas fundamentais. De fato,

$$\begin{aligned}
[\![t]\!] &= \mathsf{T},\\
[\![E]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2},\\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}.
\end{aligned}$$

Os dois grupos adimensionais são obtidos da seguinte forma: o primeiro é

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= pt^aE^b\rho^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}\right]\,[\mathsf{T}]^a\,\left[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2}\right]^b\,\left[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}\right]^c\\
&= \mathsf{M}^{1+b+c}\mathsf{L}^{-1+2b-3c}\mathsf{T}^{-2+a-2b}.
\end{aligned}$$

O sistema de equações resultante é

$$\begin{aligned}
0a + 1b + 1c &= -1,\\
0a + 2b - 3c &= +1,\\
1a - 2b + 0c &= 2,
\end{aligned}$$

cuja solução é $a = 6/5$, $b = -2/5$, $c = -3/5$. O primeiro grupo adimensional, portanto, é:

$$\Pi_1 = pt^{6/5}E^{-2/5}\rho^{-3/5}.$$

O próximo grupo é

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= Rt^aE^b\rho^c,\\
[\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{T}]^a\,\left[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2}\right]^b\,\left[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}\right]^c\\
&= \mathsf{M}^{b+c}\mathsf{L}^{1+2b-3c}\mathsf{T}^{a-2b}.
\end{aligned}$$

O sistema de equações resultante é

$$\begin{aligned}
0a + 1b + 1c &= 0,\\
0a + 2b - 3c &= -1,\\
1a - 2b + 0c &= 0,
\end{aligned}$$

cuja solução é $a = -2/5$, $b = -1/5$, $c = 1/5$. O segundo grupo adimensional, portanto, é:

$$\Pi_2 = Rt^{-2/5}E^{-1/5}\rho^{1/5}.$$

Exercício 1.5

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= C_LC_0^aU^bL^c,\\
1 &= \mathsf{M}\mathsf{L}^{-3}(\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3})^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1})^b(\mathsf{L})^c\\
1 &= \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-3-3a+b+c}(\mathsf{T})^{-b} \;\Rightarrow\\
a &= -1,\\
b &= 0,\\
c &= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= tC_0^a U^b L^c, \\
1 &= \mathsf{T}(\mathsf{ML}^{-3})^a(\mathsf{LT}^{-1})^b(\mathsf{L})^c \\
1 &= (\mathsf{M})^a(\mathsf{L})^{-3a+b+c}(\mathsf{T})^{1-b} \Rightarrow \\
a &= 0, \\
b &= 1, \\
c &= -1.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{C_L}{C_0}, \\
\Pi_2 &= \frac{Ut}{L} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 1.6
As duas dimensões fundamentais deste problema são L e T. Teremos 2 parâmetros adimensionais:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= H^a g^b v, \\
\Pi_2 &= H^a g^b T_d.
\end{aligned}
$$

A primeira equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{LT}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1} \Rightarrow \\
a + b + 2 &= 0, \\
-2b - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = -1/2, \qquad a = -3/2.
$$

donde

$$
\Pi_1 = H^{-3/2} g^{-1/2} v = \frac{v}{H\sqrt{gH}}.
$$

A segunda equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{LT}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{T} \Rightarrow \\
a + b &= 0, \\
-2b + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = 1/2; \qquad a = -1/2.
$$

donde

$$
\Pi_2 = T_d\sqrt{\frac{g}{H}}.
$$

Temos agora a previsão de análise dimensional para um viscosímetro elementar:

$$
v = H\sqrt{gH} f\left(T_d\sqrt{\frac{g}{H}}\right) \blacksquare
$$

Exercício 1.7
As duas dimensões fundamentais deste problema são L e T. Teremos 2 parâmetros adimensionais:

$$\Pi_1 = R^a (gS_0)^b V,$$
$$\Pi_2 = R^a (gS_0)^b z_0.$$

A primeira equação gera o sistema:

$$\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{L}^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2})^b\mathsf{L}\mathsf{T}^{-1} \Rightarrow$$
$$a + b + 1 = 0,$$
$$-2b - 1 = 0$$

Então,

$$b = -1/2, \qquad a = -1/2.$$

donde

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{RgS_0}}.$$

A segunda equação gera o sistema:

$$\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{L}^a(\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2})^b\mathsf{L} \Rightarrow$$
$$a + b + 1 = 0,$$
$$-2b = 0$$

Então,

$$b = 0; \qquad a = -1.$$

donde

$$\Pi_2 = \frac{z_0}{R}.$$

Temos agora a previsão de análise dimensional para a velocidade na seção

$$\frac{V}{\sqrt{RgS_0}} = f\left(\frac{z_0}{R}\right),$$

onde f é uma função empírica a determinar.

Exercício 1.8
Há 4 variáveis (Q, b, h e g) com duas dimensões fundamentais: L e T. Fazemos:

$$\Pi_1 = Qh^a g^b,$$
$$[\![\Pi_1]\!] = [L^3\,T^{-1}]^1[L]^a[L\,T^{-2}]^b,$$
$$1 = L^{3+a+b}T^{-1-2b}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $a = -5/2$, $b = -1/2$.
Para o segundo parâmetro, fazemos:

$$\Pi_2 = bh^a g^b,$$
$$[\![\Pi_2]\!] = [L]^1[L]^a[L\,T^{-2}]^b,$$

$$1 = L^{1+a+b}T^{-2b}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $a = -1$, $b = 0$.
Portanto,

$$\Pi_1 = \frac{Q}{h^{5/2}g^{1/2}},$$
$$\Pi_2 = \frac{b}{h} \blacksquare$$

Exercício 1.9
A lista de dimensões fundamentais é L, T e Θ. A lista de variáveis e suas dimensões é

$$\begin{aligned} [\![z]\!] &= \mathsf{L}, \\ [\![u_*]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}, \\ [\![T_*]\!] &= \Theta, \\ [\![du/dz]\!] &= \mathsf{T}^{-1}, \\ [\![g/T]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Os primeiro parâmetro adimensional é:

$$\Pi_1 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} z^a u_*^b T_*^c,$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$, e

$$\Pi_1 = \frac{z}{u_*}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}.$$

O segundo parâmetro adimensional é:

$$\Pi_2 = \frac{g}{T} z^a u_*^b T_*^c$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -2$, e $c = -1$, e

$$\Pi_2 = \frac{gzT_*}{Tu_*^2} \blacksquare$$

Exercício 1.10
A matriz dimensional é

	P	μ	ρ	D	ω
M	1	1	1	0	0
L	2	−1	−3	1	0
T	−3	−1	0	0	−1

,

cujo posto é 3. Portanto, há $n = 5 - 3 = 2$ grupos adimensionais. Esses grupos são:

$$\Pi_1 = P\rho^a D^b \omega^c,$$

$$\mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = (\mathsf{M}\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-3})(\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T}^{-1})^c,$$

ou

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ -3a + b &= -2, \\ -c &= 3 \end{aligned}$$

donde

$$a = -1,\ b = -5,\ c = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_1 = \frac{P}{\rho D^5 \omega^3}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \mu \rho^a D^b \omega^c, \\ \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= (\mathsf{M}\mathsf{L}^{-1}\mathsf{T}^{-1})(\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T}^{-1})^c, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ -3a + b &= +1, \\ -c &= 1 \end{aligned}$$

donde

$$a = -1,\ b = -4,\ c = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^2 \omega} \ \blacksquare$$

Exercício 1.11
A lista de variáveis e dimensões é

$$\begin{aligned} [\![p]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}, \\ [\![\kappa_T]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^2 \\ [\![m]\!] &= \mathsf{M}, \\ [\![p_0]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}, \\ [\![R]\!] &= \mathsf{L}, \\ [\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}. \end{aligned}$$

Os 3 grupos adimensionais são:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= p p_0^a R^b \rho^c, \\ [\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a[\mathsf{L}^b][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c \\ 1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a+c}\mathsf{L}^{-1-a+b-3c}\mathsf{T}^{-2-2a}. \end{aligned}$$

O sistema de equações é

$$\begin{aligned} a + c &= -1, \\ -a + b - 3c &= 1, \\ -2a &= 2 \end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$ e

$$\Pi_1 = \frac{p}{p_0}.$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \kappa_T p_0^a R^b \rho^c, \\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}^{-1}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^2][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a[\mathsf{L}^b][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c \\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{-1+a+c}\mathsf{L}^{1-a+b-3c}\mathsf{T}^{2-2a}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + c &= 1, \\
-a + b - 3c &= -1, \\
-2a &= -2
\end{aligned}
$$

donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ e

$$\Pi_2 = \kappa_T p_0.$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= m p_0^a R^b \rho^c, \\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-1}\,\mathsf{T}^{-2}]^a[\mathsf{L}^b][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^c \\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a+c}\mathsf{L}^{-a+b-3c}\mathsf{T}^{-2a}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + c &= -1 \\
-a + b - 3c &= 0 \\
-2a &= 0
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -3$, $c = -1$ e

$$\Pi_3 = m R^{-3} \rho^{-1} \blacksquare$$

Exercício 1.12
A lista de variáveis e dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![F]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2}, \\
[\![v]\!] &= \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}, \\
[\![\delta]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}, \\
[\![U]\!] &= \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1} \\
[\![L]\!] &= \mathsf{L}.
\end{aligned}
$$

Os 3 grupos adimensionais são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= F \rho^a U^b L^c, \\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2}][\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c \\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-3a+b+c}\mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$a + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} -3a + b + c &= 0, \\ -b - 2 &= 0, \end{aligned}$$

donde $a = -1$, $b = -2$, $c = -1$ e

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 L}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \nu \rho^a U^b L^c, \\ [\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a\,[\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b\,[\mathsf{L}]^c \\ 1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^a\mathsf{L}^{2-3a+b+c}\mathsf{T}^{-1-b} \end{aligned}$$

O sistema de equações é

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ -3a + b + c + 2 &= 0, \\ -b - 1 &= 0, \end{aligned}$$

donde $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$ e

$$\Pi_2 = \frac{\nu}{UL}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= \delta \rho^a U^b L^c, \\ [\![\Pi_3]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a\,[\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b\,[\mathsf{L}]^c \\ 1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^a\mathsf{L}^{1-3a+b+c}\mathsf{T}^{-b} \end{aligned}$$

O sistema de equações é

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ -3a + b + c + 1 &= 0, \\ -b &= 0, \end{aligned}$$

donde $a = 0$, $b = -0$, $c = -1$ e

$$\Pi_3 = \frac{\delta}{L} \blacksquare$$

Capítulo 2

Exercício 2.1

$$z^* = 3 - 2\mathrm{i} \blacksquare$$

Exercício 2.4

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}};\\
\mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right]^{\mathrm{i}}\\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2\frac{\pi}{2}}\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 2.5

$$
\begin{aligned}
z &= (1+i) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)};\\
w &= z^{1/7} = \left[\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\right]^{1/7}\\
&= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)};\\
w_1 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{28}},\\
w_2 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\right)},\\
w_3 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{4\pi}{7}\right)},\\
w_4 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{6\pi}{7}\right)},\\
w_5 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{8\pi}{7}\right)},\\
w_6 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{10\pi}{7}\right)},\\
w_7 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{12\pi}{7}\right)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 2.6

a) 0

b) 20 – 30i

Exercício 2.7

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+\mathrm{i})} \qquad \Rightarrow f(\mathrm{i}) = \frac{-\mathrm{i}}{2},\\
f^{(1)}(z) &= \frac{-1}{(z+\mathrm{i})^2} \Rightarrow f^{(1)}(\mathrm{i}) = \frac{1}{4},\\
f^{(2)}(z) &= \frac{2}{(z+\mathrm{i})^3} \Rightarrow \frac{f^{(2)}(\mathrm{i})}{2!} = \frac{\mathrm{i}}{8},\\
f^{(3)}(z) &= \frac{-6}{(z+\mathrm{i})^4} \Rightarrow \frac{f^{(3)}(\mathrm{i})}{3!} = \frac{-1}{16},\\
f^{(4)}(z) &= \frac{24}{(z+\mathrm{i})^5} \Rightarrow \frac{f^{(4)}(\mathrm{i})}{4!} = \frac{-\mathrm{i}}{32}.
\end{aligned}
$$

Exercício 2.8

$$
\begin{aligned}
e^{i(a+b+c)} &= e^{ia}e^{ib}e^{ic};\\
\cos(a+b+c)+i\,\mathrm{sen}(a+b+c) &= [\cos(a)+i\,\mathrm{sen}(a)]\times[\cos(b)+i\,\mathrm{sen}(b)]\\
&\quad\times[\cos(c)+i\,\mathrm{sen}(c)]\,;\\
\cos(a+b+c)+i\,\mathrm{sen}(a+b+c) &= [\cos(a)\cos(b)\cos(c)\\
&\quad-\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\cos(c)\\
&\quad-\cos(a)\,\mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(c)\\
&\quad-\mathrm{sen}(a)\cos(b)\,\mathrm{sen}(c)]\\
&\quad+i\,[\cos(a)\cos(b)\,\mathrm{sen}(c)\\
&\quad+\cos(a)\,\mathrm{sen}(b)\cos(c)\\
&\quad+\mathrm{sen}(a)\cos(b)\cos(c)\\
&\quad-\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(c)]\,;
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
\cos(a+b+c) &= \cos(a)\cos(b)\cos(c)\\
&\quad-\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)\cos(c)\\
&\quad-\cos(a)\,\mathrm{sen}(b)\,\mathrm{sen}(c)\\
&\quad-\mathrm{sen}(a)\cos(b)\,\mathrm{sen}(c)\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 2.9

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right);\\
\mathrm{sen}^2(x) &= \frac{1}{4i^2}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right);\\
&= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x)-2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right).
\end{aligned}
$$

A integral fica

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int\left(1-\cos(2x)\right)\,dx\\
&= \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2x)\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 2.10
Note que

$$
\int_0^\infty xe^{-ax}e^{ibx}\,dx = \int_0^\infty xe^{-ax}\left[\cos(bx)+i\,\mathrm{sen}(bx)\right]\,dx.
$$

Portanto,

$$
\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx = \mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty xe^{-ax}e^{ibx}\,dx\right\}.
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} \\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2} \\
&= \frac{1}{a^2-2\mathrm{i}ab-b^2} \\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{[a^2-b^2-2\mathrm{i}ab][a^2-b^2+2\mathrm{i}ab]} \\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2-b^2)^2-4\mathrm{i}^2a^2b^2} \\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4-2a^2b^2+b^4-4\mathrm{i}^2a^2b^2} \\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4+2a^2b^2+b^4} \\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2+b^2)^2},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} \quad \blacksquare
$$

Exercício 2.11

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tgh}(x) &= \frac{\mathrm{senh}(x)}{\cosh(x)}; \\
\mathrm{senh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}; \\
\cosh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}; \\
E(x) &= x-\mathrm{tgh}(x) \\
&= x-\frac{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}} \\
&= x-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \frac{x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(2n+1)!}x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)-2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{e^x + e^{-x}}$$
$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{e^x + e^{-x}};$$

Portanto,

$$a_{2n+1} = \frac{4n}{(2n+1)!}.$$

Mas $a_1 = 0$, donde

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{e^x + e^{-x}}.$$

Para $n \geq 1$, $a_{2n+1} > 0$, assim como x^{2n+1} (pois $x > 0$), de maneira que o numerador da expressão acima é positivo; o denominador também é, e consequentemente $E(x) > 0$. Logo,

$$x - \operatorname{tgh}(x) > 0;$$
$$x > \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0 \blacksquare$$

Capítulo 3

Exercício 3.1
O sistema operacional é o programa, ou conjunto de programas, que permitem que você se comunique com o computador. Quando o computador é ligado, o SO "toma conta" da máquina, e a partir daí realiza a interface entre o usuário e os recursos da máquina, e executa todos os demais programas que o usuário utiliza.
Eu uso Gnu-Linux, mas você talvez use outro.

Exercício 3.2
Na linha de comando, aqui indicada por um cifrão ($), faça

[`$python3`] .

A resposta no meu terminal Linux é

```
Python 3.8.10 (default, Nov 26 2021, 20:14:08)
[GCC 9.3.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>>
```

(Para sair, digite `quit()` e a tecla `ENTER`).

Exercício 3.3

```
Python 3.6.6 (default, Sep 12 2018, 18:26:19)
[GCC 8.0.1 20180414 (experimental) [trunk revision 259383]] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> bin(7777)
'0b1111001100001'
```

Exercício 3.4

```
>>> print "bom"+"demais"
bomdemais
```

Exercício 3.5

```
1  #!/usr/bin/python3
2  a = [14,21,37,99,11,7,3,41,22,88]
3  n = len(a)
4  p = int(input('entre␣com␣p:␣'))
5  i = 0
6  while (i<n) and (a[i] != p):
7     i += 1
8  if i < n:
9     print('a(%d)␣=␣%d␣=␣%d\n' % (i, a[i], p))
10 else:
11    print('não␣há␣%d␣em␣a' % p)
```

Na linha 6, note que assim que `i == n`, o `while` termina, e portanto o teste `(a[i] != p)` do lado direito do `and` *não é executado, e portanto não falha*. Isto se chama um *curto-circuito lógico*.

Exercício 3.6

```
1  #!/usr/bin/python3             # localização do interpretador de python
2  from numpy import zeros        # importa função 'zeros' do módulo numpy
3  pp = zeros((12,31),float)      # aloca um array pp de floats,
4                                 # 12 linhas, 31 colunas
5  pp[:,:] = -9999                # inicializa todos os elementos de pp
6                                 # com -9999
7  fin = open('bhdados.txt','rt')# abre bhdados.txt para leitura
8  for line in fin:               # loop nas linhas do arquivo
9     line = line.rstrip()        # remove caracteres não-imprimíveis
10                                # do fim da linha
11    if line[0] == '#':          # se o primeiro caractere da
12                                # linha for '#' :
13       continue                 # passa para a próxima linha
14    campo = line.split(';')     # separa a linha em campos:
15                                # o separador é ';'
16    prec = float(campo[3])      # atribui campo[3] a prec, como float
17    data = campo[1].split('/') # separa campo[1] em dia/mes/ano;
18                                # o separador é '/'
19    imes = int(data[1]) - 1     # imes é o índice do mês (0 a 11)
20    iano = int(data[2]) - 1981 # iano é o índice do ano (0 a 30)
21    pp[imes,iano] = prec        # atribui prec à posição
22                                # [imes,iano] de pp
```

Exercício 3.7

```
(%i1) f : log(sin(exp(x))) ;
                                                 x
(%o1)                                  log(sin(%e ))
(%i2) diff(f,x) ;
                                         x        x
                                       %e  cos(%e )
(%o2)                                  ------------
                                                 x
                                         sin(%e )
```

Portanto,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{cotg} \mathrm{e}^x \ \blacksquare$$

Exercício 3.8

```
(%i1) f : 1/(x^(3/2)) ;
                                          1
(%o1)                                    ----
                                          3/2
                                         x
(%i2) integrate(f,x,1,inf) ;
(%o2)                                      2
```

Portanto, a integral vale 2.

Exercício 3.9
Existem duas possibilidades, com `solve`, e com `factor`:

```
(%i1) f : x^3 + (3/2)*x^2 - (29/2)*x + 15 ;
                                          2
                                 3    3 x     29 x
(%o1)                           x  + ---- - ---- + 15
                                       2       2
(%i2) solve(f,x) ;


                                                   3
(%o2)                         [x = - 5, x = 2, x = -]
                                                   2
(%i3) factor(f) ;
                             (x - 2) (x + 5) (2 x - 3)
(%o3)                        -------------------------
                                          2
```

Exercício 3.10

```
(%i1) is(1=2);
(%o1)                                false
```

Capítulo 4

Exercício 4.1

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{f(a)+f(b)}{2} \times (b-a) \\
&= \frac{0+0}{2} \times \pi = 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 4.2

a)

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{f(0)+f(\pi/2)}{2} \times \pi/2 + \frac{f(\pi/2)+f(\pi)}{2} \times \pi/2 \\
&= \frac{0+1}{2} \times \pi/2 + \frac{1+0}{2} \times \pi/2 = \pi/2 \approx 1.5708.
\end{aligned}
$$

b) Com Maxima,

```
(%i1) g : a*x^2 + b*x + c ;
                                     2
(%o1)                             a x  + b x + c
(%i2) eq1 : ev(g,x=0) = 0 ;
(%o2)                                 c = 0
(%i3) eq2 : ev(g,x=%pi/2) = 1 ;
                                                2
                                  %pi b   %pi  a
(%o3)                         c + ----- + ------ = 1
                                    2       4
(%i4) eq3 : ev(g,x=%pi) = 0 ;
                                                2
(%o4)                         c + %pi b + %pi  a = 0
(%i5) solve( [eq1, eq2, eq3], [a,b,c]) ;
                                   4          4
```

Listagem C.1: Aproximação de $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$ com um polinômio do 3º grau

```
(%i1) h : a*x^3 + b*x^2 + c*x + d ;
                                  3       2
(%o1)                           a x  + b x  + c x + d
(%i2) hl : diff(h,x) ;
                                     2
(%o2)                            3 a x  + 2 b x + c
(%i3) eq1 : ev(h,x=0) = 0 ;
(%o3)                                  d = 0
(%i4) eq2 : ev(h,x=%pi/2) = 1 ;
                                          2         3
                              %pi c   %pi  b   %pi  a
(%o4)                     d + ----- + ------ + ------ = 1
                                2        4         8
(%i5) eq3 : ev(h,x=%pi) = 0 ;
                                          2         3
(%o5)                     d + %pi c + %pi  b + %pi  a = 0
(%i6) eq4 : ev(hl,x=%pi/2) = 0 ;
                                                 2
                                          3 %pi  a
(%o6)                        c + %pi b + -------- = 0
                                             4
(%i7) solve( [eq1, eq2, eq3, eq4], [a,b,c,d]) ;
                                         4          4
(%o7)                 [[a = 0, b = - ----, c = ---, d = 0]]
                                          2       %pi
                                       %pi
(%i8) h : h,% ;
                                                 2
                                     4 x    4 x
(%o8)                                --- - ----
                                     %pi       2
                                           %pi
(%i9) integrate(h,x,0,%pi) ;
                                       2 %pi
(%o9)                                  -----
                                         3
(%i10) bfloat(%);
(%o10)                          2.094395102393196b0
```

```
(%o5)                    [[a = - ----, b = ---, c = 0]]
                                   2       %pi
                                %pi
(%i6) g : g,% ;
                                                 2
                                       4 x    4 x
(%o6)                                  --- - ----
                                       %pi       2
                                             %pi
(%i7) integrate(g,x,0,%pi) ;
                                          2 %pi
(%o7)                                     -----
                                            3
(%i8) bfloat(%);
(%o8)                           2.094395102393196b0
```

c) Novamente com Maxima, calculamos o polinômio do 3º grau que atende às condições, e sua integral na listagem C.1. Ou seja: o único polinômio que atende às condições especificadas *não* é na verdade do 3ºgrau — é a mesma parábola obtida em b).

Exercício 4.3

A função $f(x) = x$ é linear; para ela, a regra do trapézio é exata. O programa imprime 0.

Listagem C.2: Cálculo de $\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$ com 10 trapézios.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from __future__ import unicode_literals
from __future__ import print_function
from __future__ import division
from numint import trapezio
from math import sin, pi
I = trapezio(10,0,pi,sin)
print( 'I␣=␣%8.4f' % I)
```

Exercício 4.4
O programa da listagem C.2 faz o cálculo. O resultado é

```
I =   1.9835
```

Exercício 4.5
Basta aplicar a regra do trapézio aos elementos delimitados pelas linhas tracejadas:

$$V = 100 \times \frac{1}{2} \times [4 \times 6 + (4+8) \times 3 + (8+20) \times 2 + (20+30) \times 1] = 8300\,\mathrm{m}^3 \blacksquare$$

Exercício 4.6

a) Eu contei 43 quadrados inteiros, e 12 parciais. Minha estimativa para a área é

$$43 \times 0{,}5 + 12 \times 0{,}125 = 12{,}25.$$

b)

$$P(x) = -\frac{3x^3}{8} + \frac{13x^2}{8} - \frac{x}{4} + 1.$$

c)

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^4 P(x)\mathrm{d}x = \frac{38}{3} = 12{,}66 \blacksquare$$

Exercício 4.8

$$\begin{aligned} I &\approx f((x_0+x_1)/2)\Delta x + f((x_1+x_2)/2)\Delta x + \ldots + f((x_{n-1}+x_n)/2)\Delta x \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} f((x_{i-1}+x_i)/2) \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 4.9
Com Maxima, obtém-se o resultado da listagem C.3.

Listagem C.3: Dedução da regra de Simpson.

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) f : a*x^2 + b*x + c ;
                                   2
(%o2)                          a x  + b x + c
(%i3) eq1 : ev(f,x=x0) = f0 ;
                                  2
(%o3)                      a x0  + b x0 + c = f0
(%i4) eq2 : ev(f,x=(x0+h)) = f1 ;
                                  2
(%o4)                a (x0 + h)  + b (x0 + h) + c = f1
(%i5) eq3 : ev(f,x=(x0+2*h)) = f2 ;
                                  2
(%o5)              a (x0 + 2 h)  + b (x0 + 2 h) + c = f2
(%i6) solve([eq1,eq2,eq3],[a,b,c]);
            f2 - 2 f1 + f0
(%o6) [[a = --------------, b =
                     2
                  2 h
  (2 f2 - 4 f1 + 2 f0) x0 + (f2 - 4 f1) h + 3 f0 h
- ------------------------------------------------,
                             2
                          2 h
                         2                                        2
    (f2 - 2 f1 + f0) x0  + ((f2 - 4 f1) h + 3 f0 h) x0 + 2 f0 h
c = ------------------------------------------------------------]]
                                     2
                                  2 h
(%i7) f : f, % ;
                           2                                        2
      (f2 - 2 f1 + f0) x0  + ((f2 - 4 f1) h + 3 f0 h) x0 + 2 f0 h
(%o7) ------------------------------------------------------------
                                     2
                                  2 h
   x ((2 f2 - 4 f1 + 2 f0) x0 + (f2 - 4 f1) h + 3 f0 h)
 - ----------------------------------------------------
                                 2
                             2 h
                       2
   (f2 - 2 f1 + f0) x
 + -------------------
             2
          2 h
(%i8) integrate(f,x,x0,x0+2*h) ;
                                 3                                2
(%o8) ((2 f2 - 4 f1 + 2 f0) x0  + (3 f2 - 12 f1 + 9 f0) h x0
           2                                 3       2
 + 12 f0 h  x0 + (4 f2 + 16 f1 + 4 f0) h )/(12 h )
                             3                                2
 - ((2 f2 - 4 f1 + 2 f0) x0  + (3 f2 - 12 f1 + 9 f0) h x0
           2          2
 + 12 f0 h  x0)/(12 h )
(%i9) ratsimp(%);
                           (f2 + 4 f1 + f0) h
(%o9)                      ------------------
                                   3
```

Exercício 4.12

a) Da fórmula geral,

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + k\Delta x) + f(b)\right],$$

temos

$$\Delta x = 2h, \tag{C.1}$$

$$a + k\Delta x = a + 2khx, \tag{C.2}$$

$$f(a + k\Delta x) = f(a + 2khx) = f_{2k}, \tag{C.3}$$

e o resultado se segue imediatamente.

b) Da mesma forma, e ainda mais diretamente,

$$\Delta x = h, \tag{C.4}$$

$$a + k\Delta x = a + khx, \tag{C.5}$$

$$f(a + k\Delta x) = f(a + khx) = f_k. \tag{C.6}$$

c) Reunindo tudo, para os extremos f_0 e f_{2n}, temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}f_0 - \frac{1}{3}hf_0 = \left(\frac{4h}{6} - \frac{2h}{6}\right)f_0 = \frac{h}{3}f_0$$

(e o mesmo para f_{2n}). Para os pontos ímpares f_I temos apenas

$$\frac{h}{2} \times 2f_I \;\Rightarrow\; \frac{4}{3}\frac{h}{2} \times 2f_I = \frac{h}{3}4f_I,$$

vindos de T_{2n}. Para os pontos pares f_P temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}(2f_P) - \frac{1}{3}h(2f_P) = \left(\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\right)h(2f_P) = \frac{h}{3}(2f_P)$$

Reunindo tudo,

$$\frac{4}{3}T_{2_n} - \frac{1}{3}T_n = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right] = S_{2n} \blacksquare$$

Exercício 4.13

$$I = \frac{2h}{45}\left[7(f(x_0) + f(x_n)) + 32\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 12\sum_{k=1}^{n/4} f(x_{4k-2}) + 14\sum_{k=2}^{n/4} f(x_{4k-4})\right]$$

Exercício 4.14

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left[\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

O programa é

```
#!/usr/bin/python3
def f(x,y):
   return x*y
pass
dx = 0.1
dy = 0.1
s = 0.0
for i in range(1,11):
   xi = (i - 0.5)*dx
   for j in range(1,11):
      yj = (j-0.5)*dy
      fij = f(xi,yj)
      s += fij*dx*dy
   pass
pass
print("In␣=␣",s)
```

que imprime 0.25 (um resultado exato).

Exercício 4.16

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)-1\right]\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right]\mathrm{d}t,\\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\right]\mathrm{d}t,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\times n!}\\
&= x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{96}+\ldots \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 4.17
Com Maxima, encontramos os 5 primeiros termos não-nulos da série:

```
(%i1) f : x*sin(x);
(%o1)                                  x sin(x)
(%i2) taylor(f,x,0,10);
                                 4     6       8       10
                            2   x     x       x       x
(%o2)/T/                   x  - -- + --- - ---- + ------ + . . .
                                 6     120    5040    362880
```

O termo geral é facilmente identificado:

$$
f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(n-1)!}.
$$

O programa que calcula a série para 300 pontos entre 0 e 3 está mostrado na listagem C.4; a comparação com a função definida no programa de plotagem está mostrada na figura C.1

Listagem C.4: `xsenx.py` — Cálculo da série de Taylor de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$.

```
#!/usr/bin/python3
from math import sin
def xsen(x):
    epsilon = 1.0e-6            # precisão
    eps     = 2*epsilon         # garante entrada no while
    num = x**2                  # x^(2n), começando em n=1
    den = 1.0                   # (n-1)!, começando em n=1
    n = 1                       # n = 1
    termo = num/den             # calcula o primeiro termo
    s = termo                   # primeira soma da série
    sinal = +1                  # primeiro sinal é positivo
    while eps > epsilon:        # loop
        num *= (x**2)           # novo x^(2n)
        den *= (n+1)*(n+2)      # (2n-1)!
        n += 2                  # só agora incrementa n
        termo = num/den         # valor absoluto do termo
        eps = termo             # valor absoluto do termo
        sinal *= -1             # troca o sinal
        termo *= sinal          # calcula o termo com sinal
        s += termo              # soma na série
    return s                    # retorna
fou = open('xsenx.dat','wt')
for i in range(300):
    xi = i*0.01
    yi = xsen(xi)
    fou.write('%10.6f␣%10.6f\n' % (xi,yi))
fou.close()
```

Figura C.1: Função $x\,\mathrm{sen}(x)$ calculada com a série de Taylor implementada no programa `xsenx.py`, *versus* a função pré-definida no programa de plotagem.

Exercício 4.18

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{senh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\times(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 4.19

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\exp(-x)}{x^{1/2}} &= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1/2}}{n!};
\end{aligned}
$$

portanto, $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ e $p_n = n - 1/2$.

b) Integrando termo a termo,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1/2}}{n!}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int x^{n-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}x^{n+1/2};
\end{aligned}
$$

logo, $D_n = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}$ e $q_n = n + 1/2$ $\blacksquare$

Exercício 4.25

```
from numpy import array
def f(x,y):
    return array([y[1]+y[2],y[2]-y[0],y[0]+y[1]])
```

Exercício 4.26

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 0 \ \blacksquare$$

Capítulo 5

Exercício 5.1

$$\begin{aligned} (3,4) &= a(1,0) + b(2,-1), \\ 3 &= a + 2b, \\ 4 &= -b \ \Rightarrow \\ b &= -4, \\ a &= 3 - 2b = 3 + 8 = 11 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 5.2

```
(%i1) e1 : [1,1,1] ;
(%o1)                                [1, 1, 1]
(%i2) e2 : [1,-1,0] ;
(%o2)                               [1, - 1, 0]
(%i3) e3 : [0,2,-1] ;
(%o3)                               [0, 2, - 1]
(%i4) solve(x*e1 + y*e2 + z*e3 - [3,2,3],[x,y,z]) ;
                                  11       1        1
(%o4)                        [[x = --, y = -, z = - -]]
                                  4        4        4
```

Exercício 5.3
Já que eu tenho uma dica, suponho que

$$\sum_{k=1}^{n} k = an^2 + bn + c,$$

e acho a, b, c para a parábola que passa pela soma para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, com o programa em Maxima

```
s2 : a*n^2 + b*n + c ;
y1 : sum(k,k,1,1)$
y2 : sum(k,k,1,2)$
y3 : sum(k,k,1,3)$
eq1 : ev(s2,n=1) = y1$
eq2 : ev(s2,n=2) = y2$
eq3 : ev(s2,n=3) = y3$
solve([eq1,eq2,eq3],[a,b,c]);
```

cujo resultado é

```
(%i1)                          batch(squares.max)
                                                  2
(%i2)                          s2 : c + b n + a n
                                    2
(%o2)                            a n  + b n + c
(%i3)                          y1 : sum(k, k, 1, 1)
(%i4)                          y2 : sum(k, k, 1, 2)
(%i5)                          y3 : sum(k, k, 1, 3)
(%i6)                        eq1 : ev(s2, n = 1) = y1
```

```
(%i7)                    eq2 : ev(s2, n = 2) = y2
(%i8)                    eq3 : ev(s2, n = 3) = y3
(%i9)                solve([eq1, eq2, eq3], [a, b, c])
                              1       1
(%o9)                     [[a = -, b = -, c = 0]]
                              2       2
```

Donde

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 5.4

Já que eu tenho uma dica, suponho que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d,$$

e acho a, b, c, d para a parábola que passa pela soma para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ com o programa em Maxima

```
s3 : a*n^3 + b*n^2 + c*n + d$
y1 : sum(k^2,k,1,1)$
y2 : sum(k^2,k,1,2)$
y3 : sum(k^2,k,1,3)$
y4 : sum(k^2,k,1,4)$
eq1 : ev(s3,n=1) = y1$
eq2 : ev(s3,n=2) = y2$
eq3 : ev(s3,n=3) = y3$
eq4 : ev(s3,n=4) = y4$
con : solve([eq1,eq2,eq3,eq4],[a,b,c,d])$
s3 : s3,con$
factor(s3);
```

cujo resultado é

```
(%i1)                        batch(cubes.max)
                                          2       3
(%i2)                  s3 : d + c n + b n  + a n
                                          2
(%i3)                     y1 : sum(k , k, 1, 1)
                                          2
(%i4)                     y2 : sum(k , k, 1, 2)
                                          2
(%i5)                     y3 : sum(k , k, 1, 3)
                                          2
(%i6)                     y4 : sum(k , k, 1, 4)
(%i7)                  eq1 : ev(s3, n = 1) = y1
(%i8)                  eq2 : ev(s3, n = 2) = y2
(%i9)                  eq3 : ev(s3, n = 3) = y3
(%i10)                 eq4 : ev(s3, n = 4) = y4
(%i11)       con : solve([eq1, eq2, eq3, eq4], [a, b, c, d])
(%i12)                     ev(s3 : s3, con)
(%i13)                        factor(s3)
                           n (n + 1) (2 n + 1)
(%o13)                     -------------------
                                   6
```

Donde

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercício 5.5

`[ i for i in range (1,100)]` gera a lista `[1,2,...,99]`; `array` transforma a lista em um `array`. Em Python, isto se chama *list comprehension*.

Exercício 5.6

```
#!/usr/bin/python3
from math import sqrt
def test_num(n):
    a = [ i for i in range (1,n+1) ]
    return sum(a)
def test_ana(n):
    s = sqrt( n/6 * (n+1) * (2*n+1))
    return s
from timeit import Timer
t = Timer("test_num()","from␣__main__␣import␣test_num")
print('num␣=␣',t.timeit())
t = Timer("test_ana(99)","from␣__main__␣import␣test_ana")
print('ana␣=␣',t.timeit())
```

dá como resultado

```
num =  7.79518008232
ana =  0.453022003174
```

Exercício 5.7

$$
\begin{aligned}
(a,b,c)+(d,e,f) &= (a+d,b+e,c+f) = (d,e,f)+(a,b,c), \checkmark \\
(a,b,c)+\big((d,e,f)+(g,h,i)\big) &= (a,b,c)+(d+g,e+h,f+i) \\
&= (a+d+g,b+e+h,c+f+i) \\
&= (a+d,b+e,c+f)+(g,h,i) \\
&= \big((a,b,c)+(d,e,f)\big)+(g,h,i), \checkmark \\
(a,b,c)+(0,0,0) &= (a,b,c), \checkmark \\
(a,b,c)+(-a,-b,c) &= (a-a,b-b,c-c) = (0,0,0), \checkmark \\
1(a,b,c) &= (a,b,c), \checkmark \\
\alpha(\beta u_1,\beta u_2,\beta u_3) &= (\alpha\beta)(u_1,u_2,u_3), \checkmark \\
\alpha\left[(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)\right] &= \alpha(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3) \\
&= (\alpha(u_1+v_1),\alpha(u_2+v_2),\alpha(u_3+v_3)) \\
&= (\alpha u_1+\alpha v_1,\alpha u_2+\alpha v_2,\alpha u_3+\alpha v_3) \\
&= (\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3)+(\alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3) \\
&= \alpha(u_1,u_2,u_3)+\alpha(v_1,v_2,v_3), \checkmark \\
(\alpha+\beta)(u_1,u_2,u_3) &= ((\alpha+\beta)u_1,(\alpha+\beta)u_2,(\alpha+\beta)u_3) \\
&= (\alpha u_1+\beta u_1,\alpha u_2+\beta u_2,\alpha u_3+\beta u_3) \\
&= (\alpha u_1,\alpha u_2,\alpha u_3)+(\beta u_1,\beta u_2,\beta u_3) \\
&= \alpha(u_1,u_2,u_3)+\beta(u_1,u_2,u_3)\checkmark \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.10

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}| &= \sqrt{1/4+1/4+1/4} = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1/2,1/2,1/2); \\
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m} &= (3,3,1)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1/2,1/2,1/2)
\end{aligned}
$$

Figura C.2: Paralelogramo da prova do Exercício 5.11.

Figura C.3: O Teorema dos Senos.

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,[3/2 + 3/2 + 1/2]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{7}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}} \blacksquare$$

Exercício 5.11
A figura C.2 mostra a solução. Observe que

$$\alpha = \pi - \theta \;\Rightarrow \cos\alpha = -\cos\theta.$$

Pelo teorema dos cossenos, para o triângulo com lados b, c, f,

$$\begin{aligned} f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 5.12
Na figura C.3, com $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$, $c = |\boldsymbol{c}|$, o Teorema dos Senos é

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\widehat{C}}{c}.$$

$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ são todos ângulos entre 0 e π (e portanto, seus senos estão entre 0 e 1); então, o dobro da área do triângulo é dada por qualquer uma das relações

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\operatorname{sen}\widehat{C},$$

$$|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = bc \operatorname{sen} \widehat{A},$$
$$|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| = ca \operatorname{sen} \widehat{B}.$$

Agora iguale quaisquer dois pares de equações; por exemplo,

$$ab \operatorname{sen} \widehat{C} = bc \operatorname{sen} \widehat{A} \;\Rightarrow\; \frac{\operatorname{sen} \widehat{A}}{a} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{c} \;\blacksquare$$

Exercício 5.14

```
(%i1) nu : [3,1,2]/(sqrt([3,1,2].[3,1,2])) ;
                                3          1          2
(%o1)                     [--------, --------, --------]
                           sqrt(14)   sqrt(14)   sqrt(14)
(%i2) proj : [10,11,14] . nu ;
                                                   41
(%o2)                          2 sqrt(14) + --------
                                              sqrt(14)
(%i3) factor(%);
                                          69
(%o3)                                --------
                                     sqrt(14)
```

Exercício 5.15O vetor unitário $\boldsymbol{m}$ paralelo a $\boldsymbol{p}$ é

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{p}| &= \sqrt{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}} = \sqrt{4 + 1/4} \\ \boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2). \end{aligned}$$

A projeção de $\boldsymbol{v}$ na direção de $\boldsymbol{p}$ é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m} &= (4, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2) \\ &= \frac{19}{2\sqrt{4 + 1/4}} \end{aligned}$$

Portanto, o vetor que vai da origem até imediatamente abaixo de $\boldsymbol{v}$ é

$$\boldsymbol{w} = \frac{19}{2\sqrt{4 + 1/4}} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2) = \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right).$$

O vetor que vai da ponta de $\boldsymbol{w}$ até a ponta de $\boldsymbol{v}$ é

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \\ &= (4, 3) - \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right) \\ &= \left(-\frac{8}{17}, \frac{32}{17}\right), \end{aligned}$$

donde

$$d_n = \sqrt{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}} = \frac{8}{\sqrt{17}} \;\blacksquare$$

Exercício 5.16

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*) &= \boldsymbol{q} - [\boldsymbol{p}_0 + t_*\boldsymbol{m}]; \\
0 &= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}(t_*)] \cdot \boldsymbol{m} \\
&= [\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{p}_0 + t_*\boldsymbol{m})] \cdot \boldsymbol{m}; \\
&= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0] \cdot \boldsymbol{m} - t_*; \\
t_* &= [\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}_0] \cdot \boldsymbol{m} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.17

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{v} &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot v_l \boldsymbol{e}_l \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j v_l \delta_{kl} \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j v_k \\
&= -\epsilon_{ikj} u_i v_k v_j = -[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{v} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.18
O produto vetorial entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ em Maxima é obtido da seguinte maneira:

```
(%i1) load(vect);
(%o1)          /usr/share/maxima/5.21.1/share/vector/vect.mac
(%i2) express( [3,7,2] ~ [1,4,5]) ;
(%o2)                              [27, - 13, 5]
```

Portanto, a equação do plano é

$$27x - 13y + 5z = 0 \blacksquare$$

Exercício 5.20

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \\
&= \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \\
&= \epsilon_{nkm} u_n a_k \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{nkm} u_n \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta jm\right) u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= u_j v_i w_j \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= u_j w_j v_i \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k; \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{kmn} b_k w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{kmn} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j w_i \boldsymbol{e}_j - u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.
\end{aligned}
$$

Portanto, em geral,

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \neq (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u}\times[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}] \neq [\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]\times\boldsymbol{w} \blacksquare
\end{gathered}
$$

Exercício 5.21

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]\cdot[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk}u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot \epsilon_{lmn}a_l b_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}(\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_n) \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\delta_{kn} \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \\
&= u_i v_j a_l b_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \\
&= u_i v_j a_l b_m \delta_{il}\delta_{jm} - u_i v_j a_l b_m \delta_{im}\delta_{jl} \\
&= u_i v_j a_i b_j - u_i v_j a_j b_i \\
&= (u_i a_i)(v_j b_j) - (u_i b_i)(v_j a_j) \\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.24

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}^1 &= \boldsymbol{b}_1\cdot\frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3] = \frac{1}{B}\left(\boldsymbol{b}_1\cdot[\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3]\right) = \frac{B}{B} = 1; \\
\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}^2 &= \boldsymbol{b}_1\cdot\frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1] = \frac{1}{B}\boldsymbol{b}_1\cdot[\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1] \equiv 0;
\end{aligned}
$$

etc.

Exercício 5.25

```
(%i1) a : matrix( [1,0],[0,1]) ;
                                    [ 1  0 ]
(%o1)                               [      ]
                                    [ 0  1 ]
(%i2) determinant(a);
(%o2)                                   1
(%i3) a : matrix( [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]) ;
                                   [ 1  0  0 ]
                                   [         ]
(%o3)                              [ 0  1  0 ]
                                   [         ]
                                   [ 0  0  1 ]
(%i4) determinant(a);
(%o4)                                   1
```

Exercício 5.26

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} e_{1 i_1} \ldots e_{n i_n}.$$

Mas

$$[\boldsymbol{e}] = [e_{ij}] = [\delta_{ij}];$$

portanto, só sobrevivem $i_1 = 1, i_2 = 2, i_n = n$:

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \epsilon_{12\ldots n} \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1 = 1 \blacksquare$$

Exercício 5.30

```
(%i2) B : matrix( [4,3,0,1], [4,2,0,0], [4, 1, 0, 0], [4, 0, 1, 0] ) ;
                                  [ 4  3  0  1 ]
                                  [            ]
                                  [ 4  2  0  0 ]
(%o2)                             [            ]
                                  [ 4  1  0  0 ]
                                  [            ]
                                  [ 4  0  1  0 ]
(%i3) determinant(B);
(%o3)                                   4
```

■

Exercício 5.31
Basta calcular o módulo do determinante da matriz cujas colunas são os elementos dos 4 vetores:

$$\begin{aligned}
V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \quad 2 \left[3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&\quad - 1 \left[4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= \quad 2\,[3(9-2) - 2(0-4) + 4(0-6)] \\
&\quad - 1\,[4(9-2) - 2(3-0) + 4(1-0)] \\
&= 2\,[21 + 8 - 24] - 1\,[28 - 6 + 4] \\
&= 10 - 26 \\
&= -16.
\end{aligned}$$

O hipervolume, portanto, é igual a 16 ■

Exercício 5.32

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} &= S_{ij} A_{lm} (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m). \\
&= S_{ij} A_{lm} \delta_{jl} \delta_{im}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S_{ij}A_{ji} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}A_{ji} + \frac{1}{2}S_{ji}A_{ij} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}\left(A_{ji} + A_{ij}\right) = 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.33

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}] &= A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \cdot \epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k \\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_k) \\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l\delta_{mk} \\
&= A_{lk}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.34

$$C_{(i)j}C_{(i)j} = 1 \blacksquare$$

Exercício 5.35

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} = u'_k\boldsymbol{e}'_k &= u'_j\boldsymbol{e}'_j \\
&= u'_jC_{ij}\boldsymbol{e}_i \\
&= u'_jC_{ij}C_{ik}\boldsymbol{e}'_k; \Rightarrow \\
u'_k &= u'_jC_{ij}C_{ik} \\
&= C_{ik}C_{ij}u'_j \\
&= C^{\intercal}_{ki}C_{ij}u'_j; \Rightarrow \\
C^{\intercal}_{ki}C_{ij} &= \delta_{kj} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.36

$$
\begin{aligned}
A'_{mn} &= C^{\intercal}_{mi}A_{ij}C_{jn} \\
&= C^{\intercal}_{mi}A_{ji}C_{jn} \\
&= C^{\intercal}_{nj}A_{ji}C_{im} \\
&= A'_{nm} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.37

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \left[\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] C_{il}\boldsymbol{e}'_lC_{jm}\boldsymbol{e}'_m \\
&= \left[C_{il}C_{jm}\delta_{ij} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m, \\
&= \left[C_{il}C_{im} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m, \\
&= \left[\delta_{lm} - \frac{[C_{il}k_i][C_{jm}k_j]}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m.
\end{aligned}
$$

Basta agora reconhecer que $[C_{il}k_i] = k'_l$ e $[C_{jm}k_j] = k'_m$:

$$\boldsymbol{P} = \left[\delta_{lm} - \frac{k'_lk'_m}{|\boldsymbol{k}|^2}\right] \boldsymbol{e}'_l\boldsymbol{e}'_m \blacksquare$$

Exercício 5.38

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} &= P_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i = P_{il}a_l\boldsymbol{e}_i;\\
[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{k} &= \epsilon_{ijk}P_{il}a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}\left[\delta_{il}-\frac{k_ik_l}{k^2}\right]a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}a_ik_j\boldsymbol{e}_k-\frac{(a_lk_l)}{k^2}\epsilon_{ijk}k_ik_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})}{k^2}\underbrace{[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}]}_{\equiv\boldsymbol{0}}\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 5.39

$$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)\ \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}=(-u_1,u_2,u_3), \tag{C.7}$$

$$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)\ \Rightarrow \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=(-v_1,v_2,v_3). \tag{C.8}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} &= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1+(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{e}_2+(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{e}_3\\
[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}] &= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1+(u_3(-v_1)-(-u_1)v_3)\boldsymbol{e}_2\\
&\quad+((-u_1)v_2-u_2(-v_1))\boldsymbol{e}_3\\
&= (u_2v_3-u_3v_2)\boldsymbol{e}_1-(u_3v_1-u_1v_3)\boldsymbol{e}_2-(u_1v_2-u_2v_1)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

Portanto, o vetor $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}]$ possui a mesma coordenada 1 de $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$, enquanto que as coordenadas 2 e 3 ficam invertidas. Isto significa que $[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}]\times[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}]$ representa uma *rotação* de 180° de $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ em torno de Ox_1 ■

Exercício 5.40
A fórmula geral é

$$C_{ij}=(\boldsymbol{f}_j\cdot\boldsymbol{e}_i)$$

donde

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{12} &= \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=-\frac{1}{\sqrt{6}},\\
C_{13} &= \boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\\
C_{21} &= \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}},\\
C_{22} &= \boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{2}{\sqrt{6}},\\
C_{23} &= \boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_2=0,\\
C_{31} &= \boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}
$$

$$C_{32} = \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}},$$
$$C_{33} = \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \blacksquare$$

ou

$$[C] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & +\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} & +\frac{1}{\sqrt{6}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício 5.41
Na base E,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= [1,0,0]^\top, & \boldsymbol{f}_1 &= [\cos\alpha, +\operatorname{sen}\alpha, 0]^\top, \\ \boldsymbol{e}_2 &= [0,1,0]^\top, & \boldsymbol{f}_2 &= [-\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha, 0]^\top, \\ \boldsymbol{e}_3 &= [0,0,1]^\top, & \boldsymbol{f}_3 &= [0,0,1]^\top. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$[C] = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{f}_3) \\ (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{f}_3) \\ (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{f}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na base F,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= [1,0,0]^\top, & \boldsymbol{g}_1 &= [\cos\beta, 0, -\operatorname{sen}\beta]^\top, \\ \boldsymbol{f}_2 &= [0,1,0]^\top, & \boldsymbol{g}_2 &= [0,1,0]^\top, \\ \boldsymbol{f}_3 &= [0,0,1]^\top, & \boldsymbol{g}_3 &= [+\operatorname{sen}\beta, 0, \cos\beta]^\top, \end{aligned}$$

porque o giro de β é *negativo*. Segue-se que

$$[D] = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{g}_3) \\ (\boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3) \\ (\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1) & (\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2) & (\boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício 5.42

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_j &= C_{ij}\boldsymbol{e}_i, \\ \boldsymbol{e}''_k &= D_{jk}\boldsymbol{e}'_j = D_{jk}C_{ij}\boldsymbol{e}_i \;\Rightarrow \\ \boldsymbol{e}''_k &= C_{ij}D_{jk}\boldsymbol{e}_i. \end{aligned}$$

A matriz da rotação $E \longrightarrow E''$, portanto, é igual ao produto matricial $[C][D]$ ■

Exercício 5.43
Temos

$$\begin{aligned} [C][\boldsymbol{u}] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^\top = [\boldsymbol{u}], \\ [C][\boldsymbol{v}] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top = -[\boldsymbol{v}]. \end{aligned}$$

Claramente, não se trata de uma rotação: enquanto que $\boldsymbol{u}$ "não sai do lugar", $\boldsymbol{v}$ é rebatido em torno da reta $y = x$. Também poderíamos ter verificado que $\det[C] = -1$, enquanto que para toda rotação devemos ter $\det[C] = +1$ ■

Exercício 5.45

```
(%i3) a : matrix([1,2,3],[0,3,2],[0,0,1]) ;
                                    [ 1  2  3 ]
                                    [         ]
(%o3)                               [ 0  3  2 ]
                                    [         ]
                                    [ 0  0  1 ]
(%i4) eigenvectors(a);
(%o4)          [[[1, 3], [2, 1]], [[[1, 0, 0]], [[1, 1, 0]]]]
```

Exercício 5.48

a) A transformação $\boldsymbol{A}$ gira um vetor $\boldsymbol{x}$ de $\pi/4$ radianos em torno de x_3.

b)

$$\begin{aligned}
c_1(1,\mathrm{i},0) + c_2(1,-\mathrm{i},0) &= (\alpha,\beta,0)\\
c_1 + c_2 &= \alpha,\\
c_1 - c_2 &= \beta/\mathrm{i},\\
c_1 &= \frac{1}{2}\,(\alpha + \beta/\mathrm{i})\\
&= \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{i}\beta),\\
c_2 &= \frac{1}{2}\,(\alpha - \beta/\mathrm{i})\\
&= \frac{1}{2}\,(\alpha + \mathrm{i}\beta) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 5.50

Pares de autovalores, autovetores são:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3 & \boldsymbol{f}_1 &= (1,-1),\\
\lambda_2 &= 1 & \boldsymbol{f}_2 &= (1,1).
\end{aligned}$$

Na base dos autovetores,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
v_1 &= A\mathrm{e}^{3t},\\
v_2 &= B\mathrm{e}^{t}.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A\mathrm{e}^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + B\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ \blacksquare$$

Exercício 5.51

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) a : matrix( [11/3, -5/6, -1/3], [2/3,8/3,-4/3],
        [-1/3,13/6,-1/3]) ;
                             [ 11      5     1 ]
                             [ --    - -   - - ]
                             [ 3       6     3 ]
                             [                 ]
                             [  2     8      4 ]
(%o2)                        [  -     -    - - ]
                             [  3     3      3 ]
                             [                 ]
                             [   1   13      1 ]
                             [ - -   --    - - ]
                             [   3   6       3 ]
(%i3) id : matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
                                [ 1  0  0 ]
                                [         ]
(%o3)                           [ 0  1  0 ]
                                [         ]
                                [ 0  0  1 ]
(%i4) pcarac : determinant(a - lambda*id) ;
                       1   8              26   11
(%o4) (((- lambda) - -) (- - lambda) + --) (-- - lambda)
                       3   3              9    3
                            8                                    1
                            - - lambda           2 ((- lambda) - -)
                            3            13                      3    4
                            ---------- + --    5 (------------------ - -)
                                3        9                3             9
                          - --------------- + ---------------------------
                                   3                       6
(%i5) expand(%);
                          3            2
(%o5)           (- lambda ) + 6 lambda  - 11 lambda + 6
(%i6) pcarac : % ;
                          3            2
(%o6)           (- lambda ) + 6 lambda  - 11 lambda + 6
```

Portanto, a equação característica é

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0,$$

que por inspeção possui a raiz $\lambda = 1$. Reduza a ordem da equação algébrica, dividindo o polinômio por $\lambda - 1$:

```
(%i7) divide(pcarac,lambda-1,lambda) ;
                                   2
(%o7)                      [- lambda  + 5 lambda - 6, 0]
```

o que significa que a divisão (perfeita) tem como quociente:

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 6,$$

cujas raízes são:

```
(%i8)                          solve(% , lambda)
                                     1
(%o8)                       [[lambda = 3], [lambda = 2]]
```

Ou seja: os autovalores são 1, 2 e 3. Com isto é possível calcular os autovetores. Em `Maxima`, isto é bem rápido:

```
(%i9) eigenvectors(a);
                                                        3  5
(%o9) [[[1, 2, 3], [1, 1, 1]], [[[1, 2, 3]], [[1, -, -]],
                                                        2  4
```

```
                                                                    2   1
                                                            [[1, -, -]]]]
                                                                    3   3
```

mas um cálculo manual também é relativamente fácil:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= (1,2,3),\\ \boldsymbol{e}_2 &= (1,3/2,5/4),\\ \boldsymbol{e}_3 &= (1,2/3,1/3).\end{aligned}$$

Obtenha agora o vetor $(1,1,1)$ na base dos autovetores:

$$(1,1,1) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

```
(%i10) e1 : [1,2,3] ;
(%o10)                                  [1, 2, 3]

(%i11) e2 : [1,3/2,5/4] ;
                                            3   5
(%o11)                                  [1, -, -]
                                            2   4
(%i12) e3 : [1,2/3,1/3] ;
                                            2   1
(%o12)                                  [1, -, -]
                                            3   3
(%i13) solve( [1,1,1] - a1*e1 - a2*e2 - a3*e3, [a1,a2,a3]);
                                        1                 3
(%o13)                        [[a1 = -, a2 = 0, a3 = -]]
                                        4                 4
```

Portanto, na base dos autovetores o sistema desacoplado é

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4\\0\\3/4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/4\\0\\1/4\end{bmatrix}$$

Mas $(x,y,z) = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3$, e então:

```
(%i13) [x,y,z] = (1/4)*e1 + (1/4)*e3 ;
                                                1   2   5
(%o13)                            [x, y, z] = [-, -, -]
                                                2   3   6
```

Conferindo:

```
(%i14) a.[1/2,2/3,5/6] ;
                                          [ 1 ]
                                          [   ]
(%o14)                                    [ 1 ]
                                          [   ]
                                          [ 1 ]
```

Capítulo 6

Exercício 6.1
Solução na listagem C.5.

Listagem C.5: Obtenção de uma matriz na forma escada com Maxima.

```
(%i1) mm :  matrix([1,2,1,0], [-1,0,3,5], [1,-2,1,1] );
                                [  1    2   1  0 ]
                                [                ]
(%o1)                           [ - 1   0   3  5 ]
                                [                ]
                                [  1   - 2  1  1 ]
(%i2) mm[2] : mm[1] + mm[2] ;
(%o2)                              [0, 2, 4, 5]
(%i3) mm[3] : mm[1] - mm[3] ;
(%o3)                             [0, 4, 0, - 1]
(%i4) mm;
                                 [ 1  2  1   0  ]
                                 [              ]
(%o4)                            [ 0  2  4   5  ]
                                 [              ]
                                 [ 0  4  0  - 1 ]
(%i5) mm[3] : mm[3] - 2*mm[1] ;
(%o5)                           [- 2, 0, - 2, - 1]
(%i6) mm ;
                               [  1   2   1    0  ]
                               [                 ]
(%o6)                          [  0   2   4    5  ]
                               [                 ]
                               [ - 2  0  - 2  - 1 ]
(%i7) kill(all);
(%o0)                                   done
(%i1) mm :  matrix([1,2,1,0], [-1,0,3,5], [1,-2,1,1] );
                                [  1    2   1  0 ]
                                [                ]
(%o1)                           [ - 1   0   3  5 ]
                                [                ]
                                [  1   - 2  1  1 ]
(%i2) mm[2] : mm[2] + mm[1] ;
(%o2)                              [0, 2, 4, 5]
(%i3) mm[3] : mm[3] - mm[1] ;
(%o3)                             [0, - 4, 0, 1]
(%i4) mm ;
                                 [ 1   2   1  0 ]
                                 [              ]
(%o4)                            [ 0   2   4  5 ]
                                 [              ]
                                 [ 0  - 4  0  1 ]
(%i5) mm[3] : mm[3] + 2*mm[2] ;
(%o5)                              [0, 0, 8, 11]
(%i6) mm ;
                                [ 1  2  1  0  ]
                                [             ]
(%o6)                           [ 0  2  4  5  ]
                                [             ]
                                [ 0  0  8  11 ]
```

Exercício 6.3
Os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2, & \boldsymbol{f}_1 &= (1,1,1), \\ \lambda_2 &= -1, & \boldsymbol{f}_2 &= (1,0,-1), \\ \lambda_3 &= -1, & \boldsymbol{f}_3 &= (0,1,-1). \end{aligned}$$

Neste caso, *apesar* de haver apenas dois autovalores distintos, há 3 autovetores LI; portanto, a solução geral é

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício 6.4

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os autovalores e autovetores correspondentes da matriz são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = (1, \mathrm{i}/\sqrt{3}); \\ \lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = (1, -\mathrm{i}/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Vamos então decompor o vetor com componentes (x, y) na base canônica na base de autovetores:

$$\begin{aligned} (x,y) &= a(1, \mathrm{i}/\sqrt{3}) + b(1, -\mathrm{i}/\sqrt{3}); \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}/\sqrt{3} & -\mathrm{i}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \\ a &= \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{i}\sqrt{3}y\right), \\ b &= \frac{1}{2}\left(x + \mathrm{i}\sqrt{3}y\right). \end{aligned}$$

Portanto, na base dos autovetores, o sistema é dado por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Este sistema está na forma diagonal, e tem solução

$$\begin{aligned} a(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t}, \\ b(t) &= B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} + B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}, \\ y(t) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \left[A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} - B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t} \right] \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 6.5

Como sempre, supomos inicialmente que o problema está na base canônica. Buscamos a solução $\boldsymbol{u}(t) = Au_1(t)\boldsymbol{e}_1 + Bu_2(t)\boldsymbol{e}_2$. Os autovalores e autovetores do problema são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_1 &= (1, \mathrm{i}), \\ \lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_2 &= (1, -\mathrm{i}). \end{aligned}$$

Na base dos autovetores o problema é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}, \\ v_2 &= k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}. \end{aligned}$$

Note que k_1 e k_2, em princípio, são números complexos. A solução do problema, portanto, é

$$\boldsymbol{u}(t) = v_1(t)\boldsymbol{f}_1 + v_2(t)\boldsymbol{f}_2.$$

O retorno à base canônica é imediato:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} + k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Vamos escolher k_1 e k_2 de tal forma que $u_1(t)$ seja real, na esperança (razoável) de que os mesmos k_1 e k_2 também produzam $u_2(t)$ real. Sejam, por brevidade, $C = \cos t$ e $S = \operatorname{sen} t$, e

$$\begin{aligned} k_1 &= (A + \mathrm{i}B)/2, \\ k_2 &= (A - \mathrm{i}B)/2; \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t}, \\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{(A+\mathrm{i}B)(C-\mathrm{i}S) + (A-\mathrm{i}B)(C+\mathrm{i}S)\right\} \\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC + AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right\} \\ &= \mathrm{e}^t\left[AC + BS\right] = \mathrm{e}^t\left[A\cos t + B\operatorname{sen} t\right]. \end{aligned}$$

Repetimos para u_2:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \mathrm{i}k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t}, \\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}(A+\mathrm{i}B)(C-\mathrm{i}S) - \mathrm{i}(A-\mathrm{i}B)(C+\mathrm{i}S)\right\} \\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC\right] - \mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right]\right\} \\ &= \mathrm{e}^t\left[-\mathrm{i}^2 AS + \mathrm{i}^2 BC\right] = \mathrm{e}^t\left[A\operatorname{sen} t - B\cos t\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 7

Exercício 7.1
Até ordem 2, temos

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

As derivadas de interesse são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= 1;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, em torno de $(0,0)$,

$$f(x,y) \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2xy).$$

Exercício 7.2
Desejamos calcular

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0).$$

Trata-se portanto de um exercício de derivação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + y\cos(x)\\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + y\cos(x),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\exp(x+y) + \operatorname{sen}(x),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) - y\operatorname{sen}(x)\\
&= [2 + 4x + x^2]\exp(x+y) - y\operatorname{sen}(x),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\exp(x+y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + \cos(x)\\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + \cos(x).
\end{aligned}$$

Os valores da função e de suas derivadas em (x_0, y_0) são

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (1, 1),\\
f(x_0, y_0) &= \mathrm{e}^2 + \operatorname{sen}(1),\\
\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1),\\
\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= \mathrm{e}^2 + \operatorname{sen}(1),\\
\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} &= 7\mathrm{e}^2 - \operatorname{sen}(1),\\
\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} &= \mathrm{e}^2,\\
\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1).
\end{aligned}$$

Substituindo na expansão em série de Taylor,

$$\begin{aligned}
f(x, y) \approx\ & \mathrm{e}^2 + \operatorname{sen}(1) + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1) + [\mathrm{e}^2 + \operatorname{sen}(1)](y-1) +\\
& \frac{1}{2}[7\mathrm{e}^2 - \operatorname{sen}(1)](x-1)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2(y-1)^2 + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1)(y-1) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 7.3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} v\cos(uv) & u\cos(uv) \\ -v\operatorname{sen}(uv) & -u\operatorname{sen}(uv) \end{vmatrix}\\
&= -uv\operatorname{sen}(uv)\cos(uv) + uv\operatorname{sen}(uv)\cos(uv) = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 7.4
A regra de Leibnitz é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\,\mathrm{d}t = f(x, b)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} - f(x, a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1/x}^{2/x} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\operatorname{sen}(x(2/x))}{2/x}\frac{\mathrm{d}(2/x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\operatorname{sen}(x(1/x))}{1/x}\frac{\mathrm{d}(1/x)}{\mathrm{d}x} + \int_{1/x}^{2/x} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{2/x} \times \frac{-2}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{1/x} \times \frac{-1}{x^2} + \int_{1/x}^{2/x} \cos(xt)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\operatorname{sen}(2)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^2 \cos(xt)\,\mathrm{d}(xt)\\
&= -\frac{\operatorname{sen}(2)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} + \frac{1}{x}\,[\operatorname{sen}(2) - \operatorname{sen}(1)] = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 7.5
Uma forma bem "cinemática", ou seja, bem "física", de resolver é a seguinte:

$$\boldsymbol{r} = (t, 2t, 3t) \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (1, 2, 3).$$

A "velocidade" $\boldsymbol{v}$ é $(1, 2, 3)$. Se módulo é

$$v = |\boldsymbol{v}| = |(1, 2, 3)| = \sqrt{14}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F(x, y, z)\, ds &= \int_{t=0}^{1} [t + 2(2t)^2 + 3(3t)^3] v\, dt \\
&= \int_0^1 [t + 8t^2 + 81t^3]\sqrt{14}\, dt \\
&= \sqrt{14} \int_0^1 [t + 8t^2 + 81t^3]\, dt \\
&\frac{281\sqrt{14}}{12} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 7.6

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[\left(-3\mathrm{e}^{-t/10}\left(\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{10}\cos(t)\right)\right)^2 + \left(+3\mathrm{e}^{-t/10}\left(\cos(t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(t)\right)\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \left[9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\operatorname{sen}^2(t) + 2\operatorname{sen}(t)\frac{\cos(t)}{10} + \frac{1}{100}\cos^2(t)\right)\right. \\
&\left. + 9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\cos^2(t) - 2\cos(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{10} + \frac{1}{100}\operatorname{sen}^2(t)\right)\right]^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \left[9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{100}\cos^2(t) + \cos^2(t) + \frac{1}{100}\operatorname{sen}^2(t)\right)\right]^{1/2} \mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{909}{100}\mathrm{e}^{-2t/10}}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{3\sqrt{101}}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Integrando,

$$\ell = \int_{t=0}^{\infty} \frac{3\sqrt{101}}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\, \mathrm{d}t = 3\sqrt{101} \blacksquare$$

Exercício 7.7

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\Gamma} \exp(-(x^2+y^2))\sqrt{dx^2+dy^2} \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \exp\left[-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right]\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \exp\left[-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1/2}\,dx \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.8
A integral é

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} x\left[x-x^2\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[x^2-x^3\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.9
A região precisa ser mapeada, e está mostrada na figura C.4.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{2}\int_{x=-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{2}\left[x+xy+\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2}\left\{\left[\sqrt{y}+y\sqrt{y}+\frac{y}{2}\right]-\left[-y-y^2+\frac{y^2}{2}\right]\right\}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2}\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^2}{2}\right]\,\mathrm{d}y = \frac{11\times 2^{7/2}+130}{30} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.10
Uma parametrização tão boa quanto qualquer outra é

$$
\begin{aligned}
x &= u, \\
y &= 1-u^2, \\
z &= v,
\end{aligned}
$$

para $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$. Agora,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1,-2u,0), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0,0,1), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-2u,-1,0),
\end{aligned}
$$

Figura C.4: Figura do exercício 7.9.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(u,v) &= (1-u, u^2, 0),\\
\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v} &= -2u(1-u) - u^2 = u^2 - 2u,\\
I &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} (u^2 - 2u)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u\\
&= -\frac{2}{3} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.11

A projeção do sólido no plano xy é $x^2 + y^2 \leq 1$. O volume desejado é

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{(x^2+y^2)\leq 1} [5 - 5(x^2+y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= 5 \iint_{(x^2+y^2)\leq 1} [1 - (x^2+y^2)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= 5 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\\
&= 10\pi \int_{r=0}^{1} [1 - r^2]\, r\mathrm{d}r\\
&= \frac{5}{2}\pi \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.12

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\\
A_{\mathscr{S}} &= \iint_{R_{uv}} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v;\\
\boldsymbol{r} &= (2u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), u);\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (2\cos(v), \mathrm{sen}(v), 1)\,,\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-2u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), 0)\,,\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-u\cos(v), -2u\,\mathrm{sen}(v), 2u)\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{u^2\cos^2(v) + 4u^2\operatorname{sen}^2(v) + 4u^2} \\
&= \sqrt{u^2\cos^2(v) + u^2\operatorname{sen}^2(v) + 3u^2\operatorname{sen}^2(v) + 4u^2} \\
&= \sqrt{3u^2\operatorname{sen}^2(v) + 5u^2} \\
&= u\sqrt{3\operatorname{sen}^2(v) + 5}; \\
A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{2\pi} u\sqrt{3\operatorname{sen}^2(v) + 5}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{0}^{2\pi} \frac{\sqrt{3\operatorname{sen}^2(v) + 5}}{2}\,\mathrm{d}v \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.13

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)); \\
A_{\mathscr{S}} &= \iint_{R_{uv}} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v; \\
\boldsymbol{r} &= (u, v, \operatorname{sen}(u+v)); \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 0, \cos(u+v)), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 1, \cos(u+v)), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-\cos(u+v), -\cos(u+v), +1); \\
\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)}; \\
A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=-\pi}^{+\pi}\int_{v=-\pi}^{+\pi} \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u; \\
F(u,v) &= \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.14
Eis o desenho:

O plano corta um cilindro de base circular, raio 1, e altura 2, pela metade. Portanto,

$$V = \frac{1}{2}[\pi \times 1^2] \times 2 = \pi.$$

Se você quiser fazer da maneira mais difícil,

$$f(x,y) = z = 1 + y;$$

$$
\begin{aligned}
y &= r\,\mathrm{sen}(\theta);\\
z(r,\theta) &= 1 + r\,\mathrm{sen}(\theta);\\
V &= \iint_{\text{círculo}} z(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} [1 + r\,\mathrm{sen}(\theta)] r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.15

Se $z = f(x,y)$, então a fórmula para o cálculo da área da superfície não-plana (em geral) é

$$
S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.
$$

Portanto, $R_{x,y} = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\}$ e

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + (2x)^2 + (-2y)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\\
&= \iint_{R_{x,y}} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\\
&= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.16

Primeiramente, precisamos encontrar o domínio de integração no plano xy. Pela simetria do problema, fazemos $x^2 + y^2 = r^2$, e calculamos o valor de r em que as duas superfície se interceptam (onde possuem a mesma cota):

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 1 + \frac{r^2}{4},\\
\frac{3r^2}{4} &= 1,\\
r^2 &= \frac{4}{3},\\
r &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
$$

O domínio de integração em xy portanto é $r \leq 2\sqrt{3}/3$.
Claramente, é preferível integrar em coordenadas cilíndricas:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[\left(1 + \frac{r^2}{4}\right) - r^2\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi \int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[1 - \frac{3r^2}{4}\right] r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{2\pi}{3} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.17

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= |(0,0,1) \times (-\operatorname{sen} v, \cos v, 0)|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= |(-\cos v, -\operatorname{sen} v, 0)|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{\operatorname{sen}^2 + \cos^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Os limites de integração são $[0, 2\pi]$ e $[0, 1 - \operatorname{sen}^2 v]$ para u e v respectivamente. Portanto, a área pedida $\oint \mathrm{d}A$, fica

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\operatorname{sen}^2 v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}^2 v\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \cos^2 v\mathrm{d}v = \pi \blacksquare$$

Exercício 7.18

A parametrização óbvia mais uma vez é

$$\begin{aligned}
x &= (1-u^2)^{1/2} \\
y &= u, \\
z &= v.
\end{aligned}$$

Então,

$$Q = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A = \iint_{R_{uv}} \boldsymbol{v} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (u(1-u^2)^{-1/2}, 1, 0), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0,0,1), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (u(1-u^2)^{-1/2}, 1, 0) \times (0,0,1) = \left(1, -\frac{u}{(1-u^2)^{1/2}}, 0\right); \\
\boldsymbol{v} \cdot \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] &= 1; \\
Q &= \int_{u=-1}^{1} \int_{v=0}^{1} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 2\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 7.19

Faça

$$F(x,y,z) = z - \operatorname{sen}(x,y) = 0;$$

um vetor normal a F e apontando no sentido positivo dos zs é dado pelo gradiente

$$\boldsymbol{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (-y\cos(xy), -x\cos(xy), 1).$$

Seja agora $\boldsymbol{t} = (t_x, t_y, t_z)$ o vetor tangente a F: como ele deve estar contido no planto vertical $x = y$, segue-se que $t_x = t_y$; além disto, ele é perpendicular ao vetor normal; conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla F} &= 0, \\
(t_x, t_x, t_z) \cdot (-\sqrt{\pi/2}\cos(\pi/2), -\sqrt{\pi/2}\cos(\pi/2), 1) &= 0, \\
(t_x, t_x, t_z) \cdot (0,0,1) &= 0 \Rightarrow t_z = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $t_z = 0$, e *qualquer* valor de t_x atende às condições do problema. O vetor desejado é qualquer vetor do tipo $(t_x, t_x, 0)$, onde t_x é um número real.

Exercício 7.20

$$
\begin{aligned}
\nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}, \\
&= -h_0\left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j}\right]; \\
\boldsymbol{v} &= kh_0\left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j}\right]; \\
|\boldsymbol{v}|^2 &= k^2h_0^2\left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4}\right]; \\
|\boldsymbol{v}| = f(x,y) &= kh_0\left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4}\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Dada $f(x,y)$, a derivada direcional na direção do vetor unitário $\boldsymbol{t}$ é

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t}\cdot\nabla f.$$

Precisamos portanto do gradiente de f:

$$\nabla f = \frac{kh_0}{2}\left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4}\right]^{-1/2}\left[\frac{8x}{L^4}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^4}\boldsymbol{j}\right].$$

Em $(x,y) = (L,L)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \boldsymbol{t}\cdot\nabla f \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot\frac{kh_0}{2}\left[\frac{4}{L^2} + \frac{1}{4L^2}\right]^{-1/2}\left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot\frac{kh_0}{2}\left[\frac{17}{4L^2}\right]^{-1/2}\left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\cdot\frac{kh_0}{2}\left[\frac{4L^2}{17}\right]^{1/2}\left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3}\right) \\
&= \frac{2kh_0L}{2\sqrt{2}\sqrt{17}}\frac{1}{L^3}(8 + 1/2) \\
&= \frac{kh_0}{\sqrt{2}\sqrt{17}L^2}\frac{17}{2} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}\frac{kh_0}{L^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.21

Em 3 D,

$$\boldsymbol{u} = (-\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax), 0, Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax));$$

a vorticidade é

$$\nabla\times\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\pi A\cos(\pi z)\,\mathrm{sen}(ax) & 0 & Aa\,\mathrm{sen}(\pi z)\cos(ax) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\pi^2 A \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) + a^2 A \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax)\right] \boldsymbol{j} \\
&= (\pi^2 + a^2) A(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \boldsymbol{j};
\end{aligned}
$$

a divergência é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\pi A \cos(\pi z) \operatorname{sen}(ax)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(Aa \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax)\right) \\
&= -\pi A a \cos(\pi z) \cos(ax) + \pi A a \cos(\pi z) \cos(ax) = 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.22

Primeiro o vetor normal. Dada a superfície $F(x, y, z) = 0$, o normal é

$$
\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} F|} \boldsymbol{\nabla} F
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \left[x^2 + y^2\right]^{1/2} - z = 0; \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= x\left[x^2 + y^2\right]^{-1/2}; \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= y\left[x^2 + y^2\right]^{-1/2}; \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -1; \\
|\boldsymbol{\nabla} F| &= \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1\right]^{1/2} = \sqrt{2}; \\
\boldsymbol{n}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v\left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1\right).
\end{aligned}
$$

Agora, a integral de superfície F_z é dada por

$$
F_z = \iint_{R_{uv}} -p(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.
$$

O produto vetorial é formado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right);
\end{aligned}
$$

em seguida,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right); \\
\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

A integral simplifica-se para

$$
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = -1/\sqrt{2};
$$

$$
\begin{aligned}
F_z &= \iint_{R_{uv}} -[p_0 + \rho g(h - z)] \times (-1/\sqrt{2}) \times \sqrt{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_{R_{uv}} [p_0 + \rho g(h - \sqrt{u^2 + v^2})]\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{\theta=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{h} [p_0 + \rho g(h - r)]r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi h^2}{6}\,(3p_0 + \rho g h) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.23

Este é um exercício de aplicação sistemática (e cuidadosa) da regra da cadeia. Primeiro, obtemos r, θ em função de x, y:

$$
\begin{aligned}
r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\
\theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}
$$

Em seguida, todas as derivadas possíveis são (omitindo os detalhes):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos(\theta), \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \operatorname{sen}(\theta), \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= +\frac{\cos(\theta)}{r}.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right]\cos(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2(\theta) + \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\
&- \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\cos(\theta)}{r} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\
&+ \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.
\end{aligned}
$$

Somando,

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \blacksquare
$$

Exercício 7.24

Usamos o teorema da divergência:

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S &= \int_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \\
&= \int_{\mathscr{V}} (2+2-4)\,\mathrm{d}V \\
&= 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.25

a) A integral de volume é o *peso* de um corpo com volume V. A integral de superfície é a força de superfície exercida pela pressão.

b)

$$
\begin{aligned}
\int_V \rho \boldsymbol{g}\,dV - \int_S p\boldsymbol{n}\,dS &= \boldsymbol{0}, \\
\int_V \rho g_i \boldsymbol{e}_i\,dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\,dV &= \boldsymbol{0}, \\
\int_V \left[\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}\right]\boldsymbol{e}_i\,dV &= \boldsymbol{0}, \\
\frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho g_i \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 7.26

É melhor usar o teorema da divergência!

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+z^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^3\right) = 0;
$$

$$
\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S = \int_{\mathscr{C}} \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = 0 \blacksquare
$$

Exercício 7.27
Trata-se de uma aplicação evidente do teorema de Stokes:

$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}] \, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Mas

$$\begin{aligned}\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint_{\mathscr{L}} (-y, x, \operatorname{senh}(x^2 + y^2)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, 0) \\ &= \oint_{\mathscr{L}} (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \, .\end{aligned}$$

A integral de linha precisa ser parametrizada:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta), \\ \mathrm{d}x &= -\operatorname{sen}(\theta) \, \mathrm{d}\theta, \\ y &= \operatorname{sen}(\theta), \\ \mathrm{d}y &= \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta; \qquad \Rightarrow \\ I_{\mathscr{S}} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right] \mathrm{d}\theta = 2\pi \, \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 7.28
Do lado esquerdo,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}]) &= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \\ &= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial (\phi \gamma_j)}{\partial x_i} \\ &= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \gamma_j \\ &= \epsilon_{kij} n_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \gamma_j \\ &= [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla} \phi] \cdot \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$

Do lado direito,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \phi \gamma_j \mathrm{d}r_j \\ &= \phi \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Igualando ambos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla} \phi] \cdot \boldsymbol{\gamma} \, \mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{L}} \phi \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \\ \left\{ \int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla} \phi] \, \mathrm{d}A \right\} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \left\{ \oint_{\mathscr{L}} \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\} \cdot \boldsymbol{\gamma}; \Rightarrow \\ \int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla} \phi] \, \mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{L}} \phi \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \, \blacksquare\end{aligned}$$

Capítulo 8

Exercício 8.1

a) Ordem 3, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

b) Ordem 1, não-linear, coeficientes constantes, homogênea.

c) Ordem 2, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

d) Ordem 2, linear, coeficientes constantes, não-homogênea.

Exercício 8.3

Faça $y = uv$ e substitua:

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2xuv &= 1\\
u\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2xv\right]}_{=0} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2xv &= 0\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= 2x\mathrm{d}x\\
\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} &= 2\int_0^x \xi\mathrm{d}\xi = x^2\\
\ln\frac{v}{v_0} &= x^2\\
v &= v_0\mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow\\
v_0\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1\\
u &= \frac{1}{v_0}\int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + u_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0 \Rightarrow\\
y = uv &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0\right]v_0\mathrm{e}^{x^2}\\
y &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}\operatorname{erf}(x) + K\mathrm{e}^{x^2}; \qquad y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 8.4

```
(%i1) eqd : 'diff(y,x) + y/x - sin(x)/x ;
                                  dy   y   sin(x)
(%o1)                             -- + - - ------
                                  dx   x     x
(%i2) ode2(eqd,y,x);
                                      %c - cos(x)
(%o2)                             y = -----------
                                            x
```

Exercício 8.6
Se $P = uv$,

$$\begin{aligned} u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{uv}{T} &= \frac{Q(t)}{T} \\ u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{T}\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{Q}{T}. \end{aligned}$$

Forçando o termo entre colchetes a se anular:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{T} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\mathrm{d}t}{T}, \\ \ln|v| &= -\frac{t}{T} + c_1 \\ v &= C\mathrm{e}^{-t/T}. \end{aligned}$$

Substituindo no restante da equação,

$$\begin{aligned} Ce^{-t/T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{Q(t)}{T}, \\ C\,mdu &= \frac{1}{T}\mathrm{e}^{t/T}Q(t)\,\mathrm{d}t, \\ C(u-u_0) &= \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\tau/T}Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ u &= u_0 + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\tau/T}Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right], \\ P = uv &= \mathrm{e}^{-t/T}\left[Cu_0 + \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{\frac{\tau}{T}}Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]. \end{aligned}$$

É eviente agora que $Cu_0 = P_0$, donde

$$P(t) = P_0\mathrm{e}^{-t/T} + \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{T}}Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau \ \blacksquare$$

Exercício 8.7

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\ \frac{dy}{y} &= -x\,dx \\ \int\frac{dy}{y} &= -\int x\,dx \\ \ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + K \\ |y| &= e^K e^{-\frac{x^2}{2}} \\ y &= \pm e^K e^{-\frac{x^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \\ y(-x) &= Ce^{-\frac{(-x)^2}{2}} = Ce^{-\frac{x^2}{2}} = y(x) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 8.8
Esta é uma equação separável:

$$
\begin{aligned}
(1+t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -(1+2t)x,\\
\frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\frac{1+2t}{1+t}\,\mathrm{d}t\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -\left[\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + 2\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t\right]\\
\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= -\left[\int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} + 2\int_0^t \frac{\tau}{1+\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\\
\ln\frac{x}{x_0} &= -\Big[\ln(1+\tau) + 2\big((1+\tau) - \ln(1+\tau)\big)\Big]_0^t\\
&= -\left[\ln(1+t) + 2t - 2\ln(1+t)\right]\\
&= -\left(2t - \ln(1+t)\right) \;\Rightarrow\\
x &= x_0(1+t)\mathrm{e}^{-2t} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 8.9
a) Faço $y = uv$ e substituo na equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 4uv &= 8,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 4v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -4v,\\
\frac{dv}{v} &= -4\,dx\\
\ln|v| &= -4x + k'\\
|v| &= k''e^{-4x},\\
v &= ke^{-4x}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ke^{-4x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 8,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{2}{k}[4e^{4x}],\\
u(x) &= \frac{2}{k}e^{4x} + C'\\
y(x) &= \left[\frac{2}{k}e^{4x} + C'\right]ke^{-4x},\\
y(x) &= 2 + Ce^{-4x} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

b) re-arrumo a equação para vê-la melhor:

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{y} = \frac{1}{y^2} + 4
$$

Faço $x = uv$:

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{uv}{y} &= \frac{1}{y^2} + 4,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + \frac{v}{y}\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y^2} + 4.\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} &= -\frac{v}{y},\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dy}{y},\\
\ln|v| &= -\ln|y| + k',\\
\ln|v| + \ln|y| &= k',\\
\ln|vy| &= k',\\
|vy| &= k'',\\
vy &= k,\\
v &= \frac{k}{y}.\\
\frac{k}{y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y^2} + 4,\\
k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} &= \frac{1}{y} + 4y,\\
ku &= \ln|y| + 2y^2 + k_1.\\
x(y) &= \frac{1}{k}\left[\ln|y| + 2y^2 + k_1\right]\frac{k}{y}\\
x(y) &= \frac{\ln|y|}{y} + 2y + \frac{(kk_1)}{y}\\
&= \frac{\ln|y|}{y} + 2y + \frac{C}{y} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 8.10

Como não há condição inicial indicada, trata-se da solução geral. Faça

$$
\begin{aligned}
y &= uv,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\
(1-x^2)\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + xuv &= x^2,\\
u\underbrace{\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + xv\right]}_{=0} + (1-x^2)v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -xv,\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2},\\
\ln|v| &= \left|\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right| + \underbrace{k'}_{=\ln|k_1|},\\
\ln|v| &= \ln|k1| + \ln(1-x^2)^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$v = k_1(1-x^2)^{1/2}.$$

Resta integrar:

$$\begin{aligned}
k_1(1-x^2)^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2,\\
k_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}},\\
k_1 u &= \int \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{U}\,\underbrace{\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}}_{dV};\\
&= -\frac{x}{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - \int\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\left[\frac{1}{1-x^2}+\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\right]\mathrm{d}x;\\
k_1 u &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + 2\underbrace{\int\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x}}_{k_1 u};\\
k_1 u &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2;\\
u &= \frac{1}{k_1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2\right];\\
y = uv &= \frac{1}{k_1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arcsen} x + k_2\right]k_1(1-x^2)^{1/2}\\
&= x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 8.11

$$\begin{aligned}
x = uv \;\Rightarrow\; u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3uv &= \operatorname{sen}(3t);\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 3v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \operatorname{sen}(3t);\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -3v\\
\frac{dv}{v} &= -3dt\\
\ln|v| &= -3t + k_1\\
|v| &= d_1\mathrm{e}^{-3t}\\
v &= c_1\mathrm{e}^{-3t};\\
c_1\mathrm{e}^{-3t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \operatorname{sen}(3t);\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{c_1}\mathrm{e}^{3t}\operatorname{sen}(3t);\\
u(t) &= \frac{1}{6c_1}\mathrm{e}^{3t}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2;\\
x(t) = uv &= \left[\frac{1}{6c_1}\mathrm{e}^{3t}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + c_2\right]c_1\mathrm{e}^{-3t}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) + Ce^{-3t};$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{6} + C;$$

$$C = 7/6 \blacksquare$$

Exercício 8.13

Procuramos uma solução homogênea:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_h}{dx} + \operatorname{sen}(x)y_h &= 0,\\
\frac{dy_h}{dx} &= -\operatorname{sen}(x)y_h,\\
\frac{dy_h}{y_h} &= -\operatorname{sen}(x)\,dx,\\
\ln|y_h| &= \cos(x) + k_1,\\
|y_h| &= \exp(k_1)\exp(\cos(x)) = k_2\exp(\cos(x)) \Rightarrow\\
y_h &= k\exp(\cos(x)).
\end{aligned}$$

Agora buscamos uma solução da equação completa na forma

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)y_h(x); \Rightarrow\\
u(x)\frac{dy_h}{dx} + y_h\frac{du}{dx} + \operatorname{sen}(x)u(x)y_h &= \operatorname{sen}(x);\\
u(x)\left[\frac{dy_h}{dx} + \operatorname{sen}(x)y_h\right] + y_h\frac{du}{dx} &= \operatorname{sen}(x)\\
k\exp(\cos(x))\frac{du}{dx} &= \operatorname{sen}(x);\\
du &= \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{k\exp(\cos(x))} = -\frac{1}{k}\frac{dw}{\exp(w)}
\end{aligned}$$

$(w = \cos(x))$

$$= \frac{1}{k}\exp(-w)d(-w).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{k}\exp(-w) + k_3 = \frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3;\\
y(x) &= u(x)y_h(x) = \left[\frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3\right][k\exp(\cos(x))]\\
&= 1 + (k_3k)\exp(\cos(x)) = 1 + C\exp(\cos(x)) \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 8.14

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv &= e^{-x},\\
u\left[\frac{dv}{dx} + v\right] + v\frac{du}{dx} &= e^{-x},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_1,\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{-x},\\
|v| &= k_2\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_2\mathrm{e}^{-x} = v_0\mathrm{e}^{-x};\\
v_0\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
v_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0},\\
u &= u_0 + \frac{x}{v_0};\\
y &= uv = \left[u_0 + \frac{x}{v_0}\right] v_0\mathrm{e}^{-x}\\
&= u_0v_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},\\
&= y_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x};\\
y(0) &= 1 \;\Rightarrow\; y_0 = 1;\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(1+x) \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 8.15

A equação, reescrita, é uma equação de Bernoulli:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \beta m = \alpha m^{2/3}.$$

Fazendo $z = m^{1-2/3} = m^{1/3}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{3}m^{-2/3}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},\\
\frac{1}{3}m^{-2/3}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\beta m^{1/3} &= \frac{1}{3}\alpha,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}z &= \frac{\alpha}{3}\\
\frac{\mathrm{d}(z-\alpha/\beta)}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}(z-\alpha/\beta) &= 0\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}u &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\beta}{3}u,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\frac{\beta}{3}\,\mathrm{d}t\\
u &= u_0e^{-(\beta/3)t},\\
z &= \frac{\alpha}{\beta} + u_0e^{-(\beta/3)t},\\
m(t) &= \left[\frac{\alpha}{\beta} + u_0e^{-(\beta/3)t}\right]^3
\end{aligned}
$$

Para que $m(0) = 0$, $u_0 = -\alpha/\beta$, donde

$$m(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left[1 - e^{-(\beta/3)t}\right]^3 \quad \blacksquare$$

Exercício 8.16
As dimensões são de (volume/tempo), ou seja: vazão. Elas são consistentes com a equação da continuidade.
Para resolver a equação diferencial, substitua $E(t)$ e $S(t)$ na equação da continuidade, e obtenha

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{V^3}{V_R^2 T} - \frac{V}{T},$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{V}{T} = \frac{V^3}{V_R^2 T}$$

Esta é uma equação de Bernoulli; fazendo $z = V^{-2}$ e substituindo, obtém-se

$$T\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - 2z = -2V_R^{-2}.$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem, *linear* e não-homogênea. Uma solução particular é *muito fácil* de encontrar:

$$z_p = V_R^{-2}.$$

A equação homogênea associada é

$$\frac{\mathrm{d}z_h}{\mathrm{d}t} - \frac{2}{T}z_h = 0,$$

cuja solução é

$$z_h = z_0 e^{\frac{2t}{T}}.$$

Portanto, a solução geral da equação de Bernoulli é

$$V(t) = \left[V_R^{-2} + z_0 e^{2t/T}\right]^{-1/2}.$$

A condição inicial é

$$V(0) = \frac{V_R}{2} = \left[V_R^{-2} + z_0\right]^{-1/2};$$

obtendo-se, finalmente,

$$V(t) = V_R\left[1 + 3e^{2t/T}\right]^{-1/2} \quad \blacksquare$$

Exercício 8.17
Primeiro calculo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Y'(x) - \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Em seguida substituo na equação diferencial:

$$1 - \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x + 1/u)^2 - x(x + 1/u) + 1,$$

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x^2 + 2x/u + 1/u^2 - x^2 - x/u + 1 \\
-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2x/u + 1/u^2 - x/u \\
-\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x/u + 1/u^2 \\
-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= xu + 1 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -xu - 1 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + xu &= -1.
\end{aligned}
$$

Faça $u = vw$:

$$
\begin{aligned}
w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + xvw &= -1, \\
v\left[\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + xw\right] + w\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -1. \\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= -xw, \\
\frac{\mathrm{d}w}{w} &= -x\,\mathrm{d}x, \\
\ln|w| &= -x^2/2 + k', \\
|w| &= k''\exp(-x^2/2), \\
w &= k\exp(-x^2/2). \\
k\exp(-x^2/2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -1, \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \frac{-1}{k}\exp(x^2/2). \\
v &= \frac{-1}{k}\int \exp(x^2/2)\,\mathrm{d}x + C'. \\
u = vw &= -\exp(-x^2/2)\int \exp(x^2/2)\,\mathrm{d}x + (kC')\exp(-x^2/2); \\
u &= \exp(-x^2/2)\left[C - \int \exp(x^2/2)\,\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}
$$

A solução geral é

$$y(x) = x + 1/u(x).$$

Exercício 8.18

Teste de uma diferencial exata:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)}{\partial y} &= 2\,x\,\cos(x\,y) - x^2\,y\,\sin(x\,y), \\
\frac{\partial(x^2\cos xy)}{\partial x} &= 2\,x\,\cos(x\,y) - x^2\,y\,\sin(x\,y);
\end{aligned}
$$

OK.

Compare a forma diferencial com

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy.$$

Agora, as integrais de cada uma das expressões em relação a x e a y são:

Em relação a x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy);\\ F(x,y) &= \int (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy))\,dx\\ &= x\operatorname{sen}(xy) + A(y).\end{aligned}$$

Em relação a y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= x^2\cos(xy);\\ F(x,y) &= x\operatorname{sen}(xy) + B(x).\end{aligned}$$

Comparando-se os dois resultados, a resposta do problema é

$$x\operatorname{sen}(xy) = C \blacksquare$$

Exercício 8.19
Esta é uma equação de Euler:

$$\begin{aligned}y &= x^m,\\ y' &= mx^{m-1},\\ y'' &= (m-1)mx^{m-2}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$(m-1)m + m + 9 = 0,$$

donde $m = \pm 3i$. As soluções, portanto, são da forma $y = x^{\pm 3i}$. De $x^a = \exp(\ln(x^a))$, vem

$$x^{\pm 3i} = \exp((\pm 3\ln(x))i) = \cos(3\ln(x)) \pm i\operatorname{sen}(3\ln(x)).$$

A solução complexa geral é

$$y = c_1\left[\cos(3\ln(x)) + i\operatorname{sen}(3\ln(x))\right] + c_2\left[\cos(3\ln(x)) - i\operatorname{sen}(3\ln(x))\right].$$

Faça agora $c_1 = (a - ib)/2$ e $c_2 = (a + ib)/2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, para obter, finalmente,

$$y = a\cos(3\ln(x)) + b\operatorname{sen}(3\ln(x)) \blacksquare$$

Exercício 8.20
Sabendo que uma das raízes é 2, escrevo

$$\begin{aligned}(\lambda-2)(a\lambda^2 + b\lambda + c) &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4,\\ a\lambda^3 + b\lambda^2 - 2a\lambda^2 + c\lambda - 2b\lambda - 2c &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4,\\ a\lambda^3 + (b-2a)\lambda^2 + (c-2b)\lambda - 2c &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4,\\ c &= 2,\\ b &= -3,\\ a &= 1.\end{aligned}$$

Agora, resolvendo

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

encontro as outras duas raízes, $\lambda = 2$ (novamente) e $\lambda = 1$. $\lambda = 2$, portanto, é uma raiz *dupla*, e três soluções LI da equação homogênea são: e^x, e^{2x} e xe^{2x}. A solução geral, portanto, é do tipo

$$y(x) = y_p(x) + C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}.$$

Existem várias formas de encontrar uma solução particular $y_p(x)$; a mais fácil, já que o termo não-homogêneo é um polinômio, é tentar

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \\ y_p'(x) &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y_p''(x) &= 6Ax + 2B, \\ y_p'''(x) &= 6A, \end{aligned}$$

e substituir na equação diferencial original:

$$\begin{aligned} 6A - 5(6Ax + 2B) + 8(3Ax^2 + 2Bx + C) - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) &= -4x^3, \\ -4Ax^3 + (-4B + 24A)x^2 + (-4C + 16B - 30A)x + & \\ (-4D + 8C - 10B + 6A) &= -4x^3, \end{aligned}$$

donde: $A = 1$, $B = 6$, $C = 33/2$ e $D = 39/2$. Isto completa a questão.

Exercício 8.21

A equação homogênea associada e sua solução são

$$\begin{aligned} y_h'' + y_h &= 0, \\ \lambda^2 + 1 &= 0, \\ \lambda &= \pm i, \\ y_h(x) &= A\cos(x) + B\,\mathrm{sen}(x) = Ay_1 + By_2. \end{aligned}$$

Procure a solução por variação de parâmetros:

$$\begin{aligned} y &= Ay_1 + By_2, \\ y' &= \underbrace{A'y_1 + B'y_2}_{=0} + Ay_1' + By_2', \\ y'' &= A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2''. \end{aligned}$$

Substitua:

$$\begin{aligned} A'y_1' + B'y_2' + Ay_1'' + By_2'' + Ay_1 + By_2 &= e^x, \\ A\underbrace{[y_1'' + y_1]}_{=0} + B\underbrace{[y_2'' + y_2]}_{=0} + A'y_1' + B'y_2' &= e^x, \\ -A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) &= e^x. \end{aligned}$$

As duas equações que devemos resolver são:

$$\begin{aligned} A'\cos(x) + B'\,\mathrm{sen}(x) &= 0, \\ -A'\,\mathrm{sen}(x) + B'\cos(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Com alguma inspiração, para $A(x)$:

$$\begin{aligned}
A' \cos^2(x) + B' \operatorname{sen}(x)\cos(x) &= 0,\\
-A' \operatorname{sen}^2(x) + B' \cos(x)\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\
A' \left[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)\right] &= -\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -\operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^x,\\
A(x) &= -\frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C_A;
\end{aligned}$$

para $B(x)$:

$$\begin{aligned}
A' \cos(x)\operatorname{sen}(x) + B' \operatorname{sen}^2(x) &= 0,\\
-A' \operatorname{sen}(x)\cos(x) + B' \cos^2(x) &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\
B'[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)] &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \cos(x)\mathrm{e}^x,\\
B(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)] + C_B.
\end{aligned}$$

A solução geral terá a forma

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left\{-\frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\Big] + C_A\right\}\cos(x) +\\
&\quad \left\{\frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\Big] + C_B\right\}\operatorname{sen}(x)\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big[-\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)\Big] + \frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)\Big]\\
&\quad + C_A\cos(x) + C_B\operatorname{sen}(x)\\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2} + C_A\cos(x) + C_B\operatorname{sen}(x) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 8.22
Se

$$\begin{aligned}
u &= x,\\
v &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},
\end{aligned}$$

então

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \ \blacksquare$$

Exercício 8.24

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x^2};\\
y' &= -\frac{2}{x^3};\\
y'' &= +\frac{6}{x^4}.
\end{aligned}$$

Substituindo na forma desejada de equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{6}{x^4} + f(x)\frac{1}{x^2} &= 0;\\ f(x)\frac{1}{x^2} &= -\frac{6}{x^4};\\ f(x) &= -\frac{6}{x^2}.\end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{6}{x^2}y &= 0,\\ x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 6y &= 0.\end{aligned}$$

Mas esta é uma equação de Euler, com solução da forma $y = x^\alpha$:

$$\begin{aligned}y &= x^\alpha,\\ y' &= \alpha x^{\alpha-1},\\ y'' &= (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}(\alpha-1)\alpha x^\alpha - 6x^\alpha &= 0,\\ (\alpha-1)\alpha - 6 &= 0,\\ \alpha^2 - \alpha - 6 &= 0,\\ \alpha &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4\times 6}}{2} = \begin{cases}-2,\\ +3.\end{cases}\end{aligned}$$

Portanto, de fato a 1ª solução é $y_1(x) = x^{-2}$; a segunda solução LI pedida é $y_2(x) = x^3$. Última verificação:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2} - 6y_2 = x^2(6x) - 6x^3 = 0 \blacksquare$$

Exercício 8.25

A equação característica da equação homogênea associada é

$$\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

cujas raízes são $\lambda = 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. A solução da homogênea associada, portanto, é

$$y_h(x) = A + Bx + C\mathrm{e}^x.$$

Tento

$$y_p(x) = A + Bx + C\mathrm{e}^x,$$

onde agora A, B e C são funções a determinar. Derivando,

$$\begin{aligned}y_p' &= \underbrace{A' + B'x + C'\mathrm{e}^x}_{=0} + B + C\mathrm{e}^x,\\ y_p'' &= \underbrace{B' + C'\mathrm{e}^x}_{=0} + C\mathrm{e}^x,\end{aligned}$$

$$y_p''' = C'\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x.$$

Os termos sobre as chaves horizontais são zero para "controlar" as derivadas de A, B e C, impedindo que surjam derivadas de mais alta ordem. Substituindo as expressões encontradas na equação diferencial não-homogênea,

$$\begin{aligned} C'\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x - C\mathrm{e}^x &= 6x + 2\cosh x \\ C' &= 6x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ C' &= 6x\mathrm{e}^{-x} + 1 + \mathrm{e}^{-2x} \\ C(x) &= -6(x+1)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}/2 + x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' + C'\mathrm{e}^x &= 0 \\ B' &= -\left[6x\mathrm{e}^{-x} + 1 + \mathrm{e}^{-2x}\right]\mathrm{e}^x \\ &= -\left[6x + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right] \\ B(x) &= -3x^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}); \end{aligned}$$

$$A' - \left[6x\mathrm{e}^{-x} + 1 + \mathrm{e}^{-2x}\right]x\mathrm{e}^x + \left[6x\mathrm{e}^{-x} + 1 + \mathrm{e}^{-2x}\right]\mathrm{e}^x = 0,$$
$$A(x) = x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) - 2\mathrm{e}^x + 2x^3 - 3x^2.$$

Juntando tudo,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A + Bx + C\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}/2 - x^3 - 3x^2 - 6x - 6 \blacksquare$$

Exercício 8.26

A equação característica

$$\lambda^2 - 2\mathrm{i}\lambda + \mathrm{i}^2 = 0$$

possui raiz dupla $\lambda = \mathrm{i}$. Então, uma solução é

$$u_1(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

Uma segunda solução LI deve ser buscada com o método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned} v &= A(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}; \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} &= (A' + \mathrm{i}A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}; \\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2} &= (A'' + 2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}^2A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} (A'' + 2\mathrm{i}A' + \mathrm{i}^2A) - 2\mathrm{i}(A' + \mathrm{i}A) + \mathrm{i}^2A &= 0; \\ A'' &= 0; \\ A &= c_1 + c_2z. \end{aligned}$$

A solução geral será

$$u(z) = A(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = (c_1 + c_2z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \blacksquare$$

Exercício 8.27

Fazemos $v = u'(t)$, $w = v'(t) = u''(t)$; então,

$$u''' = -4u + 4u' + u'' \Rightarrow w' = -4u + 4v + w$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= v,\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= w,\\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -4u + 4v + w.\end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ v\\ w\end{bmatrix}$$

com Maxima:

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) a : matrix( [0,1,0], [0,0,1],[-4,4,1]) ;
                                [  0   1  0 ]
                                [           ]
(%o2)                           [  0   0  1 ]
                                [           ]
                                [ - 4  4  1 ]
(%i3) eigenvectors(a);
(%o3) [[[2, - 2, 1], [1, 1, 1]], [[[1, 2, 4]], [[1, - 2, 4]],
                                                        [[1, 1, 1]]]]
```

os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2 & \boldsymbol{f}_1 &= (1,2,4),\\ \lambda_2 &= -2 & \boldsymbol{f}_2 &= (1,-2,4),\\ \lambda_3 &= 1 & \boldsymbol{f}_3 &= (1,1,1).\end{aligned}$$

Na base dos autovetores, o sistema de equações diferenciais ordinárias fica desacoplado:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_f\\ v_f\\ w_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_f\\ v_f\\ w_f\end{bmatrix}$$

com solução

$$u_f = c_1\mathrm{e}^{2t}, \qquad v_f = c_2\mathrm{e}^{-2t}, \qquad w_f = c_3\mathrm{e}^{t}.$$

A solução geral é

$$\boldsymbol{u} = c_i\mathrm{e}^{\lambda_{(i)}t}\boldsymbol{f}_i$$

ou (voltando à base canônica)

$$\begin{bmatrix} u\\ v\\ w\end{bmatrix} = c_1\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 4\end{bmatrix} + c_3\mathrm{e}^{t}\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}u(t) &= [2c_1]\mathrm{e}^{2t} + [-2c_2]\mathrm{e}^{-2t} + c_3\mathrm{e}^{t}\\ &= k_1\mathrm{e}^{2t} + k_2\mathrm{e}^{-2t} + k_3\mathrm{e}^{t} \ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 8.28
A solução da equação homogênea associada é

$$z_h(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Tente:

$$\begin{aligned} z(x) &= A(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, \\ z'(x) &= \mathrm{i}A(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}B(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \underbrace{A'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}_{=0}. \end{aligned}$$

Aqui nós controlamos a ordem das derivadas obrigando o termo em A' e em B' a ser nulo. Agora, a 2ª derivada é

$$z''(x) = -[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}] + \mathrm{i}[A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}].$$

Substituindo na equação diferencial original encontramos agora o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/\mathrm{i}, \\ A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 0. \end{aligned}$$

A segunda equação acima nada mais é do que a condição imposta acima para controlar as derivadas. Somando,

$$\begin{aligned} 2A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \\ 2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -\mathrm{i}, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\mathrm{i}}{2}, \\ A(x) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}x + \alpha. \end{aligned}$$

Procuramos agora por B:

$$\begin{aligned} A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 0, \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 0, \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \frac{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{4}, \\ B(x) &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \beta. \end{aligned}$$

Substituindo $A(x)$ e $B(x)$ na forma proposta para a solução,

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(-\frac{\mathrm{i}x}{2} + \alpha\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \beta\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= \underbrace{\left[-\frac{\mathrm{i}x}{2} + \frac{1}{4}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}_{z_p(x)} + \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \beta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, \end{aligned}$$

onde $z_p(x)$ é a solução particular ■

Exercício 8.30

$$y = c_1 x^{\frac{\sqrt{41}}{2}-3/2} + c_2 x^{-\frac{\sqrt{41}}{2}-3/2}.$$

Exercício 8.31

```
(%i1) edo : x^2*'diff(y,x,2) - 2*x*'diff(y,x) - y ;
                                   2
                                2 d y        dy
(%o1)                          x  --- - 2 x --- - y
                                    2        dx
                                  dx
(%i2) ode2(%,y,x);
                          sqrt(13)                      sqrt(13)
                          -------- + 3/2         3/2 - --------
                             2                              2
(%o2)             y = %k1 x                + %k2 x
```

Exercício 8.32
Substituindo-se $y = Ax^m$ na equação diferencial, obtém-se

$$\begin{aligned} Ax^m\left[(m-1)m - m + 1\right] &= 0, \\ m^2 - 2m + 1 &= 0, \end{aligned}$$

donde $m = +1$ é a raiz dupla. Substituindo $y = xA(x)$ na equação diferencial, obtém-se (MAXIMA)

$$x^3\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2} + x^2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0;$$

faça $B = dA/dx$ e substitua:

$$\begin{aligned} x^3\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} + x^2B &= 0, \\ x\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} + B &= 0, \\ \frac{dB}{B} + \frac{dx}{x} &= 0, \\ \ln(xB) &= \ln C_1 \\ B(x) &= \frac{C_1}{x} \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \frac{C_1}{x} \\ A &= C_1\ln(x) + C_2 \Rightarrow \\ y &= xA(x) = C_1x\ln(x) + C_2x \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 8.33

$$\begin{aligned} y &= x^r, \\ y' &= rx^{r-1}, \\ y'' &= (r-1)rx^{r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação original,

$$(r-1)r + 3r + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0, \\ (r+1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

$r = -1$ é uma raiz dupla. Uma das duas soluções LI é

$$y = \frac{k_2}{x}.$$

Precisamos encontrar uma segunda solução LI pelo método de variação de constantes:

$$\begin{aligned} y &= x^{-1}u, \\ y' &= x^{-1}u' - x^{-2}u, \\ y'' &= x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} x^2\left[x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u\right] + 3x\left[x^{-1}u' - x^{-2}u\right] + x^{-1}u &= 0, \\ xu'' - 2u' + 2x^{-1}u + 3u' - 3x^{-1}u + x^{-1}u &= 0, \\ xu'' + u' &= 0. \end{aligned}$$

Agora reduzimos a ordem da equação diferencial em u:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \\ x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0, \\ x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x &= 0, \\ \mathrm{d}(xv) &= 0, \\ xv &= k_1, \\ v &= \frac{k_1}{x}; \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{k_1}{x}, \\ \mathrm{d}u &= k_1\frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ u &= k_1 \ln|x| + k_2; \\ y &= \frac{u}{x} = \frac{k_1 \ln|x|}{x} + \frac{k_2}{x} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 8.34

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2}; \\ y' &= -\frac{2}{x^3}; \\ y'' &= +\frac{6}{x^4}. \end{aligned}$$

Substituindo na forma desejada de equação diferencial:

$$\frac{6}{x^4} + f(x)\frac{1}{x^2} = 0;$$

$$f(x)\frac{1}{x^2} = -\frac{6}{x^4};$$
$$f(x) = -\frac{6}{x^2}.$$

Portanto, a equação diferencial é

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{6}{x^2}y = 0,$$
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 6y = 0.$$

Mas esta é uma equação de Euler, com solução da forma $y = x^\alpha$:

$$y = x^\alpha,$$
$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$y'' = (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}.$$

Substituindo:

$$(\alpha-1)\alpha x^\alpha - 6x^\alpha = 0,$$
$$(\alpha-1)\alpha - 6 = 0,$$
$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0,$$
$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\times 6}}{2} = \begin{cases} -2, \\ +3. \end{cases}$$

Portanto, de fato a 1ª solução é $y_1(x) = x^{-2}$; a segunda solução LI pedida é $y_2(x) = x^3$. Última verificação:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2} - 6y_2 = x^2(6x) - 6x^3 = 0 \blacksquare$$

Exercício 8.35

a) A equação homogênea associada é uma equação de Euler:

$$x^2y_h'' + 7xy_h' + 5y_h = 0,$$
$$y_h = x^m,$$
$$y_h' = mx^{m-1},$$
$$y_h'' = (m-1)mx^{m-2},$$
$$[(m-1)m + 7m + 5]\,x^m = 0,$$
$$m^2 + 6m + 5 = 0,$$
$$m_1 = -5,$$
$$m_2 = -1,$$
$$y_h(x) = c_1x^{-5} + c_2x^{-1}.$$

b) Agora,

$$y(x) = A(x)x^{-5} + B(x)x^{-1},$$
$$y'(x) = -5Ax^{-6} - Bx^{-2} + \underbrace{A'x^{-5} + B'x^{-1}}_{=0},$$

$$y''(x) = 30Ax^{-7} + 2Bx^{-3} - 5A'x^{-6} - B'x^{-2}.$$

Substituindo na EDO,

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 7xy' + 5y &= 0,\\
x^2[30Ax^{-7} + 2Bx^{-3}] - x^2[5A'x^{-6} + B'x^{-2}]&\\
+ 7x[-5Ax^{-6} - Bx^{-2}] + 5[Ax^{-5} + Bx^{-1}] &= x;\\
A\underbrace{[30 - 35 + 5]}_{=0}x^{-5} + B\underbrace{[2 - 7 + 5]}_{=0}x^{-1}&\\
- 5A'x^{-4} - B' &= x.
\end{aligned}$$

Ficamos com o sistema de EDO*s*

$$\begin{aligned}
A'x^{-5} + B'x^{-1} &= 0,\\
-5A'x^{-4} - B' &= x,
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{1}{24}x^6 + A_0,\\
B(x) &= \frac{1}{8}x^2 + B_0,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left[-\frac{1}{24}x^6 + A_0\right]x^{-5} + \left[\frac{1}{8}x^2 + B_0\right]x^{-1}\\
&= \frac{1}{12}x + A_0x^{-5} + B_0x^{-1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Capítulo 9

Exercício 9.1

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} &= \frac{(1-\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{(1-\mathrm{i})^2}{2};\\
(1-\mathrm{i}) &= (1,-1) = \sqrt{2}[\cos\pi/4 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/4] = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4};\\
\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right]^2 = \frac{1}{2}2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2};
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\ln \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Exercício 9.2

$$
\begin{aligned}
z &= (1+i) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)};\\
w &= z^{1/7} = \left[\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)}\right]^{1/7}\\
&= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2n\pi}{7}\right)};\\
w_1 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{28}},\\
w_2 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\right)},\\
w_3 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{4\pi}{7}\right)},\\
w_4 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{6\pi}{7}\right)},\\
w_5 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{8\pi}{7}\right)},\\
w_6 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{10\pi}{7}\right)},\\
w_7 &= (2^{1/14})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{28}+\frac{12\pi}{7}\right)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 9.5

$$f(z) = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2+y^2 \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
u &= x^2+y^2\\
v &= 0
\end{aligned}
$$

As derivadas de u e v são

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \qquad \frac{\partial v}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2y & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.
\end{aligned}
$$

As derivadas parciais são funções contínuas e deriváveis em todos os pontos (x, y). Observe que as condições de Cauchy-Riemman,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

só valem em $z = 0$. Portanto, o único ponto onde $f(z)$ é diferenciável é $z = 0$: como não há nenhuma vizinhança de $z = 0$ onde $f(z)$ seja diferenciável, $f(z)$ não é analítica em nenhum ponto do plano complexo ■

Exercício 9.6
Faça

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (x+\mathrm{i}y) + (x-\mathrm{i}y)\\
&= \underbrace{2x}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)}\,\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

$$u(x,y) = 2x,$$
$$v(x,y) = 0.$$

As condições de Cauchy-Riemman são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Substituindo os valores das derivadas parciais de $u(x,y)$ e $v(x,y)$,

$$2 = 0,$$
$$0 = -0,$$

não valem simultaneamente em nenhum ponto do plano complexo, e $f(z)$ não é analítica em nenhum ponto ■

Exercício 9.7
Começo etiquetando os segmentos de integração:

$$[0,R] = H_1,$$
$$[R, R+\mathrm{i}a] = V_1,$$
$$[R+\mathrm{i}a, \mathrm{i}a] = H_2,$$
$$[\mathrm{i}a, 0] = V_2.$$

Seja agora

$$f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}az};$$

é evidente que, sobre H_1, $z = x$, e

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re} \int_{H_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x,$$

que é a integral desejada. Também é evidente que $f(z)$ é uma função inteira, não havendo singularidades nem dentro, nem fora da trajetória fechada de integração. Agora, em V_1, $z = R + \mathrm{i}y$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}y$, e

$$\begin{aligned}
\int_{V_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{y=0}^{a} \mathrm{e}^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a(R+\mathrm{i}y)}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{a} \mathrm{e}^{-(R^2+2R\mathrm{i}y-y^2)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}aR-2y^2}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{a} \mathrm{e}^{-R^2-y^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2Ry+2Ra)}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y; \\
\left|\int_{V_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{y=0}^{a} \left|\mathrm{e}^{-R^2-y^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-2Ry+2Ra)}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y\right| \\
&= \int_{y=0}^{a} \left|\mathrm{e}^{-R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le \int_{y=0}^{a} \mathrm{e}^{-R^2}\,\mathrm{d}y = a\mathrm{e}^{-R^2} \to 0, \text{ quando} R \to \infty.
\end{aligned}$$

Sobre V_2, $z = \mathrm{i}y$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{d}y$, e

$$\int_{V_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{y=a}^{0} \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}y)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a(\mathrm{i}y)}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{y=a}^{0} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{e}^{-2ay}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{y=a}^{0} \mathrm{e}^{y^2-2ay}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y.$$

Esta integral *não* se anula quando $R \to \infty$; porém, note que

$$\mathrm{Re}\int_{V_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Finalmente, sobre H_2, $z = x + \mathrm{i}a$, $dz = \mathrm{d}x$, e

$$\begin{aligned}\int_{H_2} f(z)\,dz &= \int_R^0 \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a(x+\mathrm{i}a)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_R^0 \mathrm{e}^{-(x^2+2\mathrm{i}xa-a^2)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax-2a^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_R^0 \mathrm{e}^{-x^2-2\mathrm{i}xa+a^2+2\mathrm{i}xa-2a^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_R^0 \mathrm{e}^{-x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{H_2} f(z)\,dz = \mathrm{e}^{-a^2}\int_\infty^0 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Concluímos que, no $\lim_{R\to\infty}$: a integral sobre H_1 possui uma parte real igual à integral desejada; a integral sobre V_1 tende a zero; a integral sobre H_2 é puramente real e de valor conhecido; e a integral sobre V_2 é puramente imaginária. Pelo teorema de Cauchy, segue-se que

$$\mathrm{Re}\left[\int_{H_1} f(z)\,dz\right] + \int_{H_2} f(z)\,dz = 0,$$
$$\mathrm{Re}\left[\int_{H_1} f(z)\,dz\right] = -\int_{H2} f(z)\,dz,$$
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2ax)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \blacksquare$$

Exercício 9.8

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(\mathrm{i}\mathrm{d}\theta) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0 \blacksquare$$

Exercício 9.9

Se

$$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\pi \blacksquare$$

Exercício 9.12

Com Maxima, os primeiros termos da série são:

```
(%i1) taylor(atan(x),x,0,12);
                                 3    5    7    9    11
                                x    x    x    x    x
(%o1)/T/                  x - -- + -- - -- + -- - --- + . . .
                                3    5    7    9    11
(%i2) integrate(%,x);
                                 12    10    8    6    4    2
                                x     x     x    x    x    x
(%o2)                         - --- + --- - -- + -- - -- + --
                                132   90    56   30   12   2
```

ou

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1};$$

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)(2n-1)} \blacksquare$$

Exercício 9.13

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z+3)} &= \frac{1}{(z+3)} \frac{1}{(z+3-3)};\\
t &= z+3;\\
\frac{1}{z(z+3)} &= \frac{1}{t} \frac{1}{(t-3)}\\
&= \frac{1}{t} \frac{1/3}{\left(\frac{t}{3}-1\right)}\\
&= \frac{-1/3}{t} \frac{1}{1-\frac{t}{3}}\\
&= \frac{-1}{3t} \left[1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^3 + \ldots\right]\\
&= \frac{-1}{3(z+3)} \left[1 + \frac{z+3}{3} + \left(\frac{z+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{z+3}{3}\right)^3 + \ldots\right]\\
&= -\frac{1}{9} \left[\frac{3}{z+3} + 1 + \frac{z+3}{3} + \left(\frac{z+3}{3}\right)^2 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

É interessante notar que separar em frações parciais logo no início *também* conduz à solução!

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3z} - \frac{1}{3(z+3)}\\
&= \frac{1}{3(t-3)} - \frac{1}{3t}\\
&= -\frac{1}{3t} + \frac{1/3}{3(\frac{t}{3}-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3t} - \frac{1}{9(1-\frac{t}{3})} \\
&= -\frac{3}{9t} - \frac{1}{9}\frac{1}{1-t/3} \\
&= -\frac{1}{9}\frac{3}{t} - \frac{1}{9}\left[1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{9}\left[\frac{3}{t} + 1 + \frac{t}{3} + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{9}\left[\frac{3}{z+3} + 1 + \frac{z+3}{3} + \left(\frac{z+3}{3}\right)^2 + \dots\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 9.14

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)} \\
&= -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 9.15
Note que

$$
\begin{aligned}
&|z| > 1, \\
&\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right| < 1.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)(z-1)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots\right)\right] \\
&= \frac{1}{2z}\left[\frac{2}{z} + \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^5} + \dots\right] \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots \blacksquare
\end{aligned}
$$

Figura C.5: Problema 9.16.

Exercício 9.16

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+z)^2} &= \left[\frac{1}{1+z}\right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{(1+z)}\right]\left[\frac{1}{(1+z)}\right] \\
&= \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right] \\
&\times \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right] \\
&= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\quad - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\quad + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\quad - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\quad + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&= 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - 6z^5 + 7z^6 - 8z^7 + \ldots
\end{aligned}
$$

b) A figura C.5 mostra a região de convergência da série de Laurent desejada, centrada em $z = 1$: Desejamos uma série em potências de $z - 1$; portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{(z-1+1+\mathrm{i})^2} \\
&= \frac{1}{\left[(1+\mathrm{i})\left(\frac{z-1}{1+\mathrm{i}}+1\right)\right]^2} \\
&= \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2}\left[1 - 2\left(\frac{z-1}{1+\mathrm{i}}\right) + 3\left(\frac{z-1}{1+\mathrm{i}}\right)^2 - 4\left(\frac{z-1}{1+\mathrm{i}}\right)^3 + 5\left(\frac{z-1}{1+\mathrm{i}}\right)^4 - \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 9.17
A função pode ser decomposta em frações parciais; com MAXIMA,

```
(%i1) f : 1/((z-2*%i)*(z-2)) ;
                                        1
(%o1)                          ------------------
                               (z - 2) (z - 2 %i)
(%i2) partfrac(f,z);
                          1                        1
(%o2)             --------------------- - ------------------
                  (2 %i - 2) (z - 2 %i)   (2 %i - 2) (z - 2)
```

$$f(z) = \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} - \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)}$$

O 2º termo já está no formato de um termo da série de Laurent desejada, e nós o deixamos como está. O 1º termo precisa ser reescrito:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} &= \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)}\left[\frac{1}{(z-2)+(2-2\mathrm{i})}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}+1}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}}\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right| &= \frac{|z-2|}{|2-2\mathrm{i}|} \\
&= \frac{|z-2|}{2\sqrt{2}} < 1,
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}} = 1 - \frac{z-2}{2-2\mathrm{i}} + \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^4 + \dots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(z) = &-\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)} \\
&- \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[1 - \frac{z-2}{2\mathrm{i}-2} + \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^4 + \dots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 9.18
Note que

$$|z| > 2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{2}{z}\right| < 1.$$

A idéia portanto é manipular algebricamente

$$\frac{1}{z-2}$$

para fazer aparecer, explicitamente, $2/z$. Vamos a isso:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\\ &= \frac{1}{z}\left[1+(2/z)+(2/z)^2+(2/z)^3+\ldots\right] \qquad (|z|>2).\end{aligned}$$

Portanto, em $|z|>2$,

$$\frac{1}{z-2} = \left[\ldots+\frac{2^3}{z^4}+\frac{2^2}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}\right] \blacksquare$$

Exercício 9.19

Inicialmente, nós separamos em frações parciais:

```
(%i4) z0 : 2*%i ;
(%o4)                                  2 %i
(%i5) z1 : 2 + z0 ;
(%o5)                               2 %i + 2
(%i6) z2 : 5 + z0 ;
(%o6)                               2 %i + 5
(%i7) f : 1/((z - z1)*(z-z2)) ;
                                       1
(%o7)                     ------------------------------
                          (z - 2 %i - 5) (z - 2 %i - 2)
(%i8) partfrac(f,z) ;
                                 1                    1
(%o8)                   ---------------- - ----------------
                        3 (z - 2 %i - 5)   3 (z - 2 %i - 2)
```

$$f(z) = \frac{1}{3([z-2\mathrm{i}]-5)} - \frac{1}{3([z-2\mathrm{i}]-2)}$$

Em seguida, cada uma das frações necessita ser rearranjada de maneira distinta:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{-1}{15\left(1-\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)} - \frac{1}{3[z-2\mathrm{i}]\left(1-\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)}\\ &= -\frac{1}{15}\left[1+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)^2+\left(\frac{[z-2\mathrm{i}]}{5}\right)^3+\ldots\right]\\ &\quad -\frac{1}{3}\frac{1}{[z-2\mathrm{i}]}\left[1+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)^2+\left(\frac{2}{[z-2\mathrm{i}]}\right)^2+\ldots\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 9.20

$$\begin{aligned}t &= z-(2+\mathrm{i}),\\ z-(1+\mathrm{i}) &= z-1-\mathrm{i} = z-2-\mathrm{i}+1 = z-(2+\mathrm{i})+1 = t+1;\\ f(z) &= \frac{1}{(t+1)}\frac{1}{t}\\ &= \frac{1}{t}\left[1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+\ldots\right]\\ &= \frac{1}{t}-1+t-t^2+t^3-t^4+\ldots\\ &= \frac{1}{[z-(2+\mathrm{i})]}\\ &\quad -1+[z-(2+\mathrm{i})]-[z-(2+\mathrm{i})]^2+[z-(2+\mathrm{i})]^3-[z-(2+\mathrm{i})]^4+\ldots\end{aligned}$$

Exercício 9.21
Note que a região é do tipo $|z-3|/4 < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{z-3}{z-7} &= \frac{z-3}{(z-3)-4} \\
&= \frac{\frac{z-3}{4}}{\frac{z-3}{4}-1} \\
&= -\frac{z-3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{z-3}{4}} \\
&= -\frac{z-3}{4}\left[1+\left(\frac{z-3}{4}\right)+\left(\frac{z-3}{4}\right)^2+\left(\frac{z-3}{4}\right)^3+\ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 9.22
Claramente, a região de validade da série de Laurent é limitada pelas singularidades $z = 0$ e $z = [3+2\mathrm{i}]$ da função. A região em cinza é

$$2 < |z-3| < 3.$$

Expandindo em frações parciais,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-[3+2\mathrm{i}]}-\frac{1}{z}\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{(z-3)-2\mathrm{i}}-\frac{1}{(z-3)+3}\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\left(\frac{1}{1-\frac{2\mathrm{i}}{z-3}}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{(z-3)}{3}+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\left(\frac{1}{1-\frac{2\mathrm{i}}{z-3}}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{(z-3)}{3}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Note que arranjamos dessa forma porque, na região anelar de interesse,

$$\begin{aligned}
|2\mathrm{i}| &< |z-3|, \\
\left|\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right| &< 1;
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|z-3| &< 3, \\
\left|\frac{z-3}{3}\right| &< 1.
\end{aligned}$$

Os termos entre parênteses na expansão de $f(z)$ acima, portanto, são:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{2\mathrm{i}}{z-3}} &= 1+\left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)+\left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^2+\left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^3+\ldots; \\
\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}} &= 1-\left(\frac{z-3}{3}\right)+\left(\frac{z-3}{3}\right)^2-\left(\frac{z-3}{3}\right)^3+\ldots
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(z) = \frac{1}{3+2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\mathrm{i}}{z-3}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n\right] \blacksquare$$

Exercício 9.23
A série de Laurent de $z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ é

$$\begin{aligned} z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) &= z^4\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \dots\right] \\ &= z^3 - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}\frac{1}{z} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Existe uma *singularidade essencial* em $z = 0$ (*i.e.*, um polo de ordem infinita). Isso não impede de encontrarmos c_{-1}, é claro: $c_{-1} = 1/5!$, e

$$I = 2\pi \mathrm{i} c_{-1} = \frac{\pi \mathrm{i}}{60} \blacksquare$$

Exercício 9.24
A função a ser integrada possui 4 polos, que são as raízes de

$$z^4 - 1 = 0:$$

$z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -1$, $z_3 = -\mathrm{i}$ e $z_4 = 1$. O contorno de integração contém em seu interior apenas z_1. Portanto, pelo teorema dos Resíduos, basta escrever

$$\int_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}dz = 2\pi \mathrm{i} c_{-1},$$

onde c_{-1} é o resíduo de f em z_1. Note que todos os polos são de ordem 2:

$$\frac{1}{(z^4-1)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2(z+1)^2(z+\mathrm{i})^2(z-1)^2}.$$

O resíduo desejado é

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{(z+1)^2(z+\mathrm{i})^2(z-1)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{-2(3z^2+2\mathrm{i}z-1)}{(z+1)^3(z+\mathrm{i})^3(z-1)^3} \\ &= \frac{3\mathrm{i}}{2(\mathrm{i}-1)^3(\mathrm{i}+1)^3} = -\frac{3\mathrm{i}}{16}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathscr{L}} f(z)\,\mathrm{d}dz = 2\pi \mathrm{i} c_{-1} = -2\pi \mathrm{i}\frac{3\mathrm{i}}{16} = \frac{3\pi}{8} \blacksquare$$

Exercício 9.26
A função é ímpar, e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$; integrar a função complexa da questão 1 em um contorno composto por uma linha sobre o eixo x e um semi-círculo vai produzir uma integral nula, porque $c_{-1} = 0$; *moral da história*: não adianta tentar integração de contorno! Em lugar disto, basta fazer

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1, \\ \mathrm{d}u &= 2x\,\mathrm{d}x, \\ \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= -\frac{1}{2u}\bigg|_1^\infty = 1/2 \blacksquare \end{aligned}$$

Figura C.6: Exercício 9.27.

Exercício 9.27

O contorno de integração é mostrado na figura C.6. Se $f(z) = 1/(1+z^4)$, as singularidades são dadas por

$$\begin{aligned} 1+z^4 &= 0, \\ z^4 &= -1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2n\pi)}, \\ r^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} &= 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2n\pi)}, \\ \theta &= \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

A figura mostra os pólos z_1 e z_2 que se encontram dentro do contorno de integração. Claramente, todos os pólos são de ordem 1, pois $1+z^4 = \prod_{k=1}^{4}(z-z_k)$. Já que estamos aqui, calculemos os resíduos:

$$\begin{aligned} c_{-1}^{(1)} &= \lim_{z\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \frac{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})}, \\ c_{-1}^{(2)} &= \lim_{z\to\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}} \frac{z-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}. \end{aligned}$$

Sejam agora H o segmento $[-R,+R]$, e S o semi-círculo $x^2+y^2=R^2$, $y>0$; o teorema dos resíduos é

$$\oint_C \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = \int_H \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z + \int_S \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{2} c_{-1}^{(k)}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \left|\int_S \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_S \left|\frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right| \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{\left|1/R+R^3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \to 0 \end{aligned}$$

quando $R\to\infty$.

Portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} = 2\pi\mathrm{i}(c_{-1}^{(1)}+c_{-1}^{(2)}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \;\blacksquare$$

Exercício 9.28 Fazendo a substituição sugerida, se $z = e^{i\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}, \\ dz &= ie^{i\theta}, \\ \frac{dz}{iz} &= d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} \\ &= 2i \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2 - 1}{2iz}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2-1}{2iz}} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_C \frac{-2dz}{z^2 - 4iz - 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = (2 - \sqrt{3})i$ e $z_2 = (2 + \sqrt{3})i$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\, dz &= 2\pi i c_{-1} \\ &= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) \frac{-2}{(z - z_1)(z - z_2)} \right] \\ &= 2\pi i \frac{-2}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercício 9.29
Considero a função

$$f(z) = \frac{1}{4z^2 + 2z + 1},$$

cujos polos são

$$\begin{aligned} 4z^2 + 2z + 1 &= 0, \\ z_1 &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}i}{4}, \\ z_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}i}{4}. \end{aligned}$$

Antevejo o contorno de integração típico mostrado na figura C.7.
Desejo verificar se a integral sobre o semi-círculo de $f(z)$ tende a zero quando $R \to \infty$:

$$\left| \int_{\text{semi-circ.}} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\text{semi-circ}} |f(z)\, dz|$$

Figura C.7: Exercício 9.29.

Mas, sobre o semi-círculo,

$$\begin{aligned} z &= Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi; \\ dz &= iRe^{i\theta}\, d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \int_{\text{semi-circ}} |f(z)\, dz| &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{iRe^{i\theta}\, d\theta}{4R^2e^{2i\theta} + 2Re^{i\theta} + 1} \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{R} \frac{ie^{i\theta}\, d\theta}{4e^{2i\theta} + \frac{1}{R}e^{i\theta} + \frac{1}{R^2}} \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{4R} ie^{-i\theta}\, d\theta \right| \\ &= \frac{\pi}{4R} \to 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2 + 2x + 1}\, dx = 2\pi i c_{-1}^{(2)}.$$

Resta calcular o resíduo: $z \to z_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4z^2 + 2z + 1} &= \frac{1}{4(z - z_1)(z - z_2)} \\ &\sim \frac{1}{4(z_2 - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}i(z - z_2)} \\ &= \frac{-i}{2\sqrt{3}(z - z_2)} \Rightarrow c_{-1}^{(2)} = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \blacksquare$$

Exercício 9.30

Considere a função $f(z) = 1/(z^3 + i)$. Esta função possui singularidades em

$$\begin{aligned} z^3 + i &= 0, \\ z^3 &= -i = e^{(-i\pi/2 + 2k\pi)}; \end{aligned}$$

Figura C.8: Exercício 9.30.

$$z = \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\pi/6+2k\pi/3)}.$$

Consequentemente, apenas a singularidade em $z_1 = \mathrm{i}$ precisa ser considerada no teorema dos resíduos.
Para verificar a integral sobre o semi-círculo $\mathscr{L}_S$ quando $R \to \infty$ (figura C.8):

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\mathscr{L}_S}\frac{1}{z^3+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right| &\le \lim_{R\to\infty}\int_{\mathscr{L}_S}\left|\frac{1}{z^3+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+\mathrm{i}}\right|\mathrm{d}\theta \\
&\le \lim_{R\to\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}}\right|\mathrm{d}\theta = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R^2} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos, devemos ter

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{1}{x^3+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$

onde o resíduo c_{-1} em z_1 é calculado como se segue:

$$\frac{1}{z^3+\mathrm{i}} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)};$$

logo, nas proximidades de z_1,

$$f(z) \sim \frac{1}{(z-z_1)(z_1-z_2)(z_1-z_3)},$$

donde z_1 é claramente um polo de primeira ordem, e

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \\
&= \frac{1}{(i-[\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2])(\mathrm{i}-[-\sqrt{3}/2-\mathrm{i}/2])} \\
&= \frac{1}{(3\mathrm{i}/2-\sqrt{3}/2)(3\mathrm{i}/2+\sqrt{3}/2)} \\
&= \frac{1}{-9/4-3/4} = -\frac{1}{3};
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$I = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{3} \blacksquare$$

Figura C.9: Exercício 9.31.

Exercício 9.31

Escolho o contorno formado pela linha L e pelo semi-círculo C, na figura C.9. Este contorno envolve 3 polos:

$$z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}, \qquad z_2 = \mathrm{i}, \qquad z_3 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

Esses polos estão indicados com pontos cheios na figura C.9

A função complexa a ser integrada no contorno é

$$f(z) = \frac{1}{1+z^6}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_S f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Para isso, faço $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; então,

$$\left|\int_S f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^6}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^6}\right|\,\mathrm{d}\theta$$

Agora,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left|\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1+\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^6}\right| &= \lim_{R\to\infty}\frac{R}{\left|1+\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^6\right|}\\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^5\left|\frac{1}{R^6}+\mathrm{e}^{6\theta\mathrm{i}}\right|} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^5} = 0.\end{aligned}$$

A esta altura, portanto,

$$\lim_{R\to\infty}\oint f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

Os 3 resíduos são:

$$c_{-1}^{(1)} = \lim_{z\to\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}}\frac{z-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}}{1+z^6}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{1}{6e^{5\pi i/6}} \\
&= \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{6}} \\
&= \frac{1}{12}(-\sqrt{3} - i).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{-1}^{(2)} &= \lim_{z\to i} \frac{z - i}{1 + z^6} \\
&= \lim_{z\to i} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{1}{6(i)^5} \\
&= \frac{1}{6i} \\
&= \frac{-2i}{12}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{-1}^{(3)} &= \lim_{z\to e^{5\pi i/6}} \frac{z - e^{5\pi i/6}}{1 + z^6} \\
&= \lim_{z\to e^{5\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{1}{6e^{25\pi i/6}} \\
&= \frac{1}{6e^{\pi i/6}} \\
&= \frac{1}{12}(+\sqrt{3} - i).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^6}\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \oint f(z)\, dz = \pi i \sum_{j=1}^{3} c_{-1}^{(j)} \\
&= \frac{\pi i}{12}\,(-i - 2i - i) = \frac{\pi}{3} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Capítulo 10

Exercício 10.1
Nesta solução, por simplicidade vamos supor que o argumento de $\ln(\cdot)$ é sempre positivo, para que não seja necessário escrever $\ln|x|$, etc.. A maneira mais fácil é

$$\begin{aligned} u &= x+1, \\ x &= u-1, \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = u - \ln u = (x+1) - \ln(x+1).$$

Para fazer como pedido no enunciado,

$$\begin{aligned} u = \ln x \;&\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \;&\Rightarrow\; v = x, \end{aligned}$$

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int u\,dv = uv - \int v\,\mathrm{d}u = x\ln x - \int x\frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - x.$$

Então,

$$\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u;$$

substituindo $u = (x+1)$,

$$\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

O ítem c) é óbvio; então,

$$\int \left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)\right]\mathrm{d}x = x\ln(x+1),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x &= x\ln(x+1) - \int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x+1) - [(x+1)\ln(x+1) - (x+1)] \\ &= (x+1) - \ln(x+1) \;\blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 10.2

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t; \\ \Gamma'(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \;\blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 11

Exercício 11.1

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},$$
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-1)}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0;$$

faça $r + n = r + m - 2$ no segundo somatório acima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{(r+n-2)} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-2} = 0,$$
$$r a_0 x^{r-2} + (r+1) a_1 x^{r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(r+n) a_n + a_{n-2} \right] x^{r+n-2} = 0$$

A equação indicial é

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow r = 0 \text{ e } a_1 = 0$$

e a relação de recorrência é

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n}.$$

Note que a partir de a_0 calcula-se $a_2, a_4, a_6, \ldots$, e que $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \ldots$. Reescrevendo a solução em termos de expoentes pares,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n},$$
$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{2n}.$$

Agora para descobrir a lei de formação, faço:

$$b_n = (-1) \times (-1) \times (-1) \times \ldots \times \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \ldots} \times \frac{1}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots}$$

ou seja:

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}.$$

e

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} x^{2n}.$$

É fácil agora provar que esta série é equivalente à função $y(x) = e^{-x^2/2}$. Comece com a série de Taylor de e^u, e faça a substituição $u = -x^2/2$:

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n \times \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\, n!} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 11.2

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{x} & xp(x) &= 1 & &\text{(analítica em } x = 0) \\
q(x) &= 1 & x^2q(x) &= x^2 & &\text{(analítica em } x = 0)
\end{aligned}
$$

então este é um ponto singular regular.

Exercício 11.3

$$
\begin{aligned}
xp(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots = 1 \quad &\Rightarrow \quad p_0 = 1 \\
x^2q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots = x^2 \quad &\Rightarrow \quad q_0 = 0 \\
r^2 + (p_0 - 1) + q_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad r^2 = 0 \quad \text{(raiz dupla)}
\end{aligned}
$$

A 1ª solução será do tipo Frobenius,

$$
y_1 = \underbrace{x^r}_{=1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;
$$

a 2ª solução será do tipo

$$
y_2 = y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.
$$

Exercício 11.4

$$
\begin{aligned}
y'' + \frac{1}{x}y' + y &= 0 \\
xy'' + y' + xy &= 0 \\
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2} \\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-1} \\
xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}
\end{aligned}
$$

Reunindo todos os termos em x^{r+m-1},

$$[a_0 r + a_0(r-1)r]\, x^{r-1} + [a_1(r+1) + a_1 r(r+1)]\, x^r$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n\, [(r+n) + (r+n-1)(r+n)] + a_{n-2}\}\, x^{r+n-1} = 0.$$

A equação indicial é

$$r + r^2 - r = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} a_n\, [n + (n-1)n] + a_{n-2} &= 0 \\ a_n n^2 + a_{n-2} &= 0 \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2}. \end{aligned}$$

Para conseguir uma fórmula geral, note que

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{4^2 \times 2^2} = +\frac{a_0}{(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = +\frac{a_0}{[2^2(2\times 1)]^2}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{6^2 \times 4^2 \times 2^2} = -\frac{a_0}{(2\times 3)^2(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = -\frac{a_0}{[2^3(3\times 2\times 1)]^2}, \\ &\vdots \\ a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{[2^k k!]^2}. \end{aligned}$$

Exercício 11.5

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

A equação diferencial é

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x.$$

Mude o primeiro somatório:

$$\begin{aligned} m &= n - 2, \\ n &= m + 2, \\ n - 1 &= m + 1, \\ \sum_{m=-2}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Mude o segundo somatório:

$$\begin{aligned} m &= n-1, \\ n &= m+1, \\ \sum_{m=-1}^{\infty}(m+1)a_{m+1}x^m &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n. \end{aligned}$$

Reúna os termos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + 2a_n\right]x^n = x \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2a_2 + 3a_1 + 2a_0 &= 0, \\ 6a_3 + 6a_2 + 2a_1 &= 1, \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + 2a_n &= 0, \;\; n \geq 2. \end{aligned}$$

Os coeficientes a_0 e a_1 devem ser encontrados em termos das condições iniciais. Isso é fácil:

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]_{x=0} = a_0 = 0; \\ y'(0) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}\right]_{x=0} = a_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ a_3 &= 1/6, \\ a_{n+2} &= -\frac{3(n+1)a_{n+1} + 2a_n}{(n+1)(n+2)}, \qquad n \geq 2, \\ a_n &= -\frac{3(n-1)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(n-1)n}, \qquad n \geq 4. \end{aligned}$$

Fazendo as contas:

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{97}{1800}x^6 + \ldots \;\blacksquare$$

Exercício 11.6

a) A forma normal é

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0;$$

Então

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1-x, \\ x^2q(x) &= x, \end{aligned}$$

são ambas analíticas, e o ponto é singular regular.

b) Faça

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}
$$

e substitua:

$$
x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.
$$

Faça

$$
\begin{aligned}
m + r &= n + r - 1, \\
m &= n - 1, \\
n &= m + 1.
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,
$$

$$
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r)(n+r+1) a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,
$$

$$
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)^2 a_{n+1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,
$$

$$
\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)^2 a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} [1-(n+r)] a_n x^{n+r} = 0,
$$

$$
r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)] a_n \right\} x^{n+r} = 0.
$$

Faça $a_0 \neq 0$; então $r = 0$ é raiz dupla, e estamos no caso ii do teorema 10.1 do livro-texto. A primeira solução pode ser obtida a partir de

$$
\begin{aligned}
(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)] a_n &= 0, \\
r &= 0, \\
a_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2} a_n,
\end{aligned}
$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, encontramos

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= -1, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 0, \\ &\vdots \\ a_n &= 0, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Portanto, a 1ª solução é

$$y_1(x) = 1 - x.$$

A 2ª solução é da forma

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad \Rightarrow \\ y_2'(x) &= \frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y_2''(x) &= -\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial ordinária,

$$\begin{aligned} x \left[-\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2} \right] + \\ (1-x) \left[\frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right] + y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(x) \left[x y_1'' + (1-x) y_1' + y_1 \right] - \frac{y_1}{x} + 2y_1' + \frac{1-x}{x} y_1 + \\ x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2} \right] + (1-x) \left[+ \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0. \end{aligned}$$

Substituindo $y_1 = 1 - x$,

$$x - 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

Faça

$$\begin{aligned} m &= n - 1, \\ n &= m + 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1) c_{m+1} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 3 - x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n = 3 - x,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-n)c_nx^n = 3 - x,$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n\right]x^n = 3 - x,$$

Claramente, os expoentes 0 e 1 de x são especiais. Para esses casos,

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = 3, \\ n = 1 \quad &\Rightarrow \quad 4c_2 = -1, \\ c_2 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

A partir de $n = 2$,

$$\begin{aligned} (n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n &= 0, \\ c_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2}c_n, \\ c_3 &= \frac{1}{3^2}c_2 = -\frac{1}{3^2} \times \frac{-1}{4}, \\ c_4 &= \frac{2}{4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{288}, \\ c_5 &= \frac{3 \times 2}{5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{2400}, \\ c_6 &= \frac{4 \times 3 \times 2}{6^2 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{21600}, \\ &\vdots \\ c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 4} \\ c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2} \\ c_n &= -\frac{(n-2)!}{(n!)^2}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Note que a fórmula geral para c_n também vale para $n = 2$. Portanto a 2ª solução é

$$y_2(x) = (1-x)\ln(x) + 3x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-2)!}{(n!)^2}x^n \blacksquare$$

Exercício 11.7

O ponto $x = 0$ é *ordinário*, e portanto é possível obter uma solução em série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

não havendo necessidade de adicionar r ao expoente, nem de encontrar uma equação indicial. Isso posto,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2},$$

donde

$$(1-x^2)y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n},$$
$$-2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n) a_n x^{n},$$
$$2y = \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n}.$$

Mude o expoente dos 3 últimos somatórios de n para $m-2$, e reúna na equação diferencial todos os somatórios:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[-(m-3)(m-2) - 2(m-2) + 2\right] a_{m-2} x^{m-2} = 0.$$

Isolando $n = 0$ e $n = 1$, expandindo e simplificando o termo entre colchetes, e trocando de volta de m para n:

$$\sum_{n=0}^{1} (n-1) n a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1) n a_n - (n-3) n a_{n-2}\right] x^{n-2} = 0.$$

O primeiro somatório é identicamente nulo independentemente dos valores de a_0 e a_1; já pensando em $p_0 = q_0 = 1$ do enunciado, faça $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$. A relação de recorrência é

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2}.$$

Obtenha agora $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots 0$ e $a_2 = -1, a_4 = -1/3, a_6 = -1/5, a_8 = -1/7$, etc.. Portanto, para $n > 0$:

$$p_n = 0,$$
$$q_n = -1/(2n-1) \blacksquare$$

Exercício 11.8

a) Na forma canônica:

$$y'' + \underbrace{\frac{3x-1}{x(x-1)}}_{p(x)} y' + \underbrace{\frac{1}{x(x-1)}}_{q(x)} y = 0;$$

As funções

$$xp(x) = \frac{3x-1}{x-1}, \qquad x^2 q(x) = \frac{x}{x-1},$$

são analíticas em $x = 0$; portanto, $x = 0$ é um ponto singular regular $\blacksquare$

b) Como sempre, o método de Frobenius é

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n};\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n) a_n x^{s+n-1};\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n-1)(s+n) a_n x^{s+n-2};$$

trabalhando com a forma *não-canônica*, e expandindo cuidadosamente cada termo da equação diferencial, obtém-se:

$$\begin{aligned}
x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(s+n-1)(s+n)a_nx^{s+n},\\
-xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty}-(s+n-1)(s+n)a_nx^{s+n-1},\\
3xy' &= \sum_{n=0}^{\infty}3(s+n)a_nx^{s+n},\\
-y' &= \sum_{n=0}^{\infty}-(s+n)a_nx^{s+n-1},\\
y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}.
\end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
s+n-1 &= s+m,\\
n &= m+1,\\
m &= n-1.
\end{aligned}$$

Os termos em $s+n-1$ tornam-se

$$\begin{aligned}
-xy'' &= \sum_{m=-1}^{\infty}-(s+m)(s+m+1)a_{m+1}x^{s+m},\\
-y' &= \sum_{m=-1}^{\infty}-(s+m+1)a_{m+1}x^{s+m}.
\end{aligned}$$

Agora recoloco todos os termos na equação diferencial, trocando m por n nas duas equações acima; o termo $n=-1$ só aparece nestas duas; portanto:

$$\begin{aligned}
&-\left[(s+(-1))(s+(-1)+1)+(s+(-1)+1)\right]a_0x^{s-1}+\\
&\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\{\left[(s+n-1)(s+n)+3(s+n)+1\right]a_n-\\
&\qquad\qquad\left[(s+n)(s+n+1)+(s+n+1)\right]a_{n+1}\}\,x^{s+n}=0.
\end{aligned}$$

$$-[(s)^2]a_0x^{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\{\left[(s+n+1)^2\right]a_n-\left[(s+n+1)^2\right]a_{n+1}\}x^{s+n}=0.$$

A equação indicial é $s^2=0$, que tem *raiz dupla* $s=0$; a relação de recorrência é

$$a_{n+1}=a_n.$$

Portanto, a 1ª solução em série é

$$y_1(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

é fácil conferir que esta é, realmente, uma solução da equação diferencial. Substitua na equação diferencial:

$$y_2'=uy_1'+u'y_1,$$

$$
\begin{aligned}
y_2'' &= u'y_1' + uy_1'' + u'y_1' + u''y_1,\\
0 &= x(x-1)[u'y_1' + uy_1'' + u'y_1' + u''y_1] + (3x-1)[uy_1' + u'y_1] + uy_1,\\
0 &= u\left\{x(x-1)y_1'' + (3x-1)y_1' + y_1\right\} +\\
&\quad x(x-1)[2u'y_1' + u''y_1] + (3x-1)[u'y_1]\\
0 &= x(x-1)\left[\frac{2u'}{(1-x)^2} + \frac{u''}{1-x}\right] + \frac{3x-1}{1-x}u'\\
0 &= -\frac{2x}{1-x}u' - xu'' + \frac{3x-1}{1-x}\\
0 &= -[u' + xu'']\\
u'' &= -\frac{u'}{x}.
\end{aligned}
$$

Faça $v = u' \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{v}{x}\\
\frac{dv}{v} &= -\frac{dx}{dx}\\
\ln v &= -\ln(x)\\
v &= \frac{1}{x}\\
u &= \int \frac{dx}{x} = \ln(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
y_2(x) = \frac{\ln(x)}{1-x} \blacksquare
$$

Exercício 11.9

Como sempre:

$$
y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.
$$

Substituindo na equação diferencial:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0
$$

Fazendo $n - 2 = m + 1$, isto é: fazendo $m = n - 3$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=-3}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},\\
0 &= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},\\
0 &= 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3) a_{n+3} - a_n\right] x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

A relação de recorrência é

$$
a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}.
$$

Claramente, $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$; partindo de $a_0 = 1$: $a_3 = 1/6, a_6 = 1/180, a_9 = 1/12960$; partindo de $a_1 = 1$: $a_4 = 1/12, a_7 = 1/504, a_{10} = 1/45360$, e as duas soluções LI são:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \ldots,$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} + \ldots \blacksquare$$

Exercício 11.10
Primeiro verificamos se o método de Frobenius se aplica: na forma normal,

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{1}{x} + 1 + x\right)}_{p(x)} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{q(x)} y = 0.$$

Agora,

$$xp(x) = 1 + x + x^2,$$
$$x^2 q(x) = x.$$

Ambas são analíticas em $x = 0$, e esse é um ponto singular regular. Portanto, podemos tentar Frobenius:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Substituindo na EDO, encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Tentemos colocar todos os expoentes na forma x^{n+r-1}:

$$m + r - 1 = n + r,$$
$$m - 1 = n,$$
$$m = n + 1,$$

assim como

$$l + r - 1 = n + r + 1,$$
$$l - 1 = n + 1,$$
$$l - 2 = n,$$

$$l = n + 2.$$

Nos somatórios, teremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{m=1}^{\infty}(m-1+r)a_{m-1}x^{m+r-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}x^{m+r-1} \sum_{l=2}^{\infty}(l+r-2)a_{l-2}x^{l+r-1} = 0,$$

ou:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1+r)a_{n-1}x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r-1} \sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2}x^{n+r-1} = 0.$$

Claramente, devemos separar os termos envolvendo $n = 0$ e $n = 1$ dos demais:

$$[(r-1)r + r]\, a_0 x^{r-1} + \{[r(r+1) + (r+1)]a_1 + [r+1]a_0\}\, x^r + \sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+r-1)(n+r) + (n+r)]a_n + [n+r]a_{n-1} + [n+r-2]a_{n-2}\}\, x^{n+r-1} = 0,$$

ou:

$$\left[r^2\right] a_0 x^{r-1} + \left\{[r^2 + 2r + 1]a_1 + [r+1]a_0\right\} x^r + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(n+r)^2]a_n + [n+r]a_{n-1} + [n+r-2]a_{n-2}\right\} x^{n+r-1} = 0.$$

Se impusermos (como devemos) $a_0 \neq 0$, teremos $r^2 = 0$, e $r = 0$ é uma *raiz dupla*. Fazendo, sem perda de generalidade, $a_0 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= -1, \\ n^2 a_n + n a_{n-1}(n-2)a_{n-2} &= 0, \\ a_n + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{(n-2)a_{n-2}}{n^2} &= 0, \\ a_n &= -\left[\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{(n-2)a_{n-2}}{n^2}\right]. \end{aligned}$$

Como temos a_0 e a_1, todos os demais, a partir de $n = 2$, são facilmente obtidos:

$$y_1(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{18}x^3 - \frac{7}{144}x^4 + \frac{59}{3600}x^5 + \frac{173}{64800}x^6 + \ldots \blacksquare$$

Exercício 11.11

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r};$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1};$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.$$

Junte tudo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} = 0.$$

O somatório discordante é o último:

$$m + r + 2 = n + r;$$
$$m + 2 = n;$$
$$m = n - 2.$$

Então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Separe os casos $n = 0$ e $n = 1$:

$$[(r-1)r + 2r - 2]\, a_0 x^r + [r(r+1) + 2(r+1) - 2]\, a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+r-1)(n+r) + 2(n+r) - 2]\, a_n + a_{n-2}\}\, x^{n+r} = 0.$$

A equação indicial é $r^2 + r - 2 = 0$; as raízes são $r = -2$ e $r = 1$. A maior raiz sempre leva a *uma* solução, que é o que se pede. Para $r = 1$, o coeficiente de a_1 é 4, donde $a_1 = 0$. Salvam-se apenas os *as* ímpares. A relação de recursão é

$$[n(n+1) + 2(n+1) - 1]\, a_n + a_{n-2} = 0,$$
$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2 + 3n}.$$

A solução é

$$y_1(x) = a_0 \left[x - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{280}x^5 - \frac{1}{15120}x^7 + \ldots \right] \blacksquare$$

Exercício 11.12

Na forma normal,

$$y'' + \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right] y' - \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Logo,

$$xp(x) = \frac{1}{x} + 1;$$
$$x^2 q(x) = 1.$$

Como $xp(x)$ não é analítica em $x = 0$, o método de Frobenius não é aplicável ■

Exercício 11.13

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}, \\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}, \\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}, \\
x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.
$$

Vamos "consertar" o segundo somatório:

$$
\begin{aligned}
m + r &= n + r + 1, \\
m &= n + 1, \\
n &= m - 1.
\end{aligned}
$$

A EDO fica

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n x^{n+r} - \sum_{m+1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r} &= 0, \\
\left[(r-1)(r) + (r) - 1/9\right] a_0 x^{n+r} & \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}
$$

Evidentemente, a equação indicial é

$$
\begin{aligned}
r^2 - 1/9 &= 0, \\
r &= \pm\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

As raízes são distintas e não diferem por um inteiro: consequentemente, cada uma delas levará a uma solução LI diferente. A relação de recorrência pode ser obtida de: para $r = \pm 1/3$,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+r} = 0,
$$

$$\left[(n+r)^2 - 1/9\right] a_n - a_{n-1} = 0,$$
$$a_n = \frac{1}{(n+r)^2 - 1/9} a_{n-1}.$$

As duas soluções são calculadas por

```
a[0] : 1$
b[0] : 1$
a[n] := 1/((n+1/3)^2 -1/9) * a[n-1]$
b[n] := 1/((n-1/3)^2 -1/9) * b[n-1]$
for n : 1 thru 6 step 1 do (
print ("n = ",n ," an = ", a[n], " bn = ", b[n] )
);
```

E portanto:

$$y_1 = x^{1/3}\left[1 + \frac{3}{5}x + \frac{9}{80}x^2 + \frac{9}{880}x^3 + \frac{27}{49280}x^4 + \frac{81}{4188800}x^5 + \frac{81}{167552000}x^6 + \ldots\right],$$
$$y_2 = x^{-1/3}\left[1 + 3x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{56}x^3 + \frac{27}{2240}x^4 + \frac{81}{145600}x^5 + \frac{81}{4659200}x^6 + \ldots\right] \blacksquare$$

Exercício 11.14
O ponto $x = 0$ é um ponto singular; a forma canônica é

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0$$

e portanto $p(x) = 0$, $q(x) = 1/x$; então, $xp(x) = 0$ e $x^2q(x) = x$ são analíticas em $x = 0$, e o ponto é *regular*. O método de Frobenius se aplica. Como de costume,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2},$$
$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1}.$$

Faça (por exemplo)

$$n = m - 1 \Rightarrow m = n + 1$$

no primeiro somatório acima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1}.$$

Substituindo os somatórios na equação diferencial

$$(r-1)ra_0x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n-1} + (n+r-1)(n+r)a_n\right] x^{n+r-1} = 0.$$

As duas raízes diferem de um número inteiro. A menor raiz deve conduzir a ambas as soluções LI, ou a nenhuma. Começamos, portanto, discutindo $r = 0$. A fórmula de recursão é, neste caso,

$$a_{n-1} + (n-1)na_n = 0 \;\Rightarrow\; a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n-1)n}.$$

Partindo de a_0 arbitrário, é impossível calcular a_1 acima, pois a fórmula produz uma divisão por zero. A menor raiz, neste caso, não conduz a *nenhuma* solução. Vamos procurar portanto pelo menos uma solução com a maior raiz, $r = 1$. A fórmula de recursão neste caso é

$$a_{n-1} + n(n+1)a_n = 0 \;\Rightarrow\; a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}.$$

Partindo de $a_0 = 1$, encontra-se a fórmula geral

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n!)^2}$$

donde obtém-se a primeira solução LI:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n!)^2} x^{n+1}.$$

Agora, procuramos a segunda solução na forma

$$y_2(x) = \kappa y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+r_2}$$

onde a menor raiz no nosso caso é $r_2 = 0$. Derivando:

$$\begin{aligned} y_2' &= \kappa\frac{y_1}{x} + \kappa y_1'\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n d_n x^{n-1} \\ y_2'' &= -\kappa\frac{y_1}{x^2} + \kappa\frac{y_1'}{x} + \kappa\frac{y_1'}{x} + \kappa y_1''\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)d_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} -\kappa\frac{y_1}{x} + \kappa 2y_1' + \kappa x y_1''\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)d_n x^{n-1} + \kappa y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n &= 0, \\ -\kappa y_1 + \kappa 2x y_1' + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1} = \kappa\left[y_1 - 2xy_1'\right].$$

Vamos devagar. O lado direito é conhecido. Usando um índice m para não causar confusão com o lado direito:

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1},$$

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a_m x^m, \\
-2xy_1' &= \sum_{m=0}^{\infty} -2(m+1)x^{m+1} \quad \Rightarrow \\
\kappa[y_1 - 2xy_1'] &= \kappa \sum_{m=0}^{\infty} [1-2(m+1)]\, a_m x^{m+1} \\
&= \kappa \sum_{p=1}^{\infty} [1-2p]\, a_{p-1} x^p.
\end{aligned}
$$

O lado esquerdo é

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)d_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)d_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)d_n + d_{n-1}]\, x^n.
\end{aligned}
$$

Ambos os somatórios agora começam em 1 e possuem expoentes nas mesmas potências:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)d_n + d_{n-1}]\, x^n &= \kappa \sum_{n=1}^{\infty} [1-2n]\, a_{n-1} x^n, \\
n(n-1)d_n + d_{n-1} &= \kappa(1-2n)a_{n-1}, \\
d_n &= \kappa \frac{1-2n}{n(n-1)} a_{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} d_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Aparentemente, a relação de recorrência *falha* quando $n = 1$! Existe esperança, entretanto, se a substituição da fórmula geral de a_{n-1} eliminar a singularidade. Tentemos:

$$
\frac{1-2n}{n(n-1)} a_{n-1} = \frac{1-2n}{n(n-1)} \frac{(-1)^{n-1}}{n[(n-1)!]^2}
$$

e a singularidade permanece... Se nós por outro lado *forçarmos* $d_1 = 0$ em

$$
n(n-1)d_n + d_{n-1} = \kappa(1-2n)a_{n-1},
$$

obteremos

$$
\begin{aligned}
d_0 &= -\kappa, \\
d_2 &= \frac{3}{4}\kappa, \\
d_3 &= -\frac{7}{36}\kappa, \\
d_4 &= \frac{35}{1728}\kappa, \ \ldots
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
y_2(x) = \kappa y_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \kappa y_1(x)\ln(x) + \kappa\left[-1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{36}x^3 + \frac{35}{1728}x^4 - \ldots\right]
$$

Finalmente, note que κ multiplica todos os termos da equação acima, de forma que sem perda de generalidade podemos escrever a 2ª solução LI como

$$
y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \left[-1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{36}x^3 + \frac{35}{1728}x^4 - \ldots\right] \blacksquare
$$

Exercício 11.15

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\
x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} \\
\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} t^{m-1} &= 0 \\
a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_{n-2} + n a_n\right] t^{n-1} &= 0 \\
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 0 \\
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n} \Rightarrow \\
a_1 = a_3 = a_5 = \ldots &= 0, \\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{1}{(2)^k k!} \Rightarrow \\
x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2)^k k!} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 11.16

Note que $[xp(x)] = 0$, $[x^2 q(x)] = x^3$ são analíticas em $x = 0$; além disso, na verdade $x = 0$ é um ponto ordinário, e nós antecipamos que haverá uma solução em série de potências sem expoentes fracionários. Mesmo assim, começo com

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} \\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}.
\end{aligned}
$$

A equação diferencial torna-se

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} &= 0 \\
\sum_{n=0}^{2} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Suponho $a_0 \neq 0$, e obtenho a equação indicial

$$(r-1)r = 0,$$

donde $r = 0$ ou $r = 1$. Sei que neste caso a menor raiz *pode* levar à solução geral. Tento:

$$(0-1)\times(0)\times a_0 x^{-2} + (0)\times(1)\times a_1 x^{-1} + (1)\times(2)\times a_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r)a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} = 0.$$

Note que a_0 e a_1 estão livres, e que é *forçoso* fazer $a_2 = 0$. A relação de recorrência para os $a_n s$ é

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{(n-1)n},$$

donde

$$a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots\ 0.$$

A 1ª solução LI é obtida a partir de $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \ldots$$

A 2ª solução LI é obtida a partir de $a_1 = 1$:

$$y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \ldots$$

A solução geral é

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \blacksquare$$

Exercício 11.17
Como sempre,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0.$$

Alinhando os expoentes,

$$m+r+2 = n+r-2,$$
$$m = n-4,$$
$$n = m+4.$$

Então,

$$\sum_{m=-4}^{\infty}(m+r+3)(m+r+4)a_{m+4}x^{m+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0,$$

$$(r-1)ra_0 + r(r+1)a_1 + (r+1)(r+2)a_2 + (r+2)(r+3)a_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r+3)(n+r+4)a_{n+4} + a_n\right] x^{n+r+2} = 0$$

A menor raiz da equação indicial $(r-1)r = 0$, $r = 0$, levará a duas soluções:

$$\begin{aligned} a_0 &\neq 0, \\ a_1 &\neq 0, \\ a_2 &= 0, \\ a_3 &= 0. \end{aligned}$$

A partir daí,

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= -\frac{a_n}{(n+3)(n+4)}, \\ a_n &= -\frac{a_{n-4}}{(n-1)n}. \end{aligned}$$

As duas soluções LI partindo de $a_0 = 1$ e de $a_1 = 1$ serão:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 - \frac{1}{88704}x^{12} + \frac{1}{21288960}x^{16} - \dots \\ y_2(x) &= x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 - \frac{1}{224640}x^{13} + \frac{1}{61102080}x^{17} - \dots \end{aligned} \blacksquare$$

Exercício 11.18

Faça

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s};$$

derive termo a termo duas vezes e substitua na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+s-1)(n+s)x^{n+s-2} + \sum_{n=5}^{\infty} 5c_{n-5}x^{n+s-2} = 0.$$

Isolando os 5 primeiros termos,

$$\sum_{n=0}^{4} c_n(n+s-1)(n+s)x^{n+s-2} + \sum_{n=5}^{\infty} \left[c_n(n+s-1)(n+s) + 5c_{n-5}\right] = 0.$$

Termo a termo, os 5 primeiros dão:

$$\begin{aligned} c_0(s-1)s &= 0, \\ c_1 s(s+1) &= 0, \\ c_2(s+1)(s+2) &= 0, \\ c_3(s+2)(s+3) &= 0, \\ c_4(s+3)(s+4) &= 0. \end{aligned}$$

Então $s = 0$ ou $s = 1$ na equação em c_0. Neste caso, as raízes da equação indicial *diferem por um inteiro*. Então, de acordo com Butkhov, $s = 0$ (a menor raiz) fornecerá a solução geral. Com $s = 0$, c_0 e c_1 são arbitrários (são as constantes da solução geral); $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ e a relação de recorrência é

$$c_n = -\frac{5c_{n-5}}{(n-1)n}.$$

As duas soluções LI desejadas serão

$$y_1 = 1 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{72}x^{10} - \frac{1}{3024}x^{15} + \dots$$
$$y_2 = x - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{132}x^{11} - \frac{1}{6336}x^{16} + \dots \blacksquare$$

Exercício 11.19
Já sabemos que a equação indicial é

$$r(r-1) = 0,$$

e que a menor raiz, $r = 0$, não leva a nenhuma solução; temos também uma solução com a forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}.$$

Como fizemos no exemplo 11.5, procuramos então uma segunda solução com a forma:

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+s},$$
$$y_2' = y_1'\ln(x) + \frac{y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+s)c_m x^{m+s-1},$$
$$y_2'' = y_1''\ln(x) + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+s-1)(m+s)c_m x^{m+s-2}.$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\left[xy_1''\ln(x) + 2y_1' - \frac{y_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+s-1)(m+s)c_m x^{m+s-1}\right] +$$
$$\left[xy_1' + y_1 + \sum_{m=0}^{\infty}(m+s)c_m x^{m+s}\right] + y_1\ln(x) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+s} = 0;$$
$$(s-1)sc_0x^{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+s)(m+s+1)c_{m+1} + (m+s+1)c_m\right]x^{m+s} = \frac{y_1}{x} - 2y_1'.$$

O lado direito da equação acima é calculado como:

$$\frac{y_1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,$$
$$-2y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} -2\frac{(-1)^n}{n!}(n+1)x^n$$
$$\frac{y_1}{x} - 2y_1' = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[2n+1\right]x^n$$

Ficamos com

$$(s-1)sc_0x^{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+s)(m+s+1)c_{m+1} + (m+s+1)c_m\right]x^{m+s}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [2n+1] x^n.$$

Os dois lados da equação acima são compatíveis se escolhermos $s = 0$. Então, podemos igualar termo a termo os lados esquerdo (restante) e direito. Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} n(n+1)c_1 + (n+1)c_0 &= -1, \\ c_0 &= -1. \end{aligned}$$

Observe que não é possível calcular c_1: ele precisa receber um valor arbitrário: $c_1 = \lambda$. Para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_n &= -\frac{(-1)^n}{n!} [2n+1], \\ nc_{n+1} + c_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(2n+1), \\ c_{n+1} &= -\frac{c_n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)!}(2n+1), \\ c_n &= -\frac{c_{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)n!}(2n-1). \end{aligned}$$

A listagem C.6 mostra o cálculo dos primeiros $c_n s$.

Listagem C.6: Valores iniciais de c_n para o problema11.19

```
/* vamosac.max */
c[0] : 0$
c[1] : lambda$
c[n] := -c[n-1]/(n-1) + ((-1)**n)/((n-1)*n!)*(2*n-1)$
for n : 1 thru 8 step 1 do (
   print ("n = ", n, "c[n] = ", expand(expand(c[n])))
);
```

.

A listagem C.7 mostra a saída.

Com ela, podemos escrever:

$$\begin{aligned} y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \lambda \left[x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots \right] + \\ - 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{35}{72}x^4 - \frac{101}{720}x^5 + \ldots \end{aligned}$$

Mas

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots,$$

donde

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \lambda y_1(x) - 1 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{35}{72}x^4 - \frac{101}{720}x^5 + \ldots$$

Como antes, toda a série que multiplica λ é linearmente dependente da primeira solução: qualquer valor de λ, e em particular $\lambda = 0$, produz a segunda solução linearmente independente da primeira ■

Listagem C.7: Saída de `vamosbd.max`

```
(%i1) batch("vamosac.max")
(%i2) c[0]:0
(%i3) c[1]:lambda
(%i4) c[n]:=(-1)^n*(2*n-1)/((n-1)*n!)+(-c[n-1])/(n-1)
(%i5) for n thru 8 do print("n = ",n,"c[n] = ",expand(expand(c[n])))
n =  1 c[n] =  lambda
               3
n =  2 c[n] =  - - lambda
               2
               lambda   7
n =  3 c[n] =  ------ - -
                 2      6
               35   lambda
n =  4 c[n] =  -- - ------
               72     6
               lambda   101
n =  5 c[n] =  ------ - ---
                 24     720
                7    lambda
n =  6 c[n] =  --- - ------
               225    120
               lambda    283
n =  7 c[n] =  ------ - -----
                720     50400
                1207     lambda
n =  8 c[n] =  ------- - ------
               1411200    5040
```

Exercício 11.20

Inicialmente, verificamos se $x = 0$ é um ponto singular regular. Reescrevemos a EDO em forma normal:

$$y'' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) y = 0$$

E verificamos

$$\begin{aligned} xp(x) &= (x-1), \\ x^2 q(x) &= 1 - x, \end{aligned}$$

e de fato o ponto é singular regular. Fazemos então

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}, \end{aligned}$$

É sempre preferível substituir essas expressões na forma "não-normal"!

$$x^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}\right] + x(x-1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}\right] +$$

$$(1-x)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right] = 0.$$

Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Reunindo os expoentes de x em comum, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]\,a_n\}\,x^{n+r}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+r)-1]\,a_n\}\,x^{n+r+1} = 0$$

É possível simplificar:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-2)+1]\,a_n\}\,x^{n+r} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+r)-1]\,a_n\}\,x^{n+r+1} \quad = \quad 0$$

Neste ponto, fazemos

$$\begin{aligned} n+r+1 &= m+r, \\ n+1 &= m, \\ n &= m-1 \end{aligned}$$

e substituímos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-2)+1]\,a_n\}\,x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty}\{[(m+r-1)-1]\,a_{m-1}\}\,x^{m+r} = 0$$

Renomeando agora $m = n$ no segundo somatório, e separando o caso $n = 0$, teremos:

$$[r(r-2)+1]\,a_0 x^r+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+r)(n+r-2)+1]\,a_n + [(n+r-2)]\,a_{n-1}\}\,x^{n+r} = 0.$$

A equação indicial é

$$\begin{aligned} r^2-2r+1 &= 0, \\ (r-1)^2 &= 0, \\ r &= 1. \end{aligned}$$

A raiz é dupla. Uma solução é

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Procuramos os $a_n s$ a partir de $a_0 = 1$ (sem perda de generalidade, como sempre):

$$[(n+1)(n-1)+1]a_n + [(n-1)a_{n-1}] = 0,$$
$$a_n = -\frac{(n-1)}{(n+1)(n-1)+1}a_{n-1}.$$

É tentador simplificar $(n-1)$, mas isso só pode ser feito se $n \neq 1$! Para $n > 1$, portanto,

$$a_n = -\frac{1}{n+2}a_{n-1}.$$

Partindo de $a_0 = 1$, teremos $a_1 = 0$, e a partir da equação acima, $a_n = 0$ para $n > 1$. A nossa primeira solução é simplesmente

$$y_1(x) = x.$$

De fato, $y_1' = 1$, e (substituindo na EDO)

$$x(x-1) + (1-x)x \equiv 0.$$

Precisamos agora de uma segunda solução, e o teorema (11.1) nos sugere

$$y_2(x) = x\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1},$$
$$y_2'(x) = x\frac{1}{x} + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n,$$
$$y_2''(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}.$$

Então,

$$x^2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}\right] + x(x-1)\left[x\frac{1}{x} + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right]$$
$$+ (1-x)\left[x\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0.$$

Como se espera, todos os termos envolvendo $\ln(x)$ se cancelam. Prosseguindo,

$$x^2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1}\right] + x(x-1)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right]$$
$$+ (1-x)\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0.$$

Simplificamos:

$$\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1}\right] + \left[x(x-1) + x(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^n\right]$$
$$+ \left[(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\right] = 0;$$
$$x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_n x^{n+1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Reunimos agora os termos nos mesmos expoentes de x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1) - (n+1) + 1]\, c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) - 1]\, c_n x^{n+2} = -x^2.$$

Simplificamos novamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n-1) + 1]\, c_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^{n+2} = -x^2.$$

Parece bem evidente que devemos fazer

$$\begin{aligned} m+1 &= n+2, \\ m &= n+1, \\ n &= m-1. \end{aligned}$$

Obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n-1) + 1]\, c_n x^{n+1} + \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) c_{m-1} x^{m+1} = -x^2.$$

Separamos o caso $n = 1$ (que corresponde ao expoente x^2!):

$$c_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n+1)(n-1) + 1]\, c_n + [(n-1)]\, c_{n-1}\}\, x^{n+1} = -x^2.$$

Isso nos dá, imediatamente,

$$c_1 = -1.$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} [(n+1)(n-1) + 1] c_n &= -(n-1) c_{n-1}, \\ c_n &= -\frac{n-1}{(n+1)(n-1)+1} c_{n-1}, \\ &= -\frac{n-1}{n^2 - 1 + 1} c_{n-1} \\ &= -\frac{n-1}{n^2} c_{n-1} \\ &= (-1)(-1)\frac{(n-1)(n-2)}{n^2(n-1)^2} c_{n-2} \\ &\vdots \\ &= [(-1)]^{n-1} \frac{(n-1)(n-1)\ldots 2 \times 1}{[n(n-1)\ldots 2]^2} c_{-1} \\ &= (-1)^n \frac{(n-1)!}{[n!]^2} \\ &= (-1)^n \frac{(n-1)!}{[n \times (n-1)!][n!]} \\ &= (-1)^n \frac{1}{n \times n!}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y_2(x) = x \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \times n!} x^{n+1} \quad \blacksquare$$

Capítulo 12

Exercício 12.1
São muitas as opções; por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\cosh t\,dt &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left[e^{(1-s)t}+e^{-(1+s)t}\right]\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-s}\int_0^\infty e^{(1-s)t}(1-s)\,dt\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{1+s}\int_0^\infty e^{-(1+s)t}(-(1+s))\,dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\right] = \frac{s}{s^2-1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 12.3

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+6s+3}{s^3+4s^2+3s}\right\} = e^{-2t}\cosh t + 1.$$

Exercício 12.4
A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
3s\overline{x}+\overline{x} &= \frac{6}{s-2}, \\
\overline{x}(3s+1) &= \frac{6}{s-2}, \\
\overline{x} &= \frac{6}{3(s-2)(s+1/3)} = \frac{2}{(s-2)(s+1/3)}.
\end{aligned}$$

Separando em frações parciais,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(s-2)(s+1/3)} &= \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1/3}, \\
A &= 6/7, \\
B &= -6/7.
\end{aligned}$$

Invertendo,

$$\begin{aligned}
\overline{x}(s) &= \frac{6/7}{s-2}-\frac{6/7}{s+1/3}, \\
x(t) &= \frac{6}{7}e^{2t}-\frac{6}{7}e^{-t/3}.
\end{aligned}$$

Exercício 12.5
Uso o teorema da convolução,

$$\mathscr{L}[f*g] = \overline{f}(s)\overline{g}(s) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right\} = \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Mas

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1, \quad \overline{g}(s) = \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow g(t) = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2},$$

donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_{\tau=0}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2(t-\tau)}{2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1-\cos 2t}{4} \quad \blacksquare$$

Exercício 12.6

Tomando a transformada de Laplace da equação diferencial e introduzindo as condições iniciais,

$$\begin{aligned}
s^2\overline{x} + 4s\overline{x} + 3\overline{x} &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s^2+4s+3) &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s+3)(s+1) &= \frac{1}{s+3},\\
\overline{x}(s) &= \frac{1}{(s+3)^2(s+1)} = \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{s+1}\\
&= \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{4(s+3)} - \frac{1}{2(s+3)^2}.
\end{aligned}$$

Uma consulta a uma tabela de transformadas de Laplace produz, imediatamente,

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \quad \blacksquare$$

Exercício 12.7

A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
2\left[s\overline{c}(s) - c(0)\right] &= 3\left[s^2\overline{c}(s) - sc(0) - c'(0)\right] - \overline{c},\\
\overline{c}\left[2s+1-3s^2\right] &= 2-3s,\\
\overline{c} &= \frac{2-3s}{2s+1-3s^2}\\
&= \frac{9}{4}\frac{1}{(3s+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)} \Rightarrow\\
c(x) &= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-x/3}\right] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 12.8

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{T} &= \frac{x_0 t}{T^2}\\
\overline{x} - x_0 + \frac{\overline{x}}{T} &= \frac{x_0}{(sT)^2}\\
\overline{x}\left(\frac{sT+1}{T}\right) &= x_0\left[\frac{(sT)^2+1}{(ST)^2}\right]\\
\overline{x} &= x_0\frac{1+(ST)^2}{Ts^2(ST+1)} = x_0\left[\frac{2T}{ST+1} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right]\\
&= x_0\left[\frac{2}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right] \Rightarrow\\
x(t) &= x_0\left[2\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1\right] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 12.9

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} &= \mathscr{L}\{x^2\} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - [s\overline{y} - y(0)] - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - s\overline{y} + y(0) - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
s^2\overline{y} - s - 3 - s\overline{y} + 1 - 2\overline{y} &= \frac{2}{s^3} \\
\overline{y}(s^2 - s - 2) - s - 2 &= \frac{2}{s^3} \\
\overline{y}(s^2 - s - 2) &= s + 2 + \frac{2}{s^3} \\
\overline{y} &= \frac{s+2}{s^2 - s - 2} + \frac{2}{s^3(s^2 - s - 2)} \\
\overline{y} &= \frac{1}{3\ (s+1)} - \frac{3}{4\,s} + \frac{1}{2\,s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{17}{12\ (s-2)} \\
y(x) &= \frac{17}{12}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 12.10
Fatoro o denominador:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 3s - 10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)(s+5)}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)}\frac{1}{(s+5)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\} &= 3\mathrm{e}^{2t}; \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} &= \mathrm{e}^{-5t}.
\end{aligned}
$$

A transformada de Laplace inversa desejada, portanto, é a convolução destas duas:

$$
3\int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\mathrm{e}^{-5\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{3}{7}\left[\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-5t}\right] \ \blacksquare
$$

Exercício 12.11
a)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{a}\cos(bt)\} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t}\cos(bt)\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{sen}(bt)}{b}\right|_0^{\infty} + \frac{(s-a)}{b}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{sen}(bt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(s-a)}{b}\left[-\left.\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{b}\cos(bt)\right|_0^{\infty}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\frac{(s-a)}{b}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\cos(bt)\mathrm{d}t\Bigg].$$

Supondo $s > a$, os termos de contorno em $+\infty$ se anulam. Notando que $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\cos(bt)\mathrm{d}t = \frac{(s-a)}{b^2} - \frac{(s-a)^2}{b^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\cos(bt)\mathrm{d}t,$$

Portanto:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\cos(bt)\mathrm{d}t = \frac{(s-a)}{b^2}\left[1+\frac{(s-a)^2}{b^2}\right]^{-1} = \frac{(s-a)}{b^2+(s-a)^2}.$$

b) Combinando os exponenciais, integrando e tomando a parte real:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\mathrm{e}^a\cos(bt)\} &= \mathrm{Re}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}bt+(a-s)t}\mathrm{d}t\right]\\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}b+a-s)t}}{(\mathrm{i}b+a-s)}\Bigg|_0^\infty\right]\\
&= \mathrm{Re}\left[0-\frac{1}{(\mathrm{i}b+a-s)}\right] = \mathrm{Re}\left[-\frac{(a-s)-\mathrm{i}b}{b^2+(a-s)^2}\right]\\
&= -\frac{(a-s)}{b^2+(a-s)^2}.
\end{aligned}$$

Exercício 12.12

a)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\operatorname{senh} at}{a}.$$

b)

$$\frac{s+1}{s^2-s} = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\frac{1}{s-1}.$$

Como

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = \mathrm{e}^{at},$$

a transformada da soma acima é (usando convolução entre 1 e e^t):

$$\mathrm{e}^t + \int_0^t \mathrm{e}^\tau d\tau = 2\mathrm{e}^t - 1.$$

Exercício 12.13

Aplicando Laplace com as condições iniciais:

$$s^3\overline{x} + s^2\overline{x} - 2s\overline{x} = 1/s + 1/(s-1);$$

então,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}}{s^3+s^2-2s}\\
&= \frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}}{s(s^2+s-2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}}{s(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{\frac{2s-1}{s(s-1)}}{s(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2(s+2)} \\
&= \frac{2}{s(s-1)^2(s+2)} - \frac{1}{s^2(s-1)^2(s+2)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s-1)^2(s+2)}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-1)^2(s+2)}\right\} \\
&= 2\left(1 * t\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^{-2t}\right) - \left(t * t\mathrm{e}^t * \mathrm{e}^{-2t}\right) \\
&= \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} - (t+1)\mathrm{e}^t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Exercício 12.14

a) Um caminho entre muitos é separar em frações parciais,

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{s(s+8)} &= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+8}\right]; \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} &= 1, \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\} &= e^{-8t}, \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s(s+8)}\right\} &= \frac{3}{8}\left[1 - e^{-8t}\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

b) Por definição,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos 3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} &= \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \int_{\tau=0}^{t} \cos 3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=\tau}^{\infty} e^{-st} \cos 3(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,d\tau \\
&= \int_{\tau=}^{\infty} \frac{s\mathrm{e}^{-s\tau}}{s^2+9}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{s^2+9} \blacksquare
\end{aligned}
$$

De maneira ainda mais simples,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \cos 3(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \frac{\operatorname{sen} 3t}{3}, \\
\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}\right\} &= \frac{1}{s^2+9} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 12.15

$$
s\overline{x}(s) - x(0) + 3\overline{x} = \frac{3}{s^2+9}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x}(s+3) &= 1 + \frac{3}{s^2+9} \\
\overline{x} &= \frac{1}{s+3} + \frac{3}{(s^2+9)(s+3)} \\
&= \frac{1}{s+3} + \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+9} \\
&= \frac{1}{s+3} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{6}\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{6}\frac{3}{s^2+9} \\
&= \frac{7}{6}\frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{6}\left[\frac{3}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+9}\right] \Rightarrow \\
x(t) &= \frac{7}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}\left(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Capítulo 13

Exercício 13.1

Faça

$$
\phi_n(x) = \frac{n}{\pi\ell}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{nx}{\ell}\right)^2}\right];
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi\ell}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{nx}{\ell}\right)^2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{nx}{\ell}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{nx}{l}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

Isso satisfaz (13.4). Continuando,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{nx}{l}\right)^2}\right]\mathrm{d}\left(\frac{nx}{\ell}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{ly}{n}\right)\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+y^2}\right]\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\left[\frac{1}{1+y^2}\right]\mathrm{d}y \\
&= f(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{1+y^2}\right]\mathrm{d}y = f(0),
\end{aligned}
$$

o que satisfaz (13.5) ■

Exercício 13.2

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-xy}\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-xy}\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{\infty}\left[\frac{(-\operatorname{sen}(x)y - \cos(x))\mathrm{e}^{-xy}}{1+y^2}\right]_{x=0}^{\infty}\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Exercício 13.3

$$u(\xi) = H(\xi - a) \Rightarrow \mathrm{d}u = \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi;$$
$$\mathrm{d}v(\xi) = \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi \Rightarrow v(\xi) = H(\xi - a).$$

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{\mathrm{d}v} = H(\xi - a)H(\xi - a)\Big|_{-\infty}^{x}$$
$$- \int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi; \Rightarrow$$
$$2\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{dv} = [H(x - a)]^2\,;$$
$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(\xi - a)}_{u}\,\underbrace{\delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi}_{dv} = \frac{1}{2}\,[H(x - a)]^2 = \frac{1}{2}H(x - a) \blacksquare$$

Exercício 13.4
Esse é um problema mais ou menos "clássico": sejam $F(x)$ e $f(x) = F'(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{H(x - a)}_{u}\,\underbrace{f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = H(\xi - a)F(\xi)\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} F(x)\delta(x - a)\,\mathrm{d}x$$
$$= H(x - a)F(x) - H(x - a)F(a)$$
$$= H(x - a)\,[F(x) - F(a)] \;\Rightarrow$$
$$\int_{-\infty}^{x} H(x - a)\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x = -H(x - a)\,[\cos(x) - \cos(a)] \blacksquare$$

Exercício 13.5
É preciso saber/lembrar que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = H(\xi - a),$$
$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = (x - a)H(x - a).$$

Então,

$$\int_{\xi=-\infty}^{x} \big\{\,[H(\xi) - H(\xi - 1)] + \delta(\xi - 2)\big\}\,\mathrm{d}\xi = xH(x) - (x - 1)H(x - 1) + H(x - 2) \blacksquare$$

Exercício 13.6
Começo explicando: como a δ atua em $a > 0$, o limite inferior é irrelevante, desde que menor que a; portanto,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\delta(t-a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-sa} \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 13.7

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{t}\delta(t-b)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-s+1)t}\delta(t-b)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{(-s+1)b} \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 13.8

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{H(t-a)\right\} &= \int_0^{\infty} H(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

Agora, é óbvio que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}\right\} = H(t-1) - H(t-2) \blacksquare$$

Exercício 13.9
a)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} &= \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-a}; \\ \mathscr{L}\{\delta(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\mathrm{e}^{-as}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-as}\int_{0_-}^{\infty} H(t-a)f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) \\ &= \mathrm{e}^{-as}\int_{a}^{\infty} f(t-a)\mathrm{e}^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) \\ &= \mathrm{e}^{-as}\int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.\end{aligned}$$

c)

$$s\overline{x} - x(0_-) + \frac{1}{T}\overline{x} = 1$$

$$\overline{x}\left(s+\frac{1}{T}\right)=1$$
$$\overline{x}=\frac{1}{s-\frac{-1}{T}}=\mathscr{L}\{H(t)\mathrm{e}^{-t/T}\}\Rightarrow$$
$$x(t)=H(t)\mathrm{e}^{-t/T}.$$

Exercício 13.10

$$\int_0^a \frac{t}{a}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t+\int_a^{2a}\left(2-\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-as}(\mathrm{e}^{as}-as-1)}{as^2}+\frac{\mathrm{e}^{-2as}(as\mathrm{e}^{as}-\mathrm{e}^{as}+1)}{as^2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-2as}(\mathrm{e}^{as}-1)^2}{as^2}\ \blacksquare$$

Exercício 13.11
A transformada da $\delta(t)$ é

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=\int_0^\infty \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=1.$$

A transformada da equação diferencial inteira é

$$\begin{aligned}3\left[s^2\overline{y}-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\overline{y}-y(0)\right]-3\overline{y}&=1,\\ 3(s^2\overline{y}-s)+2(s\overline{y}-1)-3\overline{y}&=1,\\ 3s^2\overline{y}-3s+2s\overline{y}-2-3\overline{y}&=1,\\ (3s^2+2s-3)\overline{y}-3s-2&=1,\\ (3s^2+2s-3)\overline{y}&=3+3s,\\ \overline{y}&=\frac{3(s+1)}{3s^2+2s-3},\end{aligned}$$

ou

$$y(t)=\frac{2}{\sqrt{10}}\mathrm{e}^{-t/3}\operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right)+\mathrm{e}^{-t/3}\cosh\left(\frac{\sqrt{10}t}{3}\right)$$
$$=\frac{\left(\left(\sqrt{10}+2\right)\mathrm{e}^{\frac{2\sqrt{10}t}{3}}+\sqrt{10}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{10}t}{3}-\frac{t}{3}}}{2\sqrt{10}}\ \blacksquare$$

Exercício 13.12
Por causa da delta, uso como condição inicial $t=0_-$. Vou precisar de

$$\mathscr{L}\{\frac{d^2x}{dt^2}\}=s^2\overline{x}-sx(0_-)-x'(0_-),$$
$$\mathscr{L}\{\frac{dx}{dt}\}=s\overline{x}-x(0_-),$$
$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1.$$

Agora, aplicando as transformadas de Laplace acima à equação diferencial,

$$\begin{aligned}s^2\overline{x}-1-3s\overline{x}+2\overline{x}&=1,\\ \overline{x}\left[s^2-3s+2\right]&=2,\\ \overline{x}(s)&=\frac{2}{s^2-3s+2}=\frac{2}{s-2}-\frac{2}{s-1}.\end{aligned}$$

Invertendo,

$$x(t)=2H(t)\left[\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}\right]\ \blacksquare$$

Exercício 13.13
A velocidade inicial em $t = 0_-$ é zero:

$$\int_{\tau=0_-}^{t} m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = I\int_{\tau=0_-}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(t) - m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(0_-) = IH(t)$$
$$mv(t) = IH(t) \Rightarrow v(t) = (I/m)H(t) \blacksquare$$

Exercício 13.14
Com a delta de Dirac, a solução é quase trivial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y_1}{T^2}t + \delta(t)y(t),$$
$$\int_{0_-}^{t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_{0_-}^{t} \frac{y_1}{T^2}\tau\,\mathrm{d}\tau + \int_{0_-}^{t} \delta(\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$
$$y(t) - y(0) = \frac{1}{2}\frac{t^2}{T^2}y_1 + y(0),$$
$$y(t) = y_0 + \frac{t^2}{2T^2}y_1 \blacksquare$$

Exercício 13.15
A transformada de Laplace da equação diferencial é

$$s\overline{c} + U\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} + K\overline{c} = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} + \frac{s+K}{U}\overline{c} = 0.$$

A condição inicial desta equação é obtida por meio de

$$\overline{c}(0,s) = \int_{t=0}^{\infty} c(0,t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{c_0}{s}.$$

A solução da equação diferencial é

$$\overline{c}(x,s) = c_0\frac{\exp\left(-x(K+s)/U\right)}{s} = c_0\exp\left(-Kx/U\right)\frac{\exp\left(-xs/U\right)}{s}$$

e portanto é imediato que

$$c(x,t) = c_0\exp\left(-Kx/U\right)H\left(t - \frac{x}{U}\right) \blacksquare$$

Exercício 13.16

$$s\overline{c} - c(x,0) + U\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} = -\frac{2K}{s^3},$$
$$\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} + \frac{s}{U}\overline{c} = -\frac{2Ks}{Us^4},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\overline{c} + \frac{2K}{Us^4}\right] + \frac{s}{U}\left[\overline{c} + \frac{2K}{Us^4}\right] = 0,$$

$$\overline{c} + \frac{2K}{Us^4} = A(s)\exp\left(-\frac{sx}{U}\right).$$

Em $x = 0$, $\overline{c}(0,s) = c_0/s$; portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{c_0}{s} + \frac{2K}{Us^4} &= A(s),\\
\overline{c}(x,s) &= -\frac{2K}{Us^4} + \left[\frac{c_0}{s} + \frac{2K}{Us^4}\right]\exp\left(-\frac{sx}{U}\right),\\
c(x,t) &= -\frac{K}{3U}t^3 + H\left(t - \frac{x}{U}\right)\left[c_0 + \frac{K}{3U}\left(t - \frac{x}{U}\right)^3\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 13.17
a) Usando a definição:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\int_{0_-}^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\left[f(+\infty) - f(0)\right]\\
&= f(0) \blacksquare
\end{aligned}$$

b) $\phi'(x)$ tem o mesmo efeito que a delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Portanto, $\phi'(x) = \delta(x)$, e $\phi(x) = H(x)$ (a função de Heaviside).

Exercício 13.18
(a)

$$w(x) = A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x - 3L/2) + B\delta(x - 2L).$$

Para resolver (b), (c) e (d), será preciso calcular integrais do tipo $\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi$; de maneira geral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f(\xi)H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{a}^{x} f(\xi)H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi\\
&= H(x-a)\int_{a}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= H(x-a)\left[F(x) - F(a)\right],
\end{aligned}$$

onde $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.
(b) A primeira equação é

$$\int_{0_-}^{2L_+} w(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left\{A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x - 3L/2) + B\delta(x - 2L)\right\}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$A - w_0\left[2L - L\right] - w_0L + B = 0,$$

ou

$$A + B = 2w_0L.$$

A segunda equação é

$$\int_{0_-}^{2L_+} xw(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} x\left\{A\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right\}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$-w_0\left[\frac{(2L)^2}{2}H(2L) - \frac{1}{2}((2L)^2 - L^2)H(2L-L)\right] - w_0L\frac{3L}{2} + 2LB = 0,$$

$$-\frac{w_0L^2}{2} - w_0L\frac{3L}{2} + B(2L) = 0,$$

$$-2w_0L^2 + 2LB = 0.$$

Portanto,

$$B = w_0L,$$
$$A = w_0L.$$

(c) A equação para $w(x)$ agora é

$$\begin{aligned}
w(x) &= w_0L\delta(x) - w_0\left[H(x) - H(x-L)\right] - w_0L\delta(x-3L/2) + w_0L\delta(x-2L),\\
V(x) &= \int_{-\infty}^{x} w(x)\,dx\\
&= w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi - w_0\int_{-\infty}^{x}\left[H(\xi) - H(\xi-L)\right]\,\mathrm{d}\xi\\
&- w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-3L/2)\,\mathrm{d}\xi + w_0L\int_{-\infty}^{x}\delta(\xi-2L)\,\mathrm{d}\xi\\
&= w_0LH(x) - w_0\left[xH(x) - (x-L)H(x-L)\right]\\
&- w_0LH(x-3L/2) + w_0LH(x-2L).
\end{aligned}$$

(d) Integrando agora $V(\xi)$ para obter $M(x)$, encontra-se:

$$\begin{aligned}
M(x) = w_0LxH(x) - w_0\left[\frac{x^2}{2}H(x) - \frac{(x-L)^2}{2}H(x-L)\right]\\
- w_0L(x-3L/2)H(x-3L/2) + w_0L(x-2L)H(x-2L) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

A figura abaixo mostra os diagramas de esforços.

Exercício 13.19

a)

$$w(x) = P\delta(x) - \frac{2P}{L}\left[H(x) - H(x - L/2)\right] - P\delta(x - 3L/4) + P\delta(x - L).$$

b)

$$V(x) = \int^{x} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Vamos fazer, com cuidado, a única integral que importa!

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = 0 \qquad \text{quando} \qquad x < a;\\
&\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = \int_{a}^{x} \mathrm{d}\xi\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = (x - a) \qquad \text{quando} \qquad x \geq a;
\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = H(x - a)(x - a).$$

Com isso, a integração de $w(x)$ é imediata:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_{-\infty}^{x} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{-\infty}^{x} \left[P\delta(\xi) - \frac{2P}{L}\left[H(\xi) - H(\xi - L/2)\right] - P\delta(\xi - 3L/4) + P\delta(\xi - L)\right]\mathrm{d}\xi\\
&= PH(x) - \frac{2P}{L}\left[H(x)x - H(x - L/2)(x - L/2)\right]\\
&\quad - PH(x - 3L/4) + PH(x - L) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 13.20

a)

$$w(x) = A\delta(x) - \frac{P}{L}\left[H(x - L) - H(x - 2L)\right] - P\delta(x - 3L/2) + B\delta(x - 2L).$$

b.1)

$$\int_{0_-}^{2L_+} w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left[A\delta(x) - \frac{P}{L}\left[H(x - L) - H(x - 2L)\right] - P\delta(x - 3L/2) + B\delta(x - 2L)\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Mas, para $a < c < b$:

$$\int_{a}^{b} H(x - c)\mathrm{d}x = \int_{c}^{b} \mathrm{d}x = (b - c);$$

então,

$$A - \frac{P}{L}\left[(2L - L) + (2L - 2L)\right] - P + B = 0,$$

$$A + B = 2P.$$

b.2)

$$\int_{0_-}^{2L_+} xw(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{0_-}^{2L_+} \left[Ax\delta(x) - \frac{P}{L}\left[xH(x-L) - xH(x-2L)\right]\right.$$
$$\left. -P\delta(x-3L/2) + B\delta(x-2L)\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Mas, para $a < c < b$:

$$\int_a^b x\delta(x-c)\,\mathrm{d}x = c;$$
$$\int_a^b xH(x-c)\mathrm{d}x = \int_c^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - c^2);$$

então,

$$-\frac{P}{L}\left[\frac{1}{2}\left((2L)^2 - L^2\right) + \frac{1}{2}\left((2L)^2 - (2L)^2\right)\right] - P\frac{3L}{2} + B2L = 0$$
$$-\frac{3}{2}PL - \frac{3}{2}PL + 2BL = 0,$$
$$2B = 3P,$$
$$B = \frac{3P}{2},$$
$$A = \frac{P}{2} \blacksquare$$

Capítulo 14

Exercício 14.2

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Cou*(u[old,1:nx] - u[old,0:nx-1])
```

Exercício 14.4

Cada modo de Fourier do erro de arredondamento evolui segundo

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} &= 2\left[1 - \mathrm{Co}^2\right]\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} \\
&+ \mathrm{Co}^2\left[\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i+\Delta x)} + \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i-\Delta x)}\right] \\
&- \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n-\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}; \\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 2\left[1 - \mathrm{Co}^2\right] + \mathrm{Co}^2\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right] - \mathrm{e}^{-a\Delta t}.
\end{aligned}$$

Façamos

$$\begin{aligned}
\theta &= k_l\Delta x; \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x} &= 2\cos(\theta); \\
f &= \mathrm{e}^{a\Delta t},
\end{aligned}$$

e lembremo-nos de que, para que o esquema seja estável, devemos ter $|f| < 1$. Segue-se que

$$\begin{aligned} f + \frac{1}{f} &= 2(1 - \mathrm{Co}^2) + 2\cos(\theta)\mathrm{Co}^2 \\ &= 2\left[1 + (\cos(\theta) - 1)\,\mathrm{Co}^2\right]. \end{aligned}$$

Claramente, o termo entre parênteses acima varia entre -2 e 0; façamos

$$\alpha = 1 - \cos(\theta); \qquad 0 < \alpha < 2;$$

então,

$$\begin{aligned} f + \frac{1}{f} &= 2[1 - \alpha\mathrm{Co}^2]; \\ f^2 - 2[1 - \alpha\mathrm{Co}^2]f + 1 &= 0; \\ f &= \frac{1}{2}\left[2[1 - \alpha\mathrm{Co}^2] \pm \sqrt{4[1 - \alpha\mathrm{Co}^2]^2 - 4}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2[1 - \alpha\mathrm{Co}^2] \pm 2\sqrt{[1 - \alpha\mathrm{Co}^2]^2 - 1}\right] \\ &= 1 - \alpha\mathrm{Co}^2 \pm \sqrt{[1 - \alpha\mathrm{Co}^2]^2 - 1}. \end{aligned}$$

Neste ponto, a rigor, seria necessário varrer a região $0 < \alpha < 2 \times \mathrm{Co} > 0$ e buscar os subconjuntos para os quais $|f| < 1$. Talvez seja mais frutífero, entretanto, trabalhar por partes. Inicialmente, notamos que $\alpha = 0$ produz o resultado inconclusivo $f = 1$. Façamos portanto, tentativamente, $\alpha = 2$. Neste caso, se

$$2\mathrm{Co}^2 > 2 \Rightarrow \mathrm{Co} > 1,$$

o radical acima é *positivo*; $f \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} f &= 1 - 2\mathrm{Co}^2 \pm \sqrt{-4\mathrm{Co}^2 + 4\mathrm{Co}^4} \\ &= 1 + 2\left[-\mathrm{Co}^2 \pm \sqrt{\mathrm{Co}^2(\mathrm{Co}^2 - 1)}\right]. \end{aligned}$$

Para o sinal de menos na frente do radical acima, se $\mathrm{Co} > 1$ teremos $f < 0$ e $|f| > 1$, e o esquema será instável. Por outro lado, se $\mathrm{Co} < 1$, o radical acima é *negativo*, e $f \in \mathbb{C}$ com

$$f = (1 - 2\mathrm{Co}^2) \pm 2\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{Co}^2 - \mathrm{Co}^4}$$

Este último tem módulo ao quadrado igual a

$$|f|^2 = 1 - 4\mathrm{Co}^2 + 4\mathrm{Co}^4 + 4\mathrm{Co}^2 - 4\mathrm{Co}^4 = 1.$$

Mesmo para $\mathrm{Co} < 1$, portanto, $|f| = 1$; o resultado é indecidível, e é preferível ser conservador e considerar o esquema instável.

Exercício 14.5

A equação é linear. O esquema é explícito, e temos

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= [1 + \mathrm{Co}]\,u_i^n - \mathrm{Co}u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Substituindo um modo do erro de arredondamento

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l e^{at} e^{ik_l x_i}$$

no esquema de diferenças,

$$\begin{aligned}
\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{ik_l i\Delta x} &= [1+\mathrm{Co}]\, \xi_l e^{at_n} e^{ik_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\xi_l e^{at_n} e^{ik_l(i+1)\Delta x}, \\
e^{a\Delta t} &= [1+\mathrm{Co}] - \mathrm{Co} e^{ik_l\Delta x}.
\end{aligned}$$

Faça

$$\theta = k_l \Delta x.$$

Então,

$$\begin{aligned}
e^{a\Delta t} &= [1+\mathrm{Co}] - \mathrm{Co}[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)] \\
&= [1+\mathrm{Co}(1-\cos(\theta))] - i\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(\theta); \\
\left|e^{a\Delta t}\right|^2 &= \left[1 + 2\mathrm{Co}(1-\cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1-\cos(\theta))^2\right] + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1-\cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1-\cos(\theta)) - 2\cos(\theta)\mathrm{Co}^2 + 2\mathrm{Co}^2 \\
&= 1 + 2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2 - \cos(\theta)\left[2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2\right] \\
&= 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1-\cos(\theta)].
\end{aligned}$$

Desejamos

$$\begin{aligned}
\left|e^{a\Delta t}\right|^2 = 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1-\cos(\theta)] &\leq 1; \\
2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1-\cos(\theta)] &\leq 0.
\end{aligned}$$

Isso é impossível: $[1-\cos(\theta)] \geq 0$ sempre, assim como $\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]$. O esquema é, portanto, incondicionalmente instável ■

Exercício 14.6

$$\begin{aligned}
u_{i-1} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3), \\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \frac{(2\Delta x)^2}{2} + O(\Delta x^3).
\end{aligned}$$

Para eliminar $\partial^2 u/\partial x^2$, multiplicamos a primeira equação acima por 4, e subtraímos:

$$\begin{aligned}
4u_{i-1} &= 4u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 4\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + O(\Delta x^3), \\
u_{i-2} &= u_i - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i 2\Delta x + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i 2\Delta x^2 + O(\Delta x^3), \\
4u_{i-1} - u_{i-2} &= 3u_i - 2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^3); \\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i &= \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \;■
\end{aligned}$$

Exercício 14.7

Escrevemos o esquema em termos do número de Courant como:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}[3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n];$$
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n].$$

Cada modo de Fourier do erro de arredondamento obedece à mesma equação:

$$\begin{aligned}\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} \\ &\quad - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - 4\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x} + \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-2)\Delta x}]; \\ \mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}[3 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_l\Delta x}]\end{aligned}$$

Agora calculamos o quadrado do módulo do fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$. Utilizamos as variáveis auxiliares

$$\theta = k_l\Delta x,$$
$$A = \frac{\mathrm{Co}}{2}[3 - 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}]$$

e calculamos

$$\begin{aligned}|\mathrm{e}^{a\Delta t}|^2 &= (1 - A^*)(1 - A) \\ &= 1 - A^* - A + A^*A.\end{aligned}$$

A última linha acima pode ser calculada com o auxílio de Maxima:

Listagem C.8: Cálculo de $1 - A^* - A + A^*A$ com Maxima

```
(%i1) linel : 70;
(%o1)                                70
(%i2) A : (Co/2)*(3 - 4*exp(-%i*tet) + exp(-2*%i*tet));
                                - %i tet      - 2 %i tet
                 Co ((- 4 %e         ) + %e            + 3)
(%o2)            ----------------------------------------
                                     2
(%i3) (1 - conjugate(A))*(1 - A);
                           - %i tet      - 2 %i tet
              Co ((- 4 %e         ) + %e            + 3)
(%o3) (1 - ----------------------------------------)
                                 2
                                                 2 %i tet        %i tet
                                        Co (%e          - 4 %e        + 3)
                                   (1 - ---------------------------------)
                                                              2
(%i4) expand(%);
            2   2 %i tet         2 %i tet
        3 Co  %e            Co %e                2   %i tet
(%o4) ---------------- - ------------- - 4 Co  %e
               4                   2
            %i tet        2   - %i tet           - %i tet
 + 2 Co %e        - 4 Co  %e          + 2 Co %e
         2   - 2 %i tet         - 2 %i tet         2
    3 Co  %e              Co %e              13 Co
 + ------------------ - ---------------- + ------ - 3 Co + 1
             4                    2             2
(%i5) C : %;
            2   2 %i tet         2 %i tet
        3 Co  %e            Co %e                2   %i tet
(%o5) ---------------- - ------------- - 4 Co  %e
```

```
                4                   2
            %i tet        2   - %i tet           - %i tet
 + 2 Co %e        - 4 Co  %e          + 2 Co %e
        2   - 2 %i tet         - 2 %i tet         2
   3 Co  %e              Co %e               13 Co
 + ------------------ - --------------- + ------ - 3 Co + 1
            4                   2             2
(%i6) imagpart(C);
(%o6)                              0
(%i7) realpart(C);
            2
       3 Co  cos(2 tet)                        2
(%o7) ---------------- - Co cos(2 tet) - 8 Co  cos(tet)
              2
                                                                  2
                                                           13 Co
                                     + 4 Co cos(tet) + ------ - 3 Co + 1
                                                             2
```

Para que o esquema seja estável, impomos

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{a\Delta t}|^2 = {} & \frac{3\mathrm{Co}^2\cos(2\theta)}{2} - \mathrm{Co}\cos(2\theta) - 8\mathrm{Co}^2\cos(\theta) + 4\mathrm{Co}\cos(\theta) \\
& + \frac{13\mathrm{Co}^2}{2} - 3\mathrm{Co} + 1 \leq 1,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\frac{3\mathrm{Co}^2\cos(2\theta)}{2} - \mathrm{Co}\cos(2\theta) - 8\mathrm{Co}^2\cos(\theta) + 4\mathrm{Co}\cos(\theta) + \frac{13\mathrm{Co}^2}{2} - 3\mathrm{Co} \leq 0; \\
\frac{3\mathrm{Co}\cos(2\theta)}{2} - \cos(2\theta) - 8\mathrm{Co}\cos(\theta) + 4\cos(\theta) + \frac{13\mathrm{Co}}{2} - 3 \leq 0; \\
\mathrm{Co}\left[\frac{3\cos(2\theta)}{2} - 8\cos(\theta) + \frac{13}{2}\right] + [-\cos(2\theta) + 4\cos(\theta) - 3] \leq 0,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{3\cos(2\theta)}{2} - 8\cos(\theta) + \frac{13}{2}, \\
\mathscr{B} &= -\cos(2\theta) + 4\cos(\theta) - 3, \\
\mathscr{A}(\theta)\mathrm{Co} + \mathscr{B}(\theta) &\leq 0, \\
\mathrm{Co} &\leq \min_{\theta} f(\theta) \equiv -\frac{\mathscr{B}(\theta)}{\mathscr{A}(\theta)}.
\end{aligned}
$$

Claramente, o período de $f(\theta)$ é 2π; o seu gráfico é mostrado na figura C.10. Como podemos ver, $f(\theta) \geq 0$, e agora $0 \leq \mathrm{Co} \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Co} = 0$, de forma que o esquema é incondicionalmente instável ■

Exercício 14.8

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} &\approx \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} \\
&= \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{0.04} \\
&= \frac{100}{4}\left(\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Com as condições de contorno, a 1ª e a última linha modificam-se para

$$
25\left(1 - 2\phi_i + \phi_{i+1}\right) = 0,
$$

Figura C.10: Função $f(\theta)$, Exercício 14.7

.

$$25\,(\phi_{i-1} - 2\phi_i + 5) = 0.$$

É fácil agora montar o sistema final:

$$\begin{bmatrix} -50 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & -50 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & -50 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -50 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -125 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício 14.9

Se $N_x = 8$, o contorno está em $i = 0$ e em $i = 8$. O esquema de diferenças finitas é simples:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= \mathrm{Fo}\left[u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right], \\ -\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} &= u_i^n, \end{aligned}$$

e esta última equação formará o grosso das linhas da matriz do sistema. Como sempre, é preciso levar em consideração as condições de contorno discretizadas. Elas são (para qualquer n)

$$\begin{aligned} u_0 &= c, \\ \frac{u_{N_x} - u_{N_x-1}}{\Delta x} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_{N_x} = u_{N_x-1} \\ u_8 &= u_7 \end{aligned}$$

Portanto, a 1ª linha será

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}c + (1 + 2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n, \\ (1 + 2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n + \mathrm{Fo}c; \end{aligned}$$

a última linha será

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + 2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1 + \mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n, \end{aligned}$$

$$-\mathrm{Fo}u_6^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_7^{n+1} = u_7^n.$$

A matriz do sistema será

$$\begin{bmatrix} 1+2\mathrm{Fo} & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+\mathrm{Fo}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \\ u_6^{n+1} \\ u_7^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n + \mathrm{Fo}c \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \\ u_6^n \\ u_7^n \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exercício 14.10

1º caso:

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}\phi_0 + (1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n, \\ (1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n + \mathrm{Fo}\phi_0. \end{aligned}$$

2º caso:

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_N^{n+1} &= \phi_{N-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 14.11

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} &= D\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - k\phi_i^n \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{D\delta t}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) - (k\Delta t)\phi_i^{n+1} \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \mathrm{Fo}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) - \mathrm{Kt}\phi_i^{n+1} \\ \phi_i^{n+1} - \mathrm{Fo}\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^{n+1}\right) + \mathrm{Kt}\phi_i^{n+1} &= \phi_i^n \\ -\mathrm{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo}+\mathrm{Kt})\phi_i^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} &= \phi_i^n \quad \Rightarrow \\ A &= -\mathrm{Fo}, \\ B &= (1+2\mathrm{Fo}+\mathrm{Kt}), \\ C &= -\mathrm{Fo} \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 14.12

$$\begin{aligned} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} &= \frac{h_i^n \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x} - h_i^n \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} &= h_i^n \frac{h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 14.13

a)

$$\frac{\phi_i^{n+1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

b) Por exemplo,

```
def troca(x) :
    m = x[0]
    n = x[1]
    p = x[2]
    return(n,p,m)
(m,n,p) = (0,1,2)
(m,n,p) = troca((m,n,p))
print (m,n,p)
(m,n,p) = troca((m,n,p))
print (m,n,p)
```

Mas até mesmo isto funciona:

```
(m,n,p)=(0,1,2)
(m,n,p)=(n,p,m)
print (m,n,p)
(m,n,p)=(n,p,m)
print (m,n,p)
```

Capítulo 15

Exercício 15.1
Verificação item a item:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k^*)^* (x_k y_k^*)^* \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(x_k y_k^*)(x_k y_k^*)]^* \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (y_k^* x_k)(y_k^* x_k) \right]^* \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^* ; \qquad \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (x_k^* [y_k + z_k])(x_k^* [y_k + z_k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[(x_k^* y_k) + (x_k^* z_k) \right] \left[(x_k^* y_k) + (x_k^* z_k) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[(x_k^* y_k)(x_k^* y_k) + 2(x_k^* y_k)(x_k^* z_k) + (x_k^* z_k)(x_k z_k) \right] \\
&\neq \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k) + \sum_{k=1}^{n} (x_k^* z_k)(x_k^* z_k) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle . \qquad \times
\end{aligned}
$$

Portanto, a operação definida acima, apesar da notação $\langle \cdot , \cdot \rangle$, não é um produto interno legítimo.

Exercício 15.2
a) De fato,

$$M_{i,j} = \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle = [\left\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \right\rangle]^* = M_{j,i}^* .$$

b)

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_j y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, y_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_j y_j \left\langle \boldsymbol{e}_j, \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i \right\rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i \left\langle \boldsymbol{e}_j, x_i \boldsymbol{e}_i \right\rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i x_i^* \left\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i \right\rangle^* \\
&= \sum_j y_j \sum_i x_i^* \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\
&= \sum_i \sum_j x_i^* \left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \right\rangle y_j \\
&= \sum_i \sum_j x_i^* M_{i,j} y_j \\
&= [x^*]^T [M] [y] \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 15.3

$$
\begin{aligned}
\left\langle x, x^2 \right\rangle &= \int_1^2 x^3 \ln(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \underbrace{\ln(x)}_{u} \underbrace{x^3 \, \mathrm{d}x}_{dv} \\
&= \left. \frac{x^4 \ln(x)}{4} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{16}{4} \ln 2 - \left. \frac{1}{16} x^4 \right|_1^2 \\
&= 4 \ln 2 - \frac{1}{16} [16 - 1] \\
&= 4 \ln 2 - 15/16 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 15.4

a)

$$
\begin{aligned}
\langle f | f \rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x) f(x) w(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-L/2}^{+L/2} |f(x)|^2 w(x) \, \mathrm{d}x \geq 0,
\end{aligned}
$$

pois $w(x) \geq 0$ em $-L/2 \leq x \leq +L/2$.
b)

$$\begin{aligned}\langle f|g\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-L/2}^{+L/2} [f(x)g^*(x)w(x)]^*\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(Note que $w(x) \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}&= \left[\int_{-L/2}^{+L/2} g^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right]^* \\ &= \langle g|f\rangle^* .\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle f|g+h\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)[g(x)+h(x)]w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle .\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\langle f|\alpha g\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)[\alpha g(x)]w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_{-L/2}^{+L/2} f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\,\langle f|g\rangle \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 15.5
É necessário verificar se $\langle e_m(x)|e_n(x)\rangle = 0$ para $m \neq n$:

$$\begin{aligned}\langle e_m(x)|e_n(x)\rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi mx}{L}}\mathrm{e}^{+i\frac{2\pi nx}{L}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}}}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{+L/2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi mx}{L}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{2\pi nx}{L}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi mx}{L}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{2\pi nx}{L}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi x}{L}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-L/2}^{+L/2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}[(n-m)+1/2]x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}[(n-m)-1/2]x}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{L}{2\pi\mathrm{i}[(n-m)+1/2]}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}[(n-m)+1/2]x}}{2}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2} \\ &+ \frac{L}{2\pi\mathrm{i}[(n-m)-1/2]}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}[(n-m)-1/2]x}}{2}\Bigg|_{-L/2}^{+L/2}.\end{aligned}$$

Neste ponto, meramente por conveniência, use a máxima de Jacques Chambriard: *simplifique* a álbegra, concentrando-se no essencial. Faça

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi\,[(n-m)+1/2]\,; \\ \beta &= \pi\,[(n-m)-1/2]\,.\end{aligned}$$

O produto interno torna-se mais palatável:

$$\begin{aligned}\langle e_m(x)|e_n(x)\rangle &= \frac{L}{\mathrm{i}2\alpha}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha x/L}}{2}\bigg|_{-L/2}^{L/2} + \frac{L}{\mathrm{i}2\beta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta x/L}}{2}\bigg|_{-L/2}^{L/2}\\ &= \frac{L}{\mathrm{i}2\alpha}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2} + \frac{L}{\mathrm{i}2\beta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}{2}\\ &= \frac{L}{2\alpha}\operatorname{sen}\alpha + \frac{L}{2\beta}\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Agora, a ameixa no pudim: observe que α e β correspondem a um número inteiro $(n-m)$ de meias-voltas no círculo trigonométrico, $\pm$ 1/4 de volta. Portanto, $|\operatorname{sen}\alpha| = |\operatorname{sen}\beta| = 1$, mas $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$, sempre. Segue-se que

$$\langle e_m(x)|e_n(x)\rangle = \frac{L\operatorname{sen}\alpha}{2}\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right] \neq 0 \qquad \textit{sempre,}$$

e o conjunto dos $e_n(x)$ *não* é ortogonal para este produto interno ■

Exercício 15.6

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i\times 1)\right|^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}1^2\right),\\ 1 &\leq n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right),\\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2 &\geq \frac{1}{n}\ ■\end{aligned}$$

Exercício 15.7
A desigualdade de Cauchy-Schwarz é

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$$

Admitindo-se que f e g sejam reais e integráveis de $-\infty$ a $+\infty$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz fica

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x)]^2\,\mathrm{d}x}\ .$$

Agora basta escolher

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1+|x|},\\ g(x) &= \sqrt{e^{-|x|}}\ :\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-|x|}}}{1+|x|}\,\mathrm{d}x &\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{1+|x|}\right]^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x}\\ &= \sqrt{4\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}\\ &= 2\ ■\end{aligned}$$

Exercício 15.8

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi x}{L}},$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x = \int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-L/2}^{+L/2} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(n-m)\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x$$

As exp*s* são ortogonais:

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(n-m)\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x &= \frac{L}{2\mathrm{i}(n-m)\pi}\int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(n-m)\pi x}{L}}\,\frac{2\mathrm{i}(n-m)\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{L}{2\mathrm{i}(n-m)\pi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-m)\pi}\right] = 0, \qquad n \neq m.\end{aligned}$$

Para $n = m$, a integral é muito simples:

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \mathrm{d}x = L.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+L/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}}\,\mathrm{d}x &= c_m L, \\ -\frac{L}{2\mathrm{i}m\pi}\int_{0}^{+L/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}}\,\frac{2\mathrm{i}m\pi x}{L}\,\mathrm{d}x &= c_m L, \\ -\frac{L}{2\mathrm{i}m\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi} - 1\right] &= c_m L, \\ -\frac{1}{2\mathrm{i}m\pi}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\pi} - 1\right] &= c_m.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\mathrm{i}n\pi}\left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}\right]\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi x}{L}} \quad \blacksquare$$

Exercício 15.9

A resposta curta é: a série de Fourier de 1 é 1! A resposta um pouco mais longa é: a série de Fourier é

$$f(x) = 1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx\right].$$

Compare: como 1 é par e os senos são ímpares, $B_n = 0, \forall n$; A_0 é necessariamente igual a 2, e todos os outros $A_n s$ são nulos:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \forall n > 0.$$

Fim da questão ■

Exercício 15.10

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right],\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi,\\
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo no cálculo dos coeficientes,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},\\
A_n &= \int_0^1 \xi\cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi = \frac{\cos(n\pi)-1}{\pi^2 n^2},\\
B_n &= \int_0^1 \xi\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 15.11

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n t}{T}}\\
\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} F(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n t}{T}}\\
\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n t}{T}}\\
\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} F(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n t}{T}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Neste ponto, note que

$$
\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n t}{T}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ T, & m = n. \end{cases}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}} F(t)\,\mathrm{d}t &= c_m T,\\
F_0 \int_0^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}}\,\mathrm{d}t &= c_m T\\
\frac{-F_0}{2\pi \mathrm{i} m}\int_0^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{T}}\,\frac{-2\pi \mathrm{i} m}{T} dt &= c_m\\
\frac{F_0}{2\pi \mathrm{i} m}\left[1-\exp(-\pi \mathrm{i} m)\right] &= c_m\\
\frac{F_0}{2\pi \mathrm{i} m}\left[1-(-1)^m\right] &= c_m,\ m \neq 0;
\end{aligned}
$$

ainda é preciso calcular o caso $m = 0$ em separado:

$$\begin{aligned} F_0 \int_0^{T/2} dt &= c_0 T, \\ F_0 \frac{T}{2} &= c_0 T, \\ \frac{F_0}{2} &= c_0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 15.12

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-1}^{+1} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1 \mathrm{d}x = 1; \\ A_n &= \int_{-1}^{+1} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \cos(\pi n x)\, \mathrm{d}x = 0, \qquad n > 0; \\ B_n &= \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi n x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right] \operatorname{sen}(n\pi x) \ \blacksquare$$

Exercício 15.13

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \\ c_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x, \\ c_n &= \frac{1 - 1/\mathrm{e}}{2\pi i n + 1} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 15.14

A extensão par de $\operatorname{sen}(x)$ é uma função par $f_p(x)$ entre $-\pi$ e $+\pi$; ela possui apenas coeficientes em $\cos \frac{2n\pi x}{2\pi} = \cos(nx)$

Os coeficientes de Fourier são

$$A_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f_p(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(1+n)x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(1-n)x\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{1+n}-1}{1+n} + \frac{(-1)^{1-n}-1}{1-n}\right] \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}.
\end{aligned}
$$

O caso $n = 1$ precisa ser verificado separadamente; ele dá

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

além disso, claramente, $A_n = 0$ quando $n > 1$ for ímpar; portanto,

$$A_{2n} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

e

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(2nx) \ \blacksquare$$

Exercício 15.15

Existem diversas formas de atacar o problema. Uma que não requer praticamente nenhuma memorização é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{1}\right) \qquad \text{(ou seja: } \ell = 1) \\
x^2 \operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)
\end{aligned}
$$

Se ℓ estiver certo, as funcões são ortogonais:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x = 0, && m \neq n, \\
&\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, && m = n.
\end{aligned}
$$

(OK). Portanto, integre:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \frac{B_m}{2} \\
\frac{\left(\pi^2 m^2 - 2\right)\,(-1)^m}{\pi^3 m^3} - \frac{2}{\pi^3 m^3} &= \frac{B_m}{2} \\
B_m &= \frac{2\left(\pi^2 m^2 - 2\right)\,(-1)^m}{\pi^3 m^3} - \frac{4}{\pi^3 m^3} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 15.16
A extensão ímpar é

$$f_I(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ -1, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

No intervalo $[-1, 1]$, com comprimento $L = 2$, uma base para as funções ímpares é formada pelo conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Segue-se o de sempre:

$$\begin{aligned} f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x, \\ f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x, \\ \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-1}^{1} \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x \\ 2 \int_{0}^{1} \operatorname{sen} m\pi x \, \mathrm{d}x &= B_m \int_{-1}^{1} [\operatorname{sen} m\pi x]^2 \, \mathrm{d}x \\ \frac{2}{\pi m} [1 - (-1)^m] &= B_m \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 15.17
Desejamos

$$f_I(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L} \right],$$

onde $L = 2$; além disso, já sabemos que $A_n = 0$. O cálculo dos B_ns é

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{2} \int_{0}^{1} f(x) \operatorname{sen}(\pi n x) \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen}(\pi n x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Com Maxima,

$$B_n = -\frac{2\,\mathrm{e}^{-1}\,\pi\,n\,\left((-1)^n - \mathrm{e}\right)}{\pi^2\,n^2 + 1} \blacksquare$$

Exercício 15.18
A série de Fourier da *extensão ímpar* $f_I(x)$ de $f(x)$ contém apenas senos:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L}$$

Como f está definida entre 0 e 1, f_I estará definida entre -1 e 1, donde $L = 2$. Teremos

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f_I(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1} f_I(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{1/2} \mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Calculo a integral com Maxima:

```
(%i1) declare( [n],integer) ;
(%o1)                                   done
(%i2) 2*integrate(sin(n*%pi*x),x,0,1/2);
                                                %pi n
                                            cos(-----)
                                   1            2
(%o2)                         2 (----- - ----------)
                                 %pi n      %pi n
(%i3) factor(%);
                                            %pi n
                                 2 (cos(-----) - 1)
                                                2
(%o3)                           - ------------------
                                            %pi n
```

e obtenho

$$
B_n = \frac{2}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) \blacksquare
$$

Exercício 15.19
Como f_I é ímpar, a série de Fourier é simplesmente

$$
\begin{aligned}
f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{\pi}, \\
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f_I(x)\,\mathrm{sen}(2nx)\,\mathrm{d}x, \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{sen}(2nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{8n}{(4n^2-1)\pi} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Veja como se calcula esta integral com Maxima:

```
(%i1) declare([n],integer) ;
(%o1)                                   done
(%i2) f : cos(x)*sin(2*n*x) ;
(%o2)                            cos(x) sin(2 n x)
(%i3) integrate(f,x,0,%pi/2);
                                    1          1
(%o3)                            ------- + -------
                                 4 n + 2   4 n - 2
(%i4) ratsimp(%);
                                    2 n
(%o4)                             --------
                                     2
                                  4 n  - 1
```

Exercício 15.20
Felizmente, nós só precisamos de P_0, P_1 e P_2. Portanto:

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x),
$$

$$f(x)P_m(x) = \sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x) P_m(x),$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = c_m \int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Precisamos calcular cada um dos 3:

$$\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1]\,\mathrm{d}x = c_0 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x;$$
$$\frac{8}{3} = c_0 \times 2;$$
$$c_0 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1]x\,\mathrm{d}x = c_1 \int_{-1}^{+1} x^2\,\mathrm{d}x;$$
$$-\frac{4}{3} = c_1 \frac{2}{3}$$
$$c_1 = -2.$$

$$\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1][3x^2/2 - 1/2]\,\mathrm{d}x = c_2 \int_{-1}^{+1} [3x^2 - 1/2]^2\,\mathrm{d}x;$$
$$\frac{4}{15} = c_2 \frac{2}{5}$$
$$c_2 = \frac{2}{3}.$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{4}{3}P_0(x) - 2P_1(x) + \frac{2}{3}P_2(x) \blacksquare$$

Exercício 15.21

As funções $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ já são ortonormais (sabemos disso, porque o enunciado nos disse). Por tanto, os αs são

$$\alpha_0 = \langle p_0(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_0(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{3/2}}{\pi},$$
$$\alpha_1 = \langle p_1(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_1(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\alpha_2 = \langle p_2(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_2(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2 - 48}{\pi^3}\right].$$

Sabemos que $\alpha_1 = 0$ porque o integrando correspondente, $p_1(x)f(x)$, é o produto de uma função ímpar ($p_1(x)$) por uma par ($f(x)$), que é ímpar, e cuja integral é zero $\blacksquare$

Exercício 15.22

A base é ortogonal; então os valores de α_0, α_1 e α_2 que minimizam a norma são simplesmente coeficientes de Fourier de $h(x)$:

$$\alpha_0 = \langle L_0(x), h(x)\rangle = \int_0^{\infty} 1 \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}(2\mathrm{d}x) = 1/2;\\
\alpha_1 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^{\infty} (1-x)\times \mathrm{e}^{-x}\times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\infty} (1-x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/4;\\
\alpha_2 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(x^2-4x+2)\times \mathrm{e}^{-x}\times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^2-4x+2)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/8 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Capítulo 16

Exercício 16.1
Por definição,

$$
\mathscr{F}\left[f(x-a)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.
$$

Fazendo

$$
\xi = x - a,
$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[f(x-a)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-a)-\mathrm{i}ka}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-ik\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\mathscr{F}[f(x)] \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 16.2
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é quase imediato:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{x=-1}^{x=+1}\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}\right]\\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k)\right]\\
&= \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\
f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k\\
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k
\end{aligned}
$$

$$1 = 2\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k \qquad \text{(pois o integrando é uma função par)}$$
$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\,\mathrm{d}k \ \blacksquare$$

Exercício 16.3
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x|\,[\cos(kx) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x|\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{1} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi k^2}\,[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1]\,.
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\,[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\,[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1]\,\mathrm{d}k \\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\,[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1]\,\mathrm{d}k \\
0 &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\,[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1]\,\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

(pois o integrando é uma função par)

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k + \int_0^{\infty} \frac{\cos(k) - 1}{\pi k^2}\,\mathrm{d}k.$$

Sabemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k} = \frac{\pi}{2};$$

portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(k) - 1}{k^2}\,\mathrm{d}k = -\frac{\pi}{2} \ \blacksquare$$

Exercício 16.4
Note que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ -1 & -1 \le x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & 0 < x \le 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right]$$

Com Maxima:

```
(%i1) i1 : integrate(exp(-%i*k*x),x,-1,0);
                                          %i k
                                   %i   %i %e
(%o1)                              -- - ---------
                                   k         k
(%i2) i2 : integrate(exp(-%i*k*x),x,0,1);
                                       - %i k
                                 %i %e          %i
(%o2)                            ----------- - --
                                      k         k
(%i3) i2 - i1 ;
                              %i k          - %i k
                        %i %e        %i %e           2 %i
(%o3)                   --------- + ----------- - ----
                            k             k          k
```

donde

$$\widehat{f}(k) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} - 2\right] \blacksquare$$

Exercício 16.5

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2} \\
&= \frac{(1+k)\mathrm{e}^{-|k|}}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.6

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_{x=-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}x f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.7

a) A transformada de Fourier de $\delta(x)$ é

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}.$$

b) Mas

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}[\delta(x)] = \mathrm{i}k\widehat{H}(k) \Rightarrow \\
&\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.8
Note que

$$\mathscr{F}^{-1}\left[A\delta(k-k_0)\right] = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x} \Rightarrow \mathscr{F}\left[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}\right] = A\delta(k-k_0).$$

Portanto, a transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}k\widehat{z} + \frac{1}{L}\widehat{z} &= A\delta(k-k_0)\\
\widehat{z}\left(\mathrm{i}k + \frac{1}{L}\right) &= A\delta(k-k_0)\\
\widehat{z} &= \frac{AL}{\mathrm{i}kL+1}\delta(k-k_0) \;\Rightarrow\\
z(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{AL}{\mathrm{i}kL+1}\delta(k-k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,dx\\
&= \frac{AL}{\mathrm{i}k_0L+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.9
a) A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{C}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}ku\widehat{C} &= -a^2k^2\widehat{C}\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{C}}{\mathrm{d}t} + \left(\mathrm{i}ku + a^2k^2\right)\widehat{C} &= 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Note que, de acordo com o enunciado, não era necessário fazer mais nada neste item.
b) A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\begin{aligned}
\widehat{C}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} M\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,dx\\
&= \frac{M}{2\pi} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.10
a) U é a velocidade de advecção, D é um coeficiente de difusão ou dispersão, e β um coeficiente de decaimento.
b) Primeiramente, note que a transformada de Fourier de $\delta(x)$ é 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\delta(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k0} = 1.$$

Em seguida, a condição inicial tem transformada óbvia:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}c(x,0)\,\mathrm{d}x = \widehat{c}(k,0) = 0.$$

A transformada de Fourier da equação diferencial parcial em relação a x é

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + U\mathrm{i}k\widehat{c} = D\mathrm{i}^2k^2\widehat{c} - \beta\widehat{c} + \frac{Q}{A},$$

que pode ser reescrita na forma de uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + (U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)\widehat{c} = \frac{Q}{A},$$
$$\widehat{c}(k,0) = 0.$$

Existem muitas formas de resolver essa equação; talvez uma das mais simples seja "ver" que

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{1}{(U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)}\frac{Q}{A} + f(k,t),$$
$$\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + (U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)f = 0.$$

Esta última é uma equação homogênea, facílima de resolver:

$$f(k,t) = \frac{-1}{(U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)}\frac{Q}{A}\mathrm{e}^{-(U\mathrm{i}k+Dk^2+\beta)t},$$

donde

$$\widehat{c}(k,t) = \frac{Q}{A}\frac{1 - \mathrm{e}^{-(U\mathrm{i}k+Dk^2+\beta)t}}{(U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)}.$$

c) Basta aplicar a fórmula da inversa!

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{c}(k,t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,dk = \frac{Q}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1 - \mathrm{e}^{-(U\mathrm{i}k+Dk^2+\beta)t}}{(U\mathrm{i}k + Dk^2 + \beta)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,dk \blacksquare$$

Exercício 16.11

Inicialmente, calcule a transformada de Fourier das condições iniciais:

$$\widehat{\phi}_0 = \widehat{\phi}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} m\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{2\pi}.$$

Agora, transforme a equação diferencial parcial:

$$b\widehat{\phi} + \frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} = D(\mathrm{i}k)^2\widehat{\phi},$$
$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} + (b + Dk^2)\widehat{\phi} = 0.$$

A solução dessa equação para $\widehat{\phi}$ é trivial:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} = -(b + Dk^2)\mathrm{d}t,$$
$$\ln\frac{\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}_0} = -(b + Dk^2)t,$$
$$\widehat{\phi}(k,t) = \widehat{\phi}(k,0)\mathrm{e}^{-(b+Dk^2)t}$$
$$= \frac{m}{2\pi}\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-Dk^2t}.$$

Agora basta calcular a inversa:

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \frac{m}{2\pi}\mathrm{e}^{-bt}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-Dk^2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{m}{2\pi}\mathrm{e}^{-bt}\sqrt{\frac{\pi}{Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}\\ &= \frac{m\mathrm{e}^{-bt}}{\sqrt{4\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 16.12
(a) é uma conseqüência das propriedades da δ de Dirac, e (b) da propriedade da transformada de Fourier da derivada; de (b):

$$\begin{aligned}\widehat{H}(k) &= \frac{1}{2\pi ik};\\ H(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi ik}e^{ikx}\,dk\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 16.13
Basta substituir x por $x-ct$ e $x-ct-a$ na solução do problema 16.12. Usando também os resultados do exemplo 16.7,

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi ik}\left[1-e^{-iak}\right]e^{-ikct}e^{ikx}\,dk.\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi ik}\left[e^{ik(x-ct)}-e^{ik(x-ct-a)}\right]dk\\ &= H(x-ct)-H(x-ct-a)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Portanto, os problemas 16.12 e 16.13 dão a chave da inversão da transformada de Fourier necessária para a obtenção da solução do exemplo 16.7. A solução é uma simples translação da condição inicial $H(x)-H(x-a)$ com celeridade c: uma solução de onda clássica, ou ainda: uma simples advecção com velocidade c da condição inicial. O que é óbvio (*a posteriori*, pelo menos), já que a equação diferencial do exemplo 16.7 não possui termos difusivos.

Exercício 16.14
a) Se $\widehat{g}(k)=\delta(k)$, então

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+\mathrm{i}kx}\delta(k)\,\mathrm{d}k=1;$$

logo,

$$\mathscr{F}\{1\}=\delta(k).$$

b) Fazendo $g(x)=1$:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}\widehat{g}}{\mathrm{d}k}\right\} &= -\mathrm{i}xg(x),\\ \mathscr{F}\left\{\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}k}\right\}\right\} &= \mathscr{F}\left\{-\mathrm{i}x\right\},\\ -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}k} &= \mathscr{F}\left\{x\right\}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 16.15
a)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(-x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=+\infty}^{-\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}(-\xi)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \widehat{f^*}(k).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&x > 0 \Rightarrow H(x) - H(-x) = 1 - 0 = 1;\\ &x < 0 \Rightarrow H(x) - H(-x) = 0 - (1) = -1.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{\mathrm{snl}(x)\} &= \widehat{H}(k) - \widehat{H(-k)}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k} - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}(-k)}\\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{i}k}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 16.16

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{sen}(\lambda x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Exercício 16.17
Trata-se da transformada de Fourier da convolução de $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ com $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$; mas pelo teorema da convolução,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f * g\right](x) &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\ &= \frac{H(k+1) - H(k-1)}{k^2+1}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 16.18

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\widehat{f} * \widehat{g}\right](x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\int_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k-l)\widehat{g}(l)\,\mathrm{d}l\mathrm{d}k$$

Faça

$$\begin{aligned}m &= k - l\\ p &= l\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}k &= m + p\\ l &= p\end{aligned}$$

Então,

$$\left|\frac{\partial(k,l)}{\partial(m,p)}\right| = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial k}{\partial m} & \dfrac{\partial l}{\partial m} \\ \dfrac{\partial l}{\partial m} & \dfrac{\partial l}{\partial p} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\| = 1.$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{f}(k) * \widehat{g}(k)\right\} &= \int_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{p=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}(m+p)x}\widehat{f}(m)\widehat{g}(p)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}p \\
&= \left[\int_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}mx}\widehat{f}(m)\,\mathrm{d}m\right]\left[\int_{p=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}\widehat{g}(p)\,\mathrm{d}p\right] \\
&= f(x)g(x) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.19

A condição inicial transformada é

$$\begin{aligned}
\widehat{c}(k,0) &= \mathscr{F}\left\{c(x,0)\right\} \\
&= \mathscr{F}\left\{M\delta(x)\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}M\delta(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M}{2\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + uik\widehat{c} &= -\beta(2\pi)\widehat{c}^2, \\
\widehat{c}(k,0) &= \frac{M}{2\pi}, \\
\widehat{c}(k,t) &= \frac{\widehat{c}_0\mathrm{e}^{-uikt}}{1 + \frac{2\pi\beta}{uik}\widehat{c}_0\left(1 - \mathrm{e}^{-uikt}\right)}, \\
\widehat{c}(k,t) &= \frac{(M/2\pi)\mathrm{e}^{-uikt}}{1 + \frac{\beta M}{uik}\left(1 - \mathrm{e}^{-uikt}\right)} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 16.20

$$\begin{aligned}
[f * g](x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{+\xi}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{sen}(x+u)\,\mathrm{d}(-u) + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{sen}(x+u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{sen}(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\left[\mathrm{sen}(x+\xi) + \mathrm{sen}(x-\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi}\,[\operatorname{sen}(x)\cos(\xi) + \operatorname{sen}(\xi)\cos(x) \\
&+ \operatorname{sen}(x)\cos(\xi) - \operatorname{sen}(\xi)\cos(x)]\ \mathrm{d}\xi \\
&= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi}\operatorname{sen}(x)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\operatorname{sen}(x)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi}\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \operatorname{sen}(x)\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 16.21

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f * f\} &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{f}(k), \\
\mathscr{F}^{-1}\left\{[\widehat{f}(k)]^2\right\} &= \frac{1}{2\pi} f * f, \\
\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4}\mathrm{e}^{-2|ka|}\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a^2}{\xi^2 + a^2}\right]\left[\frac{a^2}{(x-\xi)^2 + a^2}\right]\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Exercício 16.22

$$
\begin{aligned}
\frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f^*(x)\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x &= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{l=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}^*(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx}\,dl\int_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}k\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{l=-\infty}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}k\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(l)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}k \\
&= -\mathrm{i}^2\int_{k=-\infty}^{+\infty}k\widehat{f}(k)\int_{l=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}^*(l)\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l-k)x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}k \\
&= \int_{k=-\infty}^{+\infty}k\widehat{f}(k)\int_{l=-\infty}^{\infty}\widehat{f}^*(l)\delta(l-k)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}k \\
&= \int_{k=-\infty}^{+\infty}k\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k)\,\mathrm{d}k \qquad \Rightarrow \\
G(k) &= k\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k)\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Capítulo 17

Exercício 17.1
Multiplico por $G(x,\xi)$ e integro de 0 a infinito:

$$
\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi y\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi\,\mathrm{d}\xi
$$

Integrando por partes,

$$
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\operatorname{sen}\xi\,\mathrm{d}\xi
$$

$$
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow
$$

$$-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G\right] \mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\,\mathrm{sen}\,\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \xi} - 2\xi G = \delta(\xi - x).$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi G = -\delta(\xi - x).$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -2\xi v\\
\frac{dv}{2v} &= -2\xi\\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2\\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2)\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x)\\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2)\\
&= \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow G_0(x) = \exp(x^2)$$

$$G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\exp(x^2 - \xi^2) \blacksquare$$

Exercício 17.2

a) Evidentemente, $[\![f(x)]\!] = [\![y]\!] = M$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{y}{\xi} &= \frac{f(\xi)}{\xi},\\
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)y}{\xi} &= \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi},\\
\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)y}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^{\infty} - \int_{\xi=0}^{\infty} y\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)y}{\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}
\end{aligned}$$

Nesse ponto, como sempre, imponho $\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0$; note que a condição inicial é $y(0) = 0$, o que simplifica um pouco as coisas. Prosseguindo,

$$\int_{\xi=0}^{\infty} y\left[-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\right]\mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{G(x,\xi)f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}+\frac{G(x,\xi)}{\xi}=\delta(\xi-x).$$

A forma mais rápida de obter G é pelo método da variação das constantes. Procuro a solução da equação homogênea:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}+\frac{h}{\xi}&=0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}&=\frac{h}{\xi},\\
\frac{\mathrm{d}h}{h}&=\frac{d\xi}{\xi},\\
h(\xi)&=A\xi,
\end{aligned}$$

(onde A é uma constante em relação a ξ), e tento

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)&=A(x,\xi)\xi,\\
-\left[\xi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}+A\right]+\frac{A\xi}{\xi}&=\delta(\xi-x),\\
-\xi\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}&=\delta(\xi-x),\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}&=-\frac{\delta(\xi-x)}{\xi},\\
\int_{u=0}^{\xi}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u&=-\int_{u=0}^{\xi}\frac{\delta(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u\\
A(x,\xi)&=A(x,0)-\frac{H(\xi-x)}{x},\\
G(x,\xi)&=\left[A(x,0)-\frac{H(\xi-x)}{x}\right]\xi.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&0=G(x,\infty)=[A(x,0)-1/x]\,\infty \qquad\Rightarrow\\
&A(x,0)=1/x,\\
&G(x,\xi)=[1-H(\xi-x)]\frac{\xi}{x}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 17.3

a) Compare o primeiro termo do lado esquerdo com o lado direito:

$$\frac{[\![y]\!]}{[\![t]\!]}=[\![a]\!]\frac{[\![f]\!]}{[\![T]\!]}\ \Rightarrow [\![a]\!]=1\ \blacksquare$$

b) Como sempre:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}+G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)&=\frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T},\\
\int_{\tau=0}^{\infty}G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau+\int_{\tau=0}^{\infty}G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau&=\int_{\tau=0}^{\infty}\frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

$$G(t,\tau)y(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty}-\int_{\tau=0}^{\infty}y(\tau)\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau+\int_{\tau=0}^{\infty}G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau.$$

Imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau)y(\tau) = 0$$

e rearranjo os termos restantes:

$$-G(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\right]\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau.$$

O problema torna-se

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} = \delta(\tau - t), \qquad G(t,\infty) = 0.$$

Primeiro, procuro uma solução do problema homogêneo:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} + h(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{h\tau}{T^2},\\
\frac{dh}{h} &= \frac{\tau d\tau}{T^2},\\
\ln\frac{h(t,\tau)}{h(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2T^2},\\
h(t,\tau) &= h(t,0)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right].
\end{aligned}$$

Agora procuro a solução para G pelo método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau) &= A(t,\tau)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] &+ A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] = \delta(\tau - t)
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A(t,\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t);\\
A(t,\tau) - A(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi;\\
A(t,\tau) &= A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left[-\frac{t^2}{2T^2}\right];\\
G(t,\tau) &= \exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]\left[A(t,0) - H(\tau - t)\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para que $G(t,\infty) = 0$, é necessário que

$$A(t,0) = \exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right).$$

Finalmente,

$$G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\exp\left(\frac{\tau^2 - t^2}{2T^2}\right) \blacksquare$$

Exercício 17.4

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{6\xi}{1+\xi^2}y = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$$
$$G(\xi,x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y = G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}$$
$$\int_0^\infty G(\xi,x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$G(\xi,x)y(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y(\xi)\frac{\mathrm{d}G(\xi,x)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Neste ponto, imponho $G(\infty,x) = 0$. Continuo:

$$\int_0^\infty y(\xi)\left[-\frac{\mathrm{d}G(\xi,x)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2}\right]\mathrm{d}\xi = G(x,0)y(0) + \int_0^\infty G(\xi,x)\frac{2\xi}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi.$$

Para tornar o lado direito igual a $y(x)$:

$$-\frac{\mathrm{d}G(\xi,x)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + G(\xi,x)\frac{6\xi}{1+\xi^2} = \delta(\xi - x).$$

Procuro a solução da equação diferencial ordinária homogênea associada:

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + h\frac{6\xi}{1+\xi^2} = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = h\frac{6\xi}{1+\xi^2}$$
$$\frac{dh}{h} = \frac{3\times 2\xi\,\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}$$
$$\int_{h_0}^h \frac{dv}{v} = 3\times\int_0^\xi \frac{2u\,du}{1+u^2}$$
$$\ln\frac{h}{h_0} = 3\times\ln\frac{1+\xi^2}{1} = \ln(1+\xi^2)^3$$
$$h = h_0(1+\xi^2)^3.$$

Procuro agora uma solução para G com o método de variação de parâmetros:

$$G(\xi,x) = A(\xi,x)(1+\xi^2)^3,$$
$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi}(1+\xi^2)^3 + A\times 6\xi(1+\xi^2)^2.$$

Substituindo na equação diferencial,

$$-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{(1+\xi^2)^3}\delta(\xi - x),$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{(1+u^2)^3}\delta(u-x),$$
$$A(\xi,x) - A(0,x) = -\int_0^{\xi} \frac{1}{(1+u^2)^3}\delta(u-x)\,du$$
$$A(\xi,x) = A(0,x) - \frac{H(\xi-x)}{(1+x^2)^3},$$
$$G(\xi,x) = \left[A(0,x) - \frac{H(\xi-x)}{(1+x^2)^3}\right](1+\xi^2)^3$$
$$G(\infty,x) = 0 \Rightarrow A(0,x) = \frac{1}{(1+x^2)^3},$$
$$G(\xi,x) = [1-H(\xi-x)]\,\frac{(1+\xi^2)^3}{(1+x^2)^3} \blacksquare$$

Exercício 17.5

A pré-multiplicação direta por $G(x,\xi)$ produz

$$G(x,\xi)\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + G(x,\xi)y(\xi) = G(x,\xi)f(\xi),$$
$$\int_0^{\infty} G(x,\xi)\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\infty} G(x,\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

mas isso é complicado de integrar por partes por causa do ξ "a mais" na primeira integral à esquerda. Isto sugere voltar um pouco e re-escrever a equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x},$$
$$y(0) = y_0.$$

Re-começando,

$$G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi} = G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi},$$
$$\int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Apesar da aparente singularidade em $\xi = 0$, nós prosseguimos com fé: integrando por partes a primeira integral à esquerda (agora sim!),

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(\xi)\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$
$$G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y_0 + \int_0^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\right]\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^{\infty} G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Impondo

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0,$$

$$-\frac{\mathrm{d}G(x,\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi} = \delta(\xi - x),$$

nós prosseguimos com

$$-G(x,0)y_0 + \int_0^\infty y(\xi)\delta(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$
$$y(x) = G(x,0)y_0 + \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Precisamos resolver o problema adjunto. Devido ao ξ no denominador da equação diferencial para G, não é uma boa idéia tentar transformada de Laplace — pelo menos à primeira vista. Façamos $G(x,\xi) = U(x,\xi)V(x,\xi)$, e substituamos:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}(UV)}{\mathrm{d}\xi} + \frac{UV}{\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-\left[U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} + V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{UV}{\xi} &= \delta(\xi - x)\\
U\left[-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} + \frac{V}{\xi}\right] - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{V}{\xi},\\
\frac{\mathrm{d}V}{V} &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},\\
\int_{V(x,0)}^{V(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}V'}{V'} &= \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta},\\
\ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,0)} &= \ln\frac{\xi}{0}.
\end{aligned}$$

Temos um problema! A integração com limites definidos não "funciona" para V, por conta da singularidade desse integrando. Vamos continuar tentando, com outra abordagem: calcular integrais indefinidas com constantes arbitrárias. Note como as "constantes arbitrárias" são no caso mais geral função da "outra" variável, x:

$$\begin{aligned}
\ln|V| &= \ln|\xi| + \ln|C_0(x)|,\\
|V| &= |C_0(x)\xi|,\\
V &= \pm C_0(x)\xi = C(x)\xi \qquad \Rightarrow\\
-C(x)\xi\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-C(x)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{\delta(\xi - x)}{\xi},\\
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= \int_0^\xi \frac{\delta(\eta - x)}{\eta}\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

Por coerência, a integral para $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\xi$ também foi indefinida; por conveniência, a constante de integração é $-C_1(x)$. A integral do lado direito não parece ser tão problemática:

$$\begin{aligned}
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= \int_0^\xi \frac{\delta(\eta - x)}{\eta}\,\mathrm{d}\eta,\\
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= H(\xi - x)\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U(x,\xi) &= C_1(x) - \frac{1}{C(x)} H(\xi - x)\frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \\
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi) = \left[C_1(x) - \frac{1}{C(x)} H(\xi - x)\frac{1}{x}\right] C(x)\xi \\
&= \left[C(x)C_1(x) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi \\
&= \left[D(x) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi.
\end{aligned}
$$

Agora a condição de contorno

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0$$

não "dá certo", pois $\xi \to \infty$, *a não ser* que o termo entre colchetes se anule neste limite, o que é possível se

$$D(x) = \frac{1}{x};$$

nesse caso,

$$G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)]\,\frac{\xi}{x} \;\blacksquare$$

Exercício 17.6
Como sempre,

$$
\begin{gathered}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) y = G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}, \\
\int_1^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) y\,\mathrm{d}\xi = \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=1}^{\xi=\infty} - \\
\int_1^\infty y\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) y\,\mathrm{d}\xi = \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,1)y_1 + \\
\int_1^\infty \left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) G(x,\xi)\right] y(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi
\end{gathered}
$$

Agora escolhemos

$$
\begin{gathered}
G(x,\infty) = 0, \\
\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) G(x,\xi)\right] = \delta(\xi - x),
\end{gathered}
$$

e re-escrevemos

$$y(x) = G(x,1)y_1 + \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Para resolver a equação diferencial em G, fazemos

$$
\begin{gathered}
G(x,\xi) = U(x,\xi)V(x,\xi), \\
-U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) UV = \delta(\xi - x),
\end{gathered}
$$

$$U\left[-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}+\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V\right]-V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=\delta(\xi-x).$$

Como sempre, anulamos o colchete:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi}&=\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V,\\ \frac{\mathrm{d}V}{V}&=\frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Como queremos $V(x,\xi)$, mudamos a variável de integração para *qualquer coisa* (por exemplo, z), e integramos a partir de $z=1$ até $z=\xi$:

$$\begin{aligned}\int_{V(x,1)}^{V(x,\xi)}\frac{\mathrm{d}V}{V}&=\int_1^{\xi}\left[\frac{\mathrm{d}z}{z}-\frac{\mathrm{d}z}{L}\right],\\ \ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,1)}&=\ln\frac{\xi}{1}-\frac{\xi-1}{L},\\ \ln V(x,\xi)&=\ln\xi-\frac{\xi-1}{L}+\ln V(x,1),\\ V(x,\xi)&=V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}.\end{aligned}$$

Ficamos agora com

$$\begin{aligned}-V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}&=\delta(\xi-x),\\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}&=-\frac{1}{V(x,1)\xi}\mathrm{e}^{(\xi-1)/L}\delta(\xi-x).\end{aligned}$$

Novamente, mudo de ξ para z e integro de 1 a ξ:

$$\begin{aligned}U(x,\xi)&=U(x,1)-\frac{1}{V(x,1)}\int_1^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{(z-1)/L}}{z}\delta(z-x)\,\mathrm{d}z,\\ &=U(x,1)-\frac{H(\xi-x)}{V(x,1)}\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}.\end{aligned}$$

Isso agora nos dá a função de Green:

$$\begin{aligned}G(x,\xi)&=U(x,\xi)V(x,\xi)\\ &=\left[U(x,1)-\frac{H(\xi-x)}{V(x,1)}\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}\right]V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\\ &=U(x,1)V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}-H(\xi-x)\frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\ &=G(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}-H(\xi-x)\frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\ &=\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\left[G(x,1)-H(\xi-x)\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x}\right].\end{aligned}$$

Fazemos agora

$$G(x,1)=\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x},$$

e retornamos:

$$\begin{aligned}G(x,\xi)&=\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}\left[1-H(\xi-x)\right]\frac{\mathrm{e}^{(x-1)/L}}{x},\\ &=\frac{\xi}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\xi-x}{L}}\left[1-H(\xi-x)\right]\ \blacksquare\end{aligned}$$

Exercício 17.7

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tg}\xi)G\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Nesse ponto, nós desejamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tg}\xi)G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Não é uma boa idéia usar transformada de Laplace, por causa da $(\operatorname{tg}\xi)$; façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$, e prossigamos.

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tg}\xi)uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tg}\xi)v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -v\operatorname{tg}\xi\\
\frac{dv}{v} &= -\operatorname{tg}\xi\mathrm{d}\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{dv}{v} &= -\int_0^\xi \operatorname{tg}\xi'\,\mathrm{d}\xi'\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \ln(\cos(\xi))\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\cos(\xi);
\end{aligned}
$$

Seguimos para u:

$$
\begin{aligned}
v(x,0)\cos(\xi)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
v(x,0)\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} \mathrm{d}u &= \int_0^\xi \frac{1}{\cos\eta}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
v(x,0)[u(x,\xi) - u(x,0)] &= \frac{1}{\cos(x)}H(\xi - x)\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)\cos(x)}H(\xi - x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) &= u(x,0)v(x,0)\cos(\xi) + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)}H(\xi - x)\\
&= G(x,0)\cos(\xi) + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)}H(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Isso já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$G(x,\infty) = \cos(\infty)\left[G(x,0) + \frac{1}{\cos(x)}\right],$$
$$G(x,0) = -\frac{1}{\cos(x)}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{-\cos(\xi)}{\cos(x)} + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)}H(\xi - x), \\ &= -[1 - H(\xi - x)]\frac{\cos(\xi)}{\cos(x)} \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 17.8

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{\xi=0}^{t} \frac{e^{-\frac{t-\xi}{T}}}{T} \int_{\tau=0}^{\xi} \frac{e^{-\frac{\xi-\tau}{T}}}{T} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=\tau}^{t} \frac{e^{-\frac{(t-\xi)+(\xi-\tau)}{T}}}{T}\frac{x(\tau)}{T}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{t} \frac{e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T}\frac{x(\tau)}{T}\left[\int_{\xi=\tau}^{t}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{t} \frac{(t-\tau)e^{-\frac{t-\tau}{T}}}{T}\frac{x(\tau)}{T}\,\mathrm{d}\tau \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 17.10

a) As condições de contorno são $y(0) = y(\pi) = 0$; então, $a = 0$, $b = \pi$ e $y_{m,n}(0) = y_{m,n}(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} p(\pi)&\left[y_n(\pi)\frac{\mathrm{d}y_m(\pi)}{\mathrm{d}x} - y_m(\pi)\frac{\mathrm{d}y_n(\pi)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &\qquad - p(0)\left[y_n(0)\frac{\mathrm{d}y_m(\pi)}{\mathrm{d}x} - y_m(0)\frac{\mathrm{d}y_n(\pi)}{\mathrm{d}x}\right] \equiv 0 \blacksquare \end{aligned}$$

b) Expandindo as derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda\mathrm{e}^{-2x}y &= \\ \mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda\mathrm{e}^{-2x}y &= \\ \mathrm{e}^{-2x}\Big[y''(x) - 2y'(x) + \lambda y\Big]&. \end{aligned}$$

A equação característica do termo entre colchetes é

$$r^2 - 2r + \lambda = 0,$$

com soluções $r = (1 \pm \sqrt{1-\lambda})$. O caso $\lambda = 1$ produz uma raiz dupla, e deve ser tratado separadamente. Neste caso, além da solução e^x, encontra-se uma segunda

solução LI xe^x. Portanto, para $\lambda = 1$, a solução geral é do tipo $e^x(C + Dx)$. Para $\lambda \neq 1$, as raízes sao distintas, e

$$y = k_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + k_2 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

Faça $k_1 = (B + A)/2$, $k_2 = (B - A)/2$, e obtenha

$$\begin{aligned} y &= e^x \left[k_1 e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + k_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x} \right] \\ &= e^x \left[B \frac{e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} + A \frac{e^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} - e^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} \right] \\ &= e^x \left[B \cosh \sqrt{1-\lambda}\,x + A \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,x \right] \blacksquare \end{aligned}$$

c) Se $\lambda = 1$, a solução é do tipo $e^x(C + Dx)$; impondo as condições de contorno, encontra-se $C = D = 0$ (pois $e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Como um problema de autovalor não admite, por definição, soluções triviais ($y(x) \equiv 0$), $\lambda = 1$ não é um autovalor ■

d) Como $\cosh(0) = 1$, impondo-se $y(0) = 0$ encontra-se $B = 0$. Agora, $\operatorname{senh}(0) = 0$, de modo que resta impor

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; A \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0,$$

pois A deve ser diferente de zero para fugir da solução trivial ■

e)

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} \sqrt{1-\lambda}\pi &= 0 \\ \mathrm{i} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda-1}\pi &= 0 \\ \sqrt{\lambda-1} &= n \\ \lambda &= 1 + n^2 \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 17.11

A equação característica é

$$(r - (-1 + 2\sqrt{\lambda}))(r - (-1 - 2\sqrt{\lambda})) = r^2 + 2r + 1 - 4\lambda.$$

A equação diferencial é

$$\begin{aligned} 0 = y'' + 2y' + (1 - 4\lambda)y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) + q(x)y + \lambda w(x) y, \\ 0 = y'' + 2y' + (1 - 4\lambda)y &= py'' + p'y' + qy + \lambda w y, \\ 0 = -\frac{1}{4}y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y + \lambda y &= \frac{p}{w}y'' + \frac{p'}{w}y' + \frac{q}{w}y + \lambda y \end{aligned}$$

Obtemos um conjunto de 3 equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{q}{w} &= -\frac{1}{4}, \\ \frac{p'}{w} &= -\frac{1}{2}, \\ \frac{p}{w} &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

donde $p = q$, e

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2}w = \frac{1}{2}\times 4p = 2p,\\ \frac{dp}{p} &= 2dx,\\ p(x) &= C\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

A constante C é totalmente arbitrária, exceto pelo seu sinal que deve ser escolhido de tal forma que $w > 0$. Sem perda de generalidade, portanto, faça $C = -1$. Então, $w = 4\mathrm{e}^{2x}$, e a equação de Sturm Liouville é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\mathrm{e}^{2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \mathrm{e}^{2x}y + 4\mathrm{e}^{2x}\lambda y = 0 \blacksquare$$

Exercício 17.12
Por inspeção, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$; $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0$. A equação característica é $r^2 + \lambda = 0$. Se:
a) $\lambda < 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&y(x) = C_1 \cosh\sqrt{|\lambda|}x + C_2 \operatorname{senh}\sqrt{|\lambda|}x\\ &y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0;\\ &y(L) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;\end{aligned}$$

(portanto, esse caso não interessa).
b) $\lambda = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&y(x) = C_1 + C_2 x\\ &y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0;\\ &y(L) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;\end{aligned}$$

(esse caso também não interessa).
c) $\lambda > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x\\ &y(0) = 0 \Rightarrow A = 0;\\ &y(L) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\end{aligned}$$

(esses são os autovalores). As autofunções são

$$y_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \blacksquare$$

Exercício 17.13
Esta é uma equação diferencial do tipo

$$Ly = -\lambda y;$$

λy é obviamente auto-adjunto, de forma que basta analisar L. Claramente, a função-peso $w(x)$ da teoria de Sturm-Liouville, neste caso, é identicamente igual a 1. Vamos mudar a notação de y para f, multiplicar a equação diferencial por g, e integrar seguidamente por partes:

$$Lf = (1 - x^2)f'' - 2xf',$$

$$
\begin{aligned}
(Lf, g) &= \int_{-1}^{+1} \left[g(1-x^2)f'' - 2xgf'\right] \, \mathrm{d}x \\
&= g(1-x^2)f'\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \Big(g'(1-x^2) - 2xg\Big) f' \, \mathrm{d}x - \\
&\left[2xfg\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f \, \mathrm{d}x\right] \\
&= -2xfg\Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f \, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{+1} \Big(g'(1-x^2) - 2xg\Big) f' \, \mathrm{d}x \\
&= -2xfg\Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} 2(g+xg')f \, \mathrm{d}x - \\
&\left\{\left[\Big(g'(1-x^2) - 2xg\Big) f\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \Big(g''(1-x^2) - 4g'x - 2g\Big) f \, \mathrm{d}x\right\} \\
&= \int_{-1}^{+1} \left[g''(1-x^2) - 2xg'\right] f \, \mathrm{d}x \\
&= (f, Lg) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 17.14
Discutimos os sinais:
$\lambda < 0$:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x), \\
y'(x) &= \sqrt{-\lambda}\left[B\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + A\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x)\right].
\end{aligned}
$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$
\begin{aligned}
A - \sqrt{-\lambda}B &= 0, \\
\cosh(\sqrt{-\lambda})A + \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda})B &= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{-\lambda} \\ \cosh(\sqrt{-\lambda}) & \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Para termos $(A, B) \neq (0, 0)$, é necessário que

$$
\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) + \sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0
$$

Para economizar lápis: $\xi = \sqrt{-\lambda}$, e

$$
\begin{aligned}
\mathrm{senh}\,\xi + \xi\cosh\xi &= 0 \\
\mathrm{tgh}\,\xi &= -\xi,
\end{aligned}
$$

cuja única solução é $x = 0$, o que contraria a hipótese original.
$\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
y &= Ax + B, \\
y' &= A
\end{aligned}
$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$
\begin{aligned}
-A + B &= 0, \\
A + B &= 0
\end{aligned}
$$

Figura C.11: Solução do problema 17.14.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o determinante do sistema é -2, e a única solução possível é a trivial, $A = B = 0$, que não gera nenhuma autofunção.
Como já desconfiávamos, só nos resta $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x), \\ y'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right] \end{aligned}$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$\begin{aligned} A - \sqrt{\lambda}B &= 0, \\ \cos(\sqrt{\lambda})A + \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda})B &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{\lambda} \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, impondo que o determinante seja nulo para permitir $A \neq 0$ e/ou $B \neq 0$ (e fazendo novamente $\xi = \sqrt{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}) + \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}) &= 0 \\ \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}) &= -\sqrt{\lambda_n}, \\ \operatorname{tg}\xi &= -\xi \end{aligned}$$

A figura C.11 mostra a solução "gráfica" dos primeiros autovalores:
Do gráfico, vemos claramente que, para $n \geq 5$,

$$\begin{aligned} \xi_n &\approx (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \\ \sqrt{\lambda_n} &\approx (2n+1)\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\lambda_n \approx (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4};$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lambda_5 &\approx \frac{121\pi^2}{4}, \\
\lambda_6 &\approx \frac{169\pi^2}{4}, \\
\lambda_7 &\approx \frac{225\pi^2}{4}, \\
\lambda_8 &\approx \frac{289\pi^2}{4}, \\
\lambda_9 &\approx \frac{361\pi^2}{4}, \\
\lambda_{10} &\approx \frac{441\pi^2}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 17.15

$$y(x) = \begin{cases} C + Dx & \lambda = 0, \\ A\cos(\lambda x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda x) & \lambda > 0 \end{cases}$$

Para o caso $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= C + Dx, \\
y'(x) &= D;\ y'(0) = 0 \Rightarrow D = 0; \\
y(1) + y'(1) &= C + D + D = C + 2D = C = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda = 0$ não é autovalor.
Para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= A\cos(\lambda x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda x), \\
y'(x) &= \lambda\left[-A\,\mathrm{sen}(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right]; \\
y'(0) &= \lambda B\cos(\lambda 0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0; \\
y(x) &= A\cos(\lambda x), \\
y'(x) &= -A\lambda\,\mathrm{sen}(\lambda x).
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
y(1) + y'(1) &= A\cos\lambda - A\lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda = 0, \\
\cos\lambda &= \lambda\,\mathrm{sen}\,\lambda, \\
\mathrm{tg}\,\lambda &= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Portanto, a equação que dá os autovalores é

$$\mathrm{tg}\,\lambda_n = \frac{1}{\lambda_n}$$

e as autofunções são

$$y_n = \cos(\lambda_n)$$

A figura C.12 mostra as interseções que definem os $\lambda_n s$.

Figura C.12: Autovalores do Exercício 17.15.

Capítulo 18

Exercício 18.1
Suponha $u = U(s)$, $t = T(s)$, $k = K(s)$:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial k}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} &= -\beta K,\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \beta U - \nu K^2 U.
\end{aligned}$$

Encontre: $T = s$ (sem perda de generalidade, a constante de integração $T(0) = 0$), $K(s) = K(0)\mathrm{e}^{-\beta s}$. Agora, $K^2(s) = [K(0)]^2\mathrm{e}^{-2\beta s}$, e

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \beta U - \nu[K(0)]^2\mathrm{e}^{-2\beta s}U.$$

Esta entretanto é uma equação *separável*:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{U} &= \beta\mathrm{d}s - \nu[K(0)]^2\mathrm{e}^{2\beta s}\,\mathrm{d}s\\
\int_{u(K(0),0)}^{u(K(t),t)} \frac{\mathrm{d}U}{U} &= \int_0^t \beta\mathrm{d}s - \nu[K(0)]^2\int_0^t \mathrm{e}^{2\beta s}\,\mathrm{d}s\\
\ln\frac{u(K(t),t)}{u(K(0),0)} &= \beta t - \frac{\nu[K(0)]^2}{2\beta}\left[1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}\right]
\end{aligned}$$

$$u(k,t) = f(k\mathrm{e}^{\beta t}) \exp\left[\beta t - \frac{\nu k^2 \mathrm{e}^{2\beta t}}{2\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t}\right)\right]$$
$$u(k,t) = f(k\mathrm{e}^{\beta t}) \exp\left[\beta t - \frac{\nu k^2}{2\beta}\left(\mathrm{e}^{2\beta t} - 1\right)\right] \blacksquare$$

Exercício 18.2
Este é obviamente um problema para ser resolvido pelo método das características; compare:

$$-\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\kappa} + \alpha\kappa^{-5/3}\frac{\partial\psi}{\partial\tau},$$
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\kappa} = \frac{\partial\psi}{\partial\kappa} + \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}.$$

A equação característica é

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\kappa} = \alpha\kappa^{-5/3},$$
$$\mathrm{d}\tau = \alpha\kappa^{-5/3}\,\mathrm{d}\kappa,$$
$$\int_0^\tau \mathrm{d}t = \alpha\int_\chi^\kappa k^{-5/3}\,\mathrm{d}k.$$

Note que na notação utilizada χ é a configuração de κ em $\tau = 0$; integrando:

$$\tau = \frac{3\alpha}{2}\left[\chi^{-2/3} - \kappa^{-2/3}\right],$$
$$\frac{2\tau}{3\alpha} = \chi^{-2/3} - \kappa^{-2/3},$$
$$\chi^{-2/3} = \frac{2\tau}{3\alpha} + \kappa^{-2/3},$$
$$\chi(\kappa,\tau) = \left[\frac{2\tau}{3\alpha} + \kappa^{-2/3}\right]^{-3/2}.$$

De fato: $\tau = 0 \Rightarrow \chi = \kappa$. Agora integramos em κ:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\kappa} = -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\psi,$$
$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} = -\left[\frac{5}{3}\kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3}\right]\mathrm{d}\kappa,$$
$$\int_{f(\chi)}^{\psi(\kappa,\tau)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int_\chi^\kappa \left[\frac{5}{3}k^{-1} + 2\alpha k^{1/3}\right]\mathrm{d}k,$$
$$\ln\frac{\psi(\kappa,\tau)}{f(\chi)} = -\frac{5}{3}\int_\chi^\kappa \frac{\mathrm{d}k}{k} - 2\int_\chi^\kappa k^{1/3}\,\mathrm{d}k,$$
$$\ln\frac{\psi(\kappa,\tau)}{f(\chi)} = -\frac{5}{3}\ln\frac{\kappa}{\chi} - \frac{3}{2}\left[\kappa^{4/3} - \chi^{4/3}\right],$$
$$\psi(\kappa,\tau) = f(\chi)\left(\frac{\kappa}{\chi}\right)^{-5/3}\exp\left[-\frac{3}{2}\left(\kappa^{4/3} - \chi^{4/3}\right)\right] \blacksquare$$

Exercício 18.3
O método das características se impõe. Se

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ y &= Y(s), \end{aligned}$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x, y) = u(X(s), Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$\begin{aligned} xy &= 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 3X(s), & X(0) &= \xi, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= 3, & Y(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)Y(s), & U(0) &= u(\xi, 0) = \mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= 3ds, \\ \ln\frac{X}{\xi} &= 3s, \\ X &= \xi\mathrm{e}^{3s}; \\ Y &= 3s; \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \xi\mathrm{e}^{3s}3s, \\ U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s z\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3}. \end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned} s &= y/3, \\ \xi &= x/\mathrm{e}^{3s} = x/\mathrm{e}^{y}; \\ u(x, y) &= U(s) = U(0) + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-(x/\mathrm{e}^y)^2} + \frac{((y-1)\mathrm{e}^{y}+1)\,\frac{x}{\mathrm{e}^y}}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 18.4
Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-s},\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= 1 - \mathrm{e}^{-s} \Rightarrow X(0) = X(s) - 1 + \mathrm{e}^{-s}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{e}^{-t}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= X(0) + 1 - \mathrm{e}^{-s},\\
F(s) - F(0) &= \int_{\tau=0}^{s} [X(0) + 1 - \mathrm{e}^{-\tau}]\ \mathrm{d}\tau\\
F(s) &= F(0) + (X(0)+1)s + (\mathrm{e}^{-s} - 1)\\
F(0) &= f(X(0)) = f(x - 1 + \mathrm{e}^{-t});\\
\phi(x,t) &= F(s) = f(x - 1 + \mathrm{e}^{-t}) + (x - 1 + \mathrm{e}^{-t} + 1)t + (\mathrm{e}^{-t} - 1)\\
\phi(x,t) &= f(x - 1 + \mathrm{e}^{-t}) + (x + \mathrm{e}^{-t})t + (\mathrm{e}^{-t} - 1) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.5

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x},\\
h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x},\\
B^2 - AC &= 0 - h \times 0 = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.6
Faça

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{k}{f}\frac{\partial}{\partial x}\overline{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{k\overline{h}}{f}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

O valor mais óbvio (mas não o único possível) para $\overline{h}$ é $(H_0 + H)/2$. Praticamente qualquer valor *garantidamente* maior que H_0 e menor que H é uma resposta válida.

Exercício 18.7
$h(x,0) = H \Rightarrow$ O nível freático em $t = 0$ é H em todo o domínio.
$h(0,t) = H_0 \Rightarrow$ O nível do freático em $x = 0$ é H_0 para todo $t > 0$.
$\dfrac{\partial h(L)}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ Devido ao contorno impermeável, não há fluxo horizontal em $x = L$.

Exercício 18.8
Já que $h(x,t) = \phi(x,t) + H_0$,

$$\frac{\partial(\phi + H_0)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2(\phi + H_0)}{\partial x^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2};$$

As condições inicial e de contorno em ϕ serão:

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= h(x,0) - H_0 = H - H_0,\\
\phi(0,t) &= h(0,t) - H_0 = H_0 - H_0 = 0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= \frac{\partial(h(L,t) - H_0)}{\partial x} = \frac{\partial h(L,t)}{\partial x} = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.9
Se

$$\phi(x,t) = X(x)T(t),$$

A equação diferencial fica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial XT}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 XT}{\partial x^2} \;\Rightarrow\\
XT' &= \alpha^2 TX'' \;\Rightarrow\\
\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = \lambda.
\end{aligned}$$

Para

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0,$$

se $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
X(x) &= k_1 \cosh(\lambda x) + k_2 \operatorname{senh}(\lambda x),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \lambda \left[k_1 \operatorname{senh}(\lambda x) + k_2 \cosh(\lambda x)\right].
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_1 = 0,\\
\frac{\mathrm{d}X(L)}{\mathrm{d}x} = 0 &\;\Rightarrow\; \lambda k_2 \cosh(\lambda L) = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda > 0$ produz apenas a solução trivial. Para $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = 0 &\;\Rightarrow\; X(x) = k_3 x + k_4\\
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_4 = 0,\\
\frac{\mathrm{d}X(L)}{\mathrm{d}x} = 0 &\;\Rightarrow\; k_3 = 0.
\end{aligned}$$

Novamente, $\lambda = 0$ produz somente a solução trivial. Finalmente, se $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned}
X(x) &= k_5 \cos(-\lambda x) + k_6 \operatorname{sen}(-\lambda x),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= -\lambda \left[-k_5 \operatorname{sen}(-\lambda x) + k_6 \cos(-\lambda x)\right],\\
X(0) = 0 &\;\Rightarrow\; k_5 = 0,\\
\frac{\mathrm{d}X(L)}{\mathrm{d}x} = 0 &\;\Rightarrow\; -\lambda k_6 \cos(-\lambda L) = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.10
Continuando o resultado da última questão, faça $-\lambda = \mu > 0$:

$$\begin{aligned}
\cos(\mu_n L) &= 0, \\
\mu_n L &= (n + \frac{1}{2})\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \\
\mu_n &= (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{L}.
\end{aligned}$$

As autofunções são, portanto:

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) \blacksquare$$

Exercício 18.11
A condição

$$h(0,t) = H_0 = X(0)T(t)$$

requer que $T(t) =$ constante. A integração da equação diferencial ordinária resultante do método de separação de variáveis produz

$$T(t) = T_0 e^{\lambda\alpha^2 t};$$

se $\lambda > 0$, $\lim_{t\to\infty} T(t) = \infty$, o que é fisicamente inaceitável. Portanto, devemos ter $\lambda \leq 0$. Acontece que $\lambda = 0$ é justamente o que precisamos para a condição de contorno, pois neste caso ficamos com $T(t) = T_0$, e $X(0) = H_0/T_0$. Sem perda de generalidade, faça $T_0 = 1$. Então, para $\lambda = 0$ a solução para $X(x)$ é

$$X(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow c_2 = 0,\ c_1 = H_0$$

(para atender às condições de contorno). Note que $h(x,t) = H_0$ atende à equação diferencial e atende às condições de contorno, mas não atende à condição inicial. Isso pode ser consertado propondo

$$h(x,t) = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t)T_n(t)$$

onde os $T_n(t)s$ correspondem agora apenas aos valores negativos de λ; além disso, para que esta solução seja compatível com as condições de contorno do problema original, devemos ter

$$X_n(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}x}(L) = 0,$$

e isto nos traz de volta ao problema resolvido anteriormente ■

Exercício 18.12
As condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser resolvido com a transformação

$$\begin{aligned}
&\psi(x,t) = \phi(x,t) - \phi_0 \quad \Rightarrow \\
&\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial t}, \\
&\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \\
&\psi(0,t) = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\psi(L,t)}{\partial x} = 0,$$
$$\psi(x,0) = f(x) - \phi_0.$$

Fazemos agora $\psi(x,t) = X(x)T(t)$; a equação fica

$$X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \alpha^2\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2};$$
$$\frac{1}{\alpha^2T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.$$

O problema de Sturm-Liouville é

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0,\ X'(L) = 0.$$

O problema é difusivo. É razoável proibir $\lambda > 0$. Sempre vale a pena, entretanto, testar $\lambda = 0$: a solução é do tipo

$$X(x) = A + Bx;$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$
$$X'(L) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor. Para $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$, a solução é do tipo

$$X(x) = A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),$$
$$X'(x) = k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]$$

Impondo as condições de contorno,

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$
$$X'(L) = 0 \Rightarrow kB\cos(kL) = 0;$$
$$\cos(kL) = 0 \Rightarrow$$
$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2L};$$
$$\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}.$$

A equação em $T_n(t)$ é

$$\frac{1}{\alpha^2T_n}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2};$$
$$\frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\,\mathrm{d}t;$$
$$T_n(t) = T_0\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t\right].$$

A solução geral é da forma

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

Em $t = 0$:

$$f(x) - \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right),$$

$$[f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right),$$

$$\int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x,$$

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x \blacksquare$$

Exercício 18.13

Faça $c(x,t) = X(t)T(t)$; substitua na equação diferencial parcial e obtenha

$$XT' = a^2 X'' T$$
$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

A solução da EDO em t é

$$T = T_0 \exp(\lambda a^2 t)$$

e para que ela não cresça exponencialmente, devemos ter $\lambda \leq 0$. Vamos agora discutir os sinais remanescentes de λ em função das condições de contorno.
Se $\lambda = 0$,

$$X(x) = c_1 x + c_2; \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = c_1 \Rightarrow c_1 = 0; \qquad X(x) = c_2.$$

Se $\lambda = -k^2 < 0$,

$$X'' + k^2 X = 0$$
$$X(x) = A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx)$$
$$X'(x) = -Ak\operatorname{sen}(kx) + Bk\cos(kx)$$
$$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$X'(L) = 0 \Rightarrow -Ak\operatorname{sen}(kL) = 0$$

Na última equação acima, nós *não* queremos que $A = 0$, porque isto tornaria a solução trivial; em vez disto, fazemos

$$\operatorname{sen}(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{\pi n}{L};\ n = 1, 2, \ldots,$$

e com isto nós encontramos os autovalores do problema. Devemos buscar uma solução do tipo

$$c(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{L}\right)^2 t\right] A_n \cos\frac{\pi n x}{L}.$$

Note que, sem perda de generalidade, fizemos $T_0 = 1$, ou seja: nós o "incorporamos" à constante A_n. Para obter os $A_n s$ fazemos

$$c(x,0) = 2c_0 H(x - L/2) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi n x}{L},$$

$$2c_0 H(x - L/2)\cos\frac{\pi m x}{L} = \frac{A_0}{2}\cos\frac{\pi m x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi m x}{L}\cos\frac{\pi n x}{L},$$

$$2c_0 \int_0^L H(x - L/2) \cos \frac{\pi m x}{L}\, dx =$$
$$A_0 \int_0^L \frac{1}{2} \cos \frac{\pi m x}{L}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \cos \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{\pi n x}{L}\, dx.$$

As integrais do lado direito são nulas quando $m \neq n$; quando $m = n$, elas valem $L/2$. Portanto, quando $m = 0$:

$$\frac{L}{2} A_0 = 2c_0 \int_0^L H(x - L/2)\, dx = 2c_0 \frac{L}{2} = c_0 L \Rightarrow \frac{A_0}{2} = c_0,$$

e quando $m > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2} A_m &= 2c_0 \int_0^L H(x - L/2) \cos \frac{\pi m x}{L}\, dx \\
&= 2c_0 \int_{L/2}^L \cos \frac{\pi m x}{L}\, dx \\
&= -\frac{2c_0 L}{\pi m} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{2} \Rightarrow \\
A_m &= -\frac{4c_0}{\pi m} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{2}.
\end{aligned}$$

A ameixa no pudim é observar que a expressão acima é nula para m par, e que para m ímpar o seno se alterna entre -1 e $+1$. Trocando de m para $2l - 1$, ficamos com a solução do problema:

$$c(x,t) = c_0 \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{4}{\pi(2l-1)} \exp\left[-\left(\frac{a\pi(2l-1)}{L} \right)^2 t \right] \cos \frac{\pi(2l-1)x}{L} \right\} \blacksquare$$

Exercício 18.14

Tente $C(x,z) = X(x)Z(z)$; a equação fica

$$\begin{aligned}
Z \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{K}{U} X \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}; \\
\frac{1}{\alpha^2 X} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{Z} \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = \lambda.
\end{aligned}$$

As condições de contorno sugerem um problema de Sturm-Liouville em Z:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z} [X(x)Z(0)] = 0 &\Rightarrow Z'(0) = 0, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z} [X(x)Z(h)] = 0 &\Rightarrow Z'(h) = 0.
\end{aligned}$$

A equação em z fica

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} - \lambda Z &= 0, \\
Z'(0) = Z'(h) &= 0.
\end{aligned}$$

Tentemos $\lambda = k^2 > 0$ com $k > 0$; a solução é do tipo

$$Z(z) = A \cosh(kz) + B \operatorname{senh}(kz);$$

$$
\begin{aligned}
Z'(z) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(kz) + B\cosh(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow kA\,\mathrm{senh}(kh) = 0;\ A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda > 0$ leva à solução trivial, que não pode ser autofunção.
Tentemos $\lambda = 0$; a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= D + Fz;\\
Z'(z) &= F;\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow F = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow F = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ admite a solução não-trivial $Z(z) = D$, desde que $D \neq 0$.
Tentemos $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$. A solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= A\cos(kz) + B\,\mathrm{sen}(kz);\\
Z'(z) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kz) + B\cos(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(kh) = 0;\ k_n h = n\pi;\ k_n = \frac{n\pi}{h}.
\end{aligned}
$$

Os autovalores e as autofunções são

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{h^2},\\
Z_n &= \cos\left(\frac{\pi n z}{h}\right).
\end{aligned}
$$

Usamos agora os autovalores para obter as funções X_n correspondentes:

$$
\begin{aligned}
\lambda_n = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = 0 \ \Rightarrow X = X_{00}(\text{constante});\\
\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} &\Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \ \Rightarrow X_n(x) = X_{0n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2 x}{h^2}}
\end{aligned}
$$

A solução que atende às condições de contorno é

$$
C(x,z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-k_n^2\alpha^2 x}\cos(k_n z).
$$

Precisamos dos coeficientes de Fourier: em $x = 0$,

$$
\frac{Q}{U}B(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(k_n z).
$$

Para calcular a_0, simplesmente integre:

$$
\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\,dz = h\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^h a_n\cos(k_n z)\,dz}_{\equiv 0} \Rightarrow
$$

$$
a_0 = \frac{2Q}{hU}.
$$

Para os demais coeficientes, $m > 0$,

$$\frac{Q}{U}B(z)\cos(k_m z) = \frac{a_0}{2}\cos(k_m z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n z)\cos(k_m z),$$

$$\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z = \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z,$$

$$\frac{Q}{U\sigma}\int_{z_e-\sigma/2}^{z_e+\sigma/2} \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z = \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z,$$

$$\frac{2Q}{U\sigma k_m}\operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e) =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z.$$

As funções no lado direito do somatório acima são ortogonais:

$$\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ h/2 & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Segue-se que

$$a_m = \frac{4Q}{U\sigma\pi m}\operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e),\ m > 0 \ \blacksquare$$

Exercício 18.15

Separando-se as variáveis, obtém-se:

$$X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = XT\left[T\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right],$$

$$\frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = c_1.$$

Resolvendo primeiro em T:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= c_1, \\ \frac{dT}{T^2} &= c_1 dt, \\ -\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2, \\ T &= \frac{-1}{c_1 t + c_2}. \end{aligned}$$

Resolvendo X:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= c_1, \\ X &= c_1 x + c_3. \end{aligned}$$

A solução será do tipo

$$\begin{aligned} \phi = XT &= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2} \\ &= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1} \\ &= -\frac{x + a}{t + b}. \end{aligned}$$

Neste ponto, note que há apenas 2 graus de liberdade, representados pelas constantes a e b, e que correspondem à única condição de contorno e à única condição inicial dadas. Impondo cada uma delas:

$$\phi(0,t) = 0 \Rightarrow -\frac{a}{t+b} = 0 \Rightarrow a = 0;$$
$$\phi(1,0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = -1.$$

Donde

$$\phi(x,t) = -\frac{x}{t-1} = \frac{x}{1-t} \blacksquare$$

Exercício 18.16

Note que as condições de contorno em x não são homogêneas. Isto pode ser facilmente resolvido, entretanto, com

$$\phi(x,t) = u(x,t) - u_0; \qquad \Rightarrow \begin{cases} \phi(0,t) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(L,t) = 0. \end{cases}$$

A condição inicial muda, entretanto, para

$$\phi(x,0) = -u_0.$$

A equação diferencial não muda:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Separando as variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$,

$$XT' = \alpha^2 TX'',$$
$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Discussão de sinais: $\lambda = k^2 > 0$:

$$X'' - k^2 X = 0,$$
$$X = A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx)$$
$$X' = A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx)$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$
$$X'(L) = 0 \Rightarrow B\cosh(kL) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

A única solução possível é a trivial, $X \equiv 0$, e portanto $\lambda > 0$ não serve.
$\lambda = 0$:

$$X'' = 0,$$
$$X' = A,$$
$$X = Ax + B$$
$$X(0) = 0 \Rightarrow B = 0,$$
$$X'(L) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Novamente, somente a solução trivial é possível, e $\lambda = 0$ não serve.
$\lambda = -k^2 < 0$:

$$X'' + k^2 X = 0,$$

$$
\begin{aligned}
X &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X' &= -A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx),\\
X(0) &= 0 \Rightarrow A = 0,\\
X'(L) &= 0 \Rightarrow B\cos(kL) = 0,\\
kL &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots,\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

A equação diferencial em T será

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -T\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2,\\
\frac{dT}{T} &= -\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 dt,\\
T(t) &= T_{0n}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right].
\end{aligned}
$$

A solução será do tipo

$$
\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right]\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
$$

Em particular, para $t = 0$,

$$
\begin{aligned}
-u_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),\\
-u_0\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{x=0}^{L} u_0\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{d}x =\\
&\qquad \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{d}x,\\
&-\int_{x=0}^{L} u_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{d}x = T_{0m}\int_{x=0}^{L}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\right]^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

As duas integrais são

$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\mathrm{d}x &= \frac{2L}{\pi(2m-1)},\\
\int_{x=0}^{L}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right)\right]^2\mathrm{d}x &= \frac{L}{2},
\end{aligned}
$$

donde, finalmente,

$$
\begin{aligned}
T_{0n} &= -\frac{4u_0}{\pi(2n-1)},\\
u(x,t) &= u_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4u_0}{\pi(2n-1)}\exp\left[-\left(\frac{(2n-1)\pi\alpha}{2L}\right)^2 t\right]\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

Exercício 18.17
A equação para regime permanente é:

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{t\to\infty} T(x,t); \\ \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} &= 0; \\ u(x) &= Ax + B. \end{aligned}$$

Esta solução precisa atender às condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}x} &= 0 \;\Rightarrow\; A = 0; \\ u(L) &= T_L \;\Rightarrow\; B = T_L; \end{aligned}$$

donde

$$u(x) = T_L.$$

Faça

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= T(x,t) - u(x) \;\Rightarrow \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) \\ &= 0 - 0 = 0; \\ \phi(L,t) &= T(L,t) - u(L) \\ &= T_L - T_L = 0; \\ \phi(x,0) &= T(x,0) - u(x) \\ &= 0 - T_L = -T_L. \end{aligned}$$

As condições de contorno em $\phi(x,t)$ são agora homogêneas; Faça

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= X(x)T(t) \\ XT' &= \alpha^2 X'' T \\ \frac{X''}{X} &= \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = \lambda. \end{aligned}$$

A única equação de ordem 2 é em x: não há dúvidas sobre o problema de Sturm-Liouville a ser atacado:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda > 0: \\ &X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x) \\ &X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda}\,[A\,\mathrm{senh}(0) + B\cosh(0)] = 0 \;\Rightarrow\; B = 0. \\ &X(L) = 0 \;\Rightarrow\; A\cosh(\sqrt{\lambda}L) = 0 \;\Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

A única solução possível é $X = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned} &\lambda = 0: \\ &X(x) = Ax + B \\ &X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0; \end{aligned}$$

$$X(L) = 0 \;\Rightarrow B = 0.$$

A única solução possível é $X = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned}
&\lambda < 0: \\
&X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x) \\
&X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{-\lambda}\,[-A\,\mathrm{sen}(0) + B\cos(0)] = 0 \;\Rightarrow\; B = 0. \\
&X(L) = 0 \;\Rightarrow\; A\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \\
&\sqrt{-\lambda}L = \pi/2 + n\pi,\; n = 0, 1, 2, \ldots \\
&-\lambda = (1/2 + n)^2\pi^2/L^2, \\
&X_n(x) = \cos((1/2 + n)\pi x/L).
\end{aligned}$$

De posse dos autovalores, obtemos $T(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{T'}{T} &= -\alpha^2(1/2 + n)^2\pi^2/L^2 \\
T(t) &= \exp\left(-\frac{\alpha^2(1/2 + n)^2\pi^2}{L^2}t\right).
\end{aligned}$$

A solução em série para ϕ é

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\alpha^2(1/2 + n)^2\pi^2}{L^2}t\right)\cos\left(\frac{(1/2 + n)\pi x}{L}\right).$$

Resta obter os $A_n s$

$$\begin{aligned}
\phi(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(1/2 + n)\pi x}{L}\right), \\
-T_L &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(1/2 + n)\pi x}{L}\right),
\end{aligned}$$

$$-\int_0^L T_L \cos\left(\frac{(1/2 + m)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \cos\left(\frac{(1/2 + n)\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{(1/2 + m)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^L T_L \cos\left(\frac{(1/2 + m)\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= A_m\frac{L}{2}, \\
-T_L\frac{2Lcos(m\pi)}{2m\pi + \pi} &= A_m\frac{L}{2}, \\
A_m &= \frac{-4T_L\cos(m\pi)}{2m\pi + \pi} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.18
Faça $\phi = X(x)T(t)$:

$$\begin{aligned} XT' &= a^2 X'' T, \\ \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda. \end{aligned}$$

É evidente que há um problema de Sturm-Liouville nos esperando em X, mas ganharemos um pouco de tempo resolvendo em T primeiro, e raciocinando fisicamente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\lambda a^2 T, \\ \frac{dT}{T} &= -\lambda a^2\,\mathrm{d}t \\ \ln\frac{T}{T_0} &= -\lambda a^2 t \\ T(t) &= T_0 \exp(-\lambda a^2 t). \end{aligned}$$

É evidente que não podemos deixar que a solução exploda para $t \to \infty$: $\lambda < 0$ não é aceitável; $\lambda = 0$ também não funciona, porque neste caso a solução permaneceria constante (é evidente que o perfil inicial $\phi(x, 0)$ deve se abater, forçado pela condição de contorno esquerda). Segue-se que $\lambda > 0$. Além disto, sem perda de generalidade faremos $T_0 = 1$. O problema de Sturm-Liouville em X é

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \lambda X = 0,$$

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}(L) &= 0. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x), \\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]. \end{aligned}$$

A condição de contorno esquerda (em $x = 0$) impõe $A = 0$; a condição de contorno direita (em $x = L$) impõe

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\lambda}L) &= 0, \\ \sqrt{\lambda_n}L &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, \\ \lambda_n &= \left(\frac{2n-1}{L}\right)^2 \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

As autofunções são

$$\phi_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).$$

A solução do problema de Sturm-Liouville dá conta das condições de contorno, e agora nós nos voltamos para a condição inicial. A solução geral deve ser da forma

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)\exp\left(-\frac{(2n-1)^2 a^2 \pi^2 t}{4}\right).$$

Para atender à condição inicial, devemos ter

$$\phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

$$\phi_0 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x,$$

$$\phi_0 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{2}{L}\frac{4\phi_0 L(-1)^n}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2} \\ &= \frac{8\phi_0(-1)^n}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 18.19

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[XT] &= XT\frac{\partial}{\partial x}[XT]; \\ X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= XT^2\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}; \\ \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = c_1; \end{aligned}$$

Encontro primeiramente T:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T^2} &= c_1 dt; \\ -\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2; \\ T &= -\frac{1}{c_1 t + c_2}; \end{aligned}$$

e em seguida X:

$$X(x) = c_1 x + c_3.$$

A forma geral da solução é

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)T(t) \\ &= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2} \\ &= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1} \\ &= -\frac{x+b}{t+a}, \end{aligned}$$

e há apenas dois graus de liberdade (duas constantes) para determinar, que são

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 &\Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0; \\ u(1,0) = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 18.20

$$
\begin{aligned}
h &= X(x)T(t),\\
\frac{\partial(XT)}{\partial t} + \frac{\partial(XT)^n}{\partial x} &= 0,\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + n(XT)^{n-1}T\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= 0\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + nX^{n-1}T^n\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= 0\\
T^{-n}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + nX^{n-2}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= 0\\
T^{-n}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -nX^{n-2}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= k_1.
\end{aligned}
$$

Integração em T:

$$
\begin{aligned}
T^{-n}dT &= k_1 dt,\\
\frac{T^{1-n}}{1-n} &= k_1 t + k_2,\\
T^{1-n} &= (1-n)(k_1 t + k_2),\\
T(t) &= \left[(1-n)(k_1 t + k_2)\right]^{\frac{1}{1-n}}.
\end{aligned}
$$

Integração em x:

$$
\begin{aligned}
-nX^{n-2}dX &= k_1 dx,\\
\frac{-n}{n-1}X^{n-1} &= k_1 x + k_3,\\
X^{n-1} &= -\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\\
X &= \left[-\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\right]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
h(x,t) = XT = \left[-\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\right]^{\frac{1}{n-1}}\left[(1-n)(k_1 t + k_2)\right]^{\frac{1}{1-n}} \blacksquare
$$

Exercício 18.21

Nós utilizamos a abordagem clássica de separação de variáveis:

$$
\phi(x,y) = X(x)Y(y),
$$

donde

$$
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = \lambda.
$$

Observe as condições de contorno do problema: elas são homogêneas na direção y. Isto sugere tentar resolver um problema de autovalor em Y:

$$
\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \lambda y = 0.
$$

A discussão dos sinais de λ é como se segue:

Se $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
&Y(y) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}y) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}y).\\
&Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0,\\
&Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}b) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para $\lambda < 0$ a solução é trivial, e não nos interessa.

Se $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
&Y(y) = A + By.\\
&Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0,\\
&Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; Bb = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.
\end{aligned}$$

Novamente, a solução é trivial, e $\lambda = 0$ não interessa.

Se $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
&Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}y)\\
&Y(0) = 0 \;\Rightarrow && A = 0,\\
&Y(b) = 0 \;\Rightarrow && B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}y) = 0,\\
& && \sqrt{\lambda}b = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots,\\
& && \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{b},\\
& && \lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução é não-trivial, e nos interessa. As autofunções portanto são

$$Y_n(y) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Vamos agora então olhar para X; para λ acima,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{n^2\pi^2}{b^2},\\
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X &= 0,\\
X_n(x) &= C_n\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)
\end{aligned}$$

Os valores de C_n e D_n devem agora ser obtidos a partir das condições de contorno não-homogêneas na direção x. Faça

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Agora,

$$\phi(0, y) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \Leftrightarrow C_n = 0, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resta a obtenção de D_n:

$$\phi(a,y) = \phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Atenção: esta é uma série de Fourier *em* y:

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{b} \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\, dy &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y=0}^{b} D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\, dy \\ &= \int_{y=0}^{b} D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\, dy \Rightarrow \\ \frac{\phi_0 b}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right] &= D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $D_m \neq 0$ apenas para $m = 1, 3, 5, \ldots$; a solução será

$$\phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi y}{b}\right),$$

com

$$D_k = \frac{4\phi_0}{(2k-1)\operatorname{senh}\left(\frac{(2k-1)\pi a}{b}\right)} \blacksquare$$

Uma questão muito interessante, é a seguinte: é possível resolver a questão "ao contrário", ou seja: é possível resolver *primeiro* um problema de autovalor em x? A resposta é *sim*! Tente

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_0 x}{a} + \psi(x,y);$$

é fácil ver que as condições de contorno em ψ tornam-se

$$\begin{aligned}\psi(0,y) &= 0, & \psi(x,0) &= -\frac{\phi_0 x}{a}, \\ \psi(a,y) &= 0, & \psi(x,b) &= -\frac{\phi_0 x}{a}.\end{aligned}$$

Este é um problema mais difícil que o anterior, mas o ponto a ser notado é que ele é um problema *homogêneo* em x. As condições de contorno homogêneas em x levarão (após o costumeiro estudo dos sinais de λ, etc.) aos autovalores e às autofunções

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \\ X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),\end{aligned}$$

donde a forma geral da solução será

$$\phi(x,y) = \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Agora, os valores de C_n e D_n virão das condições de contorno na direção y:

$$\phi(x,0) = 0 = \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\phi_0 x}{a} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
-\int_{x=0}^{a} \frac{\phi_0 x}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx &= \int_{x=0}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \\
\frac{a\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \frac{C_m a}{2} \\
C_m &= \frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1}.
\end{aligned}
$$

Tendo obtido os $C_n s$ nós agora buscamos os $D_n s$

$$
\begin{aligned}
\phi(x,b) = 0 &= \frac{\phi_0 x}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \\
-\frac{\phi_0 x}{a} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \\
-\int_{x=0}^{a} \frac{\phi_0 x}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x &= \\
\int_{x=0}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\phi_0}{n\pi}(-1)^{n+1} \cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) + D_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \left[\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) + D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right] \frac{a}{2}, \\
\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} &= \left[\frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) + D_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right], \\
D_m &= \frac{2\phi_0}{m\pi}(-1)^{m+1} \left[1 - \cosh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Exercício 18.22

Fazendo-se $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ e substituindo-se na equação diferencial parcial, obtém-se

$$
\begin{aligned}
X''Y + Y''X &= \lambda XY, \\
\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Note que as equações em X e Y *ainda* não estão separadas. O enunciado, entretanto, dá a sugestão óbvia: fazer $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$, de tal forma que

$$
\frac{X''}{X} = \lambda_x \qquad \text{e} \qquad \frac{Y''}{Y} = \lambda_y
$$

separadamente. A tradicional discussão de sinais leva a $\lambda_x = -k^2 < 0$; substituindo-se na equação diferencial, tem-se

$$
X'' + k^2 X = 0, \qquad X(0) = X(a) = 0
$$

A solução geral é

$$
X(x) = A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx)
$$

donde

$$
A = 0,
$$

$$\operatorname{sen}(ka) = 0 \Rightarrow ka = m\pi \Rightarrow k = \frac{m\pi}{a}, \qquad \text{isto é:}$$
$$\lambda_x = -k^2 = -\pi^2\left(\frac{m}{a}\right)^2,$$
$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right).$$

O procedimento em Y é rigorosamente igual:

$$\lambda_y = -\pi^2\left(\frac{n}{b}\right)^2; \qquad Y(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Finalmente,

$$\lambda_{mn} = -\pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right],$$

são os autovalores, e

$$\phi_{mn}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

são as autofunções ■

Exercício 18.23

Decomponho o problema em

$$\phi = U + V,$$
$$\nabla^2\phi = \nabla^2 U + \nabla^2 V,$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} U(x,0) &= 0 & V(x,0) &= 0 \\ U(0,y) &= 0 & V(0,y) &= 0 \\ U(a,y) &= \phi_0\frac{y}{b} & V(a,y) &= 0, \\ U(x,b) &= 0 & V(x,b) &= \phi_0\frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Vemos duas coisas:

1. As condições de contorno de U em y são homogêneas; as condições de contorno de V em x são homogêneas.

2. Os problemas em U e V são *o mesmo* problema, se trocarmos x por y, e a por b.

Basta portanto resolver um deles. Resolvendo para U:

$$U(x,y) = X(x)Y(y),$$
$$X''Y + XY'' = 0,$$
$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

O problema de Sturm-Liouville é obviamente em Y:

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

$$\begin{aligned}
&\lambda > 0: \\
&\quad Y(y) = A\cosh(\sqrt{\lambda}y) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}y) \\
&\quad Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; [A\cosh(0) + B\,\mathrm{senh}(0)] = 0 \;\Rightarrow\; A = 0. \\
&\quad Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; B\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}b) = 0 \;\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $Y = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned}
&\lambda = 0: \\
&\quad Y(y) = Ay + B \\
&\quad Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0; \\
&\quad Y(b) = 0 \;\Rightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $Y = 0$, que é trivial e portanto não serve.

$$\begin{aligned}
&\lambda < 0: \\
&\quad Y(y) = A\cos(\sqrt{-\lambda}y) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}y) \\
&\quad Y(0) = 0 \;\Rightarrow\; [A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0)] = 0 \;\Rightarrow\; A = 0. \\
&\quad Y(b) = 0 \;\Rightarrow\; B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}b) = 0 \\
&\sqrt{-\lambda}b = n\pi \\
&\quad -\lambda = n^2\pi^2/b^2, \\
&Y_n(y) = \mathrm{sen}(n\pi y/b).
\end{aligned}$$

Em X o problema fica

$$\begin{aligned}
\frac{X''}{X} &= -\lambda_n = n^2\pi^2/b^2 \\
X'' - n^2\pi^2/b^2 X &= 0 \\
X(x) &= A_n\cosh(n\pi x/b) + B_n\,\mathrm{senh}(n\pi x/b)
\end{aligned}$$

Em particular $U(0, y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A_n = 0$; então

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi x/b).$$

Resta obter B_n:

$$\begin{aligned}
U(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi a/b) \\
\phi_0\frac{y}{b} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{senh}(n\pi a/b) \\
\phi_0\int_0^b \frac{y}{b}\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,\mathrm{d}y &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\int_0^b \mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,\mathrm{d}y \\
\phi_0\int_0^b \frac{y}{b}\,\mathrm{sen}(m\pi y/b)\,\mathrm{d}y &= B_m\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\frac{b}{2} \\
\phi_0\frac{b(-1)^{m+1}}{\pi m} &= B_m\,\mathrm{senh}(n\pi a/b)\frac{b}{2}
\end{aligned}$$

$$B_m = \frac{2\phi_0(-1)^{m+1}}{\pi m \operatorname{senh}(m\pi a/b)}.$$

Pela simetria das condições de contorno, as soluções em U e V são:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_0(-1)^{n+1}}{\pi n \operatorname{senh}(n\pi a/b)} \operatorname{sen}(n\pi y/b) \operatorname{senh}(n\pi x/b),$$
$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\phi_0(-1)^{n+1}}{\pi n \operatorname{senh}(n\pi b/a)} \operatorname{sen}(n\pi x/a) \operatorname{senh}(n\pi y/a) \blacksquare$$

Exercício 18.24

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\\
(-i\omega)^2\psi(x,y)e^{-i\omega t} &= c^2 e^{-i\omega t}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\\
-\omega^2\psi(x,y) &= c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\\
\nabla^2\psi + k^2\psi &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida por *separação de variáveis*:

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y)$$

leva a

$$\begin{aligned}
X''Y + Y''X + k^2XY &= 0\\
\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} &= -k^2
\end{aligned}$$

Esta última equação obviamente será resolvida se

$$\begin{aligned}
X'' + \alpha^2 X &= 0,\\
Y'' + \beta^2 Y &= 0,
\end{aligned}$$

com

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2.$$

A partir daí, o problema se reduz à solução das equações diferenciais ordinárias e a escolha das constantes de integração que atendam às condições de contorno.

Exercício 18.25
a) Se $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3} \quad \Rightarrow\\
\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}X(t) &= \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}T(t) + \phi_0\frac{x}{L^3}.
\end{aligned}$$

Aqui, o truque de dividir ambos os lados por $X(x)T(t)$ não funciona; veja:

$$\frac{1}{c^2T(t)}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \phi_0\frac{x}{X(x)T(t)L^3}.$$

Enquanto que o lado esquerdo é função só de t, o segundo termo do lado direito é função tanto de x quanto de t, e esta abordagem não funciona ■
b) Se $\phi(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3} \;\Rightarrow\\ \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}X(t) &= \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}T(t) + \left[\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3}\right].\end{aligned}$$

Para que a separação de variáveis funcione, basta agora exigir que o termo entre colchetes do lado direito seja zero:

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} + \phi_0\frac{x}{L^3} = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -\frac{\phi_0}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 + c_1x + c_2 \;■$$

c) Substitua agora as condições de contorno:

$$\begin{aligned}\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 \;&\Rightarrow\\ X(0)T(t) + f(0) &= 0,\\ X(L)T(t) + f(L) &= 0.\end{aligned}$$

Agora, imponha $f(0) = f(L) = 0$; neste caso, para que as condições de contorno sejam atendidas em qualquer t, necessariamente $X(0) = X(L) = 0$. Mas então,

$$\begin{aligned}&f(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0,\\ &f(L) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\phi_0}{6} + c_1L = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = +\frac{\phi_0}{6L} \;■\end{aligned}$$

d) Se $\lambda = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = k_1x + k_2 \text{ e } X(0) = X(L) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = 0.$$

Portanto, $\lambda = 0$ não serve. Se $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X &= 0,\\ r^2 &= \lambda,\\ r &= \pm\sqrt{\lambda}.\end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$,

$$X(x) = k_3\cosh(\sqrt{\lambda}x) + k_4\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}x).$$

Mas $X(0) = 0 \;\Rightarrow\; k_3 = 0$ e $X(L) = 0 \;\Rightarrow\; k_4\,\mathrm{senh}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \;\Rightarrow\; k_4 = 0$; novamente, $\lambda > 0$ não serve. Finalmente, se $\lambda < 0$, então

$$X(x) = k_5\cos(\sqrt{-\lambda}x) + k_6\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Para $X(0) = 0$, encontro $k_5 = 0$; para $X(L) = 0$ encontro

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}L) &= 0,\\ \sqrt{-\lambda}L &= n\pi,\\ \lambda_n &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\; n = 1,2,3,\ldots \;■\end{aligned}$$

e) Neste ponto, a equação ordinária em T é

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T(t) = 0,$$

Com solução

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n \cos(\frac{n\pi ct}{L}) + B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi ct}{L}), \\ \frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi ct}{L}) + B_n \cos(\frac{n\pi ct}{L})\right]. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade,

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}),$$

e a solução geral será do tipo

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(\frac{n\pi ct}{L}) + B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi ct}{L})\right]\operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) + \frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right].$$

As condições iniciais agora impõem:

$$\begin{aligned} \phi(x,0) = 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) + \frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right], \\ \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = 0 &= \frac{n\pi c}{L} B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}). \end{aligned}$$

Os coeficientes de Fourier vêm do procedimento clássico: obviamente, $B_n = 0$ e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) &= -\frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right], \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L}) &= -\frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L}), \\ \int_{x=0}^{L}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L})\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\,\mathrm{d}x &= -\int_{x=0}^{L}\frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\,\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

as autofunções são ortogonais (afinal de contas, X_n é solução de um problema de Sturm-Liouville), e somente termo $n = m$ da soma sobrevive, a partir do qual se pode obter A_m, e concluir a solução:

$$A_m \int_{x=0}^{L} \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})^2\,\mathrm{d}x = -\int_{x=0}^{L}\frac{\phi_0}{6}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{L})\,\mathrm{d}x \blacksquare$$

Exercício 18.26

Primeiramente, eu expando a derivada parcial em relação a r, obtendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Faço $u = R(r)T(t)$ e substituo na equação acima, obtendo

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}T + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}T = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}R.$$

Dividindo por RT,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{c^2T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda.$$

O sinal de menos acima é para simplificar a álgebra subseqüente. A equação diferencial ordinária em R será

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \lambda R = 0.$$

Isto é "quase" a equação de Bessel, e eu ainda preciso da mudança de variável

$$x = \sqrt{\lambda}r,$$

donde

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}.$$

Substituindo na equação diferencial ordinária original, encontro

$$\lambda\left[\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + R\right] = 0,$$

e agora sim, tenho a equação de Bessel dentro dos colchetes. As soluções possíveis são do tipo

$$R(r) = k_1J_0(\sqrt{\lambda}r) + k_2Y_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Como a minha solução $u(r,t)$ deve ser finita em $r = 0$, no centro do pandeiro, devo ter necessariamente $k_2 = 0$ para evitar singularidades logaritmicas. Com isto, a condição de contorno que preciso atender será

$$u(a,t) = R(a)T(t) = 0 \;\Rightarrow\; J_0(\sqrt{\lambda_n}a) = 0.$$

Os autovalores λ_n são os valores que produzem os sucessivos zeros de $J_0(x)$ na equação acima. Sem perda de generalidade, portanto, as autofunções do problema de Sturm-Liouville são

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r).$$

Neste ponto, é importante lembrar que a equação diferencial em R pode ser posta na forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + \lambda rR = 0,$$

e que portanto função "peso" é $w(r) = r$, e os produtos internos são do tipo

$$\langle f(r), g(r)\rangle = \int_0^a f(r)g(r)r\,dr.$$

Finalmente, só fazem sentido $\lambda_n s$ positivos. Com isto, fica imediatamente definida a equação diferencial em T:

$$\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2} + \lambda_n c^2T_n(t) = 0.$$

Esta é uma velha conhecida, com solução geral

$$T_n(t) = A_n\cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\,\mathrm{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t),$$

$$\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} = c\sqrt{\lambda_n}\left[-A_n \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t)\right].$$

A solução geral será

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \operatorname{sen}(c\sqrt{\lambda_n}t)\right] J_0(\sqrt{\lambda_n}r).$$

Vamos agora às condições iniciais:

$$u(r,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r) \;\Rightarrow\; A_n = 0, \forall n,$$

$$\frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = v_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_n}B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r).$$

O procedimento para a obtenção de B_n é clássico (note a presença da função peso):

$$v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r = \sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_n}B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r,$$

$$\int_{r=0}^{a}\left(v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr = \int_{r=0}^{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_n}B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr,$$

$$\int_{r=0}^{a}\left(v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\right)\,dr = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{r=0}^{a} c\sqrt{\lambda_n}B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\,dr\right).$$

Como as autofunções $J_0(\sqrt{\lambda_{m,n}}r)$ do problema de Sturm-Liouville são mutuamente ortogonais, apenas o termo $n = m$ do somatório sobrevive, produzindo o resultado final para B_m (a menos da solução das próprias integrais):

$$\int_{r=0}^{a} v_0(r)J_0(\sqrt{\lambda_m}r)r\,dr = c\sqrt{\lambda_m}B_m \int_{r=0}^{a}\left[J_0(\sqrt{\lambda_m}r)\right]^2 r\,dr \;\blacksquare$$

Exercício 18.27

A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{kx^2}{2} + A,$$

$$u(x) = -\frac{kx^3}{6} + Ax + B$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$0 = -\frac{kL^3}{6} + AL,$$

$$A = \frac{kL^2}{6},$$

$$u(x) = \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].$$

Como fica o problema em ψ?

$$\frac{\partial^2[\psi+u]}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2[\psi+u]}{\partial t^2} + kx = 0,$$
$$\underbrace{[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + kx]}_{=0} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Restou, portanto, a equação clássica da onda em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{aligned}
0 &= \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) &&\Rightarrow && \psi(0,t) = 0,\\
0 &= \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) &&\Rightarrow && \psi(L,t) = 0,\\
0 &= \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] &&\Rightarrow && \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right],\\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x,0)+u(x)] &&\Rightarrow && \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$X''T = \frac{1}{c^2}XT''$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda$$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + B_n\cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0 \Rightarrow B_n = 0,$$
$$\psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right],$$
$$-\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow$$
$$-\int_0^L \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = A_m\frac{L}{2},$$

A integral desta solução foi calculada por Maxima com

```
declare( [m], integer) ;
assume ( m > 0 ) ;
assume ( L > 0 ) ;
f : - (k/6)* x * (L^2 -x^2) * sin(m*%pi*x/L) ;
(2/L)*integrate(f,x,0,L) ;
```

cujo resultado é

$$A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k(-1)^n L^3}{n^3\pi^3} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare$$

Exercício 18.28

As condições de contorno são compatíveis com as autofunções

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

que teriam aparecido se não fosse o termo não-homogêneo $bx\cos(t)$ da EDP.
Inicialmente, decompomos a função na base:

$$bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Claramente,

$$f_n(t) = \cos(t), \qquad \forall n.$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
bx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\
bx \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\
b\int_{x=0}^{L} x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{x=0}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \\
b\int_{x=0}^{L} x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x &= \frac{L}{2} A_m \\
b\frac{(-1)^{m+1}L^2}{m\pi} &= \frac{L}{2} A_m, \\
A_m &= \frac{2b(-1)^{m+1}L}{m\pi}.
\end{aligned}$$

Fazemos agora

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

e substituímos na equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2 T_n}{\mathrm{d}t^2} X_n(x) &= a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{\mathrm{d}^2 X_n}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(t) \frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi} X_n(x); \qquad \Rightarrow \\
\frac{\mathrm{d}^2 X_n}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2} X_n(x); \\
\frac{\mathrm{d}^2 T_n}{\mathrm{d}t^2} + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T_n &= \frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi} \cos(t)
\end{aligned}$$

Resolvemos a equação diferencial não-homogênea:

```
(%i1) edo : 'diff(Tn,t,2) + alpha^2*Tn = beta*cos(t) ;
                            2
                           d Tn          2
(%o1)                      ---- + alpha  Tn = beta cos(t)
                             2
                           dt
(%i2) ode2(edo,Tn,t);
Is alpha zero or nonzero?

nonzero;
                   beta cos(t)          %i alpha t          - %i alpha t
(%o2)       Tn = ----------- + %k1 %e            + %k2 %e
                        2
                   alpha  - 1
```

Logo,

$$T_n(t) = \underbrace{\frac{2b(-1)^{n+1}L^3}{(n^2\pi^2a^2 - L^2)n\pi}}_{B_n} \cos(t) + C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Neste ponto,

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos(t) + C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-B_n \operatorname{sen}(t) + \frac{n\pi a}{L}\left(-C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

As condições iniciais são

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0 \qquad \Rightarrow \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + C_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow \\
C_n &= -B_n; \\
\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} &= 0 \qquad \Rightarrow \\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi a}{L} D_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow \\
D_n &= 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exercício 18.29

a)

$$\phi = \frac{c(x,t)}{c_0}; \ \xi = \frac{x}{v_0 t}.$$

b) As derivadas que aparecem na equação diferencial parcial são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\left[-\frac{x}{v_0 t^2}\right]; \\
\frac{\partial c}{\partial x} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t}; \\
\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t}\right] = c_0 \frac{1}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{1}{v_0 t} = \frac{c_0}{(v_0 t)^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação orignal, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0 \left[x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial c}{\partial x} \right], \\
-c_0 \left[-\frac{x}{v_0 t^2} \right] \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0 c_0 \left[x \frac{1}{(v_0 t)^2} \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{v_0 t} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} \right] \\
-\frac{x}{t} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0 \left[\frac{x}{v_0 t} \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} \right].
\end{aligned}$$

A EDO, portanto, será

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + (1 + \xi) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= 0, \\
\phi(0) &= 1, \\
\phi(\infty) &= 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

D

Instalação de ferramentas computacionais

Neste livro, nós utilizamos duas ferramentas computacionais: Maxima, e Python. Neste apêndice nós apresentamos um breve guia de como instalá-las em Windows, e em Linux.

D.1 – Windows

1. Abra o *Windows Explorer*.
2. Clique em "Computador".
3. Clique em "Propriedades do Sistema".

Isso lhe dirá se o seu sistema é de 32 ou de 64 bits. Em seguida, abra uma linha de comando e digite

[`echo %username%`] ;

isso lhe dirá o seu nome de usuário. No meu caso, a resposta é

[`IEUser`] .

D.1.1 – Maxima

1. Vá para `maxima.sourceforge.net`.
2. Baixe o instalador e instale Maxima.

Em seguida, torne Maxima visível a partir da linha de comando: primeiramente, descubra onde Maxima foi instalada. Você pode descobrir isso digitando, na linha de comando:

[`where maxima.bat`]

(isso não funcionará em Windows XP. . .).
No meu caso, a resposta é

[`C:\maxima-5.37.3\bin\maxima.bat`] ;

portanto, o *caminho* para Maxima é `C:\maxima-5.37.3\bin`. Agora,

1. Abra o Painel de Controle.
2. Clique em "Sistema e Segurança".

3. Clique em “Sistema”.
4. Clique em “Configurações avançadas”.
5. Clique em “Variáveis de ambiente”.
6. Edite a variável `PATH`, e inclua o caminho encontrado acima, antecedido por um sinal de `;` (`;C:\maxima-5.37.3\bin`), no fim. Note que o número da versão (5.37.3) pode ser diferente do seu! É o número da *sua* versão que você deve utilizar (é claro).

Agora, abra uma linha de comando, e digite

[`maxima`] ;

você deverá ser saudado por

```
Maxima 5.37.3_5_g8106b41_dirty http://maxima.sourceforge.net
using Lisp CLISP 2.49 (2010-07-07)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1)
```

e poderá iniciar uma sessão interativa de Maxima.

D.1.2 – Python

1. *Não* instale Python de `www.python.org`. Em vez disso, vá para `http://conda.pydata.org/miniconda.html`, e baixe o instalador da última versão disponível de Python 3 para Windows (você precisará saber se seu sistema é de 32 ou de 64 bits).
2. (Uma única vez) vá para “Painel de Controle”, “Sistema e Segurança”, “Sistema”; escolha “Configurações avançadas”, “Variáveis de Ambiente”, e edite: PATHEXT, em “Variáveis do Sistema”. O valor da variável é algo como

   `.COM;.EXE;.BAT;.CMD;.VBS;.VBE;.JS;.JSE;.WSF;.WSH;.MSC`

   Adicione `;.PY` ao fim:

   `.COM;.EXE;.BAT;.CMD;.VBS;.VBE;.JS;.JSE;.WSF;.WSH;.MSC;.PY`
3. (Uma única vez) execute a linha de comando como administrador (clicando com o botão direito no ícone), e digite:

   ```
   assoc .py=Python.File
   ftype Python.File=c:\Users\IEUser\Miniconda3\python.exe "%1" %*
   ```

   (você deve substituir `IEUser` pelo *seu* nome de usário; veja acima, na seção D.1).
4. Agora instale `numpy` e `numba` na linha de comando:

   ```
   conda install numpy
   conda install numba
   ```

D.1.3 – Recomendações finais para Windows

1. Utilize um editor capaz de definir *explicitamente* que a codificação de todos os arquivos texto utilizados é iso-8859-1. Recomendamos o *notepad++* (`https://notepad-plus-plus.org`).

2. Na linha de comando, digite `chcp` e verifique se o código de página é 850 antes de começar a trabalhar; se não for, digite `chcp 850`, ou (melhor ainda) `chcp 1252`. Talvez você tenha que fazer isso toda vez que abrir uma linha de comando.

3. Na barra superior do "prompt de comando" clique e escolha tanto em "Padrões", quando em "Propriedades": "Fonte", "Lucida Console".

D.2 – Linux

D.2.1 – Maxima

Em geral, Maxima não vem pré-instalada em Linux. Se a sua distribuição for baseada em debian, você pode instalar Maxima na linha de comando com

[`sudo apt-get install maxima`] .

De qualquer modo, toda distribuição vem com (pelo menos um) gerenciador de pacotes. Abra o seu, encontre Maxima, e instale. Ao contrário de Windows, isso automaticamente lhe dará acesso a Maxima a partir da linha de comando.

D.2.2 – Python

Python, ao contrário de Maxima, em geral já vem instalado em Linux. No entanto, `numpy` não vem: você pode instalá-lo (também) em seu gerenciador de pacotes, ou simplesmente — se sua distribuição for baseada em debian — com

[`sudo apt-get install python`] .

No entanto, dependendo da distribuição, isso pode ser Python 2 ou Python 3 (lembre-se de que neste livro estamos utilizando Python 3). Minha preferência é instalar novamente Python localmente (isto é, apenas para o usuário), utilizando miniconda (http://conda.pydata.org/miniconda.html): escolha o instalador adequado para Linux, baixe-o, e instale. Porém, tome um cuidado: quando o instalador lhe perguntar se você quer que ele inclua o caminho de miniconda em sua variável de ambiente `PATH`, diga *não*!
O resultado é que você terá uma instalação local. No meu caso, os executáveis ficam em `/home/nldias/miniconda3/bin/python3`.
Para rodar seus programas, agora, basta você inserir

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
```

(com o nome de sua conta! se seu nome de usuário for `pafuncio`, isso deve ser `#!/home/pafuncio/miniconda3/bin/python3`) na primeira linha de seus programas. Note que neste livro nós fomos conservadores, e utilizamos, em vez disso,

```
#!/usr/bin/python3
```

Use uma *ou* outra.
Se você optar por miniconda e sua instalação local, execute, na linha de comando (após a instalação de miniconda):

```
conda install numpy
```

D.2.3 – Recomendações finais para Linux

Como nós já comentamos no capítulo 3, excelentes editores para Linux são Vim, Emacs, e Gedit. Em princípio, deve ser muito fácil instalar qualquer um deles com seu gerenciador de pacotes. De qualquer maneira, os sítios oficiais são:

Emacs: https://www.gnu.org/software/emacs/.

Vim: http://www.vim.org/.

Gedit: https://wiki.gnome.org/Apps/Gedit.

E

Dados de vazão média anual e vazão máxima anual, Rio dos Patos, 1931–1999

O conteúdo completo do arquivo `patos-medmax.dat` é listado a seguir.

```
1931    21.57   272.00
1932    25.65   278.00
1933     4.76    61.60
1934    11.46   178.30
1935    28.10   272.00
1936    14.30   133.40
1937    22.09   380.00
1938    24.09   272.00
1939    22.29   251.00
1940     7.48    56.10
1941    27.49   171.60
1942    19.11   169.40
1943    15.62   135.00
1944    16.25   146.40
1945    16.57   299.00
1946    26.75   206.20
1947    21.88   243.00
1948    20.68   223.00
1949     8.36    68.40
1950    21.62   165.00
1951    24.72   266.00
1952    14.59   192.10
1953    15.31   131.80
1954    27.33   281.00
1955    28.23   311.50
1956    15.64   156.20
1957    41.70   399.50
1958    20.04   152.10
1959    14.50   127.00
1960    22.61   176.00
1961    30.82   257.00
1962    15.22   133.40
1963    22.49   248.00
1964    24.23   211.00
1965    36.80   208.60
1966    21.60   152.00
1967    13.25    92.75
1968     9.05   125.00
1969    22.94   135.60
1970    25.95   202.00
1971    32.82   188.00
1972    34.13   198.00
1973    30.33   252.50
1974    17.81   119.00
1975    26.77   172.00
1976    32.50   174.00
1977    13.63    75.40
```

1978	13.26	146.80
1979	26.97	222.00
1980	26.92	182.00
1981	14.73	134.00
1982	31.68	275.00
1983	57.60	528.00
1984	27.13	190.00
1985	12.55	245.00
1986	16.74	146.80
1987	26.64	333.00
1988	15.22	255.00
1989	31.20	226.00
1990	43.48	275.00
1991	11.92	131.00
1992	35.24	660.00
1993	34.30	333.00
1994	20.74	128.00
1995	31.78	472.00
1996	35.44	196.00
1997	41.02	247.50
1998	51.55	451.00
1999	24.49	486.00

Índice Remissivo

Álgebra Linear, 125
ênupla, 121
strings, 45

abordagem lagrangeana, 204
análise de estabilidade de von Newmann, 395
análise dimensional, 22
aproximação de Padé, 571
arquivo
  binário, 53
  texto, 53
autovalor, 164, 171
autovetor, 164, 171

Campos
  irrotacionais, 234
cisalhamento, 147
coeficiente de decaimento, 99
coeficiente de dispersão longitudinal, 99
coeficiente de viscosidade, 147
comprimento
  de curva, 208
condições de Cauchy-Riemman, 281
convenção de soma de Einstein, 131
convolução
  de Laplace, 358
corte no plano complexo, 278
critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy, 396
curva de permanência, 48

delta de Kronecker, 132
delta de Dirac, 373
demanda bioquímica de oxigênio, 100
desigualdade
  de Bessel, 468
  de Schwarz, 447
  do triângulo, 40
determinante, 139
diagonalização, 187
diferenças finitas
  esquema centrado, 83
  esquema progressivo, 79
difusão numérica, 396
difusividade
  hidráulica, 97
dimensão física, 25
dimensão física fundamental, 163
dimensão fundamental, 28
distribuição, 375
distribuição acumulada empírica de probabilidade, 48
divergência, 219
divisor, 571

editor de texto, 44
equação
  íntegro-diferencial, 491
  característica, 164
  da difusão, 405, 529
    2-D, 424
  de advecção-difusão, 397
  de Airy, 349
  de Bernoulli, 252
  de Boussinesq para águas subterrâneas, 530
  de difusão-advecção, 368
  de Euler, 268
  de Legendre, 272, 349
  de onda, 554
  de Sturm-Liouville, 512
equação diferencial ordinária
  solução em série, 325
equação diferencial parcial
  não-linear de Boussinesq, 95
equações
  paramétricas, 158
equações diferenciais exatas, 257
equações diferenciais ordinárias
  classificação, 241
  de ordem 1
    linearizáveis, 252
  homogêneas, 242
  lineares, 243

ordem 2, coeficientes constantes, 260
não-homogêneas, 242
não-lineares, 243
equações diferenciais parciais
classificação, 526
equações diferencias ordinárias
lineares
a coeficientes constantes, 243
equações paramétricas
de um corpo, 213
de uma superfície, 209
erro de arredondamento, 395
espaço vetorial, 121, 126
base, 121
dextrógira, 121, 141, 146
levógira, 121, 141, 146
ortonormal, 132, 446
de dimensão infinita, 449
dimensão, 126
esquema
upwind, 400
ADI, 424
condicionalmente estável, 401
de Crank-Nicholson, 413
de Lax, 396
explícito, 408
implícito, 411
incondicionalmente instável, 396
exponenciação, 46

fórmula
de de Moivre, 37
de Euler, 38
integral de Cauchy, 290, 292
filtragem, 490
flambagem, 511
fração polinomial, 571
função
ímpar, 42, 459
erro, 72
analítica, 281, 298
característica, 489
de Bessel, 337
de Green, 505
de Heaviside, 378
de ordem exponencial, 351
distribuição acumulada (FDA), 48
extensão ímpar, 460
extensão par, 460
gama, 58, 89
gama incompleta inferior, 89, 320
linear, 142
par, 42, 459
plurívoca, 276, 277
quadrado-integrável, 450
racional, 571
singular, 299
funções
hiperbólicas, 42
funcional, 375
linear, 143

gradiente, 221

hipervolume, 139

identidade
de Jacobi, 139
de Lagrange, 513
identidades vetoriais, 226
igualdade
de Parseval, 469
independência linear, 126
indução finita, 578
integral
de linha, 209
de superfície, 211

jacobiano, 199, 212

lei
de Darcy, 224
lei de Newton para viscosidade, 147
lema de Riemman-Lebesgue, 468

método
da transformação de Boltzmann, 97
das características, 522
das funções de Green, 504
de Crank-Nicholson, 413
de eliminação de Gauss, 178
de Eulder de ordem 2, 86
de Euler, 78
de Frobenius, 326
de Lax, 396
de Runge-Kutta, 84
multidimensional, 93
mínimos quadrados, 472
matriz
adjunta, 502
ampliada, 184
forma escada, 187
transposta, 132
tridiagonal, 412

matriz dimensional, 27, 160
Maxima, 44, 55
  assume, 58
  declare, 58, 458
  diff, 56
  divide, 572
  expand, 55
  factor, 56
  integrate, 58
  laplace, 353
  legendre, 466
  ode2, 78, 100, 245, 252, 274, 653, 669
  quit, 55
  ratsimp, 594, 617, 745
  solve, 56
  taylor, 72
modelo
  de Streeter-Phelps, 100

número
  complexo, 33
    conjugado, 35
    limite, 41
    módulo, 34
    parte imaginária, 34
    parte real, 34
  de Fourier, 408
  de Courant, 395
  de ponto flutuante, 47
  inteiro, 45
  natural, 35
  real, 47

onda cinemática, 391
operador
  adjunto, 500
  auto-adjunto, 501
  de Sturm-Liouville, 513
  diferencial, 242, 357
operador diferencial
  adjunto, 503
oxigênio dissolvido, 100

permutação, 133
  ímpar, 134
  par, 134
  símbolo de, 134
    cálculo, 135
polinômio, 571
  irredutível, 575
polinômio característico, 167
polinômos
  de Legendre, 465
ponto crítico, 236
ponto de extremo, 236
ponto de ramificação, 277
ponto singular, 326
  regular, 326
posição de plotagem, 49
princípio da indução finita, 35
probabilidade, 48
produto
  matricial, 131, 145
produto interno, 144, 444
projeção, 155, 158
Python, 44
  array, 54, 94
  complex, 47
  float, 47
  for, 46
  list comprehension, 624
  print, 46
  sort (ordenação), 51
  while, 614
  write, 51
  módulos, 47
  Numpy, 54

quociente, 571

regra
  da mão direita, 150
  da cadeia, 195
  de Leibnitz, 204
  de Simpson, 70
  do trapézio, 64
retas reversas, 130
rotação, 147
  matriz de, 148, 149

série
  absolutamente convergente, 286
  convergência, 284, 294
  de Fourier, 454
    complexa, 455
    trigonométrica, 458
  de Laurent, 294
  de Taylor, 72
  teste da razão, 287
sequência, 283
simetria axial, 543
singularidade
  isolada, 296

sistema
de equações diferenciais, 100, 169, 191
de equações lineares, 155
sistema de unidades, 24
solução
de d'Alembert, 558
solução auto-similar, 531
subespaço vetorial, 157
superfície freática, 97

tensão
de cisalhamento, 147
tensores, 146
Teorema
da convolução
de Laplace, 358
da função implícita
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 197
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, 199
de Cayley-Hamilton, 169
de Pitágoras, 128
dos Cossenos, 128
dos Pi*s*, 160
dos Pi*s* 159
Fundamental da Álgebra, 34
teorema
da convolução
de Fourier, 489
de Fourier (inverso), 490
da divergência, 230
da função implícita
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 202
de Green, 287
de Parseval, 492
de Stokes, 232
de Sturm-Liouville, 513
do transporte de Reynolds, 206
dos resíduos, 305
Fundamental da Álgebra, 572
transformação linear, 144
invariantes, 168
inversível, 159
núcleo, 155
nulidade, 156, 185
posto, 156, 185
simétrica, 171
transposta, 170
transformação negativa definida, 175
transformação negativa semidefinida, 176
transformação positiva definida, 175
transformação positiva semidefinida, 175
transformada de Fourier, 476
da derivada, 482
linearidade, 482
teorema da inversão, 476
transformada de Laplace, 351
fórmula da inversão, 493
fórmula de inversão, 360

variável adimensional, 26
vazão
volumétrica, 99
vetor, 120
algébrico, 120
coordenadas, 121
elementos, 122
geométrico, 120
módulo, 123
norma, 445
unitário, 130, 446
vetores
ortogonais, 446
produto escalar, 129
produto misto, 137
produto vetorial, 136
soma de, 122
vigas, 384

Referências Bibliográficas

Abramowitz, M. e Stegun, I. A., editores (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.

Barenblatt, G. I. (1996). *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press.

Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*. Editora HARBRA Ltda.

Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, Inc., New York.

Bender, C. M. e Orszag, S. A. (1978). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York.

Boas, M. (1983). *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John wiley & Sons.

Boussinesq, J. (1903). Sur le débit, en temps de sécheresse, d'une source alimentée par une nappe d'eaux d'infiltration. *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci*, 136:1511–1517.

Boussinesq, M. J. (1904). Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol sur le débit des sources. *J des Mathématiques Pures et Appliquées*, 5éme Sér., 10:5–78.

Bressoud, D. M. (1991). *Second Year Calculus*. Springer-Verlag.

Brutsaert, W. (2005). *Hydrology. An introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Brutsaert, W. e Lopez, J. P. (1998). Basin-Scale Geohydrologic Drought Flow Features of Riparian Aquifers in the Southern Great Plains. *Water Resour. Res.*, 34(2):233–240.

Butkov, E. (1988). *Física Matemática*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.

Chor, T. L. e Dias, N. L. (2015). Technical Note: A simple generalization of the Brutsaert and Nieber analysis. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 19(6):2755–2761.

Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.

Conrad, B. (2005). Impossibility theorems for elementary integration. Em *Academy Colloquium Series. Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA*. Liouville's Theorem.

Courant, R. e Robbins, H. (1941). *What is Mathematics*. Oxford University Press.

de Broglie, L. (1925). Recherches sur la théorie des quanta. *Ann. Phys.(Paris)*, 10(3):22–128.

Derbyshire, J. (2003). *Prime Obsession*. PLUME, London, England.

Dettman, J. W. (1984). *Applied Complex Variables*. Dover Publications, New York.

Dettman, J. W. (1988). *Mathematical methods in physics and engineering*. Dover Publications, New York.

Dias, N. L. (1986). Estimativas climatológicas de evaporação em lagos. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.

Dias, N. L. (1995). Obtenção de curvas de remanso pelo método de Runge-Kutta. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 277–285, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

Dias, N. L. (2003). Obtenção de uma solução analítica da equação de difusão-advecção com decaimento de 1ª ordem pelo método da transformação de similaridade generalizada. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:181–188.

Dias, N. L. (2013). Research on atmospheric turbulence by Wilfried Brutsaert and collaborators. *Water Resour. Res.*, 49:7169–7184.

Dias, N. L., Chor, T. L., e de Zárate, A. R. (2014). A semianalytical solution for the Boussinesq equation with nonhomogeneous constant boundary conditions. *Water Resour. Res.*, 50(8):6549–6556.

Einstein, A. (1905). The photoelectric effect. *Ann. Phys.*, 17(132):4.

Finnigan, J. (2006). The storage term in eddy flux calculations. *Agr. Forest. Meteorol.*, 136:108 – 113.

Fisher, E. (1954). The period and amplitude of the van der Pol limit cycle. *J. Appl. Phys.*, 25(3):273–274.

French, R. H. (1986). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.

Garbi, G. G. (1997). *O Romance das Equações Algébricas*. Makron, São Paulo.

Greenberg, M. D. (1978). *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, London.

Greenberg, M. D. (1998). *Advanced engineering mathematics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2ª edição.

Havil, J. (2003). *Gamma. Exploring Euler's Constant*. Princeton University Press, Princeton.

Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.*, 43(3–4):172–198.

Jaluria, Y. e Torrance, K. E. (1986). *Computational Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, New York.

Jeffrey, A. (2003). *A handbook of mathematical formulas and integrals*. Academic Press, San Diego.

Kaimal, J. C. (1973). Turbulence Spectra, Length Scales and Structure Parameters in the Stable Surface Layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 4:289–309.

Kreider, D. L., Kuller, R. G., Ostberg, D. R., e Perkins, F. W. (1966). *An Introduction to Linear Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

Kumar, P. e Sharan, M. (2010). An analytical model for dispersion of pollutants from a continuous source in the atmospheric boundary layer. *Proceedings of the Royal Society A*, 466:383–406.

Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.

Lamb, H. (1879, 1945). *Hydrodynamics*. Dover, Mineola, N.Y.

Lambers, J. V. (2014). MAT280: Multivariable Calculus. Obtido de https://www.math.usm.edu/lambers/mat280/ em 2023-08-04.

Langhaar, H. L. (1951). *Dimensional analysis and theory of models*. John Wiley & Sons, New York.

Lebedev, N. N. (1972). *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York.

Leithold, L. (1977). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Harbra, São Paulo.

Lima, E. L. (1976). *Curso de análise*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada — IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 7 edição.

Lin, W. e Gray, D. M. (1971). Calculation of Backwater Curves by the Runge-Kutta Method. Obtido de http://www.usask.ca/hydrology/papers/Lin_1971.pdf, em 27/02/2017.

Liouville, J. (1833a). Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal de l'École Polytechnique*, XIV:124–148.

Liouville, J. (1833b). Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal de l'École Polytechnique*, XIV:149–193.

Liouville, J. (1833c). Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10:347–359.

Ludwig, D., Jones, D. D., e Holling, C. S. (1978). Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. *J. Anim. Ecol.*, 47(1):315–332.

Nearing, J. (2009). *Mathematical Tools for Physics*. Dover Publications.

Needham, T. (2005). *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press, Oxford UK.

Oliphant, T. E. (2006). *Guide to Numpy*. Trelgol Publishing.

O'Loughlin, E. M. e Bowmer, K. H. (1975). Dilution and decay of aquatic herbicides in flowing channels. *J. Hydrol.*, 26:217–235.

Pauling, L. e Wilson, Jr., E. B. (1985). *Introduction to Quantum Mechanics. With applications to Chemistry*. Dover, New York.

Penrose, R. (2007). *The road to reality*. Vintage Books — Random House, New York.

Piskounov, N. (1969). *Differential and Integral Calculus*. MIR, Moscow.

Piskunov, N. (1969). *Differential and Integral Calculus*. MIR Publishers, Moscow.

Planck, M. (1901). On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Ann. Phys.*, 4(553):1.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., e Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C; The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2ª edição.

Reynolds, O. (1900). On the extent and action of the heating surface of steam boilers, Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Vol XIV, session 1874-5. Em *Papers on Mechanical and Physical Subjects*, páginas 81–85. Cambridge University Press.

Richards, J. I. e Youn, H. K. (1990). *Theory of distributions. A nontechnical introduction.* Cambridge University Press.

Risch, R. H. (1969). The problem of integration in finite terms. *T. Am. Math. Soc.*, 139:167–189.

Risch, R. H. (1970). The solution of the problem of integration in finite terms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76(3):605–608.

Saichev, A. I. e Woyczyński, W. A. (1997). *Distributions in the physical and engineering sciences*. Birkhäuser, Boston.

Schnoor, J. L. (1996). *Environmental Modeling*. Wiley-Interscience.

Simonsen, M. H. (1994). *Ensaios Analíticos*. Editora da Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

Sommerfeld, A. (1916). Zur quantentheorie der spektrallinien. *Ann. Phys.*, 356(17):1–94.

Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz Master Class: an introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Streeter, H. W. e Phelps, E. B. (1925). A Study of the pollution and natural purification of the Ohio river. III. Factors concerned in the phenomena of oxidation and reaeration. Public Health Bulletin 146, Reprinted by U.S. Department of Health, Education and Welfare, Public Health Service, 1958.

White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Education, New York.

Wilson, W. (1915). The quantum-theory of radiation and line spectra. *Philos.Mag.*, 29(174):795–802.

Zemanian, A. H. (1987). *Distribution theory and transform analysis*. Dover, New York.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-922827-0-7
9 788592 282707