TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 08 out 2021
Entrega em 09 out 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Considere o programa a seguir

```
1 #!/usr/bin/python
2 from numpy import array
3 a = array([1,2,3])
4 b = array([4,5,6])
5 c = a*b
6 print(c)
```

Utilizando apenas elementos de Python abordados no livro-texto, como você deve modificar o programa para que ele imprima o produto escalar $(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6)$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Devemos modificar a linha 6 para `print(c.sum())` ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O estudo de perfis de vento na atmosfera próximo da superfície indica que a derivada da velocidade do vento médio, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, depende da distância da superfície z, da tensão média de cisalhamento do vento com a superfície τ, do fluxo de calor sensível H (que aquece a atmosfera a partir da superfície), do calor específico a pressão constante do ar c_p, da massa específica do ar ρ, e do "parâmetro de flutuabilidade" g/T, onde g é a aceleração da gravidade e T é a temperatura média do ar próximo da superfície. Essa lista pode ser significativamente reduzida definindo-se a velocidade de atrito u_* e a escala turbulenta de temperatura T_*:

$$
\begin{aligned}
u_* &\equiv \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \\
H &\equiv \rho c_p u_* T_*.
\end{aligned}
$$

A lista de variáveis intervenientes torna-se então z, u_*, T_*, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, e g/T. Utilizando como variáveis comuns, **obrigatoriamente**, z, u_* e T_*, encontre os parâmetros adimensionais que regem o problema. **Note que uma das dimensões fundamentais que deve ser usada é a temperatura** Θ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A lista de dimensões fundamentais é L, T e Θ. A lista de variáveis e suas dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![z]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![u_*]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-1}, \\
[\![T_*]\!] &= \Theta, \\
[\![du/dz]\!] &= \mathsf{T}^{-1}, \\
[\![g/T]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\Theta^{-1}.
\end{aligned}
$$

Os primeiro parâmetro adimensional é:

$$
\Pi_1 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} z^a u_*^b T_*^c,
$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$, e

$$
\Pi_1 = \frac{z}{u_*}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}.
$$

O segundo parâmetro adimensional é:

$$
\Pi_2 = \frac{g}{T} z^a u_*^b T_*^c
$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -2$, e $c = -1$, e

$$
\Pi_2 = \frac{g z T_*}{T u_*^2} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A função

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$$

não pode ser integrada em termos de funções transcedentais elementares. No entanto, expandindo-se $\exp(-x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, é possível obter facilmente uma "série" para $f(x)$, cujos primeiros termos são

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{24} - \frac{x^{9/2}}{120} + \ldots$$

a) [10] Obtenha o termo geral da série acima, ou seja: obtenha as expressões para C_n e p_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ que concordam com os termos acima e tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{p_n}.$$

b) [15] Integrando termo a termo, encontre a série (isto é, D_n e q_n) da primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{q_n}$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\exp(-x)}{x^{1/2}} &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!}; \end{aligned}$$

portanto, $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ e $p_n = n - 1/2$.

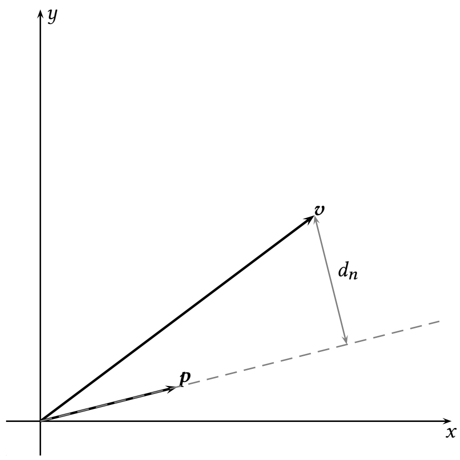
b) Integrando termo a termo,

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!} x^{n+1/2}; \end{aligned}$$

logo, $D_n = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}$ e $q_n = n + 1/2$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Na figura ao lado, se $\boldsymbol{p} = (2, 1/2)$ e $\boldsymbol{v} = (4, 3)$, obtenha d_n, a distância do ponto $(4, 3)$ à reta-suporte de $\boldsymbol{p}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O vetor unitário $\boldsymbol{m}$ paralelo a $\boldsymbol{p}$ é

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}| &= \sqrt{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}} = \sqrt{4 + 1/4} \\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2).
\end{aligned}
$$

A projeção de $\boldsymbol{v}$ na direção de $\boldsymbol{p}$ é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m} &= (4, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2) \\
&= \frac{19}{2\sqrt{4 + 1/4}}
\end{aligned}
$$

Portanto, o vetor que vai da origem até imediatamente abaixo de $\boldsymbol{v}$ é

$$
\boldsymbol{w} = \frac{19}{2\sqrt{4 + 1/4}} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/4}}(2, 1/2) = \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right).
$$

O vetor que vai da ponta de $\boldsymbol{w}$ até a ponta de $\boldsymbol{v}$ é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \\
&= (4, 3) - \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right) \\
&= \left(-\frac{8}{17}, \frac{32}{17}\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$
d_n = \sqrt{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}} = \frac{8}{\sqrt{17}} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹