TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 09 Jul 2021
Entrega em 10 Jul 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

ATENÇÃO: PROVA SEM CONSULTA, E SEM USO DE CALCULADORAS, ETC..
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Obtenha a série de Taylor bivariada de

$$f(x,y) = x^2\exp(x+y) + y\,\mathrm{sen}(x)$$

até ordem 2, em torno de $(1,1)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Desejamos calcular

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0).$$

Trata-se portanto de um exercício de derivação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + y\cos(x) \\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + y\cos(x), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\exp(x+y) + \mathrm{sen}(x), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) - y\,\mathrm{sen}(x) \\
&= [2 + 4x + x^2]\exp(x+y) - y\,\mathrm{sen}(x), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\exp(x+y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + \cos(x) \\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + \cos(x).
\end{aligned}$$

Os valores da função e de suas derivadas em (x_0,y_0) são

$$\begin{aligned}
(x_0,y_0) &= (1,1), \\
f(x_0,y_0) &= \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1), \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} &= \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} &= 7\mathrm{e}^2 - \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} &= \mathrm{e}^2, \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1).
\end{aligned}$$

Substituindo na expansão em série de Taylor,

$$f(x,y) \approx \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1) + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1) + [\mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1)](y-1) + \\ \frac{1}{2}[7\mathrm{e}^2 - \mathrm{sen}(1)](x-1)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2(y-1)^2 + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1)(y-1) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Encontre a equação do plano no $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -2)$, e que passa pela origem.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação geral do plano é $ax + by + cz = d$, onde (a, b, c) são os elementos de um vetor perpendicular ao plano. No nosso caso, como o plano contém a origem, $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = d = 0$. Além disso, um vetor perpendicular aos dois vetores pode ser obtido por meio do produto vetorial:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

Logo, $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ (a menos de uma constante multiplicativa) e a equação do plano é $x + 2y + z = 0$ ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule

$$I = \iint_{R_{xy}} (1 + x + y)\,\mathrm{d}A,$$

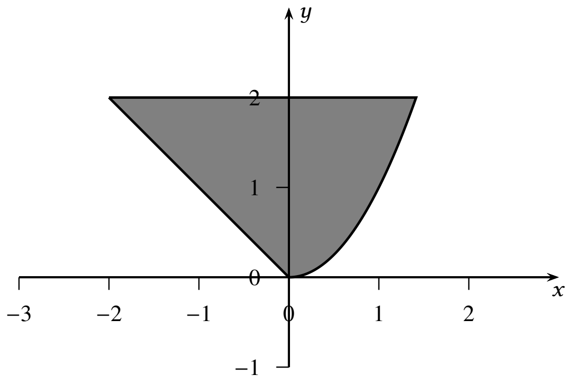
onde R_{xy} é a região do $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$\begin{aligned} &x = -y, && 0 \le y \le 2,\\ &x = \sqrt{y}, && 0 \le y \le 2,\\ &y = 2. && \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A região precisa ser mapeada, e está mostrada ao lado:

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^{2}\int_{x=-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{2}\left[x + xy + \frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^2\left\{\left[\sqrt{y} + y\sqrt{y} + \frac{y}{2}\right] - \left[-y - y^2 + \frac{y^2}{2}\right]\right\}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^2\left[\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} + \frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y = \frac{11\times 2^{7/2} + 130}{30} \blacksquare \end{aligned}$$



Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule

$$I = \iint_{R_{xy}} (y - x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

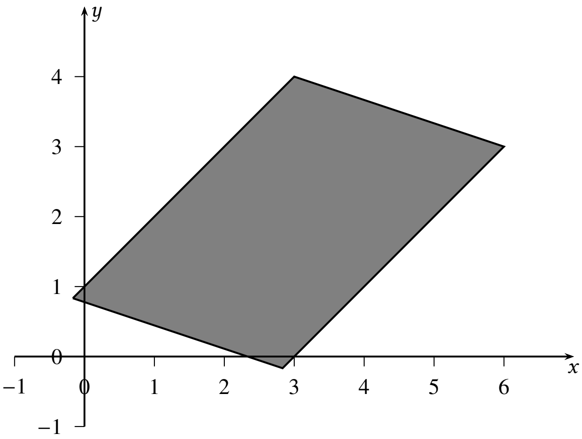
onde R_{xy} é a região do plano xy situada entre as retas

$$y = x+1, \qquad y = x-3, \qquad y = -\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}, \qquad y = -\frac{1}{3}x+5,$$

mostrada na figura ao lado, utilizando, **obrigatoriamente**, a mudança de variáveis

$$u = y - x,$$
$$v = y + \frac{1}{3}x,$$

e integrando na região R_{uv} correspondente.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Primeiro nós invertemos a relação entre u, v e x, y:

$$\begin{aligned}
u - v &= -x - \frac{1}{3}x = -\frac{4}{3}x,\\
u + 3v &= y + 3y = 4y;\\
x &= \frac{3}{4}(v - u),\\
y &= \frac{1}{4}(3v + u).
\end{aligned}$$

As 4 retas no plano xy tornam-se

$$\begin{aligned}
y &= x + 1,\\
\frac{1}{4}(3v + u) &= \frac{3}{4}(v - u) + 1,\\
\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u + 1,\\
u &= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= x - 3,\\
\frac{1}{4}(3v + u) &= \frac{3}{4}(v - u) - 3,\\
\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u - 3,\\
u &= -3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9},\\
\frac{1}{4}(3v + u) &= -\frac{1}{3}\frac{3}{4}(v - u) + \frac{7}{9},\\
\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= -\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}u + \frac{7}{9},\\
v &= \frac{7}{9}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{3}x + 5,\\
\frac{1}{4}(3v + u) &= -\frac{1}{3}\frac{3}{4}(v - u) + 5,\\
\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= -\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}u + 5,\\
v &= 5.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Portanto, no plano uv a região de integração é $u \in [-3, 1]$, $v \in [7/9, 5]$; agora,

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

e nos resta calcular o jacobiano,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix} = -9/16 - 3/16 = -12/16 = -3/4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{u=-3}^{1} \int_{v=7/9}^{5} \left[\frac{1}{4}(3v + u) - \frac{3}{4}(v - u) \right] |-3/4|\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-3}^{1} \int_{v=7/9}^{5} u|-3/4|\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{4} \int_{u=-3}^{1} u \left[\int_{v=7/9}^{5} \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{4} \int_{u=-3}^{1} u \left[5 - \frac{7}{9} \right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{19}{6} \int_{u=-3}^{1} u\, \mathrm{d}u = -\frac{38}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$