

Memorial Descritivo

Nelson Luís Dias
Departamento de Engenharia Ambiental
Universidade Federal do Paraná

6 de dezembro de 2014

Sumário

Lista de Siglas	6
Apresentacao	7
0 Introdução	9
1 Atividades de ensino e orientação	10
1.1 Ensino de graduação	10
1.2 Ensino de pós-graduação	38
1.3 Atividades de orientação	53
2 Atividades de produção intelectual	58
2.1 Comunicações em Congressos	58
2.2 Artigos publicados em periódicos com corpo de revisores	64
2.3 Livros publicados	68
2.4 Capítulos de livros publicados	68
3 Atividades de extensão	70
3.1 Relatórios técnicos	71
4 Coordenação de projetos de pesquisa, ensino ou extensão e liderança de grupos de pesquisa	78
4.1 Pré-história: Mestrado	78
4.2 Pré-história: Doutorado	79
4.3 História	79
4.4 Coordenação de projetos	84
4.5 Liderança de Grupos de Pesquisa	91
5 Coordenação de cursos ou programas de graduação ou pós-graduação	92
6 Participação em bancas de concursos, de mestrado ou de doutorado	94
6.1 Graduação	94
6.2 Mestrado	95
6.3 Doutorado	97
6.4 Participação em banca de comissões julgadoras de Concurso público .	97
7 Organização e/ou participação em eventos de pesquisa, ensino ou extensão	99
8 Apresentação, a convite, de palestras ou cursos em eventos acadêmicos	100

9	Recebimento de comendas e premiações advindas do exercício de atividades acadêmicas	101
10	Participação em atividades editoriais e/ou de arbitragem de produção intelectual e/ou artística	102
11	Assessoria, consultoria ou participação em órgãos de fomento à pesquisa, ao ensino ou à extensão	103
12	Exercício de cargos na Administração Superior, Setorial, Departamental, Coordenação de Cursos Graduação e Pós-Graduação, representação em Órgãos Colegiados Superiores	105
Atividades futuras		106
A	Parte da Apostila de Mecânica dos Fluidos e Fenômenos de Transporte (UFRJ e UFPR)	131
B	Parte de Livro (a ser submetido para publicação) de Matemática Aplicada	189
C	Parte do material didático da disciplina “Camadas-Limite Naturais e Transporte de Poluentes (TEA757)	224
D	Palestra “Deterministic and stochastic views of turbulence”, VIII Brazilian Micrometeorology Workshop Santa Maria RS	238
E	Sumário de “Pequena Introdução aos Números”	284
F	A dedução da equação de Priestley-Taylor	287
G	Uma revisão de evaporação em lagos	311
H	Dinâmica espectral de turbulência: relatório da 1ª bolsa de pesquisa obtida junto ao CNPq	328

Lista de Tabelas

1.1	Programa típico da disciplina TT708 “Micrometeorologia e Poluição Atmosférica” (conforme oferecido em 2002)	40
1.2	Programa típico da disciplina TT704 “Mecânica dos Fluidos” (conforme oferecido em 2002)	41
1.4	Programa da disciplina TT706 Escoamentos Naturais.	42
1.3	Programa da disciplina TT705 Métodos Estocásticos	44
1.5	Programa da disciplina TQ857 Monitoramento da Qualidade do Ar	45
1.6	Programa da disciplina TC720 Programação científica com Python, Gnuplot, Metapost, e L ^A T _E X (1º trimestre de 2009)	47
1.7	Programa da disciplina TEA752 Métodos Matemáticos em Engenharia Ambiental no 1º trimestre de 2013.	48
1.8	Programa da disciplina “TEA757 Camadas-Limite Naturais e Transporte de Poluentes” em 2013.	50
1.9	Programa da disciplina “Turbulência” (equivalente à TC709 em 2011, e à TEA778 em 2014) em 2002.	52
12.1	Atividades de administração	105

Lista de Figuras

1.1	Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 1.	12
1.2	Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 2.	13
1.3	Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 3.	14
1.4	Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 4.	15
1.5	Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 5.	16
1.6	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 1. . .	20
1.7	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 2. . .	21
1.8	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 3. . .	22
1.9	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 4. . .	23
1.10	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 5. . .	24
1.11	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 6. . .	25
1.12	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 7. . .	26
1.13	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 8. . .	27
1.14	23 ^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 9. . .	28
1.15	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 1. .	31
1.16	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 2. .	32
1.17	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 3. .	33
1.18	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 4. .	34
1.19	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 5. .	35
1.20	Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 6. .	36
4.1	Taxa de variação da entalpia armazenada nas águas do lago Serra Azul: dados medidos e previsão do modelo CRLE.	80
4.2	Comparação entre a taxa de dissipação estimada estimada pelo espectro da velocidade longitudinal (abscissas) e pela lei dos 4/5 (ordenadas). Fonte: Chamecki (2003)	81
4.3	Comparação entre a climatologia do modelo hidrometeorológico de evapotranspiração e dados medidos em estações micrometeorológicas. Fonte: Kan (2005)	82
4.4	Perfis de temperatura e umidade medidos com um veículo aéreo não-tripulado	84

Lista de Siglas

CEHPAR	Centro de Hidráulica e Hidrologia Prof. Parigot de Souza
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CGEA	Curso de Graduação em Engenharia Ambiental
COPPE/UFRJ	Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da UFRJ
CPTEC	Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos
L <small>A</small> T <small>E</small> X	Veja: Lamport (1994)
UFPR	Universidade Federal do Paraná
IIEGA	Instituto Internacional de Ecologia e Gerenciamento Ambiental
IME	Instituto Militar de Engenharia
INPE	Instituto de Pesquisas Espaciais
LEMMA	Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental (www.lemma.ufpr.br)
PPGEA	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
PPGERHA	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental
SEMA/PR	Secretaria de Meio Ambiente do Estado do Paraná
SIMEPAR	Sistema Meteorológico do Paraná
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
USP	Universidade de São Paulo
VANT	Veículo Aéreo Não-Tripulado

Apresentação

Este documento contém o memorial descritivo de minhas atividades acadêmicas, que é um requisito parcial, na UFPR (Universidade Federal do Paraná) para a última progressão da carreira de docente, de Professor Associado IV para Professor Titular.

Ele contém, na minha visão, aqueles elementos que considerei mais importantes ao longo dessa carreira que, incluídas as atividades de docência em 4 instituições de ensino, e os interstícios para mestrado e doutorado, completa quase 30 anos.

É uma regra elementar da modéstia (que, se não for uma virtude inata, deve ao menos ser vigorosamente perseguida) que um autor não deve exaltar a si ou a suas realizações. Por outro lado é uma obrigação regimental registrar aqui, da melhor maneira possível, o conjunto de minhas atividades, para que as mesmas possam ser julgadas. Procurei portanto indicar a relevância que eu acreditava e acredito que cada uma das atividades tinha para o ensino, a pesquisa e a extensão, mas evitar associar a elas meus próprios juízos de valor.

Mesmo assim, é quase impossível compreender a relevância do que se faz, no momento em que se faz. E apenas um punhado de afortunados (e merecedores) têm os seus nomes lembrados pelas gerações seguintes. Não farei, com toda certeza, parte desses, mas terei procurado contribuir, com honestidade, no melhor de minha capacidade.

Em uma época de intensa atividade de pesquisa no mundo inteiro, e de tantas métricas para a mesma, entre fatores de impacto, conceitos Qualis, prêmios, honrarias, etc., é quase impossível não ser influenciado pela quantificação da atividade acadêmica e de pesquisa. As métricas, ainda que imperfeitas, são necessárias, e têm seu lugar. Cabe a mim respeitá-las, assim como ao julgamento de cada banca, cada comitê de revisão de propostas de projetos, e cada comitê de revisão de artigos submetidos. Não será diferente aqui.

Isso não impede que haja uma visão pessoal, e uma apreciação um pouco mais qualitativa, do ensino, da pesquisa e da extensão, desde que as mesmas não sejam oferecidas como desculpas pela falta de desempenho, ou como alternativas pouco justificáveis de avaliação acadêmica.

Na medida em que achei cabível, e em que não havia dano à avaliação objetiva à qual se presta este documento, procurei (ou me dei a liberdade de) colorir um pouco este texto com minha visão. Como deve se ensinar tal e qual assuntos? Que enfoque usar, e por que eu decidi por este ou aquele? Por que me interessei por balanços de entalpia em lagos (para citar um exemplo), ou pelas relações de isotropia em turbulência? Sempre que havia uma resposta boa, procurei registrá-la. Não somente no texto mas também com figuras e mesmo facsimiles de notas de aula. Deve ser assim possível depreender um pouco dessas atividades aqui relatadas no próprio texto, e não apenas na consulta fastidiosa das referências bibliográficas.

Com isso, o texto possui seções que evitam a simples enumeração de aulas, *papers*, palestras e quetais. Em outras partes, não foi possível, ou não cabia, fugir à

enumeração desses itens.

Em uma certa medida, espero que esse alargamento de visão, e ligeira relativização das regras rígidas de comunicação acadêmica, sirvam para explicar decisões pedagógicas ou escolhas de pesquisa e que, dessa forma, a banca que me lê tenha uma visão mais completa do contexto das atividades aqui relatadas. Também espero que a sua leitura torne o texto todo um pouco mais agradável e leve, na pequena medida do possível.

Finalmente, é fundamental registrar minha dívida impagável com meu País: Ele me proporcionou um curso de graduação gratuito, um mestrado gratuito, um doutorado no exterior gratuito, um pós-doutorado gratuito, e incontáveis recursos de pesquisa. O Povo deste País pagou tudo isso, e espero sinceramente ter podido dar algum retorno.

Nelson Luís Dias

Curitiba, 6 de dezembro de 2014

Capítulo 0

Introdução

Este documento segue a ordem dos itens que devem constar no Memorial a ser defendido na progressão para Professor Titular determinada na Resolução CEPE 10/14 (<http://www.ufpr.br/soc/>), Art. 12, § 8º, da Universidade Federal do Paraná. A única diferença é que os capítulos são numerados aqui em algarismos arábicos, e não romanos.

É possível ler apenas o texto principal, deixando de lado os apêndices, e de fato o texto foi redigido tendo isso em mente. Os apêndices ilustram com bastante detalhe principalmente textos ainda não publicados, em estágios diversos de preparação. Eles foram incluídos porque os considero contribuições importantes principalmente do ponto de vista didático, e porque espero que eles vejam, em algum momento, a luz do dia. Sendo entretanto em sua maior parte trabalhos em andamento, em hipótese nenhuma espero que o material não publicado dos apêndices seja considerado parte de minha produção intelectual até o presente.

De fato, temo que a extensão dos apêndices passe a impressão de arrogância. Não foi essa minha intenção, mas sim a de registrar trabalho duro que (com exceção dos apêndices E, F e G) ainda não frutificou totalmente.

Todo o corpo *principal* deste documento pdf está dotado de *links* ativos, na cor azul. Por exemplo, “clicando” nos números dos capítulos, é possível “pular” para os capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, e para os apêndices A, B, C, D, E, F, G e H

Note entretanto que os textos em azul dos apêndices *não* são *links* ativos.

Capítulo 1

Atividades de ensino e orientação

Os ensinos de graduação e de pós-graduação não diferem muito do ponto de vista do professor: minhas abordagens são muito parecidas, e os principais pontos a serem enfatizados costumam ser os mesmos.

A graduação exige mais organização, devido ao número de alunos presentes em sala, e à sua maturidade. A pós, que deveria ser o lugar onde se ensina e se discute temas mais avançados, muitas vezes sofre da heterogeneidade das turmas, com alunos com bases muito diferentes. A sua grande vantagem (do meu ponto de vista) é a oportunidade de discutir temas abertos, de pesquisa.

1.1 Ensino de graduação

O ponto natural para um professor iniciante deve ser esforçar-se para dar um bom curso de graduação. Para um professor experiente, é minha convicção que a qualidade dos cursos de graduação deve ser mantida: deles saem excelentes alunos que muitas vezes prosseguirão sob nossa orientação para o mestrado e o doutorado, e de um ponto de vista institucional (e de uma estratégia nacional de ensino de qualidade), é muito importante que (quando possível) o professor, enquanto amadurece, mantenha um forte contato com os alunos de graduação.

Embora o *número* de disciplinas de pós-graduação que lecionei seja muito maior (ver seção 1.2), eu certamente dediquei mais horas preparando e dando aulas na graduação, em um número relativamente pequeno de disciplinas: Fenômenos de Transporte (IME, Rio de Janeiro), Fenômenos de Transporte (UFRJ, Rio de Janeiro), Mecânica dos Fluidos (Cornell, Ithaca), Mecânica para Engenharia Civil (UFPR, Curitiba), Mecânica dos Sólidos I e II para Engenharia Ambiental (UFPR, Curitiba) e Matemática Aplicada I e II para Engenharia Ambiental (UFPR, Curitiba). A lista de ofertas ano a ano segue mais abaixo, tão fiel quanto me possibilitam meus registros. Exceto por Mecânica para a Engenharia Civil da UFPR, que era uma disciplina anual, todas as demais eram, ou são, disciplinas semestrais.

Minha filosofia geral ao abordar o ensino de graduação sempre foi a crença de que os alunos de graduação são *inteligentes*, e *capazes de absorver material relativamente avançado*, desde que o ensino dos tópicos seja gradual, e desde que a base matemática seja fornecida *juntamente* com os aspectos físicos ou de engenharia que se pretende ensinar.

Minha abordagem nos primeiros cursos era mais *dedutiva* do que *indutiva*: eu acreditava que, lançando todas as bases de um assunto, eu conseguiria ensinar mais, e melhor. Com a experiência, eu passei a valorizar também os aspectos indutivos, e o poder de alguns exemplos em casos particulares como um instrumento de motivação e de apresentação das teorias mais gerais.

Isso foi, em parte, influenciado por minha experiência de aluno em Cornell: no

ensino de engenharia norte-americano, uma expressão inevitável é *bag of tricks*: não importa *somente* a profundidade com que um tema é ensinado, mas também a abrangência da cultura científica que se procura incutir nos alunos. Alunos que possuem mais conhecimentos, ainda que em menor profundidade, têm mais chance de adaptá-los e aplicá-los a um leque maior de situações e problemas, e devem ser preparados a preencher as lacunas (em termos de aprofundamento do conhecimento) por meio de esforço independente.

A seguir, apresento a cronologia comentada das disciplinas que lecionei na Graduação.

Fenômenos de Transporte, IME

• 1º semestre de 1985

A posição foi de Professor Conferencista. Na prática, um professor horista. Considerando que eu estava, na época, na metade do meu mestrado, e considerando o prestígio do IME, eu fiquei mais do que feliz com a oportunidade.

Adotei como texto o livro de [Fox e McDonald \(1981\)](#) e incluí o material referente a transferência de calor e massa usando minhas próprias notas de aula, tiradas principalmente do clássico de [Bird et al. \(1960\)](#) e do livro que eu mesmo utilizara na graduação da UFRJ ([Welty et al., 1984](#)).

A experiência foi imensamente prazerosa: tive talvez minha turma mais dedicada e atenta de toda a minha carreira de professor; aprendi, ensinando, uma boa quantidade de Mecânica dos Fluidos e de Transferência de Calor e Massa; e descobri, com certeza absoluta, minha vocação profissional.

As figuras 1.1–1.5 contêm a reprodução das 5 páginas de papel-ofício com as notas da minha primeira aula de professor de ensino superior, no IME, em 19/02/1986. Todas as páginas foram numeradas (de 1 a 5), mas foi necessário dobrar o canto superior (ou em alguns casos o inferior) para que as folhas de papel ofício coubessem no digitalizador.

A aula dá uma visão geral do que será o curso, e contém os elementos que (com o benefício do tempo) quase que não mudaram: exemplos de problemas no mundo real que são resolvidos com Fenômenos de Transporte/Mecânica dos Fluidos; conteúdo do curso, bibliografia e esquema de verificação do aprendizado; definições básicas de fluido, leis da Física, equações constitutivas, idéias de Análise Dimensional, volume de controle, descrição euleriana e lagrangeana, sistemas de unidades, e lista de exercícios.

Ter conteúdo suficiente para a aula deve ter sido uma preocupação, mas a medida escolhida funcionou. Desde então, minhas notas de aula escritas para graduação tiveram 5, 6 ou no máximo 7 páginas por aula. Para a pós-graduação, a regra tem sido de 8 a 12 páginas.

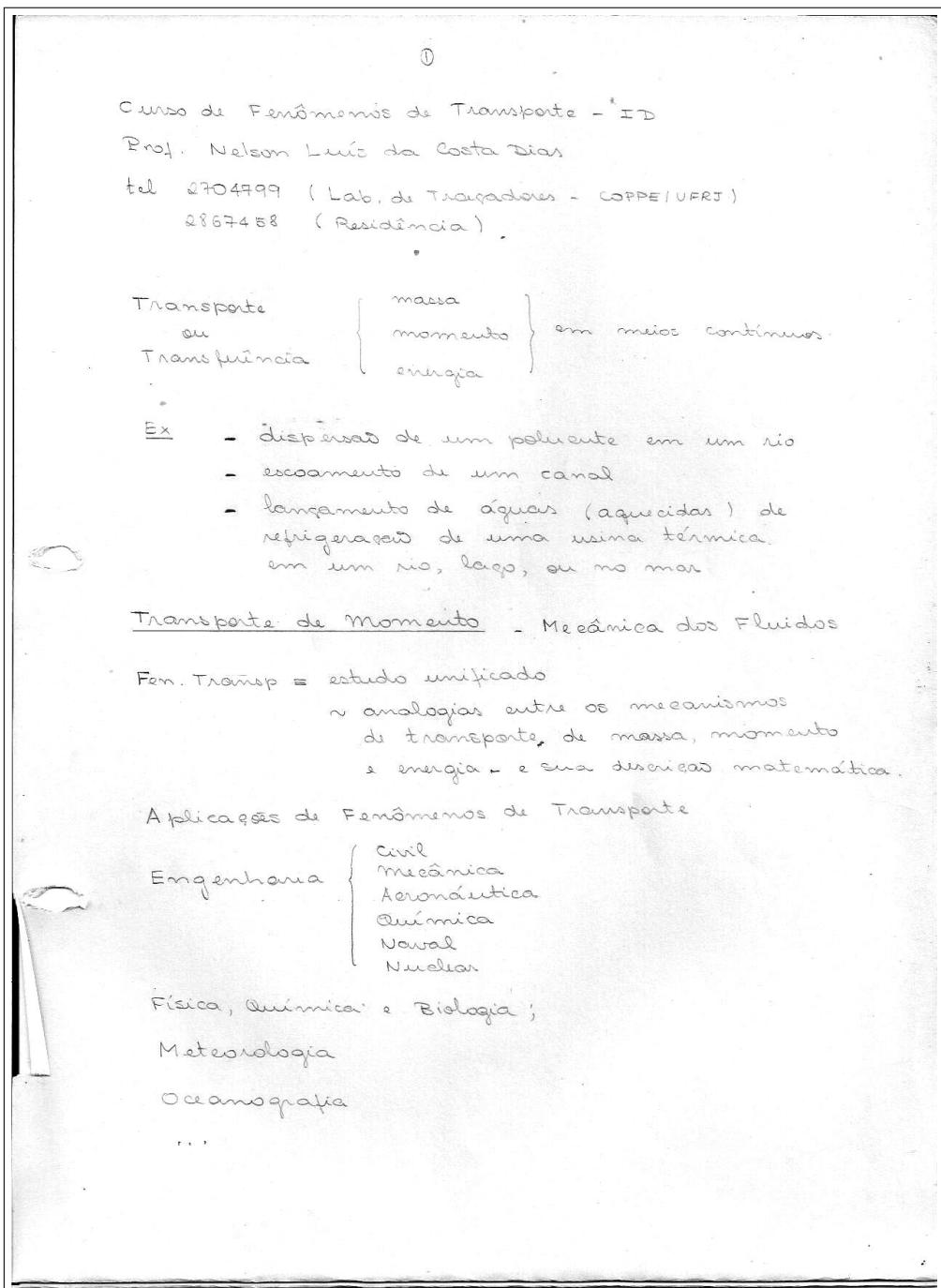


Figura 1.1: Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 1.

Alguns exemplos em eng. civil:

- Escoramentos em calhas de rios, canais artificiais e reservatórios
- Transporte de sedimentos em águas continentais e costeiras
- Escoamento subterrâneo de água:
 - poços,
 - drenagem
 - fluxo através de bancos de terra
- Estruturas hidráulicas
 - comportas
 - Verteadores
 - obras portuárias e de proteção costeira
- - Determinação de esforços sobre pilares de pontes, estruturas off-shore, etc.
- Dispersão de poluentes em corpos d'água.

Esquema de Aprendizado

Aulas teóricas - Exemplos em Engenharia Civil

Aulas práticas

Listas de Exercícios do Livro-Texto

Esquema de Verificação:

Provas Escritas

- Introdução e Conceitos Fundamentais (1 e 2)
- Estática dos Fluidos (3)
- Análise Integral de Escoramentos (4)
- Análise Dimensional de Escoramentos (5)
- - Análise Dimensional (7)
- Conceitos sobre escam. turbulento (8)

Livro-Texto: Introdução à Mecânica dos Fluidos, Fox e McDonald, ed. quinzeira Dois

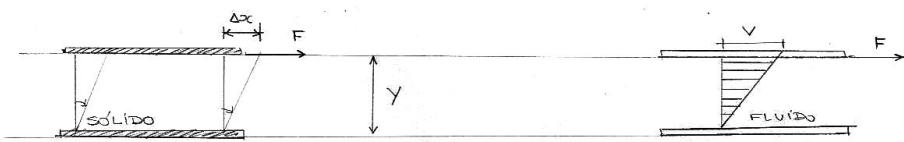
Consulta para aulas: Curs. Básico e Aplicado de Mec. dos Fluidos - Esg. de Aulas Práticas - Leonídio Nóbrega

Figura 1.2: Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 2.

Definição

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento.

$$\text{Fluidos} \left\{ \begin{array}{l} \text{líquido} \\ \text{gás} \end{array} \right.$$



$$\frac{F}{A} = \tau = f\left(\frac{\Delta x}{Y}\right)$$

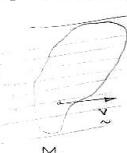
$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= \tau = f\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \\ &= f\left(\frac{V}{Y}\right) \end{aligned}$$

SÓLIDO - tensões são funções da DEFORMAÇÃO

FLUIDO - tensões são funções da taxa de deformação

Métodos de Análise de Problemas de Fen. Transp :

① Leis Básicas da Física



$$\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = F$$

$$\frac{dT}{dt} = \tau$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{ds}{dt} \geq 0$$

② Equações constitutivas do material (fluido)

{ modelo microscópico da matéria

{ estudo experimental em laboratório

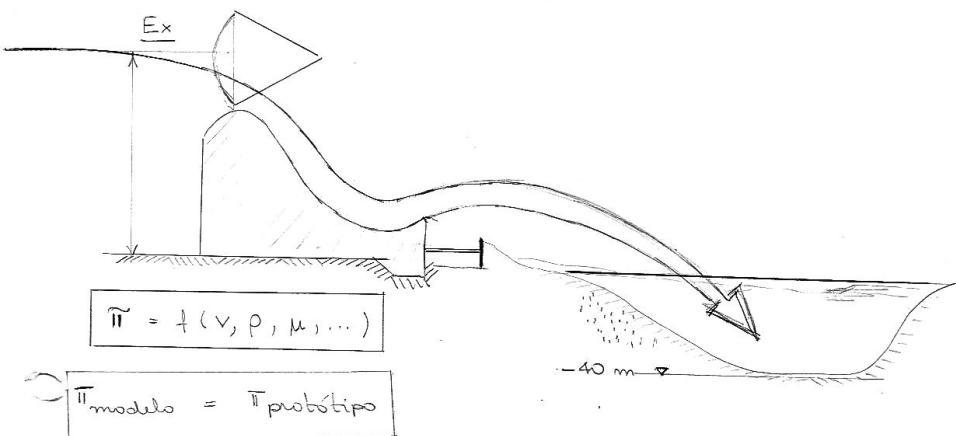
$$T \cdot V = m R T$$

$$\tau = f\left(\frac{V}{Y}\right)$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

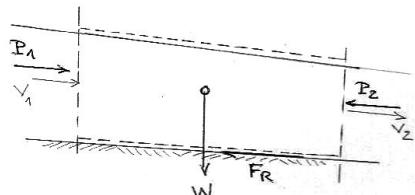
Figura 1.3: Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 3.

③ Resultados Experimentais: Relações entre parâmetros adimensionais que "descrevem" um certo escoamento, obtidos com o auxílio de modelos reduzidos



Definição de uma região onde se estuda o escoamento \rightarrow Volume de Controle

Volume de Controle VERSUS Sistema de Controle



Descrição de um escoamento

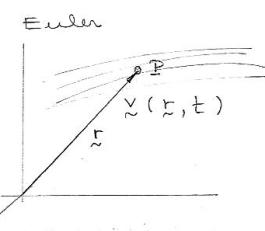
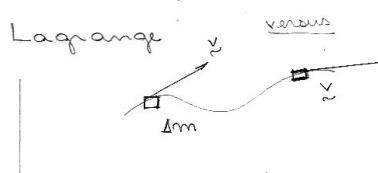


Figura 1.4: Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 4.

(5)

sistemas de unidades

MLt	\times	FLt
M kg	S.I.	U.T.M
L m		m
t s		s
F $N = kg \cdot m/s^2$		$kg \cdot t$
P $Pa = N/m^2$		$kg \cdot t / m^2$
M lbm	slug	slug
L ft	ft	ft
t s		s
F $lbm \cdot ft/s^2$		$lb \cdot ft$
P $lbm \cdot ft/s^2 / ft^2$		$lb \cdot ft / ft^2$ $lb \cdot ft / psf^2$ (psi)
$1 \text{ lb}_f = 1 \text{ lbm} \times g = 1 \text{ lbm} \times 32,2 \text{ ft} \cdot s^{-2}$		
$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}_f}{1 \text{ ft} \cdot s^{-2}} = \frac{1 \text{ lbm} \times 32,2 \text{ ft} \cdot s^{-2}}{1 \text{ ft} \cdot s^{-2}} = 32,2 \text{ lbm}$		
$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$		
$1' = 12''$		
<u>Apendice E Quadro E.2 - Fatores de Conversão</u>		
Fim do capítulo I		
Lista de Exercícios		
1.6		
1.10		
1.12		
1.14		
1.16		
1.18		
1.20		
1.24		
Fim da 1 ^a aula ano 1986		

Figura 1.5: Primeira aula de Fenômenos de Transporte, IME, 19/02/1986. Página 5.

Fenômenos de Transporte, UFRJ

- 2º semestre de 1986
- 2º semestre de 1987
- 2º semestre de 1988

A posição foi de Professor Convidado. Na época, eu era Engenheiro da COPPE-UFRJ, durante e imediatamente após o mestrado. A partir de 1987, com a conclusão de meu mestrado, tornei-me Professor Assistente da COPPE/UFRJ, e continuei a colaborar na graduação da Engenharia. A disciplina era ofertada pelo Departamento de Mecânica Técnica, que era responsável, além de Fenômenos de Transporte, pelo ensino de Mecânica I e II (Mecânica dos Sólidos) e Resistência dos Materiais para todas as Engenharias da UFRJ.

O livro adotado na época para Fenômenos de Transporte era [Welty et al. \(1984\)](#), o livro no qual eu mesmo havia estudado em uma edição um pouco mais antiga. Assim como o livro que deu origem à disciplina ([Bird et al., 1960](#)), o livro de [Welty et al. \(1984\)](#) abordava a transferência de quantidade de movimento, calor e massa em *sequência*. Havia, é claro, a possibilidade de adotar uma abordagem “em paralelo”: na Tabela 1 do Prefácio de [Bird et al. \(1960\)](#), por exemplo, somos informados que é possível ensinar em paralelo o capítulo 1 (viscosidade), o capítulo 8 (condutividade térmica) e o capítulo 16 (difusividade), onde são apresentadas, respectivamente, as leis de Newton para viscosidade, de Fourier para transferência de calor e de Fick para transferência de massa. Na abordagem “paralela”, seguem-se os capítulos 2, 9 e 17; 3, 10 e 18; etc.. Mesmo assim, na prática a tentação de seguir os capítulos em ordem talvez fosse muito grande. A disciplina que eu recebi em 1987 para lecionar era ensinada assim, em três módulos: transferência de quantidade de movimento (Mecânica dos Fluidos), transferência de calor, e transferência de massa.

Ao assumir a disciplina, eu tinha algumas idéias de como gostaria de ensiná-la.

Como aluno de graduação, eu havia tentando entender as equações de Navier-Stokes. Era estranho para mim que elas não fossem ensinadas, nem na disciplina de Fenômenos de Transporte que eu tivera como aluno, nem nas duas de Hidráulica do Curso de Engenharia Civil da UFRJ. Eu as conhecia, por meio do livro de [Welty et al. \(1984\)](#), mas não entendia tudo de sua dedução.

Meu primeiro encontro com uma dedução formal das equações de Navier-Stokes havia ocorrido em um curso de Mecânica do Contínuo oferecido pelo Instituto de Matemática da UFRJ em algum momento do ano de 1983, o ano em que concluí o curso de Engenharia Civil.

Àquela altura, a ênfase (a meu ver, tanto naquela época como até hoje, exagerada) do Curso de Engenharia Civil em ensinar técnicas de projeto sem a devida preocupação em fornecer o embasamento teórico havia me levado a um considerável cansaço intelectual com (aquela) Engenharia, e com a enorme quantidade de lacunas que seu ensino havia deixado. Deveria ser possível aprender os mesmos temas de uma forma um pouco mais organizada e, além disso, mais econômica.

Em 1984, no primeiro ano de meu Mestrado, desviei-me um pouco do currículo usual do Programa de Engenharia Civil, no qual estava matriculado, ao decidir cursar Mecânica dos Fluidos I e II (eram disciplinas bimestrais) no Programa de Engenharia Mecânica da COPPE, além das disciplinas normalmente cursadas pelos alunos de Mestrado da área de Recursos Hídricos do Programa de Engenharia Civil. O livro-texto adotado pelo Professor Raad Qassim era [Batchelor \(1967\)](#). Havia muito que eu

ainda não entendia (em particular, Termodinâmica), mas eu já estava equipado para entender a maquinaria da dedução das equações de Navier-Stokes, e para ensiná-la.

Durante os 3 anos que ainda passei no Brasil, durante e imediatamente após o meu Mestrado no Programa de Engenharia Civil (que concluí em Outubro de 1986), dediquei uma boa parte de meu tempo profissional preparando notas de aula e ensinando Fenômenos de Transporte no 2º ano do Curso Básico de Engenharia da UFRJ, exatamente o mesmo curso que eu fizera alguns anos antes.

Decidi fazer duas mudanças no curso, primeiramente somente em minhas turmas, é claro:

- O ensino de Fenômenos de Transporte passou a ser fiel à idéia do livro de [Bird et al. \(1960\)](#): os assuntos eram ensinados em paralelo. Em particular, isso era feito em 3 momentos distintos: (i) as equações constitutivas eram de fato ensinadas em paralelo, com as leis de Newton (para viscosidade), Fourier e Fick apresentadas na mesma sequência de aulas; (ii) as equações de balanço integral (as equações para um volume de controle ou o Teorema do Transporte de Reynolds) eram também apresentadas na mesma sequência: balanço de massa, balanço de massa de um soluto, balanço de quantidade de movimento (inclusive para referenciais não-inerciais: uma influência importante do livro de [Fox e McDonald \(1981\)](#)), balanço de energia, balanço de quantidade de movimento angular, balanço de entropia; e (iii) as equações diferenciais eram obtidas (para escoamento incompressível) a partir das equações integrais, via Teorema da Divergência.
- Conforme descrito em (iii) acima, agora as equações diferenciais (Navier-Stokes a equação de advecção-difusão para calor e massa) eram deduzidas, para alunos do 2º ano de Engenharia, e as soluções simples disponíveis para escoamento laminar eram trabalhadas com os alunos, e cobradas nas provas.

Dois outros professores da disciplina, Enise Valentini e Flávio Mascarenhas, interessaram-se pela “nova” forma de abordar Fenômenos de Transporte. Além de passarmos a ensinar de forma integrada os três processos de transporte, escrevemos uma primeira versão de uma apostila, que chegou a ser adotada na disciplina da UFRJ. Na década de 1990, quando eu já era professor na UFPR, meu primeiro “pós-doc” (e hoje meu colega na UFPR), Maurício Gobbi, interessou-se pela apostila, e acrescentou considerável material a ela, além de redigí-la em [LATEX](#). As primeiras páginas da apostila, com o Sumário, e um capítulo inteiro (Capítulo 7: Princípios de Conservação: Equações Integrais) são mostrados no Apêndice A.

Mecânica dos Fluidos, Cornell University

- Verão de 1990

O Departamento de Engenharia Civil e Ambiental de Cornell possuía um programa chamado *Coop (Cooperative)*: os alunos de graduação que participavam desse programa passavam um semestre estagiando na indústria, e retornavam a Cornell no verão para terem versões condensadas das disciplinas. No verão (do hemisfério norte) de 1990, eu fui o professor de *CEE331 Fluid Mechanics*. A disciplina foi lecionada de modo não muito diferente daquele que eu adotara na UFRJ em Fenômenos de Transporte. A principal diferença é que havia bastante conteúdo “aplicado”, e que, além dos itens já mencionados acima, também eram ensinados tópicos de escoamentos sob pressão em dutos, escoamentos com superfície livre, e bombas.

O volume de matéria a ser lecionado era significativo. A rigor, o material, que normalmente era coberto em um semestre letivo (4 meses) em Cornell, corresponde, grosso modo, ao que se ensina ao longo de um ano em cursos típicos de graduação em Mecânica dos Fluidos no Brasil.

Para cumprir a ementa, procurei basear fortemente todo o material na primeira parte da matéria (equações constitutivas, balanços materiais e balanços diferenciais), de maneira a ensinar da forma mais “econômica” possível. Além disso, quebrei minha regra de 6 páginas manuscritas por aula de graduação. Em muitas aulas, fui bem além (8 a 10). Os estudantes norte-americanos estão acostumados com um ritmo muito forte de aulas, e não houve (aparentemente) reclamações quanto a isso.

Da disciplina, restou um fichário de notas de aula preparadas para o curso, que permanece até hoje sendo o único curso que eu lecionei em Inglês. Delas, gostaria de destacar a aula 23 (a segunda aula da disciplina sobre escoamentos com superfície livre), que ilustra meu “método” geral de ataque (sempre me baseando em balanços — no caso, balanços integrais, etc.). A aula 23 está mostrada nas figuras [1.6–1.14](#).

As notas de aula também indicam que, em 1990, minha linguagem de programação para o dia-a-dia era PASCAL.

(ii)

CEE331 FLUID MECHANICS
LECTURE # 23 - NON-UNIFORM FLOW

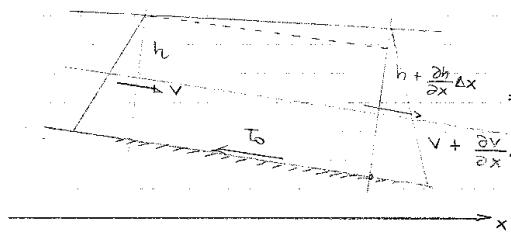
3. Non-uniform Flow:

Assume rectangular cross-section:

$$\frac{h}{b} \ll 1$$

$$h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \Rightarrow h_b \approx h$$

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Rightarrow v_b$$



$$\text{Mass balance: } 0 = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + \oint \rho (v \cdot n) dS$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho b h \Delta x - O(\Delta x^3) \right] - \rho v h b + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b.$$

$$0 = \left[\rho b \frac{\partial h}{\partial t} + \rho b v \frac{\partial h}{\partial x} + \rho b h \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Delta x + O(\Delta x^3)$$

$$\text{let } \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v h) = 0}$$

Momentum Balance

$$+ \rho g b h \Delta x \sin \theta - \tau_0 \Delta x P + \frac{1}{2} \rho g b h^2 - \frac{1}{2} \rho g b \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho v dV + \oint \rho v (v \cdot n) dS \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho v h b \Delta x \right] - \rho v^2 h b + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 b$$

Figura 1.6: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 1.

(ii)

$$\rho g b h \Delta x \sin \theta - T_0 \Delta x F = \rho g b h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x =$$

$$\rho b \Delta x \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\nu h) + \nu^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial v}{\partial x} h \right\}$$

$$\left\{ \nu \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \nu \frac{\partial h}{\partial x} + \nu h \frac{\partial v}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

$$\left\{ \nu \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu h) \right] + h \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\}$$

$$= -\rho g b h \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\rho g b h \Delta x \sin \theta - T_0 \Delta x F = \rho b \Delta x h \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Remember, in uniform flow.

$$\frac{T_0}{P} = g \frac{A}{2} S_0$$

NOW MAKE

$$\frac{T_0}{P} = g b S_f$$

$$\text{where } S_f = \frac{d}{dx} \left[\frac{\nu^2}{2g} + h + z_b \right]$$

$$\rho g b S_0 - \rho g b S_f - \rho g b \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} + \nu \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (S_0 - S_f)}$$

Figura 1.7: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 2.

(iii)

The Saint-Venant Equations are

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g(s_0 - s_f) \end{cases}$$

Look at steady-state:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(vh) = 0 \\ \frac{v dv}{dx} + g \frac{dh}{dx} = -g(s_0 - s_f) \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{n} h^{\frac{1}{3}} s_f^{\frac{1}{3}} \Rightarrow s_f = \frac{n^2 v^3}{2 g^2}$$

Conceptually, this is a system of ODE's of order 1

Question: where should one place the boundary conditions?

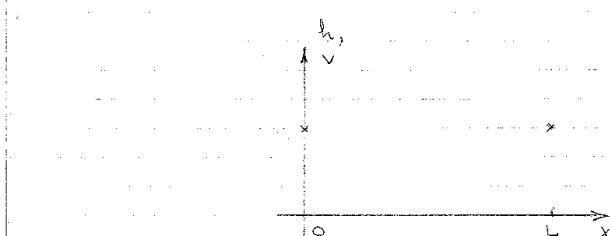


Figura 1.8: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 3.

(iv)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(s_0 - s_f)$$

Look @ steady-state:

$$\frac{d}{dx}(vh) = 0 \Rightarrow vh = q$$

$$v \frac{dv}{dx} + g \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f)$$

$$\frac{g}{h} \frac{d}{dx}\left(\frac{q}{h}\right) + g \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f)$$

$$+ \frac{g}{h} \cdot \left[-\frac{q}{h^2} \left(\frac{dh}{dx} \right) \right] + g \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f)$$

$$\left[1 - \frac{q^2}{h^3} \right] \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f(h, q))$$

$$\left[1 - \left(\frac{q}{h} \frac{1}{\sqrt{gh}} \right)^2 \right] \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f(h, q))$$

$$\left(1 - \frac{q^2}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} = g(s_0 - s_f)$$

$$\boxed{\left[1 - \frac{q^2}{h^3} \right] g \frac{dh}{dx} = g[s_0 - s_f(q, h)]}$$

Figura 1.9: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 4.

(v)

Even when flow is steady,

$$F(q, h, \frac{dh}{dx}) = 0$$

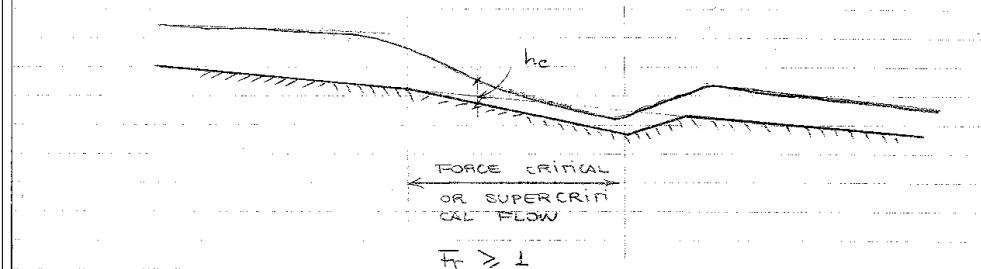
UNLESS

$$\frac{Fr^2}{g} = 1 \Rightarrow Fr = \pm 1$$

$$\frac{V}{\sqrt{gh}} = \pm 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{CRITICAL FLOW} \\ \text{OR SUPERCRIT FLOW} \end{array} \right.$$

SUPPOSE YOU HAVE

gradually varied flow
in a channel reach



Look @ Manning's Eqn:
In critical flow

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} h^{2/3} s^{1/2} & h_c &= \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \\ Vh &= \frac{1}{3} h^{5/3} s^{1/2} & g &= \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{h} \right)^{5/3} s_c^{1/2} \\ q &= \frac{1}{2} h^{5/3} s^{1/2} & \Rightarrow \text{get } s_c \end{aligned}$$

Figura 1.10: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 5.

(vi)

$$V = \frac{1}{n} h^{2/3} S^{1/2}$$

$$\sqrt{h} = \boxed{\frac{q}{g} = \frac{1}{n} h^{5/3} S_0^{1/2}}$$

Given actual slope $S_0 \Rightarrow h_n$ is the corresponding depth in uniform flow for flow rate q .

Given actual flow rate $q \Rightarrow h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/5}$ is the critical depth.

Gradually Varied Flow Classification

$$(1 - Fr^2) \frac{dh}{dx} = g(S_0 - S_f)$$

① Determine $\frac{h_n}{h_c}$

$S_0 = 0 \Rightarrow H$ (horizontal)

$h_n > h_c \Rightarrow M$ (ild)

$h_n = h_c \Rightarrow C$ (ritical)

$h_n < h_c \Rightarrow S$ (steep)

$S_0 < 0 \Rightarrow A$ (dverse)

Figura 1.11: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 6.

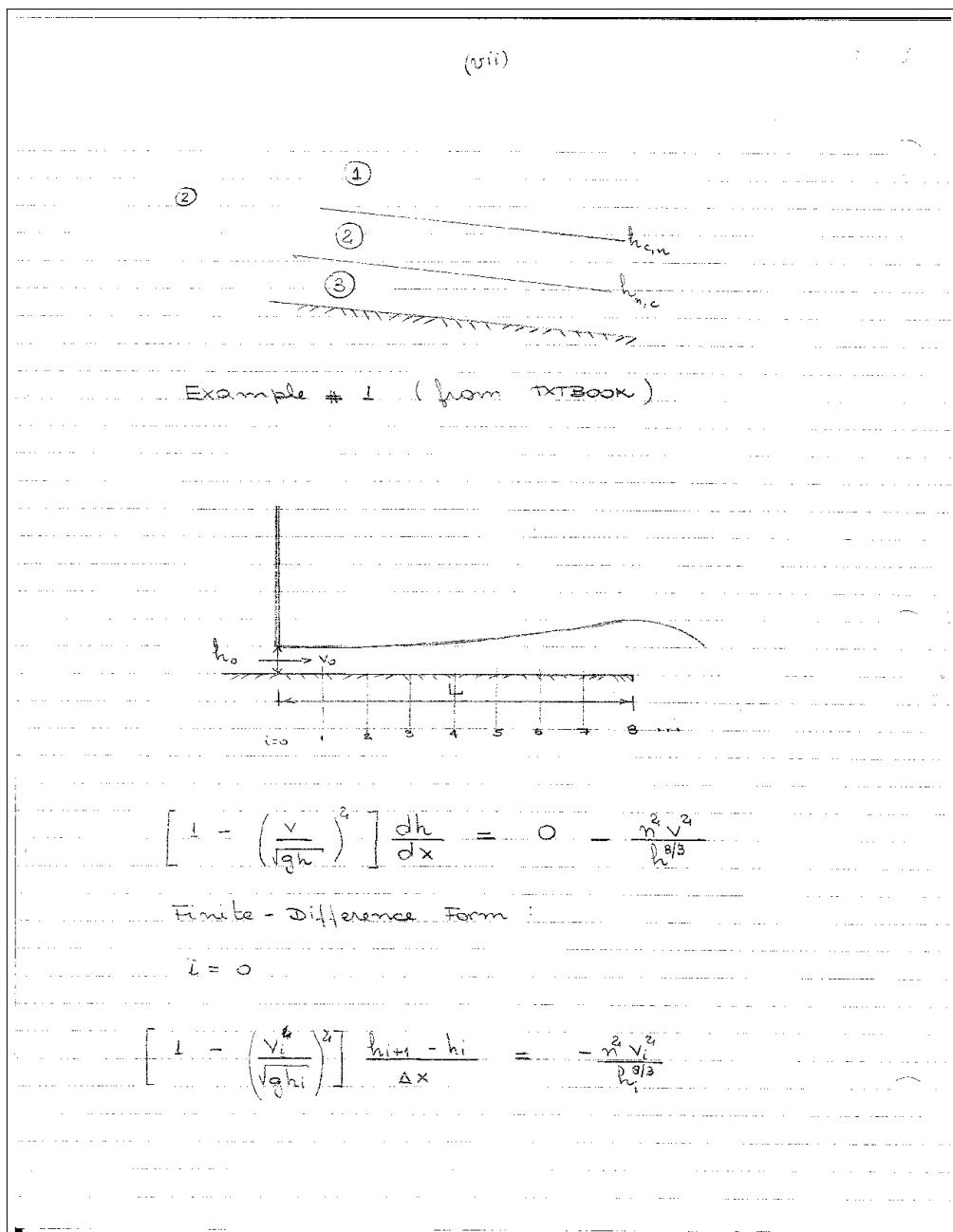


Figura 1.12: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 7.

(viii)

$$0 \leq i \leq N$$

$$\left[1 - \left(\frac{v_i}{\sqrt{g} h_i} \right)^2 \right] \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{\Delta x} = - \frac{n^2 v_i^2}{h_i^{5/3}}$$

corresponding PASCAL code would be:

```

CONST N = 100; g = 3.81;
VAR
    i : integer;
    v, h : array [0..N] of real;
    Fr, n : real;

function power (a, x : real) : real;

BEGIN
    read(h[0], v[0], delta_x);
    i := 0;
    Fr := 1.0 - power(v[0]/sqrt(g*h[0]), 2.0);
    h[i+1] := (*delta_x*
        (h[i] - (power(n*v[i], 2)/power(h[i], 5/3))) /
        (1 - Fr * Fr));
    ... (rest of the code)

```

Figura 1.13: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 8.

(ix)

FOR $i = 1$ TO $N - 1$ DO

$\overline{Fr} := \{ \text{SAME AS BEFORE} \}$

$h[i+1] :=$

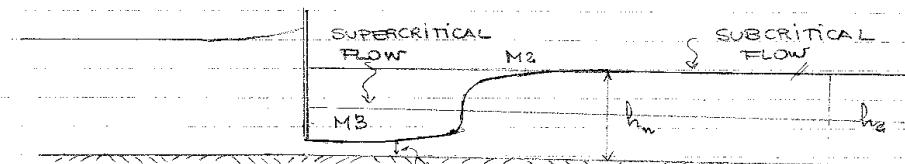
$$\left(h[i-1] - \left(\text{pow}(n + v[i], 2) / \text{pow}(h[i], 8/3)) * \text{delta}x \right) / (1 - \overline{Fr} * Fr) \right);$$

END ;

QUESTION WHAT IF $\frac{dh}{dx} \rightarrow \infty$?

$$\frac{dh}{dx} = \frac{s_0 - s_f}{1 - Fr^2} \Rightarrow \text{Flow is approaching } Fr = 1$$

a hydraulic jump occurs.



$$\frac{1}{2} \rho g b h_0^2 - \frac{1}{2} \rho g b h_n^2 = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 b h_0 + \frac{1}{2} \rho V_n^2 b h_n$$

$$V_0 = \frac{Q}{b h_0}; \quad V_n = \frac{Q}{b h_n}$$

Figura 1.14: 23^a aula de CEE331 Fluid Mechanics, Cornell University. Página 9.

Mecânica, UFPR

- 1995
- 1996
- 1997
- 1998
- 1999
- 2000

A disciplina era anual. Mecânica dos Sólidos não era minha área de atuação, mas foi perfeitamente possível rever meu aprendizado de graduação para o concurso (com o qual eu ingressei na UFPR) e para lecionar a disciplina. A disciplina era, curiosamente, ofertada pelo Departamento de Transportes da UFPR. A carga didática era muito alta (eu era, na época, professor “20 horas”): 8 horas de aula por semana, ou duas turmas completas.

Nos primeiros anos, eu procurei lecioná-la seguindo o livro-texto adotado pelo grupo de professores ([Beer e Johnston Jr., 1994a,b](#)). Desde o começo, utilizei bastante meus próprios livros-texto de graduação ([Meriam, 1979a,b](#)). Em anos posteriores, e também durante o ano em que lecionei as disciplinas “herdeiras” Mecânica dos Sólidos I e II no Curso de Engenharia Ambiental da UFPR, baseei-me cada vez mais em minhas notas de aula, embora sempre recomendando um dos livros acima. Vale lembrar, também, a influência importante sobre minhas aulas do belo livro de [Tenembaum \(1997\)](#).

A experiência de lecionar Mecânica desviou um pouco meu interesse imediato (como professor; não como pesquisador) de Mecânica dos Fluidos para Mecânica dos Sólidos. Como sempre, a abordagem usual dos livros geralmente adotados mostrou-se uma abordagem fortemente indutiva, lenta, e muito repetitiva. Ficou claro que, novamente, uma considerável economia de tempo poderia ser obtida desenvolvendo os temas de forma um pouco mais dedutiva, e indicando os elementos comuns.

Por exemplo, centróides, centros de massa, e centros de gravidade são todos, sempre, calculados por meio de integrais múltiplas. Em lugar de tentar construir elementos de integração que na prática reduzem o problema, às vezes um pouco artificialmente, a uma integral simples, é sempre possível calcular esses elementos com as integrais múltiplas correspondentes.

Alguns exemplos específicos dessa abordagem são deixados para as próximas disciplinas relatadas (Mecânica dos Sólidos I e II para Engenharia Ambiental), que são desdobramentos naturais de minha experiência lecionando Mecânica no ciclo básico das Engenharias da UFPR.

O outro ponto que foi ficando claro, à medida que se passavam os anos, foi a grande falta de base de meus alunos. Em geral, o seu problema não era entender Mecânica; era muito mais entender os conceitos matemáticos básicos não só dos dois primeiros anos de Cálculo, Geometria Analítica, Álgebra Linear, etc., mas também – infelizmente – do Ensino Médio. Não raro faltavam-lhes, em suas tentativas de solução, conhecimentos elementares de Trigonometria e Álgebra.

A experiência revelar-se-ia extremamente importante de uma forma, então, inesperada para mim. Em 1998, eu teria a oportunidade, juntamente com dois outros professores da UFPR (Eduardo Felga Gobbi e Afonso Araújo), de fundar um novo curso,

o Curso de Engenharia Ambiental. A experiência relativamente longa que tive com os alunos dos Cursos de Engenharia da UFPR (a disciplina era ofertada para todos os cursos de Engenharia do Setor de Tecnologia), com suas carências e conhecimentos, foi fundamental para propor uma grade curricular que fosse capaz, na medida do possível, de suprir as carências que existiam tanto na formação dos estudantes quanto na própria universidade.

Mecânica dos Sólidos I e II, UFPR

- 1º semestre de 2001
- 2º semestre de 2001

A experiência relativamente longa que eu tivera lecionando Mecânica anteriormente à criação do Curso de Engenharia Ambiental me ajudou bastante nas novas disciplinas de Mecânica dos Sólidos I e II do novo curso, das quais eu fui o primeiro professor. Além de Mecânica de Corpos Rígidos, a disciplina cobria a parte inicial de Mecânica de Corpos Deformáveis (Mecânica dos Materiais, ou Resistência dos Materiais), com alguns conceitos simples de cálculo de estruturas hiperestáticas, e de tensões em corpos.

Novamente, a idéia era utilizar ao máximo o que os alunos haviam aprendido em Cálculo e em Álgebra Linear. Por exemplo, momentos principais de inércia, eixos principais de inércia, tensões principais e direções principais de tensões todas eram ensinadas utilizando álgebra linear, autovalores, e autovetores. Em nenhum momento dessas disciplinas de Mecânica eu ensinei o Círculo de Mohr (embora eu sempre mencionasse o nome, e explicasse que era uma técnica exatamente equivalente ao cálculo de autovalores e de autovetores em duas dimensões).

O mesmo pode ser feito, naturalmente, com todos os problemas de cinemática envolvendo Cálculo Vetorial. As figuras 1.15–1.20 dão um exemplo da abordagem que eu utilizava nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos para deduzir as equações que relacionam velocidade e aceleração em um referencial não-inercial em relação a um referencial inercial.

(93)

VII ... Cinemática dos Sólidos Rígidos

O movimento curvo spiral (scroll) de uma partícula ocorre se ele é em relação a um referencial não-inercial. Este tipo de movimento composto é muito importante em engenharia e geofísica: foguetes, aviões e ônibus são muitas vezes feitos relativamente ao solo em relações ao qual é preciso analisar movimentos. Fundações da atmosfera são feitas em baixos ou quentes ou aranhas levando a bolas intrusivas de madeira. Finalmente, os escoamentos planetários de longa escala o referencial natural é um conjunto de eixos que giram sobre o próprio planeta. Em todos estes casos, é preciso analisar o movimento em relação a um referencial não-inercial girante.

Brave revisão de cinemática da partícula :

$$\ddot{r} = \ddot{r}(t)$$

$$\ddot{v} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \dot{e}_t$$

$$\ddot{a} = \frac{d\ddot{v}}{dt} = \frac{d\dot{v}}{ds} \frac{ds}{dt} + v \frac{d\dot{e}_t}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \dot{e}_t + \dot{v} \frac{det}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} \dot{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \dot{e}_n \parallel$$

Figura 1.15: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 1.

(94)

De posse de \tilde{e}_t e \tilde{e}_n , construimos uma base local por meio de

$$\tilde{e}_b = \tilde{e}_t \times \tilde{e}_n \Rightarrow$$

$$\tilde{e}_n = \tilde{e}_b \times \tilde{e}_t$$

$$\tilde{e}_t = \tilde{e}_n \times \tilde{e}_b$$

Considera agora um vetor \tilde{r} no referencial ~~fixo~~^{rigido} sendo executando um movimento de corpo rígido.

Isto significa que $|\tilde{r}| = \text{constante}$. \Rightarrow
 \tilde{r} tem apenas o direito de girar, de forma arbitrária, em torno da origem.

O vetor posição \tilde{r} pode ser escrito na base $\{\tilde{e}_t, \tilde{e}_n, \tilde{e}_b\}$ como

$$\tilde{r} = r_t \tilde{e}_t + r_n \tilde{e}_n + r_b \tilde{e}_b$$

Agora, se $|\tilde{r}| = \text{constante}$. \Rightarrow

$$\frac{d}{dt}(\tilde{r} \cdot \tilde{r}) = \tilde{r} \left(r, \frac{dr}{dt} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$[r_t \tilde{e}_t + r_n \tilde{e}_n + r_b \tilde{e}_b] \cdot \dot{\tilde{e}}_t = 0 \Rightarrow r_t = 0$$

Para este movimento (corpo rígido) o vetor \tilde{r} então é

$$\tilde{r} = -r_n \tilde{e}_n + r_b \tilde{e}_b \Rightarrow$$

$$\tilde{e}_n = \frac{1}{-r_n} [\tilde{r} - r_b \tilde{e}_b]$$

Figura 1.16: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 2.

(25)

Agora continuando eu digo que

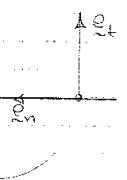
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v \mathbf{\hat{e}_t} = v [\mathbf{\hat{e}_n} \times \mathbf{\hat{e}_b}] = \\ &= \frac{v}{l_n} [\mathbf{l} - l_b \mathbf{\hat{e}_b}] \times \mathbf{\hat{e}_b} = \frac{v}{l_n} \mathbf{l} \times \mathbf{\hat{e}_b} = \\ &= + \frac{v}{l_n} \mathbf{\hat{e}_b} \times \mathbf{l} \end{aligned}$$

Se eu definir o vetor velocidade angular da partícula como

$$\boldsymbol{\omega} = + \frac{v}{l_n} \mathbf{\hat{e}_b}$$

segue-se a fórmula clássica,

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



A utilidade deste conceito é maior, muito maior, do que nos pode parecer à primeira vista. Consideremos novamente o movimento relativo a 2 ref's: $\{x, y, z\}$ e $\{x, y, z\}$. A posição de uma partícula é \mathbf{R} em REF e \mathbf{r} em ref., não confundir este com o \mathbf{r} acima! Agora

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{\hat{e}_i}$$

$$\sum R_i \mathbf{\hat{e}_i} = \mathbf{R}_0 + \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{\hat{e}_i}$$

Note que, por definição:

$$\mathbf{\hat{e}_i} \neq \mathbf{\hat{e}_i}(t)$$

$$\mathbf{\hat{e}_i} = \mathbf{\hat{e}_i}(t)$$

Figura 1.17: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 3.

96

Então, derivando esta equação obtém-se

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d}{dt} \sum \vec{e}_i \vec{e}_i$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \sum \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{e}_i + \vec{r}_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right]$$

Observe como cada vetor \vec{e}_i do referencial girante \vec{xyz} pode ser conceitualmente "transladado" até a origem O de XYZ!

Então o que vemos é cada um dos eis executando um movimento de corpo rígido em torno de O, donde,

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$$

Mas será o mesmo $\vec{\omega}$ para \vec{e}_1 , \vec{e}_2 e \vec{e}_3 ? Sim!

Definição Dois vetores \vec{r} e \vec{s} se mantêm em movimento relativo de corpo rígido se

$$\vec{r}(t) \circ \vec{s}(t) = \text{constante}$$

Então,

$$\vec{r} \circ \frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{s} \circ \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Se \vec{r} está em movimento de corpo rígido,

$$\vec{r} \circ \frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{s} \circ \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$$

Mas

$$\vec{s} \circ \vec{\omega} \times \vec{r} = \sum_{ijk} s_k \epsilon_{ijk} \omega_i r_j =$$

Figura 1.18: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 4.

97

$$= \sum \epsilon_{xyz} s_i w_i \omega_j = [\tilde{z} \times \tilde{\omega}] \cdot \tilde{s}$$

Donte

$$\left[\frac{d\tilde{s}}{dt} + \tilde{z} \times \tilde{\omega} \right] \cdot \tilde{s} = 0$$

e para um par específico de vetores \tilde{s}, \tilde{z} é
fácil ver que

$$\frac{d\tilde{s}}{dt} = \tilde{\omega} \times \tilde{s} = -\tilde{s} \times \tilde{\omega}$$

também. Esta discussão fica melhor colocada
logo depois da dedução de

$$\tilde{v} = \tilde{\omega} \times \tilde{s}$$

continuando, a fórmula de combinação de
velocidades fica

$$\tilde{v}_{xyz} = \tilde{v}_o + \sum \frac{d\tilde{s}_i}{dt} \tilde{e}_i + \sum n_i \tilde{\omega} \times \tilde{e}_i$$

$$\boxed{\tilde{v}_{xyz} = \tilde{v}_o + \tilde{v}_{xyz} + \tilde{\omega} \times \tilde{s}} \quad \left\{ \frac{d\tilde{s}}{dt} = \tilde{v} + \tilde{\omega} \times \tilde{s} \right.$$

E preciso ainda ser forte e derivar mais
uma vez, para obter as relações entre as
acelerações:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = \frac{d\tilde{v}_o}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\sum v_i \tilde{e}_i \right] + \frac{d}{dt} [\tilde{\omega} \times \tilde{s}]$$

$$= \frac{d\tilde{v}_o}{dt} + \sum_i \left[\frac{dv_i}{dt} \tilde{e}_i + v_i \frac{de_i}{dt} \right] + \tilde{\omega} \times \frac{d\tilde{s}}{dt} + \ddot{\tilde{\omega}} \times \tilde{s}$$

$$= \frac{d\tilde{v}_o}{dt} + \sum a_i \tilde{e}_i + \sum v_i (\tilde{\omega} \times \tilde{e}_i) + \tilde{\omega} \times [\tilde{v} + \tilde{\omega} \times \tilde{s}] + \ddot{\tilde{\omega}} \times \tilde{s}$$

$$\tilde{a} = \tilde{a}_o + \tilde{a} + \tilde{\omega} \times \sum v_i \tilde{e}_i + \tilde{\omega} \times \tilde{v} + \tilde{\omega} \times \tilde{\omega} \times \tilde{s} + \ddot{\tilde{\omega}} \times \tilde{s}$$

Figura 1.19: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 5.

98

continuando,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\alpha} + \omega^2 \mathbf{w} \times \mathbf{r} + \omega \times \omega \times \mathbf{r} + \dot{\omega} \times \mathbf{r}$$

Figura 1.20: Aula de referenciais não-inercias, Mecânica dos Sólidos II. Página 6.

Matemática Aplicada I e II, UFPR

- 1º semestre de 2002
- 2º semestre de 2002
- 1º semestre de 2003
- 2º semestre de 2003
- 1º semestre de 2004
- 2º semestre de 2004
- 1º semestre de 2005
- 2º semestre de 2005
- 1º semestre de 2006
- 2º semestre de 2006
- 1º semestre de 2008
- 2º semestre de 2008
- 1º semestre de 2009
- 2º semestre de 2009
- 1º semestre de 2010
- 2º semestre de 2010
- 1º semestre de 2011
- 2º semestre de 2011
- 1º semestre de 2012
- 2º semestre de 2012
- 1º semestre de 2013
- 2º semestre de 2013
- 1º semestre de 2014
- 2º semestre de 2014

As disciplinas de Matemática Aplicada I e II foram concebidas com base em diversas experiências do grupo de professores que fundou o Curso de Engenharia Ambiental. Entretanto, talvez seja justo observar que eu fui o seu maior proponente.

Em primeiro lugar, nós já sabíamos que nos cursos de Física é comum existir uma disciplina com o nome genérico de “Física Matemática” para alunos de 3º ano. Essa é uma disciplina que aprofunda, ao mesmo tempo em que aplica, os conhecimentos de Cálculo, e talvez seja um dos pontos fortes da formação de um Físico.

Em algumas engenharias, nos EUA, isso também acontece. Em Cornell, onde tive uma experiência direta durante o meu doutorado, havia disciplinas de Matemática Aplicada com “código 300”, que podiam ser cursadas por alunos de engenharia de graduação de 3º ano (mas que também eram cursadas por alunos de pós-graduação com menor preparo para enfrentar os cursos de “código 600” (cursos típicos de pós-graduação)).

Nossa idéia era trazer para a disciplina o detalhamento da matemática envolvida em numerosos modelos utilizados em Engenharia Ambiental. Também sabíamos que os alunos da UFPR completavam — e infelizmente ainda completam — seus cursos de Cálculo com numerosas lacunas. A disciplina, portanto, deveria também fornecer uma revisão aprofundada e um amadurecimento dos conceitos e conhecimentos de Cálculo necessários para a construção e o uso de modelos matemáticos em Engenharia Ambiental.

A base bibliográfica para a disciplina seriam um texto em Português popular no Brasil ([Butkov, 1988](#)), e os livros de Matemática para Engenharia de [Greenberg \(1978, 1998\)](#). Nos primeiros anos, também usei um livro em Português disponível na Biblioteca da UFPR ([Oliveira e Maiorino, 1997](#)), e alguns anos mais tarde redescobri, e utilizei um pouco, um belo livro dos anos 1980 que tinha em minha biblioteca ([Bassanezi e Ferreira Jr., 1988](#)).

A disciplina ganhou sua forma atual ao longo dos anos, com uma seleção de tópicos que tinham boas ligações com as demais disciplinas do curso, a introdução de capítulos sobre métodos numéricos, etc.. O histórico das provas das disciplinas está totalmente disponível na Internet, nos *links*

[http://www.lemma.ufpr.br/wiki/index.php/TT-009_Matemática_APLICADA_I](http://www.lemma.ufpr.br/wiki/index.php/TT-009_Matem%C3%A1tica_APLICADA_I)

e

[http://www.lemma.ufpr.br/wiki/index.php/TT-010_Matemática_APLICADA_II](http://www.lemma.ufpr.br/wiki/index.php/TT-010_Matem%C3%A1tica_APLICADA_II).

Atualmente, minhas notas de aula (e minhas provas) de Matemática Aplicada I e II ao longo desses anos estão prestes a se tornar um livro, a ser submetido para publicação na Editora da UFPR (em princípio). O sumário do livro e um capítulo de exemplo são mostrados no Apêndice [B](#).

1.2 Ensino de pós-graduação

A seguir, apresento uma cronologia comentada das disciplinas que lecionei na Pós-Graduação.

Micrometeorologia (diversos códigos)

- 3º trimestre de 1995 (TH720 Micrometeorologia e Turbulência Atmosférica, PP-GEH)
- 1º semestre de 2000 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPG-CiSolo)
- 2º semestre de 2001 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPG-CiSolo)
- 2º trimestre de 2002 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)

- 2º trimestre de 2003 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)
- 1º trimestre de 2004 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)
- 1º trimestre de 2005 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)
- 1º trimestre de 2008 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)
- 1º trimestre de 2010 (TC708 Tópicos Especiais, PPGMNE)

Esta disciplina foi ofertada com diversos códigos, tendo sido sua primeira “encarnação” a disciplina TH720, no então Curso de Mestrado em Engenharia Hidráulica da UFPR (atual PPGRERHA: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental, do qual não participei mais). A disciplina teve 3 alunos, dos quais dois concluíram posteriormente o mestrado no Mestrado em Engenharia Hidráulica sob minha orientação ([Araújo, 1996](#); [Okawa, 1998](#)). Ela migrou para uma disciplina semestral do Programa de Pós-Graduação em Física dos Solos em 2000 e 2001. A partir de 2002, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), no qual eu realizaria, até o presente, a maior parte de minhas orientações. A disciplina continuou a ser ofertada com o código TT709 e em regime trimestral a partir de então. Em alguns anos (por exemplo, 2010), ela foi ofertada como “Tópicos Especiais” para cobrir temas (tais como o processamento numérico de sinais) um pouco mais distantes da ementa clássica de micrometeorologia. Um programa típico da disciplina, assim como foi ofertada em 2002, é mostrado na tabela 1.1.

Mecânica dos Fluidos TT704

- 1º semestre de 1999
- 1º semestre de 2001
- 1º trimestre de 2002 (TT708 Micrometeorologia e Poluição Atmosférica, PPGMNE)
- 1º trimestre de 2003
- 2º trimestre de 2004

A disciplina foi oferecida durante um número razoável de anos. Um programa típico é mostrado na tabela 1.2. A base da disciplina sempre foi o livro de [Kundu \(1990\)](#), eventualmente apoiado pelo excelente (porém mais difícil para os alunos) livro de [Batchelor \(1967\)](#). A disciplina sempre envolveu um considerável material sobre tensores cartesianos, com um pouco de sobreposição com o material usualmente ensinado em disciplinas de Mecânica do Contínuo.

Tabela 1.1: Programa típico da disciplina TT708 “Micrometeorologia e Poluição Atmosférica” (conforme oferecido em 2002)

Aula	Conteúdo
1	Introdução: a Camada-Limite Atmosférica (CLA)
2	Falha espectral, fluxos moleculares e advectivos
3	Equações integrais: significado de estacionariedade e advecção
4	Termodinâmica da atmosfera úmida; temperatura potencial
5	Notação de Einstein e as equações que regem a CLA
6	Aceleração de Coriolis, vento geostrófico e aproximação de Boussinesq
7	Baroclinicidade, vento térmico e espiral de Ekman
8	As equações de balanço para momentos de 2 ^a ordem
1^a Lista de Exercícios	
9	Análise dimensional: perfis logarítmicos na sub-camada dinâmica
10	Análise dimensional: a Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov - I
11	Funções de similaridade de MO
12	Análise assintótica clássica: $\zeta \rightarrow \pm\infty$
13	Análise dimensional direcional
Análise dimensional direcional	
14	Similaridade de Rossby e <i>matching</i> ; camada de mistura
15	Técnicas de medição e processamento de dados de turbulência
2^a Lista de Exercícios	
16	Fluxos de energia na superfície da terra
17	Métodos e modelos de evaporação-I
18	Métodos e modelos de evaporação-II
19	Modelos de interação superfície-atmosfera (SVATs)
20	Difusão vertical: o método da similaridade e fundamentos matemáticos
21	Difusão longitudinal: o efeito da advecção
22	Advecção local: efeitos gerais sobre a turbulência e SMO
23	Advecção local: soluções de similaridade
3^a Lista de Exercícios	
24	Poluição do ar e mudança global; gases de efeito estufa
25	<i>Daisyworld</i>
26	Conceitos de estatística para turbulência
27	A teoria de difusão turbulenta de Taylor
28	Abordagens Euleriana e Lagrangeana
29	Soluções para a camada de mistura
30	Efeitos geográficos
4^a Lista de Exercícios	

Tabela 1.2: Programa típico da disciplina TT704 “Mecânica dos Fluidos” (conforme oferecido em 2002)

Aula	Capítulo	Data	Conteúdo
1	1	04/03	Hipótese do contínuo, tensão superficial, termodinâmica
2	1	06/03	Exemplos de termodinâmica, temperatura e densidade potencial
3	2	11/03	Tensores cartesianos: bases e operações
4	2	15/03	O Teorema do Transporte de Reynolds e operadores diferenciais
5	3	18/03	Cinemática: velocidade em torno de um ponto, vorticidade, função corrente
6	3	20/03	Cinemática: Decomposição de Helmholtz, Biot-Savart, velocidade e aceleração angular
7	4	25/03	O vetor e o tensor de tensões
8	4	27/03	Simetria do tensor de tensões, equação de Euler num referencial planetário
9	4	01/04	Equações de Navier-Stokes, energia mecânica
10	4	03/04	Energia total e aproximação de Boussinesq
11		08/04	1ªProva
12	5	10/04	Dinâmica da vorticidade 1 (linhas e tubos, papel da viscosidade)
13	5	15/04	Dinâmica da vorticidade 2 (Teorema de Kelvin, equações de vorticidade)
14	5	17/04	Dinâmica da vorticidade 3 (interação entre vórtices, superfícies de vorticidade)
15	6	22/04	Escoamento irrotacional e aerodinâmica 1
16	6	24/04	Escoamento irrotacional e aerodinâmica 2
17	6	29/04	Escoamento irrotacional e aerodinâmica 3
		01/05	Dia do Trabalho
18	9	06/05	Escoamento laminar 1
19	9	08/05	Escoamento laminar 2
20	9	13/05	Escoamento laminar 3
21	10	15/05	Camadas-limite lâminares 1
22	10	13/05	Camadas-limite lâminares 2
23	8,notas	20/05	Camadas-limite turbulentas 1
24	8,notas	22/05	Camadas-limite turbulentas 2
25		27/05	Prova Final

Métodos Estocásticos TT705

- 2º semestre de 1998

Esta disciplina só foi ofertada uma vez, mas eu preparei notas de aula bastante completas para ela. O programa da disciplina é mostrado na tabela 1.3 : ele não foi totalmente cumprido, e não houve aulas sobre ondeletas (*wavelets*).

Escoamentos Naturais TT706

- 2º semestre de 1999

Esta disciplina só foi ofertada uma vez, com base principalmente na 2ª parte do livro de [Kundu \(1990\)](#), que não era possível cobrir na disciplina TT704. O programa é mostrado na tabela 1.4.

Tabela 1.4: Programa da disciplina TT706 Escoamentos Naturais.

Aula	Conteúdo	Seção	Observações
1	Equação da onda, parâmetros, ondas de gravidade e suas características.	7.1–7.3	
2	Dedução do potencial de velocidades (problema linear); energia	7.4–7.5	
3	Águas rasas e fundas, refração, velocidade de grupo, dispersão	7.11–7.10	tensão superficial não
4	Ressalto hidráulico, ondas solitárias, derivada de Stokes	7.11–7.14	
5	Ondas em meios estratificados: interfaces de densidade	7.15–7.17	
6	Meios continuamente estratificados e suas equações	7.18–7.19	
7	Dispersão e energia em meios estratificados	7.20–7.21	
8	1ª prova: Ondas de gravidade	Capítulo 7	em aula
9	Turbulência: introdução, aspectos qualitativos, abordagens, estatística básica	12.1–12.3	
10	Correlações e espectros, correlações cruzadas e espectros cruzados, teoremas de representação espectral	12.4–12.5	
11	Equações de Reynolds (momentos de ordem 1) e o problema de fechamento	12.6	
12	Equações para correlações (momentos de ordem 2): balanço de energia cinética turbulenta	12.7	
13	“cascata de energia” de Taylor-Richardson-Kolmogorov e a teoria de Kolmogorov (1941)	12.8–12.9	
14	Escoamentos turbulentos “livres” (longe de paredes)	12.10	
15	Escoamentos turbulentos próximos de paredes	12.11	
16	Modelos de fechamento, modelação convencional de turbulência e “Large-Eddy Simulation” (LES)	12.12–12.13	

17	Turbulência em meios estratificados	12.14
18	Teoria de dispersão de Taylor: parte I	12.15
19	Teoria de dispersão de Taylor: parte II	12.15
20	2ª prova: Turbulência	Capítulo 12 em aula
21	Mecânica dos fluidos geofísica: introdução	13.1–13.3
22	Equações para a superfície de uma esfera, escoamento geostrófico, vento térmico	13.4–13.5
23	Teorema de Taylor-Proudmann, camada de Ekman	13.5–13.7
24	Equações de água rasa, modos normais	13.8–13.9
25	Altas e baixas freqüências, interação rotação-ondas de gravidade	13.10–13.11
26	Ondas de Kelvin, conservação de vorticidade potencial	13.12–13.13
27	Ondas internas, Ondas de Rossby	13.14–13.15
28	Instabilidade barotrópica e baroclinica	13.16–13.17
29	3ª prova: Mecânica dos fluidos geofísica	Capítulo 13 em aula

Monitoramento da Qualidade do Ar TQ857

- 1º semestre de 2008
- 1º semestre de 2009

Esta disciplina foi oferecida quando eu participei do Programa de Pós-Graduação em Meio Ambiente Urbano e Industrial (PPGMAUI) da UFPR, em parceria com a Federação das Indústrias do Paraná, e a Universidade de Stuttgart (atualmente, o programa transformou-se em um Mestrado Profissional). Com a criação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA) em 2011, tendo em vista a recomendação da CAPES de que um docente não deve ser “permanente” em mais do que dois programas de pós-graduação, solicitei o meu desligamento do PPGMAUI. O nível da disciplina não era muito profundo, sendo a mesma de caráter mais informativo. A disciplina era oferecida em “doses concentradas”, à noite. O programa da disciplina, assim como oferecida em 2009, é mostrado na tabela 1.5.

Tabela 1.3: Programa da disciplina TT705 Métodos Estocásticos

MÉTODOS ESTOCÁSTICOS (2o Semestre de 1998)

Professor Nelson Luis Dias, SIMEPAR/UFPR (Centro Politécnico, Jardim das Américas),
366-2020-6354, nldias@simepar.br

O material do curso será abordado em 2 aulas teóricas semanais de 100 minutos. A avaliação será feita com 4 trabalhos para casa (TC) individuais (50%) e 2 provas escritas com consulta ao livro-texto (50%). Requisitos: o curso não tem pré-requisitos formais; conhecimento de Cálculo, Probabilidades e Estatística e Computação são necessários; os TC 1 a 3 deverão ser feitos em computador, com planilha eletrônica ou linguagem de programação; o TC 4 será feito com algum aplicativo (MatLab, Mathematica, Data Explorer, etc.) com ferramentas para análise espectral; alternativamente o professor disponibilizará rotinas em C ou FORTRAN.

Livro-texto:

Random Data, J. S. Bendat e A. G. Piersol, John Wiley & Sons

Referências Bibliográficas:

Papoulis, A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill.

Yaglom, A.M.: Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions I: Basic Results.

Aula	Conteúdo	Capítulo/Seção	Trabalhos/Cobrança
1	Introdução e sistemas lineares	1.1 a 2.5	
2	Variáveis aleatórias em 1 dimensão	3.1	
3	Variáveis aleatórias em 2 dimensões	3.2	
4	Distribuição normal	3.3	
5	Estatística: distribuições derivadas da normal; distribuições amostrais	4.1, 4.2, 4.3	
6	Intervalos de confiança e testes de hipótese	4.4, 4.5, 4.6, 4.7	TC 1: Estatística e regressão linear
7	Régressão linear univariada e multivariada	4.8	
8	Processos estocásticos estacionários: funções de correlação e correlação cruzada: densidades espectrais	5.1, 5.2	
9	Processos ergódicos, transformações lineares de processos estocásticos	5.3, 5.4	
10	Relações de entrada-saída univariadas: 1 entrada e 1 saída	6.1	Entrega TC 1; TC 2: Relações de entrada-saída
11	Uma entrada e várias saídas	6.2, 6.3	
12	Relações de entrada-saída multivariadas: várias entradas e uma saída, duas entradas e uma saída	7.1, 7.2	
13	Modelos gerais com múltiplas entradas, forma matricial	7.3, 7.4	
14	1a Prova		Entrega TC 2; 1a Prova
15	Erros de estimativa - básicos: estimativas de valores médios, viés, densidades de probabilidade	8.1, 8.2, 8.3	
16	Erros de estimativas de funções de correlação e densidades espectrais	8.4, 8.5, 8.6	
17	Estimativas avançadas de erros: estimativas de fase, modelos de entrada univariada	9.1, 9.2	
18	Estimativas de erros de modelos multivariados	9.3	
19	Processamento de dados	10.1 a 10.5	TC 3: Tratamento de dados temporais
20	Análise digital de dados: preparação de dados, transformada rápida de Fourier	11.1, 11.2	
21	Transformada rápida de Fourier, funções densidade de probabilidade e funções de autocorrelação	11.2, 11.3, 11.4	
22	Processamento de dados univariados: espectros	11.5	
23	Processamento de dados multivariados, espectros cruzados	11.6, 11.7	
24	Implementação computacional da transformada rápida de Fourier	Notas de aula	Entrega TC 3; TC 4: Análise espectral de uma série
25	Análise de dados não-estacionários	12.1 a 12.6	
26	Uma pequena introdução às ondeletas - parte 1	Notas de aula	
27	Uma pequena introdução às ondeletas -parte 2	Notas de aula	
28	2a Prova		Entrega TC 4; 2a Prova

Tabela 1.5: Programa da disciplina TQ857 Monitoramento da Qualidade do Ar

TQ857 --- Programa

Aula	UD	Data	Conteúdo
1	1	26/06	Introdução ao curso. Declinação solar. As 4 estações. A camada-limite atmosférica
2	1	26/06	Fusos horários. Calendários, dias julianos, conversões, padrões ISO para o tempo, etc..
3	2	27/06	Energia e Radiação: Radiação extra-atmosférica, radiação solar
4	2	27/06	Energia e Radiação: Radiação atmosférica.
5	2	27/06	Energia e Radiação: Radiação líquida, fluxo de calor latente, fluxo de calor sensível
6	3	03/07	Circulação Global.
7	4	03/07	Índices de umidade atmosférica
8	5	04/07	Massa, momentum e energia. Difusão e Advecção.
9	5	04/07	Análise dimensional e escalas. Turbulência. Cascata de Energia.
10	5	04/07	Estabilidade atmosférica: Classes de Pasquill, Número de Richardson, Comprimento de Obukhov.
11	6	09/07	Química da Atmosfera.
12	6	09/07	Redes de Monitoramento.
13	7	10/07	Modelagem de Dispersão.
14	7	10/07	Modelagem de Dispersão.
15	7	10/07	Modelagem de Dispersão.

TC-720 (30 h, 2 Créditos) Tópicos especiais: Programação científica com Python, Gnuplot, Metapost, e Latex

- 1º trimestre de 2009

Esta disciplina foi oferecida uma única vez, mas interessantemente atraiu um bom número de alunos. Foi uma disciplina muito prática, para ensinar com exemplos concretos como implementar no computador diversas atividades envolvidas em pesquisa, incluindo: processamento de dados (Python: <https://www.python.org/>), geração de gráficos e figuras (GnuPlot: <http://gnuplot.info/> e Metapost: <http://www.tug.org/metapost.html>), e produção de textos ([L^AT_EX: Lamport \(1994\)}](#)). Ela se baseou em minha experiência com as ferramentas do título, das quais a que eu conhecera mais recentemente, durante 2007, era Python. Python é uma linguagem interpretada, e portanto muito lenta do ponto de vista de tempo de CPU, mas na qual o desenvolvimento de algoritmos é muito rápido.

Embora desde então eu não tenha mais oferecido a disciplina, todas as ferramentas acima (com exceção de Metapost — que eu substituí no meu uso quotidiano por Pstricks: <http://www.ctan.org/pkg/pstricks-base>) continuam a ser minhas ferramentas básicas de trabalho. Naturalmente, quando a velocidade de processamento se torna realmente crítica, eu costumo mudar para linguagens compiladas tradicionais (C ou FORTRAN).

Também digno de nota é o fato de que mais recentemente têm surgido algumas alternativas que têm o potencial de tornar Python competitiva (em termos de velocidade de processamento) com linguagens compiladas tradicionais, como C e FORTRAN. Recentemente, após ler alguns artigos de Internet sobre isso, eu escrevi um artigo de divulgação científica sobre o tema ([Dias, 2014a](#)).

O programa da disciplina é mostrado na tabela 1.6.

Métodos Matemáticos em Engenharia Ambiental TEA752

- 2º trimestre de 2011
- 1º trimestre de 2012
- 1º trimestre de 2013

Com a criação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental em 2011, eu passei a ministrar esta disciplina em geral no 1º trimestre. Ela é uma disciplina “padrão” de Matemática para Engenharia em nível de pós-graduação. O conteúdo lecionado, ano a ano, varia um pouco em função do nível da turma e dos seus interesses. A tabela 1.7 mostra o programa da disciplina lecionada em 2013.

Tabela 1.6: Programa da disciplina TC720 Programação científica com Python, Gnu-plot, Metapost, e L^AT_EX (1º trimestre de 2009)

PROGRAMAÇÃO TENTATIVA

Aula	Data	Conteúdo
1	Ter 03/mai	Pequeno histórico de linguagens de programação e outras ferramentas em aplicações científicas. Prós e contras. Arquivos de texto e binários. Codificações de caracteres acentuados: ISO8859-1 e UTF-8. As vantagens de uma filosofia: quase tudo é texto!
2	Ter 10/mai	Figuras em Postscript. Postscript é uma linguagem. É relativamente difícil programar em Postscript. Alternativas: desenhar com Metapost, plotar com Gnuplot. Filosofia: plotar a partir de arquivos-texto. Vantagens: velocidade, compacidade, programabilidade. Aprenda a ler os manuais!
3	Ter 17/mai	Exemplos com Metapost.
4	Ter 24/mai	Exemplos com Gnuplot.
5	Ter 31/mai	A herança de Pascal: escopo de variáveis em Fortran, Pascal, C e Python A herança de Modula-2: módulos, e o escopo de funções/sub-rotinas em Fortran, Pascal, C e Python. Import × #include.
6	Ter 7/abr	Enfim Python: breve introdução à linguagem: tipos, variáveis. Armadilhas comuns para quem está acostumado com C/Fortran. <i>Lists, Dictionaries e Sets. Functions e Classes. Tuples. Strings. Slicing.</i> Declare um objeto no ponto em que você precisa dele. Funções: retorne tudo em <i>Tuples</i> . Argumentos: declare funções que funcionam com “qualquer tipo” de variável.
7	Ter 14/abr	Leitura e escritura (<i>Files</i>), e controle de fluxo (ifs, loops). Else também existe em whiles e fors. Simulando switch com <i>Dictionaries</i> . Lendo por linhas, e separando os campos: o pão-com-manteiga do processamento de dados, e muito melhor do que planilhas eletrônicas.
8	Ter 21/abr	Juntando as ferramentas: Python+Gnuplot. Strings de múltiplas linhas. Abrir e fechar arquivos, e executar comandos. Usando Python para expandir Gnuplot com loops, leitura e escritura de variáveis. Exemplo com Séries de Fourier. Plotando arquivos em massa.
9	Ter 28/abr	Juntando as ferramentas: Python + Numpy, Python + SciPy. Usando módulos pré-compilados em C e Fortran (o melhor de 2 mundos).
10	Ter 05/mai	Idéias simples em L ^A T _E X: escrevendo pequenos documentos. As maneiras mais simples e úteis de modificar o visual. Não tente escolher onde vai a figura! As tabelas são a pior parte: usando booktabs e makecell para produzir tabelas com boa aparência, e bons antecedentes.
11	Ter 12/mai	Noweb, e programação literária: documentando seus programas em qualquer linguagem. Escrevendo o manual junto com o programa.
12	Ter 19/mai	Classes em Python, e uma forma de ressucitar os records de Pascal: programação orientada a objetos é útil em programação científica? A herança de uma base sexagesimal, e os detalhes que estragam gudo: tentando somar graus, minutos e segundos.

Tabela 1.7: Programa da disciplina TEA752 Métodos Matemáticos em Engenharia Ambiental no 1º trimestre de 2013.

Aula	UD	Dia	Data	Conteúdo Previsto
1	1	6 ^a	15/3	Introdução ao curso. Revisão de Álgebra Linear.
2	1	4 ^a	20/3	Fundamentos de Análise Dimensional e Teorema dos Pi.
3	2	6 ^a	22/3	Definição de Tensor. Notação indicial.
4	2	4 ^a	27/3	Tensores cartesianos: operações fundamentais.
5	2	6 ^a	29/3	Tensores: Exemplos em Física e Mecânica dos Fluidos.
6	2	4 ^a	3/4	Bases não-ortogonais. Sistemas generalizados de coordenadas.
7	2	6 ^a	5/4	Vetores covariantes e contravariantes.
8	2	4 ^a	10/4	Cálculo de tensores. Símbolo de Christoffel.
9		6 ^a	12/4	P1
10	3	4 ^a	17/4	O Teorema da função implícita.
11	3	6 ^a	19/4	Integrais múltiplas e o jacobiano. Teoremas Vet.
12	4	4 ^a	24/4	O método das características.
13	4	6 ^a	26/4	Soluções analíticas.
		4 ^a	1/5	Feriado.
14	4	6 ^a	3/5	Classificação de EDPs. Solução de d'Alembert.
15		4 ^a	8/5	P2
	5	6 ^a	10/5	Sturm-Liouville.
16	5	4 ^a	15/5	Difusão. Boussinesq.
17	5	6 ^a	17/5	Laplace. Onda.
18	6	4 ^a	22/5	Transformação de Similaridade: Placa impulsinada
19	6	6 ^a	24/5	Transformação de Similaridade: Blasius e Barenblatt
20	6	4 ^a	29/5	Transformação de Similaridade: Sutton e Brutsaert-Yeh
21		6 ^a	31/5	P3

Ensino de Turbulência na Pós-Graduação O ensino e pesquisa em tópicos de Turbulência (basicamente, turbulência atmosférica) dominaram uma boa parte de meu tempo de professor de pós-graduação e de pesquisador. A oferta desse tipo de assunto na pós-graduação é relativamente difícil, pois em geral há poucos interessados — quase sempre, apenas meus próprios orientados.

Ao longo dos anos, em função da demanda e do programa de pós-graduação em que elas foram oferecidas, houve diversas disciplinas que eu lecionei que continham o nome “Turbulência” em seu título ou em seu programa. Aos poucos, elas foram consolidadas em dois “tipos”, mais adequados ao regime trimestral que temos em nossas pós-graduações em Engenharia na UFPR:

- Uma disciplina um pouco mais introdutória, que deve interessar a uma gama maior de alunos, por abordar a turbulência de uma forma um pouco mais geral (por exemplo, por abordar conceitos que se aplicam tanto a escoamentos turbulentos na água como no ar). Essa disciplina ganhou por alguns anos o nome de “TT709 Mecânica da Turbulência”, e atualmente é denominada “TEA757 Camadas-Limite Naturais e Transporte de Poluentes”.
- Uma disciplina mais específica de conceitos um pouco mais teóricos, geralmente relacionados com conceitos estatísticos (funções de estrutura, espectros, etc.). Ela foi oferecida uma vez em 2002 (provavelmente como tópicos especiais, no Programa de Física dos Solos), depois como “TC709 Tópicos especiais: Turbulência, Processos Estocásticos e Espectros” no PPGMNE (Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia), e atualmente (pela primeira vez em 2014) como código “TEA778 Dinâmica Espectral da Turbulência”.

A descrição das ofertas desses dois tipos de disciplina vem a seguir.

Mecânica da Turbulência (TT709), e Camadas-Limite Naturais e Transporte de Poluentes (TEA757)

- 2º trimestre de 2005
- 2º trimestre de 2009
- 2º trimestre de 2010
- 2º trimestre de 2012
- 2º trimestre de 2013
- 2º trimestre de 2014

Como observado acima, esta disciplina consolidou-se, com o tempo, em um “primeiro curso de turbulência” (para usar o título do livro de [Tennekes e Lumley \(1972\)](#)). Um programa típico é mostrado na tabela 1.8.

Ela está dando origem, paulatinamente, a um livro-texto sobre turbulência. Uma parte do curso descreve o cálculo de fatores de atrito em tubos sob escoamento turbulento, um tema hoje em dia ensinado de forma “técnica” (como calculá-los) em quase todos os cursos de Engenharia no mundo. No apêndice C, apresento o capítulo correspondente na disciplina.

Tabela 1.8: Programa da disciplina “TEA757 Camadas-Limite Naturais e Transporte de Poluentes” em 2013.

Aula	UD	Dia	Data	Conteúdo
1	1	4 ^a	5/6	Introdução ao curso. Breve descrição da história da mecânica dos fluidos. Camadas-limite na natureza. Breve descrição de turbulência.
2	1	6 ^a	7/6	Notação indicial, conservação de massa, misturas.
3	1	4 ^a	12/6	Uma revisão, sem demonstração, das equações de Navier-Stokes. Resolução de alguns mal-entendidos.
4	1	6 ^a	14/6	As equações de transporte para escalares.
5	1	4 ^a	19/6	A equação de transporte para energia. Energia mecânica e energia interna.
6	1	6 ^a	21/6	Escalas de um escoamento: micro-escalas da turbulência.
7	1	4 ^a	26/6	O estado hidrostático de referência: várias soluções analíticas.
8	1	6 ^a	28/6	A hipótese de Boussinesq. O paper de Spiegel e Veronis.
9	1	4 ^a	3/7	Incompressibilidade. Formas alternativas de estimar os termos da equação da continuidade.
10	1	6 ^a	5/7	Uma análise de escala para camadas-limite laminares. Solução de Blasius.
11	1	4 ^a	10/7	Soluções numéricas: solução original em série, tentativa-e-erro, Runge-Kutta.
12	1	6 ^a	12/7	Camadas-limite em diferentes geometrias (cunha, estagnação). Camada-limite térmica.
13	1	4 ^a	17/7	P1.
14	1	6 ^a	19/7	Turbulência: o problema das médias. Notação generalizada $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots$. Equações de Reynolds (ordem 1).
15	1	4 ^a	24/7	Turbulência: equações de Reynolds para ordem 2.
16	1	6 ^a	26/7	Turbulência: equações de Reynolds para ordem 2 (continuação).
17	1	4 ^a	31/7	Turbulência: Energia cinética da turbulência e taxas de dissipação dos momentos de ordem 2.
18	1	6 ^a	2/8	Estratificação de densidade: número de Richardson e comprimento de Obukhov.
19	1	2 ^a	26/8	Estratificação de densidade: a teoria de similaridade de Monin-Obukhov.
20	1	4 ^a	28/8	Camadas-limite turbulentas: escoamento turbulento em um duto – parede lisa.
21	1	2 ^a	2/9	Camadas-limite turbulentas: escoamento turbulento em um duto – parede rugosa.
22	1	4 ^a	4/9	Interpolação, e o diagrama de Moody.
23	1	2 ^a	9/9	Escoamentos turbulentos em canais, e a fórmula de Manning.
24	1	4 ^a	11/9	P2

Turbulência, Processos Estocásticos e Espectros (TC709), e Dinâmica Espectral da Turbulência (TEA778)

- 3º trimestre de 2002
- 3º trimestre de 2008
- 1º trimestre de 2011
- 3º trimestre de 2014

O material didático desenvolvido nesta disciplina deverá fazer parte do mesmo texto do qual o capítulo apresentado no Apêndice C é um exemplo.

A tabela 1.9 mostra o conteúdo do curso ministrado em 2002. Cabe observar que o conteúdo era demasiadamente ambicioso, e que ele não foi cumprido em sua totalidade.

Fim das duas disciplinas sobre Turbulência, e continuação da listagem de disciplinas de Pós-Graduação.

Abordagens micrometeorológicas para a estimativa de fluxos de gases de efeito estufa entre a superfície e a atmosfera (TC709 e TEA775)

- 3º trimestre de 2012

Esta disciplina foi ofertada com 2 códigos (conforme acima) no 3º trimestre de 2012, para dois programas de pós-graduação (PPGMNE e PPGEA) da UFPR. Naturalmente, eu só contabilizei a carga horária em um dos programas. Houve considerável esforço de produção de um texto que acompanhasse a disciplina: esse mesmo texto serviu de base para um capítulo de livro (Dias et al., 2012a) produzido no contexto de um projeto de pesquisa sobre emissões de gases de efeito estufa em reservatórios de hidrelétricas, liderado pelo CEPEL (Centro de Pesquisas de Energia Elétrica), no qual eu coordenei as atividades da UFPR.

Tabela 1.9: Programa da disciplina “Turbulência” (equivalente à TC709 em 2011, e à TEA778 em 2014) em 2002.

Aula	Data	Conteúdo
1	19/09	Introdução: fenomenologia da turbulência
2	24/09	Equações de Navier-Stokes e de transporte - I
3	26/09	Equações de Navier-Stokes e de transporte - II
4	26/09	O espaço de Fourier sob o ponto de vista de processos estocásticos, condições de contorno periódicas.
5	01/10	Integrais de Fourier-Stieltjes e funções generalizadas
6	18/08	Instabilidade e transição para a turbulência
7	01/09	Processos estocásticos e teoria espectral - I
8	01/09	Dedução das equações de Reynolds
9	08/09	Feriado
10	08/09	Feriado
11	15/09	Processos estocásticos e teoria espectral - II
12	15/09	As equações de balanço para momentos de 2ª ordem
13	22/09	Dissecção dos balanços de 2ªordem
14	22/09	Modelos de fechamento para as equações de turbulência
15	29/09	Turbulência homogênea e sua cinemática; dedução da dissipação de energia cinética turbulenta em turbulência isotrópica
16	29/09	A forma dos espectros (e das funções de estrutura?) em turbulência isotrópia
17	06/10	Dedução das equações de transporte espectral
18	06/10	Escala integral, microescala de Taylor e microescalas de Kolmogorov; a teoria de Kolmogorov (1941)
19	13/10	Relações para os momentos de ordem 3 e 4 em uma distribuição normal
20	13/10	Large-eddy simulation
21	20/10	Modelos EDQNM-I
22	20/10	Modelos de fechamento simples (Corrsin-Pao e Heisenberg)
23	27/10	Modelos EDQNM-II
24	27/10	Dinâmica das flutuações de vorticidade
25	03/11	Renormalização-I (DIA)
26	03/11	Espectro de escalares: faixa inercial, inercial-difusiva, viscosa-convectiva e viscosa-difusiva
27	10/11	Renormalização-II (DIA?)
28	10/11	Desvio da distribuição normal para velocidade e escalares
29	17/11	Modelo de fechamento do espectro tridimensional-I
30	17/11	Estruturas coerentes
31	24/11	Perspectivas de pesquisa
32	24/11	Perspectivas de pesquisa

Teoria Ergódica, Processos Estocásticos e Sistemas Dinâmicos

- 1º trimestre de 2014

Este foi um seminário de pós-graduação oferecido como “Tópicos Especiais” (TEA775, no PPGEA), em colaboração com a Profª Ailín Ruiz de Zárate, do Departamento de Matemática. O seminário foi proposto por mim como uma continuação a minhas indagações apresentadas em uma palestra no Workshop Brasileiro de Micrometeorologia (Santa Maria, RS, Novembro de 2013).

A palestra apresentada no Workshop, que motivou a disciplina, está mostrada no Apêndice D.

1.3 Atividades de orientação

Orientar alunos talvez seja uma das atividades mais prazeirosas de um professor. Ela envolve saber interagir com os outros, avaliar o que cada aluno é capaz de fazer — quais são seus pontos fortes e fracos — e trabalhar juntamente com o orientado ou a orientada para fortalecer as deficiências e explorar, no bom sentido, aquilo que ele/ela tem de melhor.

Não cabe aqui fazer comentários sobre os alunos individualmente: entre outros motivos, a lista a seguir não é pequena, embora esteja também longe de ser uma lista muito grande de orientações. Olhando para ela retrospectivamente, fica muito claro para mim que o tamanho da lista reflete muito de minhas opções pessoais: eu certamente preferi — embora não deliberadamente — trabalhar com um número menor de alunos, o que (espero) permitiu mais dedicação e aprofundamento de ambas as partes.

O outro ponto a ressaltar refere-se à minha aversão — e talvez à minha incapacidade! — de trabalhar com meus orientados em projetos totalmente pré-definidos. Acabou sendo uma característica de praticamente todas as minhas orientações que nós — eu e o orientado em questão — optássemos por explorar questões que iam se impondo, ao longo da orientação, a partir do tema “básico”, ou inicial. Muitas vezes, a mudança foi significativa.

Essa liberdade, entretanto, me parece essencial em pesquisa: é fundamental que possamos explorar as possibilidades, e forçar um pouco as portas do conhecimento. Também é interessante que as reações de meus alunos não tenham sido uniformes a esse estilo: enquanto que alguns se sentiram incentivados pelos desafios, outros demonstraram menos confiança em levar suas pesquisas a bom termo. Em geral, o sistema funcionou, sempre com uma certa dose de compromisso, para que os orientados trabalhassem confortavelmente — na medida em que isso é possível num ambiente de pesquisa.

Existiram, também, aqueles cuja orientação não foi bem concluída. Eles não fazem parte dessa lista, mas talvez seja justo enumerar os casos (todos citados no masculino, na falta de um pronome neutro em Português): ao longo do tempo, houve 1 orientado de graduação que não concluiu seu trabalho de conclusão sob minha orientação; 3 orientados de mestrado que não concluíram suas dissertações; 1 coorientado de doutorado que concluiu sem minha participação (por decisão minha) na fase final, e 1 orientado de doutorado que não concluiu sua tese.

Para o orientador, esses casos sempre parecem um “perda” de tempo e dedicação à orientação, em uma visão egoísta. Por outro lado, as pessoas sempre levam algo de suas experiências, e retomam suas vidas tendo aprendido um pouco, ou muito, mais. Além disso, esses casos reforçam minha convicção de que pesquisa, ensino e orienta-

ção são atividades humanas como quaisquer outras. Algumas vezes o orientador ou o orientado erra, ou as coisas simplesmente não funcionam.

Segue-se abaixo a lista dos casos felizes.

Iniciação Científica

1. Nayana Grasielle Marques da Silva. Análise da evaporação em bacia hidrográfica com métodos hidrometeorológicos e sua implicação nas transferências de energia entre a superfície e a atmosfera. 2003. Iniciação Científica – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
2. João Paulo Castagnoli. Aquisição de dados de turbulência em alta freqüência com um computador de mão. 2003. Iniciação Científica – Universidade Federal do Paraná, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Orientador.
3. Liége Wosiacki. Visualização 2-D e 3-D de campos vetoriais, com ênfase no campo de vento. 2008. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
4. Bianca Luhm Crivellaro. Obtenção de estimativas de erro para o tensor de Reynolds amostral. 2009. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
5. Liége Wosiacki. Visualização 2-D de campos vetoriais com ênfase no campo de vento. 2009. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
6. Bianca Luhm Crivellaro. Extensão do Método de Covariâncias Turbulentas Atenuadas para a medição de fluxos de CO₂. 2010. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
7. Jessyca Petry Dalazen. Avaliação da Qualidade do Ar da Cidade de Curitiba com medições em superfície e na Camada Limite Atmosférica de Ozônio. 2013. Iniciação Científica. (Graduando em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

Trabalho de conclusão de curso de graduação

1. Diana Maria Cancelli. Um modelo de troca superfície-atmosfera distribuído para o Estado do Paraná. 2003. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
2. Henrique Ferro Duarte. Modelos de cálculo de radiação líquida e solar para uso em esquemas de transferência solo+vegetação+atmosfera. 2003. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
3. Helder Rafael Nocko. Implementação do modelo chuva-vazão TOPMODEL para a sub-bacia do Rio Pequeno na Bacia do Altíssimo Iguaçu/PR. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

4. Ângelo Breda. Implementação de um modelo de química do ar integrado verticalmente na cidade de Curitiba-PR. 2005. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
5. Aline Rafael de Oliveira. Comparação da evaporação em lago medida in situ com modelos climatológicos. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
6. Tomás Chor. Medição da velocidade vetorial do vento a bordo de um veículo aéreo não tripulado. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
7. Fernando Augusto Silveira Armanni. Avaliação dos modelos de dispersão atmosférica Modelar e Aermod em comparação com os dados do experimento de campo do projeto Prairie Grass. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
8. Bianca Luhm Crivellaro. Medição do fluxo de CO₂ com o método de covariâncias turbulentas. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
9. Henrique Guarneri. Aplicações de métodos analíticos e numéricos em engenharia ambiental. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
10. Einara Zahn. Uma análise experimental de escalares na camada rugosa em uma floresta amazônica. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

Orientações de outra natureza

1. Rianne de Jong. A kinematics-based model for airborne wind measurements. 2011. University of Twente. Orientador.

Rianne foi uma aluna holandesa que recebemos em um programa de intercâmbio. Ela realizou seu trabalho de conclusão de curso sob minha orientação.

Dissertações de mestrado

1. Ruibran Januário dos Reis. Comparação de estimativas climatológicas de evaporação com o método do balanço de energia no lago Serra Azul, MG.. 1996. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) – Universidade Federal de Minas Gerais. Coorientador.
2. Afonso Augusto Magalhães de Araújo. Identificação de componentes hidrológicas através de filtros lineares auto-recursivos. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Hidráulica) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
3. Cristhiane Michiko Passos Okawa. Medição contínua do fluxo de calor sensível. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Hidráulica) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

4. Dornelles Vissotto Jr.. Modelagem numérica para interações superfície-atmosfera. 2003. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Coorientador.
5. Marcelo Chamecki. Uma análise da estacionariedade e isotropia da turbulência na camada superficial da atmosfera. 2003. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
6. Nadiane Smaha. Implementação e Estudos de um Modelo de Interações Superfície-Atmosfera e seus impactos na previsão numérica de tempo. 2003. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Coorientador.
7. André Luciano Malheiros. Aplicabilidade de modelos de dispersão urbanos: influência da altura da camada de mistura e dos parâmetros de deposição seca. 2005. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
8. Henrique Ferro Duarte. Um método para medições de fluxo de calor latente a partir de sensores de umidade capacitivos. 2006. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
9. Diana Maria Cancelli. Um modelo para a evolução térmica de lagos profundos. 2006. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
10. Suellen Rodrigues. Estudo do comportamento de soluções de equações diferenciais parciais parabólicas usando o método das características. 2010. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
11. Lívia Souza Freire. Teorias de camada limite atmosférica: modelo de crescimento, fluxo de entranhamento e análise espectral. 2012. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
12. Tomás Luís Guimarães Chor. Novas soluções analíticas para a equação não linear de Boussinesq para águas subterrâneas. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
13. Fernando Augusto Silveira Armani. Fluxos turbulentos de gás carbônico no reservatório da Usina Hidroelétrica de Itaipu. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
14. Bianca Luhm Crivellaro. O Fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica: uma aplicação à estimativa de erros. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

Teses de doutorado

1. Akemi Kan. Estimativa de evapotranspiração real com base na análise de recessão dos hidrogramas. 2005. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
2. Mateus Bernardes. Uma análise da variabilidade do fluxo de momentum na camada superficial atmosférica em condições instáveis. 2008. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
3. Diana Maria Cancelli. Análise experimental e numérica da dissimilaridade entre escalares na camada limite atmosférica. 2013. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.
4. André Luciano Malheiros. Desenvolvimento de um VANT (veículo aéreo não tripulado) para monitoramento da camada-limite atmosférica e análise do modelo integral para cálculo de fluxo superficial de calor sensível. 2014. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná. Orientador.

Supervisões de pós-doutorado

1. Maurício Gobbi, 1998–1999.
2. Ernani Lima Nascimento, 2003–2006.
3. Selma Regina Maggiotto, 2003–2004.
4. Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha. 2006.
5. Diana Maria Cancelli. 2014.

Capítulo 2

Atividades de produção intelectual

Este capítulo contém apenas uma listagem de comunicações científicas e artigos publicados em periódicos com corpo editorial. Uma discussão um pouco mais detalhada do que acontecia em torno da produção desses trabalhos é deferida ao capítulo 4, em que os projetos de pesquisa são relatados.

2.1 Comunicações em Congressos

1. Dias, N. L. e Damázio, J. M. (1985). Tratamento de Valores Atípicos Pequenos na Estimação de Vazões Decamileneares. Em *VI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, São Paulo*, São Paulo. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
2. Dias, N. L., Pereira, M. V. F., e Kelman, J. (1985). Optimization of Flood Control and Power-Generation Requirements in a Multi-Purpose Reservoir. Em *Preprint Volume, Symposium on Planning and Operation of Electric Power Systems, IFAC*, Rio de Janeiro
3. Kelman, J., Costa, J. P., Damázio, J. M., e Dias, N. L. (1985). Geração Multivariada de Precipitações Extremas. Em *VI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, São Paulo*, São Paulo. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
4. Kelman, J., Costa, J. P., Damázio, J. M., Dias, N. L., e Albuquerque, F. C. (1987). Métodos de Cálculo de Cheia de Projeto de Vertedores. Em *IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE)*, Belo Horizonte, Belo Horizonte
5. Dias, N. L. e Kelman, J. (1987). Comparação entre Modelos Climatológicos e o Uso de Tanques Classe A para Estimar a Evaporação no Reservatório de Sobradinho. Em *VII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Salvador*, volume 2, páginas 162–169, Salvador. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
6. Dias, N. (1988). Uma justificativa analítica para uma equação empírica de evaporação. Em *V Congresso Brasileiro de Meteorologia, Rio de Janeiro*, volume 1, páginas X.6–X.11, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia
7. Dias, N. L. e Gobbi, M. F. (1989). Quanto Evapora o Lago de Sobradinho? Em *IV Simpósio Luso-Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos, Lisboa*, Lisboa. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
8. Dias, N. L., Brutsaert, W., e Wesely, M. L. (1993). The estimation of nocturnal surface fluxes with low frequency turbulence data during FIFE-89. Em *Transactions, Spring Meeting of the AGU*, Baltimore. American Geophysical Union

9. Araújo, A. A. M. e Dias, N. L. (1995). Separação do hidrograma de cheias através de filtros auto-recursivos. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 1, páginas 267–275, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
10. Reis, R. J., Dias, N. L., e Neto, G. M. C. (1995). Previsões do modelo de evaporação CRLE versus grandezas medidas no reservatório de Serra Azul-MG. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 183–191, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
11. Dias, N. L. (1995b). Obtenção de curvas de remanso pelo método de Runge-Kutta. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 277–285, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
12. Gobbi, E. F., Dias, N. L., e Ramina, R. (1995). Cheia de projeto em pequenas bacias hidrográficas. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 243–251, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
13. Araújo, A. A. M. e Dias, N. L. (1996). Métodos de deconvolução do hidrograma para o cálculo da chuva efetiva e comparação com a chuva observada. Em *IX Congresso Brasileiro de Meteorologia*, volume 2, páginas 1469–1471, Campos do Jordão. Sociedade Brasileira de Meteorologia
14. Dias, N. L., Bettega, R., e Okawa, C. M. P. (1996). Correção analítica da perda de potência espectral da turbulência em aparelhos com tempo de resposta limitada. Em *IX Congresso Brasileiro de Meteorologia, Campos do Jordão*, volume 2, páginas 1255–1258. Sociedade Brasileira de Meteorologia
15. Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996a). A comparison of monthly evaporation estimates from climatological models and the energy-budget method at Lake Serra Azul, Brazil. Em *Transactions, Spring Meeting of the AGU*, Baltimore. American Geophysical Union
16. Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1997). Radiation and turbulence in the stable boundary layer. Em *Preprint Volume, Special Symposium on Boundary Layers and Turbulence*, páginas 76–81, Long Beach. American Meteorological Society
17. Dias, N. L. e Okawa, C. M. P. (1997). Medição Fluxo de Calor Sensível com anemômetro sônico e de hélice em Piraquara-PR. Em *CD-ROM, XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Vitória. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
18. Dias, N. L. e Marcellini, S. S. (1997). Implementação do sistema de controle de qualidade de dados objetivo do SIMEPAR: testes preliminares. Em *CD-ROM do XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 228, Vitória. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
19. Reis, R. J., Dias, N. L., e Baptista, M. B. (1997). Estimativa da evaporação do lago Serra Azul pelo método do balanço de energia-razão de Bowen. Em *CD-ROM, Trabalho 88, XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Vitória ES. Associação Brasileira de Recursos Hídricos

20. Guetter, A. K., Cayan, D. R., e Dias, N. L. (1997). Hydroclimatological patterns of streamflow and soil water availability in Southern Brazil. Em *Preprint Volume, 13th Conference on Hydrology*, página 244, Long Beach. American Meteorological Society
21. Kim, I. S., Dias, N. L., Guetter, A., e Sá, L. D. A. (1998a). Um método de previsão climática de vazão nos rios Iguaçu, Paraná e Paraguai. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*. Sociedade Brasileira de Meteorologia
22. Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., Araújo, A. A. M., Kan, A., Nazareno, P., Rocha, L. S., e Sanchez, S. (1998a). Os experimentos intensivos de campo dos estudos de mesoescala para o lago de Itaipu (Exinc/Mesolit). Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
23. Okawa, C. M. P., Nazareno, P., Dias, N. L., e Kan, A. (1998). Medição de fluxos de energia e grandezas médias no lago de Itaipu, PR e Paraguai. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
24. Okawa, C. M. P. e Dias, N. L. (1998). Medição do fluxo de calor sensível com anemômetro sônico e de hélice. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
25. Dias, N. L., Rocha, L. S., Okawa, C. M. P., e Sanchez, S. (1998c). Determinação de albedos e rugosidades na região do reservatório de Itaipu. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
26. Gobbi, M. F., Dias, N. L., e Araújo, A. A. (1998b). Aplicação do esquema de transferência solo-vegetação-atmosfera do modelo ARPS com dados medidos sobre uma cultura de soja em Sta Theresinha do Itaipu, PR. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
27. Kim, I. S., Dias, N. L., e Pittigliani, M. (1998b). Aplicação do MOS para previsão de temperatura mínima até 72 horas no estado do Paraná. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia e VIII Congresso Latino-americano e Ibérico de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia
28. Okawa, C. M. P., Dias, N. L., Grodzki, L., e Prevedello, C. L. (1999). Resultados de um experimento micrometeorológico em uma cultura de soja. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 89, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
29. Gobbi, M. F., de Araújo, A. A. M., e Dias, N. L. (1999b). Investigação qualitativa sobre a influência do reservatório de Itaipu na umidade do ar utilizando modelagem atmosférica. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 85, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
30. Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Araújo, A. A. M., e Gobbi, M. G. (1999c). Estudo dos impactos sobre o clima regional do reservatório de Itaipu. Em *CD-ROM, XV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, Foz do Iguaçu. Cigré-Brasil

31. Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Prevedello, C. L., e Rocha, L. S. (1999e). Medição contínua de fluxos, temperatura e umidade do solo em uma cultura de soja. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 88, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
32. Dias, N. L., Quadro, M., e Pittigliani, M. (1999f). Comparação de alternativas de medição e estimativa da radiação solar com actinógrafos e piranômetros. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 87, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
33. Dias, N. L. (2000). Sobre a consistência da aplicação de análise dimensional direcional à camada superficial. Em *CD-ROM, Rio de Janeiro*. Sociedade Brasileira de Meteorologia
34. Kan, A., Dias, N. L., e Mattos, A. Z. (2000). Estimativas do vento para um tempo de recorrência de 250 anos. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia
35. Pittigliani, M. e Dias, N. L. (2000). Análise da distribuição temporal de dados horários de temperatura em Curitiba. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia
36. Dias, N. L. e Kan, A. (2000). A relação entre o índice de brisa e zonas de pressão. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia
37. Dias, N. L., Kan, A., e Brutsaert, W. (2000). A Qualitative Analysis of Recessional Flow Models by Comparison With Numerical Simulations. Em *AGU 200 Fall Meeting*, número H71F-11. American Geophysical Union
38. Dias, N. L. e Duarte, H. F. (2002a). Obtenção de um índice de nebulosidade do céu a partir da análise de dados de radiação solar. Em *XII Congresso Brasileiro de Meteorologia, Anais CDROM*, Foz do Iguaçu. Sociedade Brasileira de Meteorologia
39. Gobbi, M. F., Chamecki, M., Junior, D. V., Pisnitchenko, I. A., e Dias, N. L. (2002). Implementação de um Modelo de Mesoescala para a Região Sul do Brasil. Em *XII Congresso Brasileiro de Meteorologia, Foz do Iguaçu*
40. Dias, N. L., Kan, A., e Marques Silva, N. G. (2002b). Energy Budget Errors from Eddy Correlation Continuously Measured Fluxes. Em *Anais – CDROM, XII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, páginas 1–5, Foz do Iguaçu. Sociedade Brasileira de Meteorologia
41. Dias, N. L. e Malheiros, A. L. (2003). Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
42. Dias, N. L. e Maggiotto, S. R. (2003a). Medição de umidade em alta freqüência com um sensor capacitivo ventilado. Em Degrazia, G. A., editor, *Ciência e*

Natura, III Workshop Brasileiro de Micrometeorologia, volume Especial, páginas 195–199, Santa Maria RS. Universidade Federal de Santa Maria

43. Dias, N. L. (2003a). Estimativa do coeficiente de Manning no rio Iguaçu a partir de perfis de velocidade. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, volume Livro de Resumos (artigo completo no CD – full article in CD), página 400, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
44. Maggiotto, S. R., Grodzki, L., Wagner-Riddle, C., Leclerc, M. Y., Dias, N. L., Caramori, P. H., Oliveira, D., e Sanchez, S. D. (2003). Comparative studies between a pasture and a rubber-tree plantation in Paraná – energy balance, radiation and CO₂ flux. Em *Proceedings, XIII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia (XIII Brazilian Congress of Agrometeorology)*, Santa Maria, Brazil. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia
45. Chamecki, M. e Dias, N. L. (2003). Estimating the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer with sonic anemometry data. Em *56th annual meeting of the division of fluid dynamics of the american physical society, Bulletin of the American Physical Society*, volume 48 (p. 87), East Rutherford, New Jersey. American Physical Society
46. Vissotto Jr., D., Cancelli, D. M., Dias, N. L., Prevedello, C. L., e Grodzki, L. (2004). Estimativa de umidade do solo para o Estado do Paraná com uso de um modelo de interação superfície atmosfera. Em *CD-ROM, XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia
47. Malheiros, A. L. e Dias, N. L. (2004). Determinação prática da altura da camada-limite atmosférica para aplicação em modelos de dispersão de poluentes. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia
48. Vissotto Jr., D., Dias, N. L., Duarte, H. F., e Cancelli, D. M. (2004). Análise do fechamento do balanço de energia no site experimental de Ponta Grossa PR. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia
49. Duarte, H. F. e Dias, N. L. (2004). Ajuste da radiação líquida em um modelo de transferência solo-vegetação-atmosfera. Em *Anais, CD-ROM, XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*
50. Dias, N. L. (2005b). Uma avaliação do uso de dados de estações meteorológicas automáticas em modelos climatológicos de evaporação e evapotranspiração. Em *Anais, 1º Simpósio de Recursos Hídricos do Sul*, Santa Maria, RS. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
51. Malheiros, A. L., Dias, N. L., e Conselman, A. (2005). O efeito da promediação sobre a pressão de vapor média medida em estações meteorológicas automáticas. Em *CD-ROM, XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*
52. Dias, N. L., Bernardes, M., Nocko, H. F., e Reksidler, R. (2005). Influência de obstáculos aerodinâmicos na medição de variáveis micrometeorológicas : medições de velocidade de atrito no lago de Furnas. Em *CD-ROM, XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*

53. Bernardes, M. e Dias, N. L. (2005). Comparação dos métodos de obtenção da velocidade de atrito a partir de dados de turbulência. *Revista Ciência e Natura – IV Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, Edição Especial:221–224
54. Gonçalves, J. E., Malheiros, A. L., Nascimento, E. L., Maggiotto, S. R., e Dias, N. L. (2006). Veículo aéreo não tripulado para perfilamento atmosférico em alta resolução. Em *XIV Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Florianópolis. Sociedade Brasileira de Meteorologia
55. Leite, E. A., Dias, N. L., e Rotunno Filho, O. C. (2006). The effect of precipitation forecasts and monitoring on hourly hydrological statistical prediction models. Em *Anais, 8th International Conference on Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography*
56. Dias, C. L. N. C. . N. L. (2006a). Modelagem de Transporte de Escalares em Rios. Em *Anais do I Simpósio Sul-Sudeste de Recursos Hídricos*
57. Kan, A., Dias, N. L., e Prevedello, C. L. (2006). Análise qualitativa de recessões de um hidrograma usando equação de Boussinesq. Em *Anais, I Simpósio de Recursos Hídricos Sul-Sudeste*, número 148. Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Associação Brasileira de Recursos Hídricos
58. Kan, A., Dias, N. L., Grodzki, L., e Maggiotto, S. R. (2007). Comparação entre a evapotranspiração estimada pelo método do balanço hídrico sazonal e medição feita na bacia do Rio Verde, região do reservatório de Furnas em Minas Gerais. Em *Anais, CD-ROM*, número 583. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
59. Dias, N. L., Leclerc, M., Lindroth, A., Molder, M., e Bath, A. (2007d). Daytime low-level inversions and jets and their impact on surface scalar fluxes. Em *Continental Biosphere Vegetation and Water Cycle: Analyses and Prospects*, Paris
60. Dias, N. L., Hong, J., Leclerc, M., Black, A., Grant, N., Nesic, Z., e Krishnan, P. (2007c). CO₂ flux gap-filling with an aerodynamic-variance method over a tall forest. Em *Ameriflux Annual Meeting*, Boulder, CO
61. Zhang, G., Leclerc, M., Karipo, A., Hong, J., Dias, N. L., Lewin, K., e F., N. (2008). Wind and turbulence properties within and above a slash pine forest in Florida and the effect of atmospheric stability. Em *AMS 28th Conference on Agricultural and Forest Meteorology*, Florida
62. Hong, J., Dias, N. L., e Leclerc, M. (2008). Surface-layer scaling for nocturnal turbulence with an evolving low-level jet. Em *28th Conference on Agric For Meteorol*, Orlando, FL. American Meteorological Society
63. Pinginta, N., Leclerc, M., Hong, J., Zhang, G., Dias, N. L., e Sengthong, C. (2008). Environmental Controls on the CO₂ Exchange in a Peanut Field. Em *AMS 28th Conference on Agricultural and Forest Meteorology*, Florida. American Meteorological Society
64. Dias, N. L., Cancelli, D. M., e Jr., D. V. (2008a). Desafios e lições da medição moderna de evaporação em grandes lagos. Em *CDROM Anais II Simpósio de Recursos Hídricos do Sul-Sudeste*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos

65. Vissotto, Jr, D., Dias, N. L., e Cancelli, D. M. (2009). Uma avaliação sistemática das correções do método de covariâncias turbulentas atenuadas para a medição de evaporação em lagos. Em *Anais, CD-ROM XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos
66. Malheiros, A. L., Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Hasegawa, T., Vissoto, S., e Wolf, R. (2009). Experiências no uso de veículos aéreos não-tripulados para medições de perfis na camada-limite atmosférica. Em *Anais, XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*
67. Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Hasegawa, T., e Freire, L. S. (2010c). High Resolution Atmospheric Profiles with a mini-UAV. Em *Atmospheric Turbulence and Boundary Layers. A Symposium in honor of John C. Wyngaard.*, University Park, PA. The Pennsylvania State University
68. Dias, N. L., Cancelli, D. M., e Vissotto Jr., D. (2010a). Directional analysis of over-lake water vapor and heat fluxes. Em *EOS Trans AGU 91(26) Meet. Am. Suppl.*, páginas Abstract H21A-01, Foz do Iguaçu, Brazil. American Geophysical Union
69. Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Fisch, G., e Hasegawa, T. (2010b). A comparison of UAV and radiosonde profiles in the atmospheric boundarylayer. Em *EOS Trans AGU 91(26) Meet. Am. Suppl.*, páginas A13G-03, Foz do Iguaçu, Brazil. American Geophysical Union
70. Cancelli, D. M., Dias, N. L., e Chamecki, M. (2012b). Dissimilarity between temperature-humidity in the atmospheric surface layer and implications for estimates of evaporation, Abstract B23E-0500. Em *AGU Fall Meeting, 2012, San Francisco*.
71. Chor, T. L. G., Dias, N. L., e de Zarate, A. R. (2013b). Solução em série da equação de Boussinesq para fluxo subterrâneo utilizando computação simbólica. Em *Anais, XX Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Bento Gonçalves, RS
72. Dias, N. L., Crivellaro, B. L., Armani, F. S., Chor, T. L., Gobbi, M. F., e Santos, A. L. (2013b). Abstract B32A-03. Short-term eddy-covariance measurements of CO₂ fluxes at Itaipu Lake, Brazil. Em *Meeting of the Americas, Cancún, 2013*
73. Vissotto Jr., D., Dias, N. L., Crivellaro, B. L., Armani, F. A. S., e Chor, T. (2013). Sistema autônomo de energia para monitoramento micrometeorológico. Em *Anais, VIII Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, número WBM13_29_39, Santa Maria, RS
74. Dias, N. L., Chor, T. L., e de Zárate, A. R. (2013a). Progress in solutions of the nonlinear Boussinesq groundwater equation, Abstract H11C-1168. Em *AGU Fall Meeting, San Francisco – USA, 2013*

2.2 Artigos publicados em periódicos com corpo de revisores

1. Dias, N. L., Rotunno, O. C., Salim, M., e Moreano, N. B. (1988). Implementação de Um Banco de Dados Hidrometeorológicos Diários em Microcomputador. *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos*, 6:65–91

2. Dias, N. L. (1989c). Modelação dos Coeficientes de Vazão e Contração para Escoamento Turbulento Através de Uma Placa de Orifício. *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos*, 7(2):69–82
3. Dias, N. L. (1992). Unificação formal de metodologias para cálculo de evaporação em lagos. *Revista Brasileira de Engenharia*, 10(2):61–84
4. Dias, N. L., Brutsaert, W., e Wesely, M. L. (1995b). Z-less stratification under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, 75:175–187
5. Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1996). Similarity of scalars under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, 80:355–373
6. Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1998). Radiative effects on temperature in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 89(1):141–159
7. Reis, R. J. e Dias, N. L. (1998). Multi-season lake evaporation: energy-budget estimates and CRLE model assessment. *J. of Hydrol.*, 208:135–147
8. Dias, N. L. e Reis, R. J. (1998). Métodos de cálculo do balanço de entalpia em lagos e erros associados. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 3(3):45–56
9. Kan, A. e Dias, N. L. (1999b). Evaporação, evapotranspiração e evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 4(3):29–38
10. Dias, N. L. e Rocha, L. S. (1999). Cálculo da taxa de variação da entalpia para os lagos de Itaipu e Foz do Areia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 4(3):39–52
11. Dias, N. L. e Kan, A. (1999). A hydrometeorological model for basin-wide seasonal evapotranspiration. *Water Resour. Res.*, 35(11):3409–3418
12. Asanuma, J., Dias, N. L., Kustas, W. P., e Brutsaert, W. (2000). Observations of neutral profiles of wind speed and specific humidity above a gently rolling land surface. *J of the Meteorological Society of Japan*, 78(6):719–730
13. Dias, N. L., Kan, A., Grodzki, L., Sanchez, S. D., e Vissotto, D. (2002a). O método de covariâncias turbulentas atenuadas (MCTA) para medição dos fluxos de calor sensível e latente: aplicação ao lago de Itaipu e seu redor. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 7(1):143–160
14. Kim, I. S. e Dias, N. L. (2003). Variabilidade e previsão climática de vazões na margem esquerda da bacia do Alto Paraná (Brasil). *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8(2):173–186
15. Dias, N. L. (2003b). Obtenção de uma solução analítica da equação de difusão-advecção com decaimento de 1ª ordem pelo método da transformação de similaridade generalizada. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:181–188
16. Dias, N. L., Gobbi, M. F., e Gobbi, E. F. (2003a). Formulação de um modelo matemático do efeito de efluentes térmicos em rios e suas implicações para a legislação ambiental brasileira. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:169–180

17. Chamecki, M. e Dias, N. L. (2004). The local isotropy assumption and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer. *Q J Roy Meteorol Soc*, 130(603):2733–2752
18. Dias, N. L. (2004). Book Review: Fundamentals of Biometeorology. *Agric For Meteorol*, 125:173–175
19. Dias, N. L., Chamecki, M., Kan, A., e Okawa, C. M. P. (2004a). A study of spectra, structure and correlation functions and their implication on the stationarity of surface-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorol*, 110:165–189
20. Dias, N. L. (2005a). Comment on "The Need for Better Contacts Between Hydrologists in the Two Americas". *EOS Transactions - American Geophysical Union*, 86:370–370
21. Chamecki, M. e Dias, N. L. (2006). Reply to a comment by R. J Smalley and R. A. Antonia on 'The local isotropy hypothesis and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer' (October B, 2004, 130:2733–2752). *Q J Roy Meteorol Soc*, 132:685–686
22. Dias, N. L. (2006b). Book review: M. Bonell, L.A. Bruijnzeel (Eds.), *Forests, Water and People in the Humid Tropics*, Cambridge University Press, 2005. *Agric For Meteorol*
23. Duarte, H. F., Dias, N. L., e Maggiotto, S. R. (2006). Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agric For Meteorol*, 139:171–181
24. Gobbi, M. F., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2006). Application of digital filtering for minimizing aliasing effects in the atmospheric turbulent surface layer spectra. *Water Resour. Res.*, 42:W03405
25. Maggiotto, S. R., Dias, N. L., Grodzki, L., Vissotto, S., Prevedello, C. L., Nascimento, E. L., e Souza, M. F. (2007). Diretrizes para redes automáticas e telemétricas de superfície. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 12(4):225–240
26. Prevedello, C. L., Maggiotto, S. R., Loyola, J. M. T., Dias, N. L., e Neto, G. B. (2007). Balanço de água por aquisição automática de dados em cultura de trigo (*Triticum aestivum* L.). *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, 31:1–8
27. Dias, N. L., Duarte, H. F., Maggiotto, S. R., e Grodzki, L. (2007a). An attenuated eddy covariance method for latent heat flux measurements. *Water Resour. Res.*, 43:W04415
28. Dias, N. L. e Kan, A. (2008). Evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia, PR: Estimativas dos modelos de relação complementar *versus* balanço hídrico sazonal e balanço de energia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 13:1–10
29. Dias, N. L. (2009). Básia, Mediânia e Dífría: uma utopia do ensino de matemática em engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, 28(1):55–64
30. Dias, N. L., Hong, J., Leclerc, M., Black, Nesic, Z., e Krishnan, P. (2009b). A simple method of estimating scalar fluxes over forests. *Boundary-Layer Meteorol*, 132:401–414

31. Bernardes, M. e Dias, N. L. (2010). The alignment of the mean wind and stress vectors in the unstable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 134:41–59
32. Crivellaro, B. L., Dias, N. L., e Chor, T. (2011). Um método espectral Passa-Banda para CO₂. *Ciência e Natura, Micrometeorologia* (Edição Suplementar):75–78
33. Werth, D., Kurzeja, R., Dias, N. L., Zhang, G., Duarte, H., Fischer, M., Parker, M., e Leclerc, M. Y. (2011). The Simulation of the Southern Great Plains Nocturnal Boundary Layer and the Low-Level Jet with a High-Resolution Meso-Scale Atmospheric Model. In Press. *J. Appl. Meteorol. and Climatol.*, 50:1497–1513
34. de Jong, R., Chor, T., e Dias, N. L. (2011). Medição da velocidade do vento a bordo de um Veículo Aéreo Não Tripulado. *Ciência e Natura, Micrometeorologia* (Edição Suplementar):71–74
35. Freire, L. S., Dias, N. L., de Campos, C. P., e Almeida, J. C. (2011b). A importância da subsidênciā na modelagem do crescimento da camada limite convectiva. *Ciência e Natura, Micrometeorologia* (Edição Suplementar):19–21
36. Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Freire, L. S., Hasegawa, T., e Malheiros, A. L. (2012b). Obtaining Potential Virtual Temperature Profiles, Entrainment Fluxes, and Spectra from Mini Unmanned Aerial Vehicle Data. *Boundary-Layer Meteorol.*, 145:93–111
37. Salesky, S. T., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2012). Estimating the random error in eddy-covariance fluxes and other turbulence statistics: the filtering method. *Boundary-Layer Meteorol.*, 144:113–135
38. Cancelli, D. M., Dias, N. L., e Chamecki, M. (2012a). Dimensionless criteria for the production-dissipation equilibrium of scalar fluctuations and their implications for scalar similarity. *Water Resour. Res.*, 48:W10522
39. Crivellaro, B. L., Dias, N. L., e Chor, T. (2013). Spectral Effects on Scalar Correlations and Fluxes. *American Journal of Environmental Engineering*, 3:3–17
40. Freire, L. S. e Dias, N. L. (2013). Residual layer effects on the modeling of convective boundary layer growth rates with a slab model using FIFE data. *J. of Geophys. Res.*, 118:1–10
41. Dias, N. L. (2013b). Research on atmospheric turbulence by Wilfried Brutsaert and collaborators. *Water Resour. Res.*, 49:7169–7184
42. Dias, N. L. (2013a). Reconciling radiation dissipation in the spatial and spectral domains under stable conditions. *Water Resour. Res.*, 49:7150–7153
43. Junior, D. V. e Dias, N. L. (2013). Método empírico para determinação de outliers em séries de fluxos de dados micrometeorológicos pós-processados. Em *Anais, VIII Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, número WBM13_29_209, Santa Maria, RS
44. Armani, F. A. S., Dias, N. L., Crivellaro, B. L., e Chor, T. L. G. (2013a). Fluxos turbulentos de dióxido de carbono sobre o reservatório da usina hidrelétrica de Itaipu – PR. *Ciência e Natura, Volume Especial*:128–132

45. Cancelli, D. M., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2013). Estudo da similaridade entre escalares sobre uma superfície heterogênea utilizando Large-Eddy Simulation. *Ciência e Natura*, Especial:178–180
46. Crivellaro, B. L. e Dias, N. L. (2013). Aplicação do método de Salesky et al. (2012) usando um filtro temporal para estimar o erro do fluxo de calor sensível em Tijucas Do Sul – PR e em Missal – PR. *Ciência e Natura*, (Ed. Especial):61–71
47. Chor, T., Dias, N. L., e de Zárate, A. R. (2013a). An exact series and improved numerical and approximate solutions for the Boussinesq equation. *Water Resour. Res.*, 49:7380–7387
48. Chor, T. L. e Dias, N. L. (2014). A simple generalization of the Brutsaert and Nieber analysis. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions (Online)*, 11:12519–12530
49. Armani, F., de Carvalho, R. A., e Dias, N. L. (2014). Statistical evaluation of a new air dispersion model against AERMOD using the Praire Grass data set. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 64(2):219–226
50. Cancelli, D. M. e Dias, N. L. (2014). BRevê: uma metodologia objetiva de cálculo de emissões para a frota de veículos brasileira. *Revista de Engenharia Sanitária e Ambiental*
51. Dias, N. L. (2014a). Alternativas de processamento numérico eficiente para a Engenharia do século XXI. *Revista de Ensino de Engenharia*, 33(1):25–36
52. Dias, N. L., Chor, T., e de Zárate, A. R. (2014b). A semi-analytical solution for the Boussinesq equation with non-homogeneous constant boundary conditions. *Water Resour. Res.*, 50(8):6549–6556
53. Cancelli, D. M., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2014). A large-eddy simulation study of scalar dissimilarity in the convective atmospheric boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 71(1):3–15

2.3 Livros publicados

Durante um longo tempo, desde que retornei do doutorado, escrevi um livro de divulgação científica sobre as “consequências” das 4 operações e a construção das regras (e algumas funções) da álgebra como as aprendemos até o fim do ensino médio. O sumário do livro (ainda numa versão preliminar antes da publicação definitiva) está no apêndice E.

1. Dias, N. L. (2014b). *Pequena introdução aos números*. Editora Intersaber, Curitiba

2.4 Capítulos de livros publicados

1. Dias, N. L. (2003c). *Problemática do uso local e global da água da Amazônia*, capítulo 5. Comentários sobre "Impactos antropogênicos no ciclo hidrológico na Amazônia", de Souza, Rocha e Cohen, páginas 95–106. Número ISBN:85-7143-034-9. Edições UNESCO Brasil, Belém

2. Dias, N. L., Gobbi, M. F., e Cunha, C. L. N. (2012a). *Estado da Arte em Ciclo do Carbono em Reservatórios* (Jorge Machado Damázio, org.), volume 1, capítulo Abordagens Micrometeorológicas para a estimativa de fluxos de gases de efeito estufa entre a superfície e a atmosfera. 1 ed. Rio de Janeiro., páginas 192–237. CEPEL
3. Dias, N. L., Armani, F. A. S., Crivellaro, B. L., e Vissotto, D. (2014a). *Emissões de gases de efeito estufa em reservatórios de centrais hidrelétricas* (J. M. Damázio, org.), capítulo Tópicos especiais, páginas 347–366. CEPEL, Rio de Janeiro

Capítulo 3

Atividades de extensão

Listo aqui relatórios técnicos produzidos nas instituições em que trabalhei, no contexto de projetos de pesquisa contratados por demanda externa. Em Engenharia, relatórios técnicos têm seu peso na carreira profissional, ainda que obviamente não se constituam em publicação científica devidamente escrutinada por revisores.

Talvez caiba também aqui uma breve digressão. Engenharia é uma atividade muito ampla, como tive oportunidade de argumentar em [Dias \(2009\)](#): há engenheiros de todos os tipos, desde muito práticos até muito teóricos. Interagir com meus colegas engenheiros não foi sempre fácil: algumas vezes, ao longo dos projetos que geraram os relatórios descritos na seção [3.1](#), as diferenças de expectativas e visões de mundo foram grandes.

Em 1284, os arcos do coro da Catedral de Beauvais ruíram. Em 1573, uma torre central de 153 m caiu novamente (http://en.wikipedia.org/wiki/Beauvais_Cathedral). A Engenharia que conhecemos hoje emergiu para minimizar esse tipo de catástrofe. Somente após a revolução científica que estava em gestação ao longo de toda a Idade Média, e que se consolidou entre as vidas de Galileu e Newton, surgiria uma Engenharia como nós hoje a entendemos: uma Engenharia capaz de, dentro de certos limites, prever o futuro de seus projetos, e aumentar a probabilidade de que funcionarão.

Na época, mesmo sem o benefício de engenheiros modernos, a catedral sobreviveu, e existe ainda hoje — agora com a ajuda, mencione-se, da Engenharia moderna. O fato de que ela foi erguida e mantida sobre suas rupturas parciais deve dar uma certa medida de humildade a nós engenheiros. O fato de que ela representou um divisor de águas em que artifícies com conhecimento apenas empíricos não eram mais suficientes deve também, por outro lado, nos dar algum orgulho justificado.

Do ponto de vista do pesquisador, a reflexão importante é sobre a melhor maneira de interagir com a comunidade técnica, e de disseminar conhecimento que ajude a aumentar a chance de sucesso dos projetos demandados pela sociedade (ou, em uma expressão muito apreciada, proporcionar “transferência de tecnologia”). Em retrospectiva, não me parece que haja respostas fáceis a essa questão. Ao longo do tempo, tive tanto experiências decepcionantes com a qualidade e competência de meus colegas engenheiros, como também o privilégio de conhecer profissionais de excepcional competência, que realmente gostavam de ser engenheiros, e exerciam Engenharia com grande maestria. É talvez um desejo natural do professor formar cada vez mais desses últimos.

Provavelmente, o melhor caminho é mesmo o modelo que terminou por se consolidar: disseminar o conhecimento tão amplamente quanto possível, e deixar ao acaso, e ao interesse de todos, o acesso ao mesmo: quando útil, ele terminará por erguer catedrais, mais altas, e melhores.

3.1 Relatórios técnicos

1. ELETROBRÁS (1987). *Guia para cálculo de cheia de projeto de vertedores*. Rio de Janeiro
2. Dias, N. L. (1989a). Estimação de Taxas de Evaporação no Lago de Sobradinho pelo Método do Balanço de Energia. Relatório Técnico ET-15380/1, COPPETEC, Rio de Janeiro
3. Dias, N. L. (1989b). Estimação de Taxas de Evaporação no Lago de Sobradinho pelo Método do Balanço de Energia. Relatório Técnico ET-15380/2, COPPETEC, Rio de Janeiro
4. Dias, N. L. (1994a). Avaliação Inicial de Modelos e Dados para Simulação Hidrológica e Hidrodinâmica do Trecho do Rio Iguaçu entre Fluiópolis e Foz do Areia. Relatório Técnico HG-79/3, CEHPAR-UFPR, Curitiba
5. Dias, N. L. (1994b). Inspeção de bacias experimentais. Relatório Técnico HG-86/1, CEHPAR, Curitiba, PR
6. Dias, N. L. (1995a). Estimativas de rugosidade de calha do rio Iguaçu a partir de medições de perfis de velocidade. Relatório Técnico HG-79/4, CEHPAR-UFPR, Curitiba
7. Dias, N. L., Araújo, A., e Fill, H. D. (1995a). Calibração e uso de um modelo hidrodinâmico em regime não-permanente para avaliar a influência da operação do reservatório de Foz do Areia sobre as cheias em União da Vitória. Relatório Técnico Projeto HG-79 Relatório Técnico 5, CEHPAR/UFPR, Curitiba
8. Dias, N. L. (1996). Perfis médios e teoria de similaridade de Monin-Obukhov na camada-limite atmosférica. Relatório Técnico 003/96, SIMEPAR, Curitiba, PR
9. Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996b). Os fundamentos físicos do balanço de entalpia em lagos. Relatório Técnico 004/96, SIMEPAR, Curitiba, Brasil
10. Araújo, A. M., Dias, N. L., e Rocha, L. S. (1997). Climatologia do oeste paranaense. Relatório Técnico 002/97, Simepar, Curitiba
11. Dias, N. L., de Araújo, A. M., Caramori, P. H., e Prates, J. E. (1997). Relatório I do Projeto Mesolit: Revisão bibliográfica, base de dados, climatologia e pontos de medição. Relatório Técnico 004/97, SIMEPAR, Curitiba, Brasil
12. Dias, N. L. e Kan, A. (1998a). Métodos e modelos climatológicos de estimativa de evaporação e evapotranspiração. Relatório Técnico 003/98, SIMEPAR
13. Dias, N. L. e Kan, A. (1998b). Um modelo hidrológico-meteorológico para a estimativa de evapotranspiração em bacias hidrográficas. Relatório Técnico 004/98, SIMEPAR
14. Araújo, A. A. M., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (1998). Relatório III do Projeto Mesolit: Descrição do modelo numérico de mesoescala, definição de parâmetros, condições iniciais e de contorno. Relatório Técnico 002/98, Simepar

15. Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., Kan, A., Araújo, A. A. M., Nazareno, P., Rocha, L. S., e Sanchez, S. D. (1998b). Relatório II do projeto mesolit: instalação de estações meteorológicas e resultados das medições micrometeorológicas. Relatório Técnico 001/98, SIMEPAR, Curitiba, PR, Brasil
16. Gobbi, M. F., Araújo, A. A., Dias, N. L., e Kan, A. (1998a). Relatório IV do Projeto Mesolit: Relatório final da fase 1. Relatório Técnico 006/97, Simepar, Curitiba
17. Gobbi, M. F. e Araújo, A. A. M. (1998). Relatório V do Projeto Mesolit: Simulações comparadas dos efeitos do desmatamento na região do lago de Itaipu. Relatório Técnico 014/98, Simepar, Curitiba
18. Kan, A., Dias, N. L., e Rocha, L. S. (1998). Evaporação, evapotranspiração e evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia. Relatório Técnico 0012/98, SIMEPAR, Curitiba
19. Sato, F., Beneti, C. A. A., e Dias, N. L. (1998). Decodificação e visualização dos dados METAR. Relatório Técnico 013/98, SIMEPAR
20. Dias, N. L., Beneti, C. A. A., Quadro, M., e Ferreira, V. (1999a). Os eventos severos de janeiro de 1999 em Foz do Iguaçu: Efeitos locais, de mesoescala e sinóticos. Relatório Técnico 002/99, SIMEPAR, Curitiba
21. Dias, N. L., Gobbi, M. F., Okawa, C. M. P., Kan, A., Araújo, A. A. M., Grodzki, L., e Rocha, L. S. (1999b). Relatório final do Projeto Mesolit: Influência do lago de Itaipu sobre o clima regional. Relatório Técnico 007/99, SIMEPAR
22. Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., e Rocha, L. S. (1999d). Relatório VI do Projeto Mesolit: experimento intensivo de campo nº 3. Relatório Técnico 001/99, SIMEPAR, Curitiba, PR, Brasil
23. Gobbi, M. F., Araújo, A., e Dias, N. L. (1999a). Relatório VII do Projeto Mesolit: Preparação do modelo de mesoescala para uso operacional. Relatório Técnico 003/99, SIMEPAR, Curitiba PR
24. Dias, N. L. (2002). Organização e aprovação das notas e relatórios de pesquisa do Lemma. Nota de Pesquisa 1.4, Lemma, Curitiba
25. Dias, N. L., Pscheidt, I., e Leite, E. A. (2002e). Condições meteorológicas e qualidade do ar na Região Metropolitana de Curitiba em 2001. Nota de Pesquisa 2.1, Lemma, Curitiba
26. Dias, N. L. e Duarte, U. M. (2002b). Atividades de implantação dos estudos de evaporação e evapotranspiração no reservatório de FURNAS. Nota de Pesquisa 3.1, Lemma, Curitiba
27. Dias, N. L., Kan, A., Silva, N. G. M., e Smaha, N. (2002d). Levantamento de dados históricos na região de contribuição ao Reservatório de Furnas. Nota de Pesquisa 4.2, Lemma, Curitiba
28. Vissotto Jr., D. e Kim, I. S. (2002a). “MODEL OUTPUT STATISTICS” (MOS): DESCRIÇÃO DO MODELO, AVALIAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO OPERACIONAL. Relatório de Pesquisa 1.1, Lemma, Curitiba

29. Vissotto Jr., D. e Kim, I. S. (2002b). "PERFECT PROGRAM" (PP): DESCRIÇÃO DO MODELO, AVALIAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO OPERACIONAL. Relatório de Pesquisa 2.1, Lemma, Curitiba
30. Duarte, H. F. e Dias, N. L. (2002). Modelos Matemáticos simples para a parametrização da radiação solar incidente. Relatório de Pesquisa 3.1, Lemma, Curitiba
31. Dias, N. L. e Maggiotto, S. R. (2003b). Relatório de Atividades – Plataforma de Coleta de Dados em Ponta Grossa
Período: 08/2003 - 12/2003. Nota de Pesquisa 5.1, Lemma, Curitiba
32. Dias, N. L., Gobbi, M. F., Kan, A., Grodzki, L., e Maggiotto, S. R. (2003b). Influência do lago de Itaipu sobre o clima regional. Relatório de Pesquisa 4.1, Lemma, Curitiba
33. Vissotto Jr., D., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (2003). Revisão bibliográfica, metodologia e dados para modelação de mesoescala sobre o reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 5.1, Lemma, Curitiba
34. Dias, N. L., Grodzki, L., Maggiotto, S. R., Sanchez, S. S., Kan, A., e da Silva, N. G. M. (2003c). Hidroclimatologia, estações micrometeorológicas e Experimento Intensivo de Campo No 1 de Furnas (EXFU-1). Relatório de Pesquisa 6.2, Lemma, Curitiba
35. Dias, N. L., Kan, A., Vissotto Jr., D., Lima, E. N., Duarte, H. F., e Cancelli, D. M. (2003d). Relatório parcial nº4: Monitoramento de fluxos, cálculo de evapotranspiração por balanço hídrico sazonal e um modelo solo-vegetação-atmosfera para cálculo de fluxos no Reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 7.2, Lemma, Curitiba
36. Smaha, N. (2003a). DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE AVALIAÇÃO DAS PREVISÕES DO TEMPO DO MODELO ARPS. Relatório de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba
37. Vissotto Jr., D. (2004a). Pacote para a elaboração de documentos, dissertações e teses utilizando a classe ABNTeX adaptada para as normas da Universidade Federal do Paraná. Nota de Pesquisa 6.1, Lemma, Curitiba
38. Vissotto Jr., D. (2004b). Propriedades hídricas dos solos nas localidades das estações telemétricas do SIMEPAR para o uso do método Green-Ampt. Nota de Pesquisa 7.1, Lemma, Curitiba
39. Vissotto Jr., D. (2004c). Propriedades hídricas dos solos nas localidades das estações telemétricas do SIMEPAR para o uso do método Green-Ampt. Nota de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba
40. Dias, N. L., Maggiotto, S. R., Gobbi, M. F., Nascimento, E. L., e Duarte, H. F. (2004d). Resultados parciais de micrometeorologia, hidrologia e simulações de mesoescala para o Reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 9.1, Lemma, Curitiba
41. Dias, N. L. e Kan, A. (2004). Resultados do Ano 2 do Projeto Delta-F: modelos e medições. Relatório de Pesquisa 10.1, Lemma, Curitiba

42. Dias, N. L., Maggiotto, S. R., Gobbi, M. F., Nascimento, E. L., Duarte, H. F., Cancelli, D. M., Kan, A., e Grodzki, L. (2004e). Estatísticas de campos atmosféricos, EXFU-3 (Experimento Intensivo de Campo N. 3), Disponibilidade de Dados e Fluxos de CO₂ no lago de Furnas. Relatório de Pesquisa 9.1, Lemma, Curitiba
43. Cancelli, D. M., Dias, N. L., Maggiotto, S. R., e Grodzki, L. (2005). Dados de fluxos superficiais medidos em terra (na bacia de contribuição) e no lago de Furnas. Relatório Técnico 012.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba
44. Kan, A. e Dias, N. L. (2005). Evaporação em lago e evapotranspiração no reservatório de Foz do Areia: 1982-2004. Relatório Técnico 13.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba
45. Dias, N. L., Vissotto, S., e Jr., D. V. (2006). O sistema automático de inserção de dados de estações micrometeorológicas. Nota de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba
46. Dias, N. L. (2007). Impactos Atmosféricos da Implantação do Metrô de Superfície de Curitiba na Avenida Metropolitana (antiga BR-116). Relatório Técnico 14.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba
47. Dias, N. L., Grodzki, L., Maggiotto, S. R., Vissotto, S., e Jr., D. V. (2007b). Análise das diferenças terra-lago nos campos de vento, temperatura do ar, umidade e fluxos superficiais turbulentos de calor sensível e latente no lago de Itaipu. Relatório Técnico 16.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba
48. Malheiros, A. L., Jr., D. V., Bernardes, M., Vissotto, S., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (2007b). QUAVEMET-3: III Relatório de Acompanhamento. Relatório Técnico 19.1, Lemma/UFPR, Curitiba
49. Dias, N. L., Jr., D. V., Bernardes, A. L. M. M., e Vissotto, S. (2008b). IV Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 20.1, Lemma/UFPR, Curitiba
50. Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Vissotto, S. (2008c). I Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 21.1, Lemma/UFPR, Curitiba
51. Malheiros, A. L. e Dias, N. L. (2008). Relatório Final – Etapa I. Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 23.1, Lemma/UFPR, Curitiba
52. Gobbi, M., Nocko, H. R., Soares, A. P. K., e Waelder, A. S. (2008). Estudo de vazões afluentes ao reservatório do rio Verde. Relatório Técnico 24.1, Curitiba
53. Malheiros, A. L., Wolf, R., e Dias, N. L. (2008). VI Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 25.1, Lemma/UFPR, Curitiba
54. Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008e). VII Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 26.1, Lemma/UFPR, Curitiba

55. Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008d). II Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 27.1, Lemma/UFPR, Curitiba
56. Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008f). VIII Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 28.1, Lemma/UFPR, Curitiba
57. Wolf, R., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009a). IX Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 29.1, Lemma/UFPR, Curitiba
58. Wolf, R., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009b). Relatório Final – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 31.1, Lemma/UFPR, Curitiba
59. Wolf, R., Vissoto, S., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009c). Relatório Complementar – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 32.1, Lemma/UFPR, Curitiba
60. Nocko, H. R. e de Lourdes da Nóbrega Cunha, C. (2009). Relatório Nº 04: 3ºseminário de integração – Relatórios parciais de trabalho. Relatório Técnico 33.1, Lemma/UFPR, Curitiba
61. Wolf, R. e Dias, N. L. (2009). III Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 34.1, Lemma/UFPR, Curitiba
62. Wolf, R. e Dias, N. L. (2010). IV Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 35.1, Lemma/UFPR, Curitiba
63. Nocko, H. R. e de Lourdes da Nóbrega Cunha, C. (2010). Relatório Nº 05: 4ºseminário de integração – Relatórios parciais de trabalho. Relatório Técnico 36.1, Lemma/UFPR, Curitiba
64. Dias, N. L. e Hasegawa, T. (2010). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada limite atmosférica – Relatório Nº 1: Revisão bibliográfica e metodologia de medição da Camada-Limite Atmosférica e Veículos Aéreos não-tripulados. Relatório Técnico 37.1, Lemma/UFPR, Curitiba
65. Gobbi, E. F. (2011b). Projeto Interdisciplinar sobre Eutrofização de Águas no Reservatório Rio Verde/Petrobrás, Araucária, Paraná, Brasil UN-REPAR. Contrato 1400.0035401.07.2. TERMO ADITIVO. Relatório Técnico 38.1, Lemma/UFPR, Curitiba
66. Vissotto Jr, D., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2011). V Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 38.2, Lemma/UFPR, Curitiba

67. de Almeida, R. C., da Costa Dias, N. L., da Nóbrega Cunha, C., Freire, L. S., e Armani, F. (2011). Sistema MODELAR – Modelo Regulatório de Qualidade do Ar para o Estado do Paraná. Relatório Técnico 39.1, Lemma/UFPR, Curitiba
68. Gobbi, E. F. (2011a). Projeto Interdisciplinar sobre Eutrofização de Águas no Reservatório Rio Verde/Petrobrás, Araucária, Paraná, Brasil UN-REPAR Contrato 1400.0035401.07.2. RELATÓRIO. Relatório Técnico 40.1, Lemma/UFPR, Curitiba
69. Vissotto Jr., D., Armani, F., e Dias, N. L. (2011). VI Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 41.1, Lemma/UFPR, Curitiba
70. Freire, L. S., Chor, T., Dias, N. L., e Hasegawa, T. (2011a). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica – Relatório Nº 2: Relatório de Progresso para a Oficina Nº 1. Relatório Técnico 42.1, Lemma/UFPR, Curitiba
71. Chor, T. L. G., Dias, N. L., e Hasegawa, T. (2011). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica – Relatório Nº 3: Campanhas iniciais de medição de Ozônio. Relatório Técnico 43.1, Lemma/UFPR, Curitiba
72. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012a). I Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde), Trecho II. Relatório Técnico 44.1, Lemma/UFPR, Curitiba
73. Vissotto Jr., D., Armani, F., Hoeltgebaum, L. E., e Dias, N. L. (2012a). VII Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 45.1, Lemma/UFPR, Curitiba
74. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012b). II Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde), Trecho II. Relatório Técnico 46.1, Lemma/UFPR, Curitiba
75. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012c). III Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 47.1, Lemma/UFPR, Curitiba
76. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012d). IV Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 48.1, Lemma/UFPR, Curitiba
77. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012e). V Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade

da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 48.2, Lemma/UFPR, Curitiba

78. Vissotto Jr., D., Hoeltgebaum, L. E., e Dias, N. L. (2012b). VIII Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 49.1, Lemma/UFPR, Curitiba
79. Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2013). “VI Relatório de Acompanhamento” – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 50.1, Lemma/UFPR, Curitiba
80. Armani, F. A. S., Hoeltgebaum, L. E. B., e Dias, N. L. (2013b). “VII Relatório de Acompanhamento” – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 51.1, Lemma/UFPR, Curitiba
81. Hoeltgebaum, L. E. B., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2013b). “VIII Relatório de Acompanhamento” – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 52.1, Lemma/UFPR, Curitiba
82. Hoeltgebaum, L. E. B., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2013a). “IX Relatório de Acompanhamento” – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 53.1, Lemma/UFPR, Curitiba
83. Dias, N. L., Chor, T., Hoeltgebaum, L. E., e Hasegawa, T. (2014c). Monitoramento com Veículo Aéreo Não-Tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica. Relatório final de atividades do projeto. Relatório Técnico 54.1, Lemma UFPR, Curitiba
84. Crivellaro, B. L., Armani, F. A. S., Chor, T., Jr., D. V., e Dias, N. L. (2014). XI Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRO-CIDADES. Relatório Técnico 55.1, Lemma UFPR, Curitiba

Capítulo 4

Coordenação de projetos de pesquisa, ensino ou extensão e liderança de grupos de pesquisa

Aproveito este capítulo para fazer uma descrição breve, em ordem mais ou menos cronológica, de minhas atividades de pesquisa, antes de entrar na descrição dos projetos. Na medida do possível, procurei fazer também um pequeno histórico de cada projeto.

A formação acadêmica de um pesquisador deve ajudá-lo em sua carreira futura. Torcendo um pouco letra fria da Resolução 10/14, gostaria de comentar brevemente sobre meu Mestrado e sobre meu Doutorado. Em seguida, minha descrição dos projetos de pesquisa que coordenei procura dar um certo nexo aos resultados que foram surgindo no seu bojo.

Não me preocupei em citar trabalhos científicos em apenas um ponto desse capítulo, e muito menos desse documento. Quando um determinado artigo, relatório técnico ou trabalho em congresso científico é citado em mais de um projeto de pesquisa, ou em qualquer outra instância, isso significa apenas que me pareceu relevante em mais do que um único contexto.

4.1 Pré-história: Mestrado

O problema era originalmente entender a equação de [Penman \(1948\)](#), e um pouco mais geralmente entender modelos de Evaporação em Hidrologia, e como aplicá-los.

O problema está longe de ser trivial, envolvendo, além de Hidrologia, toda sorte de conhecimentos em Mecânica dos Fluidos (em particular Turbulência) e Termodinâmica. A dissertação em si ([Dias, 1986](#)) foi pouco mais que uma revisão de modelos e um relatório do que eu entendia do problema, na época. Um modelo de evaporação ([Morton, 1983](#)) foi programado, e aplicado ao lago de Sobradinho. O assunto era demasiadamente cativante, e me levou ao doutoramento, em Cornell, sob a orientação de Wilfried Brutsaert.

O melhor das reflexões durante o meu mestrado foi uma abordagem nova para a equação de Priestley-Taylor ([Dias, 1992](#)). O acesso à publicação original, nos Cadernos de Recursos Hídricos da RBE (Revista Brasileira de Engenharia) é atualmente muito difícil. O trabalho está reproduzido no apêndice F, e faz uma revisão dos resultados de minha dissertação de mestrado, e acrescenta a dedução que obtive, um pouco depois, da equação de Priestley-Taylor.

O tema, de toda forma, permanece interessante para mim, e tenho ao longo do tempo voltado a ele, conforme descrito mais abaixo.

4.2 Pré-história: Doutorado

Para um brasileiro que saiu do Brasil pela primeira vez em 1989, Cornell era de fato um novo mundo. Novamente, como no mestrado, houve um considerável esforço em rever e entender o novo assunto (para mim): Turbulência. O tema principal foi a similaridade entre as flutuações turbulentas de vapor d’água e temperatura em condições estáveis. A similaridade de escalares é uma hipótese que remonta à assim chamada “Analogia de Reynolds” (Reynolds, 1900), mas ainda hoje ela é importante em numerosas aplicações que precisam calcular fluxos de diversos escalares, e suas difusividades turbulentas (ou alguma propriedade similar) na atmosfera. Obtive um resultado analítico, um conjunto razoável de evidências estatísticas *a favor* da similaridade (para os dados que analisei), e estendi meu estudo com um modelo para a dissipação de flutuações de temperatura devido à emissão de radiação de onda longa. Os resultados seriam publicados em 3 artigos em *Boundary-Layer Meteorology* (Dias et al., 1995b; Dias e Brutsaert, 1996, 1998).

Um retorno muito prazeroso ao meu tema de doutorado, e a Cornell, foi o Simpósio em Honra de Wilfried Brutsaert e Jean-Yves Parlange, em 2012, no qual tive a honra de dar uma pequena palestra. Também foi uma oportunidade de aprender mais, em um artigo de revisão (Dias, 2013b) e em uma pequena exploração adicional de um dos temas de meu doutorado (Dias, 2013a): ambos dão uma visão razoável do meu tema de doutorado, além de muitos outros assuntos que eu conhecia muito pouco na época, e com os quais só muito tempo depois fui me inteirando.

4.3 História

Ainda como consequência de meu tema de mestrado, iniciei uma coorientação de mestrado na UFMG quando retornei ao Brasil. O aluno foi Ruibran Januário dos Reis, cuja dissertação foi Reis (1996). Os dois pontos importantes para mim, na época, eram as diferenças de temperatura do ar e pressão de vapor entre “terra” e “lago” — uma figura que eu desenhara em minha dissertação de mestrado, mas para a qual eu não tinha dados, e o desempenho dos termos de armazenamento de energia (a rigor, entalpia) previstos pelos modelos de evaporação.

Ruibran foi capaz de fazer um pequeno experimento meteorológico num igualmente pequeno reservatório de abastecimento de água na região metropolitana de Belo Horizonte. O lago era pequeno, e as diferenças entre os dois ambientes era muito pequena para as direções de vento “certas” (vento soprando sobre o lago e depois passando pela estação meteorológica), de forma que foi possível usar os dados da estação meteorológica para produzir 30 meses de estimativas de evaporação em lago. O outro ponto importante foi a utilização dos perfis de temperatura para calcular as variações de armazenamento de entalpia nas águas do lago (Dias e Reis, 1998). A técnica seria em seguida também aplicada aos lagos de Itaipu e de Foz do Areia (Dias e Rocha, 1999). Os resultados obtidos mostraram um bom desempenho da equação de Priestley-Taylor. Por outro lado, as estimativas da taxa de variação de entalpia de um modelo muito popular no Brasil (e que foi o tema da minha dissertação de mestrado), o CRLE (Morton, 1983), revelaram-se muito ruins em comparação com as medições (figura 4.1). Outro aspecto importante foi a promediação cuidadosa da razão de Bowen para a escala mensal, assim como proposta por Webb (1960, 1964), um resultado raramente citado ou usado desde então.

Outros esforços (tanto do ponto de vista experimental quanto teórico) nessa linha seguiriam-se, ao longo do tempo: por exemplo, em Dias e Kan (2008) e Dias e

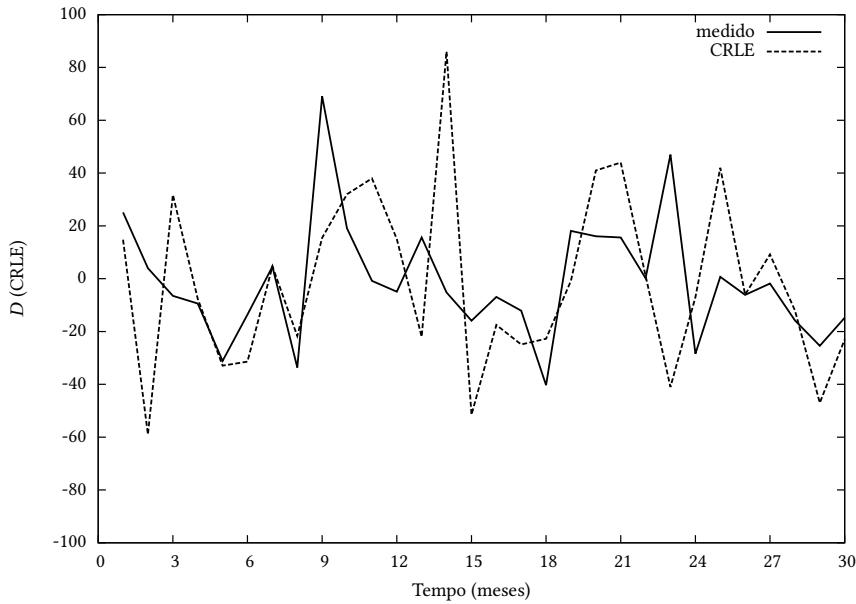


Figura 4.1: Taxa de variação da entalpia armazenada nas águas do lago Serra Azul: dados medidos e previsão do modelo CRLE.

[Malheiros \(2003\)](#). Uma revisão abrangente, levando em conta minhas experiências acumuladas ao longo do tempo, pode se encontrada em [Dias et al. \(2008a\)](#). Esse trabalho, por apresentar uma síntese de minhas conclusões sobre o tema “Evaporação em Lagos” ao longo dos anos, é reproduzido no apêndice G.

Mais ou menos na mesma época comecei a orientar dois alunos do Mestrado em Engenharia Hidráulica da UFPR, Afonso Agusto M. Araújo e Christiane M. P. Okawa. A dissertação de Afonso foi sobre modelagem hidrológica, com uma abordagem muito interessante proposta por Mikio Hino e Masahiko [Hino e Hasebe \(1981\)](#) e posteriormente refinada por eles e colaboradores ([Hino e Hasebe, 1984](#); [Hino, 1986](#); [Hino e Hasebe, 1986](#); [Hasebe et al., 1989](#)). Ao utilizar ferramentas de séries temporais, a técnica é capaz de produzir uma série de “chuva efetiva” *independente* dos dados de chuva real. Com isso, é possível obter empiricamente transformações chuva-(chuva efetiva) no método da Hidrógrafa Unitária. Na dissertação de Afonso nós implementamos a técnica para diversas bacias de contribuição ao reservatório de Foz do Areia. Apesar do enorme interesse para mim da técnica, não tive oportunidade de voltar a trabalhar com ela desde então.

A dissertação de Christiane Okawa [Okawa \(1998\)](#) foi a primeira vez em que medimos turbulência no Brasil. Embora eu tivesse trabalhado com dados de turbulência atmosférica no meu doutorado, não tinha medido ainda. Fazer as medições em si foi uma grande satisfação. Publicamos nossas medições pioneiras, e numerosas medições subsequentes na mesma linha, em diversos congressos nacionais ([Dias e Okawa, 1997](#); [Okawa et al., 1998](#); [Okawa e Dias, 1998](#); [Dias et al., 1998a](#); [Okawa et al., 1999](#); [Dias et al., 1999e](#)) O ciclo de análises dos dados da dissertação de Christiane se fecharia com a publicação de um trabalho internacional, em que outros orientados meus trabalharam nas análises ([Dias et al., 2004a](#)).

Esse também foi o início de uma investigação sistemática do cálculo dos erros estatísticos envolvidos nas medições de turbulência na Camada Superficial da Camada-Limite Atmosférica. Essa investigação seria novamente útil na tese de doutorado de

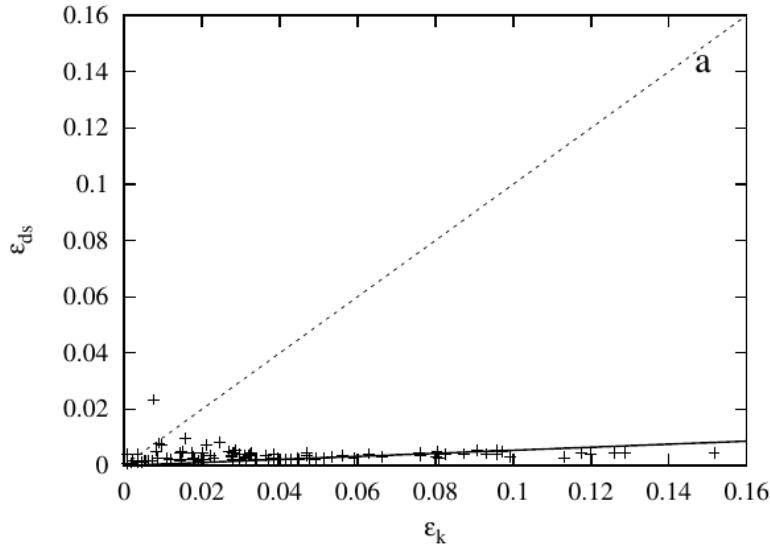


Figura 4.2: Comparação entre a taxa de dissipação estimada pelo espectro da velocidade longitudinal (abscissas) e pela lei dos 4/5 (ordenadas). Fonte: Chamecki (2003)

Mateus Bernardes, e na publicação subsequente (Bernardes e Dias, 2010), conforme discutido a seguir, e seria novamente retomada em Salesky et al. (2012); mais recentemente, nós conseguimos flexibilizar a abordagem de Salesky et al. (2012), identificando analiticamente o problema com o fenômeno de Hurst (1951) e estimando o expoente de Hurst de séries de turbulência usando estimadores disponíveis na literatura (Mandelbrot e Wallis, 1968, 1969a,b,c,d,e), na dissertação de mestrado de Bianca Luhm Crivellaro (Crivellaro, 2014).

Nessa época eu tinha me mudado do CEHPAR para o SIMEPAR, e tinha começado a trabalhar também na UFPR como professor 20 horas. Maurício Gobbi veio trabalhar com uma bolsa de pós-doutorado no nosso grupo, e algum tempo depois ingressou no então CEFET-PR, hoje UTFPR. Maurício trouxe três excelentes alunos de graduação para trabalhar conosco: Nadiane Smaha, Dornelles Vissotto e Marcelo Chamecki. Eu seria o coorientador dos dois primeiros (Maurício foi o orientador) em seus mestrados (Smaha (2003b) e Vissotto (2003)); e seria o orientador de mestrado de Marcelo Chamecki (Chamecki, 2003). Alguns resultados dignos de nota da orientação de Marcelo foram Dias et al. (2004a); Chamecki e Dias (2004, 2006) e Gobbi et al. (2006). Um dos temas abordados foi a isotropia da turbulência na Camada Superficial da Camada-Limite Atmosférica. Nossos resultados indicaram consideráveis diferenças entre previsões e observações para os momentos de ordem 3, e uma possível não-aplicabilidade da “lei dos 4/5” de Kolmogorov para a estimativa da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência (figura 4.2).

Com Akemi Kan, que seria minha primeira aluna de doutorado (Kan, 2005), retornei a temas hidrológicos. Nós desenvolvemos um novo modelo hidrometeorológico para a estimativa da evaporação sazonal e mensal em bacias hidrográficas (Dias e Kan, 1999), e realizamos diversos outros estudos de evapotranspiração e de evaporação em lagos (Dias e Kan, 2008; Dias et al., 2002c,a; Kan e Dias, 1999b,a; Kan et al., 2006, 2007).

Durante a tese de Akemi, realizamos longas medições de evapotranspiração em dois sítios experimentais em Minas Gerais, no contexto de um projeto de pesquisa para

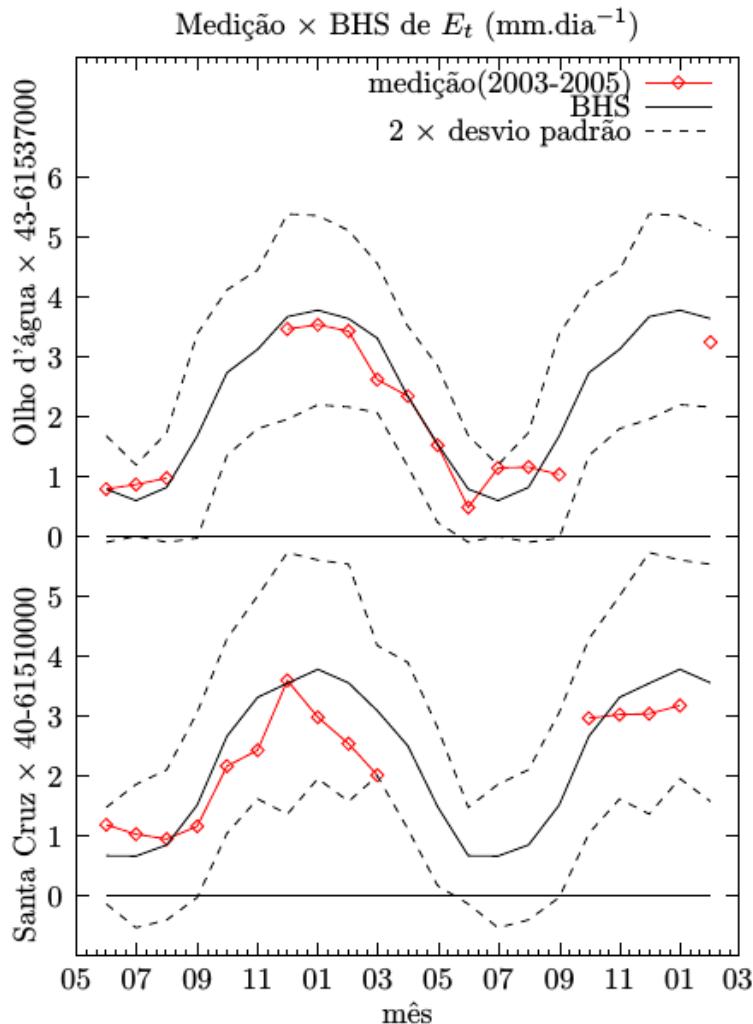


Figura 4.3: Comparação entre a climatologia do modelo hidrometeorológico de evapotranspiração e dados medidos em estações micrometeorológicas. Fonte: [Kan \(2005\)](#)

Furnas Centrais Elétricas, do Fundo Setorial de Energia. Foi possível então (além de muitos outros resultados obtidos por Akemi) comparar o resultado do modelo hidrometeorológico de evaporação que nós desenvolvemos com as medições. O resultado é mostrado na figura 4.3.

Com meus próximos alunos de mestrado, Henrique Ferro Duarte e Diana Cancelli, eu retomaria dois temas de interesse para mim: a medição do fluxo de vapor d'água utilizando sensores simplificados (que foi uma continuação da dissertação de [Okawa \(1998\)](#)), e a análise de perfis de temperatura da água em lagos. A dissertação de Diana Cancelli ([Cancelli, 2006](#)) gerou um modelo e resultados que têm atraído bastante interesse de outros professores e alunos na UFPR; a dissertação de Henrique ([Duarte, 2006](#)) gerou um trabalho internacional ([Dias et al., 2007a](#)), que de certa forma “fecharia” o ciclo de meus esforços com sensores simplificados para turbulência. Do trabalho de conclusão de curso de Henrique sairia também um artigo que viria a ser um dos meus mais citados, sobre modelos de estimativa de radiação de onda longa incidente ([Duarte et al., 2006](#)).

Afastei-me em 2007 para um “pós-doutorado” na Universidade da Geórgia. Estudei e pesquisei vários assuntos lá, e desse estágio resultaram alguns trabalhos: [Dias](#)

et al. (2009b), e Werth et al. (2011) (bem como alguns trabalhos em congressos).

No meu retorno, concluí a orientação do meu segundo aluno de doutorado, Mateus Bernardes, com quem estudei o efeito do não-alinhamento do vento médio e do vetor de tensões de Reynolds. Após a defesa da tese (Bernardes, 2008), publicamos um artigo sobre o tema (Bernardes e Dias, 2010). O aparente não-alinhamento entre vento médio e tensões de Reynolds é o resultado de dois efeitos, um físico e um estatístico: em condições progressivamente instáveis na atmosfera, a velocidade de atrito u_* torna-se assintoticamente irrelevante na descrição das estatísticas da turbulência, em um regime denominado “convecção livre local” (Wyngaard et al., 1971); ao mesmo tempo, e justamente por isso, os erros relativos no cálculo de u_* tornam-se cada vez maiores, ao ponto de surgirem componentes transversais (em relação à direção do vento médio) “espúrias”, que são apenas ruído estatístico.

Novos alunos estavam chegando. Com o mestrado de Suellen Rodrigues (Rodrigues, 2010), fizemos uma pequena incursão na idéia (não-convencional) de aplicar o método das características a equações parabólicas. Com Lívia Souza Freire, estudei sistematicamente pela primeira vez a Camada-Limite Atmosférica como um todo (e não apenas a camada superficial), utilizando tanto dados medidos por nosso próprio grupo com um veículo aéreo não-tripulado, como dados históricos do experimento FIFE. Os resultados da dissertação de Lívia Freire (2012) foram publicados em Dias et al. (2012b) e Freire e Dias (2013).

Medições com uma veículo aéreo não tripulado (VANT) era o tema de doutorado de André Malheiros Malheiros (2014); o tema desenvolveu-se por muitos anos, com muitos problemas tecnológicos, mas conseguimos medições de altura da camada-limite atmosférica que estão entre as poucas já realizadas no mundo, com o pequeno VANT, que chegou a alcançar uma altura acima do solo de 1800 m. O trabalho também foi descrito em diversos trabalhos (Gonçalves et al., 2006; Malheiros et al., 2009; Dias et al., 2009a), culminando com a publicação em *Boundary-Layer Meteorology* (Dias et al., 2012b) citada no parágrafo anterior.

A figura 4.4 mostra um perfil obtido com um pequeno VANT voando autonomamente, até cerca de 1800 m acima do solo.

Diana Cancelli retornou para um doutorado, que foi coorientado por Marcelo Chamecki. Na tese de Diana Cancelli (2013), retomamos o tema de similaridade de escalares, com novas idéias e alguns bons resultados (Cancelli et al., 2012a, 2014).

Em 2011, com a criação do PPGEA, abriu-se uma nova fase de orientações. Meus primeiros alunos de mestrado no PPGEA seriam Bianca Luhm Crivellaro, Fernando Armani e Tomás Chor. Todos já defenderam suas dissertações Chor (2014); Crivellaro (2014); Armani (2014).

A dissertação de Tomás foi coorientada por Ailín R. de Zárate. Os resultados foram muito profícios, com três publicações até o momento Chor et al. (2013a); Dias et al. (2014b); Chor e Dias (2014). O trabalho consistiu em explorar diversos aspectos de soluções em série da equação diferencial não linear de Boussinesq para águas subterrâneas.

Os resultados das dissertações de Bianca e de Fernando, além de várias publicações em congressos de resultados parciais, estão sendo preparados para envio a periódicos internacionais.

A seguir, passo à descrição dos projetos de pesquisa. Muitos dos resultados já reportados nesta seção são citados novamente (propositadamente), porém no contexto dos projetos de pesquisa em que foram gerados.

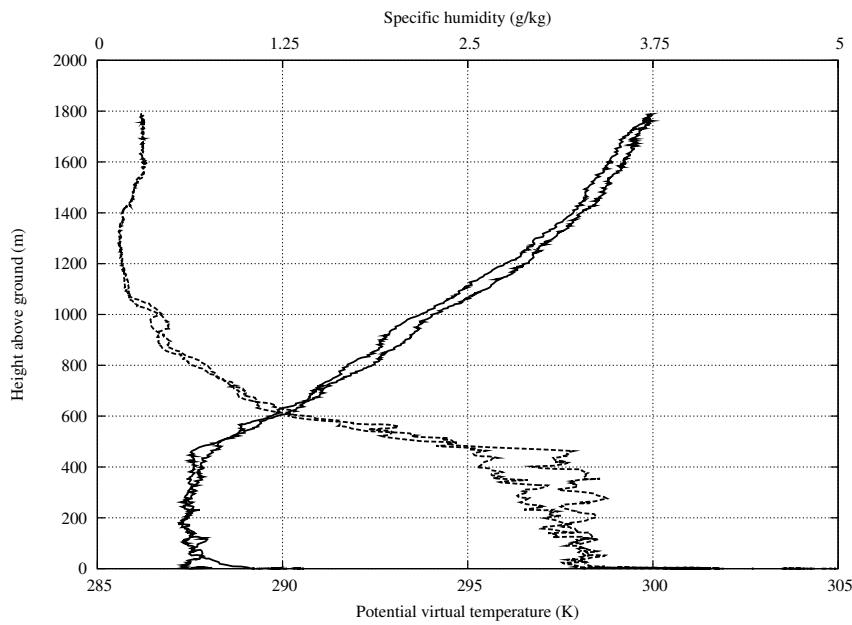


Figura 4.4: Perfis de temperatura e umidade medidos com um veículo aéreo não-tripulado

4.4 Coordenação de projetos

1. (1994–1996) HG-79: Análise do escoamento em regime não-permanente no rio Iguaçu entre Fluviópolis e Foz do Areia.

Este foi o primeiro projeto que coordenei oficialmente, logo após retornar ao Brasil depois de concluir meu Doutorado em Cornell. O projeto foi realizado no CEHPAR, onde eu fora contratado como pesquisador. O projeto destinava-se a avaliar o impacto da operação hidráulica do Reservatório de Foz da Areia sobre os níveis d’água atingidos na cidade de União da Vitória, *a montante* do reservatório. Houve um estudo razoavelmente aprofundado da hidrologia da região de contribuição ao reservatório, do qual resultou a orientação de uma dissertação de mestrado ([Araújo, 1996](#)), e um grande número de simulações hidrodinâmicas, para as quais utilizei um modelo de propagação de cheias disponível no CEHPAR (DAM-BRK). Diversos relatórios resultaram desse projeto ([Dias, 1994a, 1995a](#); [Dias et al., 1995a](#)), bem como comunicações em congressos ([Araújo e Dias, 1995, 1996, 1999](#)).

2. (1996–2000) Controle de qualidade de dados hidrometeorológicos

Em 1996, com minha transferência para o SIMEPAR, um dos projetos institucionais que herdei foi a implementação de rotinas de controle automático de qualidade de dados do SIMEPAR. O projeto era uma inspirado no sistema então existente na *Mesonet* de Oklahoma, conforme descrito em [Brock et al. \(1995\)](#). A maior parte do meu trabalho foi orientar numerosos testes *off-line* com dados brasileiros, e em seguida orientar a sua implementação operacional. Os resultados foram descritos em [Marcellini e Dias \(1997\)](#) e [Dias e Marcellini \(1997\)](#).

3. (1997–1998) Uso de MOS (Model Output Statistics) para a previsão da tempe-

tura mínima

Este projeto consistia no cálculo de regressões múltiplas entre previsões numéricas com o modelo global do CPTEC e os campos observados de temperaturas mínimas. Ele foi a primeira aplicação de MOS operacional para previsão de tempo no Brasil, tendo sido realizado em parceria do SIMEPAR com o CPTEC/INPE. Ele contou com uma contribuição importante de I. S. Kim, que então trabalhava no SIMEPAR, e de M. Quadro, que então trabalhava no CPTEC/INPE e que depois iria se transferir para o SIMEPAR. Minha participação científica, além da coordenação do projeto, incluiu uma comunicação em congresso ([Kim et al., 1998b](#)).

4. (1997–2003) MESOPAR: modelagem de mesoescala para o Estado do Paraná

Este projeto consistia na implantação do modelo ARPS [Xue et al. \(1995, 2000, 2001, 2003\)](#) para a realização de previsões numéricas de tempo de mesoescala para o Estado do Paraná no SIMEPAR. Além das numerosas tarefas computacionais envolvidas na operacionalização do modelo, houve muito investimento em aprimorar o modelo SVAT (*Surface-Vegetation-Atmosphere Transfer*) do ARPS, originalmente baseado em [Noilhan e Planton \(1989\)](#), para as condições de solo e vegetação do estado do Paraná. O resultado, descrito em [Vissoto \(2003\)](#) e [Smaha e Gobbi \(2003b,a\); Smaha \(2003a,b\)](#) foram consideráveis melhorias na previsão das temperaturas do ar pelo ARPS. As melhorias propostas, entretanto, não chegaram a ser operacionalizadas pelo SIMEPAR, que optaria pelo uso de outros modelos para suas previsões de tempo operacionais.

5. (1998–2001, 2001–2002, 2003–2004) MESOLIT – Estudos de mesoescala para o lago de Itaipu

O projeto consistiu em estudos experimentais e computacionais para avaliar os efeitos do lago de Itaipu sobre o clima regional. Minhas atividades experimentais de micrometeorologia haviam se iniciado com a orientação de mestrado de Cristhiane Okawa ([Okawa, 1998](#)), e esse projeto gerou um considerável volume de atividades relacionadas ao lago de Itaipu, tendo tido duas continuações, que são relatadas aqui em conjunto. O projeto gerou um grande volume de publicações, inicialmente em relatórios e comunicações em congresso, e depois também em revistas. Entre os relatórios técnicos e comunicações, citamos: [Dias et al. \(1997, 1998b\); Araújo et al. \(1998\); Gobbi et al. \(1998a\); Gobbi e Araújo \(1998\); Gobbi et al. \(1999a\); Dias et al. \(1999b, 2007b, 2003b\); Dias e Malheiros \(2003\); Dias et al. \(1999c,b\); Gobbi et al. \(1999b\); Dias et al. \(1998a\); Okawa et al. \(1998\)](#). As publicações em periódicos foram [Dias e Rocha \(1999\)](#) e [Dias et al. \(2002a\)](#). O projeto foi muito importante por nuclear um grupo de pesquisa no SIMEPAR, que seria o núcleo do nosso atual laboratório, Lemma (www.lemma.ufpr.br) e grupo de pesquisa registrado no CNPq, o Gemma:

<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/1260815517567925>.

Com ele, efetivamente iniciaram-se colaborações importantes com diversos pesquisadores, entre os quais cito: Maurício Gobbi, Leocádio Grodzki, e Celso Luiz Prevedello.

6. (2001–2003) Monitoramento e modelação da interface e transferências ecossistema-atmosfera para os Estados do Paraná e Santa Catarina

O objetivo desse pequeno projeto era a implantação de estações de monitoramento de fluxos no estado do Paraná, com desenvolvimento de metodologias de medição de fluxos e de umidade do solo. O projeto gerou diversos resultados importantes, incluindo a monografia de graduação de [Cancelli \(2003\)](#), a dissertação de mestrado de [Cancelli \(2004\)](#), e a dissertação de mestrado de [Vissotto \(2003\)](#), além de comunicações em congressos [Vissotto Jr. et al. \(2004\)](#); [Vissotto Jr. et al. \(2004\)](#); [Prevedello e Loyola \(2002\)](#).

7. (2001–2002) REMFPAR – Rede de monitoramento de fluxos do Estado do Paraná

Este projeto deu continuidade ao projeto descrito logo acima, com mais recursos disponibilizado pelo Paraná Tecnologia. Algumas estações de fluxo foram efetivamente implantadas, em Santa Terezinha do Itaipu, no Norte do Paraná, e em Ponta Grossa (essa última com apoio posterior de um projeto similar, do CPTEC/INPE). Os dados de radiação atmosférica incidente da estação de Ponta Grossa foram utilizados em parte do trabalho de conclusão de curso de [Duarte \(2004\)](#), e geraram uma publicação razoavelmente bem citada ([Duarte et al., 2006](#)), na qual nós compararmos diversos modelos para a estimativa de radiação atmosférica incidente. Entre todos, o modelo vencedor foi o de [Brutsaert \(1975\)](#). O projeto também apoiou a realização de medições do fluxo de CO₂ sobre uma plantação de seringueiras, no Norte do Paraná ([Maggiotto et al., 2003](#)), realizadas por Selma R. Maggiotto, que havia iniciado um pós-doc comigo no SIMEPAR.

8. (2002–2003) SIMEAMB – Modelagem de dispersão na região metropolitana de Curitiba

Este foi um pequeno projeto realizado com dois estagiários (André Malheiros e Eduardo Calegari), o primeiro dos quais continuaria trabalhando na área e concludendo o mestrado ([Malheiros, 2004](#)) e o doutorado ([Malheiros, 2014](#)) sob minha orientação. Durante algum tempo, nós rodamos um modelo de dispersão atmosférica da EPA (ISC3) alimentado com dados meteorológicos *on-line* da região metropolitana de Curitiba.

9. (2002–2005) Delta-F – Estudos de Evaporação e Evapotranspiração no Reservatório de Furnas

O projeto consistiu na medição e modelagem de evaporação em lago e evapotranspiração no reservatório de Furnas, com a instalação de torres micrometeorológicas, o uso de modelos hidrológicos e a modelagem computacional da atmosfera. O projeto envolveu a participação de um grande número de colaboradores, e rendeu frutos até bem depois do seu encerramento. Os relatórios técnicos produzidos foram: [Dias e Duarte \(2002b\)](#); [Dias et al. \(2002d\)](#); [Vissotto Jr. et al. \(2003\)](#); [Dias et al. \(2003d,c, 2004d\)](#); [Dias e Kan \(2004\)](#); [Dias et al. \(2004e\)](#); [Cancelli et al. \(2005\)](#); [Dias et al. \(2005\)](#); [Duarte et al. \(2005\)](#); [Dias et al. \(2004b,c\)](#); [Kan et al. \(2007\)](#). Entretanto, este projeto também gerou uma base extremamente rica de dados, que seriam utilizados para gerar um grande volume de resultados científicos, incluindo a tese de doutorado de [Kan \(2005\)](#), a tese de doutorado de

[Bernardes](#) (2008), a tese de mestrado de [Duarte](#) (2006), a tese de doutorado (mais recentemente) de [Cancelli](#) (2013), e a tese de doutorado de Dornelles Vissotto Jr, em andamento. Publicações relevantes foram: [Bernardes e Dias](#) (2005); [Dias et al.](#) (2005); [Bernardes e Dias](#) (2010); [Kan et al.](#) (2007); [Dias et al.](#) (2007a); [Cancelli et al.](#) (2012a).

10. (2004–2007) O efeito da estrutura tri-dimensional da turbulência em meios es-tratificados sobre a difusão turbulenta de poluentes na atmosfera.

O projeto destinava-se a investigar a dinâmica espectral da turbulência, e o efeito de *bottleneck* do espectro de energia cinética da turbulência ([Fal-kovich](#), 1994). O projeto foi minha primeira bolsa de produtividade no CNPq. A idéia era utilizar modelos espetrais simples de fechamento, do tipo Pao ([Pao](#), 1965), com as adições propostas por [Lin](#) (1972), e utilizadas por [Hill](#) (1978). O projeto foi relativamente bem sucedido, mas seu relatório ainda não foi publicado, apesar do longo tempo decorrido. O relatório está incluído no apêndice H.

11. (2005–2007) VENTAAR — VEículo Não-Tripulado para medição da camada-limite Atmosférica em Alta Resolução.

O objetivo deste projeto, financiado pelo CNPq, foi o desenvolvimento de um veículo aéreo não-tripulado para a medição de diversas grandezas na atmosfera (temperatura, umidade, pressão, etc.) de maneira econômica e rápida. O projeto foi bem-sucedido no desenvolvimento da aeronave e teste de sensores de temperatura, umidade e pressão capazes de realizar as medições. Ele seria seguido de alguns outros projetos submetidos ao CNPq na mesma linha, e descritos a seguir. O projeto iniciou uma longa colaboração com J. E. Gonçalves e T. Hasegawa que ainda trabalham no tema, sem mais a minha participação. Desta primeira fase, é digna de nota a publicação dos seus primeiros resultados em congresso científico ([Gonçalves et al.](#), 2006).

12. (2006–2013) QUAVEMET I e II — Acompanhamento e Monitoramento da Quali-dade do Ar no Entorno da Rodovia BR-476 – Linha Verde

Projeto financiado pela Prefeitura Municipal de Curitiba para acompan-hamento da qualidade do ar ao longo da “Linha Verde”, uma obra viária importante na cidade. Os principais trabalhos foram feitos em campo, com o monitoramento de material particulado. Este projeto gerou um volume grande de relatórios técnicos ([Malheiros](#), 2007; [Malheiros et al.](#), 2007a,b; [Dias et al.](#), 2008b; [Malheiros e Dias](#), 2008; [Malheiros et al.](#), 2008; [Dias et al.](#), 2008e,f; [Wolf et al.](#), 2009a,b,c; [Armani e Dias](#), 2012a,b,c,d,e, 2013; [Armani et al.](#), 2013b; [Hoeltgebaum et al.](#), 2013b,a; [Crivellaro et al.](#), 2014) e foi muito importante como fonte de financiamento de bolsas de graduação e de pós-graduação, tendo financiado em parte o doutorado de Mateus Bernardes ([Bernardes](#), 2008).

13. (2007–2013) Monitoramento de Emissões Atmosféricas, Ruído e da Qualidade das Águas Superficiais na Área de Influência Direta do Empreendimento do Projeto de Modernização da UN-REPAR

Este projeto envolveu medições de qualidade do ar na REPAR, no Município de Araucária, na Região Metropolitana de Curitiba. Tratou-se de um projeto eminentemente tecnológico, envolvendo medições mensais, bi-mensais ou trimestrais ao longo de todo o período em que havia obras de ampliação na REPAR. Ele não gerou um volume grande de publicações científicas, mas houve um volume considerável de relatórios técnicos publicados, e o projeto proporcionou apoio indireto importante com o pagamento de bolsas para alunos de graduação e de pós-graduação. Publicações relacionadas são: [Dias et al. \(2008d,c\)](#); [Wolf e Dias \(2009, 2010\)](#); [Vissotto Jr et al. \(2011\)](#); [Gobbi \(2011a\)](#); [Vissotto Jr. et al. \(2011, 2012a\)](#) e [Vissotto Jr. et al. \(2012b\)](#).

14. (2008–2013) CAVACO2 — Medições na Camada-Limite Atmosférica com Veículo Aéreo para Obtenção de Fluxos Regionais de CO₂

Este projeto, financiado pelo CNPq, deu sequência ao projeto VENTAAR. Tentamos, com moderado sucesso, expandir as variáveis monitoradas a bordo de VANTs (veículos aéreos não tripulados) a CO₂ (no que fomos bem sucedidos), mas não conseguimos realizar perfis atmosféricos e medições simultâneas do fluxo superficial que permitissem o cálculo de balanços desse gás na Camada-Limite Atmosférica. Os projetos que realizei envolvendo o uso de VANTs, incluindo o projeto MVATO3 descrito mais adiante, resultariam em algumas publicações sobre o assunto que tiveram um certo pioneirismo, tanto nacional quanto internacionalmente ([Gonçalves et al., 2006](#); [Malheiros et al., 2009](#); [Dias et al., 2009a, 2010c,b, 2012b](#)), e levariam à orientação de uma dissertação de mestrado e uma tese de doutorado relacionadas ao tema de uso de VANTs para a realização de diversas medições na Camada-Limite Atmosférica ([Freire, 2012](#); [Malheiros, 2014](#)).

15. (2008–2011) V3DEV: Novos métodos para análise das interações não-locais superfície-atmosfera e suas implicações para mudança climática e qualidade do ar.

Projeto submetido para bolsa de pesquisa no período acima. Resultados obtidos incluem: (i) Estudos de transferência de CO₂ entre dosséis de florestas e atmosfera. Foram realizados estudos de perfis de fluxos, variâncias e energia cinética turbulenta em plantações e dosséis de floresta ([Pinginta et al., 2008](#); [Zhang et al., 2008](#); [Dias et al., 2007c, 2009b](#)). (ii) Um estudo aprofundado dos efeitos da estabilidade atmosférica sobre o não-alinhamento entre os vetores velocidade do vento média e tensão horizontal de Reynolds e suas causas ([Dias et al., 2005](#); [Bernardes e Dias, 2005, 2010](#)). Estes resultados foram obtidos ao longo da orientação de uma tese de doutorado ([Bernardes, 2008](#)). (iii) O contínuo esforço de desenvolvimento de um veículo aéreo não-tripulado para a medição da altura da camada-limite atmosférica, e de gases de efeito-estufa e qualidade do ar, envolvendo a orientação de uma tese de doutorado no PPGMNE ([Malheiros \(2014\)](#)), e publicações associadas ([Malheiros et al., 2009](#); [Dias et al., 2009a, 2010b,c](#)). (iv) Avanços em estudos de evaporação em lagos. Estes esforços incluem a orientação de um trabalho de conclusão de curso ([de Oliveira, 2009](#)), uma tese de doutorado (Diana Maria Cancelli, PPGMNE) e o doutorado

em andamento no PPGMNE de Dornelles Vissotto Jr., ([Dias et al., 2008a](#); [Vissotto et al., 2009](#); [Dias et al., 2010a](#)).

16. (2010–2012) MODELAR — Modelo Regulatório de Dispersão Atmosférica de Poluentes para o Estado do Paraná.

Este projeto tinha por objetivo a construção de um modelo regulatório de dispersão atmosférica para a SEMA/PR (Secretaria de Meio Ambiente do Estado do Paraná). O modelo foi baseado no estado da arte de micrometeorologia, com a incorporação das parametrizações de difusividade turbulenta previstas pela Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov, e utiliza uma base de dados meteorológicos gerada pelo modelo de mesoescala WRF. O modelo implementa a solução da equação de difusão-advecção com o método de diferenças finitas. O projeto foi financiado pela empresa KLABIN, em parceria com o IAP (Instituto Ambiental do Paraná). Participaram do projeto os professores Ricardo Carvalho de Almeida e Cynara de Lourdes Nóbrega da Cunha, de meu departamento. O projeto apoiou alguns trabalhos importantes de orientação, como o trabalho de conclusão de curso de [Armani \(2011\)](#) e a dissertação de mestrado de [Freire \(2012\)](#), e gerou algumas publicações (inclusive em periódicos internacionais) relacionadas tanto ao modelo de dispersão quanto ao problema relacionado (e fisicamente muito importante) de estimativa da altura da Camada-Limite Atmosférica ([de Almeida et al., 2011](#); [Armani et al., 2014](#); [Freire e Dias, 2013](#); [Freire et al., 2011b](#)).

17. (2011–2014) METEX – Métodos Teóricos e Experimentais em Turbulência para Qualidade do Ar

Projeto submetido ao CNPq e aprovado para obtenção de bolsa de pesquisa. O projeto envolveu diversas idéias sobre novas abordagens tanto teóricas quanto experimentais na Camada-Limite Atmosférica. Diversas publicações estão relacionadas direta ou indiretamente com o projeto, incluindo-se alguns resultados de meu pós-doutorado ([Werth et al., 2011](#)), de minha colaboração com M. Chamecki na *Pennsylvania State University* ([Salesky et al., 2012](#)), as orientações de Bianca Crivellaro ([Crivellaro et al., 2011, 2013](#)) e Livia Souza Freire ([Freire et al., 2011b](#); [Freire e Dias, 2013](#)), a minha participação no Simpósio de Aposentadoria de Wilfried Brutsaert (meu orientador de doutorado) e Jean-Yves Parlange, em Cornell ([Dias, 2013a,b](#)), e a orientação da tese de doutorado de Diana Maria Cancelli ([Cancelli et al., 2012a, 2014](#); [Cancelli e Dias, 2014](#)), entre outros.

18. (2010–2013) MVATO3 – Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para estimativa da Contribuição Relativa das emissões da REPAR para os fluxos regionais de CO₂/O₃

Este projeto, financiado pela PETROBRAS, implementou a construção e os testes de um VANT totalmente projetado em nosso grupo para a medição de CO₂ e O₃. Os resultados foram publicados em diversos relatórios técnicos: [Dias e Hasegawa \(2010\)](#); [Freire et al. \(2011a\)](#); [Chor et al. \(2011\)](#) e [Dias et al. \(2014c\)](#).

19. (2011–2014) ELGEE – Medição de Gases de Efeito Estufa em Reservatórios de Usinas Hidrelétricas

Este foi um projeto de âmbito nacional, liderado pelo CEPEL, e com a participação de numerosas instituições de pesquisa nacionais: COPPE/UFRJ, Lemma/UFPR, IIEGA, INPE, UFJF, UFPA e USP.

Dois relatórios nacionais na forma de livros foram publicados no meio e no fim do projeto ([Damázio, 2012a,b, 2014](#)). Nossas contribuições foram publicadas em capítulos desses volumes ([Dias et al., 2012a, 2014a](#)). Nesse projeto, nós desenvolvemos um modelo completo para o ciclo biogeoquímico do carbono em reservatórios, tarefa que ficou a cargo do meu colega de departamento, Prof. Maurício Felga Gobbi; integraros o modelo de carbono em um modelo hidrodinâmico e de qualidade da água (SISBAHIA©) de autoria do Prof. Paulo Cesar Colonna Rosmann, da COPPE/UFRJ, tarefa que ficou a cargo de minha colega de departamento, Profª Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha; e (a meu cargo) realizamos mais de uma ano de medições do fluxo de CO₂ com o método de covariâncias turbulentas (além de medição do fluxo de calor sensível, fluxo de calor latente e fluxo de quantidade de movimento). Resultados preliminares foram publicados em diversos veículos: [Dias et al. \(2013b\)](#); [Armani et al. \(2013a\)](#); [Vissotto Jr. et al. \(2013\)](#); [Dias et al. \(2013c\)](#); [Crivellaro e Dias \(2013\)](#), e os resultados de nossas atividades foram publicados como capítulos de livros publicados pelo CEPEL sobre o projeto ([Dias et al., 2012a, 2014a](#)). Duas teses de mestrado sobre o tema foram orientadas ([Armani, 2014](#); [Crivel-laro, 2014](#)). O projeto também contou com a participação ativa de outro orientado de mestrado (Tomás Chor), que é coautor de diversos desses trabalhos.

20. MNLINH – Métodos lineares e não-lineares em Hidrologia e Mecânica dos Fluidos 2014–presente

Este projeto destina-se a investigar e a desenvolver diversos modelos computacionais e analíticos de natureza mais teórica em Hidrologia. Incluem-se nesta linha a obtenção de novas soluções analíticas de equações diferenciais, e a investigação de modelos estocásticos aplicados a diversas áreas de interesse em Hidrologia. O projeto foi aberto em função dos novos resultados obtidos no contexto da dissertação de mestrado de Tomás Chor, em colaboração com a Profª Ailín Ruiz de Zárate, do Departamento de Matemática da UFPR. Resultados obtidos até agora incluem: [Dias et al. \(2013a\)](#); [Chor et al. \(2013b,a\)](#); [Dias et al. \(2014b\)](#); [Chor e Dias \(2014\)](#).

21. (2014–2018) DECLiF – Dinâmica Espaço-temporal da Camada-Limite e Fluxos Superficiais Regionais

Este é o projeto em vigência relativo à minha bolsa de pesquisa no CNPq no período acima. As pesquisas do projeto, portanto, ainda estão em andamento. Da proposta submetida ao CNPq, citamos:

Nosso principal objetivo é o aperfeiçoamento de métodos de cálculo de fluxos superficiais turbulentos — principalmente de gases de efeito estufa (GEE) — em dois tipos principais de superfície: lagos de grandes reservatórios, e a floresta amazônica. *A relevância ambiental do estudo está relacionada ao impacto desses fluxos sobre o aquecimento global, e sobre a dinâmica da atmosfera.*

Nossa proposta está voltada preponderantemente para:

- 1) Superfícies líquidas de grandes reservatórios. Nessas superfícies, o objetivo é o aperfeiçoamento de métodos de cálculo dos fluxos de *momentum*, calor sensível e latente, e CO₂ e CH₄. A importância dos dois últimos no contexto ambiental e na formulação de políticas nacionais consistentes e sustentáveis de produção de energia tem crescido sobremaneira, e o proponente está fortemente envolvido no aperfeiçoamento de estimativas de fluxos de gases de efeito estufa, e na modelagem do ciclo biogequímico do carbono em geral, para grandes reservatórios brasileiros (Dias et al., 2012a). No momento, o proponente orienta 3 teses de doutorado (Diana Maria Cancelli, Bruno Solheid e Dornelles Vissotto Jr.; a primeira com previsão para conclusão até o fim de 2013) e uma dissertação de mestrado (Fernando Armani) voltadas para o tema .
- 2) A floresta amazônica, em particular o sítio do projeto ATTO, em andamento, do qual o proponente é participante. O sítio proporciona uma oportunidade única de estudo da subcamada rugosa, seus efeitos, e de novas abordagens para a estimativa de fluxos superficiais. Além disso, iniciativas associadas de pesquisa¹, das quais o proponente participa, poderão proporcionar novos métodos para o cálculo dos fluxos de gases-traço com base em medições intensivas com balões cativos, simulações de grandes vórtices, e métodos de balanço de escalares na CLA.

4.5 Liderança de Grupos de Pesquisa

A partir do início de minhas atividades no SIMEPAR em 1996, comecei a formar um grupo de pesquisa que viria a ter diversas denominações. A iniciativa foi um tanto natural: tratava-se apenas de interagir com pessoas com potencial de fazer pesquisa de boa qualidade (pelos meus padrões, admitidamente). Quando tive o privilégio de conhecer o Prof. Celso Prevedello, ele fundou e liderou por muitos anos o Grupo de Pesquisa cadastrado no CNPq sob o nome de GEMMA:

<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/1260815517567925>,

do qual eu era, na época, o vice-líder. Com a aposentadoria de Celso, assumi a liderança.

Atualmente, além de mim, o grupo inclui os professores:

- Maurício Felga Gobbi
- Cynara de Lourdes da Nóbrega Cunha
- Ricardo Carvalho de Almeida

¹Bridging land-surface fluxes and aerosol concentrations to triggering convective rainfall: proposta de pesquisa para a iniciativa GoAmazon 2014, Marcelo Chamecki, Pennsylvania State University.

Capítulo 5

Coordenação de cursos ou programas de graduação ou pós-graduação

Talvez este seja o local adequado, neste memorial, para fazer uma breve descrição do meu envolvimento na criação de novos cursos de graduação e de pós-graduação na UFPR, além das atividades de coordenação propriamente ditas.

Como já mencionado acima, em 1998/1999, eu tive a oportunidade de, em conjunto com mais dois professores da UFPR (Eduardo Felga Gobbi e Afonso Araújo), fundar o curso de Engenharia Ambiental desta Universidade. Cabe registrar aqui que a iniciativa de criação do curso partiu do então Diretor do Setor de Tecnologia, Prof. Ivo Brandt. Os 3 professores que “criamos” o curso o fizemos do ponto de vista de elaborar o projeto pedagógico do mesmo, e tramitá-lo burocraticamente dentro da UFPR. Cabe também o registro do apoio do então Reitor da UFPR, Carlos Antunes Filho, em uma época em que não havia programas do MEC de apoio à criação de novos cursos, e em que os recursos disponíveis para a UFPR para esse fim eram virtualmente nulos.

O ensino de Engenharia é intrinsecamente complexo, porque, como tive a oportunidade de argumentar na Revista de Ensino de Engenharia ([Dias, 2009](#)), existem muitas “engenharias”, cujas atividades cobrem um espectro que vai desde atividades eminentemente técnicas e tecnológicas, até atividades essencialmente científicas. O curso que iríamos criar deveria ser, em nossa visão, do segundo tipo. Por outro lado, o curso não poderia ser criado num vácuo: ele precisaria aproveitar a infraestrutura de disciplinas já existente no Setor de Tecnologia a serviço das engenharias.

O projeto pedagógico resultante propunha um curso fortemente científico, que privilegiava as bases científicas da Engenharia Ambiental, e uma abordagem quantitativa dos problemas ambientais. Felizmente essas características permanecem até hoje. O Curso de Graduação em Engenharia Ambiental (CGEA) foi criado em 1999, e a primeira turma ingressou em 2000.

Durante dois mandatos consecutivos fui o vice-coordenador, tendo sido o primeiro Coordenador do curso o Prof. Eduardo Felga Gobbi. Nessa época, mudei o meu regime de trabalho na UFPR para DE, o que me permitiu assumir a coordenação do curso em seguida, nos anos de 2002 até 2004.

Durante muitos anos, entre 2000 e o presente, houve um grande esforço de nuclear um departamento de alto nível em Engenharia Ambiental. Esse esforço se traduziu em concursos bastante exigentes para os professores que ingressavam no novo curso de graduação: desejávamos os melhores professores que pudéssemos encontrar, e abrimos todos os concursos para Professor Adjunto (com doutorado) e em sua maioria para o regime de dedicação exclusiva (DE). A atividade de pesquisa dos candidatos foi valorizada dentro dos parâmetros permitidos pelas resoluções da UFPR. Aqueles que entraram sem DE (por limitações externas à nossa vontade) passaram a esse regime

assim que os recursos necessários nos foram alocados.

Durante uma boa parte desse tempo — até o ano de 2009 — o curso permaneceu nucleado no Departamento de Transportes da UFPR — o mesmo departamento em que me concursara para ensinar Mecânica em 1995. Gostaria de registrar aqui minha gratidão ao apoio das Professoras Lucia Montanhini e Gilza Fernandes Blasi, chefes do DTT nos anos iniciais do CGEA, pelo apoio que nos deram. Somente quando um número suficiente de professores havia sido concursado especificamente para o Curso de Engenharia Ambiental, abrimos e levamos a cabo com sucesso o processo de criação do Departamento de Engenharia Ambiental.

Com a criação do departamento em 2010, e com um número suficiente de professores para nuclear também, além da graduação, atividades de pesquisa e pós-graduação, abrimos o processo de criação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA) em 2010. O programa foi autorizado para o nível de Mestrado pela CAPES em 2011, tendo iniciado suas atividades em Maio desse ano. Desde sua criação, eu tenho coordenado o PPGEA, devendo entregar o cargo no primeiro semestre de 2015. Atualmente, estamos dando o último passo — extremamente necessário — no ciclo acadêmico com a abertura do processo de criação do Curso de Doutorado no PPGEA. O processo ainda está em sua fase inicial: minha expectativa é que ele seja tramitado durante o ano de 2015, e (dando tudo certo), nós recebemos nossos primeiros alunos de doutorado em 2016.

A cronologia das minhas atividades de coordenação de cursos na UFPR é a seguinte:

- Coordenador do CGEA, 2002–2004
- Coordenador do PPGEA, (*pro tempore*) 2011
- Coordenador do PPGEA, de 2011 até o presente

Capítulo 6

Participação em bancas de concursos, de mestrado ou de doutorado

6.1 Graduação

Bancas de graduação não constam da Resolução CEPE 10/14. Listo-as aqui apenas para registro.

1. Dias, N. L., Nascimento, E. L., Maggiotto, Selma R. Participação em banca de Henrique Ferro Duarte. Modelos de cálculo de radiação líquida e solar para uso em esquemas de transferência solo-vegetação-atmosfera. 2003. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
2. Dias, N. L., Prevedello, C. L., Vissotto Jr., D. Participação em banca de Diana Maria Cancelli. Um modelo de troca superfície-atmosfera distribuído para o Estado do Paraná. 2003. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
3. Dias, N. L. Participação em banca de Ângelo Breda. Implementação de um modelo de química do ar integrado verticalmente na cidade de Curitiba PR. 2005. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
4. Prevedello, C. L., Dias, N. L., Araújo, A. A. M. Participação em banca de Gustavo Rafael Collere Possetti. Sensor de salinidade por tecnologia em fibra ótica. 2006. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná
5. Errera, M. R., Dias N. L., Froehner, S. Participação em banca de André Abreu Montenegro. Modelo matemático de estimativa de emissão de dióxido de carbono para usina de regeneração de ácidos da CSN-PR com reator tipo spray roaster. 2008. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
6. Gobbi, M. F., Alvim Leite, E., Dias, N. L. Participação em banca de Lívia Souza Freire. Uso de rede neural na obtenção de previsão hidrológica probabilística. 2009. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
7. Dias, N. L., Cunha, Cynara L. N., Almeida, R. C. Participação em banca de Aline Rafael de Oliveira. Comparação da evaporação em lago medida *in situ* com modelos climatológicos. 2009. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
8. Dias, N. L., Gobbi, M. F., Frohener, S. Participação em banca de Bianca Luhm Crivellaro. Fluxo de CO₂ sobre *Axonopus Compressus*: comparação entre os métodos de covariância turbulenta padrão e passa-banda. 2011.

9. Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Gobbi, M. F. Participação em banca de Tomás Luís Guimarães Chor. Medição da velocidade vetorial do vento a bordo de um veículo aéreo não tripulado. 2011. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
10. Dias, N. L., Almeida, R. C., Cunha, C. L. N. Participação em banca de Fernando Augusto Silveira Armani. Avaliação de um modelo de dispersão atmosférica em comparação com o modelo Aermod, utilizando os dados do experimento de campo Projeto de Prairie Grass. 2011. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
11. Guetter, A. K., Dias, N. L. e Cunha, C. L. N. Participação em banca de Débora Perazzoli. Atlas solarimétrico do Paraná. 2013. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
12. Dias, N. L., Gobbi, M. F. e Bleninger, T. Participação em banca de Henrique Guarneri. Aplicações de métodos analíticos e numéricos em Engenharia Ambiental. 2013. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
13. Gobbi, M. F., Dias, Nelson Luís, Blenninger, T. Participaco em banca de Nemi Vergopalan Rocha. The impact of deforestation on the hydrological cycle in Amazon as observed from remote sensing. 2013. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
14. Gobbi, M. F., Cunha, Cynara L. N., Dias, N. L. Participação em banca de Lucas Emilio Bernardelli Hoeltgebaum. Modelo Biogeoquímico para Estimativa de Emissão de Gases de Efeito Estufa por Reservatórios. 2013 (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
15. Gobbi, M. F., Dias, N. L. e Vissotto Jr, D. Participação em banca de André Luiz Diniz dos Santos. Fluxo de CO₂ de vegetação inundada por represamento — quantificação pré-alagamento. 2013. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
16. Bleninger, T., Mannich, M., Dias, N. L. Participação em banca de João Pedro de Almeida Leite Maciel. Medição de velocidades superficiais com o uso da técnica PIV. 2013. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
17. de Zárate, A. R., Dias, Nelson Luís. Participação em banca de Marluci Rodrigues. Modelos para oscilações em pontes suspensas. 2014. (Matemática Industrial) Universidade Federal do Paraná.

6.2 Mestrado

1. Dias, N. L., Kobiyama, M., Ramos, F. Participação em banca de Afonso Augusto Magalhães de Araújo. Identificação de componentes hidrológicas através de filtros lineares auto-regressivos. 1996. (Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental) Universidade Federal do Paraná
2. Dias, N. L., Baptista, M. B., Pinheiro, M. C., Nascimento, N. O., Ladeia, L. C. Participação em banca de Ruibran Januário dos Reis. Estudo comparativo de modelos climatológicos de estimativa de evaporação no Lago Serra Azul, MG. 1996. Universidade Federal de Minas Gerais.

3. Dias, N. L., Caramori, Paulo, Santana, R. F., Silans, A. M. P. Participação em banca de Cristhiane Michiko Passos Okawa. Medição contínua do fluxo de calor sensível para a atmosfera. 1998. (Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental) Universidade Federal do Paraná.
4. Dias, Nelson Luís, Gobbi, M. F., Damázio, J. M. Participação em banca de Fernando Augusto Silveira Armani. Fluxos turbulentos de gás carbônico no reservatório da Usina Hidroelétrica de Itaipu. 2014. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná
5. Dias, N. L., Dias, Nelson L., de Zárate, A. R., Vigo, D. A. Participação em banca de Tomás Chor. Novas soluções analíticas para a equação não linear de Boussinesq para águas subterrâneas. 2014. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná
6. Dias, Nelson Luís, Gobbi, M. F., Chamecki, M. Participação em banca de Bianca Luhm Crivellaro. O Fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica: uma aplicação à estimativa de erros. 2014. (Engenharia Ambiental) Universidade Federal do Paraná
7. A. F. Grauer, H. Araujo, Dias, N. L., Dias, Nelson L. Participação em banca de Samia Maria Antunes Hadich Vigolo. Sistematização de dados de tráfego para aplicação do software HBEFA 3.1 na elaboração de um inventário local de emissões veiculares: Bairro Rebouças — Município de Curitiba, PR. 2013. (Meio Ambiente Urbano e Industrial) Universidade Federal do Paraná
8. Gobbi, M. F., Scudelari, A. C., Gonçalves, J. E., Dias, N. L. Participação em banca de Liége Fernanda Koston Wosiacki. Estimativa do Transporte de Sedimentos no Litoral Sul do Paraná com Auxílio da Modelagem Numérica das Ondas. 2012. (Métodos Numéricos em Engenharia) Universidade Federal do Paraná
9. Dias, N. L., Fisch, G., Cunha, C. N. Participação em banca de Livia Souza Freire. Teorias de Camadas-Limite Atmosféricas: Modelo de Crescimento, Fluxo de Entranhamento e Análise Espectral. 2012. (Métodos Numéricos em Engenharia) Universidade Federal do Paraná
10. Acevedo, O. C., Dias, N. L., Degrazia, G. A. Participação em banca de Luís Gustavo Nogueira Martins. Não-estacionariedade de séries temporais turbulentas e a grande variabilidade dos fluxos nas baixas frequências. 2011. (Física) Universidade Federal de Santa Maria
11. Dias, N. L., Ribeiro, A. A., Yamamoto, T. M. Participação em banca de Suellen Rodrigues. Estudo do Comportamento das Soluções de Equações Diferenciais Parciais Parabólicas usando o Método das Características. 2010. (Métodos Numéricos em Engenharia) Universidade Federal do Paraná
12. Dias, N. L., Acevedo, O. C., Degrazia, G. A. Participação em banca de José Galúcio Campos. Escala temporal da turbulência para escoamento noturno acima da copa de uma floresta tropical úmida na Amazônia. 2008. (Física) Universidade Federal de Santa Maria

13. Manzi, A., Fisch, G., Sansigolo, C. A., Santos, J. M., Dias, N. L. Participação em banca de Paulo Jorge de Oliveira. Estudo do vento e da turbulência na camada limite atmosférica em áreas de floresta e pastagem na Amazônia. 2001. (Meteorologia) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
14. Prevedello, C. L., Dias, N. L., Kobiyama, M., Teixeira, E. Participação em banca de Solange Pizzolato Balena. Efeito de polímeros hidroretentores nas propriedades físicas e hidráulicas de dois meios porosos. 1998. (Ciências do Solo) Universidade Federal do Paraná

6.3 Doutorado

1. Dias, N. L., Dias, Nelson L., Fisch, G., Nascimento, Ernani Lima, Gobbi, M. F., Cancelli, Diana M. Participação em banca de André Luciano Malheiros. Desenvolvimento de um VANT (veículo aéreo não tripulado) para monitoramento da camada-limite atmosférica e análise do modelo integral para cálculo de fluxo superficial de calor sensível. 2014. (Métodos Numéricos em Engenharia) Universidade Federal do Paraná
2. Dias, N. L., Chamecki, M., Cunha, C. N., Ribeiro Jr., P. J., de Zárate, A. R.. Participação em banca de Diana Maria Cancelli. Análise experimental e numérica da dissimilaridade entre escalares na camada limite atmosférica. 2013. (Métodos Numéricos em Engenharia) Universidade Federal do Paraná
3. Degrazia, G. A., Roberti, D. R., Acevedo, O. C., Dias, N. L., Gonçalves, L. G. G. Participação em banca de Andréa Ucker Timm. Estimativas dos fluxos de energia superficiais utilizando o modelo de superfície NOAH modificado para culturas alagadas. 2011. (Física) Universidade Federal de Santa Maria
4. W. J. Mansur, Bonnet, M., F. Seyler, J.-L. Guyot, Dias, N. L., Rotunno, Otto, P. Genthon, S. Chauzy, W. CollischonParticipação em banca de Augsto César Vieira Getirana. Contribuições da altimetria espacial à modelagem hidrológica de grandes bacias na Amazônia. 2009. (Engenharia Civil) Universidade Federal do Rio de Janeiro
5. Dias, N. L., Manzi, A., Rocha, H., Chan, C. S., Bonatti, J. P. Participação em banca de Luiz Antônio Cândido. Impacto da condição inicial de água no solo na previsão de verão da América do Sul. 2002. (Meteorologia) Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
6. Bodstein, G. C. R., Cruz, M. E. C., Araujo, M. R. O. P., Santos, I. A., Hirata, M. H., Dias, N. L. Participação em banca de Cláudio Pellegrini. Uma lei logarítmica modificada para a camada limite atmosférica sobre colinas vegetadas em atmosfera não-neutra. 2001. (Engenharia Mecânica) Universidade Federal do Rio de Janeiro

6.4 Participação em banca de comissões julgadoras de Concurso público

1. Concurso Público para Professor Adjunto I, Meteorologia Agrícola/Micrometeorologia, UFV. 2013. Universidade Federal de Viçosa

2. Concurso Público para Professor Adjunto I, Meteorologia Agrícola/Micrometeorologia, Departamento de Engenharia Agrícola. 2012. Universidade Federal de Viçosa
3. Concurso Público para Professor Adjunto no Departamento de Engenharia Ambiental. 2011.
4. Concurso Público de Provas e Títulos para Professor Adjunto, Departamento de Física. 2010. Universidade Federal de Santa Maria
5. Concurso Público para Professor do Curso de Engenharia Ambiental da UFPR. 2006. Universidade Federal do Paraná
6. Concurso Público para Professor do Curso de Engenharia Ambiental da UFPR. 2004. Universidade Federal do Paraná
7. Concurso para Professor Substituto do curso de engenharia ambiental da ufpr. 2003. Universidade Federal do Paraná
8. Concurso público para professor do curso de engenharia ambiental da UFPR. 2002. Universidade Federal do Paraná
9. Concurso público para professor substituto do curso de engenharia ambiental. 2002. Universidade Federal do Paraná

Capítulo 7

Organização e/ou participação em eventos de pesquisa, ensino ou extensão

Eu participei em quase todos os congressos científicos em que tive trabalhos publicados, mas obviamente não em todos.

Durante muitos anos, fui do comitê científico dos congressos da Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

Capítulo 8

Apresentação, a convite, de palestras ou cursos em eventos acadêmicos

Houve algumas, mas gostaria de enfatizar cinco delas: três nos Workshops de Micrometeorologia na Universidade Federal de Santa Maria, uma em *Penn State* e uma em *Cornell*. Em todos os casos foram eventos relativamente pequenos, em que a discussão científica é franca, e menos desarmada.

1. *A Camada-Limite Atmosférica: Laboratório, Área de Aplicação e Rede de Observação.* VI Workshop Brasileiro de Micrometeorologia. Santa Maria, RS, 18/11/2009
2. *High Resolution Atmospheric Profiles with a mini-UAV* (In collaboration with: J. E. Gonçalves (SIMEPAR), T. Hasegawa, L. S. Freire (UFPR), A. L. Malheiros (UFPR)). John C. Wyngaard Symposium on Atmospheric Turbulence and Boundary Layers. Penn State, 24-25 June 2010.
3. *The Limits of Monin-Obukhov Similarity Theory for Scalars.* VII Brazilian Micrometeorology Workshop. Santa Maria, RS, Brazil, Nov 18th 2011.
4. *Working with Wilfried Brutsaert: some old and new results on radiative dissipation of temperature fluctuations and scalar similarity in the Surface Layer.* Hydrologic Discovery Through Physical Analysis — Honoring the Scientific Legacies of Wilfried H. Brutsaert and Jean-Yves Parlange. Ithaca NY, May 14–15 2012
5. *Deterministic and stochastic views of turbulence.* VIII Brazilian Micrometeorology Workshop. Santa Maria RS, November 21, 2013

Capítulo 9

Recebimento de comendas e premiações advindas do exercício de atividades acadêmicas

2003 Paraninfo, Turma de engenharia ambiental da UFPR, 2003

2004 Melhor trabalho oral de agrometeorologia e micrometeorologia, XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia

2005 Professor Homenageado, Turma de Engenharia Ambiental da UFPR

2006 Melhor apresentação oral de química do ar e poluição atmosférica, XIV Congresso Brasileiro de Meteorologia

2014 Professor Homenageado, Turma de Engenharia Ambiental da UFPR

Capítulo 10

Participação em atividades editoriais e/ou de arbitragem de produção intelectual e/ou artística

- De 1996 a 2008, participei do Conselho Editorial da Revista Brasileira de Recursos Hídricos.
- Entre os anos de 2005 e 2010, fui Editor Associado de *Water Resources Research*.
- Desde 2008, sou membro do Conselho Editorial de *Agricultural and Forest Meteorology*.
- Desde 2014, sou Editor Asssociado para Micrometeorologia da Revista Brasileira de Meteorologia.
- De 2008 a 2011 fui membro do Conselho Editorial da UFPR.
- Desde 2008, sou membro do Conselho Editorial da Editora Intersaber.

Capítulo 11

Assessoria, consultoria ou participação em órgãos de fomento à pesquisa, ao ensino ou à extensão

Como pesquisador do CNPq, atuo regularmente como parecerista. A lista de pareceres segue abaixo, na forma aaaa-x:, onde aaaa é o ano do parecer e x é a letra, a partir de a, indicando o parecer dentro do ano (quando houve mais de um).

2004-a
2004-b
2004-c
2004-d
2006-a
2008-a
2008-b
2009-a
2009-b
2009-c
2009-d
2009-e
2009-f
2009-g
2010-a
2010-b
2010-c
2010-d
2010-e
2011-a
2011-b
2011-c
2011-d
2011-e
2012-a
2012-b
2012-c
2012-d
2012-f
2013-a
2013-b
2013-c
2013-d
2013-e
2013-f
2014-a
2014-b
2014-c
2014-d
2014-e
2014-f
2014-g
2014-h
2014-i
2014-j
2014-k
2014-l

Capítulo 12

Exercício de cargos na Administração Superior, Setorial, Departamental, Coordenação de Cursos Graduação e Pós-Graduação, representação em Órgãos Colegiados Superiores

Minhas atividades de coordenação já foram descritas no capítulo 5. Além disso, fui sub-chefe de departamento, e membro do CEPE. A lista completa consta da tabela 12.1.

Tabela 12.1: Atividades de administração

Item	Atividade
1	Sub-Chefe do Departamento de Engenharia Ambiental (2010)
2	Coordenador do Curso de Engenharia Ambiental (2002–2004)
3	Coordenador do PPGEA (pro tempore, 2011)
4	Coordenador do PPGEA (2011–2013)
5	Coordenador do PPGEA (2013–2014)
6	Membro do CEPE, 2008–2010

Atividades futuras

As atividades que constam deste memorial não encerrarão — espero! — minha atuação acadêmica.

Como coordenador do PPGEA/UFPR, que ainda serei até meados de 2015, existe um processo em andamento de abertura do Curso de Doutorado. O processo de criação do curso, já aprovada no Colegiado do Programa, ainda precisa ser oficialmente aberto e tramitado. O trabalho é de grande responsabilidade e, se for bem sucedido, completará o ciclo que começamos, há muitos anos atrás, com a criação do Curso de Engenharia Ambiental da UFPR.

Como professor, há alguns livros para escrever, e ajudar a escrever. Não é possível prever que todos serão publicados, mas há projetos muito adiantados de um livro de Mecânica dos Fluidos (apêndice A) e um de Matemática Aplicada (apêndice B). Um texto em Português sobre Turbulência também está em preparação (apêndice C).

As atividades de pesquisa não terminam, exceto se minha curiosidade se esgotar. Listo aqui, sem nenhuma prioridade, alguns temas que ainda desejo explorar no futuro não muito distante:

- **Incompressibilidade do campo médio e do campo de flutuações de velocidade em um escoamento turbulento.** Este tema confunde-se com a aproximação de Boussinesq em meios estratificados. Análises de ordem de grandeza preliminares, não publicadas, indicam que a ordem de grandeza de $\partial\langle U_i \rangle / \partial x_i$ e $\partial u_i / \partial x_i$ possuem ordens de grandeza diferentes, e que é preciso mais cuidado formal do que normalmente se encontra nos livros textos quando se iguala ambos os termos a “zero” ($\langle U_i \rangle$ é a velocidade média, e u_i a flutuação turbulenta). Fisicamente, os “zeros” podem possuir ordens de grandeza diferentes.
- **A sub-camada rugosa.** Este tema confunde-se com a parametrização de fluxos turbulentos sobre diferentes tipos de superfície natural, incluindo florestas e superfícies líquidas. As teorias tradicionais costumam “falhar”, em diversos graus, muito perto da superfície, e não existem teorias consolidadas que lidem com todos os aspectos do problema.
- **A estrutura estocástica da turbulência.** Entre outros pontos muito interessantes, está o “direito” de tomar médias estatísticas sobre sistemas dinâmicos determinísticos (vide apêndice D), a existência ou não de escalas integrais e o fenômeno de Hurst, e o cálculo de erros de medição de fluxos turbulentos na natureza.
- **Fluxos de gases de efeito estufa.** Um tema que se entrelaça com outros acima, e imposto pela discussão atual sobre mudanças climáticas. A medição de flutuações turbulentas de concentração torna-se mais difícil à medida que as concentrações ficam menores: é mais difícil medir CO₂ do que H₂O, e mais difícil medir CH₄ do que CO₂, e mais difícil medir N₂O do que CH₄, etc.. Estimar os

fluxos correspondentes sobre diversos tipos de superfícies naturais é um desafio significativo.

- **Equações diferenciais não-lineares: Blasius e Boussinesq.** A dissertação de Chor (2014) abriu um grande número de questões interessantes a serem investigadas. Entre elas, está a mudança de comportamento no esvaziamento de um maciço poroso quando o lençol freático “encontra” o divisor de águas (matematicamente, quando a condição de contorno de fluxo nulo começa a ser “sentida” pela solução da equação diferencial parcial). Em algum sentido, existe uma velocidade de propagação envolvida. Entretanto, o método das características não é trivialmente aplicável, e a solução aproximada para domínio infinito, estudada por Tomás Chor, é assintótica (tem propagação infinitamente rápida). As questões estão em aberto, e há muito para estudar.

Finalmente, é oportuno terminar este relato por onde comecei minha carreira de professor: continuarei a cumprir ou exceder minha carga horária requerida em docência. Nunca por ser uma obrigação, mas por ser um grande prazer ensinar.

Referências Bibliográficas

- Araújo, A. A. M. (1996). Identificação de componentes hidrológicas através de filtros lineares auto-regressivos. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- Araújo, A. A. M. e Dias, N. L. (1995). Separação do hidrograma de cheias através de filtros auto-recursivos. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 1, páginas 267–275, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Araújo, A. A. M. e Dias, N. L. (1996). Métodos de deconvolução do hidrograma para o cálculo da chuva efetiva e comparação com a chuva observada. Em *IX Congresso Brasileiro de Meteorologia*, volume 2, páginas 1469–1471, Campos do Jordão. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Araújo, A. A. M. e Dias, N. L. (1999). Um modelo hidrológico construído a partir de filtros lineares auto-regressivos. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 84, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Araújo, A. A. M., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (1998). Relatório III do Projeto Mesolit: Descrição do modelo numérico de mesoescala, definição de parâmetros, condições iniciais e de contorno. Relatório Técnico 002/98, Simepar.
- Araújo, A. M., Dias, N. L., e Rocha, L. S. (1997). Climatologia do oeste paranaense. Relatório Técnico 002/97, Simepar, Curitiba.
- Armani, F., de Carvalho, R. A., e Dias, N. L. (2014). Statistical evaluation of a new air dispersion model against AERMOD using the Praire Grass data set. *Journal of the Air & Waste Management Association*, 64(2):219–226.
- Armani, F. A. S. (2011). Avaliação de um modelo numérico de dispersão atmosférica em comparação com o modelo Aermod, utilizando os dados do experimento de campo Projeto de Prairie Grass. Trabalho de conclusão de curso, Curso de Engenharia Ambiental, UFPR.
- Armani, F. A. S. (2014). Fluxos turbulentos de gás carbônico no reservatório da Usina Hidroelétrica de Itaipu. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA/UFPR).
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012a). I Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde), Trecho II. Relatório Técnico 44.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012b). II Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116

- Avenida Metropolitana (Linha Verde), Trecho II. Relatório Técnico 46.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012c). III Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 47.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012d). IV Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 48.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2012e). V Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das obras integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 48.2, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S. e Dias, N. L. (2013). “VI Relatório de Acompanhamento” — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 50.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Armani, F. A. S., Dias, N. L., Crivellaro, B. L., e Chor, T. L. G. (2013a). Fluxos turbulentos de dióxido de carbono sobre o reservatório da usina hidrelétrica de Itaipu – PR. *Ciência e Natura*, Volume Especial:128–132.
- Armani, F. A. S., Hoeltgebaum, L. E. B., e Dias, N. L. (2013b). “VII Relatório de Acompanhamento” — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 51.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Asanuma, J., Dias, N. L., Kustas, W. P., e Brutsaert, W. (2000). Observations of neutral profiles of wind speed and specific humidity above a gently rolling land surface. *J of the Meteorological Society of Japan*, 78(6):719–730.
- Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*. Editora HARBRA Ltda.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Beer, F. P. e Johnston Jr., R. (1994a). *Mecânica Vetorial para Engenheiros – Dinâmica*. McGraw Hill, 5^a edição.
- Beer, F. P. e Johnston Jr., R. (1994b). *Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática*. McGraw Hill, 5^a edição.
- Bernardes, M. (2008). *Uma Análise da Variabilidade do Fluxo de Momentum na Camada Superficial Atmosférica em Condições Instáveis*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Bernardes, M. e Dias, N. L. (2005). Comparação dos métodos de obtenção da velocidade de atrito a partir de dados de turbulência. *Revista Ciência e Natura — IV Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, Edição Especial:221–224.
- Bernardes, M. e Dias, N. L. (2010). The alignment of the mean wind and stress vectors in the unstable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 134:41–59.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (1960). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York.
- Brock, F. V., Crawford, K. C., Elliott, R. L., Cuperus, G. W., Stadler, S. J., Johnson, H. L., e Eilts, M. D. (1995). The Oklahoma Mesonet: a Technical Overview. *J of Atmospheric and Oceanic Technology*, 12:1.
- Brutsaert, W. (1975). On a derivable formula for long-wave radiation from clear skies. *Water Resour. Res.*, 11:742–744.
- Butkov, E. (1988). *Física matemática*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Cancelli, D. M. (2003). Implementação de um esquema distribuído de transferência solo-vegetação-atmosfera.
- Cancelli, D. M. (2004). Implementação de um esquema de transferência solo-vegetação-atmosfera para o Estado do Paraná. Projeto final de curso, Curso de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.
- Cancelli, D. M. (2006). Um modelo para a evolução térmica de lagos profundos. Tese de Mestrado, PPGMNE/Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Cancelli, D. M. (2013). *Análise experimental e numérica das causas de dissimilaridade entre escalares na camada limite atmosférica*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Cancelli, D. M., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2013). Estudo da similaridade entre escalares sobre uma superfície heterogênea utilizando Large-Eddy Simulation. *Ciência e Natura*, Especial:178–180.
- Cancelli, D. M., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2014). A large-eddy simulation study of scalar dissimilarity in the convective atmospheric boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 71(1):3–15.
- Cancelli, D. M. e Dias, N. L. (2014). BRevê: uma metodologia objetiva de cálculo de emissões para a frota de veículos brasileira. *Revista de Engenharia Sanitária e Ambiental*.

Cancelli, D. M., Dias, N. L., e Chamecki, M. (2012a). Dimensionless criteria for the production-dissipation equilibrium of scalar fluctuations and their implications for scalar similarity. *Water Resour. Res.*, 48:W10522.

Cancelli, D. M., Dias, N. L., e Chamecki, M. (2012b). Dissimilarity between temperature-humidity in the atmospheric surface layer and implications for estimates of evaporation, Abstract B23E-0500. Em *AGU Fall Meeting, 2012, San Francisco*.

Cancelli, D. M., Dias, N. L., Maggiotto, S. R., e Grodzki, L. (2005). Dados de fluxos superficiais medidos em terra (na bacia de contribuição) e no lago de Furnas. Relatório Técnico 012.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba.

Chamecki, M. (2003). Uma análise da estacionariedade e isotropia da turbulência na camada superficial da atmosfera. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.

Chamecki, M. e Dias, N. L. (2003). Estimating the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer with sonic anemometry data. Em *56th annual meeting of the division of fluid dynamics of the american physical society, Bulletin of the American Physical Society*, volume 48 (p. 87), East Rutherford, New Jersey. American Physical Society.

Chamecki, M. e Dias, N. L. (2004). The local isotropy assumption and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer. *Q J Roy Meteorol Soc*, 130(603):2733–2752.

Chamecki, M. e Dias, N. L. (2006). Reply to a comment by R. J Smalley and R. A. Antonia on ‘The local isotropy hypothesis and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer’ (October B, 2004, 130:2733–2752). *Q J Roy Meteorol Soc*, 132:685–686.

Chor, T., Dias, N. L., e de Zárate, A. R. (2013a). An exact series and improved numerical and approximate solutions for the Boussinesq equation. *Water Resour. Res.*, 49:7380–7387.

Chor, T. L. e Dias, N. L. (2014). A simple generalization of the Brutsaert and Nieber analysis. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions (Online)*, 11:12519–12530.

Chor, T. L. G. (2014). Novas soluções analíticas para a equação não-linear de Boussinesq para águas subterrâneas. Tese de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental. Universidade Federal do Paraná.

Chor, T. L. G., Dias, N. L., e de Zarate, A. R. (2013b). Solução em série da equação de Boussinesq para fluxo subterrâneo utilizando computação simbólica. Em *Anais, XX Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Bento Gonçalves, RS.

Chor, T. L. G., Dias, N. L., e Hasegawa, T. (2011). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica – Relatório Nº 3: Campanhas iniciais de medição de Ozônio. Relatório Técnico 43.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

Crivellaro, B. L. (2014). O fenômeno de Hurst em turbulência atmosférica: uma aplicação à estimativa de erros. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental (PPGEA/UFPR).

Crivellaro, B. L., Armani, F. A. S., Chor, T., Jr., D. V., e Dias, N. L. (2014). XI Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte – AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba – BID PRO-CIDADES. Relatório Técnico 55.1, Lemma UFPR, Curitiba.

Crivellaro, B. L. e Dias, N. L. (2013). Aplicação do método de Salesky et al. (2012) usando um filtro temporal para estimar o erro do fluxo de calor sensível em Tijucas Do Sul – PR e em Missal – PR. *Ciência e Natura*, (Ed. Especial):61–71.

Crivellaro, B. L., Dias, N. L., e Chor, T. (2011). Um método espectral Passa-Banda para CO₂. *Ciência e Natura*, Micrometeorologia (Edição Suplementar):75–78.

Crivellaro, B. L., Dias, N. L., e Chor, T. (2013). Spectral Effects on Scalar Correlations and Fluxes. *American Journal of Environmental Engineering*, 3:3–17.

Damázio, J. M., editor (2012a). *Diretrizes para Análises Quantitativas de Emissões Líquidas de Gases de Efeito Estufa em Reservatórios. Programas de Medição e Análise de Dados*, volume 1. CEPEL, Rio de Janeiro.

Damázio, J. M., editor (2012b). *Estado da Arte em Ciclo do Carbono em Reservatórios*, volume 1. CEPEL, Rio de Janeiro.

Damázio, J. M., editor (2014). *Emissões de gases de efeito estufa em reservatórios de centrais hidrelétricas*. CEPEL, Rio de Janeiro.

de Almeida, R. C., da Costa Dias, N. L., da Nóbrega Cunha, C., Freire, L. S., e Armani, F. (2011). Sistema MODELAR – Modelo Regulatório de Qualidade do Ar para o Estado do Paraná. Relatório Técnico 39.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

de Jong, R., Chor, T., e Dias, N. L. (2011). Medição da velocidade do vento a bordo de um Veículo Aéreo Não Tripulado. *Ciência e Natura*, Micrometeorologia (Edição Suplementar):71–74.

de Oliveira, A. R. (2009). Comparação da evaporação em lago medida em situ com modelos climatológicos. Trabalho de Conclusão de Curso, Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná.

Dias, C. L. N. C. . N. L. (2006a). Modelagem de Transporte de Escalares em Rios. Em *Anais do I Simpósio Sul-Sudeste de Recursos Hídricos*.

Dias, N. (1988). Uma justificativa analítica para uma equação empírica de evaporação. Em *V Congresso Brasileiro de Meteorologia, Rio de Janeiro*, volume 1, páginas X.6–X.11, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.

Dias, N. L. (1986). Estimativas climatológicas de evaporação em lagos. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.

- Dias, N. L. (1989a). Estimação de Taxas de Evaporação no Lago de Sobradinho pelo Método do Balanço de Energia. Relatório Técnico ET-15380/1, COPPETEC, Rio de Janeiro.
- Dias, N. L. (1989b). Estimação de Taxas de Evaporação no Lago de Sobradinho pelo Método do Balanço de Energia. Relatório Técnico ET-15380/2, COPPETEC, Rio de Janeiro.
- Dias, N. L. (1989c). Modelação dos Coeficientes de Vazão e Contração para Escoamento Turbulento Através de Uma Placa de Orifício. *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos*, 7(2):69–82.
- Dias, N. L. (1992). Unificação formal de metodologias para cálculo de evaporação em lagos. *Revista Brasileira de Engenharia*, 10(2):61–84.
- Dias, N. L. (1994a). Avaliação Inicial de Modelos e Dados para Simulação Hidrológica e Hidrodinâmica do Trecho do Rio Iguaçu entre Fluiópolis e Foz do Areia. Relatório Técnico HG-79/3, CEHPAR-UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L. (1994b). Inspeção de bacias experimentais. Relatório Técnico HG-86/1, CEHPAR, Curitiba, PR.
- Dias, N. L. (1995a). Estimativas de rugosidade de calha do rio Iguaçu a partir de medições de perfis de velocidade. Relatório Técnico HG-79/4, CEHPAR-UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L. (1995b). Obtenção de curvas de remanso pelo método de Runge-Kutta. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 277–285, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. (1996). Perfis médios e teoria de similaridade de Monin-Obukhov na camada-limite atmosférica. Relatório Técnico 003/96, SIMEPAR, Curitiba, PR.
- Dias, N. L. (2000). Sobre a consistência da aplicação de análise dimensional direcional à camada superficial. Em *CD-ROM*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L. (2002). Organização e aprovação das notas e relatórios de pesquisa do Lemma. Nota de Pesquisa 1.4, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L. (2003a). Estimativa do coeficiente de Manning no rio Iguaçu a partir de perfis de velocidade. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, volume Livro de Resumos (artigo completo no CD – full article in CD), página 400, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. (2003b). Obtenção de uma solução analítica da equação de difusão-advecção com decaimento de 1^a ordem pelo método da transformação de similaridade generalizada. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:181–188.
- Dias, N. L. (2003c). *Problemática do uso local e global da água da Amazônia*, capítulo 5. Comentários sobre "Impactos antropogênicos no ciclo hidrológico na Amazônia", de Souza, Rocha e Cohen, páginas 95–106. Número ISBN:85-7143-034-9. Edições UNESCO Brasil, Belém.

- Dias, N. L. (2004). Book Review: Fundamentals of Biometeorology. *Agric For Meteorol*, 125:173–175.
- Dias, N. L. (2005a). Comment on "The Need for Better Contacts Between Hydrologists in the Two Americas". *EOS Transactions - American Geophysical Union*, 86:370–370.
- Dias, N. L. (2005b). Uma avaliação do uso de dados de estações meteorológicas automáticas em modelos climatológicos de evaporação e evapotranspiração. Em *Anais, 1º Simpósio de Recursos Hídricos do Sul*, Santa Maria, RS. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. (2006b). Book review: M. Bonell, L.A. Bruijnzeel (Eds.), *Forests, Water and People in the Humid Tropics*, Cambridge University Press, 2005. *Agric For Meteorol*.
- Dias, N. L. (2007). Impactos Atmosféricos da Implantação do Metrô de Superfície de Curitiba na Avenida Metropolitana (antiga BR-116). Relatório Técnico 14.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba.
- Dias, N. L. (2009). Básia, Mediânia e Dífría: uma utopia do ensino de matemática em engenharia. *Revista de Ensino de Engenharia*, 28(1):55–64.
- Dias, N. L. (2013a). Reconciling radiation dissipation in the spatial and spectral domains under stable conditions. *Water Resour. Res.*, 49:7150–7153.
- Dias, N. L. (2013b). Research on atmospheric turbulence by Wilfried Brutsaert and collaborators. *Water Resour. Res.*, 49:7169–7184.
- Dias, N. L. (2014a). Alternativas de processamento numérico eficiente para a Engenharia do século XXI. *Revista de Ensino de Engenharia*, 33(1):25–36.
- Dias, N. L. (2014b). *Pequena introdução aos números*. Editora Intersaber, Curitiba.
- Dias, N. L., Araújo, A., e Fill, H. D. (1995a). Calibração e uso de um modelo hidrodinâmico em regime não-permanente para avaliar a influência da operação do reservatório de Foz do Areia sobre as cheias em União da Vitória. Relatório Técnico Projeto HG-79 Relatório Técnico 5, CEHPAR/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Armani, F. A. S., Crivellaro, B. L., e Vissotto, D. (2014a). *Emissões de gases de efeito estufa em reservatórios de centrais hidrelétricas* (J. M. Damázio, org.), capítulo Tópicos especiais, páginas 347–366. CEPEL, Rio de Janeiro.
- Dias, N. L., Beneti, C. A. A., Quadro, M., e Ferreira, V. (1999a). Os eventos severos de janeiro de 1999 em Foz do Iguaçu: Efeitos locais, de mesoescala e sinóticos. Relatório Técnico 002/99, SIMEPAR, Curitiba.
- Dias, N. L., Bernardes, M., Nocko, H. F., e Reksidler, R. (2005). Influência de obstáculos aerodinâmicos na medição de variáveis micrometeorológicas : medições de velocidade de atrito no lago de Furnas. Em *CD-ROM, XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*.
- Dias, N. L., Bettega, R., e Okawa, C. M. P. (1996). Correção analítica da perda de potência espectral da turbulência em aparelhos com tempo de resposta limitada. Em *IX Congresso Brasileiro de Meteorologia, Campos do Jordão*, volume 2, páginas 1255–1258. Sociedade Brasileira de Meteorologia.

- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1996). Similarity of scalars under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, 80:355–373.
- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1997). Radiation and turbulence in the stable boundary layer. Em *Preprint Volume, Special Symposium on Boundary Layers and Turbulence*, páginas 76–81, Long Beach. American Meteorological Society.
- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1998). Radiative effects on temperature in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorol.*, 89(1):141–159.
- Dias, N. L., Brutsaert, W., e Wesely, M. L. (1993). The estimation of nocturnal surface fluxes with low frequency turbulence data during FIFE-89. Em *Transactions, Spring Meeting of the AGU*, Baltimore. American Geophysical Union.
- Dias, N. L., Brutsaert, W., e Wesely, M. L. (1995b). Z-less stratification under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol.*, 75:175–187.
- Dias, N. L., Cancelli, D. M., e Jr., D. V. (2008a). Desafios e lições da medição moderna de evaporação em grandes lagos. Em *CDROM Anais II Simpósio de Recursos Hídricos do Sul-Sudeste*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Cancelli, D. M., e Vissotto Jr., D. (2010a). Directional analysis of over-lake water vapor and heat fluxes. Em *EOS Trans AGU 91(26) Meet. Am. Suppl.*, páginas Abstract H21A-01, Foz do Iguaçu, Brazil. American Geophysical Union.
- Dias, N. L., Chamecki, M., Kan, A., e Okawa, C. M. P. (2004a). A study of spectra, structure and correlation functions and their implication on the stationarity of surface-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorol.*, 110:165–189.
- Dias, N. L., Chor, T., e de Zárate, A. R. (2014b). A semi-analytical solution for the Boussinesq equation with non-homogeneous constant boundary conditions. *Water Resour. Res.*, 50(8):6549–6556.
- Dias, N. L., Chor, T., Hoeltgebaum, L. E., e Hasegawa, T. (2014c). Monitoramento com Veículo Aéreo Não-Tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica. Relatório final de atividades do projeto. Relatório Técnico 54.1, Lemma UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Chor, T. L., e de Zárate, A. R. (2013a). Progress in solutions of the nonlinear Boussinesq groundwater equation, Abstract H11C-1168. Em *AGU Fall Meeting, San Francisco – USA, 2013*.
- Dias, N. L., Crivellaro, B. L., Armani, F. S., Chor, T. L., Gobbi, M. F., e Santos, A. L. (2013b). Abstract B32A-03. Short-term eddy-covariance measurements of CO₂ fluxes at Itaipu Lake, Brazil. Em *Meeting of the Americas, Cancún, 2013*.
- Dias, N. L. e Damázio, J. M. (1985). Tratamento de Valores Atípicos Pequenos na Estimação de Vazões Decamilenares. Em *VI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, São Paulo*, São Paulo. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., de Araújo, A. M., Caramori, P. H., e Prates, J. E. (1997). Relatório I do Projeto Mesolit: Revisão bibliográfica, base de dados, climatologia e pontos de medição. Relatório Técnico 004/97, SIMEPAR, Curitiba, Brasil.

- Dias, N. L. e Duarte, H. F. (2002a). Obtenção de um índice de nebulosidade do céu a partir da análise de dados de radiação solar. Em *XII Congresso Brasileiro de Meteorologia, Anais CDROM*, Foz do Iguaçu. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L., Duarte, H. F., Maggiotto, S. R., e Grodzki, L. (2007a). An attenuated eddy covariance method for latent heat flux measurements. *Water Resour. Res.*, 43:W04415.
- Dias, N. L., Duarte, H. F., Nascimento, E. L., Gobbi, M. F., e Maggiotto, S. R. (2004b). Resultados parciais de micrometeorologia, hidrologia e simulação de mesoescala para o Reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 9.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L. e Duarte, U. M. (2002b). Atividades de implantação dos estudos de evaporação e evapotranspiração no reservatório de FURNAS. Nota de Pesquisa 3.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L. e Gobbi, M. F. (1989). Quanto Evapora o Lago de Sobradinho? Em *IV Simpósio Luso-Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos*, Lisboa, Lisboa. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., e Cunha, C. L. N. (2012a). *Estado da Arte em Ciclo do Carbono em Reservatórios* (Jorge Machado Damázio, org.), volume 1, capítulo Abordagens Micrometeorológicas para a estimativa de fluxos de gases de efeito estufa entre a superfície e a atmosfera. 1 ed. Rio de Janeiro., páginas 192–237. CEPEL.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., de Lourdes da Nóbrega Cunha, C., Vissotto Jr., D., Armani, F. A. S., Hoeltgebaum, L. E., Crivellaro, B. L., e Chor, T. L. G. (2013c). Projeto ELGEE/BALCAR – Relatório de Atividades até Maio de 2013. Relatório técnico, Lemma/UFPR, Curitiba PR.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., e Gobbi, E. F. (2003a). Formulação de um modelo matemático do efeito de efluentes térmicos em rios e suas implicações para a legislação ambiental brasileira. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:169–180.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., Kan, A., Grodzki, L., e Maggiotto, S. R. (2003b). Influência do lago de Itaipu sobre o clima regional. Relatório de Pesquisa 4.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., Okawa, C. M. P., Kan, A., Araújo, A. A. M., Grodzki, L., e Rocha, L. S. (1999b). Relatório final do Projeto Mesolit: Influência do lago de Itaipu sobre o clima regional. Relatório Técnico 007/99, SIMEPAR.
- Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Fisch, G., e Hasegawa, T. (2010b). A comparison of UAV and radiosonde profiles in the atmospheric boundarylayer. Em *EOS Trans AGU 91(26) Meet. Am. Suppl.*, páginas A13G-03, Foz do Iguaçu, Brazil. American Geophysical Union.
- Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Freire, L. S., Hasegawa, T., e Malheiros, A. L. (2012b). Obtaining Potential Virtual Temperature Profiles, Entrainment Fluxes, and Spectra from Mini Unmanned Aerial Vehicle Data. *Boundary-Layer Meteorol.*, 145:93–111.
- Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Hasegawa, T., e Freire, L. S. (2010c). High Resolution Atmospheric Profiles with a mini-UAV. Em *Atmospheric Turbulence and Boundary Layers. A Symposium in honor of John C. Wyngaard.*, University Park, PA. The Pennsylvania State University.

- Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Malheiros, A. L., e Hasegawa, T. (2009a). Probing the Atmospheric Boundary-layer with a Cost-effective Mini-UAV. *AsiaFlux Newsletter*, 30:16–22.
- Dias, N. L., Grodzki, L., Maggiotto, S. R., Nascimento, E. L., Vissotto Jr., D., Gobbi, M. F., Duarte, H. F., e Sanchez, S. (2004c). Estatísticas de campos atmosféricos, EXFU-3 (Experimento Intensivo de Campo nº3), disponibilidade de dados e fluxos de CO₂ no lago de Furnas. Relatório de Pesquisa 11.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Grodzki, L., Maggiotto, S. R., Sanchez, S. S., Kan, A., e da Silva, N. G. M. (2003c). Hidroclimatologia, estações micrometeorológicas e Experimento Intensivo de Campo No 1 de Furnas (EXFU-1). Relatório de Pesquisa 6.2, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Grodzki, L., Maggiotto, S. R., Vissotto, S., e Jr., D. V. (2007b). Análise das diferenças terra-lago nos campos de vento, temperatura do ar, umidade e fluxos superficiais turbulentos de calor sensível e latente no lago de Itaipu. Relatório Técnico 16.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IAPAR, Curitiba.
- Dias, N. L. e Hasegawa, T. (2010). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada limite atmosférica – Relatório Nº 1: Revisão bibliográfica e metodologia de medição da Camada-Limite Atmosférica e Veículos Aéreos não-tripulados. Relatório Técnico 37.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Hong, J., Leclerc, M., Black, Nesic, Z., e Krishnan, P. (2009b). A simple method of estimating scalar fluxes over forests. *Boundary-Layer Meteorol.*, 132:401–414.
- Dias, N. L., Hong, J., Leclerc, M., Black, A., Grant, N., Nesic, Z., e Krishnan, P. (2007c). CO₂ flux gap-filling with an aerodynamic-variance method over a tall forest. Em *Ameriflux Annual Meeting*, Boulder, CO.
- Dias, N. L., Jr., D. V., Bernardes, A. L. M. M., e Vissotto, S. (2008b). IV Relatório de Acompanhamento: Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 20.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1998a). Métodos e modelos climatológicos de estimativa de evaporação e evapotranspiração. Relatório Técnico 003/98, SIMEPAR.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1998b). Um modelo hidrológico-meteorológico para a estimativa de evapotranspiração em bacias hidrográficas. Relatório Técnico 004/98, SIMEPAR.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1999). A hydrometeorological model for basin-wide seasonal evapotranspiration. *Water Resour. Res.*, 35(11):3409–3418.
- Dias, N. L. e Kan, A. (2000). A relação entre o índice de brisa e zonas de pressão. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L. e Kan, A. (2004). Resultados do Ano 2 do Projeto Delta-F: modelos e medições. Relatório de Pesquisa 10.1, Lemma, Curitiba.

- Dias, N. L. e Kan, A. (2008). Evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia, PR: Estimativas dos modelos de relação complementar versus balanço hídrico sazonal e balanço de energia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 13:1–10.
- Dias, N. L., Kan, A., e Brutsaert, W. (2000). A Qualitative Analysis of Recession Flow Models by Comparison With Numerical Simulations. Em *AGU 200 Fall Meeting*, número H71F-11. American Geophysical Union.
- Dias, N. L., Kan, A., Grodzki, L., Sanchez, S. D., e Vissotto, D. (2002a). O método de covariâncias turbulentas atenuadas (MCTA) para medição dos fluxos de calor sensível e latente: aplicação ao lago de Itaipu e seu redor. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 7(1):143–160.
- Dias, N. L., Kan, A., e Marques Silva, N. G. (2002b). Energy Budget Errors from Eddy Correlation Continuously Measured Fluxes. Em *Anais – CDROM, XII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, páginas 1–5, Foz do Iguaçu. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L., Kan, A., e Silva, N. G. M. (2002c). Energy Budget Errors from Eddy Correlation Continuously Measured Fluxes. Em *XII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, volume 1, páginas 1–5, Foz do Iguaçu. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L., Kan, A., Silva, N. G. M., e Smaha, N. (2002d). Levantamento de dados históricos na região de contribuição ao Reservatório de Furnas. Nota de Pesquisa 4.2, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Kan, A., Vissotto Jr., D., Lima, E. N., Duarte, H. F., e Cancelli, D. M. (2003d). Relatório parcial nº4: Monitoramento de fluxos, cálculo de evapotranspiração por balanço hídrico sazonal e um modelo solo-vegetação-atmosfera para cálculo de fluxos no Reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 7.2, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L. e Kelman, J. (1987). Comparação entre Modelos Climatológicos e o Uso de Tanques Classe A para Estimar a Evaporação no Reservatório de Sobradinho. Em *VII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Salvador*, volume 2, páginas 162–169, Salvador. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Leclerc, M., Lindroth, A., Molder, M., e Bath, A. (2007d). Daytime low-level inversions and jets and their impact on surface scalar fluxes. Em *Continental Biosphere Vegetation and Water Cycle: Analyses and Prospects*, Paris.
- Dias, N. L. e Maggiotto, S. R. (2003a). Medição de umidade em alta freqüência com um sensor capacitivo ventilado. Em Degrazia, G. A., editor, *Ciência e Natura, III Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, volume Especial, páginas 195–199, Santa Maria RS. Universidade Federal de Santa Maria.
- Dias, N. L. e Maggiotto, S. R. (2003b). Relatório de Atividades – Plataforma de Coleta de Dados em Ponta Grossa
Período: 08/2003 - 12/2003. Nota de Pesquisa 5.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Maggiotto, S. R., Gobbi, M. F., Nascimento, E. L., e Duarte, H. F. (2004d). Resultados parciais de micrometeorologia, hidrologia e simulações de mesoescala para o Reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 9.1, Lemma, Curitiba.

- Dias, N. L., Maggiotto, S. R., Gobbi, M. F., Nascimento, E. L., Duarte, H. F., Cancelli, D. M., Kan, A., e Grodzki, L. (2004e). Estatísticas de campos atmosféricos, EXFU-3 (Experimento Intensivo de Campo N. 3), Disponibilidade de Dados e Fluxos de CO₂ no lago de Furnas. Relatório de Pesquisa 9.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L. e Malheiros, A. L. (2003). Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Vissotto, S. (2008c). I Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 21.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008d). II Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 27.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008e). VII Relatório de Acompanhamento — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 — Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 26.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L., Malheiros, A. L., e Wolf, R. (2008f). VIII Relatório de Acompanhamento — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 — Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 28.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Dias, N. L. e Marcellini, S. S. (1997). Implementação do sistema de controle de qualidade de dados objetivo do SIMEPAR: testes preliminares. Em *CD-ROM do XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 228, Vitória. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. e Okawa, C. M. P. (1997). Medição Fluxo de Calor Sensível com anemômetro sônico e de hélice em Piraquara-PR. Em *CD-ROM, XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Vitória. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Araújo, A. A. M., e Gobbi, M. G. (1999c). Estudo dos impactos sobre o clima regional do reservatório de Itaipu. Em *CD-ROM, XV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, Foz do Iguaçu. Cigré-Brasil.
- Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., Araújo, A. A. M., Kan, A., Nazareno, P., Rocha, L. S., e Sanchez, S. (1998a). Os experimentos intensivos de campo dos estudos de mesoescala para o lago de Itaipu (Exinc/Mesolit). Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., Kan, A., Araújo, A. A. M., Nazareno, P., Rocha, L. S., e Sanchez, S. D. (1998b). Relatório II do projeto mesolit: instalação de estações meteorológicas e resultados das medições micrometeorológicas. Relatório Técnico 001/98, SIMEPAR, Curitiba, PR, Brasil.
- Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Grodzki, L., e Rocha, L. S. (1999d). Relatório VI do Projeto Mesolit: experimento intensivo de campo nº 3. Relatório Técnico 001/99, SIMEPAR, Curitiba, PR, Brasil.

- Dias, N. L., Okawa, C. M. P., Prevedello, C. L., e Rocha, L. S. (1999e). Medição contínua de fluxos, temperatura e umidade do solo em uma cultura de soja. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 88, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L., Pereira, M. V. F., e Kelman, J. (1985). Optimization of Flood Control and Power-Generation Requirements in a Multi-Purpose Reservoir. Em *Preprint Volume, Symposium on Planning and Operation of Electric Power Systems, IFAC*, Rio de Janeiro.
- Dias, N. L., Pscheidt, I., e Leite, E. A. (2002e). Condições meteorológicas e qualidade do ar na Região Metropolitana de Curitiba em 2001. Nota de Pesquisa 2.1, Lemma, Curitiba.
- Dias, N. L., Quadro, M., e Pittigliani, M. (1999f). Comparação de alternativas de medição e estimativa da radiação solar com actinógrafos e piranômetros. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 87, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996a). A comparison of monthly evaporation estimates from climatological models and the energy-budget method at Lake Serra Azul, Brazil. Em *Transactions, Spring Meeting of the AGU*, Baltimore. American Geophysical Union.
- Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996b). Os fundamentos físicos do balanço de entalpia em lagos. Relatório Técnico 004/96, SIMEPAR, Curitiba, Brasil.
- Dias, N. L. e Reis, R. J. (1998). Métodos de cálculo do balanço de entalpia em lagos e erros associados. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 3(3):45–56.
- Dias, N. L. e Rocha, L. S. (1999). Cálculo da taxa de variação da entalpia para os lagos de Itaipu e Foz do Areia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 4(3):39–52.
- Dias, N. L., Rocha, L. S., Okawa, C. M. P., e Sanchez, S. (1998c). Determinação de albedos e rugosidades na região do reservatório de Itaipu. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Dias, N. L., Rotunno, O. C., Salim, M., e Moreano, N. B. (1988). Implementação de Um Banco de Dados Hidrometeorológico Diários em Microcomputador. *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos*, 6:65–91.
- Dias, N. L., Vissotto, S., e Jr., D. V. (2006). O sistema automático de inserção de dados de estações micrometeorológicas. Nota de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba.
- Duarte, H. F. (2004). Ajuste da radiação líquida em um modelo de transferência solo-vegetação-atmosfera. Projeto final de curso, Curso de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.
- Duarte, H. F. (2006). Um método para medições do fluxo de calor latente a partir de sensores de umidade capacitivos. Tese de Mestrado, PPGMNE/Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Duarte, H. F. e Dias, N. L. (2002). Modelos Matemáticos simples para a parametrização da radiação solar incidente. Relatório de Pesquisa 3.1, Lemma, Curitiba.

- Duarte, H. F. e Dias, N. L. (2004). Ajuste da radiação líquida em um modelo de transferência solo-vegetação-atmosfera. Em *Anais, CD-ROM, XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*.
- Duarte, H. F., Dias, N. L., e Maggiotto, S. R. (2006). Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agric For Meteorol*, 139:171–181.
- Duarte, H. F., Maggiotto, S. R., Grodzki, L., e Dias, N. L. (2005). Monitoramento do fluxo de CO₂ no reservatório de Furnas. Em *Anais, 1º Simpósio de Recursos Hídricos do Sul*, Santa Maria, RS. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- ELETROBRÁS (1987). *Guia para cálculo de cheia de projeto de vertedores*. Rio de Janeiro.
- Falkovich, G. (1994). Bottleneck phenomenon in developed turbulence. *Physics of Fluids*, 6(4):1411 – 1414.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Freire, L. S. (2012). Teorias de camada-limite atmosférica: modelo de crescimento, fluxo de entranhamento e análise espectral. Tese de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE). UFPR.
- Freire, L. S., Chor, T., Dias, N. L., e Hasegawa, T. (2011a). Monitoramento com Veículo Aéreo não tripulado para a medição das concentrações troposféricas de O₃ e da altura da camada-limite atmosférica – Relatório Nº 2: Relatório de Progresso para a Oficina Nº 1. Relatório Técnico 42.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Freire, L. S. e Dias, N. L. (2013). Residual layer effects on the modeling of convective boundary layer growth rates with a slab model using FIFE data. *J. of Geophys. Res.*, 118:1–10.
- Freire, L. S., Dias, N. L., de Campos, C. P., e Almeida, J. C. (2011b). A importância da subsidência na modelagem do crescimento da camada limite convectiva. *Ciência e Natura, Micrometeorologia* (Edição Suplementar):19–21.
- Gobbi, E. F. (2011a). Projeto Interdisciplinar sobre Eutrofização de Águas no Reservatório Rio Verde/Petrobrás, Araucária, Paraná, Brasil UN-REPAR Contrato 1400.0035401.07.2. RELATÓRIO. Relatório Técnico 40.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Gobbi, E. F. (2011b). Projeto Interdisciplinar sobre Eutrofização de Águas no Reservatório Rio Verde/Petrobrás, Araucária, Paraná, Brasil UN-REPAR. Contrato 1400.0035401.07.2. TERMO ADITIVO. Relatório Técnico 38.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Gobbi, E. F., Dias, N. L., e Ramina, R. (1995). Cheia de projeto em pequenas bacias hidrográficas. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 243–251, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Gobbi, M., Nocko, H. R., Soares, A. P. K., e Waelder, A. S. (2008). Estudo de vazões afluentes ao reservatório do rio Verde. Relatório Técnico 24.1, Curitiba.

- Gobbi, M. F., Araújo, A., e Dias, N. L. (1999a). Relatório VII do Projeto Mesolit: Preparação do modelo de mesoescala para uso operacional. Relatório Técnico 003/99, SIMEPAR, Curitiba PR.
- Gobbi, M. F., Araújo, A. A., Dias, N. L., e Kan, A. (1998a). Relatório IV do Projeto Mesolit: Relatório final da fase 1. Relatório Técnico 006/97, Simepar, Curitiba.
- Gobbi, M. F. e Araújo, A. A. M. (1998). Relatório V do Projeto Mesolit: Simulações comparadas dos efeitos do desmatamento na região do lago de Itaipu. Relatório Técnico 014/98, Simepar, Curitiba.
- Gobbi, M. F., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2006). Application of digital filtering for minimizing aliasing effects in the atmospheric turbulent surface layer spectra. *Water Resour. Res.*, 42:W03405.
- Gobbi, M. F., Chamecki, M., Junior, D. V., Pisnitchenko, I. A., e Dias, N. L. (2002). Implementação de um Modelo de Mesoescala para a Região Sul do Brasil. Em *XII Congresso Brasileiro de Meteorologia, Foz do Iguaçu*.
- Gobbi, M. F., de Araújo, A. A. M., e Dias, N. L. (1999b). Investigação qualitativa sobre a influência do reservatório de Itaipu na umidade do ar utilizando modelagem atmosférica. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 85, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Gobbi, M. F., Dias, N. L., e Araújo, A. A. (1998b). Aplicação do esquema de transferência solo-vegetação-atmosfera do modelo ARPS com dados medidos sobre uma cultura de soja em Sta Theresinha do Itaipu, PR. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Gonçalves, J. E., Malheiros, A. L., Nascimento, E. L., Maggiotto, S. R., e Dias, N. L. (2006). Veículo aéreo não tripulado para perfilamento atmosférico em alta resolução. Em *XIV Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Florianópolis. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Greenberg, M. D. (1978). *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, London.
- Greenberg, M. D. (1998). *Advanced engineering mathematics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2^a edição.
- Guetter, A. K., Cayan, D. R., e Dias, N. L. (1997). Hydroclimatological patterns of streamflow and soil water availability in Southern Brazil. Em *Preprint Volume, 13th Conference on Hydrology*, página 244, Long Beach. American Meteorological Society.
- Hasebe, M., Hino, M., e Hoshi, K. (1989). Flood forecasting by the filter separation AR method and comparison with modeling efficiencies by some rainfall-runoff models. *Journal of Hydrology*, 110(1-2):107–136.
- Hill, R. J. (1978). Models of the scalar spectrum for turbulent advection. *J. of Fluid Mech.*, 88:541–562.
- Hino, M. (1986). Improvements in the inverse estimation method of effective rainfall from runoff. *Journal of Hydrology*, 83(1-2):137–147.

- Hino, M. e Hasebe, M. (1981). Analysis Of Hydrologic Characteristics From Runoff Data – A Hydrologic Inverse Problem. *Journal of Hydrology*, 49(3-4):287–313.
- Hino, M. e Hasebe, M. (1984). Identification and prediction of nonlinear hydrologic systems by the filter-separation autoregressive (AR) method: Extension to hourly hydrologic data. *Journal of Hydrology*, 68(1-4):181–210.
- Hino, M. e Hasebe, M. (1986). Separation of a storm hydrograph into runoff components by both filter-separation AR method and environmental isotope tracers. *Journal of Hydrology*, 85(3-4):251–264.
- Hoeltgebraum, L. E. B., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2013a). “IX Relatório de Acompanhamento” — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte — AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba — BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 53.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Hoeltgebraum, L. E. B., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2013b). “VIII Relatório de Acompanhamento” — Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno das Obras Viárias Integrantes do Programa de Recuperação Ambiental e Ampliação da Capacidade da Rede Integrada de Transporte — AFD e do Programa Integrado de Desenvolvimento Social e Urbano do Município de Curitiba — BID PRÓ-CIDADES. Relatório Técnico 52.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Hong, J., Dias, N. L., e Leclerc, M. (2008). Surface-layer scaling for nocturnal turbulence with an evolving low-level jet. Em *28th Conference on Agric For Meteorol*, Orlando, FL. American Meteorological Society.
- Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacities of reservoirs. *Trans. ASCE*, 116:776–808.
- Junior, D. V. e Dias, N. L. (2013). Método empírico para determinação de outliers em séries de fluxos de dados micrometeorológicos pós-processados. Em *Anais, VIII Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, número WBM13_29_209, Santa Maria, RS.
- Kan, A. (2005). *Estimativa de evapotranspiração real com base na análise de recessão dos hidrogramas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
- Kan, A. e Dias, N. L. (1999a). Estimativa da evapotranspiração em bacia hidrográfica com análise não-linear de recessões. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 86, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Kan, A. e Dias, N. L. (1999b). Evaporação, evapotranspiração e evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 4(3):29–38.
- Kan, A. e Dias, N. L. (2005). Evaporação em lago e evapotranspiração no reservatório de Foz do Areia: 1982-2004. Relatório Técnico 13.1, Lemma – UFPR/SIMEPAR/IA-PAR, Curitiba.

- Kan, A., Dias, N. L., Grodzki, L., e Maggiotto, S. R. (2007). Comparação entre a evapotranspiração estimada pelo método do balanço hídrico sazonal e medição feita na bacia do Rio Verde, região do reservatório de Furnas em Minas Gerais. Em *Anais, CD-ROM*, número 583. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Kan, A., Dias, N. L., e Mattos, A. Z. (2000). Estimativas do vento para um tempo de recorrência de 250 anos. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Kan, A., Dias, N. L., e Prevedello, C. L. (2006). Análise qualitativa de recessões de um hidrograma usando equação de Boussinesq. Em *Anais, I Simpósio de Recursos Hídricos Sul-Sudeste*, número 148. Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Kan, A., Dias, N. L., e Rocha, L. S. (1998). Evaporação, evapotranspiração e evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia. Relatório Técnico 0012/98, SIMEPAR, Curitiba.
- Kelman, J., Costa, J. P., Damázio, J. M., e Dias, N. L. (1985). Geração Multivariada de Precipitações Extremas. Em *VI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, São Paulo*, São Paulo. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Kelman, J., Costa, J. P., Damázio, J. M., Dias, N. L., e Albuquerque, F. C. (1987). Métodos de Cálculo de Cheia de Projeto de Vertedores. Em *IX Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE)*, Belo Horizonte, Belo Horizonte.
- Kim, I. S. e Dias, N. L. (2003). Variabilidade e previsão climática de vazões na margem esquerda da bacia do Alto Paraná (Brasil). *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8(2):173–186.
- Kim, I. S., Dias, N. L., Guetter, A., e Sá, L. D. A. (1998a). Um método de previsão climática de vazão nos rios Iguaçu, Paraná e Paraguai. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Kim, I. S., Dias, N. L., e Pittigliani, M. (1998b). Aplicação do MOS para previsão de temperatura mínima até 72 horas no estado do Paraná. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia e VIII Congresso Latino-americano e Ibérico de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lamport, L. (1994). *LaTeX – A Document Preparation System*. Addison-Wesley, second^a edição. Updated for $\text{\LaTeX} 2_{\varepsilon}$.
- Leite, E. A., Dias, N. L., e Rotunno Filho, O. C. (2006). The effect of precipitation forecasts and monitoring on hourly hydrological statistical prediction models. Em *Anais, 8th International Conference on Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography*.
- Lin, J. T. (1972). Velocity spectrum of locally isotropic turbulence in the inertial and dissipation ranges. *Physics of Fluids*, 15:205–207.

Maggiotto, S. R., Dias, N. L., Grodzki, L., Vissotto, S., Prevedello, C. L., Nascimento,

E. L., e Souza, M. F. (2007). Diretrizes para redes automáticas e telemétricas de superfície. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 12(4):225–240.

Maggiotto, S. R., Grodzki, L., Wagner-Riddle, C., Leclerc, M. Y., Dias, N. L., Caramori, P. H., Oliveira, D., e Sanchez, S. D. (2003). Comparative studies between a pasture and a rubber-tree plantation in Paraná – energy balance, radiation and CO₂ flux. Em *Proceedings, XIII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia (XIII Brazilian Congress of Agrometeorology)*, Santa Maria, Brazil. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia.

Malheiros, A. L. (2004). Avaliação de modelos para a altura da camada-limite atmosférica urbana e seus efeitos sobre a qualidade do ar. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.

Malheiros, A. L. (2007). QUAVEMET-1: I Relatório de Acompanhamento. Relatório Técnico 17.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

Malheiros, A. L. (2014). *Desenvolvimento de um VANT (veículo aéreo não tripulado) para monitoramento da camada-limite atmosférica e análise do modelo integral para cálculo de fluxo superficial de calor sensível*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (UFPR/PPGMNE).

Malheiros, A. L. e Dias, N. L. (2004). Determinação prática da altura da camada-limite atmosférica para aplicação em modelos de dispersão de poluentes. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia.

Malheiros, A. L. e Dias, N. L. (2008). Relatório Final – Etapa I. Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 23.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

Malheiros, A. L., Dias, N. L., e Conselman, A. (2005). O efeito da promediação sobre a pressão de vapor média medida em estações meteorológicas automáticas. Em *CD-ROM, XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*.

Malheiros, A. L., Dias, N. L., Gonçalves, J. E., Hasegawa, T., Vissotto, S., e Wolf, R. (2009). Experiências no uso de veículos aéreos não-tripulados para medições de perfis na camada-limite atmosférica. Em *Anais, XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*.

Malheiros, A. L., Jr., D. V., Bernardes, M., e Vissotto, S. (2007a). QUAVEMET-2: II Relatório de Acompanhamento. Relatório Técnico 18.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

Malheiros, A. L., Jr., D. V., Bernardes, M., Vissotto, S., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (2007b). QUAVEMET-3: III Relatório de Acompanhamento. Relatório Técnico 19.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

Malheiros, A. L., Wolf, R., e Dias, N. L. (2008). VI Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 25.1, Lemma/UFPR, Curitiba.

- Mandelbrot, B. e Wallis, J. R. (1969a). Some long-run properties of geophysical records. *Water Resour. Res.*, 5(2):321–340.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4(5):909–918.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969b). Computer Experiments With Fractional Gaussian Noises: Part 1, Averages and Variances. *Water Resources Research*, 5(1):228–241.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969c). Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises: Part 2, Rescaled Ranges and Spectra. *Water Resources Research*, 5(1):242–259.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969d). Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises: Part 3, Mathematical Appendix. *Water Resources Research*, 5(1):260–267.
- Mandelbrot, B. B. e Wallis, J. R. (1969e). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, 5(5):967–988.
- Marcellini, S. S. e Dias, N. L. (1997). Implementação do sistema de controle de qualidade objetivo para os dados hidrometeorológicos do Estado do Paraná – descrição e testes preliminares. Relatório Técnico 001/97, SIMEPAR, Curitiba.
- Meriam, J. L. (1979a). *Dinâmica*. Livros Técnicos e Científicos.
- Meriam, J. L. (1979b). *Estática*. Livros Técnicos e Científicos.
- Morton, F. I. (1983). Operational Estimates of Lake Evaporation. *J. of Hydrol.*, 66:77–100.
- Nocko, H. R. e de Lourdes da Nóbrega Cunha, C. (2009). Relatório Nº 04: 3ºseminário de integração – Relatórios parciais de trabalho. Relatório Técnico 33.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Nocko, H. R. e de Lourdes da Nóbrega Cunha, C. (2010). Relatório Nº 05: 4ºseminário de integração – Relatórios parciais de trabalho. Relatório Técnico 36.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Noilhan, J. e Planton, S. (1989). A simple parameterization of land surface processes for meteorological models. *Monthly Weather Review*, 117:536–549.
- Okawa, C. M. P. (1998). Medição contínua do fluxo de calor sensível para a atmosfera. Tese de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- Okawa, C. M. P. e Dias, N. L. (1998). Medição do fluxo de calor sensível com anemômetro sônico e de hélice. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Okawa, C. M. P., Dias, N. L., Grodzki, L., e Prevedello, C. L. (1999). Resultados de um experimento micrometeorológico em uma cultura de soja. Em *CD-ROM, XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, número 89, Belo Horizonte. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

- Okawa, C. M. P., Nazareno, P., Dias, N. L., e Kan, A. (1998). Medições de fluxos de energia e grandezas médias no lago de Itaipu, PR e Paraguai. Em *CD-ROM, X Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Brasília. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Oliveira, E. C. e Maiorino, J. E. (1997). *Introdução aos métodos da matemática aplicada*. Editora da Unicamp.
- Pao, Y. H. (1965). Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers. *The Physics of Fluids*, 8:1063–1075.
- Penman, H. (1948). Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *Proceedings of the Royal Society, London, A*(193):120–146.
- Pinginta, N., Leclerc, M., Hong, J., Zhang, G., Dias, N. L., e Sengthong, C. (2008). Environmental Controls on the CO₂ Exchange in a Peanut Field. Em *AMS 28th Conference on Agricultural and Forest Meteorology*, Florida. American Meteorological Society.
- Pittigliani, M. e Dias, N. L. (2000). Análise da distribuição temporal de dados horários de temperatura em Curitiba. Em *CD-ROM, XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Prevedello, C. L. e Loyola, J. M. T. (2002). Modelo para Estimar as Propriedades Hidráulicas de Meios Porosos a Partir da Curva Granulométrica. Em *Anais do XII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica*, volume 1, páginas 451–456, São Paulo. Associação Brasileira de Mecânica dos Solos.
- Prevedello, C. L., Maggiotto, S. R., Loyola, J. M. T., Dias, N. L., e Neto, G. B. (2007). Balanço de água por aquisição automática de dados em cultura de trigo (*Triticum aestivum L.*). *Revista Brasileira de Ciência do Solo*, 31:1–8.
- Reis, R. J. (1996). Estudo comparativo de modelos climatológicos de estimativa de evaporação no lago Serra Azul, MG. Tese de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, MG.
- Reis, R. J. e Dias, N. L. (1998). Multi-season lake evaporation: energy-budget estimates and CRLE model assessment. *J. of Hydrol.*, 208:135–147.
- Reis, R. J., Dias, N. L., e Baptista, M. B. (1997). Estimativa da evaporação do lago Serra Azul pelo método do balanço de energia-razão de Bowen. Em *CD-ROM, Trabalho 88, XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Vitória ES. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Reis, R. J., Dias, N. L., e Neto, G. M. C. (1995). Previsões do modelo de evaporação CRLE versus grandezas medidas no reservatório de Serra Azul-MG. Em *XI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Recife*, volume 4, páginas 183–191, Recife. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Reynolds, O. (1900). On the extent and action of the heating surface of steam boilers, Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Vol XIV, session 1874-5. Em *Papers on Mechanical and Physical Subjects*, páginas 81–85. Cambridge University Press.

- Rodrigues, S. (2010). Estudo do comportamento das soluções de Equações diferenciais parciais parabólicas usando o método das características. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Salesky, S. T., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2012). Estimating the random error in eddy-covariance fluxes and other turbulence statistics: the filtering method. *Boundary-Layer Meteorol.*, 144:113–135.
- Sato, F., Beneti, C. A. A., e Dias, N. L. (1998). Decodificação e visualização dos dados METAR. Relatório Técnico 013/98, SIMEPAR.
- Smaha, N. (2003a). DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE AVALIAÇÃO DAS PREVISÕES DO TEMPO DO MODELO ARPS. Relatório de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba.
- Smaha, N. (2003b). Estudos e implementação de um esquema de interações superfície-atmosfera e seus impactos em um modelo de mesoescala. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- Smaha, N. e Gobbi, M. F. (2003a). Avaliação do modelo de previsão de tempo ARPS - Advanced Regional Prediction System - no Estado do Paraná. Em *XIII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, volume 2, páginas 911–912, Santa Maria, RS, Brasil. Universidade Federal de Santa Maria, UNIFRA, SBA, UFSM.
- Smaha, N. e Gobbi, M. F. (2003b). Implementação e estudos de um modelo de interações superfície-atmosfera e seus impactos no modelo ARPS - Advanced Regional Prediction System. Em *IV Semana do PPGMNE*, volume 1, página 11, Curitiba, PR, Brasil. Curso de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR.
- Tenembbaum, R. A. (1997). *Dinâmica*. Editora UFRJ.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Vissotto, D. (2003). Modelagem numérica para interações superfície-atmosfera no estado do Paraná. Tese de mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- Vissotto, Jr, D., Dias, N. L., e Cancelli, D. M. (2009). Uma avaliação sistemática das correções do método de covariâncias turbulentas atenuadas para a medição de evaporação em lagos. Em *Anais, CD-ROM XVIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Vissotto Jr., D. (2004a). Pacote para a elaboração de documentos, dissertações e teses utilizando a classe ABNTeX adaptada para as normas da Universidade Federal do Paraná. Nota de Pesquisa 6.1, Lemma, Curitiba.
- Vissotto Jr., D. (2004b). Propriedades hídricas dos solos nas localidades das estações telemétricas do SIMEPAR para o uso do método Green-Ampt. Nota de Pesquisa 7.1, Lemma, Curitiba.
- Vissotto Jr., D. (2004c). Propriedades hídricas dos solos nas localidades das estações telemétricas do SIMEPAR para o uso do método Green-Ampt. Nota de Pesquisa 8.1, Lemma, Curitiba.

- Vissotto Jr., D., Armani, F., e Dias, N. L. (2011). VI Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 41.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Vissotto Jr., D., Armani, F., Hoeltgebaum, L. E., e Dias, N. L. (2012a). VII Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 45.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Vissotto Jr., D., Armani, F. A. S., e Dias, N. L. (2011). V Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 38.2, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Vissotto Jr., D., Cancelli, D. M., Dias, N. L., e Duarte, H. F. (2004). Estimativa de umidade do solo para o Estado do Paraná com uso de um modelo de interação superfície-atmosfera. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Vissotto Jr., D., Cancelli, D. M., Dias, N. L., Prevedello, C. L., e Grodzki, L. (2004). Estimativa de umidade do solo para o Estado do Paraná com uso de um modelo de interação superfície-atmosfera. Em *CD-ROM, XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Vissotto Jr., D., Dias, N. L., Crivellaro, B. L., Armani, F. A. S., e Chor, T. (2013). Sistema autônomo de energia para monitoramento micrometeorológico. Em *Anais, VIII Workshop Brasileiro de Micrometeorologia*, número WBM13_29_39, Santa Maria, RS.
- Vissotto Jr., D., Dias, N. L., Duarte, H. F., e Cancelli, D. M. (2004). Análise do fechamento do balanço de energia no site experimental de Ponta Grossa PR. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Vissotto Jr., D., Gobbi, M. F., e Dias, N. L. (2003). Revisão bibliográfica, metodologia e dados para modelação de mesoescala sobre o reservatório de Furnas. Relatório de Pesquisa 5.1, Lemma, Curitiba.
- Vissotto Jr., D., Hoeltgebaum, L. E., e Dias, N. L. (2012b). VIII Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 49.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Vissotto Jr., D. e Kim, I. S. (2002a). “MODEL OUTPUT STATISTICS” (MOS): DESCRIÇÃO DO MODELO, AVALIAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO OPERACIONAL. Relatório de Pesquisa 1.1, Lemma, Curitiba.
- Vissotto Jr., D. e Kim, I. S. (2002b). “PERFECT PROGRAM” (PP): DESCRIÇÃO DO MODELO, AVALIAÇÕES E IMPLEMENTAÇÃO OPERACIONAL. Relatório de Pesquisa 2.1, Lemma, Curitiba.
- Webb, E. K. (1960). On estimating evaporation with fluctuating Bowen ratio. *J of Geophys Res*, 65:3415–3417.
- Webb, E. K. (1964). Further Note on Evaporation with Fluctuating Bowen Ratio. *J of Geophys Res*, 69(12):2649–2650.
- Welty, J. R., Wicks, C. E., e Wilson, R. E. (1984). *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.

- Werth, D., Kurzeja, R., Dias, N. L., Zhang, G., Duarte, H., Fischer, M., Parker, M., e Leclerc, M. Y. (2011). The Simulation of the Southern Great Plains Nocturnal Boundary Layer and the Low-Level Jet with a High-Resolution Meso-Scale Atmospheric Model. In Press. *J. Appl. Meteorol. and Climatol.*, 50:1497–1513.
- Wolf, R. e Dias, N. L. (2009). III Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 34.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Wolf, R. e Dias, N. L. (2010). IV Relatório de Qualidade do Ar PM-REPAR. Relatório Técnico 35.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Wolf, R., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009a). IX Relatório de Acompanhamento – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 29.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Wolf, R., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009b). Relatório Final – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 31.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Wolf, R., Vissoto, S., Dias, N. L., e Malheiros, A. L. (2009c). Relatório Complementar – Acompanhamento e Monitoramento da Qualidade do Ar no Entorno da Rodovia BR-116 – Avenida Metropolitana (Linha Verde). Relatório Técnico 32.1, Lemma/UFPR, Curitiba.
- Wyngaard, J. C., Coté, O. R., e Izumi, Y. (1971). Local Free Convection, Similarity, and the Budgets of Shear Stress and Heat Flux. *J. Atmos. Sci.*, 28:1171–1182.
- Xue, M., Droege, K. K., e Wong, V. (2000). The Advanced Regional Prediction System (ARPS) - A multi-scale nonhydrostatic atmospheric simulation and prediction model. Part I: Model dynamics and verification. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 75:161–193.
- Xue, M., Droege, K. K., Wong, V., Shapiro, A., e Brewster, K. (1995). Advanced Regional Prediction System ARPS version 4.0 user's guide. Relatório técnico, Center for Analysis and Prediction of Storms (CAPS).
- Xue, M., Droege, K. K., Wong, V., Shapiro, A., Brewster, K., Carr, F., Weber, D., Liu, Y., e Wang, D. (2001). The Advanced Regional Prediction System (ARPS) - A multi-scale nonhydrostatic atmospheric simulation and prediction tool. Part II: Model physics and applications. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 76:143–165.
- Xue, M., Wang, D., Gao, J., Brewster, K., e Droege, K. K. (2003). The Advanced Regional Prediction System (ARPS), storm-scale numerical weather prediction and data assimilation. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 82:139–170.
- Zhang, G., Leclerc, M., Karipo, A., Hong, J., Dias, N. L., Lewin, K., e F., N. (2008). Wind and turbulence properties within and above a slash pine forest in Florida and the effect of atmospheric stability. Em *AMS 28th Conference on Agricultural and Forest Meteorology*, Florida.

Apêndice A

Parte da Apostila de Mecânica dos Fluidos e Fenômenos de Transporte (UFRJ e UFPR)

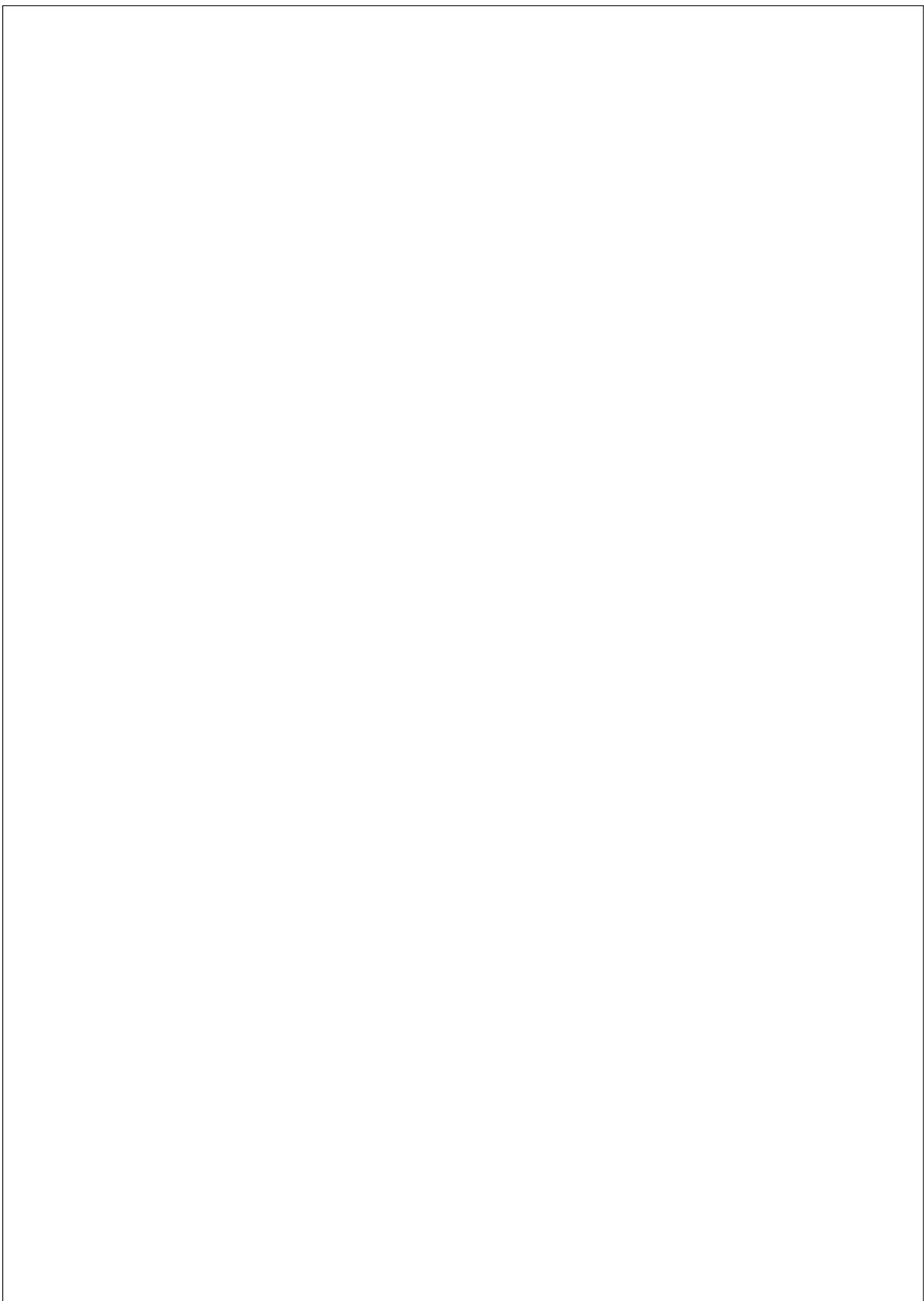
INTRODUÇÃO
À
MECÂNICA DOS FLUIDOS
E AOS
FENÔMENOS DE TRANSPORTE

Maurício Gobbi, Ph.D.
Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná

Nelson Luís Dias, Ph.D.
Universidade Federal do Paraná

Flavio Mascarenhas, D.Sc.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Enise Valentine, D.Sc.
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Prefácio

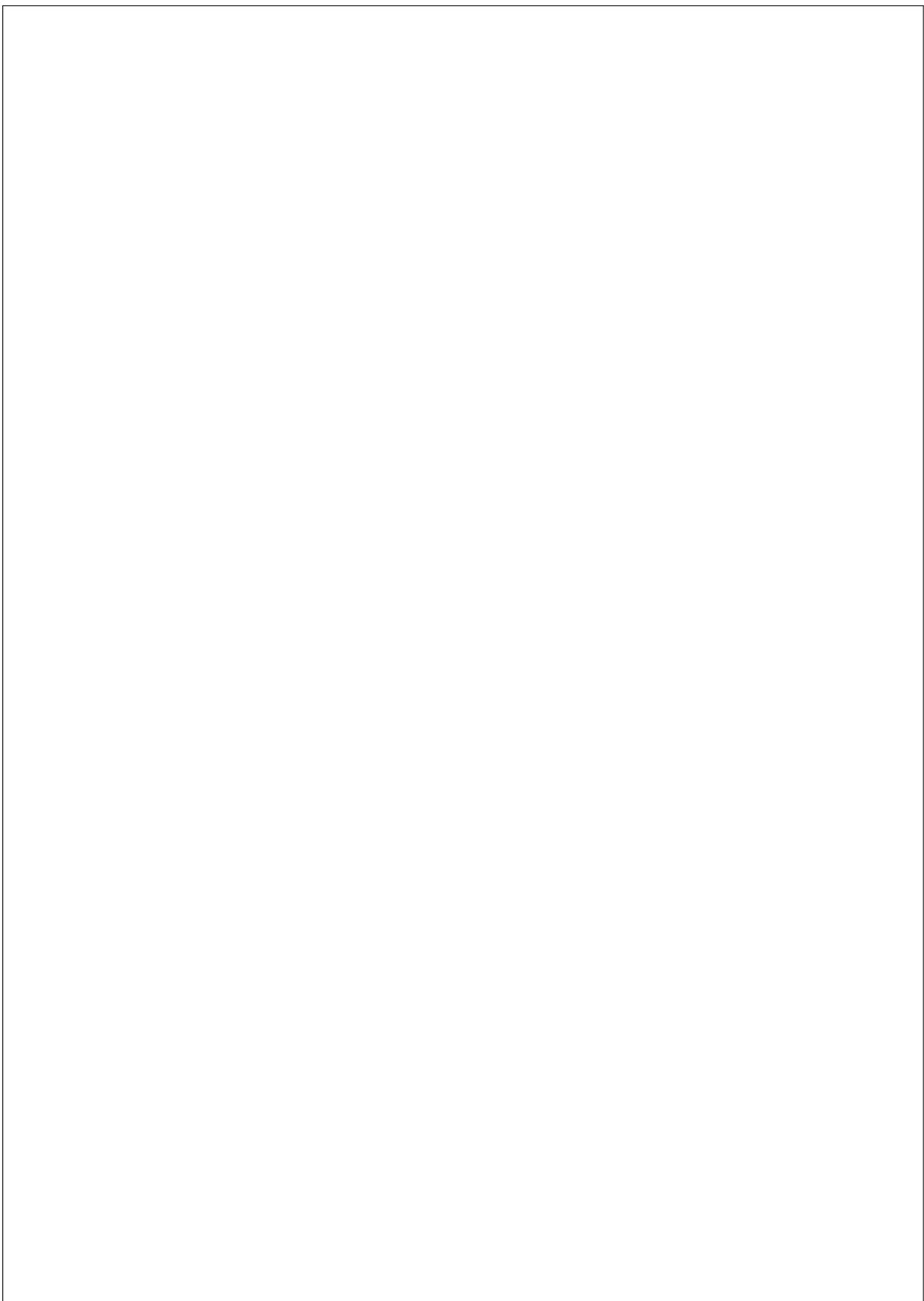
A área de *Mecânica dos Fluidos* é uma das mais importantes e difíceis na formação de cientistas e engenheiros.

A área de pesquisa e ensino hoje conhecida como *Fenômenos de Transporte* formou-se aos poucos, ao longo do século XX, à medida em que se compreendiam as analogias existentes entre os processos de transporte de quantidade de movimento, energia, e massa, em meios contínuos. A Mecânica dos Fluidos forma a grande base de conhecimento para a compreensão dos Fenômenos de Transporte. Esta visão unificada instalou-se inicialmente nos cursos de engenharia química e mecânica, mas está cada vez mais presente em outros ramos das áreas tecnológicas e científicas.

Este livro nasceu da necessidade de se dotar disciplinas de Mecânica dos Fluidos e/ou Fenômenos de Transporte do curso de engenharia de várias unidades de ensino de terceiro grau do Brasil, de um texto unificado introdutório, rigoroso, e corretamente dimensionado para um curso que compreende um único semestre da disciplina com um mínimo de quatro horas/aula teóricas semanais.

O texto contém os fundamentos matemáticos e físicos dos processos e as abordagens para cada tipo de propriedade transportada foram feitas, na medida do possível, em conjunto, e não em partes distintas como é o caso de vários livros texto sobre o assunto.

Os autores.



Conteúdo

Prefácio	iii
Conteúdo	v
1 Introdução	1
1.1 Apresentação	1
1.2 O meio contínuo	2
1.3 Fluidos	3
1.4 Princípios fundamentais da física	4
1.5 Sistema de unidades	6
1.6 Revisão matemática	7
1.6.1 Escalares, vetores, e tensores	7
1.6.2 Produtos escalares e vetoriais, contrações entre tensores	8
1.6.3 Integral de linha, de superfície, e de volume	10
1.6.4 Campos escalares e vetoriais	13
1.6.5 Teoremas de Gauss, Stokes, e Green	15
1.6.6 A série de Taylor	16
2 Elementos de Teoria Cinética e Termodinâmica Clássica	19
2.1 O potencial de Lennard-Jones	19
2.2 Energia de um sistema de partículas	21
2.3 Temperatura	24
2.4 A primeira lei da termodinâmica	24
2.5 A energia interna é função da temperatura e do volume	26
2.6 A equação de estado de um gás ideal	28
2.7 Equações de estado	31
2.8 Problemas propostos	32

3 Descrição do Meio Contínuo	35
3.1 Introdução	35
3.2 A hipótese do contínuo	36
3.3 Difusão e advecção	38
3.4 Descrições de Euler e de Lagrange	39
3.4.1 Linha e tubo de corrente	40
3.5 Propriedades intensivas e extensivas	42
3.6 Fluxo e fluxo específico advectivo	44
3.7 Problemas propostos	46
4 Forças e Tensões num Fluido - Hidrostática	51
4.1 Forças de corpo	51
4.2 Forças de superfície	51
4.2.1 O tensor de tensões	53
4.2.2 Pressão	57
4.2.3 Tensão superficial	58
4.3 Hidrostática	59
4.4 Problemas propostos	67
5 Movimento Relativo Em Um Fluido: Cinemática	77
5.1 Taxa de deformação de um fluido	77
5.1.1 Deformação linear	77
5.1.2 Deformação de cisalhamento	79
5.2 Rotação de um fluido: vorticidade	82
5.2.1 Linha e tubo de vorticidade	82
5.3 Movimento relativo	83
5.4 Circulação	85
5.5 Problemas propostos	88
6 Fluxos Difusivos: Equações Constitutivas	91
6.1 Transferência de quantidade de movimento	91
6.1.1 Fluidos newtonianos e não-newtonianos	99
6.1.2 A viscosidade como função da temperatura	99
6.2 Transferência de calor	100
6.2.1 Lei de Fourier para a condução de calor	100
6.3 Transferência de massa	102
6.3.1 Lei de Fick para difusão molecular	102
6.4 Fluxos difusivos e advectivos combinados	105
6.5 A segunda lei da termodinâmica	106
6.6 Problemas propostos	107

7 Princípios de Conservação: Equações Integrais	109
7.1 Princípios básicos de conservação	109
7.2 Teorema do transporte de Reynolds	112
7.3 Balanço de massa	116
7.4 Balanço de massa de um soluto	124
7.5 Balanço de quantidade de movimento	128
7.6 Balanço de energia	137
7.7 A equação de Bernoulli	143
7.8 A equação de Bernoulli e o balanço de energia	147
7.9 Problemas propostos	149
8 Princípios de Conservação: Equações Diferenciais	159
8.1 Introdução	159
8.2 Fluxos difusivos e equações integrais	160
8.3 A derivada material de uma propriedade intensiva	161
8.4 Conservação da massa	162
8.5 Conservação da massa de um soluto	163
8.6 Conservação da quantidade de movimento	165
8.6.1 Equação de Navier-Stokes	166
8.7 Conservação da energia	168
8.7.1 Energia mecânica e energia térmica	168
8.8 Aspectos das equações de conservação	170
8.9 Condições de contorno	171
8.9.1 Superfície sólida	171
8.9.2 Superfície livre de um líquido	173
8.9.3 Interface entre dois fluidos	174
8.9.4 Condições de entrada e saída	175
8.10 Equações em coordenadas curvilíneas	175
8.10.1 Coordenadas cilíndricas	176
8.10.2 Coordenadas esféricas	177
8.11 Soluções das equações de conservação	180
8.11.1 Escoamento permanente entre placas paralelas	180
8.11.2 Fluido em rotação uniforme	182
8.11.3 Difusão pura em material semi-infinito	184
8.11.4 Escoamento transiente em fluido semi-infinito - primeiro problema de Stokes	186
8.11.5 Escoamento oscilatório em fluido semi-infinito - segundo problema de Stokes	188
8.11.6 Escoamento laminar em plano inclinado	189
8.11.7 Condução de calor	191
8.12 Problemas propostos	192

CAPÍTULO 7

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO: EQUAÇÕES INTEGRAIS

Neste capítulo são apresentados formalmente três princípios básicos da física: conservação da massa, conservação da quantidade de movimento, e conservação da energia. Essas leis serão aplicadas a problemas de escoamento de fluidos. Embora as leis da física sejam aplicadas a sistemas com identidade fixa, é mais interessante que o comportamento *local* (sem acompanhar o sistema) das grandezas intensivas seja conhecido. Será estabelecido um conjunto de equações integrais de conservação das propriedades físicas em um volume (o *volume de controle*), onde a variação de cada propriedade física (massa específica, velocidade, energia, e concentração de um soluto) no volume se equilibrará com fluxos dessas propriedades na superfície (a *superfície de controle*) no contorno deste volume.

7.1 Princípios básicos de conservação

No capítulo 3 foram apresentadas as relações integrais entre as grandezas extensivas e intensivas (ver tabela 3.1). As equações integrais sobre o volume do sistema relacionando massa com massa específica, quantidade de movimento com velocidade, energia com energia específica, e massa de soluto com concentração do mesmo, são:

$$M = \int_{V_s} \rho dV, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{P} = \int_{V_s} \mathbf{v} \rho dV, \quad (7.2)$$

$$E = \int_{V_s} e \rho dV, \quad (7.3)$$

$$M_A = \int_{V_s} C_A \rho dV, \quad (7.4)$$

respectivamente.

Ora, sabe-se que a massa de um sistema, por definição, deve permanecer constante. Do mesmo modo, a massa de um soluto diluído no sistema permanecerá constante a menos do fluxo difusivo de massa através da superfície do sistema. Quando houver um fluxo difusivo de massa através da superfície, este deverá ser igual em módulo à taxa de variação de massa do soluto dentro do sistema. O fluxo difusivo de massa total através da superfície do sistema (S_s) pode ser calculado a partir da integração do vetor fluxo específico de massa \mathbf{j} sobre S_s .

$$\dot{J} = - \int_{S_s} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.5)$$

Observe que o sinal negativo indica que o fluxo *para dentro* do sistema seja considerado positivo, já que o vetor \mathbf{n} aponta para fora, por convenção.

A quantidade de movimento do sistema, segundo à segunda lei de Newton, variará em função da força resultante $\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c$ (força de corpo mais força de superfície) sobre ele, onde:

$$\mathbf{F}_c = \int_{V_s} \rho \mathbf{g} dV, \quad (7.6)$$

e

$$\mathbf{F}_s = \int_{S_s} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.7)$$

A energia total do sistema variará em função do fluxo difusivo de calor \dot{Q} recebido pelo sistema e o trabalho por unidade de tempo \dot{W} realizado sobre o sistema (primeira lei da termodinâmica). O fluxo difusivo de calor \dot{Q} é calculado a partir do vetor fluxo específico de calor \mathbf{q} integrado sobre toda a superfície do sistema:

$$\dot{Q} = - \int_{S_s} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.8)$$

Mais uma vez, fluxo de calor para dentro do sistema é positivo, daí o sinal negativo. Finalmente, o trabalho realizado pelas forças de superfície sobre o sistema por unidade de tempo é:

$$\dot{W} = \int_{S_s} [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}] dS, \quad (7.9)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade em cada ponto da superfície do sistema. Note que, por \mathbf{T} ser um tensor, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ é um vetor, e não um escalar. Além disso $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ é uma tensão (força por unidade de área) e $v dS$ representa a taxa de variação do volume de um elemento de fluido na fronteira do sistema, de modo que (7.9) é uma generalização da equação (2.26) para o cálculo do trabalho realizado sobre um sistema. O trabalho realizado pelas forças de corpo não precisa ser incluído, uma vez que ele está intrinsecamente contabilizado em termos de energia potencial em (7.3).

A lei da conservação da massa diz que a massa de um sistema não muda com o tempo, e se escreve:

$$0 = \frac{DM}{Dt}, \quad (7.10)$$

onde o operador $\frac{D}{Dt}$, chamado de derivada material ou total, é a taxa de variação temporal da grandeza em questão associada a um *sistema*. Ou seja, $\frac{D}{Dt}$ indica a variação temporal de uma propriedade *extensiva* quando se está *seguindo* ou se movendo com o fluido.

A lei de conservação de massa de um soluto A diz que a variação de massa de soluto em um sistema deve ser igual ao fluxo difusivo de massa do soluto, \dot{J} , através das fronteiras do sistema:

$$\dot{J} = \frac{DM_A}{Dt}. \quad (7.11)$$

A lei da conservação da quantidade de movimento diz que a quantidade de movimento de um sistema muda com uma taxa igual ao valor da resultante das forças de corpo \mathbf{F}_c e de superfície \mathbf{F}_s atuando no sistema:

$$\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s = \frac{D\mathbf{P}}{Dt}. \quad (7.12)$$

A primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{DE}{Dt}, \quad (7.13)$$

ou seja, a taxa de variação da energia total do sistema $\frac{DE}{Dt}$ é igual à soma do fluxo de calor fornecido ao sistema através de sua superfície, \dot{Q} , e da taxa de trabalho realizada sobre o sistema, \dot{W} . Note que esta forma de enunciar a primeira lei é ligeiramente diferente da apresentada no capítulo 2, uma vez que pretende-se obter aqui uma equação instantânea. Aqui, como no capítulo 2, \dot{Q} é positivo quando calor é fornecido *ao* sistema, e \dot{W} é positivo quando trabalho é realizado *sobre* o sistema.

As relações (7.10)-(7.13) governam como um sistema com suas propriedades extensivas evoluem no tempo. Os lados esquerdos das equações atuam

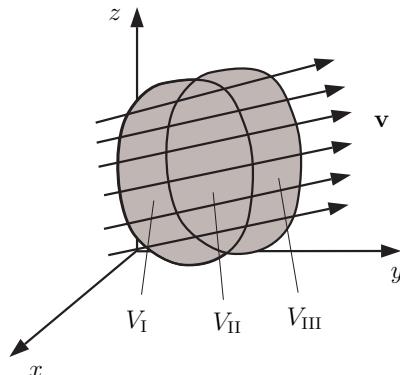


Figura 7.1: Sistema fluido entre dois instantes.

como forçantes e geralmente são conhecidos ou facilmente determináveis. Os lados direitos são as taxas de variação das propriedades extensivas do sistema. De modo geral, para uma propriedade N , tem-se $\frac{DN}{Dt}$. Como o sistema, por definição, é composto sempre pelas mesmas partículas, a quantidade $\frac{DN}{Dt}$ irá depender do campo de velocidades pois o sistema poderá ocupar posições diferentes à medida que o tempo passa. Na próxima seção a expressão para $\frac{DN}{Dt}$ em termos do campo de velocidades é deduzida.

7.2 Teorema do transporte de Reynolds

Seja $N(t)$ uma propriedade extensiva qualquer de um sistema no instante t . A taxa de variação da propriedade N é dada por:

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}. \quad (7.14)$$

A figura 7.1 ilustra o sistema em 2 instantes consecutivos t e $t + \Delta t$. Em t , o sistema ocupa um volume $V_s(t) = V_I + V_{II}$. Em $t + \Delta t$, o mesmo ocupa o volume $V_s(t + \Delta t) = V_{II} + V_{III}$. O volume ocupado pelo sistema no instante t será denominado *volume de controle*

$$V_c = V_s(t) = V_I + V_{II}. \quad (7.15)$$

O volume do sistema em $t + \Delta t$ está relacionado com V_c por:

$$V_s(t + \Delta t) = V_{\text{II}} + V_{\text{III}} = V_c + V_{\text{III}} - V_{\text{I}}. \quad (7.16)$$

Usando a relação geral entre grandezas extensivas N e intensivas η ,

$$N = \int_{V_s} \eta \rho dV, \quad (7.17)$$

vem:

$$N(t) = \int_{V_s(t)} \eta \rho dV = \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t, \quad (7.18)$$

onde o sub-índice no colchete indica o tempo em que a quantidade dentro dos colchetes são calculadas. Para calcular $N(t + \Delta t)$, usa-se (7.15) e (7.16):

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) &= \int_{V_s(t+\Delta t)} \eta \rho dV \\ &= \left[\int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{V_{\text{III}}} \eta \rho dV - \int_{V_{\text{I}}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Substituindo (7.18) e (7.19) em (7.14) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{V_{\text{III}}} \eta \rho dV - \int_{V_{\text{I}}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Rearranjando a expressão acima tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{V_{\text{III}}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[\int_{V_{\text{III}}} \eta \rho dV \right]_t \right\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

O primeiro limite da equação (7.21) é simplesmente igual à derivada parcial da quantidade entre colchetes:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[\int_{V_c} \eta \rho dV \right]_t \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \eta \rho dV. \end{aligned} \quad (7.22)$$

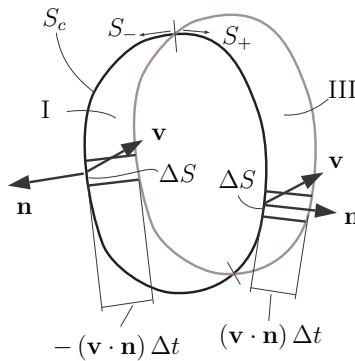


Figura 7.2: Elementos de integração nas regiões I e III correspondendo a um sistema nos instantes t e $t + \Delta t$.

A idéia é a de transformar as integrais nas regiões I e III em integrais no instante t na superfície S_c . Para se avaliar o segundo limite da equação (7.21), é preciso calcular separadamente as integrais pois as regiões de integração são diferentes. Considere as regiões I e III em um corte bi-dimensional (para facilitar a visualização) como na figura 7.2. Observe que pode-se tomar como elementos de volume da região III prismas elementares cuja base está sobre a superfície do volume de controle (*superfície de controle*, S_c) e cujo topo encontra-se na superfície do sistema em $t + \Delta t$. O volume de cada prisma ΔV é o produto da área da base, ΔS , pela altura $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t$:

$$\Delta V = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S. \quad (7.23)$$

Como dentro do elemento o produto $\eta\rho$ pode ser considerado constante (pois o elemento é pequeno), a integral sobre o volume V_{III} na equação (7.21) fica:

$$\left[\int_{V_{III}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \int_{S_+} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.24)$$

onde S_+ é a parcela da superfície de controle que contribui para a superfície da região III.

Analogamente, pode-se calcular a integral sobre a região I usando como elementos de volume prismas cuja base está sobre S_c , e cujo topo está na

superfície do sistema em $t + \Delta t$. Desta vez o produto $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ deverá ter um sinal negativo, já que, por convenção, o vetor normal unitário \mathbf{n} está apontando para fora do prisma (o oposto do caso da integral na região III). O volume de cada elemento será:

$$\Delta V = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t \Delta S, \quad (7.25)$$

e a integral sobre V_I será:

$$\left[\int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\Delta t \int_{S_-} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.26)$$

onde S_- é a parcela da superfície de controle que contribui para a superfície da região I. Naturalmente, a superfície de controle total é:

$$S_c = S_+ \cup S_-. \quad (7.27)$$

Usando (7.24), (7.26), e (7.27) o segundo limite da equação (7.21) é portanto:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{V_{III}} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} - \left[\int_{V_I} \eta \rho dV \right]_{t+\Delta t} \right\} \\ &= \int_{S_c} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Levando (7.22) e (7.28) em (7.21) tem-se a seguinte expressão envolvendo apenas integrais na região ocupada por V_c :

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \eta \rho dV + \int_{S_c} \eta \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.29)$$

que é a expressão para se calcular a taxa de variação instantânea de uma propriedade extensiva N de um sistema que ocupa o volume V_c nesse instante.

A equação (7.29) é o Teorema do transporte de Reynolds, que é a equação integral de balanço da propriedade extensiva N para um volume de controle. Como a região V_c é arbitrária, em geral se escolhe uma que seja conveniente para o problema em questão, de forma a facilitar os cálculos das integrais envolvidas. Para um problema particular a idéia é a de se definir um volume de controle, e usar as leis da física (7.10)-(7.13) combinadas com a relação (7.29) substituindo-se N e η pelas propriedades extensivas em questão, e considerando que, instantaneamente, o sistema ocupa aquele volume de controle. Nas próximas seções, cada uma das leis (7.10)-(7.13) substituirá $\frac{DN}{Dt}$ na equação (7.29) para formar as equações integrais de conservação de massa, massa de um soluto, quantidade de movimento, e energia, para um volume de controle.

7.3 Balanço de massa

Conforme já foi discutido na seção 3.3, efeitos difusivos não alteram a massa total de um sistema, que permanece constante (equação (7.10)). A grandeza intensiva η associada à massa total de um sistema é simplesmente 1, de modo que reunindo (7.10) e (7.29) com $\eta = 1$, tem-se:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.30)$$

A equação (7.30) é chamada de balanço integral de massa, e diz que, em um dado instante, se há variação temporal de massa dentro de um volume de controle V_c , esta deve ser balanceada pelo fluxo de massa através da superfície de controle S_c .

Exemplo

A redução da seção transversal da tubulação circular da figura 7.3 é tal que o diâmetro reduz-se de D para $D/2$. O escoamento

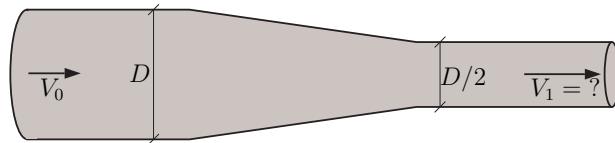


Figura 7.3: Transição numa tubulação circular.

de um fluido dá-se da esquerda para a direita e é permanente e uniformemente distribuído nas seções transversais antes e depois da transição. O fluido de massa específica ρ é incompressível. Conhecendo a velocidade V_0 antes da redução, calcule a velocidade V_1 depois da redução.

Solução

O volume de controle escolhido é formado pela própria tubulação e por uma seção transversal antes da transição (seção 0) e uma seção transversal depois da transição (seção 1). A equação de

conservação da massa (7.30) é a lei da conservação a ser usada. Como por hipótese o escoamento é permanente, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = 0. \quad (7.31)$$

O balanço de massa então se reduz ao fluxo de massa sobre toda a superfície de controle:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (7.32)$$

Como o fluido não penetra as paredes do tubo, então $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ em toda a superfície de controle, exceto nas seções 0 e 1, onde $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -V_0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_1$, respectivamente (note que estes valores são constantes nas seções transversais, e que na seção 0 o valor é negativo pelo fato de que os vetores \mathbf{v} e \mathbf{n} têm sentidos opostos). Além disso, ρ , sendo constante, pode sair da integral. chamando as superfícies das seções 0 e 1 de S_0 e S_1 , a equação fica então:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_0} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_1} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho V_0 \int_{S_0} dS + \rho V_1 \int_{S_1} dS \\ &= \rho \left[-V_0 \frac{\pi D^2}{4} + V_1 \frac{\pi (D/2)^2}{4} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.33)$$

(acima, se usou o fato de que $\int_{S_0} dS$ e $\int_{S_1} dS$ são as áreas das seções transversais das seções 0 e 1, respectivamente) donde:

$$V_1 = 4V_0. \quad (7.34)$$

■

Exemplo

Um extintor de incêndio como mostra a figura 7.4 tem volume V e contém CO₂ à temperatura ambiente T_0 . Abrindo-se a válvula de saída, cuja seção tem área a , o gás escapa com velocidade v_0 . Determine a taxa $\frac{\partial p}{\partial t}$ com que a pressão p cai no instante em que a válvula é aberta, supondo que a expansão do gás através da válvula é isotérmica.

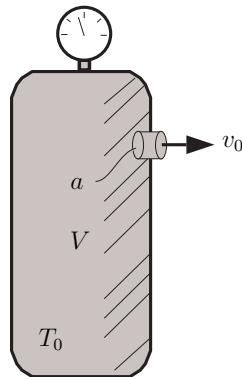


Figura 7.4: Problema do extintor de incêndio.

Solução

O volume de controle escolhido aqui é o próprio extintor. Repare que este é um problema transitório (ou não-permanente), uma vez que a massa total de gás dentro do volume de controle varia com o tempo. Além disso, como o gás se expande dentro do volume de controle devido à despressurização, o escoamento é necessariamente compressível. A equação de conservação da massa é dada por (7.30). Supondo que a cada instante a distribuição da massa específica é uniforme no extintor, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) = V \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.35)$$

Acima usou-se o fato de que o volume do extintor, V , é constante. Usando a equação de estado de um gás ideal,

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (7.36)$$

na expressão acima, tem-se que o termo transitório é:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = V \frac{1}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.37)$$

onde foi usado $T = T_0$ constante.

No termo advectivo de (7.30), a única superfície onde há fluxo ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$) é a seção transversal da válvula. Como lá $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_0$ (constante):

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho_0 v_0 \int_{S_c} dS = \rho_0 v_0 a. \quad (7.38)$$

Note que acima foi usado ρ_0 , e não ρ (massa específica dentro do volume de controle). ρ_0 pode ser calculada pela equação de estado para um gás ideal nas condições da saída do gás pela válvula, ou seja, temperatura T_0 e pressão atmosférica p_0 ambientes:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}, \quad (7.39)$$

O fluxo total na superfície de controle fica portanto:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{p_0}{RT_0} v_0 a, \quad (7.40)$$

e a equação de conservação da massa fica:

$$V \frac{1}{RT_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p_0}{RT_0} v_0 a = 0. \quad (7.41)$$

Portanto:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p_0 v_0 a}{V}, \quad (7.42)$$

um valor negativo, como era de se esperar.

■

Exemplo

Considere um tanque de água cilíndrico com área da base igual a A , e com um orifício de área a no fundo, como mostra a figura 7.5. Se a velocidade da água através do orifício é conhecida e igual a $v = \sqrt{2gh}$ e a altura inicial da água no tanque for h_0 , determine a altura da água como função do tempo $h(t)$.

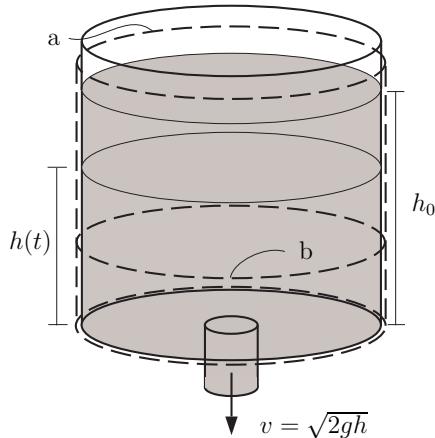


Figura 7.5: Cilindro com orifício no fundo.

Solução

Este exemplo mostrará que é possível escolher mais que um volume de controle para se resolver o mesmo problema. Além disso, que dependendo da escolha do volume de controle (VC), o problema pode ser permanente ou transitório! Inicialmente, considere o VC que vai até a linha tracejada marcada na figura 7.5 por (a), acima do nível de água inicial. O escoamento pode ser suposto incompressível com massa específica ρ . Novamente a equação que será utilizada para se resolver o problema é a equação integral de conservação da massa (7.30) Note que o problema é transitório, já que a massa dentro do volume de controle é variável com o tempo, portanto primeiro termo de (7.30) não pode ser desprezado. Este termo é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) = \rho \frac{dV}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}, \quad (7.43)$$

onde $V(t) = Ah(t)$ é o *volume de água* no volume de controle que é função apenas do tempo, e portanto a derivada parcial é igual à derivada ordinária. A integral de superfície (fluxo advectivo) da

equação (7.30) tem apenas contribuição no orifício, pois somente lá $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$. Esta integral fica simplesmente:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \sqrt{2gh}a. \quad (7.44)$$

Juntando o termo transiente com o fluxo advectivo, a equação (7.30) fica:

$$\rho A \frac{dh}{dt} + \rho \sqrt{2gh}a = 0. \quad (7.45)$$

A expressão acima é uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea, de primeira ordem. A solução pode ser obtida separando-se as variáveis:

$$h^{-1/2} dh + \frac{a}{A} \sqrt{2g} dt = 0. \quad (7.46)$$

Integrando a expressão acima:

$$\begin{aligned} & \int_{h_0}^h h^{-1/2} dh + \frac{a}{A} \sqrt{2g} \int_0^t dt \\ &= 2 \left[(h(t))^{1/2} - h_0^{1/2} \right] + \frac{a}{A} \sqrt{2g} t \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Portanto:

$$h(t) = \left[\sqrt{h_0} - \frac{a\sqrt{2g}}{2A} t \right]^2. \quad (7.48)$$

Neste problema, poderia-se alternativamente escolher o volume de controle que *corta* o fluido (abaixo de $h(t)$), marcado por (b). Neste caso, enquanto a superfície livre não alcançar o topo do volume de controle, a massa de água no volume de controle é constante, e portanto, sob o aspecto da conservação da massa, o problema é permanente. A equação da conservação da massa se reduz a:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (7.49)$$

Repare que agora há fluxo de massa através do topo do volume de controle. Pode-se admitir que a velocidade que atravessa esta superfície é uniformemente distribuída na superfície e igual a $v_0 = -\frac{dh}{dt}$, de modo que o balanço de massa no VC se dará pelas integrais de superfície no topo e no orifício do fundo:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_{topo}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_{fundo}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho v_0 A + \rho v a = 0. \end{aligned} \quad (7.50)$$

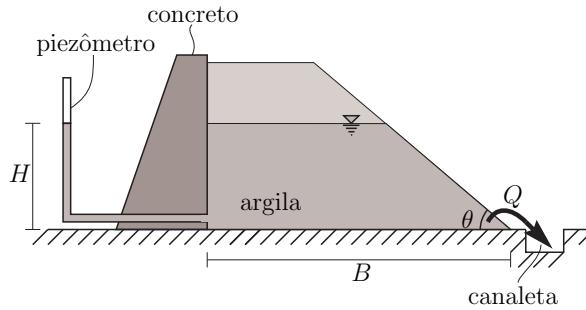


Figura 7.6: Aterro de coleta de águas pluviais (escoamento em um meio poroso).

Substituindo $v = \sqrt{2gh}$ e $v_0 = -\frac{dh}{dt}$ acima, obtém-se:

$$\rho A \frac{dh}{dt} + \rho \sqrt{2gh} a = 0, \quad (7.51)$$

que, obviamente, é a mesma equação diferencial para $h(t)$ que foi obtida anteriormente (7.45). ■

Exemplo

A figura 7.6 mostra um aterro destinado a coletar águas de chuva e conduzi-las a uma canaleta. Este tipo de armazenamento de água dentro de um meio poroso pode ser útil em regiões áridas, para reduzir perdas por evaporação. Admitindo que a vazão Q que eflui é proporcional ao nível da água dentro do aterro, $Q = kLH$, onde L é o comprimento do aterro, e k é conhecido empiricamente, e que a porosidade do solo é n , determine o nível H em função do tempo, sabendo que $H(0) = H_0$.

Solução

O volume de controle escolhido é o próprio de aterro e a equação utilizada para se resolver este problema será a equação da conservação da massa (7.30). Note que necessariamente o problema

é transiente, já que a variável que se quer resolver $H(t)$ está relacionada com o volume de água no aterro, e este é variável dentro do volume de controle. Por definição, o volume de água dentro do aterro é igual ao produto do volume total da região molhada (até o nível H) com a porosidade n . O volume ocupado pelo aterro até o nível da água H é dado por $V = (B - \frac{H}{2 \tan \theta}) HL$, de modo que o volume de água é dado por:

$$V_A = n \left(B - \frac{H}{2 \tan \theta} \right) HL. \quad (7.52)$$

Admitindo que a massa específica da água ρ é constante, o termo transiente de (7.30) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho n \left(B - \frac{H}{2 \tan \theta} \right) HL \right] \\ &= \rho n L \left(B \frac{dH}{dt} - \frac{H}{\tan \theta} \frac{dH}{dt} \right). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Observe o uso de derivadas ordinárias para H , uma vez que o tempo é a única variável da qual H depende. Desprezando o pequeno fluxo dentro do piezômetro, a única região da superfície de controle onde há fluxo ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$) é próximo à canaleta, onde a integral de superfície é dada pela própria vazão $Q = \int_{S_c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS$ multiplicada pela massa específica ρ :

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho Q = \rho k LH. \quad (7.54)$$

A equação da conservação da massa fica:

$$\rho n L \left(B \frac{dH}{dt} - \frac{H}{\tan \theta} \frac{dH}{dt} \right) + \rho k LH = 0. \quad (7.55)$$

Rearranjando e separando as variáveis H e t , tem-se:

$$nB \frac{dH}{H} - \frac{n}{\tan \theta} dH + kdt = 0. \quad (7.56)$$

Integrando a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} nB \int_{H_0}^H \frac{dH}{H} - \frac{n}{\tan \theta} \int_{H_0}^H dH + k \int_0^t dt &= \\ nB \ln \left(\frac{H}{H_0} \right) - \frac{n}{\tan \theta} (H - H_0) + kt &= 0. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Repare que a equação acima não permite uma expressão explícita para H . Este tipo de equação é chamada de *transcendental* e H só pode ser avaliado numericamente de forma iterativa.

■

7.4 Balanço de massa de um soluto

A lei integral da conservação de massa de um soluto A (na ausência de reações químicas!) em uma região do espaço (volume de controle) é expressa pela equação (7.11), $\frac{D M_A}{D t}$ é dado por (7.29) com $N = M_A$ e $\eta = C_A$. A equação fica:

$$\dot{J} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV + \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.58)$$

Exemplo

Ar seco com massa específica ρ e velocidade v_1 entra em um duto de seção retangular $h \times b$, cujo fundo é um reservatório de água como mostra a figura 7.7. Na saída, as distribuições de velocidade

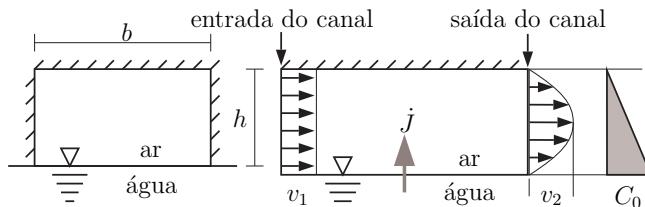


Figura 7.7: Canal de vento fechado sobre um reservatório.

e concentração de vapor de água são dadas por:

$$v(y) = 4v_2 \frac{y(h-y)}{h^2}, \quad C(y) = C_0 \frac{(h-y)}{h}. \quad (7.59)$$

Desprezando as variações de velocidade nas laterais,

- (a) Calcule a velocidade máxima na saída (seção 2) v_2 em função de v_1 .

- (b) Calcule o fluxo de massa de vapor de água que evapora do reservatório, \dot{J} , em função de C_0 , ρ , v_2 , b , e h .

Solução

(a) Este ítem diz respeito à velocidade do *fluido*, e portanto deve ser solucionado considerando-se a conservação da massa do fluido (7.30). Como o escoamento é permanente, o termo transiente é nulo. O termo devido aos fluxos advectivos têm componentes na entrada (S_1) e na saída (S_2) do duto, portanto:

$$\begin{aligned} \int_{SC} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_2} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho v_1 b h + \int_0^h 4v_2 \rho \frac{y(h-y)}{h^2} b dy = 0, \end{aligned} \quad (7.60)$$

onde, após a integração, obtém-se:

$$v_2 = \frac{3v_1}{2}. \quad (7.61)$$

Repare que \dot{J} não contribui para o balanço de massa do fluido.

(b) A equação de balanço de massa de um soluto (no caso, vapor de água) é dada por (7.58). Como o problema é permanente, o termo transiente ($\partial/\partial t$) é nulo. A integral sobre a superfície de controle (fluxo advectivo) é:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &\quad + \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Como por hipótese o ar está seco na entrada do duto (S_1), a integral naquela superfície é nula ($C_A = 0$), e a integral de superfície em S_2 irá equilibrar o fluxo difusivo de massa do soluto:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\rho 4C_0 v_2 b}{h^3} \int_0^h y(h-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \rho C_0 v_2 b h. \end{aligned} \quad (7.63)$$



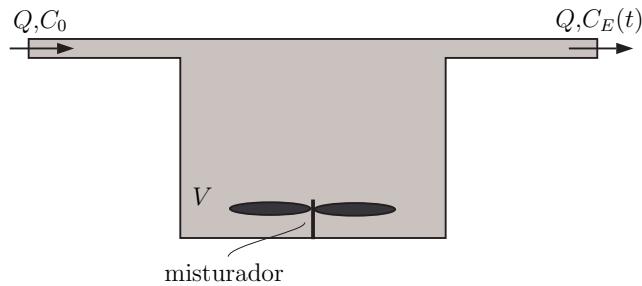


Figura 7.8: Fluxo de fenol em um tanque.

Exemplo

A figura 7.8, mostra um tanque industrial contendo inicialmente água pura (ρ constante), conectado a tubos de circulação. Em $t = 0$, uma vazão volumétrica Q começa a transitar no tanque trazendo água com uma concentração mássica C_0 de fenol. Considere que um misturador mantém a concentração de fenol dentro do tanque homogênea e igual à concentração de saída, $C_E(t)$. Sendo V o volume (constante) de fluido no tanque, e desprezando a difusão molecular do fenol, obtenha $C_E(t)$.

Solução

O volume de controle a ser utilizado é obviamente o tanque em si. A única informação que a equação do balanço de massa de fluido (7.30) nos fornece é a de que a vazão de entrada deve ser igual à vazão de saída, Q (repare que para a conservação da massa de fluido, o problema é permanente). Para se calcular uma fórmula para $C_E(t)$, deve ser empregada a lei de conservação de massa de um soluto, dada pela equação (7.58). O termo J é dado como desprezível. O termo transitente pode ser calculado imediatamente, já que $C_A = C_E(t)$ e ρ são, por suposição, uniformes no volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} C_A \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} [\rho C_E(t)V] = \rho V \frac{dC_E}{dt} \quad (7.64)$$

Repare que , como o tempo é a única variável independente, a derivada parcial pode ser substituída pela derivada ordinária. A integral de superfície da equação (7.58) só tem contribuições nas seções que comunicam o tanque com os tubos de circulação. Sendo S_1 e S_2 as seções da entrada e saída do tanque, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{S_e} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{S_1} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &\quad + \int_{S_2} C_A \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \rho C_0 \int_{S_1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \rho C_E(t) \int_{S_2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -\rho C_0 Q + \rho C_E(t) Q. \end{aligned} \quad (7.65)$$

A equação de balanço de massa de fenol, (7.58) com $\dot{J} = 0$, torna-se:

$$V \frac{dC_E}{dt} + Q (C_E(t) - C_0) = 0. \quad (7.66)$$

A equação acima pode ser convenientemente rearranjada:

$$V \frac{d}{dt} (C_0 - C_E(t)) + Q (C_0 - C_E(t)) = 0. \quad (7.67)$$

Separando as variáveis:

$$\frac{d(C_0 - C_E(t))}{(C_0 - C_E(t))} = -\frac{Q}{V} dt. \quad (7.68)$$

Integrando:

$$\ln(C_0 - C_E(t)) = -\frac{Q}{V} t + \ln c, \quad (7.69)$$

onde $\ln c$ é a constante de integração. Exponenciando a expressão acima:

$$(C_0 - C_E(t)) = ce^{-(Q/V)t}. \quad (7.70)$$

Como $C_E = 0$ em $t = 0$, então $c = C_0$. Finalmente:

$$C_E(t) = C_0 (1 - e^{-(Q/V)t}). \quad (7.71)$$

■

7.5 Balanço de quantidade de movimento

Em um dado instante em que um *sistema* ocupa um volume de controle (VC) em um referencial inercial, a força que o restante do universo faz sobre o sistema é $\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c$, onde \mathbf{F}_s e \mathbf{F}_c são as forças de superfície e de corpo atuando no sistema naquele instante (ver seções 4.1, 4.2, e 6.1). Esta força é a responsável pela variação da quantidade de movimento do sistema, $\frac{D\mathbf{P}}{Dt}$, de acordo com a equação (7.12), que é o princípio da conservação da quantidade de movimento de um sistema. Utilizando (7.29) com $N = \mathbf{P}$ e $\eta = \mathbf{v}$, tem-se:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \mathbf{v} \rho dV + \int_{S_c} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.72)$$

A equação (7.72) é a equação integral do balanço da quantidade de movimento em um volume de controle. Observe que, como a quantidade de movimento é um vetor, (7.72) são na realidade três equações. No sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) de (7.72) são:

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.73)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.74)$$

$$F_{sz} + F_{cz} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_z \rho dV + \int_{S_c} v_z \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.75)$$

Exemplo

Utilizando as equações (7.72) para um escoamento permanente, unidimensional na direção x com $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x$, com a aceleração da gravidade atuando no sentido $-y$ perpendicular a x , e com o tensor de tensões dado apenas pelo campo de pressão $\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$ (\mathbf{I} é a matriz identidade), ou seja, desprezando termos viscosos, mostre que:

- (a) $\partial v_x / \partial x = 0$,
- (b) $\partial p / \partial x = 0$,
- (c) $\partial p / \partial y = -\rho g$.

Solução

Considere o elemento de fluido que ocupa um volume de controle mostrado na figura 7.9 (neste exemplo, como em muitos

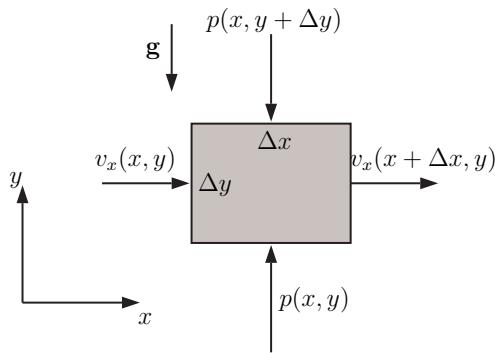


Figura 7.9: Escoamento paralelo hidrostático.

outros, a direção z perpendicular ao papel será desprezada por conveniência). As equações relevantes para este sistema são as da conservação da massa e da quantidade de movimento nas direções x e y :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.76)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.77)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.78)$$

Uma vez que o escoamento é permanente, todos os termos transitórios ($\frac{\partial}{\partial t}$) são nulos.

(a) Como só existe escoamento na direção x , a equação da continuidade se reduz ao balanço entre os fluxos nas fronteiras laterais do volume de controle. Tomando o limite no qual a altura do elemento Δy tende a zero, a velocidade v_x pode ser considerada constante entre y e $y + \Delta y$, então:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_x(x, y)\rho\Delta y + v_x(x + \Delta x, y)\rho\Delta y = 0. \quad (7.79)$$

Dividindo a equação acima por $\Delta x\Delta y$, e tomando agora o limite

quando $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (7.80)$$

como queríamos demonstrar.

(b) O lado esquerdo da equação integral da conservação da componente x da quantidade de movimento reduz-se à contribuição das forças de superfície devido à pressão atuando nas faces verticais do volume de controle, já que só há força de corpo na direção y . Então, tomando $\Delta y \rightarrow 0$ admitindo que a pressão é uniforme ao longo de Δy tem-se:

$$F_{sx} = p(x, y)\Delta y - p(x + \Delta x, y)\Delta y. \quad (7.81)$$

O lado direito da equação se reduz ao fluxo advectivo de quantidade de movimento nas faces laterais do volume de controle:

$$\int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_x^2(x, y)\rho\Delta y + v_x^2(x + \Delta x, y)\rho\Delta y. \quad (7.82)$$

Combinando os termos acima na equação de conservação, tem-se:

$$\begin{aligned} p(x, y)\Delta y - p(x + \Delta x, y)\Delta y &= \\ -v_x^2(x, y)\rho\Delta y + v_x^2(x + \Delta x, y)\rho\Delta y. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Dividindo a equação acima por $\Delta x \Delta y$, e tomando agora o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, a equação acima se torna:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \quad (7.84)$$

$$2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.85)$$

Como $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ (ver item (a)),

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (7.86)$$

(c) Resta agora a aplicação da equação dinâmica (como também é conhecida a equação da conservação da quantidade de movimento) na direção y . Nesta equação, o lado direito é nulo, pois

não há escoamento na direção vertical, ou seja, $v_y = 0$. Similarmente à componente x , as forças de superfícies F_{sy} são dadas pelo balanço de forças devido à pressão:

$$F_{sy} = p(x, y)\Delta x - p(x, y + \Delta y)\Delta x. \quad (7.87)$$

A única força de corpo é o peso do fluido dentro do volume de controle:

$$F_{cy} = -\rho g \Delta x \Delta y. \quad (7.88)$$

Tomando $F_{sy} + F_{cy} = 0$, tem-se:

$$p(x, y)\Delta x - p(x, y + \Delta y)\Delta x - \rho g \Delta x \Delta y = 0. \quad (7.89)$$

Dividindo a equação acima pelo volume de controle e tomando o limite quando $\Delta y \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g, \quad (7.90)$$

que mostra que um escoamento atendendo às condições dadas tem um comportamento hidrostático.

■

Exemplo

A figura 7.10 ilustra o escoamento permanente de um fluido incompressível através de uma junção de tubulações. A figura está mostrada em planta, portanto não há componente gravitacional no plano (x, y). Considerando dados $\rho, v_0, v_1, A_0, A_1, A_2$, e as pressões nas seções 0, 1, e 2, dadas por p_0, p_1 , e p_2 , calcule o vetor força da água sobre este trecho de tubulação. (Admita que as velocidades e pressões são uniformes nas seções.)

Solução

As equações para a solução deste problema são as de balanço de massa e de quantidade de movimento em x e y :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.91)$$

$$F_{sx} + F_{cx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.92)$$

$$F_{sy} + F_{cy} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_y \rho dV + \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.93)$$

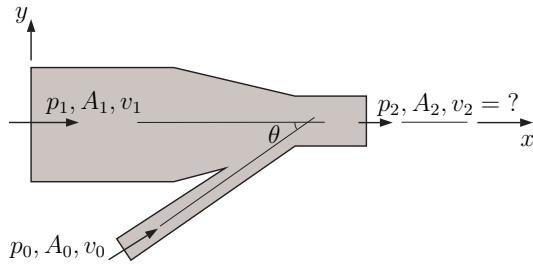


Figura 7.10: Força de um fluido em uma junção.

Sendo o escoamento permanente, tem-se que todos os termos com $\frac{\partial}{\partial t}$ são nulos. Tomando como volume de controle o próprio contorno da tubulação. A equação de conservação de massa reduz-se ao balanço de fluxos nas seções 1, 2, e 3, e fornece a velocidade v_2 :

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho (-v_0 A_0 - v_1 A_1 + v_2 A_2) = 0, \quad (7.94)$$

$$v_2 = \frac{v_0 A_0 + v_1 A_1}{A_2}. \quad (7.95)$$

A equação dinâmica na direção x torna-se:

$$\begin{aligned} F_{sx} &= \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= -v_0 \cos \theta \rho v_0 A_0 - v_1 \rho v_1 A_1 + v_2 \rho v_2 A_2, \end{aligned} \quad (7.96)$$

e na direção y dá:

$$F_{sy} = \int_{S_c} v_y \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0 \sin \theta \rho v_0 A_0. \quad (7.97)$$

As forças de superfície atuando sobre a superfície de controle são a combinação das forças devido às pressões nas seções com as forças (F_x, F_y) do conduto sobre o fluido:

$$F_{sx} = p_0 A_0 \cos \theta + p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x, \quad (7.98)$$

$$F_{sy} = p_0 A_0 \sin \theta + F_y, \quad (7.99)$$

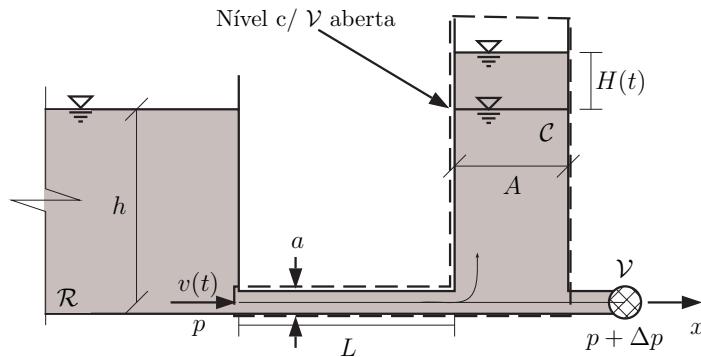


Figura 7.11: Oscilação num tanque devido ao fechamento abrupto de uma válvula.

que substituídas nas equações dinâmicas fornecem:

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho v_0^2 \cos \theta A_0 - \rho v_1^2 A_1 \\ &\quad + \rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2 - p_1 A_1 - p_0 A_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (7.100)$$

$$F_y = -\rho v_0^2 A_0 \operatorname{sen} \theta - p_0 A_0 \operatorname{sen} \theta. \quad (7.101)$$

A força da água sobre a junção dos condutos é a reação a (F_x, F_y) :

$$\mathbf{F} = -(F_x, F_y). \quad (7.102)$$

■

Exemplo

Na figura 7.11, água dentro de uma tubulação \mathcal{T} escoa com velocidade v_0 através da válvula V . O súbito fechamento da válvula em $t = 0$ causa uma sobrepressão na tubulação. A função do grande tanque C (denominado de chaminé de equilíbrio) imediatamente antes da válvula absorver este efeito para proteger a tubulação. A água dentro do tanque passa a oscilar, o mesmo acontecendo com a velocidade v na tubulação entre o reservatório \mathcal{R} (repare que o volume do reservatório é enorme e o seu nível

pode ser considerado inafetado pelo sistema) e o tanque \mathcal{C} que, no caso *ideal* (sem atrito) varia entre $\pm v_0$. A área seccional da tubulação é a , e a da base do tanque é A . Obtenha a equação diferencial que governa a evolução de $H(t)$. Resolva esta equação para o caso simplificado em que $v \ll \sqrt{gH}$.

Solução

As equações adequadas para a solução deste problema são, mais uma vez, a equação da conservação da massa (7.30) e as equações da conservação da quantidade de movimento (7.72). O volume de controle escolhido (tracejado) é a tubulação \mathcal{T} mais a chaminé de equilíbrio \mathcal{C} :

$$V_c = \mathcal{T} \cup \mathcal{C}. \quad (7.103)$$

Obviamente, este é um problema transiente. Uma vez que o tanque \mathcal{C} está em contato com a atmosfera e a água pode se mover livremente dentro dele, o fluido pode ser encarado como incompressível (ρ constante). A massa dentro de V_c pode ser escrita como:

$$\int_{V_c} \rho dV = \rho (V_{\mathcal{T}} + V_{\mathcal{C}}), \quad (7.104)$$

onde $V_{\mathcal{T}}$ e $V_{\mathcal{C}}$ são os *volumes de água* dentro da tubulação e dentro da chaminé de equilíbrio $V_{\mathcal{C}}$. Estes volumes são:

$$V_{\mathcal{T}} = \text{constante}; \quad V_{\mathcal{C}} = A(H(t) + h). \quad (7.105)$$

O termo transiente da equação de conservação da massa (7.30) é portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \rho [V_{\mathcal{T}} + A(H(t) + h)] = \rho A \frac{dH}{dt}. \quad (7.106)$$

A única parte da superfície de controle onde há fluxo é a fronteira entre a tubulação e o reservatório, de modo que:

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\rho a v(t). \quad (7.107)$$

A equação da conservação da massa fica:

$$\rho A \frac{dH}{dt} - \rho a v(t) = 0. \quad (7.108)$$

Repare que a equação acima não é a resposta do problema, já que há duas variáveis dependentes (H e v). Resta estabelecer uma relação entre estas variáveis para se obter uma equação diferencial para $H(t)$ somente. Para isso, as equações dinâmicas serão usadas.

As forças de corpo na direção x são evidentemente nulas. As forças de superfícies naquela direção são decorrentes das pressões na fronteira $\mathcal{R}-\mathcal{T}$ (entrada da tubulação) e na válvula \mathcal{V} . A pressão na entrada da tubulação p é:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho gh. \quad (7.109)$$

Na válvula, existe um efeito de sobrepressão compensado pelo desnível H do tanque:

$$p + \Delta p = p_{\text{atm}} + \rho g(H(t) + h). \quad (7.110)$$

A força de superfície resultante em x é então:

$$F_{sx} = pa - (p + \Delta p)a = -\rho gaH(t) \quad (7.111)$$

Para calcular a quantidade de movimento x dentro do V_c , $\int_{V_c} \mathbf{v} \rho dV$, pode-se admitir que a velocidade do escoamento é significativa apenas dentro da tubulação \mathcal{T} , sendo desprezíveis no tanque \mathcal{C} :

$$\int_{V_c} v_x \rho dV = v \rho a L, \quad (7.112)$$

de modo que o termo transitório é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV = \rho a L \frac{dv}{dt}, \quad (7.113)$$

onde L é o comprimento da tubulação. Assim como o fluxo de massa, o fluxo de quantidade de movimento x existe apenas na entrada da tubulação:

$$\int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\rho v^2 a. \quad (7.114)$$

A equação dinâmica em x torna-se, assim:

$$-\rho g Ha = \rho a L \frac{dv}{dt} - \rho v^2 a. \quad (7.115)$$

Pela equação da conservação da massa obtida anteriormente:

$$v = \frac{A}{a} \frac{dH}{dt} \quad (7.116)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{a} \frac{d^2H}{dt^2} \quad (7.117)$$

Substituindo as expressões acima na equação dinâmica já obtida e dividindo-a por ρ , obtém-se uma equação diferencial para $H(t)$:

$$L \frac{A}{a} \frac{d^2H}{dt^2} - \left(\frac{A}{a} \frac{dH}{dt} \right)^2 + gH = 0. \quad (7.118)$$

A equação acima é não-linear devido ao termo $(\rho v^2 a)$ proveniente do fluxo de quantidade de movimento na tubulação. Admitindo que $v \ll \sqrt{gH}$, este termo pode ser desprezado em comparação com os outros, e a equação diferencial para $H(t)$ pode ser linearizada:

$$\frac{d^2H}{dt^2} + \frac{ag}{AL} H = 0. \quad (7.119)$$

A equação acima governa uma oscilação senoidal e tem solução geral:

$$H(t) = H_1 \cos \sqrt{\frac{ag}{AL}} t + H_2 \sin \sqrt{\frac{ag}{AL}} t. \quad (7.120)$$

Usando $H(t = 0) = 0$, tem-se que $H_1 = 0$. Conhecendo-se a velocidade inicial no tubo v_0 , tem-se, pela equação da continuidade que:

$$\frac{dH(t = 0)}{dt} = \frac{a}{A} v_0, \quad (7.121)$$

onde por substituição na derivada da expressão para $H(t)$ acima, tem-se:

$$H_2 = \sqrt{\frac{aL}{Ag}} v_0. \quad (7.122)$$

■

7.6 Balanço de energia

Dentre as equações integrais de balanço, a equação de balanço de energia é a única que será apresentada de uma forma ligeiramente diferente, devido às dificuldades de se incluir o termo do trabalho \dot{W} dado por (7.9). Primeiramente, \dot{W} será expresso numa forma conveniente para seu uso sistemático. Na seção 6.1, o tensor de tensões foi obtido como:

$$\mathbf{T} = - \left[p + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (7.123)$$

onde p é a pressão no fluido, μ é a viscosidade dinâmica, e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação. Levando (7.123) em (7.9):

$$\dot{W} = \int_{S_s} \left\{ \left[\left(-\frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} - p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \right) \cdot \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{v} \right\} dS. \quad (7.124)$$

Percebendo que $\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$, e aplicando a propriedade distributiva do produto interno:

$$\dot{W} = - \int_{S_s} p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{S_s} \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS + 2 \int_{S_s} \mu[(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}] dS. \quad (7.125)$$

A segunda e terceira integrais de (7.125) representam a dissipação de energia mecânica do sistema por efeito da viscosidade (tensão viscosa) associada com o movimento da fronteira do sistema (note que numa fronteira sólida em repouso, $\mathbf{v} = 0$, e este termo é nulo). Frequentemente, os efeitos desta dissipação viscosa sobre o escoamento de fluidos com viscosidade relativamente baixa (caso da água) são desprezíveis. No decorrer deste texto, essa dissipação será denominada \dot{W}_μ , e será desprezada sistematicamente, a menos que se indique o contrário. A primeira integral de (7.125) representa a taxa de trabalho reversível realizado pelo resto do universo sobre a superfície do sistema. Este termo, em geral, é bastante importante.

A equação integral de balanço de energia é dada por (7.29) com $N = E$ e $\eta = e$:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e\rho dV + \int_{S_c} e\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.126)$$

combinada com (7.13), e (7.125) com $N = E$ e $\eta = e$:

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu - \int_{S_s} p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e\rho dV + \int_{S_c} e\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.127)$$

Como no instante considerado a superfície do sistema e a superfície de controle coincidem, pode-se agrupar as integrais sobre estas superfícies em uma

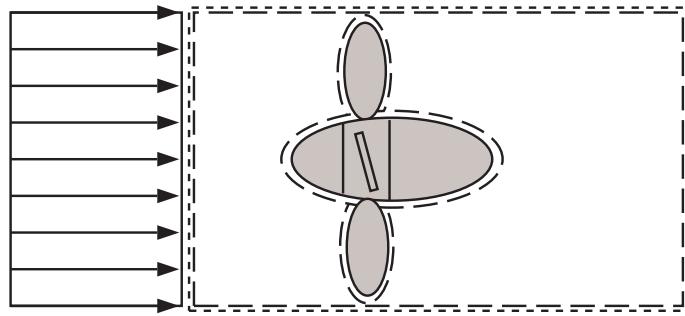


Figura 7.12: Ilustração da inclusão do trabalho de eixo.

única integral, e a equação de balanço integral de energia fica:

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.128)$$

A equação (7.128) está *quase* completa para ser usada. Para mostrar por quê, considere a turbina sujeita a um escoamento como está mostrado na figura 7.12. Ao se considerar um volume de controle excluindo a turbina (linha tracejada), a complexidade do problema aumenta muito, devido à presença de uma superfície de controle demasiadamente complexa. Por isso, é conveniente se usar o volume de controle contendo a turbina (linha pontilhada), mas, para isso, é preciso que se inclua um termo de trabalho de eixo x realizado pela turbina sobre o fluido. Assim, denominando \dot{W}_x a potência adicionada por um eixo ao sistema dentro do volume de controle, tem-se finalmente:

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu + \dot{W}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.129)$$

Exemplo

A figura 7.13 mostra um corte da barragem de uma usina hidrelétrica, contendo a casa de força com uma turbina. O desnível entre o reservatório e o canal de restituição de vazões é H . Pela turbina, transita uma vazão volumétrica (unidade $L^3 T^{-1}$) Q_v . Desprezando os efeitos de viscosidade na tomada d'água (seção

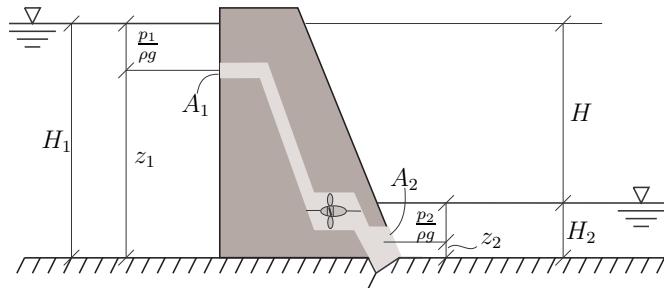


Figura 7.13: Transformação de energia hidráulica em energia elétrica.

1) e no canal de restituição (seção 2), admitindo regime de escoamento permanente, e admitindo que a energia cinética nas seções 1 e 2 podem ser desprezadas, determine a potência P da turbina em função de ρ , Q_v , g , H .

Solução

As equações adequadas para a solução deste problema são a da conservação da massa (7.30) e a da conservação da energia (7.129). Admitindo que o fluido seja incompressível, usando o fato de que o regime é permanente, e escolhendo como volume de controle o volume de fluido entre as seções 1 e 2 (parte clara da barragem na figura), contendo a casa de máquinas, a equação (7.30) torna-se apenas:

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 = -Q_v + v_2 A_2 = 0, \quad (7.130)$$

onde v_1 , v_2 , A_1 , e A_2 são as velocidades e áreas nas seções 1 e 2.

Na equação da energia (7.129) os termos de dissipação viscosa e de trocas de calor com o ambiente, \dot{W}_μ e \dot{Q} serão desprezados, assim como o termo transiente. Então:

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV + \int_{S_c} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &= \int_{S_1} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

$$+ \int_{S_2} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.131)$$

Admitindo que as seções S_1 e S_2 são pequenas e que portanto a energia específica e e a pressão p são homogêneas nestas seções, estas quantidades podem ser fatoradas das integrais de superfície, e o cálculo das mesmas se tornam triviais:

$$\dot{W}_x = \rho \left[\left(e_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) (-v_1 A_1) + \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) (v_2 A_2) \right]. \quad (7.132)$$

As energias específicas são dadas pelas somas das energias específicas internas u , cinéticas $v^2/2$, e potenciais gz :

$$e_1 = u_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1, \quad (7.133)$$

$$e_2 = u_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2. \quad (7.134)$$

Desprezando $v^2/2$ e lembrando que $Q_v = v_1 A_1 = v_2 A_2$, tem-se:

$$\dot{W}_x = \left[- \left(u_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \left(u_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \right] \rho Q_v. \quad (7.135)$$

Baseado na suposição de que as energias cinéticas $v^2/2$ são pequenas, é possível calcular as pressões p_1 e p_2 hidrostáticamente (ver próxima seção: Equação de Bernoulli). Assim:

$$\frac{p_1}{\rho} = gh_1, \quad \frac{p_2}{\rho} = gh_2. \quad (7.136)$$

A expressão para \dot{W}_x fica:

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= [-u_1 - gz_1 - gh_1 + u_2 + gz_2 + gh_2] \rho Q_v \\ &= [-(u_1 + gH_1) + (u_2 + gH_2)] \rho Q_v \\ &= \rho Q_v g (H_2 - H_1) + \rho Q_v (u_2 - u_1). \end{aligned} \quad (7.137)$$

A energia interna específica u é função da massa específica ρ e da temperatura T (ver capítulo 2). Assim, admitindo que o processo é isotérmico (a temperatura da água é a mesma nas seções 1 e 2), e tem-se que $u_1 = u_2$, donde:

$$\dot{W}_x = -\rho Q_v g H. \quad (7.138)$$

A potência fornecida pela turbina é o recíproco da taxa de trabalho fornecido pelo seu eixo ao sistema ocupando o volume de controle:

$$P = \rho Q_v g H. \quad (7.139)$$

■

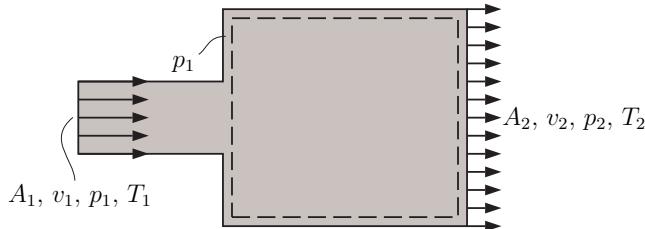


Figura 7.14: Escoamento de um gás através de uma expansão súbita.

Exemplo

A figura 7.14 mostra um gás ideal escoando através do alargamento de uma tubulação. As condições na seção 1 de área A_1 são: pressão p_1 , velocidade v_1 , temperatura T_1 . A seção 2 tem área A_2 . Determine, em função das condições na seção 1, de A_2 , e do calor específico a pressão constante do gás c_p : a taxa de transferência de calor \dot{Q} através das paredes do alargamento, e as condições p_2 , v_2 , T_2 após o alargamento (suponha que o escoamento é incompressível).

Solução

O volume de controle escolhido está indicado pela linha tracejada na figura 7.14. As equações a serem utilizadas são as da conservação da massa, quantidade de movimento em x , e energia, dadas por:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.140)$$

$$\begin{aligned} F_{sx} + F_{cx} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_x \rho dV \\ &\quad + \int_{S_c} v_x \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \end{aligned} \quad (7.141)$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_\mu + \dot{W}_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} e \rho dV$$

$$+ \int_{S_c} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.142)$$

Repare que o problema possui 4 incógnitas e que há apenas 3 equações de conservação. A equação adicional que pode ser usada é a equação de estado:

$$p = \rho RT. \quad (7.143)$$

Primeiramente, o problema é permanente, de modo que as derivadas temporais são nulas. A massa específica (constante) pode ser calculada em função das condições na seção 1 por:

$$\rho = \frac{p_1}{RT_1}. \quad (7.144)$$

Supondo uniformidade das condições do fluido nas seções 1 e 2, a equação da conservação de massa fornece:

$$0 = -\rho v_1 A_1 + \rho v_2 A_2, \quad (7.145)$$

ou:

$$v_2 = \beta v_1, \quad \beta = \frac{A_1}{A_2}. \quad (7.146)$$

Não há forças de corpo na direção x . Repare que a pressão p_1 não cai imediatamente após a expansão do duto, e que o valor de p próximo às paredes da expansão deve necessariamente ser $p = p_1$. As paredes verticais por sua vez reagem à essa força de pressão e a força total na direção x fica:

$$F_{sx} = (p_1 - p_2) A_2. \quad (7.147)$$

A equação dinâmica escreve-se:

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) A_2 &= -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 \\ &= \rho (v_2 - v_1) v_2 A_2, \end{aligned} \quad (7.148)$$

onde foi usado que $v_1 A_1 = v_2 A_2$. Dividindo por A_2 e usando novamente a equação da continuidade:

$$p_2 = p_1 + (\beta - \beta^2) \rho v_1^2. \quad (7.149)$$

A temperatura na seção 2 vem da equação de estado:

$$T_2 = \frac{p_2}{\rho R}. \quad (7.150)$$

Finalmente, resta calcular a taxa em que calor é trocado através da superfície de controle. Não há trabalho de eixo (\dot{W}_x) neste caso e o trabalho devido à viscosidade (\dot{W}_μ) pode ser desprezado. Assim, a equação do balanço de energia fica:

$$\dot{Q} = - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \rho v_1 A_1 + \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \rho v_2 A_2, \quad (7.151)$$

onde z_1 e z_2 são as alturas das seções 1 e 2 em relação a um nível equipotencial de referência, u_1 e u_2 são as energias específicas internas nas seções 1 e 2. Utilizando a equação de estado e da conservação da massa:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \rho v_1 A_1 \left[(u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) \right. \\ &\quad \left. + R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \right]. \end{aligned} \quad (7.152)$$

Mas, admitindo que $z_1 = z_2$, e tomado para o caso de um gás ideal:

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1), \quad c_p = c_v + R, \quad (7.153)$$

tem-se:

$$\dot{Q} = \rho v_1 A_1 \left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \right]. \quad (7.154)$$

■

7.7 A equação de Bernoulli

A equação do balanço de quantidade de movimento pode ser reduzida a uma forma bastante conveniente, chamada *equação de Bernoulli*. A dedução envolve o balanço de quantidade de movimento em um elemento de fluido e sua integração ao longo de uma linha de corrente (ou linha de fluxo). O resultado pode ser interpretado como um balanço de energia mecânica, o que mostra que o balanço de energia mecânica (em um sistema conservativo, ou seja, desprovido de dissipação de energia) e o balanço de quantidade de movimento são equivalentes.

Considere um escoamento com as seguintes características:

1. escoamento permanente;

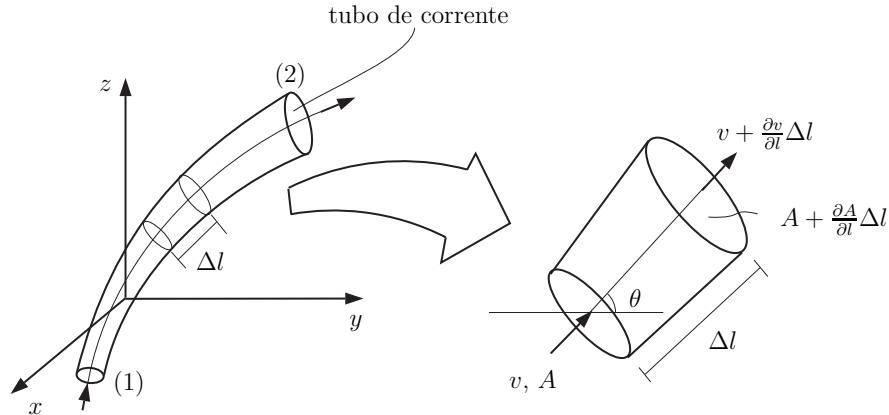


Figura 7.15: Equação de Bernoulli em um tubo de corrente.

2. efeitos de viscosidade desprezíveis;

3. compressibilidade desprezível;

Define-se um volume de controle elementar de comprimento Δl ao longo de uma linha de fluxo e supondo que não há escoamento através das paredes deste volume (tal volume é chamado de *tubo de corrente* ou *tubo de fluxo*), conforme mostra a figura 7.15. Considere agora a equação da conservação da massa e de quantidade de movimento na direção l (ou seja na direção tangente à linha de corrente):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (7.155)$$

$$F_{sl} + F_{cl} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} v_l \rho dV + \int_{S_c} v_l \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.156)$$

Por definição, não há fluxo através das paredes laterais do tubo de corrente. Em geral a área da seção transversal do tubo de corrente é dependente de l . Considerando que as velocidades são aproximadamente uniformes em qualquer seção transversal do tubo, e que o comprimento do tubo Δl é suficientemente pequeno, de forma que pode-se expressar a pressão, velocidade, e a área na saída do elemento de comprimento Δl como os dois primeiros termos da série de Taylor destas variáveis em torno dos seus valores na entrada do

elemento, a equação de conservação da massa em regime permanente fornece:

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho v A + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial l} \Delta l \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\ &= \rho \left(A \frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial A}{\partial l} \right) \Delta l + \rho \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2 \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial l} (vA) \Delta l + \rho \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2. \end{aligned} \quad (7.157)$$

Dividindo a expressão acima por Δl e tomando o limite quando $\Delta l \rightarrow 0$:

$$\rho \frac{\partial}{\partial l} (vA) = 0. \quad (7.158)$$

Na equação dinâmica (7.156), a resultante das forças de superfícies na direção l sobre o volume de controle é:

$$\begin{aligned} F_{sl} &= pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\ &\quad + \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l \right) \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l. \end{aligned} \quad (7.159)$$

O último termo do lado direito da equação acima é a pequena contribuição da pressão nas paredes laterais do tubo (tomada como atuando na posição $\Delta l/2$). Rearranjando os termos escreve-se:

$$F_{sl} = -A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l^2 \approx -A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l. \quad (7.160)$$

Repare que como $\Delta l \ll 1$ o termo quadrático pode ser desprezado em comparação com o termo linear.

A força de corpo em l é a projeção do peso do sistema naquela direção:

$$\begin{aligned} F_{cl} &= - \left(A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \Delta l \rho g \sin \theta \\ &= - \left(A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \rho g \Delta z \\ &= - \left(A + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \rho g \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l \\ &\approx -\rho g A \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l, \end{aligned} \quad (7.161)$$

onde foi usado $\sin \theta = \frac{\Delta z}{\Delta l}$, e, novamente, o termo quadrático em Δl foi desprezado. O fluxo de quantidade de movimento na direção l através da

superfície de controle é:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} v_l \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= -\rho v^2 A + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial l} \Delta l \right)^2 \left(A + \frac{\partial A}{\partial l} \Delta l \right) \\ &\approx \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) \Delta l. \end{aligned} \quad (7.162)$$

Reunindo (7.160), (7.161), e (7.162):

$$-A \frac{\partial p}{\partial l} \Delta l - \rho g A \frac{\partial z}{\partial l} \Delta l = \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) \Delta l. \quad (7.163)$$

Combinando os termos em 7.156 e dividindo a equação por Δl tem-se (repare que tomando o limite quando $\Delta l \rightarrow 0$ anularia os termos não lineares em Δl mesmo se estes não tivessem sidos desprezados nas expressões anteriores):

$$-A \frac{\partial p}{\partial l} - \rho A g \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A). \quad (7.164)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} (\rho v^2 A) &= \rho \frac{\partial (vA)}{\partial l} v + \rho v A \frac{\partial v}{\partial l} \\ &= \rho v A \frac{\partial v}{\partial l} = \rho A \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 \right), \end{aligned} \quad (7.165)$$

onde foi usado $\frac{\partial}{\partial l} (vA) = 0$, pela equação da conservação da massa. Dividindo a equação acima por A :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0, \quad (7.166)$$

ou:

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}. \quad (7.167)$$

A equação (7.167) é conhecida como *equação de Bernoulli*. De acordo com ela, ao longo de uma linha de corrente, a soma do trabalho realizado pela pressão, da energia potencial gravitacional, e da energia cinética (no caso, por unidade de volume) permanece constante, se: (i) o escoamento for permanente; e (ii) os termos viscosos puderem ser desprezados. A equação de Bernoulli é extremamente útil para se aplicar a escoamentos onde não há fonte ou perdas consideráveis de energia mecânica.

7.8 A equação de Bernoulli e o balanço de energia

Considere a figura 7.15. Aplicando as equações do balanço de massa (7.30) e energia (7.128) ao volume de controle entre as seções (1) e (2), admitindo que o trabalho das forças viscosas nas laterais do tubo é desprezível, tem-se:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2. \quad (7.168)$$

e:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= - \left(u_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \rho v_1 A_1 \\ &\quad + \left(u_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) \rho v_2 A_2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) - \left(\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) \right] \rho v_1 A_1 \\ &\quad + (u_2 - u_1) \rho v_1 A_1. \end{aligned} \quad (7.169)$$

Se as hipóteses da equação de Bernoulli valem, o termo entre colchetes é nulo, e a equação da energia se torna:

$$\dot{Q} = (u_2 - u_1) \rho v_1 A_1, \quad (7.170)$$

ou seja, quando não há fonte ou dissipação de energia mecânica em um escoamento permanente, a energia térmica e a energia mecânica ficam desacopladas. O calor Q trocado com o ambiente apenas muda a energia interna (temperatura) do sistema, e não sua energia mecânica.

Exemplo

A figura 7.16 mostra um esquema para se medir a velocidade de um fluido conhecido por *tubo de Pitot*. Dois manômetros, contendo água (massa específica ρ_a) são inseridos numa tubulação contendo gás (massa específica ρ_g) em escoamento. A entrada do primeiro manômetro é perpendicular ao escoamento, enquanto que a do segundo é de frente para o mesmo. As leituras nos dois manômetros são h_e e h_s respectivamente. Em função de ρ_g , ρ_a , g , e das alturas manométricas h_e e h_s , determine a pressão e a velocidade do gás dentro do tubo (considere que as mesmas são uniformes dentro do tubo, e que o regime é permanente).

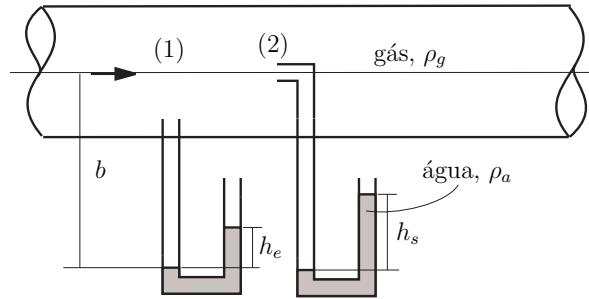


Figura 7.16: Tubo de Pitot.

Solução

O primeiro manômetro mede a chamada *pressão estática* do escoamento, isto é a pressão real do fluido. Na entrada do segundo manômetro (2) a velocidade do gás é nula, e a pressão lida é denominada *pressão de estagnação*, que é maior que a pressão estática pois envolve o trabalho que o manômetro realiza para desacelerar o fluido naquele ponto. A diferença entre a pressão de estagnação e a pressão estática é denominada *pressão dinâmica*. A pressão estática p_e é dada pela leitura do manômetro (1):

$$p_e + \rho_g g b = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_e. \quad (7.171)$$

Desprezando o peso do gás dentro do manômetro:

$$p_e = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_e. \quad (7.172)$$

Analogamente, a pressão de estagnação é:

$$p_s = p_{\text{atm}} + \rho_a g h_s. \quad (7.173)$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre (1) e (2):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2, \quad (7.174)$$

com $p_1 = p_e$, $v_1 = v = ?$, $z_1 = 0$, $p_2 = p_s$, $v_2 = 0$, e $z_2 = 0$:

$$p_e + \frac{1}{2} \rho_g v^2 = p_s. \quad (7.175)$$

Então:

$$v = \sqrt{2 \frac{\rho_a}{\rho_g} g (h_s - h_e)}. \quad (7.176)$$

■

7.9 Problemas propostos

- A figura 7.17 mostra uma câmara (volume $A \times H$) onde entra ar numa seção de área A_0 , a temperatura T_0 , com velocidade uniforme v_0 . A temperatura na câmara é uniforme e é igual à temperatura na saída do recipiente, e que tanto o calor específico a volume constante c_v e a massa específica do gás ρ são constantes. Na parte superior direita (área $A/4$) da câmara há uma fonte de calor que fornece um fluxo específico q . Determine qual o fluxo de calor q necessário para manter a temperatura $T(t)$ na câmara constante e igual a $5T_0$. Utilizando o resultado acima para q , ache a solução transiente para $T(t)$ (temperatura dentro e na saída do recipiente) considerando que inicialmente $T(t = 0) = T_0$. Dados: T_0 , Q_0 , c_v , ρ , A .

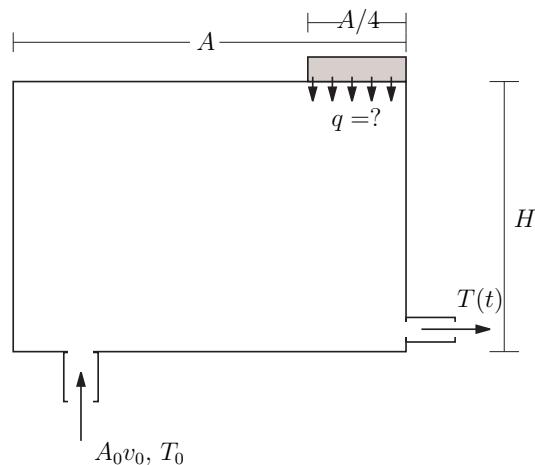


Figura 7.17: Aquecimento de ar circulando recipiente.

2. A figura 7.18 mostra um aparato conhecido por *tubo venturi*, para medir a vazão de um tubo. O aparato consiste de um afunilamento do tubo (seção 2, área A_2) e do uso de dois manômetros para se medir a pressão nas seções 1 (área A_1) e 2. Admita que os fluxos de energia potencial nas seções 1 e 2 do tubo são idênticos, que o regime do escoamento é permanente, que todas as propriedades do fluido e do escoamento são homogêneas em cada seção transversal do tubo, e que dissipações viscosas são desprezíveis. Em função de A_1 , A_2 , das alturas manométricas h_1 e h_2 , e da massa específica do fluido ρ , determine as velocidades na seção 1 e na seção 2.

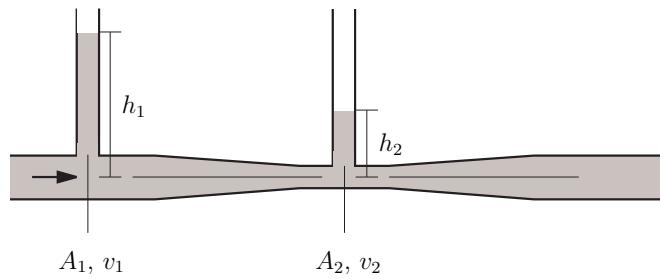
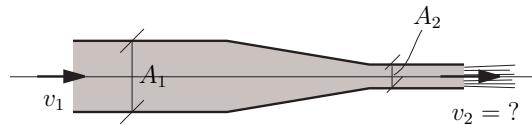
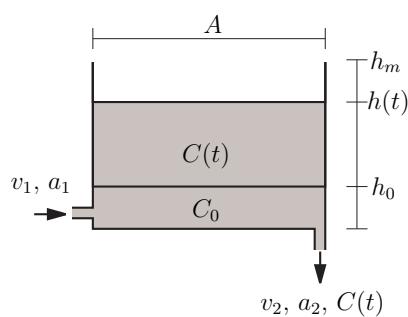


Figura 7.18: Tubo venturi.

3. A figura 7.19 mostra uma contração em uma tubulação que despeja água na atmosfera em forma de um jato após a contração (pense na ponta de uma mangueira do corpo de bombeiros). Admitindo que as propriedades do fluido são uniformes nas seções transversais, que o escoamento é permanente, que a dissipação viscosa pode ser desprezada, e que o sistema não se envolve em processos de trocas de calor. calcule a força F que o fluido faz na tubulação em função da massa específica do fluido ρ , da velocidade antes da contração v_1 , da aceleração da gravidade g , das áreas antes e depois da contração A_1 e A_2 , e da pressão atmosférica p_0 .
4. A figura 7.20 mostra um tanque de base com área A e altura h_m inicialmente contendo água até o nível h_0 e com uma concentração inicial de cloro C_0 . Para que se faça a retirada do cloro ao mesmo tempo que se

**Figura 7.19:** Força devido a uma contração de um tubo.

encha o tanque, abre-se a válvula da seção 1 (área a_1) e injeta-se *água pura* no tanque com velocidade v_1 . Enquanto isso, abre-se também a válvula da seção 2 (área a_2) e controla-se a velocidade de saída v_2 para que esta propicie uma vazão igual à metade da vazão de entrada. Admita que o cloro e a água se misturam imediatamente, de forma que a concentração de cloro na saída é igual à concentração de cloro dentro do tanque $C(t)$. Admita também que não há fluxo difusivo envolvido no problema ($J = 0$). Em função de A , v_1 , a_1 , h_0 , h_m , C_0 , e da massa específica da mistura água cloro (considere-a constante) ρ , encontre a solução $C(t)$ da equação acima e determine o tempo para que a concentração se reduza à metade de C_0 . (Dica: Massa de fluido (água+cloro) dentro do tanque (ver termo transiente da equação da conservação da massa): $M = \int_V \rho dV = \rho Ah(t)$. Massa de cloro dentro do tanque: $M_A = \int_V C_A \rho dV = MC(t) = \rho Ah(t)C(t)$.)

**Figura 7.20:** Entra água pura – Sai água com cloro.

5. A figura 7.21 mostra um sistema em regime permanente onde entra água (com massa específica uniforme ρ) na seção 1 e sai pela seção 2. As áreas das seções são A_1 e A_2 respectivamente. A pressão na seção 2 é p_2 , enquanto que na seção 1 a pressão é desconhecida. Considere que as propriedades do escoamento (pressão, velocidade, energia cinética e potencial, etc.) podem ser consideradas uniformes em cada seção. Despreze a pressão atmosférica agindo no sistema. Sabendo que a força horizontal máxima que o apoio da tubulação suporta fazer antes de quebrar é F , calcule a velocidade máxima v_1 de entrada do fluido pela seção 1 para a qual a haste não quebra em função de F , p_2 , Δh , A_1 , A_2 . (obs.: não se preocupe com a força vertical no apoio, ou seja, ignore as forças na direção vertical.)

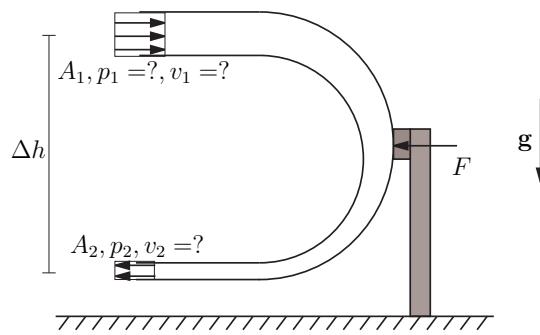


Figura 7.21: Determinação de v máximo em relação à resistência de uma haste.

6. A figura 7.22 mostra um tanque esférico (raio R) onde entra água (massa específica ρ , incompressível) pura na seção 1. No fundo, há uma fonte de um soluto A alimentando a água na esfera a um fluxo específico igual a j_A através da área a . Admita que esta massa do soluto se mistura imediatamente com a água e que a massa específica da solução permanece igual à da água pura. A solução água+soluto então sai pela área A_2 . Em função dos dados e a partir das equações integrais da conservação:
- (a) determine a velocidade v_2 da solução na saída; (b) qual é a solução em regime permanente (equilíbrio) do problema? (c) determine uma equação diferencial para a concentração C_A do soluto como função do

tempo, que descreva o regime transitório; (d) Resolva a equação acima utilizando a condição inicial $C_A(t = 0) = 0$;

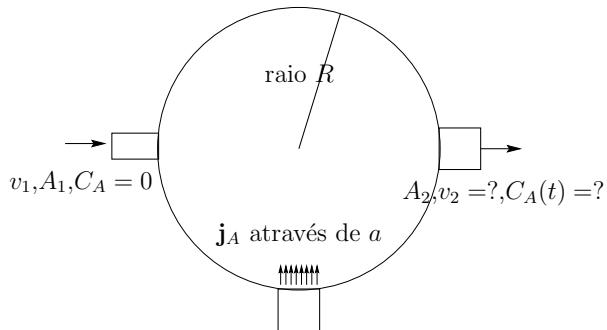


Figura 7.22: Esfera com soluto.

7. Para o recipiente furado da figura 7.23, calcule a distância X que a água atingirá como função de h e H . Para que valor de h/H a distância X será máxima?

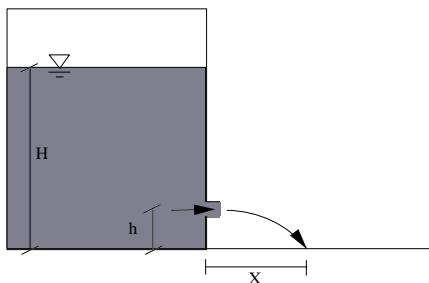


Figura 7.23: Tanque furado.

8. A figura 7.24 mostra um duto de diâmetro D levando ar (massa específica ρ) com pressão p_1 e velocidade V_1 . Na saída, à pressão atmosférica p_0 , o ar se choca com um cone com ângulo de 90° formando uma lâmina de altura d . Estime a força por unidade de altura do cone que o ar faz no cone (ou seja, estime a força para um cone de altura unitária).

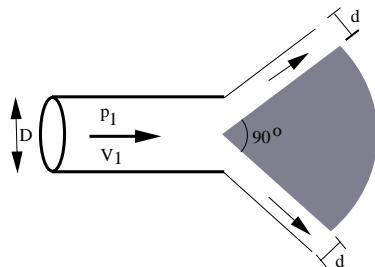


Figura 7.24: Força do ar sobre um cone.

9. A figura 7.25 mostra uma tubulação com escoamento permanente de água de massa específica ρ . A tubulação está em planta (portanto, ignore a força da gravidade). Nessa tubulação há uma redução de diâmetro (de D para d), e logo após, há uma curva (o diâmetro se mantém igual a d nessa curva) de 180°. A velocidade e a pressão são uniformes na área da seção e conhecidas na entrada do tubo (V_1 e p_1). Desprezando qualquer perda de energia por dissipação: (i) utilizando a conservação da massa e a equação de Bernoulli, calcule a velocidade e a pressão na saída do tubo; (ii) utilizando a conservação da quantidade de movimento, calcule a força que a água faz nesse trecho de tubulação;

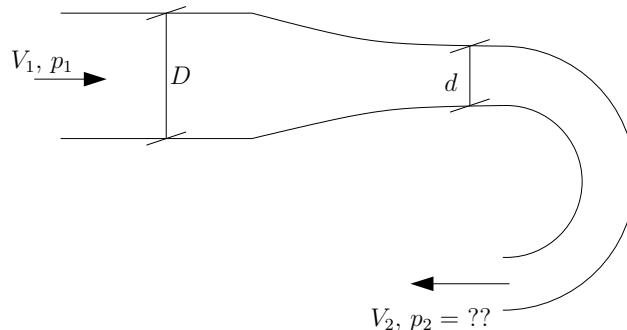


Figura 7.25: Força em um trecho conduto.

10. A figura 7.26 mostra um canal de largura b (perpendicular ao plano do papel) onde há o escoamento de água (massa específica constante

ρ) que sobe uma rampa com ângulo de inclinação β . A água é então lançada para cima no final da rampa de altura H (o sistema é similar à “rampa de ski” nos canais vertedores de Itaipu). A profundidade da água h ao longo do seu percurso é uniforme e constante. Suponha que a velocidade da água é tão grande que a pressão em qualquer ponto da água pode ser desprezada, e que a velocidade da água antes da rampa é V_0 . Em função das variáveis dadas:

- Determine a velocidade V_1 da água na saída da rampa.
- Determine a força F (horizontal) que a água faz na rampa.

Obs.: justifique toda vez que desprezar um termo.

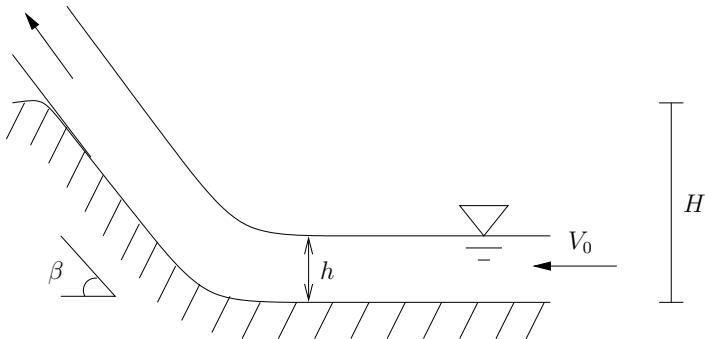


Figura 7.26: Força da água numa rampa.

- A figura 7.27 mostra (em planta) uma lagoa com volume V constante. Três rios desaguam na lagoa com vazões (volume por tempo) Q_0 , Q_1 e Q_2 constantes. Esses rios contêm quantidade de poluente quantificados pelas concentrações (massa de soluto por massa total da solução) constantes $C_0 = 0$ (rio limpo), C_1 e C_2 , respectivamente. Suponha que a concentração do poluente é uniforme (bem misturada) dentro da lagoa e igual à concentração na saída da lagoa $C_s(t)$ (em princípio, variável no tempo). Em função das variáveis dadas:
 - Determine a vazão Q_s (constante) na saída.
 - Encontre uma equação diferencial para a concentração $C_s(t)$.
 - Determine o menor Q_0 para que a concentração na lagoa não ultrapasse um valor máximo denotado por C_{\max} (esse valor é conhecido).
 Obs.: Despreze fluxos difusivos ($J = 0$)

- A figura 7.28 mostra um sistema em que água (densidade ρ , profundida-

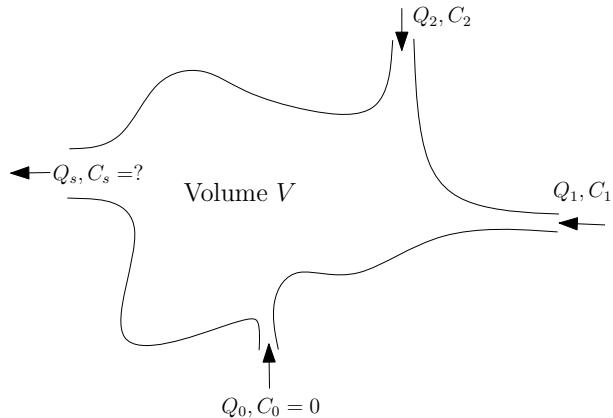


Figura 7.27: Lagoa com poluente.

dade H) sob pressão p_g de um gás de um tanque sai por uma tubulação de diâmetro constante que se curva para cima até uma altura h , onde a pressão é a atmosférica p_{atm} . Conhecendo essas variáveis (mais, obviamente, a aceleração gravitacional g), e supondo escoamento permanente, determine:

- A velocidade V_2 da saída do tubo.
- A velocidade V_1 na entrada do tubo.
- A pressão p_1 na entrada do tubo.

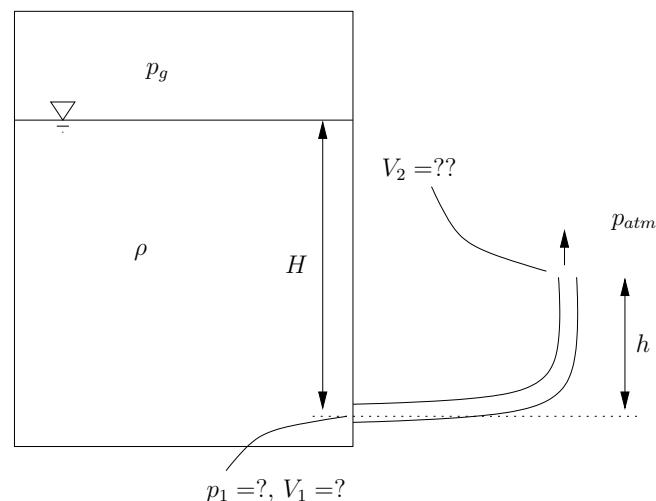


Figura 7.28: Tanque com jato de água.



Apêndice B

Parte de Livro (a ser submetido para publicação) de Matemática Aplicada

Uma Introdução aos Métodos Matemáticos para Engenharia

Nelson Luís Dias

Departamento de Engenharia Ambiental e
Lemma – Laboratório de Estudos em Monitoramento e
Modelagem Ambiental
Universidade Federal do Paraná

13 de novembro de 2014

Sumário

0 Formalismos matemáticos	19
1 Uma breve introdução à análise dimensional	21
1.1 Primeiros exemplos	21
1.2 Definição formal de Dimensão	24
1.3 Análise dimensional e formas universais de funções de fenômenos físicos	26
1.4 O significado de dimensão fundamental	28
2 Revisão de variáveis complexas	31
2.1 Números complexos	31
2.2 Conjugado de um número complexo	32
2.3 A fórmula de Moivre	35
2.4 A fórmula de Euler	36
2.5 Desigualdades	38
2.6 Álgebra com números complexos	39
3 Ferramentas computacionais	43
3.1 Antes de começar a trabalhar,	43
3.2 Python	45
3.3 Maxima	54
4 Um pouco de polinômios, integrais, séries e equações diferenciais	59
4.1 Integração numérica: motivação	59
4.2 A regra do trapézio	63
4.3 Aproximação de integrais com séries: a função erro	68
4.4 Solução numérica de equações diferenciais ordinárias	73
4.5 Solução numérica; método de Euler	74
4.6 Um método implícito, com tratamento analítico	79
4.7 Runge-Kutta	79
4.8 O método de Runge-Kutta multidimensional	88
5 Geometria e Álgebra	103
5.1 Vetores	103
5.2 Álgebra Linear	108
5.3 Aplicações geométricas	111
5.4 O determinante	122
5.5 Transformações lineares	124

Sumário	4
5.6 Sistemas de equações lineares	132
5.7 Teorema dos II's	137
5.8 Autovalores e autovetores	140
5.9 Invariantes do problema de autovetor	144
6 Métodos de solução de sistemas de equações lineares	155
6.1 Eliminação de Gauss	155
6.2 Diagonalização	164
7 Funções no \mathbb{R}^n	171
7.1 A regra da cadeia	171
7.2 Séries de Taylor multivariadas	172
7.3 O Teorema da função implícita	173
7.4 A regra de Leibnitz	181
7.5 Comprimentos, áreas e volumes	184
7.6 Divergência, rotacional, gradiente	191
7.7 Os Teoremas de Gauss e Stokes	202
8 Equações diferenciais ordinárias	207
8.1 Introdução	207
8.2 Classificação	210
8.3 Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem 1	212
8.4 Equações de ordem 1 linearizáveis	220
8.5 Equações diferenciais lineares de ordem 2 a coeficientes constantes	224
8.6 A equação de Euler	230
8.7 Problemas adicionais	232
9 Cálculo de variáveis complexas	239
9.1 Funções plurívocas, cortes e ramos	239
9.2 A derivada, funções analíticas e as condições de Cauchy-Riemann	243
9.3 Sequências e séries	245
9.4 Integração de contorno: o Teorema de Cauchy e deformação de caminho	249
9.5 A fórmula integral de Cauchy	252
9.6 Séries de Taylor e de Laurent	254
9.7 O cálculo de séries de Laurent	258
9.8 Séries de potências	260
10 Soluções de EDO's em séries	261
10.1 Motivação	261
10.2 O método de Frobenius	262
11 Transformadas de Laplace	287
11.1 Definição e existência	287
11.2 O cálculo de transformadas de Laplace	290
11.3 Propriedades da Transformada de Laplace	292
11.4 Convolução	294
11.5 Outros truques	295
11.6 Inversão	296
11.7 Aplicação a uma equação diferencial parcial de difusão-advecção	304

12 Uma breve introdução à teoria de distribuições	309
12.1 A delta de Dirac	309
12.2 O Cálculo com Distribuições	313
12.3 Resultados adicionais	316
12.4 Aplicações	318
13 Solução numérica de equações diferenciais parciais	327
13.1 Advecção pura: a onda cinemática	327
13.2 Difusão pura	338
13.3 Difusão em 2 Dimensões: ADI, e equações elíticas	356
14 Espaços normados e séries de Fourier	363
14.1 O produto interno	363
14.2 A desigualdade de Schwarz	366
14.3 Espaços vetoriais de dimensão infinita	368
14.4 Séries de Fourier	374
14.5 Extensões par e ímpar de uma função	380
14.6 Além de senos e cossenos	385
14.7 A desigualdade de Bessel, e a igualdade de Parseval	387
15 A Transformada de Fourier	391
15.1 Definição e o teorema da inversão	391
15.2 O cálculo de algumas transformadas	392
15.3 Linearidade; a transformada das derivadas	397
15.4 O Teorema da convolução	403
15.5 O Teorema de Parseval	406
15.6 A fórmula da inversa da transformada de Laplace	407
16 Funções de Green e a teoria de Sturm-Liouville	409
16.1 Operadores auto-adjuntos	409
16.2 A matriz adjunta	410
16.3 Operadores diferenciais adjuntos	411
16.4 Funções de Green	412
16.5 A teoria de flambagem de Euler	421
16.6 A equação de Sturm-Liouville	422
17 Equações diferenciais parciais	431
17.1 Introdução ao método das características	431
17.2 O método das características e a classificação de Equações Diferenciais Parciais	436
17.3 O método de separação de variáveis para problemas parabólicos	438
17.4 O método de separação de variáveis para problemas elíticos	451
17.5 O método de separação de variáveis para problemas hiperbólicos	463
17.6 A solução de d'Alembert para a equação da onda em um domínio infinito	467
A A decomposição de funções racionais em frações parciais	473
A.1 Coeficientes reais	478
B Soluções de exercícios propostos selecionados	481

Sumário	6
C Para as coisas funcionarem em Windows	597
D Dados de vazão média anual e vazão máxima anual, Rio dos Patos, 1931–1999	599

Lista de Tabelas

3.1	Vazões Máximas Anuais ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$) no Rio dos Patos, PR, 1931–1999	48
4.1	Estimativas numéricas de I e seus erros relativos δ	64
5.1	O crescimento de $\exp(n)$ versus $n!$	117
17.1	20 primeiros zeros de $J_0(x)$	447

Lista de Figuras

1.1	Análise dimensional do período de um pêndulo.	22
1.2	Esquema de uma camada-limite convectiva.	30
2.1	Interpretação geométrica de um número complexo.	33
2.2	Funções hiperbólicas: $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$.	42
3.1	FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos.	51
3.2	A função $f(x) = x/(1 + x^{7/3})$	55
4.1	Integração numérica de uma função	61
4.2	A regra do trapézio, com $n = 4$ e $n = 8$ trapézios.	64
4.3	Função $\text{erf}(x)$ calculada por integração numérica, com <code>trapepsilon</code> e $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$, versus a <code>erf</code> pré-definida no programa de plotagem.	69
4.4	Função $\text{erf}(x)$ calculada com série de Taylor, com <code>erf_1</code> , versus a <code>erf</code> pré-definida no programa de plotagem.	72
4.5	Solução da equação (4.14).	74
4.6	Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de <code>sucesso.py</code> , para $\Delta x = 0,01$.	78
4.7	Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de <code>sucesso.py</code> , para $\Delta x = 0,5$.	78
4.8	Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de <code>sucimp.py</code> , para $\Delta x = 0,5$.	80
4.9	Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de <code>euler2.py</code> , para $\Delta x = 0,5$.	82
4.10	Comparação da solução analítica da equação (4.14) com a saída de <code>rungek4.py</code> , para $\Delta x = 0,5$.	84
4.11	Cálculo de $\Gamma(x)$ com o método de Runge-Kutta: saída de <code>intgam1</code> comparada com a função $\Gamma(x)$ do programa de plotagem (Gnuplot)	85
4.12	O integrando $\gamma(x, t)$ para $x = 1, \dots, 5$.	88
4.13	Solução numérica pelo Método de Runge-Kutta de um sistema de 2 equações diferenciais ordinárias	92
4.14	Drenagem de um maciço poroso semi-infinito inicialmente totalmente saturado.	92
4.15	Resultado da integração numérica do problema de Boussinesq para um aquífero semi-infinito	96
4.16	Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta.	98
4.17	Um pêndulo forçado não-linear.	100

5.1	A representação geométrica usual do vetor $(2, 1)$, e uma interpretação alternativa, mas igualmente válida!	103
5.2	O Teorema de Pitágoras	111
5.3	O Teorema dos Cossenos	112
5.4	Uma transformação linear que produz um cisalhamento simples	126
5.5	Uma transformação linear que produz uma rotação simples	127
5.6	Uma transformação não-linear (no caso, $f(x) = \operatorname{tgh} x$) pode ser inversível sem ser bijetiva. Já uma transformação linear inversível (no caso, $g(x) = 2x$) é sempre bijetiva.	134
5.7	Duas retas e uma projeção v de u no plano $x + 2y + z = 0$	136
7.1	O Teorema da função implícita, e uma situação indesejável	174
7.2	Uma dedução lagrangeana da regra de Leibnitz.	181
7.3	Cálculo do comprimento de arco de uma curva.	184
7.4	Parametrização de uma superfície no espaço, e o cálculo de sua área. .	186
7.5	Comprimento de arco de uma espiral infinita.	191
7.6	A divergência em coordenadas cartesianas.	192
7.7	Superfície $z = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})/\sqrt{x^2 + y^2}$ e suas curvas de nível.	194
7.8	(a) o vetor t é tangente à curva de nível Λ e a curva \mathcal{L} é <i>localmente</i> paralela a Λ ; (b) o vetor t é perpendicular à curva de nível Λ e a curva \mathcal{L} é <i>localmente</i> perpendicular a Λ	196
7.9	Uma motivação simples para o Teorema da divergência. Os espaços entre os diversos elementos são para facilitar a visualização; as fronteiras internas e externas na verdade se sobrepõem. A divergência é definida no centro (pontos pretos) de cada elemento.	203
7.10	O teorema de Stokes.	204
8.1	Integração de $1/x$ sobre os ramos positivo e negativo	209
9.1	Raízes quadradas de $-(1+i)$	240
9.2	Um corte no plano complexo (em cinza) e uma trajetória no plano (em preto).	241
9.3	Um corte para a função $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$	242
9.4	A derivada no plano complexo: existem infinitos caminhos ao longo dos quais Δz pode tender a zero, e todos devem resultar no mesmo limite.	243
9.5	As somas s_n da série harmônica até 100000.	247
9.6	O Teorema de Cauchy, e a deformação de caminho	251
9.7	A fórmula integral de Cauchy.	252
9.8	A fórmula de Taylor para funções complexas.	254
9.9	A região de validade da expansão em série de Laurent: $f(z)$ é analítica na região cinza, e a sua expansão em série de Laurent em torno de z_0 vale no anel entre os círculos de raios R_1 e R_2	256
9.10	A obtenção da fórmula para a série de Laurent.	256
9.11	A função $f(x) = 1/(1+x^2)$. O seu raio de convergência é $R = 1$ devido às singularidades de $f(z) = 1/(1+z^2)$ em $z = \pm i$	259
11.1	Gráfico da função $e^{-t}\Gamma(t)$	288

11.2 Região de integração dupla no plano $t \times \tau$ para o cálculo da transformada de Laplace da convolução $f * g$	295
11.3 Caminho de integração para a fórmula de inversão 11.14.	297
11.4 Caminho de integração para o Exemplo 11.6.	297
11.5 Os dois ramos da transformação $u(v)$	306
12.1 Efeito de uma função $\phi_n(x - a)$, selecionando o valor de $f(a)$	310
12.2 A sequência $\phi_B(x)$, $B = 1, 2, 10$	313
12.3 Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada	319
12.4 Carregamento descontínuo sobre uma viga bi-apoiada	321
12.5 Problema 12.14.	324
12.6 Problema 12.15.	325
13.1 Condição inicial da equação 13.3.	327
13.2 Solução numérica produzida por <code>onda1d-ins.py</code> , para $t = 250\Delta t$, $500\Delta t$ e $750\Delta t$	330
13.3 Solução numérica produzida por <code>onda1d-lax.py</code> , para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$	335
13.4 Solução numérica produzida pelo esquema <i>upwind</i> , para $t = 500\Delta t$, $1000\Delta t$ e $1500\Delta t$	337
13.5 Solução analítica da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0,05$, $t = 0,10$ e $t = 0,15$	340
13.6 Solução numérica com o método explícito (13.35) (círculos) <i>versus</i> a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t =$ $0,05$, $t = 0,10$ e $t = 0,15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica. .	344
13.7 Solução numérica com o método implícito (13.39) (círculos) <i>versus</i> a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t =$ $0,05$, $t = 0,10$ e $t = 0,15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica. .	348
13.8 Solução numérica com o método de Crank-Nicholson ((13.45)) (círculos) <i>versus</i> a solução analítica (linha cheia) da equação de difusão para $t = 0$, $t = 0,05$, $t = 0,10$ e $t = 0,15$. Apenas 1 a cada 5 pontos da grade numérica são mostrados, para facilitar a comparação com a solução analítica.	349
13.9 Comparação entre as soluções analítica (linhas) e numérica com um esquema implícito (pontos) da equação da difusão-advecção com termo de decaimento, para $t = 0,333$, $t = 0,666$ e $t = 0,999$	353
13.10 Solução analítica da equação da difusão bidimensional, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0,1$, $t = 0,2$ e $t = 0,3$	358
13.11 Solução numérica da equação da difusão bidimensional com o es- quema ADI, para $t = 0$, $t = 0$, $t = 0,1$, $t = 0,2$ e $t = 0,3$	360
15.1 O contorno de integração de $g(z) = e^{-z^2}$	394
16.1 Pilar sobre roletes, carregado verticalmente	421
16.2 Gráfico da solução de $\operatorname{tg}(kh) = \epsilon kh$	426
17.1 O método das características para a propagação de uma onda com celeridade constante c	432

Sumário	12
---------	----

17.2 Funções de Bessel de ordem 0	446
17.3 Esvaziamento de um maciço poroso	448
17.4 Condições inicial e de contorno para o problema 17.15.	450
17.5 Solução numérica da explosão de uma mina submarina.	458
17.6 Tratamento das condições de contorno não-homogêneas de um problema envolvendo a equação de Laplace.	459
17.7 Uma rotação do domínio da equação de Laplace para V o “transforma” no problema para W	460
17.8 Figura do Problema 17.21.	463
B.1 Função $x \operatorname{sen}(x)$ calculada com a série de Taylor implementada no programa <code>xsenx.py</code> , <i>versus</i> a função pré-definida no programa de plotagem.	492
B.2 Paralelogramo da prova do Exercício 5.10.	496
B.3 O Teorema dos Senos.	496

Lista de Listagens

3.1	<code>binint.py</code> – Exemplo de <i>strings</i> , e inteiros.	45
3.2	<code>floats.py</code> – Exemplo de uso de <code>float</code> e <code>complex</code>	47
3.3	<code>patos-medmax.dat</code> – Vazões média e máxima anuais, Rio dos Patos	49
3.4	<code>fqiemp.py</code> – Cálculo de uma FDA empírica	49
3.5	<code>fqiemp.dat</code> – FDA empírica da vazão máxima anual no Rio dos Patos.	51
3.6	<code>bintext.py</code> – Exemplo de arquivo texto e arquivo binário	52
3.7	<code>writearr.py</code> – Escreve um arquivo binário contendo 3 “linhas”, cada uma das quais com um <i>array</i> de 10 <code>float</code> ’s.	53
3.8	<code>readarr.py</code> – Lê um arquivo binário contendo 3 “linhas”, cada uma das quais com um <i>array</i> de 10 <code>float</code> ’s.	53
3.9	Obtenção do ponto de máximo de uma função com <code>Maxima</code>	56
3.10	<code>mulambda.max</code> – Cálculo da média da distribuição Weibull em em função de seus parâmetros λ e k	56
3.11	Saída do programa <code>mulambda.max</code>	57
4.1	<code>achapol.max</code> – Polinômio com propriedades definidas	60
4.2	Saída de <code>achapol.max</code>	60
4.3	Cálculo da integral de um polinômio analiticamente, com <code>Maxima</code>	61
4.4	<code>passaquad.max</code> – parábola $h(x) = ax^2+bx+c$ passando por $(1,f(1))$, $(3,f(3))$ e $(5,f(5))$	62
4.5	Saída de <code>passaquad.max</code>	63
4.6	<code>numint.py</code> – Integração numérica, regra do trapézio	65
4.7	<code>quadraver1.py</code> – Integração numérica de $f(x)$ com 8 trapézios	65
4.8	<code>numint.py</code> – Integração numérica ineficiente, com erro absoluto pré-estabelecido	66
4.9	<code>quadraver2.py</code> – Integração numérica ineficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0,0001$	66
4.10	<code>numint.py</code> – Integração numérica eficiente, com erro absoluto pré-estabelecido	67
4.11	<code>quadraver3.py</code> – Integração numérica eficiente de $f(x)$ com $\epsilon = 0,000001$	67
4.12	<code>vererf.py</code> – Cálculo da função erro por integração numérica	69
4.13	Cálculo de $erf(x)$ com uma série de Taylor.	71
4.14	<code>vererf1.py</code> – Cálculo da função erro com série de Taylor entre 0 e 3.	71
4.15	<code>erfs.py</code> – Cálculo de $erf(x)$ com série de Taylor, limitado a no máximo 43 termos	73
4.16	<code>resolve-eqdif</code> – Solução de uma EDO com <code>Maxima</code>	74
4.17	<code>fracasso.py</code> – Um programa com o método de Euler que não funciona	76
4.18	<code>sucesso.py</code> – Um programa com o método de Euler que funciona .	77

4.19	sucimp.py – Método de Euler implícito	80
4.20	euler2 – Um método explícito de ordem 2	81
4.21	rungk4 – Método de Runge-Kutta, ordem 4	83
4.22	Primeiro protótipo para o cálculo de $\Gamma(x)$	86
4.23	Programa definitivo para o cálculo de $\Gamma(x)$	87
4.24	Listas em Python	89
4.25	tentaarray.py: arrays com Numpy	90
4.26	rungk4v.py: o método de Runge-Kutta multidimensional	91
4.27	Solução numérica do modelo de Streeter-Phelps com o método de Runge-Kutta	99
	verysimplesum.out	106
5.1	verysimplesum.py – Uma soma simples com Python	107
	notsosimple.py	107
	notsosimple.out	107
	fatvsexp.py	117
5.2	levisemcom.py – Cálculo do símbolo de permutação de Levi-Civitta	118
5.3	eigenrot.py – Cálculo de autovalores e autovetores em Python, com numpy	141
	simcons3.out	149
5.4	simcons3.py – Manipulações de matrizes simétricas	150
	dia4.py	165
	dia4.py	166
	dia4.py	166
	dia4.py	167
	dia4.py	167
	dia4.py	167
7.1	jacobsphere – Jacobiano de coordenadas esféricas	180
7.2	Cálculo do Jacobiano de coordenadas esféricas com Maxima	180
9.1	Obtenção de ‘e’ com 20 casas decimais utilizando Maxima	246
9.2	oresme.py – cálculo das somas da série harmônica	247
10.1	a2nbn – Relação de recorrência para a_{2n} , e o cálculo direto utilizando (10.9)	277
10.2	Saída do programa a2nbn.max	278
10.3	Comparação entre b_n e d_n para alguns valores iniciais de n	280
10.4	Saída de vamosbd.max	281
10.5	Cálculo dos coeficientes da solução em série de $y' + e^{-x}y = 0; y(0) = 1$	284
10.6	Coeficientes da solução de $y' + e^{-x}y = 0; y(0) = 1$ produzidos por Maxima	285
11.1	Obtenção da integral 11.42 com Maxima	307
13.1	onda1d-ins.py – Solução de uma onda 1D com um método explícito instável	329
13.2	surf1d-ins.py – Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem	330
13.3	onda1d-lax.py – Solução de uma onda 1D com um método explícito laxável	334
13.4	surf1d-lax.py – Seleciona alguns intervalos de tempo da solução numérica para plotagem	335
13.5	difusao1d-ana.py – Solução analítica da equação da difusão	339

13.6 <code>divisao1d-ana.py</code> — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização	340
13.7 <code>difusao1d-exp.py</code> — Solução numérica da equação da difusão: método explícito.	342
13.8 <code>divisao1d-exp.py</code> — Seleciona alguns instantes de tempo da solução analítica para visualização	343
13.9 <code>algin.py</code> — Exporta uma rotina que resolve um sistema tridiagonal.	346
13.10 <code>difusao1d-imp.py</code> — Solução numérica da equação da difusão: método implícito.	347
13.11 <code>difusao1d-ckn.py</code> — Solução numérica da equação da difusão: esquema de Crank-Nicholson.	350
<code>sana.max</code>	352
13.12 Implementação de um esquema numérico implícito para a equação da difusão-advecção.	354
13.13 <code>difusao2d-ana.py</code> — Solução analítica da equação da difusão bidimensional.	358
13.14 <code>difusao2d-adi.py</code> — Solução numérica da equação da difusão bidimensional, esquema ADI.	359
14.1 Coeficientes de Fourier de $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$	377
14.2 Os primeiros 6 polinômios de Legendre	386
17.1 Solução numérica de uma explosão de uma mina <code>achap.py</code>	456
B.1 Aproximação de $\int_0^\pi \sin x dx$ com um polinômio do 3º grau	489
B.2 Cálculo de $\int_0^\pi \sin(x) dx$ com 10 trapézios.	489
B.3 Dedução da regra de Simpson.	490
B.4 <code>xsenx.py</code> — Cálculo da série de Taylor de $f(x) = x \sin(x)$	492
<code>squares.max</code>	493
<code>cubes.max</code>	494
B.5 Obtenção de uma matrix na forma escada com Maxima.	502
2010-2-p04-c.plt	566
<code>integrap04.max</code>	595
<code>integrap04.max</code>	596
<code>patos-medmax.dat</code>	599

15

A Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma das ferramentas mais poderosas de Matemática Aplicada. Ela é usada para decompor uma função de acordo não com o seu comportamento local (“ $f(x)$ ”), mas com o comportamento sobre um conjunto de escalas (“ $\widehat{f}(k)$ ”), onde k é um número de onda (uma frequência angular). À medida que nos acostumarmos com o cálculo de transformadas de Fourier, e com suas propriedades, nós poderemos começar a “entender” o par $f(x) \leftrightarrow \widehat{f}(k)$ como duas faces de uma mesma moeda, ou seja: como uma única *entidade*, que nós usualmente identificamos no domínio do espaço-tempo ($f(x)$), mas que possui uma existência igualmente “real” e válida no domínio da frequência ($\widehat{f}(k)$).

15.1 – Definição e o teorema da inversão

A transformada de Fourier será definida neste texto como

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \widehat{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (15.1)$$

O resultado mais importante de toda a teoria, sem dúvida, é o

Teorema 15.1 (Teorema da inversão) Se $\widehat{f}(k)$ é definida por (15.1), então

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (15.2)$$

Existem diversas formas de provar o teorema 15.1, mas o rigor e a profundidade variam muito. A forma rigorosa da prova envolve o uso dos assim chamados *Lemas de Riemann-Lebesgue*: esse é o caminho adotado por [Zemanian \(1987, seção 7.2\)](#), e [Dettman \(1988, seção 8.1\)](#). [Greenberg \(1978\)](#) é tão conciso que praticamente só enuncia (15.1) e (15.2) em seu capítulo 6; o resultado, entretanto, já foi obtido formalmente no capítulo 5. [Butkov \(1988\)](#) apresenta a mesma demonstração formal. Finalmente, [Sachdev e Woyczyński \(1997, seção 3.2\)](#) apresentam uma demonstração atraente, com o uso da delta de Dirac. Vamos começar pela demonstração formal de [Greenberg \(1978\)](#), e de [Butkov \(1988\)](#). Do capítulo 14, nós temos a forma complexa de séries de Fourier e o cálculo de seus coeficientes. Para uma $f(x)$ definida no intervalo simétrico $a = -l$, $b = +l$ com $L = 2l$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (15.3)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{-i\frac{\pi n x}{l}} dx, \quad (15.4)$$

cuja reunião nos dá

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) e^{-i\frac{\pi n \xi}{l}} d\xi \right] e^{i\frac{\pi n x}{l}}. \quad (15.5)$$

Adotamos agora a definição dos números de onda

$$k_n \equiv \frac{\pi n}{l}, \quad (15.6)$$

de modo que a distância entre k_n e k_{n+1} é $\Delta k = \pi/l$; levando em (15.5),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x} \frac{\pi}{l} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x} \Delta k \Rightarrow \\ f(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk \end{aligned} \quad (15.7)$$

quando $l \rightarrow \infty$. Note que (15.7) nada mais é do que o teorema 15.1.

Veja agora uma abordagem parecida com a de [Saichev e Woyczyński \(1997\)](#) (porém simplificada mais ainda). Parta de (15.1), e escreva agora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi, \\ \widehat{f}(k) e^{ikx} &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx}, \\ \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk \\ &= \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(x-\xi)}}{2\pi} dk \right] d\xi. \end{aligned}$$

De (12.13), a integral entre colchetes é simplesmente $\delta(x - \xi) = \delta(\xi - x)$; então,

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk = \int_{\xi=\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi = f(x),$$

e temos, mais uma vez (e com considerável elegância), o teorema 15.1.

15.2 – O cálculo de algumas transformadas

Esta é uma seção de “mãos à obra”, com alguns cálculos de transformadas de Fourier resolvidos.

Exemplo 15.1 Calcule $\hat{f}(k)$ para

$$f(x) = e^{-(\frac{x}{a})^2}.$$

SOLUÇÃO

A fração no argumento é para nos lembrarmos de que em geral, em aplicações, é preciso levar em consideração as dimensões físicas. Assim, se x é uma distância ao longo de uma reta,

$$\|x\| = \|a\| = L.$$

O cálculo padrão é

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x}{a})^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(\frac{x}{a})^2 + ikx]} dx.\end{aligned}$$

Aqui, o “truque” padrão é “completar o quadrado”. Observe como x aparece com as potências 2 e 1 acima; a idéia é encontrar um binômio de x e uma constante que resulte em um quadrado perfeito. A técnica é sistemática:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \\ \alpha &= \frac{x}{a}, \\ 2\alpha\beta &= ikx,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{ikx}{2\alpha} = \frac{ikxa}{2x} = \frac{ika}{2}, \\ \beta^2 &= -\frac{k^2 a^2}{4}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + ikx &= \left(\frac{x}{a}\right)^2 + ikx - \frac{k^2 a^2}{4} + \frac{k^2 a^2}{4} \\ &= \left(\frac{x}{a} + \frac{ika}{2}\right)^2 + \frac{k^2 a^2}{4}\end{aligned}$$

A transformada desejada é

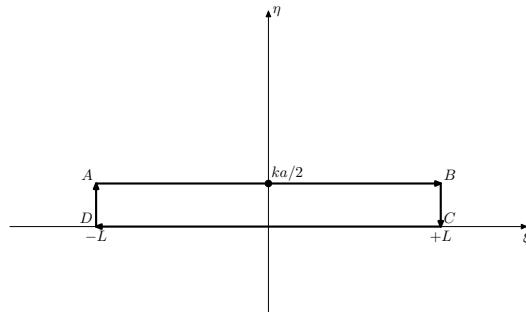
$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{ika}{2}\right)^2 - \frac{k^2 a^2}{4}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{a} + \frac{ika}{2}\right)^2} dx.\end{aligned}$$

Essa não é uma integral elementar, e precisa ser calculada com um certo cuidado. Faça

$$z = \xi + i\eta = \frac{x}{a} + \frac{ika}{2}, \quad dz = dx/a,$$

e reescreva

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} ae^{-\frac{k^2 a^2}{4}} \int_{-\infty + \frac{ika}{2}}^{+\infty + \frac{ika}{2}} e^{-z^2} dz.$$

Figura 15.1: O contorno de integração de $g(z) = e^{-z^2}$.

Essa é uma integral de *linha* no plano complexo; em primeiro lugar, note que neste exemplo a parte real de z não é x , mas sim $\xi = x/a$; a parte imaginária é η , e o caminho de integração é a reta $\eta = ka/2$.

Em seguida, note que $g(z) = e^{-z^2}$ é uma função *analítica* em todo o plano $\xi \times \eta$, e portanto pelo Teorema de Cauchy qualquer integral em um contorno fechado de $g(z)$ é nula. Em seguida, considere o contorno mostrado na figura 15.1.

Pelo Teorema de Cauchy, então,

$$\int_{ABCD} g(z) dz = 0.$$

O trecho CD produz uma integral puramente real, e bem conhecida no $\lim L \rightarrow \infty$:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{CD} g(z) dz = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{+L}^{-L} e^{-x^2} dx = -\sqrt{\pi}.$$

A esperança aqui é que $|\int_{BC,DA}| \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$, de tal maneira que a integral que precisamos calcular, $\int_{AB} g(z) dz$, seja dada em função da integral conhecida $\int_{CD} g(z) dz$. A verificação não é muito difícil:

$$\begin{aligned} \left| \int_{BC} g(z) dz \right| &\leq \int_{BC} |g(z)| dz \\ &= \int_{\eta=0}^{ka/2} |e^{-z^2}| dz \\ &= \int_{\eta=0}^{ka/2} |e^{-(L+i\eta)^2}| d\eta \\ &= \int_{\eta=0}^{ka/2} |e^{-(L^2+i2L\eta-\eta^2)}| d\eta \\ &= e^{-L^2} \int_{\eta=0}^{ka/2} |e^{-i2L\eta}| |e^{-\eta^2}| d\eta \\ &= e^{-L^2} \int_{\eta=0}^{ka/2} e^{-\eta^2} d\eta \rightarrow 0 \text{ quando } L \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por um procedimento similar,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left| \int_{DA} f(z) dz \right| = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty+ika/2}^{+\infty+ika/2} g(z) dz + \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2} dx = 0,$$

$$\int_{-\infty+ika/2}^{+\infty+ika/2} g(z) dz = - \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2} dx = +\sqrt{\pi}.$$

A transformada de Fourier desejada pode agora ser calculada, finalmente:

$$\hat{f}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} a e^{-\frac{k^2 a^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} a e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}.$$

Exemplo 15.2 Se

$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{x^2 + a^2},$$

obtenha $\hat{f}(k)$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{x^2 + a^2} [\cos(kx) - i \sin(kx)] dx \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cos\left(ka\frac{x}{a}\right) d\left(\frac{x}{a}\right), \end{aligned}$$

pois o integrando envolvendo $\sin(\cdot)$ é uma função ímpar e a integral correspondente se anula.
Fazendo $\xi = x/a$,

$$\hat{f}(k) = \frac{2a}{2\pi} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\cos(ka\xi)}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{a}{2} e^{-|ka|} \blacksquare$$

Exemplo 15.3 Se

$$\hat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |k| < k_0, \\ 0, & |k| > k_0, \end{cases}$$

calcule $g(x)$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{+ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi ix} \int_{-k_0}^{+k_0} e^{+ikx} d(ikx) \\ &= \frac{1}{2\pi ix} [e^{+ik_0 x} - e^{-ik_0 x}] \\ &= \frac{1}{\pi x} \operatorname{sen}(k_0 x) \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 15.4 Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO

Note que f é par.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [\cos(kx) - i \sin(kx)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x) \cos(kx) dx = \frac{1 - \cos k}{k^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios propostos

15.1 Se $\mathcal{F}[f(x)]$ indica a transformada de Fourier de $f(x)$, prove que

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ika} \mathcal{F}[f(x)].$$

15.2

a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) Usando o resultado de a) e escrevendo $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\sin k}{k} dk.$$

15.3 Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{x}{|x|}, & 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

15.3 – Linearidade; a transformada das derivadas

A transformada de Fourier é *linear*: se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções transformáveis, então

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx + \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \alpha \hat{f}(k) + \beta \hat{g}(k).\end{aligned}\quad (15.8)$$

Suponha que $f(x)$ e $\hat{f}(k)$ possuam um comportamento muito bom no infinito, de tal maneira que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad (15.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0. \quad (15.10)$$

Intuitivamente, essas condições são necessárias para a existência “clássica” das integrais (15.1) e (15.2). A integral (12.13), por outro lado, sugere que nós poderemos tomar liberdades consideráveis com transformadas de Fourier e ainda assim obter resultados corretos. Mas vamos aos poucos. Calculemos a transformada de Fourier da derivada de $f(x)$, integrando por partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dx}\right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{df}{dx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[e^{-ikx} f(x) + (ik) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right]_{-\infty}^{+\infty};\end{aligned}$$

usando (15.9),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\frac{df}{dx}\right\} &= \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= ik \hat{f}(k).\end{aligned}\quad (15.11)$$

E é claro que isso pode ser estendido para a n -ésima derivada:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dx^n}\right\} = (ik)^n \hat{f}(k). \quad (15.12)$$

Juntas, a propriedade de linearidade (15.8) e a fórmula para as derivadas (15.12) vão permitir transformar equações diferenciais em algébricas. Esse é um dos grandes poderes da transformada de Fourier.

Uma relação oposta a (15.12) é ocasionalmente útil:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d\hat{f}}{dk}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} \frac{d\hat{f}}{dk} dk \\ &= \left[e^{+ikx} \hat{f}(k) - (ix) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{+ikx} dk \right]_{-\infty}^{+\infty};\end{aligned}$$

usando (15.10),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{d\hat{f}}{dk} \right\} &= -(ix) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{+ikx} dk \\ &= -ix f(x).\end{aligned}\quad (15.13)$$

Novamente, isso pode ser estendido para a n -ésima derivada:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{d^n \hat{f}}{dk^n} \right\} = (-ix)^n f(x). \quad (15.14)$$

Exemplo 15.5 Se $x(t)$ e $y(t)$ são relacionadas por

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T}y(t) = \frac{1}{T}x(t),$$

obtenha $\hat{y}(\omega)$ em função de $\hat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO

Quando a variável independente é o *tempo* t , em lugar do espaço x , é comum se escrever a transformada de Fourier:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

A transformada de Fourier da equação diferencial agora produz

$$\begin{aligned}(i\omega)\hat{y}(\omega) + \frac{1}{T}\hat{y}(\omega) &= \frac{1}{T}\hat{x}(\omega) \\ (i\omega T + 1)\hat{y}(\omega) &= \hat{x}(\omega), \\ \hat{y}(\omega) &= \frac{\hat{x}(\omega)}{1 + i\omega T}.\end{aligned}$$

Exemplo 15.6 Utilizando a transformada de Fourier, resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \\ c(x, 0) &= \frac{M}{A} \delta(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO

Nas equações acima, M representa uma massa de soluto injetada instantaneamente em $x = 0$; A possui dimensão de área, para fazer com que c possua dimensão de concentração volumétrica (ML^{-3}).

A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = (ik)^2 D \hat{c}$$

Note que usamos uma derivada ordinária em relação ao tempo, pois embora \hat{c} seja função de k e t , não há derivadas de \hat{c} em relação ao número de onda k . A EDO acima é de fácil solução:

$$\hat{c}(k, t) = \hat{c}_0 e^{-Dk^2 t}.$$

Agora,

$$\widehat{c}_0 = \frac{M}{2\pi A} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{M}{2\pi A},$$

onde

$$\widehat{c}(k, t) = \frac{M}{2\pi A} e^{-Dk^2 t}.$$

Agora, do exemplo 15.1, sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leftrightarrow e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}, \\ \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2 a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Dt &= \frac{a^2}{4}, \\ a^2 &= 4Dt, \\ a &= 2\sqrt{Dt}, \\ c(x, t) &= \frac{M}{A\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 15.7 Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \phi(x, 0) = H(x) - H(x - a),$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

- a) obtenha $\widehat{\phi}(k, t) = \mathcal{F}\{\phi(x, t)\}$;
- b) escreva $\phi(x, t)$ como a anti-transformada de Fourier de $\widehat{\phi}(k, t)$; *não tente resolver a integral!*

SOLUÇÃO

a) A transformada da equação diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\phi}}{dt} + ikc\widehat{\phi} &= 0 \\ \frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} &= -ikcdt \\ \widehat{\phi}(k, t) &= \widehat{\phi}(k, 0)e^{-ikct} \end{aligned}$$

A transformada de Fourier da condição inicial é

$$\mathcal{F}\{c(x, 0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x, 0) e^{-ikx} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi ik} [1 - e^{-iak}].
 \end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Fourier da solução é

$$\hat{\phi}(k, t) = \frac{1}{2\pi ik} [1 - e^{-iak}] e^{-ikct}.$$

b) A solução será

$$\phi(x, t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi ik} [1 - e^{-iak}] e^{-ikct} e^{ikx} dk.$$

Exercícios Propostos

15.4 Se $f(x)$ é uma função qualquer de x , e se sua transformada de Fourier é $\mathcal{F}\{f(x)\}$, mostre que

$$\mathcal{F}\{xf(x)\} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-ikx} dx = i \frac{d\mathcal{F}\{f(x)\}}{dk},$$

usando obrigatoriamente o fato:

$$\frac{d}{dk} [f(x)e^{-ikx}] = -ixf(x)e^{-ikx}.$$

15.5 A distribuição delta de Dirac, $\delta(x)$, possui a propriedade bem conhecida

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)f(x) dx = f(a).$$

a) Utilize a propriedade acima para calcular a transformada de Fourier de $\delta(x)$,

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-ikx} dx.$$

b) Sabendo agora que

$$H(x) \equiv \int_{-\infty}^x \delta(\xi) d\xi,$$

e utilizando *obrigatoriamente* a propriedade

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ik\widehat{f}(k),$$

obtenha $\mathcal{F}[H(x)] = \widehat{H}(k)$. **Dica:** é óbvio que você tem que usar o fato de que a $\delta(x)$ é a derivada (no sentido amplo da teoria das distribuições) de $H(x)$.

15.6 Observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(k - k_0)e^{ikx} dk = Ae^{ik_0x},$$

e *utilizando obrigatoriamente transformadas de Fourier*, resolva:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{L} = Ae^{ik_0x}$$

onde $z(x)$ é uma função complexa de uma variável real.

15.7 Resolva *parcialmente* a equação da difusão-advecção

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

sujeita apenas à condição inicial de um lançamento instantâneo de massa M :

$$C(x, 0) = M\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição Delta de Dirac:

- a) Calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial,

$$\widehat{C}(k, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) \exp(-ikx) dx,$$

e obtenha uma equação diferencial ordinária de \widehat{C} em t .

- b) Faça a transformada de Fourier de $C(x, 0)$, e obtenha $\widehat{C}(k, 0)$.

15.8 Um rio com condição inicial para a concentração $c(x, 0) = 0$ é atacado em $x = 0$ por um despejo contínuo de $Q \text{ kg s}^{-1}$ de dejetos suínos. O dono dos porquinhos deseja saber qual é a concentração de dejetos (em kg m^{-3}) em função da posição x ao longo do rio e do tempo t . Se $c(x, t)$ é a concentração, a equação diferencial que a modela é

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \beta c + \frac{Q}{A} \delta(x),$$

onde U, D, β são constantes, A é a área constante da seção transversal do rio, e $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac. Você é a/o engenheira/o ambiental encarregada/o de resolver o problema.

- a) Dimensionalmente, $[U] = \text{LT}^{-1}$, $[D] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$ e $[\beta] = \text{T}^{-1}$; o que significam U, D e β ?
 b) Calcule a transformada de Fourier da equação acima (em relação a x), e obtenha uma equação diferencial *ordinária* em $\widehat{c}(k, t)$. Resolva essa equação.
 c) Finalmente, mostre que

$$c(x, t) = \frac{Q}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-(Dk^2 + \beta + ikU)t}}{Dk^2 + \beta + ikU} e^{+ikx} dk.$$

15.9 Utilizando obrigatoriamente transformada de Fourier, resolva:

$$b\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \phi(x, 0) = m\delta(x).$$

Observação: um resultado muito útil, que você pode utilizar sem ter que provar, é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2 + ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) e^{-ak^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

15.10 Esta questão continua o exemplo 15.7. Prove que

$$H(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi ik} e^{ikx} dk$$

por meio dos seguintes passos:

a)

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi};$$

b)

$$\frac{1}{2\pi} = \mathcal{F}\{\delta(x)\} = ik\mathcal{F}\{H(x)\} = ik\widehat{H}(k).$$

Nos passos acima, $\delta(x)$ é a distribuição delta de Dirac.

15.11 Esta questão continua o exemplo 15.7. Use o resultado do problema 15.10 para provar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi ik} [e^{ik(x-ct)} - e^{ik(x-ct-a)}] dk = H(x-ct) - H(x-ct-a);$$

e mais ainda: qual a conexão deste resultado com o exemplo 15.7?

15.12 Esta questão é dividida em duas etapas. Dado o par de transformada-antitransformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(k)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} \widehat{f}(k) dk,$$

algumas integrais podem não existir no sentido clássico, mas apenas no sentido de distribuições.

a) Obtenha a transformada de Fourier de $g(x) = 1$. Sugestão: calcule a antitransformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(k)$.

b) Utilizando o resultado acima, e

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d\widehat{g}}{dk}\right\} = -ixg(x),$$

calcule a transformada de Fourier de $f(x) = x$.

15.13 Este problema é sobre a função sinal, $\text{snl}(x)$.

a) Mostre que, se $f(x) \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\{f(-x)\} = \widehat{f}^*(k)$.

b) Se

$$\text{snl}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

mostre que $\text{snl}(x) = H(x) - H(-x)$.

c) Com os resultados acima, e utilizando os resultados do problema 15.10 para $\widehat{H}(k)$, calcule $\mathcal{F}\{\text{snl}(x)\}(k)$.

15.14 Calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(x) \sin(\lambda x).$$

15.4 – O Teorema da convolução

A convolução entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ (no sentido da transformada de Fourier; não confundir com a operação de convolução associada à transformada de Laplace) é

$$[f * g](x) \equiv \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(x - \xi)g(\xi) d\xi. \quad (15.15)$$

Teorema 15.2 (Teorema da convolução).

$$\mathcal{F}\{f * g\} = 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k). \quad (15.16)$$

A transformada de Fourier da convolução é

$$\mathcal{F}[f * g](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy dx \quad (15.17)$$

Faça

$$\begin{aligned} \xi &= x - y & x &= \xi + \eta \\ \eta &= y & y &= \eta \end{aligned} \Rightarrow \quad (15.18)$$

Nesses casos, sempre comece calculando o jacobiano! O jacobiano da transformação de variáveis é

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (15.19)$$

Continuando,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} e^{-ik\eta} f(\xi)g(\eta) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right| d\eta d\xi \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{-ik\eta} d\eta \right] \\ &= 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k) \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 15.8 Seja $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória X . Por definição, a função característica de X é a Transformada de Fourier de f_X :

$$\widehat{f}_X(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ikX} \rangle.$$

A função característica de uma função $Y = g(X)$, por conseguinte, é

$$\widehat{f}_Y(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{-ikg(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ikg(X)} \rangle.$$

Finalmente, se $Z = g(X, Y)$, a função característica de Z é

$$\widehat{f}_Z(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) e^{-ikg(x,y)} dy dx = \frac{1}{2\pi} \langle e^{-ikg(X,Y)} \rangle.$$

- a) Seja agora $Z = g(X, Y) = X + Y$, onde X e Y são duas variáveis aleatórias independentes (portanto, $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$); insira esse g na expressão acima, e calcule \widehat{f}_Z .
- b) Use o Teorema da Convolução,

$$\mathcal{F}[f_X * f_Y] = 2\pi \widehat{f}_X(k) \widehat{f}_Y(k),$$

para calcular agora uma expressão para $f_Z(z)$ em função de f_X e de f_Y .

SOLUÇÃO

a) Como X e Y são independentes, $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$; então,

$$\begin{aligned}\widehat{f}_Z(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(y)e^{-ik(x+y)} dy dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)e^{-ikx} dx \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)e^{-iky} dy \right] \\ &= 2\pi \widehat{f}_X(k) \widehat{f}_Y(k).\end{aligned}$$

b) Olhando agora para o teorema da convolução,

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}_Z(k)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[2\pi \widehat{f}_X(k) \widehat{f}_Y(k)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f_X(x) * f_Y(y)]] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - \xi) f_Y(\xi) d\xi \blacksquare\end{aligned}$$

O Teorema da convolução possui uma versão “inversa”:

Teorema 15.3 (Teorema da convolução, versão inversa):

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(k) * \widehat{g}(k)\} = f(x)g(x). \quad (15.20)$$

Um dos aspectos mais interessantes da operação de convolução é o seu uso na definição e uso de filtros. Tecnicamente, a filtragem de uma função ϕ com um filtro G é dada pela operação

$$\widetilde{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi) \phi(\xi) d\xi = G(x) * \phi(x). \quad (15.21)$$

Em (15.21), nós vamos supor que

$$G(\pm\infty) = 0. \quad (15.22)$$

Um fato importantíssimo é que a operação de filtragem comuta com a derivada em relação a x :

$$\frac{d\widetilde{\phi}}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi) \phi(\xi) d\xi = \frac{d}{dx} [G(x) * \phi(x)]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dG(x-\xi)}{dx} \phi(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{dG(x-\xi)}{d\xi} \right] \phi(\xi) d\xi \\
&= -G(x-\xi)\phi(\xi) \Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi) \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} d\xi
\end{aligned}$$

Em virtude de (15.22),

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dx} = G(x) * \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\tilde{\phi}}{dx}. \quad (15.23)$$

É trivial mostrar que

$$\frac{d^n\tilde{\phi}}{dx^n} = G(x) * \frac{d^n\phi}{dx^n} = \frac{d^n\tilde{\phi}}{dx^n} \blacksquare \quad (15.24)$$

Uma aplicação particularmente poderosa de filtragem é a utilização de soluções envolvendo a delta de Dirac para gerar soluções mais gerais. Por exemplo, considere o problema

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}, \quad \tilde{\phi}(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Do exemplo 15.6, sabemos que

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

é solução de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \\
\phi(x, 0) &= \delta(x).
\end{aligned}$$

Aplicamos agora a convolução com $f(x)$ a todas as linhas acima:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} * f(x) &= D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} * f(x), \\
\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2}, \\
\tilde{\phi}(x, 0) &= \phi(x, 0) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

Mas esse é exatamente o problema que desejamos resolver. Logo,

$$\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) * f(x) = \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} f(\xi) d\xi \blacksquare$$

Exercícios Propostos

15.15 Sabendo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2} [H(k+1) - H(k-1)], \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ikx} dx &= \frac{1}{\pi(k^2 + 1)},
\end{aligned}$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, calcule

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x-\xi)}{x-\xi} e^{-|\xi|} d\xi dx.$$

15.16 Baseando-se na prova do Teorema 15.2, prove o Teorema 15.3.

15.17 Dada a equação íntegro-diferencial

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi) c(x - \xi) d\xi,$$

$$c(x, 0) = M\delta(x),$$

onde u , β e M são constantes positivas e $c = c(x, t)$, obtenha uma expressão para

$$\widehat{c}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} c(x, t) dx,$$

sabendo que

$$\mathcal{F}\{f * g\}(k) = 2\pi \widehat{f}(k) \widehat{g}(k), \quad \mathcal{F}\left\{\frac{df}{dx}\right\} = ik \widehat{f}(k).$$

Nas expressões acima, $\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(k)$ denota a transformada de Fourier. Sugestão: a) obtenha a transformada de Fourier da equação, e da condição inicial; b) resolva a equação diferencial resultante em t para $\widehat{c}(k, t)$.

15.18 Se $f(x) = e^{-|x|}$, $g(x) = \sin(x)$, $-\infty < x < +\infty$, calcule $[f * g](x)$ (no sentido de convolução de Fourier). Sugestão:

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi|} \sin(x - \xi) d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-|\xi|} \sin(x - \xi) d\xi}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-|\xi|} \sin(x - \xi) d\xi}_{I_2}.$$

Note que ξ não muda de sinal em I_1 (onde $\xi \leq 0$) nem em I_2 (onde $\xi > 0$): portanto, remova o módulo e trabalhe os sinais. Continue, reunindo novamente a expressão resultante em uma única integral, e integre, lembrando que “minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b, seno b cosseno a”. Na parte final, você pode usar

$$\int_0^\infty e^{-\xi} \cos(\xi) d\xi = \frac{1}{2}.$$

15.19 Sabendo que

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} \leftrightarrow \frac{a}{2} e^{-|ka|}$$

formam um par de transformada-antitransformada de Fourier, encontre

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a^2}{4} e^{-2|ka|}\right\}.$$

Deixe sua resposta na forma de uma integral de convolução.

15.5 – O Teorema de Parseval

O Teorema de Parseval é a contrapartida da igualdade de Parseval para séries de Fourier, obtida na seção 14.7.

Teorema 15.4 (Teorema de Parseval). Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções reais da variável real x ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k) dk.$$

A prova parte de

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx, \quad \widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-k)\widehat{g}(k) dk &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)e^{ikx} dk dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios propostos

15.20 Seja $f(x)$ uma função complexa da variável real x ; então valem as seguintes relações com a transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$:

$$f(x) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{+ikx} dk, \quad (\star)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_{k=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{f}(k)e^{+ikx} dk, \quad (\star\star)$$

$$f^*(x) = \int_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}^*(l)e^{-ilx} dl. \quad (\star\star\star)$$

Sabendo que

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx,$$

e utilizando $(\star\star)$ e $(\star\star\star)$ para substituir $\partial f / \partial x$ e $f^*(x)$ na integral a seguir, obtenha $G(k)$ em

$$-\frac{i}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f^*(x) \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_{k=-\infty}^{+\infty} G(k) dk,$$

onde $G(k)$ deve ser expresso em função de k e de $\widehat{f}(k)$.

15.6 – A fórmula da inversa da transformada de Laplace

Considere a identidade

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \right] e^{+i\omega t} d\omega. \quad (15.25)$$

Suponha agora

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\gamma t}f(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Suponha também que $f(t)$ seja “de ordem exponencial”: $f(t) < K e^{ct}$, para $\gamma > c$; então,

$$e^{-\gamma t} f(t) < K e^{(c-\gamma)t} = K e^{-(\gamma-c)t} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Agora, de (15.25),

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\gamma t} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{+i\omega t} d\omega, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-\underbrace{(\gamma+i\omega)t}_{=s}} dt \right] e^{\underbrace{(\gamma+i\omega)t}_{=s}} d\omega. \end{aligned}$$

Fazendo $s = \gamma + i\omega$ e notando que ω está variando para γ constante, $ds = id\omega \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \left[\int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right] ds,$$

e isso define a fórmula de inversão:

$$\bar{f}(s) \equiv \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (15.26)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\gamma-i\infty}^{s=\gamma+i\infty} e^{+st} \bar{f}(s) ds. \quad (15.27)$$

Todas as singularidades de $\bar{f}(s)$ devem estar à esquerda da reta $z = \gamma$.

Apêndice C

**Parte do material didático da disciplina
“Camadas-Limite Naturais e Transporte de
Poluentes (TEA757)**

10

Camadas-limite turbulentas

10.1 – Escoamento turbulento em um duto

No capítulo 6, nós obtivemos as equações médias

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (10.1)$$

e

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = -\delta_{i3} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \nu_{(i)} \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (10.2)$$

Considere agora essas equações em um duto com seção retangular “infinita” na direção y e espessura na direção z dada por $h = 2\delta$, para um escoamento plenamente desenvolvido em x . O “plenamente desenvolvido” significa que as *médias* turbulentas não variam em x : $\partial \langle \cdot \rangle / \partial x = 0$; da mesma forma, a seção “infinita” em y implica homogeneidade nessa direção: $\partial \langle \cdot \rangle / \partial y = 0$. Substituindo na equação da continuidade, obtém-se

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial z} = 0 \Rightarrow \langle W \rangle(z) = \text{constante} \Rightarrow \langle W \rangle(z) = 0, \quad (10.3)$$

pois as condições de contorno em $\langle W \rangle$ são $\langle W \rangle(0) = \langle W \rangle(h) = 0$.

A solução obtida $\langle W \rangle = 0$ e a homogeneidade da turbulência em x e y simplificam a equação de *momentum* em z para

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w w \rangle = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial z}. \quad (10.4)$$

Assim, um dos efeitos da turbulência é *desviar* a distribuição vertical de pressão média do estado hidrostático! Note que a imposição de *homogeneidade* da turbulência em x e y significa que $\langle w w \rangle$ é uma função de z somente; tendo isso em mente, integre (10.4) entre 0 e z e imponha $\langle w w \rangle(0) = 0$ (essa condição de contorno significa que a intensidade da turbulência “morre” na parede), para obter

$$\langle w w \rangle(z) + gz + \frac{1}{\rho} \langle P \rangle(x, z) = \frac{1}{\rho} \langle P \rangle(x, 0) \equiv \frac{1}{\rho} P_0(x), \quad (10.5)$$

onde $P_0(x)$ significa a pressão média medida na parede do escoamento (teoricamente, também não há flutuações de pressão na parede). Um resultado importante pode ser obtido derivando-se essa última equação em relação a x :

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}, \quad (10.6)$$

ou seja:

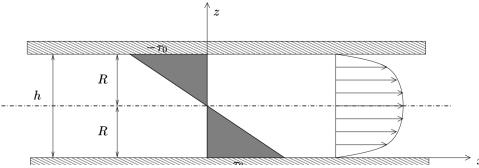


Figura 10.1: A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto.

O gradiente longitudinal da pressão média em todos os pontos do escoamento é igual ao gradiente de pressão na parede.

A homogeneidade em y faz com que a equação de *momentum* na direção y seja trivial: $0 = 0$; na direção x teremos

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w' u' \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + v \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial z^2}, \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w' u' \rangle - v \frac{d^2 \langle U \rangle}{dz^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx} \equiv gJ. \quad (10.8)$$

O lado esquerdo dessa equação é uma função só de z , e o lado direito, uma função só de x . Os dois portanto devem ser constantes, donde se segue que, assim como no caso do escoamento laminar em um duto, a *perda de carga* J (para usar uma terminologia de engenheiros) é linear com x – um fato geralmente apresentado sem muita discussão em cursos de graduação. Note que (9.10) e (10.8) são a mesma equação, que portanto se aplica tanto para o regime laminar quanto para o turbulento.

Integrando (10.8) entre 0 e z (e lembrando que $\langle w' u' \rangle(0) = 0$ devido ao fato de que a intensidade da turbulência é nula na parede),

$$-\frac{z}{\rho} \frac{dP_0}{dx} - \langle u' w' \rangle + v \frac{d\langle U \rangle}{dz} = v \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0), \quad (10.9)$$

onde

$$v \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\rho v}{\rho} \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\tau_0}{\rho} \equiv u_*^2, \quad (10.10)$$

e τ_0 é a tensão cisalhante na parede. Pela primeira vez, aparece explicitamente uma escala de velocidade específica do problema, a *velocidade de atrito* u_* .

O resultado,

$$-\frac{z}{\rho} \frac{dP_0}{dx} - \underbrace{\langle u' w' \rangle}_{\tau/\rho} + v \frac{d\langle U \rangle}{dz} = u_*^2 \quad (10.11)$$

permite determinar *aniticamente* a tensão total τ (turbulenta + viscosa) de cisalhamento em função de z :

$$\tau = \tau_0 + \frac{dP_0}{dx} z, \quad (10.12)$$

com o resultado mostrado na figura 10.1.

A distribuição de tensões τ é antisimétrica, com $\tau(2\delta) = -\tau_0^*$. Segue-se então que $\tau(\delta) = 0$, donde

$$-\frac{\delta}{\rho} \frac{dP_0}{dx} = u_*^2 \Rightarrow \quad (10.13)$$

$$-\langle u'w' \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right). \quad (10.14)$$

Este resultado é muito importante, pois foi obtido a partir somente da hipótese de essacionariedade e homogeneidade em x e y do escoamento. Dividindo por u_*^2 :

$$\frac{-\langle u'w' \rangle}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*\delta} \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)} = 1 - \frac{z}{\delta}. \quad (10.15)$$

Observe o aparecimento do número de Reynolds $Re_* = u_*\delta/\nu$. Quando $Re_* \rightarrow \infty$, o gradiente

$$\frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)}$$

desaparece (isso é: anula-se) de (10.15). Para analisarmos o que acontece próximo da parede, devemos encontrar uma forma de “preservar” o gradiente; ei-la:

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} + \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)} = 1 - \frac{\nu}{\delta u_*} \frac{zu_*}{\nu}. \quad (10.16)$$

Está claro que nós aplicamos duas adimensionalizações diferentes para o gradiente de velocidade. Em ambas, a velocidade adimensional é $\langle U \rangle / u_*$. Na primeira adimensionalização, que corresponde à equação (10.15), a variável adimensional é

$$\eta \equiv z/\delta; \quad (10.17)$$

na segunda, a variável adimensional é

$$z_+ \equiv \frac{zu_*}{\nu}. \quad (10.18)$$

As equações (10.15) e (10.16) nas variáveis acima são

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} + \frac{1}{Re_*} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \eta, \quad (10.19)$$

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} + \frac{d}{dz_+} \left(\frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \frac{1}{Re_*} z_+. \quad (10.20)$$

Note agora como o efeito de $Re_* \rightarrow \infty$ é diferente em cada uma delas. Obviamente, para $z/\delta \ll 1$, $\tau \approx \text{constante}$. Essas condições definem a região *inercial* da camada-limite turbulenta. Por outro lado, para $Re_* \rightarrow \infty$ e $\eta \sim 1$, (10.19) produz

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} = 1 - \eta. \quad (10.21)$$

*Tanto em $z = 0$ quanto em $z = 2\delta$, a componente x do vetor de tensão é $-\tau_0$; em $z = 0$ o vetor normal ao fluido é $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$, e em $z = 2\delta$ ele é $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Da relação entre o vetor de tensão e o tensor de tensões, $t_j = n_i T_{ij}$, para um estado bi-dimensional de tensões deduz-se que $T_{12}(z) = \tau(z)$ e $\tau(2\delta) = -\tau_0$.

Tennekes e Lumley (1972) observam que essa equação não pode ser válida em $\eta = 0$. Sua região de validade é o *core layer* (camada central).

Alguma espécie de argumento dimensional agora é necessário para que possamos prosseguir. Tennekes e Lumley (1972) usam a equação de balanço de energia cinética turbulenta (6.52) para argumentar que $d\langle U \rangle / dz \sim u_*/\delta$; isso é uma forma particular do argumento mais geral utilizado no capítulo 6, onde mostramos que o termo III (produção por gradiente) da equação para os momentos de 2^a ordem é da ordem de \bar{u}^3/\mathcal{L} .

Alternativamente aos argumentos de Tennekes e Lumley (1972), e talvez de maneira mais direta, observe que, de acordo com (10.19), o gradiente da velocidade adimensionalizada $\langle u \rangle / u_*$ deve ser uma função de η (embora ele desapareça da equação quando $Re_* \rightarrow \infty$). Suponha que a velocidade adimensionalizada também só dependa de η nessa região, na forma

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*}, \quad (10.22)$$

onde U_δ é o valor de $\langle U \rangle$ no centro do duto, em $z = \delta$. A inclusão de U_δ é necessária porque o gradiente de velocidade deve ser integrado do *centro* do duto em direção à parede, uma vez que a relação de similaridade (10.23) não pode valer até a parede porque, em sua proximidade, as escalas de comprimento típicas do escoamento são diferentes de (na verdade, são muito menores que) δ (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). De acordo com Wosnik et al. (2000), a inclusão de U_δ elimina a necessidade de levar em consideração efeitos viscosos próximo da parede quando o processo de tomada de limites que se segue for realizado. Então,

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*} = F_\delta \left(\frac{z}{\delta}; Re_* \right) \Rightarrow \lim_{Re_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (10.23)$$

onde $F(\eta)$, a “lei da diferença de velocidade” (*velocity defect law*), é uma função adimensional a determinar.

De forma totalmente análoga e simétrica, em (10.20) vemos que o gradiente da velocidade adimensionalizada é uma função de z_+ ; dessa vez, é este último que desaparece da equação quando $Re_* \rightarrow \infty$. A adimensionalização “natural” para o gradiente de velocidade média agora é

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_v(z_+; Re_*) \Rightarrow \lim_{Re_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*^2}{v} \frac{dF_v}{dz_+}, \quad (10.24)$$

que é conhecida em Mecânica dos Fluidos como “lei da parede”.

As variáveis z_+ e η descrevem o balanço de quantidade de movimento sob duas “óticas” (na verdade, duas escalas) diferentes: z_+ é a variável adequada próximo da parede, e η a variável adequada na região central do escoamento. A técnica denominada *asymptotic matching* (“ajuste assintótico”) permite utilizar uma análise de múltiplas escalas para obter um resultado analítico. O argumento é que, embora F_v e F_δ descrevam a velocidade em regiões diferentes do escoamento, deve haver uma região onde ambas as descrições são válidas. Hissoricamente, essa abordagem surgiu apenas para o $\lim_{Re_* \rightarrow \infty}$; daí sua presença em (10.23) e (10.24). Na região de “casamento”, ambas as equações devem valer, e essa região deve corresponder aos limites $z_+ \rightarrow \infty$ e $\eta \rightarrow 0$:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{u_*^2}{v} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}. \quad (10.25)$$

Multiplicando por z ambos os lados e rearrumando os termos:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{zu_*}{\nu} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{z}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (10.26)$$

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} z_+ \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (10.27)$$

Note que cada lado de (10.27) depende, respectivamente, de z_+ e de η , e por um argumento semelhante ao usado no método de separação de variáveis para a solução de equações diferenciais parciais, os dois devem no limite ser iguais a uma constante, aqui definida como $1/\kappa$ (κ é a constante de vón Kármán). Assim, obtém-se, imediatamente,

$$F_\delta(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_\delta, \quad (10.28)$$

$$F_\nu(z_+) = \frac{1}{\kappa} \ln z_+ + C_\nu. \quad (10.29)$$

Essa região de “casamento” é denominada *região inercial*. Os argumentos aqui utilizados para mostrar que, nessa região, o perfil de velocidade é logarítmico guardam uma semelhança intrigante com os argumentos que levam à “faixa inercial” do espectro na teoria clássica de turbulência de Kolmogorov (capítulo 12). Segundo Pope (2000), $C_\nu = 5,2$, e, como é bem conhecido, a constante de vón Kármán é $\kappa = 0,4$. Por consistência com $\langle U \rangle(\delta) = U_\delta$, devemos ter $C_\delta = 0$, embora valores pequenos e diferentes de zero possam ser encontrados experimentalmente.

Uma região diferente permite também uma integração analítica do perfil de velocidade: em (10.20), quando $z_+ \rightarrow 0$, a tensão de Reynolds $\langle u'w' \rangle$ tende a zero, donde se segue imediatamente que o perfil adimensional de velocidade é *linear* em z_+ :

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = z_+. \quad (10.30)$$

Essa previsão parece à primeira vista conflitar-se com a previsão de um perfil parabólico no caso do escoamento laminar em dutos (Hagen-Poiseuille) com a mesma geometria. Entretanto, é fácil reescrever o resultado *laminar* na forma

$$\frac{U}{u_*} = z_+ - \frac{1}{2Re_*} z_+^2 : \quad (10.31)$$

é evidente que, sendo o escoamento para o qual essa equação foi deduzida laminar, é proibido que Re_* atinja valores muito altos, ou tenda para o infinito. O $\lim_{z_+ \rightarrow 0}$ de (10.31) para valores finitos de Re_* , por outro lado, reconcilia-a com (10.30).

Considere agora (10.20) com $Re_* \rightarrow \infty$, $z_+ \rightarrow \infty$; para remover a indeterminação z_+/Re_* , note que

$$\lim_{\substack{Re_* \rightarrow \infty \\ z_+ \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{z_+}{Re_*} = \frac{\frac{zu_*}{\nu}}{\frac{u_* \delta}{\nu}} = \frac{z}{\delta} = \eta = 0. \quad (10.32)$$

Além disso, nessa região, em virtude de (10.27)

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa z_+} = 0; \quad (10.33)$$

portanto, na região inercial, (10.19) fica

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} \approx 1 \quad (10.34)$$

ou seja: a tensão de Reynolds nessa região é aproximadamente constante.

Para cumprir um programa semelhante ao realizado com o escoamento laminar em dutos, é preciso integrar o perfil de velocidade ao longo da seção, para então obter uma equação para a perda de carga. O perfil previsto por (10.29) não pode ser integrado desde $z = 0$, pois essa equação possui uma singularidade logarítmica aí. Alternativamente, nós podemos usar (10.28), e integrar sobre toda a seção. Naturalmente, a lei da diferença de velocidade não pode ser válida próximo da parede (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). No entanto, para escoamentos turbulentos em dutos, na região próxima à parede onde a lei não se aplica a contribuição para o cálculo da velocidade média é desprezível (Pope, 2000, p. 278). Então, a velocidade média é

$$\bar{U} = \frac{u_*}{\delta} \int_{z=0}^{\delta} \left[\frac{U_\delta}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta} \right] dz = U_\delta - \frac{u_*}{\kappa}. \quad (10.35)$$

Para que uma expressão para a perda de carga possa ser encontrada, é preciso ainda eliminar U_δ . Isso pode ser feito, por exemplo, supondo-se que (10.29) vale até o centro do duto; este ponto, naturalmente, está fora da região de validade de (10.29), porém novamente as diferenças para escoamentos em dutos são relativamente pequenas (Pope, 2000, figura 7.9). Faça portanto

$$U_\delta = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{v} + C_v \right] \Rightarrow \quad (10.36)$$

$$\bar{U} = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta u_*}{v} - 1 \right) + C_v \right]. \quad (10.37)$$

Observe que o problema de projeto de engenharia de uma tubulação está essencialmente resolvido: para uma vazão por unidade de largura $2\bar{U}\delta$, (10.37) determina o valor correspondente da velocidade de atrito u_* ; então, o gradiente de pressão que precisa ser impresso ao duto para que se atinja o valor prescrito de \bar{U} é dado por (10.13).

O procedimento de cálculo para projeto pode ser otimizado da seguinte forma: inicialmente, note que J pode ser relacionado diretamente com u_* eliminando-se dP_0/dx entre (10.8) e (10.13):

$$gJ\delta = u_*^2 \quad (10.38)$$

que, juntamente com (9.13), produz

$$\frac{u_*}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{f}{2}}. \quad (10.39)$$

O uso dessa última equação em (10.37) produz

$$\bar{U} = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (10.40)$$

Finalmente, levando-se (10.40) de volta em (10.38) e eliminando-se u_* obtém-se uma equação padrão para o fator de atrito, na mesma forma que (9.13):

$$J = \frac{2}{\left[\underbrace{\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v}_{f} \right]^2} \frac{1 \bar{U}^2}{\delta^2 2g} \Rightarrow \quad (10.41)$$

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (10.42)$$

A equação (10.42) pode ser descrita como uma equação de Prandtl para escoamento turbulento com paredes lisas em dutos de seção retangular e largura infinita. Ela define implicitamente a função $f = f(\text{Re})$. Em engenharia, os diagramas que plotam essa função são denominados “diagramas de perda de carga”.

10.2 – Escoamentos turbulentos com parede rugosa

Na definição de z_+ em (10.18), está implícita uma escala de comprimento viscosa

$$z_v \equiv \frac{v}{u_*}. \quad (10.43)$$

Para o ar a 20°C , $v = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; para a água a 20°C , $v = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Batchelor, 1967, apêndice 1, p. 594). Portanto, se $u_* \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$, $z_v \sim 10^{-4}$ a 10^{-3} m. Tanto em tubulações industriais quanto em escoamentos sobre superfícies naturais, há imperfeições ou “elementos de rugosidade” na superfície cuja ordem de grandeza é z_0 .

A tabela 10.1 ilustra alguns valores típicos de z_0 para diferentes materiais: embora o valor de u_* que usamos seja uma estimativa que obviamente variará de escoamento para escoamento, fica claro que em muitas situações $z_0 \sim z_v$; de fato, segundo Morris e Wiggert (1972), a *maioria* dos escoamentos em tubos são deste tipo. É de se esperar que estes sejam os casos mais difíceis para se lidar. Por outro lado, também é de se esperar que existam casos em que $z_0 \gg z_v$; para eles, é possível desenvolver uma teoria de “escoamento turbulento rugoso”. De fato, tudo é uma questão de quão alto é o número de Reynolds Re : para um valor suficientemente alto, a camada viscosa deve se tornar tão delgada que, no limite, toda a parede de qualquer material se torna “rugosa” no sentido de que seus elementos de rugosidade se estendem além da subcamada viscosa.

Se $z_0 \gg z_v$, é natural tentar adimensionalizar (10.14) com z_0 , em vez de z_v . Portanto, para as variáveis adimensionais

$$\text{Re}_0 \equiv \frac{u_* z_0}{v} = \frac{z_0}{z_v}, \quad (10.44)$$

$$z_* \equiv \frac{z}{z_0} \quad (10.45)$$

(Re_0 é um *número de Reynolds de rugosidade* (Brutsaert, 1982)), (10.14) admite a adimensionalização

$$-\frac{\langle w'u \rangle}{u_*^2} + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_*}\right)}{dz_*} = 1 - z_* \frac{z_0}{\delta}. \quad (10.46)$$

Tabela 10.1: Rugosidade equivalente de areia. Fonte: ([Morris e Wiggert, 1972](#), Tabela 3-1)

Material	z_0 (m)
Aço muito corrugado	0,001
Aço pouco corrugado	0,01
Concreto liso	0,0003
Concreto rugoso	0,003
Madeira lisa	0,00018
Madeira rugosa	0,001
Aço laminado	0,00026
Aço galvanizado	0,00015
asphalted castiron	0,00012
Aço comercial novo	0,00004
Aço soldadon	0,00004
Vidro	0,0000015

De forma totalmente análoga aos resultados obtidos anteriormente para paredes lisas, nós esperamos que para uma região relativamente próxima da parede valha uma adimensionalização com a forma

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0(z_*, \text{Re}_*) \Rightarrow \lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*}. \quad (10.47)$$

Essa equação é análoga ao par (10.23) e (10.24): de fato, desde que $z_0 \ll \delta$, basta substituir z_v por z_0 na análise de ajuste ou casamento assintótico. O argumento padrão que conduz a um resultado análogo a (10.27), portanto, será

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0\left(\frac{z}{z_0}, \text{Re}_*\right) \Rightarrow \quad (10.48)$$

$$\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*} \Rightarrow \quad (10.49)$$

$$\lim_{z_* \rightarrow \infty} z_* \frac{dF_0}{dz_*} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (10.50)$$

O perfil na região influenciada pela escala z_0 portanto será novamente logarítmico:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + C_0. \quad (10.51)$$

Para os experimentos clássicos de Nikuradse de perda de carga em tubos muito lisos aos quais uma rugosidade artificial foi adicionada com grãos de areia, o $\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty}$ produz $C_0 = 8.5$. Não há na literatura (tanto quanto seja de nosso conhecimento) valores específicos para escoamentos em dutos muito largos sob pressão, portanto vamos admitir que este valor também se aplique. Com este valor para C_0 , a previsão de (10.51) para a anulação de $\langle U \rangle$ é

$$\ln \frac{z}{z_0} = -3.4 \Rightarrow \langle U \rangle(z = 0,0334z_0) = 0. \quad (10.52)$$

O objetivo agora é obter uma equação para o fator de atrito em escoamento plenamente rugoso. Para este fim, vamos usar novamente (10.35) e supor agora que u_δ

pode ser calculado com a nova lei da parede “rugosa” (10.51); o resultado é

$$\langle U \rangle = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right] \quad (10.53)$$

– note que não há nenhuma dependência do número de Reynolds Re_* – e a equação correspondente para o fator de atrito é

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (10.54)$$

10.3 – O regime de transição

Considere agora o caso “mais complicado”, $z_0 \sim z_v$; ambas as escalas podem ser usadas em um ajuste assintótico com a sub-camada externa, e é de se esperar que na camada inercial o perfil de velocidade dependa de ambos. Em termos de variáveis adimensionais:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, \frac{z_0 u_*}{v} \right). \quad (10.55)$$

Note que o segundo argumento, é o número de Reynolds de rugosidade Re_0 , a razão entre z_0 e z_v : veja a equação (10.44). A idéia é que o regime “liso” seja recuperado quando $Re_0 \rightarrow 0$, e o regime “rugoso” quando $Re_0 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{Re_0 \rightarrow 0} F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_v \left(\frac{zu_*}{v} \right), \quad (10.56)$$

$$\lim_{Re_0 \rightarrow \infty} F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_0 \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (10.57)$$

Nosso objetivo, portanto, deve ser procurar uma forma analítica para a função das variáveis z/z_0 e Re_0 que “colapse” ambas em zu_*/v no primeiro caso, e que seja assintoticamente independente de Re_0 no segundo. A propriedade do logaritmo do produto sugere que para escoamento liso devemos ter

$$F_{0v} \sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} + \ln \frac{z_0 u_*}{v} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{zu_*}{v}, \quad (10.58)$$

onde “~” deve ser lido “comporta-se como ... a menos de uma constante”. Para escoamento rugoso, por outro lado, Re_0 deve desaparecer. Uma forma de obter ambos os comportamentos assintóticos é fazer

$$\begin{aligned} F_{0v} &\sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} + \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{Re_0} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} - \ln \left(\frac{1}{Re_0} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.59)$$

De fato, para $Re_0 \rightarrow 0$, (10.59) é praticamente igual a (10.58), enquanto que para $Re_0 \rightarrow \infty$ ela se torna, como desejado, assintoticamente independente de Re_0 . Falta ainda garantir os valores exatos das constantes C_v e C_0 em (10.56)–(10.57); isso pode ser obtido com

$$F_{0v} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} - \ln \left(\frac{B_{0v}}{Re_0} + 1 \right) \right] + C_0. \quad (10.60)$$

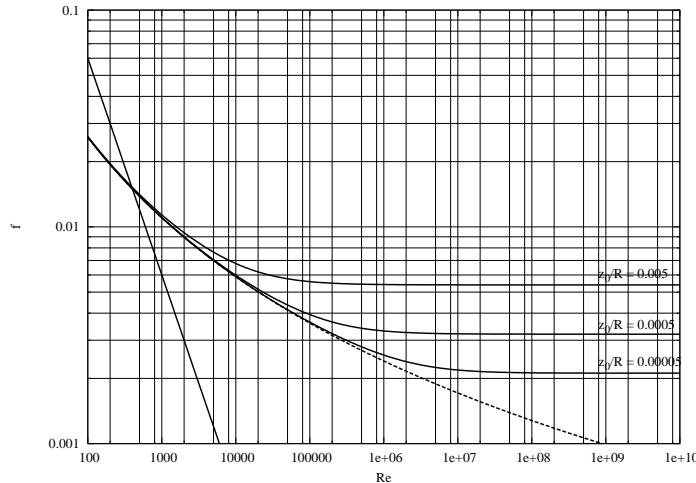


Figura 10.2: Fator de atrito f em função de Re e da rugosidade relativa z_0/δ em um escoamento turbulento em um duto

Claramente, (10.60) atende à constante C_0 em (10.57): veja (10.51). Por outro lado, para que (10.60) também atenda à constante C_v , basta escolher B_{0v} de tal forma que

$$-\frac{1}{\kappa} \ln B_{0v} + C_0 = C_v, \quad (10.61)$$

onde se obtém, para dutos, que $B_{0v} = 3,74$. Um procedimento totalmente análogo ao feito anteriormente para escoamentos lisos e rugosos permite obter uma equação para o cálculo de fatores de atrito em escoamentos em regime de transição:

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - \ln \left(\sqrt{\frac{2}{f}} \frac{B_{0v}}{Re} \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (10.62)$$

Em (10.62) f depende, convenientemente, tanto de δ/z_0 como de Re ; em princípio, essa equação pode ser usada para calcular f em *qualquer* regime. Uma equação totalmente análoga a (10.62) foi obtida pela primeira vez por Colebrook e White para escoamentos transicionais em tubos de seção circular (Morris e Wiggert, 1972, p. 67); os coeficientes numéricos, naturalmente, são diferentes dos fornecidos aqui por conta da geometria diferente da seção; a rugosidade relativa de Colebrook e White é dada na forma z_0/D , e o número de Reynolds na forma UD/v .

O diagrama de fator de atrito para o escoamento em um duto de seção retangular e largura infinita *versus* o número de Reynolds para $z_0/\delta = 0,05, 0,005$ e $0,00005$ está mostrado na figura 10.3.

10.4 – A fórmula de Manning

A fórmula

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (10.63)$$

foi proposta por Manning em 1889. A menos que se atribua uma dimensão física a n , ela é dimensionalmente inconsistente. Ela é uma equação “empírica”, ou seja: ela foi proposta sem base em uma dedução a partir de equações mais fundamentais.

Chen (1991) mostrou entretanto que ela pode ser deduzida. A vazão volumétrica através da seção, por definição, é

$$Q = \int_{y=0}^B \int_{z=z_f(y)}^Z \langle U \rangle (y, z) dz dy \quad (10.64)$$

onde B é a largura da seção, $z_f(y)$ são as cotas do fundo e Z é a cota da superfície.

Dedução (Chen, 1991)

$$\langle U \rangle (y, z) = au_*(y) \left(\frac{z - z_f(y)}{z_0} \right)^m, \quad (10.65)$$

$$Q = \int_{y=0}^B \frac{au_*(y)}{m+1} \left(\frac{h(y)}{z_0} \right)^m h(y) dy, \quad (10.66)$$

$$h(y) = Z - z_f(y) \quad (10.67)$$

A velocidade de atrito média ao longo da seção transversal, u_* , deve satisfazer à relação

$$u_* = \frac{1}{P} \int_{y'=0}^P u_*(y') dy' \approx \frac{1}{B} \int_{y=0}^B u_*(y) dy \quad (10.68)$$

$$\eta = \frac{y}{B}, \quad g(\eta) = \frac{u_*(\eta)}{u_*} \Rightarrow \quad (10.69)$$

$$Q = \frac{au_* R_h^m (R_h P)}{(m+1) z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left(\frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta, \quad (10.70)$$

$$u_* = \sqrt{g R_h S_f}, \quad (10.71)$$

$$V = \underbrace{\left[\frac{a \sqrt{g}}{(m+1) z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left(\frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta \right]}_{1/n} R_h^{m+1/2} S_f^{1/2} \quad (10.72)$$

que é a fórmula de Manning para $m = 1/6$.

Dias (1995) — ajuste de um perfil de velocidade ao longo da seção por mínimos quadrados não-lineares:

$$\langle U \rangle (\eta, z) = \frac{u_* g(\eta)}{\kappa} \ln \left(\frac{z - z_f(\eta)}{z_0} \right), \quad (10.73)$$

$$\frac{u_*}{g(\eta)} \kappa = -a_0 \eta (\eta - 1) (\eta^2 - 2a_1 \eta + a_2^2) \quad (10.74)$$

$$m = \frac{u_*}{\kappa V} \quad (10.75)$$

Alguns resultados no Iguáçu

Estimativa de u_* (contra medidas usando a declividade da linha d’água):

Expoente m da equação de Manning

Funções potência?

Suponha (por pura conjectura) que

$$F_v = A_+ z_+^m, \quad (10.76)$$

$$F_R = \bar{A} \bar{z}^m \Rightarrow \quad (10.77)$$

$$z_+ \frac{dF_v}{dz_+} = \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}}, \text{ se} \quad (10.78)$$

$$\frac{\bar{A}}{A_+} = R_+^m. \quad (10.79)$$

Resultados modernos

De volta aos dutos retangulares sob pressão. Wosnik, Castillo e George (2000) — as equações para os perfis nas variáveis z_+ e \bar{z} representam o *mesmo* campo de velocidade:

$$F_v - \frac{u_R}{u_*} = F_R, \quad (10.80)$$

$$G(R_+) \equiv \frac{u_*}{u_R}, \quad (10.81)$$

$$F_v(z/z_v, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(z/R, R_+), \quad (10.82)$$

$$\partial/\partial z; \times z \Rightarrow \frac{z}{z_v} \frac{dF_v}{dz_+} = \frac{z}{R} \frac{dF_R}{d\bar{z}}. \quad (10.83)$$

Aproximação assintótica local

Este é o mesmo resultado de casamento de perfis de antes, mas dessa vez para valores *finitos*, ainda que suficientemente altos, de R_+ .

Um resultado *novo e diferente* é obtido do processo de aproximação assintótica local (*near asymptotics*):

$$z_+ = \tilde{z} R_+^n, \bar{z} = \tilde{z} R_+^{n-1} \quad 0 < n < 1 \quad (10.84)$$

$$F_v(R_+^n, \tilde{z}, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(R_+^{n-1} \tilde{z}, R_+), \quad (10.85)$$

$$\partial/\partial z \Rightarrow \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}} = \frac{1}{\kappa(R_+)} - \dots, \quad (10.86)$$

$$\frac{1}{\kappa(R_+)} \equiv \frac{d1/G}{d\ln R_+}. \quad (10.87)$$

Evidências de uma meso-camada

Seja $y = x + a$, $x, y > 0$; então, se $f = \ln x$,

$$x \frac{df}{dx} = x \frac{1}{x} = 1; \quad (10.88)$$

$$y \frac{df}{dy} = (x + a) \frac{1}{(x + a)} = 1 = x \frac{df}{dx}. \quad (10.89)$$

Isso significa que o processo de casamento de perfis de Milikan, que envolve a constante de vón Kármán, admite soluções um pouco mais gerais:

$$\frac{\langle U \rangle - u_R}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [\bar{z} + \bar{a}(R_+)] + \bar{C}(R_+), \quad (10.90)$$

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [z_+ + a_+(R_+)] + C_+(R_+). \quad (10.91)$$

Conclusões

- Ao contrário do que às vezes se pensa, resultados analíticos *são* possíveis a partir das equações de Navier-Stokes e Reynolds para escoamentos turbulentos.
- Ao longo do século XX e até os dias de hoje, novos resultados analíticos e experimentais continuam a esclarecer diversos pontos sobre “velhos” problemas.
- A equação de Manning, por exemplo, pode ser entendida como o resultado de uma *aproximação* em “lei de potência” para o perfil de velocidade em uma camada-limite turbulenta.
- As teorias analíticas existentes ainda dependem de constantes empíricas, notadamente a “constante” de vón Kármán → número de vón Kármán: $\kappa = \kappa(R_+)$. Obter previsões teóricas diretamente a partir das eqs de N-S é um desafio para os dinamicistas de fluidos.

Apêndice D

Palestra “Deterministic and stochastic views of turbulence”, VIII Brazilian Micrometeorology Workshop Santa Maria RS

Deterministic and stochastic views of turbulence

**VIII Brazilian Micrometeorology Workshop
Santa Maria RS**

Nelson L. Dias¹

¹Lab for Env Monitoring and Modeling Analysis, Dept of Env Engineering, Universidade Federal do Paraná, Brasil,
e-mail: nldias@ufpr.br url: www.lemma.ufpr.br/nldias

November 21, 2013



Thanks,

For the kind invitation.

It is an honor.



Motivation and Introduction

This presentation is about two questions that I have always asked myself (and a few other people), for which I never obtained satisfactory answers:

1. Why do we generate random numbers in a computer in a completely deterministic way, and still “get away” with it?
2. Why do we take averages and moments of the quantities in the Navier-Stokes and scalar transport equations, and, again, “get away” with the statistics?



The dichotomy Random × Deterministic

is deeply ingrained. For example, Breuer and Petruccione (1992):

It is well known that models of homogeneous turbulence often rely upon statistical tools [1,2]. In principle, statistical concepts are introduced in the theory **only** by considering random initial ensembles of velocity fields. However, the time evolution of each member of the ensemble is governed by the **deterministic** Navier-Stokes equation.

In this letter, a mesoscopic approach . . . which **in contrast to the classical theory**, regards the velocity itself as a discrete stochastic process. . . . In doing so, an **inherently stochastic model of turbulence** can be formulated. An initial ensemble of velocity fields **evolves probabilistically** in time.



In summary,

They seem to be saying:

- Navier Stokes \Rightarrow Deterministic evolution in time.
- Stochastic Process \Rightarrow Probabilistic evolution in time.

As we shall see, this is not necessarily true!

This is by no means a criticism of Breuer and Petruccione (1992); rather, their view is probably the prevalent one.

In this view, randomness accompanies the stochastic process “along the way”: at each time t , the future remains “random”.

Does it? In this presentation, I will try to convince you that this dichotomy does not really exist.



Main sources for this presentation are

1. J. L. Lebowitz and O. Penrose (1973) Modern ergodic theory. Physics Today **2(26)**, 23–29.
2. P. Collet (2010) Dynamical Systems and Stochastic Processes, http://escuelainvierno.cimfav.cl/documentos/pdf/NotesP_Collet.pdf



Partial answers, and a caveat!

It turns out that fairly reasonable answers for my questions are available, even though there is much more open to learning and researching. The answers lie in the intertwined fields of

- stochastic processes,
- dynamical systems, and
- ergodic theory.

Caveat: I am not qualified to talk about those things at any decent level of knowledge and depth. Therefore, this talk is little more than a sketch of what I can *glimpse* to be answers.



A classical random number generator

The map

$$f(x) = (16807x) \bmod (2^{31} - 1).$$

generates a sequence of pseudorandom numbers “uniformly” distributed on $[0, 1]$. Here is a program for generating 10000 values:

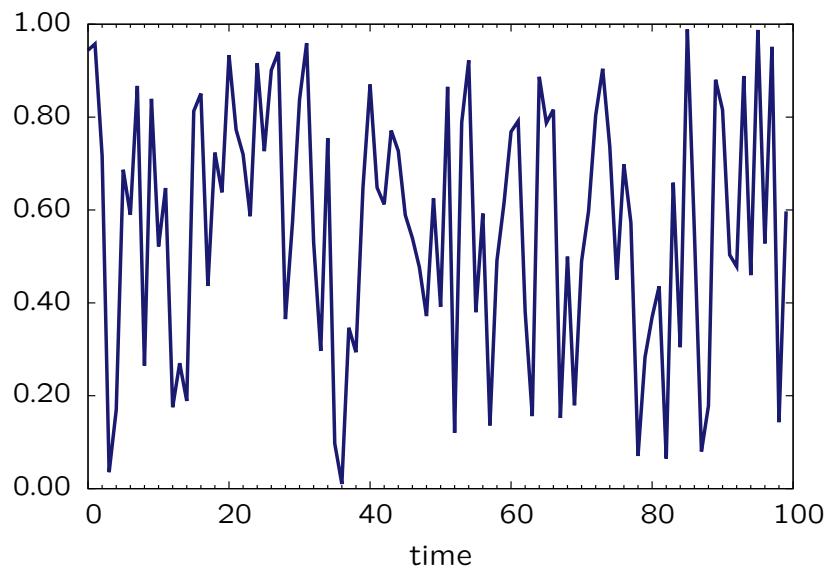
```

1 #!/usr/bin/python
2 from math import floor
3 deno = 2**31
4 denu = 2**31 - 1
5 xo = 0.9439494030244930249
6 no = int(xo * deno)
7 fou = open('rnum2.out', 'wt')
8 fou.write("%8.6f%8.6f\n" % (float(0), xo))
9 n = 10000
10 for i in range(1,n):
11     nn = 16807*no % denu
12     xn = float(nn)/deno
13     fou.write("%8.4f%8.6f\n" % (float(i),xn))
14     no = nn
15 fou.close()

```

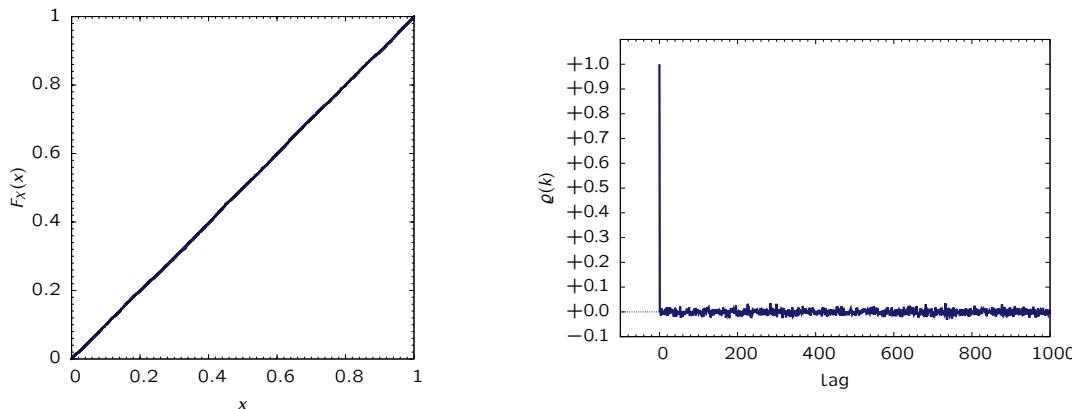


The first 100



Checking

How good are they? We should check: the marginal cumulative distribution (left), and the apparent independence between consecutive values via the autocorrelation function (right).



The 10000 pseudorandom numbers will look like 10000 independent realizations of $X \sim U[0, 1]$. But they were generated deterministically!

Averaging physical equations

We are all very used to Reynolds' decomposition and averaging equations, and treating the fluctuations as random variables:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= -\frac{\partial(U_k \Theta)}{\partial x_k} + \nu_\theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_k}, \\
 \Theta &= \langle \Theta \rangle + \theta, \quad U_k = \langle U_k \rangle + u_k, \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_k \rangle \theta + u_k \langle \Theta \rangle + u_k \theta - \langle u_k \theta \rangle] + \nu_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_k}, \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \langle \theta \theta \rangle}{\partial t} &= -\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle \theta \theta \rangle}{\partial x_k} - 2 \langle u_k \theta \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u_k \theta \theta \rangle}{\partial x_k} - 2\nu_\theta \langle \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \rangle
 \end{aligned}$$

But can we really do it?



Averaging ensembles

The equation

$$f(x) = (16807x) \bmod (2^{31} - 1).$$

is a simple example of a *dynamical system*. At the end of the 19th century, physicists — and engineers! — were taking liberties and mixing deterministic and stochastic approaches. A very nice review is given in J. L. Lebowitz and O. Penrose, “Modern Ergodic Theory”, *Physics Today* 26(2), 26–29, 1973, from which we quote extensively:

The founding fathers of statistical mechanics, Boltzmann, Maxwell, Gibbs and Einstein, invented the concept of ensembles to describe equilibrium and nonequilibrium macroscopic systems. In trying to justify the use of ensembles, and to determine whether the ensembles evolved from nonequilibrium to equilibrium, they introduced further concepts such as “ergodicity” and “coarse graining”. The use of these concepts raised mathematical problems that they could not solve, but like the good physicists they were they assumed that everything was or could be made all right mathematically and went on with the physics.



Even so!

(maybe I am a bad physicist or engineer :-))

I would like a little justification for mixing the deterministic and stochastic approaches.



A brief chronology

1871 Boltzmann introduces the ergodic hypothesis.

1867 Maxwell (1867) averages equations of motion for gas molecules.

1895 Clearly influenced by Maxwell's paper — but without mentioning Maxwell's name! — Reynolds introduces his decomposition, $u = \bar{u} + u'$, which we still use today; he tries to found his equations on *statistical mechanics*, and explicitly mentions at the introduction (Reynolds, 1895) the "kinetic theory of matter". Reynolds derives the mean equations, and the equation for turbulence kinetic energy, by averaging essentially in the same way as we did for $\langle \theta \theta \rangle$ in the introduction! However, ensemble averaging is not explicit; instead there is a mix of space and time averages.



(continued)

1905 Einstein's 1905 theory of Brownian motion. Averaging equations of motion is not very explicit, but deterministic and probabilistic ideas are freely mixed (see Einstein, 1956).

1908 Langevin's 1908 paper on Brownian motion. Equations of motion are explicitly averaged (see Lemons and Gythiel, 1997).

1921 Taylor's 1921 turbulent diffusion theory.

1927 Birkhoff's 1931 proof of the Ergodic Theorem.

1933 Kolmogorov's 1933 book on the "Foundations of probability theory".

1963 Lorenz's 1963 seminal paper on Chaos Theory was given the provisional title "Deterministic turbulence" (Motter and Campbell, 2013).



Four Perspectives on Probability

<http://www.ma.utexas.edu/users/mks/statmistakes/probability.html>

1. **Classical** (sometimes called "A priori" or "Theoretical"): If we have a situation (a "random process") in which there are n equally likely outcomes, and the event A consists of exactly m of these outcomes, we say that the probability of A is m/n . **This is circular reasoning!**
2. **Empirical** (sometimes called "A posteriori" or "Frequentist") This idea is formalized to define the probability of the event A as $P(A) = \text{the limit as } n \text{ approaches infinity of } m/n$, where n is the number of times the process (e.g., tossing the die) is performed, and m is the number of times the outcome A happens.
3. **Subjective** Subjective probability is an individual person's measure of belief that an event will occur.
4. **Axiomatic** This is [Kolmogorov \(1933\)](#)'s book.



Kolmogorov's definitive Probability

A probability triple, or probability space, is a triple (Ω, \mathcal{F}, P) , where:

- Ω is any non-empty set;
- \mathcal{F} is a σ -field, a collection of subsets of Ω obeying special conditions.
- P is a function from \mathcal{F} to $[0, 1]$: \mathcal{F} is the set or the class of subsets of Ω that can be “measured”.

Several probability axioms hold, including the usual

$$P\{\emptyset\} = 0,$$

$$P\{\Omega\} = 1,$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{A_i\} \quad (\text{countable additivity}).$$

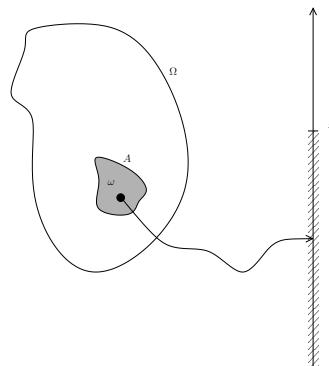


Random variables

A random variable is a function $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

X is a *measurable* function.



Graphical representation of the event $X(\omega) \leq x$

Integration

With Kolmogorov's axiomatic approach, things quickly fall into place.
The distribution function of X is

$$F_X(x) \equiv P\{\omega \mid X(\omega) \leq x\};$$

with different degrees of sophistication and difficulty, one can now calculate moments, such as the *expected value*

$$\langle X \rangle = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

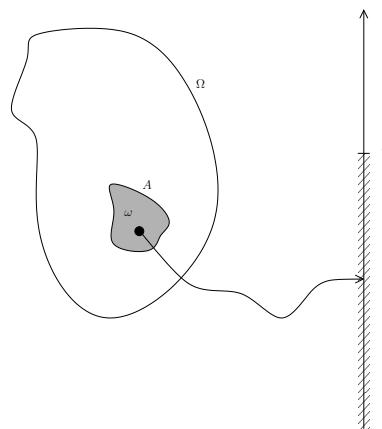
Even better, a *change of variable* theorem (Rosenthal, 2008, Theorem 6.1.1) allows to do the same "without Ω ": for any measurable function $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF_X(t).$$



The “sample bag”

Learning all this is hard; it is often good enough to think about it as the sample bag Ω from which we draw numbers, beads, of any other concrete representation of $X(\omega)$. Here it is again:



But Kolmogorov did not — and neither anybody else ever since — ever teach us how to draw an ω from the bag!

Here is how I drew an ω in my program:

```
#!/usr/bin/python
from math import floor
deno = 2**31
denu = 2**31 - 1
xo = 0.9439494030244930249
no = int(xo * deno)
fou = open('rnum2.out','wt')
fou.write("%8.6f %8.6f\n" % (float(0),xo) )
n = 10000
for i in range(1,n):
    nn = 16807*no
    xn = float(nn)/deno
    fou.write("%8.4f %8.6f\n" % (float(i),xn) )
    no = nn
fou.close()
```

In other words, I drew it myself! This is what we all call the “seed” of the random number generator.



The stochastic process

Kolmogorov would not stop. From Todorovic (1992):

A stochastic process is a family of random variables $X(t)$, $t \in T$, defined on a *common* probability space (Ω, \mathcal{F}, P) , $T \subset \mathbb{R}$

That is:

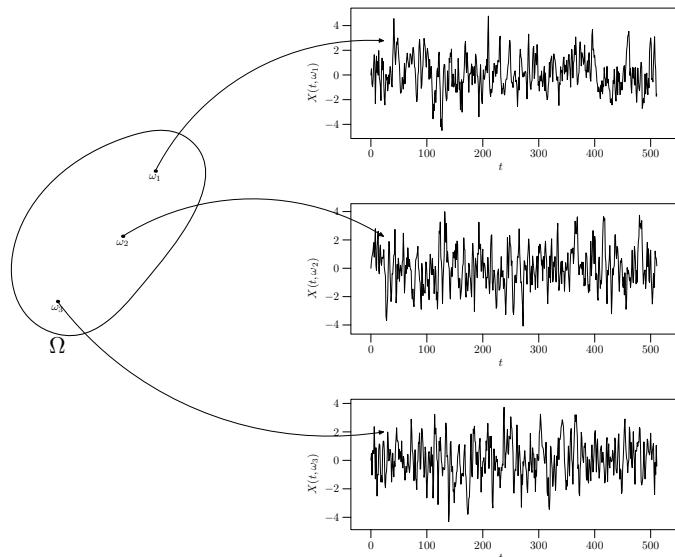
$$\begin{aligned} X : \Omega \times T &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\omega, t) &\mapsto x = X(\omega, t) \end{aligned}$$

The really important point to be made is this:

Once ω is chosen, $X(t)$ is **deterministic**: an ordinary function like any other!



A “bag” for stochastic processes, too



A single ω for each $x(t)$!

Reconciling divorcees

Now the random number generator is beginning to look like a stochastic process!

We can almost “see” the trick: if the function $f(x) = (16807x) \bmod (2^{31} - 1)$ is “measurable” in some sense, then a single ω may spawn a multidimensional vector $\mathbf{X}(\omega)$, which we may call, *perhaps at the same time*, a *stochastic process and a dynamical system*.



Theorems of statistical mechanics and ergodic theory

Let us extend — and change — nomenclature a little bit. Let us call Ω the *state space* (also!). Let

$$\omega \equiv x_0 \in \Omega,$$

with

$$\begin{aligned}\phi_t : \Omega &\rightarrow \Omega, \\ x_0 &\mapsto x(t) = \phi_t(x_0).\end{aligned}$$

Above, t can be either discrete ("maps") or continuous ("flows"). We have

$$\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t.$$



What a dynamical system is

A definition of a dynamical system is now the triple (Ω, \mathcal{F}, P) together with ϕ_t .

This definition is essentially identical at first sight to that of a stochastic process, but we must look at the conditions on ϕ_t and P for the identity to hold.



Measures

As we already know from Kolmogorov's axiomatic probability approach, the measure (probability) of a set A in Ω is

$$P(A) = \int_{x \in A} dP(x).$$

Let us say that ϕ_t is, in some sense, a measurable function. Then, if P is a probability measure on Ω , then ϕ_t induces a new probability measure in Ω , by means of:

$$P(\phi_t(A)) \equiv P(A) \quad (\text{forward}).$$

This is often done the other way around:

$$P(A) \equiv P(\phi_{-t}(A)) \quad (\text{backward}).$$

If the above holds for all measurable $A \in \Omega$, we say that P is invariant under ϕ_t .



The coup de grâce

From:

Dynamical Systems and Stochastic Processes

(P. Collet, 2010)

http://escuelainvierno.cimfav.cl/documentos/pdf/NotesP_Collet.pdf

Given a probability measure μ (read P) on the phase space Ω and the time evolution map T (or a (semi)-flow) (read ϕ_t), we are **exactly** in the setting of stochastic processes.

This is because, given the dynamical system ϕ_t , and a measurable function g on Ω , we can define a stochastic process $X(t)$ by means of

$$X(\omega, t) \equiv g(\phi_t(\omega)).$$



Could it be any clearer?

Yes!

Collet (2010):

The fact which may look a little unusual for a Probabilist is that the probability is given on the initial condition, **and there is no randomness appearing in the time evolution** (my emphasis). However the points on the phase space completely characterize the orbits, and we can think of μ (read P) as a probability measure on the orbits, the time evolution being the shift.

In that sense, any stochastic process is a dynamical system (a not very useful remark in practice).



Ergodicity, and Birkhoff's theorem

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\phi_t(x_0)) dt = L \stackrel{\text{if ergodic}}{\equiv} \int_{\Omega} g(\omega) d\omega$$

Remark: $X(x_0, t) = g(\phi_t(x_0))$ is a single realization of a stochastic process from the initial condition x_0 . The rightmost expression is independent of x_0 , and only then is the process ergodic.

Moreover, (Lebowitz and Penrose, 1973):

Stated precisely, this means that a system is ergodic on S (read Ω) if and only if all regions R of S (read Ω) left invariant by the time evolution, $\phi_t(R) = R$ either have zero area or have an area equal to the area of S (read either have zero probability measure, or have $P(R) = 1$).



Being more accurate,

However, the equality $\phi_t(R) = R$ in Lebowitz and Penrose (1973)'s statement is somewhat *imprecise!* Given the *symmetric difference* between two sets,

$$A \Delta B \equiv (A \cup B) - (A \cap B),$$

then, in terms of probability measure, the corresponding statement is.

$$P(A \Delta \phi_{-t}(A)) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \text{ or } P(A) = 1.$$

My simple-minded interpretation: in an ergodic system, the map ϕ_t makes any realization eventually wander over **almost all** of Ω ($P(A) = 1$), or **almost none** of it at all ($P(A) = 0$).



Example: Reynolds' postulates

can now be regarded as lemmas:

$$\begin{aligned}
 U_i &= \langle U_i \rangle + u_i; \quad \langle U_i \rangle (\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega). \\
 \langle u_i \rangle &= \langle U_i - \langle U_i \rangle \rangle = \int_{\omega \in \Omega} (U_i(\mathbf{x}, t; \omega) - \langle U_i \rangle (\mathbf{x}, t)) dP(\omega) \\
 &= \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) - \langle U_i \rangle (\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) = 0. \\
 \langle u_i \langle U_j \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) \langle U_j \rangle (\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\
 &= \langle U_j \rangle (\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \\
 &= \langle U_j \rangle \langle u_i \rangle = 0.
 \end{aligned}$$



Example: a non-ergodic process

The stochastic process

$$X(\omega, t) = U(\omega)$$

with U uniformly distributed on $[0, 1]$ is stationary, but it is not ergodic. Indeed, for instance,

$$\mathbb{E}\{X(t)\} = \mathbb{E}\{U\} = 1/2, \text{ etc.}$$

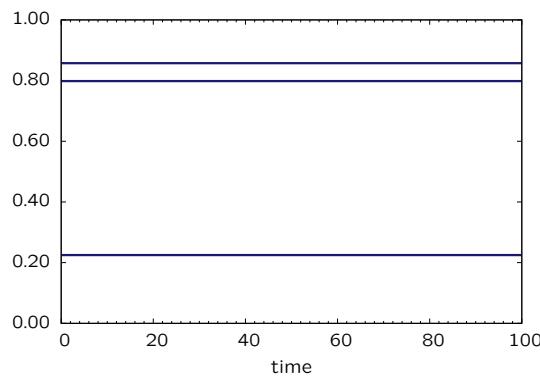
but

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = X(0) \neq 1/2 \text{ in general.}$$



Picture of this non-ergodic process

3 realizations:



What is the problem?
This process has *infinite* memory,
and it does not wander all over Ω .

The mixing condition

implies (is a sufficient condition for) ergodicity:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x)g(\phi_{\tau}(x)) dP(x) = \int_{\Omega} f(x) dP(x) \int_{\Omega} g(x) dP(x)$$

But

$$C_{fg}(\tau) \equiv \langle f(x)g(\phi_{\tau}(x)) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(x) \rangle$$

is the τ -covariance function; therefore,

If the τ -covariance function goes to zero, the process is ergodic.

But this does not even guarantee that the process has finite variance.
For more regularity, more conditions are needed.

The most common is the existence of integral scales.



Ergodic, but nonstationary, and non-mixing

The harmonic oscillator is

$$\begin{aligned} X(\omega, t) &= A(\omega) \cos t + B(\omega) \sin t, \\ \dot{X}(\omega, t) &= -A(\omega) \cos t + B(\omega) \sin t \end{aligned}$$

The state space is the circle

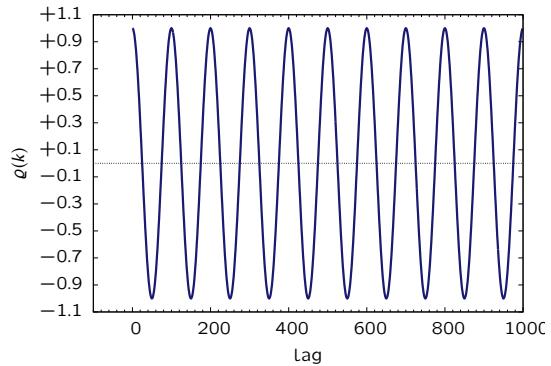
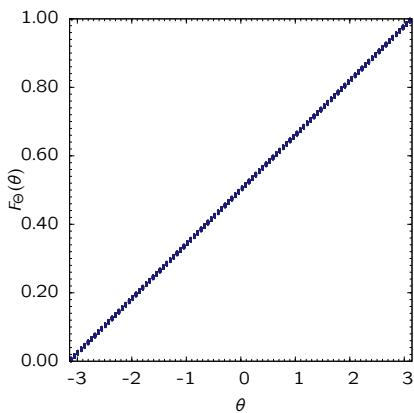
$$\Omega : X^2 + \dot{X}^2 = R^2; \quad X(\omega, 0) = A(\omega), \quad \dot{X}(\omega, 0) = B(\omega).$$

Without loss of generality, $R^2 = 1$. We randomly pick a point $(A(\omega), B(\omega))$ on the unit circle, and it will go round and round forever on it. The random point actually corresponds to a uniform distribution of $\Theta(\omega) = \text{arctg}2(B, A)$ on (say) $[-\pi, +\pi]$.



Numerical test of the harmonic oscillator

$X(t)$ and $\dot{X}(t)$ wander all over Ω , and the cdf of Θ is recovered empirically: this is an indication that the process is *ergodic*. However, the autocorrelation function does not $\rightarrow 0$ as $\tau \rightarrow \infty$: the process is non-mixing. Moreover, it is not stationary.



Example: the AR-1 process

A multivariate random variable is a stochastic process. An n-uple $(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$ of zero-mean (without loss of generality), independent and identically distributed random variables with variance σ^2 is a stochastic process, if we look at it as:

$$\mathbf{U}(\omega) = (U_1(\omega), U_2(\omega), \dots, U_n(\omega), \dots).$$

Then this process can be used to build another one. For instance, an autoregressive, order 1 process

$$\begin{aligned} X_1 &= U_1 \\ X_{n+1} &= \rho X_n + \sqrt{1 - \rho^2} U_{n+1} \end{aligned}$$

can now be seen as

$$\mathbf{X}(\omega, n) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots).$$



Interpretation

This is contrary to the usual first impression that in such a process there is a “deterministic” component (ρX_n) and randomness introduced at each time step ($\sqrt{1 - \rho^2} U_{n+1}$): we can alternatively think of all the “randomness” being drawn from the bag “instantaneously” ($\mathbf{U}(\omega)$) and a deterministic function $X(\omega, n)$ being defined once ω has been drawn.



So, what is “random”?

I don't know.

- Kolmogorov axiomatized it: “there exists” a probability measure, with highly sophisticated mathematical aspects.
- He didn't teach us how to “draw”.
- We remain dependent on **analog sampling devices** when it comes to “drawing”: we use bit traffic over the internet, repeated laboratory or field experiments, or good old dice and roulettes.

In short: **I think** we do not know what “random” is. Perhaps it is just another label for an “unpredictable” process.

(Even if it is deterministic, and (in the sense of the gods), pre-ordained.)



Conclusions

- “Ergodic”, “Stationary” and “Mixing” do not always flock together.
- To a large extent, stochastic processes and dynamical systems can be given a unified treatment. There are technicalities, like the nature of the measures, and the sigma-fields involved, etc..
- At any rate, this unified approach justifies the liberties taken for instance in averaging turbulent flows both analytically and in the laboratory/field.
- A long way lies ahead, however. For instance: are the Navier-Stokes equations ergodic? How about mixing?
- Reynolds' approach in averaging the Navier-Stokes equations antedates important and seminal work on Statistical Mechanics and Ergodic Theory. It remains far-reaching and an important tool to this day.



That's it

Thank you very much for the attention.



References

*Referências

George D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12):656–660, 1931.

H. P. Breuer and F. Petruccione. Burger's model of turbulence as a stochastic process. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(11):L661–L667, 1992.

P. Collet. Dynamical systems and stochastic processes, July 2010.

A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560, 1905.

A. Einstein. *Investigations on the theory of the Brownian motion. (R. Fürth ed.)*, chapter On the Movement of Small Particles Suspended



in a Stationary Liquid Demanded by the Molecular-Kinetic Theory of Heat. Dover Publications, New York, 1956.

A. N. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Foundations of the theory of probability)*. Springer, Berlin, 1933.

Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 146:530–533, 1908.

Joel L. Lebowitz and Oliver Penrose. Modern ergodic theory. *Physics Today*, 26(2):23–29, 1973.

D. S Lemons and A. Gythiel. Paul Langevin's 1908 paper "on the theory of brownian motion"["sur la théorie du mouvement brownien,"*c. r. acad. sci. (paris)* 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, 65(11):1079–1081, 1997.

Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.



J. Clerk Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157:pp. 49–88, 1867.

Adilson E. Motter and David K. Campbell. Chaos at fifty. *Physics Today*, 66(5):27–33, 2013.

O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164, 1895.

Jeffrey S. Rosenthal. *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific, 2008.

G. I. Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 20(2):196–211, 1921.

P. Todorovic. *An introduction to stochastic processes and their applications*. Springer-Verlag, New York, 1992.



Apêndice E

Sumário de “Pequena Introdução aos Números”

Sumário, ainda vem versão preliminar de [Dias \(2014b\)](#).

Sumário

0 Partindo do zero	9
0.1 Números, naturalmente	9
0.2 A soma	10
0.3 A Multiplicação	11
0.4 Exponenciação	13
0.5 Porque os números são como são	15
1 Novas operações e suas incríveis consequências	17
1.1 Inventando a álgebra	17
1.2 Conjuntos e elementos	18
1.3 Inventando Operações Inversas	21
1.4 As incríveis consequências	22
2 Expandindo os horizontes da soma: os números inteiros	25
2.1 Comparando conjuntos	25
2.2 Números negativos	27
2.3 Soma e subtração, novamente	28
2.4 Rearrumando a casa	29
2.5 Equações e as regras do jogo	34
2.6 Explicando a manipulação de equações	36
3 Interlúdio para dividir números naturais	37
3.1 Esclarecimento necessário ao público	37
3.2 Revendo a divisão em \mathbb{N}	37
3.3 Números primos e fatores primos	38
3.4 O MMC	39
3.5 O MDC	42
4 Expandindo os horizontes da multiplicação: os números racionais	45
4.1 Parada para balanço	45
4.2 Pizzas e frações	45
4.3 Multiplicação e divisão, novamente	46
4.4 Tirando a poeira da divisão	47
4.5 Novíssimas inevitáveis regras	48
4.6 Escrevendo e manipulando equações	56
4.7 Fatos espetaculares	60

5 Expandindo os horizontes da exponenciação: os algoritmos de divisão e processos de limites	63
5.1 Números negativos, nulos e positivos (novamente)	63
5.2 Expoentes negativos e a representação dos números	68
5.3 Formalizando limites	82
5.4 Refletindo sobre o caminho percorrido	83
6 Expoentes fracionários e números irracionais	85
6.1 A raiz quadrada	85
6.2 $\sqrt{2}$ é um número irracional	86
6.3 $\sqrt{2} - 1$ é um número irracional	87
6.4 O cálculo de raízes quadradas	90
6.5 Mais maravilhas	95
6.6 Os números irracionais	97
6.7 As operações e propriedades dos números reais	102
7 Logaritmos de números reais	105
7.1 O que são mesmo logaritmos?	105
7.2 Transformando produtos em somas	105
7.3 Uma pequena tábua de logaritmos	107
7.4 Funções	112
7.5 Solucionando o mistério da constante k	115
7.6 Mudanças de base	118
8 Interlúdio binomial e exponencial	121
8.1 Um pequeno e profundo capítulo	121
8.2 O teorema do binômio	121
8.3 A série da função exponencial	127
9 Expandindo os horizontes da exponenciação: os números complexos	131
9.1 Bases positivas e negativas	131
9.2 A equação do 2º grau	131
9.3 Os números complexos	135
9.4 Raízes e potências	138
10 Os expoentes imaginários e o fim do caminho	143
10.1 Trilhas matemáticas	143
10.2 A solução por definição	143
10.3 Os ciclos de $e^{\theta i}$	146
10.4 O número mais famoso do mundo	149
10.5 Desvendando $X(\theta)$ e $Y(\theta)$	151
10.6 Geometria e Trigonometria	153
10.7 A forma polar	157
10.8 O fim do caminho	158

Apêndice F

A dedução da equação de Priestley-Taylor

Reprodução de [Dias \(1992\)](#)

UNIFICAÇÃO FORMAL DE METODOLOGIAS PARA CÁLCULO DE EVAPORAÇÃO EM
LAGOS

FORMAL UNIFICATION OF METHODOLOGIES TO CALCULATE EVAPORATION FROM
LAGES

NELSON LUÍS DIAS

Bolsista do CNPq, Cornell University, 108 Hollister Hall Ithaca NY
14853-3501 E.U.A.

RESUMO -- À medida em que aumenta a demanda de água para geração de energia elétrica e outros usos, cresce a importância da quantificação dos totais evaporados em lagos. Este trabalho revisa algumas das metodologias atualmente disponíveis para o cálculo da evaporação, tendo em vista seus méritos, aplicabilidade e limitações. O texto é escrito com o objetivo de ser acessível para hidrólogos sem conhecimento especializado em micrometeorologia e turbulência, introduzindo alguns tópicos relativamente elementares destas áreas onde necessário. As dificuldades de se aplicar diversos métodos em condições de estratificação estável da atmosfera sobre a superfície da água são relatadas. Além disso, mostra-se que a equação de Priestley e Taylor, que forma o cerne de um modelo recente de evaporação (CRLE: Morton, 1983b) é um caso particular do método do balanço de energia-razão de Bowen. Com isto, é possível re-unificar formalmente as diversas metodologias dentro de um contexto estritamente físico.

PALAVRAS-CHAVE: Evaporação / Hidrologia / Reservatórios

ABSTRACT -- As water demand for energy generation and other uses increases, it becomes more important to quantify evaporation from reservoirs. This work reviews some of the currently available methodologies, with regard to their merits, applicability and limitations. The text is written to be accessible by hydrologists without specialized knowledge in micrometeorology and turbulence. The difficulties of applying the various methodologies in a stably stratified atmosphere above the water surface are reported. It is shown that the Priestley & Taylor equation, which forms the bulk of a recently proposed evaporation model (CRLE: Morton, 1983b), is a particular case of the Energy Budget-Bowen Ratio method. This allows a reunification of all methodologies under a strictly physical framework.

KEY-WORDS: Evaporation / Hydrology / Reservoirs

INTRODUÇÃO

Seja x, y, z um sistema coordenado de eixos tal que $z=0$ coincide com a superfície média de um lago, o que significa que remanso, ondas, seiches e outras perturbações não são consideradas. Seja uma altura de referência sobre a superfície; tipicamente, 2,0 m em experimentos micrometeorológicos. Os fluxos turbulentos de vapor de água, calor ("sensível") e quantidade de movimento ao longo de um intervalo $\Delta t = 30$ min. no ponto (x, y) são expressos por:

$$E = \rho \overline{w' q'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \rho w' q' dt \quad (1)$$

$$H = \rho c_p \overline{w' \theta'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \rho c_p w' \theta' dt \quad (2)$$

$$\tau = -\rho \overline{w' u'} = -\frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \rho w' u' dt \quad (3)$$

onde ρ é a massa específica do ar e c_p o calor específico do ar a pressão constante (para uma lista dos símbolos usados neste trabalho, veja o Apêndice). Admite-se que E , H e τ variam muito pouco nos primeiros, digamos, 2,0 metros da atmosfera, e que são iguais aos valores de superfície dos fluxos, onde a turbulência cessa e o transporte é por difusão molecular. Com o valor de superfície de τ , é comum definir-se uma escala de velocidade (ou "velocidade de atrito")

$$u_* \equiv (\tau / \rho)^{1/2} \quad (4)$$

Na equação (3) e em todo o restante deste artigo, admite-se que a direção da velocidade média do vento coincide com x , por simplicidade. As componentes da velocidade são u, v, w . A umidade específica é q , e a temperatura potencial θ . Uma barra significa média temporal, assim como definida pelas integrais acima. Uma linha ('') indica a flutuação instantânea da grandeza em questão em torno da média temporal. O adjetivo "potencial" (usado aqui por compatibilidade com a literatura de micrometeorologia) para a temperatura não é essencial no contexto deste trabalho: próximo à superfície, a temperatura potencial é muito próxima da temperatura termodinâmica. Para definições, veja por exemplo Nieuwstadt e van Dop (1982) ou Brutsaert (1982): O intervalo de média é mais importante. É um fato experimental que o espectro de grandezas atmorfotícas apresenta um "valo" em torno de períodos entre 30

min. e 1 hora (Lumley e Panofsky, 1964, Businger, 1982, Panofsky e Dutton, 1984). O que isso significa é que decompondo-se uma grandeza (por exemplo, u) em série de Fourier, os coeficientes dos termos com períodos entre 30 min. e 1 hora são relativamente muito menores que seus vizinhos. Este fato permite que se assuma que as flutuações sobre períodos menores que 30 min. são de fato independentes da tendência geral ao longo do dia, e que o registro turbulento resultante (por exemplo, u') representa um processo estacionário.

O objetivo de modelos de cálculo de evaporação em lagos é a determinação da média espacial de E sobre a superfície líquida numa escala de tempo de horas, dias, semanas ou meses. Estes modelos se fazem necessários devido à dificuldade de medições diretas. Em princípio, as equações (1), (2) e (3) propiciam uma metodologia de medição direta, denominada método de medição de covariâncias. Para tanto, é necessário medir a velocidade horizontal, a velocidade vertical, a umidade e a temperatura com instrumentos de resposta de alta freqüência (20 a 100 Hz = 20 a 100 medidas por segundo), que proporcionam boas aproximações para a velocidade, a temperatura e a umidade "instantâneas". Para que uma medida pontual (turbulenta ou não) possua representatividade espacial, é preciso que o ponto de medição satisfaça requerimentos de "fetch" ou pista de vento (distância ao longo da qual o vento sopra, sobre a água, antes de atingir o ponto de medição). Uma regra prática (Brutsaert, 1982, seção 7.1c, p. 166) é

$$x_p \geq 300z_a \quad (5)$$

onde z_a é a altura de referência mencionada acima. Por exemplo, se $z_a = 2,0\text{ m}$, $x_p = 600,0\text{ m}$ é uma distância mínima razoável. Por esta razão, pontos ótimos de medição tendem a ser no centro do lago, o que aumenta consideravelmente as dificuldades práticas envolvidas. Embora medições de turbulência sejam correntes na atmosfera, tanto em estações em terra quanto a bordo de aeronaves, medições sobre superfícies líquidas são menos frequentes (para um exemplo de medição no mar, veja Khalsa e Businger, 1977; para medições sobre a superfície de um lago, veja Sheppard et al., 1972). Tanto quanto seja do meu conhecimento, o método de medição de covariâncias nunca foi tentado em lagos brasileiros.

ESTABILIDADE ATMOSFÉRICA E RELAÇÕES FLUXO-GRADIENTE

Em Meteorologia, o conceito de estabilidade atmosférica está associado com a taxa de variação da temperatura termodinâmica T com a altura z . Uma atmosfera neutra corresponde a $dT / dz = -g / c_p = -0,00976\text{ K} / \text{m}$, onde g é a aceleração da gravidade. Obukhov (1946) propôs uma forma de quantificar o

efeito da estabilidade atmosférica sobre a turbulência (e em particular sobre os fluxos turbulentos) na região da Camada-Limite Atmosférica imediatamente próxima à superfície. Obukhov introduziu uma variável com dimensão de comprimento,

$$L_O \equiv \frac{-\rho u_*^3}{\kappa g [H / (c_p \bar{\theta}_a) + 0,61E]} \quad (6)$$

c a variável adimensional

$$\varsigma \equiv z / L_O \quad (7)$$

nas relações fluxo-gradiente. Em (6), $\bar{\theta}_a$ pode ser convenientemente tomada, no contexto deste trabalho, com a temperatura média de 30 min. do ar a 2,0 m de altura, e $\kappa = 0,4$. A expressão (6) pode ser obtida por considerações dimensionais (mas o caminho não é óbvio), ou, de forma mais "física", através da adimensionalização da equação de transporte de energia cinética turbulenta. Uma abordagem extremamente feliz sobre turbulência atmosférica em geral e sobre a (assim chamada) teoria de similaridade de Monin-Obukhov em particular pode ser encontrada em Nieuwstadt e van Dop (1982). Para uma abordagem mais simples a nível introdutório, veja Fleagle e Businger (1984). Para os propósitos deste trabalho, é suficiente observar que uma proposição desta teoria é a relação entre fluxo turbulento F (leia-se E , H ou τ) e o gradiente da grandeza escalar associada $\bar{\eta}$ ($\bar{q}, \bar{\theta}, \bar{u}$):

$$F = \pm \frac{\kappa(z - \delta_{0F})u_*}{\phi_F(\varsigma)} \rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial z} \quad (8)$$

onde a função adimensional $\phi_F(\varsigma)$ deve ser determinada experimentalmente para cada fluxo F . Em (8), a "altura de deslocamento" δ_{0F} leva em conta o fato de que, sobre superfícies rugosas, a "fonte" do fluxo turbulento situa-se em algum plano acima da base ($z = 0$) dos elementos de rugosidade. Na seqüência, adota-se $\delta_{0F} = 0$, o que é usual para superfícies líquidas; o sinal "+" vale para τ , e "-" para E e H . É possível interpretar a primeira fração do lado direito de (8), com dimensão de [comprimento²/tempo], como uma difusividade turbulenta K_F , que pode ser obtida experimentalmente se o fluxo turbulento e o gradiente forem conhecidos em um determinado nível de medição. Integrando,

$$\bar{\eta}_a - \bar{\eta}_0 = \pm \frac{F}{\rho u_*} \int_{z_{0F}}^{z_a} \frac{\phi_F(z/L_O)}{\kappa z/L_O} \frac{dz}{L_O} \quad (9)$$

onde $\bar{\eta}_0$ é o valor de $\bar{\eta}$ na superfície. Note que o integrando de (9) é singular em $z = 0$, i.e.: o domínio de validade de (8) e (9) não se estende até a superfície. A rugosidade z_{0F} é definida pela extrapolação do perfil $\eta(z)$ obtido em (9) de tal forma que $\bar{\eta}(z_{0F}) = \bar{\eta}_0$.

Para $\eta = u$, a condição de não-deslizamento impõe que a velocidade do ar e da água sejam iguais na superfície. Desprezando-se correntes superficiais e a velocidade da água induzida pelo próprio vento (isto é: assumindo que a velocidade do vento seja nula na superfície),

$$\bar{u}_a = \frac{\tau}{\rho u_*} \int_{z_{0F}}^{z_a} \frac{\phi_T(z/L_O)}{\kappa z/L_O} \frac{dz}{L_O} = u_* \left[\Phi_T \left(\frac{z_a}{L_O} \right) - \Phi_T \left(\frac{z_{0T}}{L_O} \right) \right] \quad (10)$$

onde usou-se (4) e $\Phi_T(\cdot)$ é a primitiva do integrando. Observe que, no caso de $\phi_T = 1$ (atmosfera neutra), (10) reduz-se ao bem conhecido perfil logarítmico de velocidades na camada-limite turbulenta. Claramente, as funções ϕ em (8) e (9) simplesmente "corrigem" o perfil logarítmico para os efeitos da estabilidade atmosférica.

Eliminando-se u_* em (9) por meio de (10), obtém-se:

$$E = \rho \bar{u}_a C_E (\bar{\eta}_0 - \bar{\eta}_a) \quad (11)$$

$$H = \rho \bar{u}_a C_H (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a) \quad (12)$$

$$\tau = \rho \bar{u}_a C_\tau \bar{u}_a \quad (13)$$

onde os coeficientes de transferência C_E , C_H e C_τ estão definidos implicitamente por (9) e (10), e são claramente funções das rugosidades e do parâmetro $\xi_a = z_a/L_O$ de estabilidade atmosférica. Note que C_E é função de ambas as rugosidades z_{0T} e z_{0E} , um resultado análogo valendo para C_H .

A equação (11) é conhecida em Hidrologia como Lei de Dalton, cuja origem remonta a 1801 (Para referências históricas, veja

Brutsaert (1982), Capítulo 2). Modernamente, (11)-(13) são conhecidas como equações de transferência de massa de vapor de água, calor e quantidade de movimento.

BALANÇO DE ENERGIA

A radiação líquida na superfície de um lago (com dimensões de [energia/área/tempo]) é

$$R_l = R_s(1 - a) + \varepsilon R_a - R_e \quad (14)$$

onde R_s , R_a e R_e são a radiação solar incidente, radiação atmosférica (emitida por nuvens, CO_2 , H_2O atmosférico, etc.) incidente e a radiação emitida pela superfície, que é dada por

$$R_e = \varepsilon \sigma \bar{\theta}_0^4 \quad (15)$$

onde $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann; o albedo a e a absorvidade/emissividade ε dão conta das parcelas de R_s e R_a efetivamente absorvidas nas respectivas faixas de comprimento de onda ($0,3 - 4,0 \mu\text{m}$ e $4,0 - 100,0 \mu\text{m}$).

A energia líquida radiante em (14) é usada para aquecer/resfriar a água (D), aquecer/resfriar o ar (H) e evaporar a água (LE), onde L é o calor latente de evaporação da água; assim,

$$R_l = H + LE + D \quad (16)$$

Em aplicações do método do balanço de energia-razão de Bowen, mede-se R_l ou as suas diversas parcelas em (14) e D (em geral por meio de perfis sucessivos de temperatura da água ao longo do tempo). Devido a limitações na precisão e representatividade espacial dos perfis de temperatura, medições de D numa escala de tempo inferior a um dia são provavelmente impraticáveis em lagos cuja profundidade média seja superior a uns poucos metros, mas são possíveis na escala de 7 a 30 dias. Isso cria um problema de compatibilização das medições de D com as demais variáveis, que são tipicamente médias de 30 minutos. Uma análise detalhada foge ao escopo deste trabalho, podendo ser encontrada por exemplo em Webb (1960 e 1964). Para fixar idéias, suponha que $D \equiv 0$ ou então que médias para 30 minutos estejam disponíveis. A combinação de (11) e (12) produz

$$B_f \equiv \frac{H}{LE} = \frac{C_H}{C_E} \frac{c_p}{L} \frac{\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a}{\bar{q}_0 - \bar{q}_a} \quad (17)$$

onde B_f é a razão de Bowen para fluxos (Lang et al, 1983a). Se

$$C_H \approx C_E \quad (18)$$

é possível usar

$$B_g \equiv \frac{c_p}{L} \frac{\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a}{\bar{q}_0 - \bar{q}_a}, \quad (19)$$

a razão de Bowen para gradientes, em lugar de B_f . Levando (19) em (16),

$$LE = \frac{1}{1 + B_g} (R_l - D) \quad (20)$$

é a equação clássica para cálculo de evaporação em lagos pelo método do balanço de energia-razão de Bowen. Note que, debaixo da hipótese (18), a grande vantagem é que se torna desnecessário conhecer z_{0E} , z_{0H} , z_{0T} , u^* ou ζ_a .

Nos últimos anos, têm surgido evidências teóricas e experimentais que colocam (18) em dúvida em condições estáveis, i.e.: quando $\zeta_a > 0$. Este é um caso de grande relevância prática, já que ar relativamente quente soprando de uma região seca sobre um lago com água mais fria gera um fluxo negativo de calor H considerável para a água, resultando em $L_o > 0$ em (6), e aumentando a energia total disponível para a evaporação em (16). Toda a discussão que se segue diz respeito a condições estáveis.

Warhaft (1976) estabeleceu que uma condição necessária para que $K_H = K_E$ (o que implica (18), a menos que as rugosidades para calor e vapor de água sejam significativamente diferentes) em (8) é que o coeficiente de correlação $r_{\theta q}$ entre θ' e q' seja ± 1 (-1 no nosso caso: H e E com sinais opostos). O nível de correlação e os fatores que o influenciam não são bem conhecidos. Por exemplo, Lang et al (1983a) obtiveram $r_{\theta q} = -0,70 \pm 0,02$, enquanto que Priestley e Hill (1988) obtiveram valores próximos de -1. Após o trabalho teórico de Warhaft, Verma et al (1978) obtiveram valores de K_H / K_E da ordem de 1,5, enquanto que Lang et al (1983a) encontraram valores em torno de 0,7. O experimento de Verma et al

utilizou lisímetros e um balanço de energia para o cálculo dos fluxos (e não medições turbulentas), e suscitou um vivo debate, estando qualitativamente em desacordo com os resultados teóricos de Warhatt, que prevêem $K_H / K_E < 1,0$. Hicks e Everett (1979) atribuíram os resultados de Verma et al a alturas de deslocamento diferentes para vapor de água e calor. Neste caso, medições de gradientes de temperatura e umidade muito perto do topo da cultura levam a valores diferentes para as difusividades turbulentas, mesmo que as funções de similaridade ϕ sejam iguais (veja a equação (8)). Por outro lado, Lang et al (que mediram sobre um arrozal irrigado) dispunham de uma pista de vento relativamente reduzida (~ 300 m). Em nenhum dos dois casos estudou-se condições estáveis sobre uma superfície líquida livre (com altura de deslocamento nula), como a de um lago.

Bertela (1989) sugere que as dificuldades encontradas com o método do balanço de energia-razão de Bowen podem ser atribuídas ao efeito de advecção horizontal de calor ou vapor de água (i.e.: a variações significativas de E e H com x , no ponto de medição), o que provavelmente ocorrerá se a pista de vento for insuficiente para que a turbulência atmosférica se "ajuste" à superfície. Neste caso, (16) teria que incluir termos extras envolvendo as derivadas horizontais de E e H . Lang et al (1983b) estimaram que os termos de advecção são desprezíveis no seu experimento, mas a sua estimativa baseia-se em hipóteses não verificadas sobre o comportamento da função $E(x)$ (i.e.: da variação do fluxo local de vapor de água ao longo da pista de vento), a saber, que E tende assintoticamente para o valor previsto pela equação de Priestley e Taylor; conforme veremos, esta equação não foi concebida para ser usada quando $H < 0$.

Em suma, existem evidências experimentais e teóricas que colocam em dúvida a aplicabilidade do método do balanço de energia-razão de Bowen em condições estáveis. Possíveis causas seriam: (i) funções de similaridade ϕ de Monin-Obukhov diferentes para calor e vapor de água; (ii) pista de vento inadequada e (iii) altura de medição (de temperatura e umidade do ar) inadequada (muito pequena) em conjunto com alturas de deslocamento diferentes para calor e vapor de água. Conforme vimos, a altura de deslocamento de qualquer escalar sobre superfícies líquidas é zero (ou, de qualquer forma, muito menor que uma altura padrão de 2,0 m para a medição de temperatura e umidade do ar), enquanto que (ii) pode ser virtualmente eliminada pelo correto posicionamento da estação de medição. Portanto, somente (i) representa uma questão importante (que permanece não-resolvida) para o caso de evaporação em lagos.

A EQUAÇÃO PSICROMÉTRICA

O cálculo da umidade do ar num psicrómetro aspirado é formalmente equivalente ao método do balanço de energia-razão de Bowen, realizado aqui para o bulbo de um termômetro envolto em gaze, umedecido e protegido da radiação ambiental. A temperatura do bulbo úmido é $\bar{\theta}_h$. Na equação (11), pode-se substituir q por e usando-se

$$q = 0,622 \frac{e}{p} \quad (21)$$

onde p é a pressão atmosférica e e a pressão de vapor de água no ar. A equação (16), com $R_1 = D = 0$, fornece

$$H + LE = 0$$

Usando-se as equações (11) e (21) para E , e (12) para H :

$$\rho c_p C_H (\bar{\theta}_h - \bar{\theta}_a) + \rho \frac{0,622L}{p} C_E (e^*(\bar{\theta}_h) - \bar{e}_a) = 0$$

Finalmente, admitindo a validade de (18) e explicitando-se \bar{e}_a :

$$\bar{e}_a = e^*(\bar{\theta}_h) - \gamma(\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_h) \quad (22)$$

onde

$$\gamma = \frac{c_p p}{0,622 L} \quad (23)$$

é a "constante psicrométrica" e $e^*(.)$ a curva de pressão de saturação de vapor de água contra a temperatura (note o uso da pressão de saturação de vapor d'água à temperatura do bulbo úmido, já que a superfície do bulbo úmido está saturada). A equação (22) é usada em psicrómetros aspirados para o cálculo da pressão de vapor do ar, via a medida das temperaturas de bulbo seco e úmido. O intervalo de cálculo das médias implicadas acima é muito menor que os 30 min. de micrometeorologia; tipicamente, espera-se cerca de 1 min. até que a diferença das duas temperaturas se estabilize. Note que (18) foi usada em conjunto com uma situação em que os fluxos E e H têm sinais opostos, análoga às condições estáveis discutidas no parágrafo acima. No entanto, em princípio a velocidade do ar (e portanto u_*) no psicrómetro é suficientemente alta para garantir que $\zeta \rightarrow 0_+$ (note

que, na equação (6), isto significa que a fricção mecânica do ar sobre a superfície, cujo efeito é dado pela velocidade de atrito u_* , é comparativamente muito mais importante que a convecção térmica associada primariamente ao fluxo H de calor na produção ou destruição de turbulência.

A EQUAÇÃO DE PENMAN

Em (20), a temperatura da superfície entra diretamente em B_g , via (19), e indiretamente em R_l , caso esta seja calculada por meio de (15), em lugar de medida. Penman (1948) eliminou a temperatura da superfície por meio do uso de uma equação formalmente equivalente a (11),

$$E = f(\bar{u}_a) \left(e^*(\bar{\theta}_0) - \bar{e}_a \right) \quad (24)$$

O resultado da combinação de (20) e (24),

$$LE = \frac{\Delta_{0a}}{\Delta_{0a} + \gamma} (R_l - D) + \frac{\gamma}{\Delta_{0a} + \gamma} L f(\bar{u}_a) \left(e^*(\bar{\theta}_a) - \bar{e}_a \right) \quad (25)$$

é exato para

$$\Delta_{0a} \equiv \frac{e^*(\bar{\theta}_a) - e^*(\bar{\theta}_0)}{\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_0} \quad (26)$$

(Brutsaert, 1982; Dias, 1986). A aproximação proposta por Penman foi substituir a diferença finita (26) por

$$d_a = \frac{de^*}{dT} (T = \bar{\theta}_a) \quad (27)$$

o que virtualmente elimina a temperatura da superfície (desde que R_l seja medida); o resultado é:

$$LE \equiv \frac{d_a}{d_a + \gamma} (R_l - D) + \frac{\gamma}{d_a + \gamma} L f(\bar{u}_a) \left(e^*(\bar{\theta}_a) - \bar{e}_a \right) \quad (28)$$

(em muitas das "fórmulas de Penman" apresentadas na literatura, R_l é calculada por meio de equações equivalentes a (14) e (15), com a temperatura da superfície aproximada pela temperatura do ar em (15). Um procedimento mais correto, expansão em série de Taylor

de (15) em torno da temperatura do ar, foi introduzido por Kohler e Parmele (1967), mas não será abordado aqui).

Note que em princípio (28) não apresenta nenhuma vantagem sobre o método do balanço de energia-razão de Bowen. Ao contrário, além de quase todas as medições necessárias em (20), é preciso conhecer $f(\cdot)$. Note também que a velocidade, temperatura e umidade do ar continuam tendo que ser medidas em condições de pista mínima, i.e.: no "meio" do lago. A grande importância de (28) em aplicações hidrológicas vem do fato de que é possível calcular um valor virtual de evaporação a partir de séries de temperatura, umidade, velocidade do vento e radiação medidas rotineiramente em estações meteorológicas em terra. Isto deu origem ao conceito (de interpretação dúbia) de "evaporação potencial", já que a superfície (solo) da estação apenas ocasionalmente se encontra saturada de água, que é uma das hipóteses usadas na dedução de (28), quando se determina a umidade superficial por meio da curva de pressão de saturação de vapor.

Entretanto, se (11) e (12) puderem ser aplicadas simultaneamente para o cálculo de E e H no lago com a temperatura e a umidade do ar medidas em terra a barlavento, e se (18) e (28) com uma função $f(u)$ adequada. Por exemplo, Harbeck (1962) propôs calcular a evaporação em lagos por meio de (24), com a umidade do ar medida em terra e uma função empírica de transferência de massa do tipo

$$f(u) = N A^{-m} \bar{u}_d \quad (29)$$

onde N , m são constantes e A é a área da superfície do lago. Por meio de uma solução analítica para a equação de transporte de vapor de água sobre a superfície de um lago, Brutsacit e Yeh (1970) obtiveram a mesma dependência funcional com ℓ^2 em lugar de A , onde ℓ é a pista total de vento disponível. Num longo estudo de evaporação no lago Mead, o U.S. Geological Survey (1954) concluiu que a razão de Bowen (para gradientes) obtida com a temperatura e a umidade do ar medidas em terra ou sobre o lago eram essencialmente iguais (o que é espantoso). Kohler e Parmele (1967) usaram (24) calibrada para medições em terra numa equação equivalente a (28), com uma correção extra para o termo de radiação líquida (veja Dias, 1986 e Dias e Gobi, 1988) num modelo de evaporação em lagos. A validade deste tipo de procedimento em combinação com o método do balanço de energia-razão de Bowen, entretanto, continua a ser uma questão em aberto.

Outro ponto interessante é que (20) e (24) podem ser encarados como um conjunto de 2 equações nas incógnitas E e $\bar{\theta}_0$, a equação de Penman consistindo em uma solução analítica aproximada para E . Quando este procedimento é aplicado com dados medidos

numa estação meteorológica, uma solução numérica fornece a "evaporação potencial" E_p e a "temperatura de equilíbrio" θ_p . Esta última é bastante sensível à energia total disponível $R_l - D$, mas bem menos à temperatura ou à umidade do ar (Morton, 1983). A introdução de um novo nome (temperatura de equilíbrio) por Morton certamente evita a questão delicada de o quanto ela se aproxima da real temperatura da superfície do lago.

A EQUAÇÃO DE PRIESTLEY E TAYLOR

Priestley e Taylor (1972) propuseram calcular a evaporação sobre grandes superfícies úmidas na ausência de advecção por meio da equação empírica

$$LE = \alpha_0 \frac{d_0}{d_0 + \gamma} (R_l - D) \quad (30)$$

onde d_0 é análogo a d_a em (27) para $T = \bar{\theta}_0$, e $\alpha_0 \approx 1,26$. Além da semelhança formal óbvia com (28), (30) pode ser interpretada como uma forma de calcular E sem medições de temperatura e umidade do ar, enquanto que (28) calcula E sem medições de temperatura da superfície. Note que as diferenças entre d_0 e d_a tendem a ser pequenas, e que se encontram exemplos na literatura do uso de ambos em (30), o que gera uma certa confusão. A notação deste artigo é fiel à proposição original (porém não explícita) de Priestley e Taylor.

Um ponto fundamental é o termo "ausência de advecção" ("advection-free" no original). Priestley e Taylor adotaram $H \geq 0$ como critério de seleção de condições "não-advectivas". Nestas condições, Stewart e Rouse (1976) e De Bruin e Keijman (1979) confirmaram um excelente desempenho de (30) vis-à-vis o método do balanço de energia-razão de Bowen. Naturalmente, isso limita o uso da equação de Priestley e Taylor aos casos em que $\bar{\theta}_0 > \bar{\theta}_a$, o que corre o risco de ser esquecido em aplicações práticas. Conforme veremos analiticamente, (30) com $\alpha_0 = 1,26$ é uma excelente aproximação para (20) quando $H \geq 0$, e uma péssima aproximação à medida em que a razão de Bowen se aproxima de -1. Os resultados que se seguem foram obtidos por Dias (1988), faltando no entanto uma discussão mais cuidadosa das suas consequências para a modelagem de evaporação em lagos, que é retomada aqui.

De (19), (20), (21) e (23):

$$\frac{1}{1 + B_g} = \frac{e^*(\bar{\theta}_0) - \bar{e}_a}{e^*(\bar{\theta}_0) - \bar{e}_a + \gamma(\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a)}$$

Eliminando \bar{e}_a por meio de (22):

$$\frac{1}{1 + B_g} = \frac{e^*(\bar{\theta}_0) - e^*(\bar{\theta}_h) + \gamma(\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_h)}{e^*(\bar{\theta}_0) - e^*(\bar{\theta}_h) + \gamma(\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $(\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_a)$, e introduzindo, à semelhança de (26),

$$\Delta_{0h} \equiv \frac{e^*(\bar{\theta}_0) - e^*(\bar{\theta}_h)}{\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_h} \quad (31)$$

Obtém-se

$$\frac{1}{1 + B_g} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta_{0h}} \frac{\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_h}{\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_h} \right) \frac{\Delta_{0h}}{\Delta_{0h} + \gamma} \quad (32)$$

$$\frac{1}{1 + B_g} = \alpha_h \frac{\Delta_{0h}}{\Delta_{0h} + \gamma} \quad (33)$$

onde α_h corresponde à expressão entre parêntesis em (32). Levando-se (33) em (20), finalmente:

$$LE = \alpha_h \frac{\Delta_{0h}}{\Delta_{0h} + \gamma} (R_L - D) \quad (34)$$

que é formalmente equivalente a (30) de Priestley e Taylor se a diferença finita (31) for aproximada pela derivada da curva de pressão de saturação de vapor de água calculada à temperatura da superfície, de uma maneira totalmente análoga ao que foi feito por Penman. Isso reforça a interpretação do parágrafo anterior de que a equação de Priestley e Taylor procura aproximar o balanço de energia eliminando medições no ar.

Cabe agora abordar a questão de quão boa é a aproximação de α_h pela constante 1,26. Para $H \geq 0$, $E \geq 0$, o limite inferior de α_h é 1, quando a temperatura do ar é igual à temperatura de bulbo úmido (umidade relativa do ar igual a 100%). Isto corresponde ao conceito de "evaporação de equilíbrio" introduzido por Slayter e McIlroy (mencionados em Brutsaert, 1982, Cap. 10). O limite superior (ainda em condições de "ausência de advecção") ocorre quando a temperatura da superfície é igual à do ar: $H = 0$, e toda a energia disponível $R_l - D$ é usada para evaporação. Neste caso, α_h pode ser estimado a partir da equação (32), tomando-se $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_a$, (o que equivale a $H = 0$ em (12)), por $1 + \gamma / d_0$. Parece então razoável adotar um valor típico $\hat{\alpha} = 1 + \gamma / (2d_0)$. Os valores de $\hat{\alpha}$ para temperaturas da superfície de 15, 20, 25 e 30°C respectivamente são 1,30, 1,23, 1,18 e 1,14. Considerando-se que 1,26 é apenas uma média de numerosas medições (Priestley e Taylor, 1972; Brutsaert, 1982), e as aproximações de diferenças finitas por derivadas, a equação "empírica" de Priestley e Taylor fica perfeitamente explicada.

O comportamento da função α_h é muito pior quando $\bar{\theta}_0 < \bar{\theta}_a$. No intervalo $\bar{\theta}_h < \bar{\theta}_0 < \bar{\theta}_a$, α_h tende para $+\infty$ quando $\bar{\theta}_0 \rightarrow \bar{\theta}_{h+}$. Para $\bar{\theta}_0 < \bar{\theta}_h$, $\alpha_h < 1$, tendendo para $-\infty$ quando $\bar{\theta}_0 \rightarrow \bar{\theta}_{h-}$. Esta singularidade na função α_h é explicável por (33): ela corresponde a $B_g = -1$, ou seja: $R_l - D = 0$. Com isto, o valor de LE permanece finito em (34). Em suma, a restrição $H \geq 0$ adotada por Priestley e Taylor como seu critério de ausência de advecção limita a variação possível de α_h a um intervalo relativamente reduzido, o que explica o sucesso de (30) nesta faixa.

Resta a questão da aplicabilidade da equação de Priestley e Taylor quando $H < 0$. Isto porque nota-se uma tendência na literatura a assumir que (30) vale sobre qualquer superfície saturada, desprezando-se o critério de ausência de advecção (por exemplo, De Bruin e Keijman (1979) propõem que ela seria válida em condições mais gerais, para qualquer lago; Dias (1986, Capítulo VI) propôs que o uso de (30) seria um "primeiro passo para o estabelecimento de procedimentos mais razoáveis e modernos para estimar E_w (i.e.: evaporação em lagos rasos) no Brasil"). Claramente, este não era o objetivo original dos seus autores. Se o método do balanço de energia-razão de Bowen for válido quando $H < 0$ (vide discussão acima), então (30) com $H < 0$ está flagrantemente errada, dado o comportamento extremamente ruim de α_h nesta região. Caso os resultados de Lang et al (1983a) se confirmem, então a evaporação real deve ser inferior à prevista pelo método do balanço de energia-razão de Bowen, mas mesmo neste

caso seria fortuito que (30) continuasse válida, com $\alpha_0 = 1,26$. Parece prudente concluir que, no momento, deve-se restringir o uso de (30) às condições para as quais ela foi proposta ($H \geq 0$, ou seja: temperatura da superfície do lago maior que a temperatura do ar).

O MODELO CRLE

A sigla significa "Complementary Relationship Lake Evaporation", mas a "relação complementar" de Bouchet e Morton (Morton, 1983a) na verdade não é usada para o seu modelo de evaporação em lagos, e não precisa ser discutida aqui. Uma descrição detalhada do modelo foge ao escopo do trabalho, podendo ser obtida em Morton (1983b), Morton et al (1985) e Morton (1986). Em essência, o CRLE consiste em:

- (i) Um procedimento empírico para calcular uma série de valores mensais para D em função da profundidade média e da salinidade do lago
- (ii) A solução simultânea de (20) e (24), com temperatura e umidade medidos em uma estação climatológica em terra, e a radiação líquida estimada por meio de dados (na mesma estação) de insolação, temperatura do ar e umidade do ar. Utiliza-se uma forma alternativa em (24), sem dependência explícita da velocidade do vento. Conforme discutido acima, isso fornece a evaporação potencial (E_p) e a temperatura de equilíbrio θ_p .

A evaporação do lago é então determinada por

$$LE = \alpha_p \frac{d_p}{d_p + \gamma} (R_{lp} - D) + \beta_p \quad (35)$$

onde d_p é análogo a d_a em (27), com $T = \theta_p$; R_{lp} indica que a radiação líquida é calculada assumindo que a temperatura da superfície é θ_p ; $\alpha_p = 1,12$ e $\beta_p = 13,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. A diferença entre (30) e (35) quando ambas são calculadas usando a mesma temperatura da superfície (assumida igual a θ_p) para o lago de Sobradinho no Nordeste do Brasil é irrisória (Dias e Gobi, 1989).

Comparando-se os resultados da seção anterior, em particular a equação (34), com (35) do CRLE, fica claro que o seu desempenho depende de 3 fatores: (i) a qualidade da série temporal D obtida; (ii) a qualidade da aproximação da temperatura da superfície do lago por θ_p e (iii) o uso de uma variante da equação de Priestley

e Taylor para calcular a evaporação. Embora o caminho escolhido pelo seu autor para calibrar o CRLE tenha sido a comparação dos seus resultados com balanços hídricos mensais em diversos lagos ao redor do mundo, é relativamente simples testar (i) e (ii) por meio de medições de perfis de temperatura da água (que é uma tecnologia disponível no Brasil). Por outro lado, e ao contrário do que afirma Morton (1986), o CRLE não é exatamente uma alternativa independente para o método do balanço de energia-razão de Bowen; na verdade ele consiste da equação de Priestley e Taylor, que foi relacionada acima com o próprio método do balanço de energia-razão de Bowen, com adaptações engenhosas (e possivelmente de grande valor prático) para suprir a falta de medições adequadas, no meio do lago, das variáveis adequadas. Mais ainda, as mesmas dúvidas a respeito da aplicabilidade do método do balanço de energia-razão de Bowen e da equação de Priestley e Taylor quando $H < 0$ valem para o CRLE.

CONCLUSÕES

Do ponto de vista micrometeorológico, as equações apresentadas aqui devem ter validade para médias de cerca de 30 minutos. Entretanto, escalas de tempo consideravelmente maiores têm sido empregadas em aplicações hidrológicas. A rigor, a natureza não-linear da maioria das equações proíbe o seu uso com médias diárias ou mensais; no entanto, na prática os erros cometidos no caso de evaporação em lagos não parecem ser proibitivos. Por exemplo, Penman (1948) claramente usou médias diárias para testar a sua equação, assim como fizeram Priestley e Taylor (1972) para obter o valor de α_0 . Webb (1960) encontrou correções da ordem de 5% de LE quando comparou o uso de razões de Bowen medidas a cada três horas com uma "razão de Bowen média mensal" calculada com médias mensais de temperatura e umidade em (19). Dias (1986) obteve essencialmente os mesmos valores de evaporação potencial mensal em (28) quando calculada como a média de valores diáários ou, simplesmente, com os valores mensais médios de temperatura, umidade, velocidade do vento e radiação líquida (esta última igualmente estimada via dados meteorológicos médios mensais). Assim sendo, embora seja provável que o uso de médias diárias ou mensais distorça alguns dos coeficientes numéricos das equações, ele parece justificável enquanto uma aproximação de engenharia no caso de disponibilidade limitada de dados. Esta observação também é importante para conciliar, por exemplo, o uso do CRLE com dados mensais.

O resultado principal deste trabalho é a unificação em bases teóricas de diversas metodologias (algumas das quais originalmente empíricas) para o cálculo de evaporação em lagos. Como se viu, todas elas consistem em alguma forma de aproximação do método de transferência de massa, do balanço de energia-razão de Bowen, ou de ambos.

Existem dúvidas quanto à possibilidade de aplicar o método do balanço de energia-razão de Bowen em condições de estratificação estável da atmosfera sobre o lago. O mesmo tipo de limitação se aplica (quase que por definição) à equação de Priestley e Taylor. Caso confirmada, ela seria particularmente séria no caso de lagos em regiões tropicais, onde é provável que condições estáveis prevaleçam durante uma parte razoável do ano.

RECOMENDAÇÕES PARA APLICAÇÕES PRÁTICAS

Até aqui, adotou-se o ponto de vista acadêmico de apontar as limitações do conhecimento atual sobre evaporação em lagos e sugerir a direção de investigações futuras. Do ponto de vista do engenheiro que necessita de resultados hoje, e não daqui a 15 ou 20 anos quando a ciência tiver progredido um pouco mais, entretanto, tais limitações são no mínimo frustrantes. Esta última seção é escrita em solidariedade ao segundo ponto de vista.

Em primeiro lugar, é importante notar que ainda é cedo para concluir que o método do balanço de energia-razão de Bowen seja "inútil" ou esteja "errado" quando $H < 0$. Uma solução de compromisso talvez seja adotar a evaporação de Priestley e Taylor como um limite inferior, e a evaporação calculada pelo balanço de energia como um limite superior, nestas condições. Provavelmente, é possível comparar então as duas metodologias com o balanço hidráulico de longo curso do lago, na esperança de detectar tendenciosidade em uma ou outra. Qualquer que seja a conclusão de estudos futuros, os parâmetros que devem ser medidos prioritariamente estão claros. Perfis de temperatura da água (com a maior densidade e freqüência possíveis dentro dos limites de custos e operacionalidade) são essenciais para qualquer balanço energético. Um outro incentivo para a sua medição é o fato de que a temperatura da água ao longo da profundidade é um parâmetro absolutamente fundamental em estudos de qualidade de água, que provavelmente se tornarão cada vez mais freqüentes no futuro.

A temperatura da superfície é uma parâmetro fundamental. Ela faz parte do método de transferência de massa, do método do balanço de energia-razão de Bowen, da equação de Priestley e Taylor e, possivelmente, do CRLE, caso venha a ser identificada, ou correlacionada, com a "temperatura de equilíbrio". Em suma, de todas as metodologias revisadas aqui. Webb (1966) propõe uma metodologia para a correção de coeficientes de tanques evaporimétricos para o cálculo da evaporação em lago baseada em medições adicionais de temperatura da água no tanque (θ_T), no lago, e da umidade do ar:

$$E = K_T \frac{e^*(\bar{\theta}_0) - \bar{e}_a}{e^*(\bar{\theta}_0) - \bar{e}_a} E_T \quad (36)$$

onde E_T é a evaporação em tanque classe A. Ao contrário de coeficientes de tanque tradicionais, K_T seria menos suscetível a variações sazonais (no que concerne ao uso de tanques evaporimétricos para o cálculo de evaporação em lagos, entretanto, é importante observar os comentários de Brutsaert, 1982, Cap. 13, p. 251-254 ("Evaporation Pans") sobre (36); fica claro que o valor de K_T , longe de ser universal, depende (no mínimo) das condições de pista de vento no lago, e a recomendação a respeito, como de costume, é que (36) deve ser calibrada localmente). Além de fazer parte dos perfis, a temperatura da superfície pode ser obtida com maior freqüência de algumas outras maneiras, por exemplo termometria infra-vermelha por sensores a bordo de aeronaves, imagens de satélite, ou medição tradicional com termômetros em pontos de mais fácil acesso, tais como piers e o paramento de montante da barragem (no caso muito comum de lagos artificiais). metodologias "ad hoc" com o objetivo de se obter a maior representatividade espacial possível provavelmente terão que ser desenvolvidas pelo grupo interessado, no caso de cada lago.

Caso seja possível instalar uma base flutuante de medições que atenda aos requerimentos de pista mínima, diversas alternativas se abrem. A medição da velocidade do vento a 2,0 m e da temperatura da superfície, em conjunto com medições a barlavento em terra da umidade do ar permite aplicar a metodologia de Harbeck (1954) ou Burtsaert e Yeh (1970). Naturalmente, a inclusão de medidas de temperatura do ar, umidade do ar e radiação líquida sobre o lago permite a aplicação do método do balanço de energia-razão de Bowen. Desde que se meçam os seus diversos componentes em terra, de acordo com (14), é possível também estimar a radiação líquida, na linha por exemplo do que faz o CRLE.

Em qualquer caso, o esforço experimental envolvido é considerável. Em que pesem as enormes dificuldades práticas, o único caminho possível para a obtenção de melhores estimativas de evaporação em lagos é aumentar o nosso conhecimento sobre as condições físicas ali reinantes, e realizar pelo menos algumas das medições mencionadas. O uso de um modelo como o CRLE, que "dispensa" medições no ambiente do lago, seria naturalmente altamente prático. Este trabalho propõe uma interpretação física das diversas variáveis do CRLE. A confrontação destas variáveis com eventuais medições é um caminho natural para a sua validação e melhoramento.

RECONHECIMENTOS

O presente trabalho tornou-se possível graças ao apoio de numerosas instituições, em diferentes épocas; meus agradecimentos a: CEPEL, COPPE/UFRJ, ELETROBRÁS, CHESF, CNPq. Meus

agradecimentos, também, a Heinz Dieter Fill pela leitura do texto, críticas e sugestões.

APÊNDICE: NOTAÇÃO

Uma barra, como em \bar{u} , indica uma média micrometeorológica (i.e.: média temporal de 30 minutos a 1 hora) da variável; uma linha, como em u' , indica uma flutuação turbulenta instantânea em torno da média. Para grandezas meteorológicas, um subscrito 0 ("zero" em tipo pequeno) indica a superfície; o subscrito a indica um nível padrão de medição acima da superfície (por exemplo, 2,0 metros). Quando uma variável é definida por uma equação, esta aparece em seguida à explicação do símbolo.

Minúsculas Romanas

a	albedo da superfície.
c_p	calor específico a pressão constante do ar.
d_x	derivada da curva de pressão de saturação de vapor à temperatura " θ_x " ($x = a, 0$ ou p).
$e^*(.)$	curva de pressão de saturação de vapor em função da temperatura.
e	pressão de vapor de água no ar.
$f(.)$	coeficiente de transferência de massa de vapor de água na "Lei de Dalton" (eq. 24).
g	aceleração da gravidade.
ℓ	pista total de vento num lago.
m	expoente na equação empírica de Harbeck (eq. 29).
p	pressão atmosférica.
q	umidade específica do ar.
$r_{\theta q}$	coeficiente de correlação entre as flutuações turbulentas de θ e q .
t	tempo.
u_*	velocidade de atrito (eq. 4).
u	velocidade horizontal ao longo da direção do vento médio.
v	velocidade horizontal perpendicular à direção do vento médio.
w	velocidade vertical.
x_p	pista de vento
x	abscissa (direção do vento médio).
y	ordenada (direção horizontal perpendicular a x).
z	cota (direção vertical).
z_a	altura de medição de grandezas meteorológicas sobre a superfície.

Maiúsculas Romanas

A	área da superfície do lago.
B_f	razão de Bowen para fluxos (eq. 17).
B_g	razão de Bowen para gradientes (eq. 19).
C_E	coeficiente de transferência de massa (eq. 11).
C_H	coeficiente de transferência de calor (eq. 12).
C_τ	coeficiente de transferência de quantidade de movimento (eq. 13).
D	taxa temporal de variação da entalpia da água do lago; grosso modo, a parcela da radiação líquida usada para aquecer/resfriar a água do lago
E	fluxo turbulento vertical de massa de vapor de água (eq. 1).
E_T	evaporação em tanque classe A (eq. 36).
F	fluxo turbulento genérico (vapor, calor ou quantidade de movimento).
H	fluxo turbulento vertical de calor (eq. 2).
K_E	difusividade turbulenta de vapor de água.
K_F	difusividade turbulenta para o gradiente da grandeza genérica $\bar{\eta}$.
K_H	difusividade turbulenta de calor.
K_T	coeficiente de evaporação em tanque (eq. 36).
K_τ	difusividade turbulenta de quantidade de movimento.
L	calor latente de evaporação.
L_O	comprimento de estabilidade de Obukhov (eq. 6).
N	constante na equação de Harbeck (eq. 29).
R_a	radiação (irradiância) atmosférica incidente sobre a superfície (eq. 14).
R_e	radiação (irradiância) emitida pela superfície (eq. 14 e 15).
R_l	radiação (irradiância) líquida na superfície (eq. 14).
R_{lp}	radiação (irradiância) líquida considerando a superfície à temperatura θ_p .
R_s	radiação (irradiância) solar incidente sobre a superfície (eq. 14).

Minúsculas Gregas

α_0	constante empírica de Priestley e Taylor ($\approx 1,26$).
α_h	função das temperaturas do ar, de bulbo úmido e da superfície (eq. 32 e 33); equivalente analítico de α_0 .
$\hat{\alpha}$	valor estimativo de α_h em função da temperatura da superfície.
α_p	constante empírica do modelo CRLE (eq. 35).
β_p	constante empírica do modelo CRLE (eq. 35).
γ	"constante" psicrométrica.
δ_{0F}	altura de deslocamento para o fluxo F (i.e.: E, H ou τ) (eq. 8).
ϵ	absortividade/emissividade da superfície (eq. 14 e 15).
$\phi_F(\zeta)$	função adimensional de similaridade de Monin-Obukhov (eq. 8).
κ	constante de Von Karman ($= 0,4$).
η	grandeza escalar genérica (q , θ ou u).
ρ	massa específica do ar.
σ	constante de Stefan-Boltzmann ($= 5,6697 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$) (eq. 15).
θ	temperatura potencial, no ar.
θ_h	temperatura de bulbo úmido.
θ_p	temperatura de equilíbrio, no modelo CRLE.
θ_T	temperatura da superfície da água em tanque classe A.
τ	fluxo turbulento vertical de quantidade de movimento.
ζ	parâmetro adimensional de estabilidade de Monin-Obukhov (eq. 7).

Maiúsculas Gregas

Δ_{0a}	veja a eq. 26.
Δ_{0h}	veja a eq. 31.
Δt	intervalo de tempo para cálculo de médias turbulentas.

REFERÊNCIAS

- BERTELA, M. (1989). Inconsistent Flux Partitioning by The Bowen Ratio Method. *Boundary Layer Meteorology*, v. 49, p. 149-167.
- BRUTSAERT, W. (1982). *Evaporation Into The Atmosphere*. D. Reidel.
- BRUTSAERT, W. e YEH, G. T. (1970). Implications of a Type of Empirical Evaporation Formula for Lakes and Pans. *Water Resources Research*, v. 6, p. 1202-1208.

- BUSINGER, J.A. (1982). Equations and Concepts. In: *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*. NIEUWSTADT, F.T.M. e VAN DOP, H. (ed.), D. Reidel.
- DE BRUIN, H.A.R. e KEIJMAN, J.Q. (1979). The Priestley-Taylor Evaporation Model Applied to a Large Shallow Lake in The Netherlands. *Journal of Applied Meteorology*, v. 18, p. 898-903.
- DIAS, N.L. (1986). *Estimativas Climatológicas de Evaporação em Lagos*. Tese M.Sc. COPPE/UFRJ.
- DIAS, N.L. (1988). Uma Justificativa Analítica para Uma Equação Empírica de Evaporação. In: V CONGRESSO BRASILEIRO DE METEOROLOGIA, 1988, Rio de Janeiro. *Anais*, v. 2, p. X.6-X.11.
- DIAS, N.L. e GOBI, M.F. (1989). Quanto Evapora o Lago de Sobradinho? In: IV SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 1989, Lisboa.
- FLEAGLE, R.G. e BUSINGER, J.A. (1980). *An Introduction to Atmospheric Physics*. Academic Press.
- GARRATT, J.R. (1972). Studies of Turbulence in The Surface Layer over Water (Lough Neagh). Part II: Production and Dissipation of Velocity and Temperature Fluctuations. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 98, p. 642-657.
- HARBECK, G.E. Jr. (1962). A Practical Field Technique for Measuring Reservoir Evaporation Utilizing Mass-Transfer Theroy. *U.S. Geological Survey Professional Paper 272-E*.
- HICKS, B.B. e EVERETT, R.G. (1979). Comments on "Turbulent Exchange Coefficients for Sensible Heat and Water Vapor under Advective Conditions". *Journal of Applied Meteorology*, v. 18, p. 381-382.
- KHALSA, S.J.S. e BUSINGER, J.A. (1977). The Drag Coefficient as Determined by The Dissipation Method and Its Relation to Intermittent Convection in The Surface Layer. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 12, p. 273-297.
- KOHLER, M.A. e PARMELE, L.H. (1967). Generalized Estimates of Free-Water Evaporation. *Water Resources Research*, v. 3, p. 997-1005.
- LANG, A.R.G., MCNAUGHTON, K.G., FAZU, C., BRADLEY, E.F. e OHTAKI, E. (1983a). Inequality of Eddy Transfer Coefficients for Vertical Transport of Sensible and Latent Heats during Advective Inversions. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 25, p. 25-41.
- LANG, A.R.G., MCNAUGHTON, K.G., FAZU, C., BRADLEY, E.F. e OHTAKI, E. (1983b). An Experimental Appraisal of The Terms in The heat and Moisture Flux Equations for Local Advection. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 25, p. 89-102.
- LUMLEY, J.L. e PANOFSKY, H.A. (1964). *The Structure of Atmospheric Turbulence*. Interscience.
- MORTON, F.I. (1983a). Operational Estimates of Areal Evapotranspiration and Their Significance to the Science and Practice of Hydrology. *Journal of Hydrology*, v. 66, pp. 1-76.
- MORTON, F.I. (1983b). Operational Estimates of Lake Evaporation. *Journal of Hydrology*, v. 66, p. 1-76.
- MORTON, F.I. (1986). Practical Estimates of Lake Evaporation. *Journal of Climate and Applied Meteorology*, v. 25, p. 371-387.

- MORTON, F.I., RICARD, F. e FOGARASI, S. (1985). Operational Estimates of Areal Evapotranspiration and Lake Evaporation - Program WREVAP. *National Hydrology Research Institute, Paper No 24*, Environment Canada.
- NIEUWSTADT, F.T.M. e VAN DOP, H. (ed.) (1982). *Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling*. D. Reidel.
- OBUKHOV, A.M. (1946, 1971). Turbulence in an atmosphere with non-uniform temperature. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 2, p. 7-29.
- PANOFSKY, H.A. e DUTTON, J.A. (1984). *Atmospheric Turbulence*. John Wiley.
- PENMAN, H.L. (1948). Natural Evaporation from Open Water, Bare Soil, and Grass. *Proceedings of the Royal Society, London*, A193, p. 120-146.
- PRIESTLEY, J.T. e HILL, R.J. (1985). Measuring High-Frequency Humidity, Temperature and Radio Refractive Index in The Surface Layer. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 2, p. 233-251.
- PRIESTLEY, C.H.B. e TAYLOR, R.J. (1972). On The Assessment of Surface Heat Flux and Evaporation Using Large-Scale Parameters. *Monthly Weather Review*, v. 100, p. 81-92.
- SHEPPARD, P.A., TRIBBLE, D.T. e GARRATT, J.R. (1972). Studies of Turbulence in The Surface Layer over Water (Lough Neagh). Part I: Instrumentation, Programme, Profiles. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 98, p. 627-641.
- STEWART, R.B. e ROUSE, W.R. (1976). A Simple Method for Determining the Evaporation from Shallow Lakes and Ponds. *Water Resources Research*, v. 12, p. 623-628.
- U.S. GEOLOGICAL SURVEY (1958). *Water-Loss Investigations: Lake Mead Studies*. Professional Paper No 298.
- VERMA, S.B., ROSENBERG, N.J. e BLAD, B.L. (1978). Turbulent Exchange Coefficients for Sensible Heat and Water Vapor Under Advective Conditions. *Journal of Applied Meteorology*, v. 17, p. 330-338.
- WARHAFT, Z. (1976). Heat and Moisture Flux in The Stratified Boundary Layer. *Quarterly Journal of The Royal Meteorological Society*, v. 102, p. 703-707.
- WEBB, E.K. (1960). On Estimating Evaporation with Fluctuating Bowen Ratio. *Journal of Geophysical Research*, v. 65, p. 3415-3417.
- WEBB, E.K. (1964). Further Note on Evaporation with Fluctuating Bowen Ratio. *Journal of Geophysical Research*, v. 69, p. 2649-2650.
- WEBB, E.K. (1966). A Pan-Lake Evaporation Relationship. *Journal of Hydrology*, v. 4, p. 1-11.

Apêndice G

Uma revisão de evaporação em lagos

Reprodução de [Dias et al. \(2008a\)](#).

DESAFIOS E LIÇÕES DA MEDIÇÃO MODERNA DE EVAPORAÇÃO EM GRANDES LAGOS

Nelson Luís Dias¹; Diana Maria Cancelli²; Dornelles Vissotto Jr.³

RESUMO — Este artigo descreve alguns dos problemas importantes relacionados à implementação dos quatro principais métodos de medição de evaporação em lago: o método aerodinâmico (ADM), o método do balanço hídrico (MBH), o método do balanço de energia (MBE) e o método de covariâncias turbulentas (MCT). Mostra-se evidências teóricas e experimentais de que a utilização de dados de tanque classe A é praticamente inútil para a obtenção de estimativas confiáveis de evaporação. O método do balanço de energia é particularmente custoso por necessitar de medições em muitos pontos diferentes do lago. Os principais problemas dos métodos existentes são as diferenças de dados de umidade e temperatura do ar entre os ambientes terrestre e do lago; a implantação de plataformas estáveis para a medição com anemômetros sônicos; a manutenção dos sensores de temperatura da água em posição adequada; e a transmissão de um grande volume de dados. Algumas soluções para alguns destes problemas, quando existentes, são propostas.

ABSTRACT — This paper describes some of the important problems related to the application of the four main methods for the measurement of lake evaporation: the aerodynamic method (ADM), the water-budget method (WBM), the energy-budget method (EBM) and the eddy covariance method (ECM). Theoretical and experimental evidence is given of the failure of Class-A Pan Evaporation data to provide reliable estimates of lake evaporation. The energy-budget method is particularly costly due to the need to undertake measurements in several different points within the lake. The main problems associated with the existing methods are the differences in air temperature and humidity between the land and lake environments; the capacity to install a stable platform where sonic anemometers can be deployed; keeping water temperature sensors in position, and the transmission of large amounts of data. Some solutions, when they exist, are proposed.

Palavras-chave: Teoria de similaridade de Monin-Obukhov – evaporação em lagos – monitoramento ambiental.

¹Professor Associado, Lemma-UFPR; CP 19100 Curitiba PR 81531-990. E-mail nldias@ufpr.br

²Professora, Universidade de Passo Fundo. E-mail cancelli@upf.br

³Professor Assistente, Lemma-UFPR; E-mail dvissotto@ufpr.br

1 – INTRODUÇÃO

Um objetivo central de uma boa Engenharia de Recursos Hídricos deve ser a busca das melhores técnicas de medição e de modelagem para cada componente do ciclo hidrológico. Entre os diversos componentes, a evaporação e a evapotranspiração ainda apresentam dificuldades formidáveis. Este trabalho trata de um sub-problema específico: a medição de evaporação E_L em grandes lagos, e o estado em que ela se encontra na atualidade.

O fenômeno físico “evaporação” consiste na mudança de estado da água, de líquido para vapor. O processo consome uma quantidade grande de energia: o calor latente de evaporação da água é (a 15°C) $L = 2,465 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.

A evaporação em grandes lagos, no Brasil, está indissociavelmente ligada ao problema de gerar energia de forma confiável para atender ao mercado, já que mais de 90% de nossa geração é hidrelétrica. Ela também é extremamente importante *na margem*, ou seja, todas as vezes em que há escassez de água no sistema, ou quando *estimativas* de evaporação são usadas para o planejamento da operação do sistema, ou para decisões operativas (Kamogawa, 1989; Neto et al., 1990; Kelman et al., 2004).

Durante períodos “normais”, entretanto, a evaporação costuma ser uma porcentagem pequena, da ordem de 5%, da vazão afluente aos grandes reservatórios brasileiros: nestes casos é inevitável que as estimativas de evaporação disponíveis fiquem muito próximas, ou abaixo, dos erros de medição das afluências e desfluências, e isto é o principal motivo, em nossa opinião, para o número relativamente pequeno de esforços de realização de medições de evaporação em lagos.

Este desinteresse “pragmático” em medir E_L em face dos elevados valores das afluências em relação aos totais evaporados, entretanto, não esgota de maneira alguma o problema: a disponibilidade hídrica está se tornando um fator reconhecidamente crítico no século XXI; o planejamento da operação energética *de fato* depende das estimativas de evaporação utilizadas, e problemas ambientais ligados à temperatura da água são criticamente dependentes das condições de contorno representadas pelos fluxos de energia na superfície da água (Dias, 2003; Dias et al., 2003; Cancelli, 2006).

Infelizmente, a medição de evaporação em lagos é um dos problemas “práticos” mais difíceis da Engenharia de Recursos Hídricos: os métodos simples e convenientes do ponto de vista logístico e operacional não funcionam, enquanto que os métodos que funcionam são, para dizer o mínimo, caros e logicamente inconvenientes. No presente trabalho nós adotamos uma posição não-conformista de que é preciso insistir, e investir, em técnicas que combinem um mínimo de praticidade e de economicidade com uma efetiva melhoria das estimativas hoje disponíveis.

2 – MÉTODOS

Dias e Kan (1999) propõem distinguir com cuidado “métodos” de medição de evaporação dos “modelos” de sua estimativa. Esta mesma linha é seguida por Dias et al. (2002). No presente trabalho, utiliza-se a palavra “método” no sentido de uma técnica reconhecida de “medição”, ou seja, uma técnica em princípio mais acurada do que a utilização de modelos baseados em informação indireta mais simples e fácil de ser medida do que a própria evaporação.

Na literatura, a medição de evaporação está associada a 4 “métodos” principais:

- O método aerodinâmico (MAD);
- O método do balanço hídrico (MBH);
- O método do balanço de energia (MBE);
- O método de medição de covariâncias turbulentas (MCT).

A seguir, faz-se uma breve discussão das bases de aplicação, e de alguns problemas relevantes que ainda precisam ser estudados com mais profundidade em cada um deles. O uso de tanques evapotêmnicos merece uma discussão própria, que é feita na seção 3.

2.1 – MAD

O método aerodinâmico remonta à “lei de Dalton”, $E = f(\bar{u})(\bar{e}_0 - \bar{e}_a)$: a evaporação depende da velocidade do vento \bar{u} e da diferença de pressão de vapor d’água ($\bar{e}_0 - \bar{e}_a$) entre a superfície da água e o ar. Na longa série de estudos pioneiros de evaporação realizados pelo USGS (*United States Geological Survey*), ele emergiu como uma proposta prática e relativamente simples, do ponto de vista instrumental (Harbeck, 1962). Brutsaert e Yeh (1976) mostraram, utilizando uma abordagem analítica, que as estimativas assim obtidas dependem do *fetch* de vento sobre a água e, consequentemente, do “tamanho” do lago. Um ponto muito pouco comentado, mas em nossa opinião fundamental, é que na solução analítica de Brutsaert e Yeh (1976) a pressão de vapor no ar \bar{e}_a é a reinante sobre *terra*, corrente acima (“a montante”) da superfície líquida. Em outras palavras, \bar{e}_a é a pressão de vapor do ar não-modificado pela camada-limite interna que cresce sobre a superfície da água. Isto sugere que a combinação de dados de temperatura da água com medições de umidade do ar em terra podem efetivamente ser utilizadas para estimar a evaporação de lagos, desde que os efeitos de *fetch*, ou seja, do tamanho do lago, sejam levados em consideração. Este ponto foi levantado por Dias (1986); aparentemente, o assunto não foi retomado desde então.

A forma mais ortodoxa do MAD é a sistematização da medição de fluxos turbulentos não sómente de vapor d’água (*i.e.*: E) mas também de *momentum* τ e de calor sensível H , utilizando a teoria de similaridade de Monin-Obukhov e a medição de perfis médios (pelo menos duas medições no ar, ou uma medição de temperatura da superfície da água e uma medição no ar). Além disto, o “coeficiente de transferência” $f(\bar{u})$ é na verdade composto pelas funções integrais de similaridade de Monin-Obukhov para os perfis de velocidade e de escalares, e depende também das rugosidades da superfície para *momentum* e para os escalares vapor d’água e temperatura. Nesta forma, \bar{e}_a (ou qualquer grandeza equivalente) deve ser medido sobre a água, e o tamanho do lago não comparece em $f(\bar{u})$. Os detalhes são amplamente discutidos na literatura (Brutsaert, 1982; Stull, 1988; Katul e Parlange, 1992; Garratt, 1994).

2.2 – MBH

Devido ao fato, já mencionado acima, de que a evaporação costuma ser da ordem de grandeza dos erros de medição de vazão, é extremamente difícil estimá-la como o termo remanescente do balanço de massa de um reservatório, exceto em casos extremos em que ela é, efetivamente, muito maior. Ainda assim, Morton (1983, 1986) preferiu utilizar balanços hídricos considerados de “alta qualidade” em alguns lagos ao redor do mundo para “calibrar” seu modelo CRLE, que ganhou uma certa popularidade em aplicações no Brasil (Dias, 1986; Trovatti, 1987; Reis e Dias, 1998). É relativamente improvável que estimativas de balanço hídrico sejam uma boa opção para estimar a evaporação de grandes lagos no Brasil. Vale a pena mencionar, entretanto, que o balanço hídrico é apenas uma entre as diversas equações de balanço que podem ser escritas para cada espécie química, ou mesmo para moléculas de água contendo diferentes isótopos: deutério (H_2^2), trítio (H_1^3) e O^{18} (Gibson, 2002). Por exemplo, Lensky et al. (2005) estudaram o balanço hídrico do Mar Morto realizando um balanço simultâneo de massa total, massa de sal (o Mar Morto possui uma salinidade elevadíssima) e de energia.

2.3 – MBE

A rigor, o “Método do Balanço de Energia” deveria se chamar “Método do Balanço de Entalpia”, que é a grandeza termodinâmica efetivamente calculada no balanço (Dias e Reis, 1998; Dias e Rocha, 1999). A terminologia já foi incorporada em trabalhos recentes sobre evaporação em lagos (Neto et al., 2007; Barbosa e Mattos, 2007). Reis (1996), e Reis e Dias (1998), utilizaram uma forma simplificada do método em que foram utilizados dados de temperatura do ar \bar{T}_{at} e pressão de vapor d’água no ar \bar{e}_{at} medidos no ambiente terrestre; no entanto, isto foi feito cuidadosamente após uma campanha intensiva de comparação com dados medidos em um flutuante sobre o lago (isto é: \bar{T}_{aL}

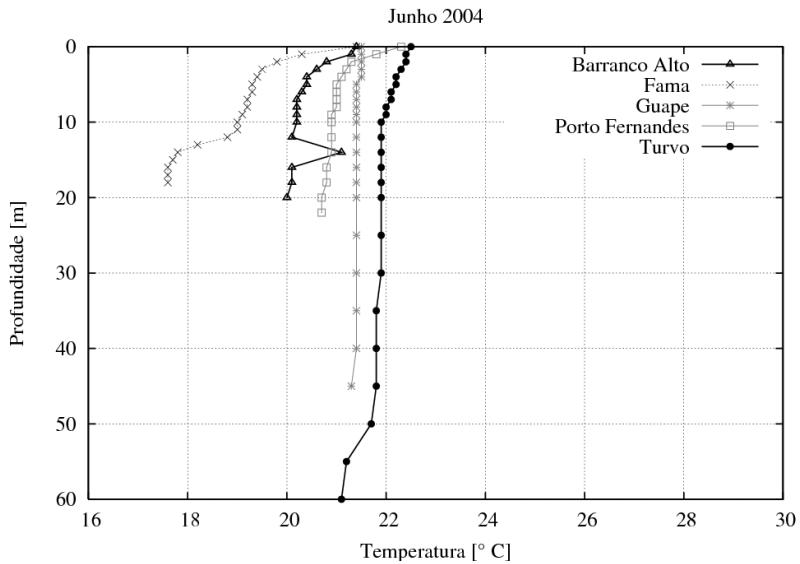


Figura 1: Variabilidade espacial dos perfis de temperatura da água no lago de Furnas: os perfis são medidos em diferentes pontos dentro do reservatório.

e \bar{e}_{aL}), de acordo com a figura 3. Outro problema deste tipo de abordagem é a utilização de dados médios diários ou até mesmo mensais em vez de horários, o que contraria as bases teóricas (Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov) do método. Uma solução parcial foi proposta por Webb (1960, 1964), mas sem levar em consideração as complicações introduzidas pela dependência dos coeficientes de transferência de vapor d’água e calor da variável de estabilidade de Obukhov, ou seja, sem levar em conta os efeitos da Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov. Estas correções têm sido, recentemente, re-introduzidas em cálculos de evaporação utilizando o MBE (Reis e Dias, 1998; Lenters et al., 2005). Outros pontos que precisam ser levados em consideração são a variabilidade espacial dos perfis de temperatura da água medidos em grandes lagos, exemplificada na figura 1 (para mais detalhes, vide, por exemplo, Cancelli (2006)), bem como os erros significativos de estimativa da radiação líquida quando ela não é medida diretamente, mas sim estimada com fórmulas empíricas (os erros de radiação de onda longa mesmo com as melhores fórmulas existentes são relativamente altos; para uma avaliação com dados brasileiros, veja Duarte et al. (2006)). Finalmente, uma aplicação criteriosa do método inclui a medição dos termos de advecção de entalpia por todos os fluxos de massa que entram e saem do reservatório: vazões afluentes (todas), vazões efluentes (todas), precipitação e a própria evaporação. Cada um destes fluxos precisa a rigor ter a sua temperatura medida com uma razoável freqüência temporal (idealmente a mesma utilizada em sua própria medição). Tudo isto, mais a necessidade de medição de \bar{e}_{aL} e de \bar{T}_{aL} , torna o método bastante exigente em termos de diferentes pontos de medição que são necessários para sua correta aplicação.

2.4 – MCT

O MCT é de certa forma o método de aplicação mais simples: com uma medição em um único nível acima da superfície é possível medir diretamente, em princípio, E_L . De fato, ao longo dos últimos cerca de 20 anos ele se tornou o método “padrão” contra o qual outros modelos e métodos mais simples são comparados. Infelizmente, o método está longe de ser perfeito. Em primeiro lugar, existem diversas hipóteses importantes para sua aplicação (que também afetam em diversos graus

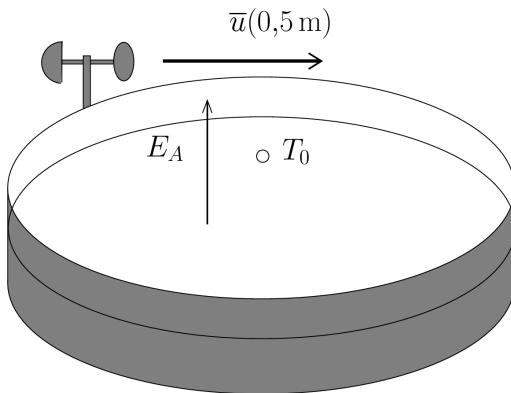


Figura 2: Uma visão estilizada do Tanque Classe A e de suas medições associadas

os demais métodos citados acima): estacionariedade da turbulência, e homogeneidade horizontal são os dois mais importantes. Em seguida, existe o problema ainda não resolvido de que o método tende a subestimar os fluxos H e LE , de calor sensível e latente, quando comparado com as medições de radiação líquida e de fluxo de calor no solo em terra (Twine et al., 2000); é bem possível que um problema similar ocorra com a evaporação em lagos medida pelo MCT, embora estes autores desconheçam estudos específicos sobre o assunto. Outro ponto importante é que tem sido cada vez mais comum a utilização de rotação de coordenadas (Finnigan et al., 2003; Finnigan, 2004), e a agora bem-estabelecida correção de Webb-Pearman-Leuning para as flutuações de densidade (Webb et al., 1980) no cálculo de E ; a aplicação simultânea de ambas, entretanto, é inconsistente (Massman e Lee, 2002; Dias et al., 2007) e as implicações destas correções para medições em lagos precisam ser mais bem estudadas.

O grande desafio de aplicação do MCT em lagos é a instalação de uma plataforma estável de medição. Em geral, isto envolveria um enorme esforço de construção de uma torre sobre profundidades relativamente grandes, ou então de fundeio de flutuadores capazes de resistir às ondas consideráveis que podem se formar em grandes lagos. Neste último caso, seria ainda necessária a instalação de inclinômetros para o cálculo da velocidade angular instantânea do flutuador, necessária para a correção da inclinação do anemômetro sônico utilizado para medir as flutuações de velocidade do ar em 3 direções. O primeiro autor concebeu projetos de medição de E_L utilizando uma variante do MCT denominada MCTA (Método de Medição de Covariâncias Turbulentas Atenuadas) em dois grandes lagos (Itaipu (Dias et al., 2002; Dias e Malheiros, 2003) e Furnas (Dias et al., 2007)); no primeiro caso, as medições foram feitas em uma ilhota muito baixa e sem vegetação e posicionada favoravelmente em relação às direções dominantes de vento; no segundo caso, foi construída uma torre metálica de cerca de 15 m sobre uma ilhota que ressurgiu durante um período de níveis d'água excepcionalmente baixos.

3 – O USO DO TANQUE CLASSE A

Idealmente, em um tanque classe A deve-se medir a temperatura da água, a velocidade do vento a 0,5 m de altura, e a própria evaporação por diferença de níveis entre dois horários consecutivos de observação, eventualmente corrigidos pela precipitação ocorrida no mesmo período (figura 2).

O uso de dados de tanque ainda é uma alternativa que agrada a muitos engenheiros de recursos hídricos, porque (a) geralmente, há dados disponíveis nas imediações de um lago existente ou projetado; (b) as medições são nas mesmas unidades (milímetros) geralmente utilizadas nos cálculos de disponibilidade hídrica e (c) a metodologia de estimativa da evaporação em lago (a aplicação de

um coeficiente de tanque) é extremamente simples. Infelizmente, o uso de tanques para estimar a evaporação em lagos *não* é simples, e seu uso não pode ser recomendado. O problema é reconhecido há muito tempo: segundo Horton (1917),

“the land-exposed evaporation pan appears to be about the poorest device humanly contrivable for the purpose of determining the evaporation losses from broad water surfaces”

“o tanque evaporimétrico sobre o solo exposto parece ser um dos piores dispositivos concebíveis pelo homem com o objetivo de determinar as perdas evaporativas de grandes superfícies líquidas”

O problema foi efetivamente esgotado por Brutsaert e Yeh (1976). Vale a pena uma citação longa (observe que, no presente trabalho, usa-se o símbolo E_A para denotar a evaporação em tanque classe A; nas citações, manteve-se o símbolo E_P utilizando originalmente):

“Pan evaporation E_P is sometimes used to predict lake evaporation E_L by means of a coefficient $C = E_L/E_P$. For example it has been found that for the U.S. Weather Bureau class A pan and many reservoirs in the western United States this coefficient is on the average about 0.7. However for specific lakes and for different seasons of the year C is often found to display considerable variation”

“A evaporação em tanque E_P é às vezes usada para prever a evaporação em lago E_L por meio de um coeficiente (de tanque) $C = E_L/E_P$. Por exemplo, observou-se que para o tanque classe A do U. S. Weather Bureau este coeficiente é em média cerca de 0,7. Entretanto para lagos específicos e diferentes épocas do ano o coeficiente C possui uma variação considerável”

A seguir,

“Even when for a given lake average values are assumed for the ratios of the roughness and of the windspeed [Richards et al., 1966], this equation still requires a knowledge of the vapor pressure in the air unaffected by the lake and the lake and pan surface water temperatures.”

“Mesmo que para um dado lago valores médios para as razões entre as rugosidades e velocidades de vento (tanque/lago) sejam supostos [Richards et al., 1966], esta equação ainda necessita do conhecimento da pressão de vapor no ar não-afetado pelo lago e da temperatura da superfície da água do lago e do tanque.”

E então, a observação inevitável:

“It is often probably much simpler to measure only those parameters that are needed for the direct calculation by means of an equation such as Harbeck’s”

“Na maioria dos casos é provavelmente muito mais simples medir apenas as variáveis necessárias para o cálculo direto por meio de uma fórmula de evaporação tal qual a equação de Harbeck”

A conclusão final de Brutsaert e Yeh é

“It is impossible to predict lake evaporation from pan evaporation unless measurements are made of a number of additional physical factors. Without these additional measurements pan data are useless.”

“É impossível prever a evaporação em lago a partir da evaporação em tanque a não ser que sejam feitas medições de diversas variáveis adicionais. Sem estas medições adicionais, dados de evaporação em tanque são inúteis.”

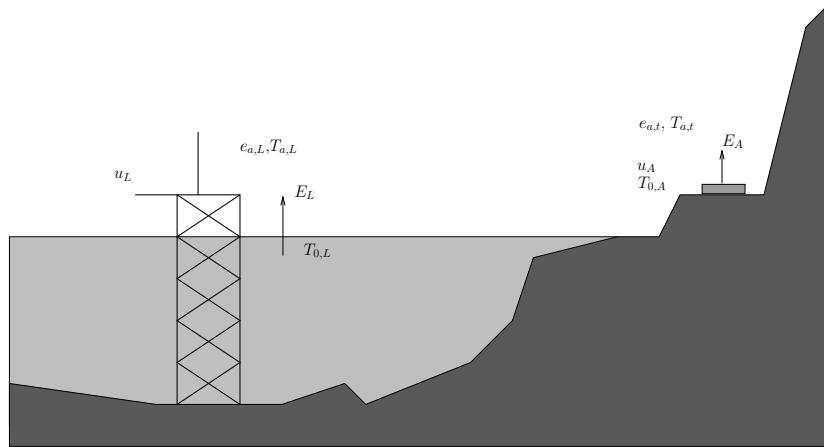


Figura 3: Medições adicionais necessárias para corrigir medições em tanque classe A para estimar a evaporação em lago: os índices L indicam variáveis medidas no ambiente do lago, os índices t no ambiente de terra.

As medições adicionais mencionadas acima são as seguintes:

- Pressão de vapor do ar \bar{e}_{at} “em terra” (não afetado pelo lago)
- Velocidade do vento \bar{u}_A “em terra” (idem)
- Pressão de vapor do ar \bar{e}_a sobre o lago
- Velocidade do vento \bar{u}_L sobre o lago
- Temperatura da superfície da água no lago, \bar{T}_0 .

A figura 3 mostra uma esquema destas medições.

Os resultados obtidos por Reis (1996) no lago Serra Azul, MG, mostram exatamente este tipo de problema. A tabela 1, reproduzida da obra citada, mostra a variação intra e inter-anual dos coeficientes de tanque. Note que nenhum padrão sistemático pode ser identificado.

Ainda assim, os dados de tanques evaporimétricos estão longe de serem inúteis. De fato,

- E_A é utilizada como forçante em modelos chuva-vazão (por exemplo, o SSARR). Muitas vezes, este é o único dado possível.
- E_A é utilizada em agrometeorologia com sucesso para estimativas de demanda de irrigação (Stanhill, 2002).
- E_A é fortemente correlacionada com a evaporação “potencial” de Penman E_p , de forma que as séries de E_A podem ser usadas para estender séries de E_p , e vice-versa. Para um exemplo da elevada correlação, veja Morton (1966).

4 – MEDIÇÕES

Nesta seção nós abordamos alguns problemas (e possíveis soluções, quando existem) das diversas medições que são necessárias aos vários métodos de medição de E_L . Elas são abordadas em conjunto, e não método por método, porque muitas são comuns a mais de um método. Além disso,

Tabela 1: Coeficientes de Tanque mensais para o lago Serra Azul, 1993-1995. Fonte: Reis (1996).

Mês/Ano	1993	1994	1995
Jan	0.61	0.84	0.85
Fev	0.58	1.08	0.81
Mar	0.78	0.95	0.78
Abr	0.73	0.83	0.84
Mai	0.91	0.78	0.92
Jun	0.67	1.10	0.78
Jul	0.68	0.57	—
Ago	1.20	0.61	—
Set	0.75	0.67	—
Out	0.67	1.04	—
Nov	0.82	0.79	—
Dez	0.88	1.87	—

discute-se também problemas relacionados tais como o processamento, armazenamento e transmissão dos dados. Finalmente, nós abordamos apenas medições, ou outros aspectos do processo, que são *problemáticos* ou precisam de melhoramentos (em nosso ponto de vista).

4.1 – Temperatura da superfície da água

O grande problema prático do MAD e do MBE é a medição da temperatura da superfície da água: sensores suficientemente robustos para funcionarem com poucas visitas de manutenção anual ainda não existem. Nossa experiência com a utilização de sensores em bóias, nos lagos de Itaipu e de Furnas, mostra que os dados obtidos não são completamente confiáveis: há muitos episódios em que ou a bóia fica presa abaixo da água enquanto no nível d'água sobe, ou em que ela fica presa no ar e passa a registrar a temperatura do ar, e não da superfície da água. A figura 4 mostra um episódio deste tipo no reservatório de Furnas. Dias (1992) já havia identificado a temperatura da superfície da água como um dos parâmetros cuja medição é mais importante. É preciso reconhecer, entretanto, que medições de temperatura da água são uma ordem de grandeza mais difíceis de realizar do que, por exemplo, medições de temperatura do ar. A utilização de sensores infra-vermelhos tem se tornado mais frequente em estudos experimentais (Detto et al., 2005), e talvez seja uma boa alternativa.

4.2 – Obstáculos aerodinâmicos

A figura 5 mostra a torre metálica que foi erguida no reservatório de Furnas para a realização de medições de E_L com uma adaptação do MCT com sensores robustos (Dias et al., 2007). O braço de medição, mostrado na figura, aponta para o Norte Verdadeiro. Um problema deste tipo de medição é que a esteira da própria torre é turbulenta e interfere com as medições quando o vento sopra por “detrás” da torre, ou seja, sopra (neste caso) de uma direção em torno do sul. Isto é mostrado esquematicamente na figura 6. Dias et al. (2005) mostraram que estas direções produzem estatisticamente um grande número de valores anômalos (com o sinal errado) de fluxo de momentum $\bar{u'w'}$. O problema é bem conhecido na literatura, mas não tem solução fácil. Em geral, a única saída é procurar posicionar o braço de medição na direção mais favorável possível (de fato, em Furnas a maioria das direções de vento observadas são de Norte e Leste, e portanto são “boas”).

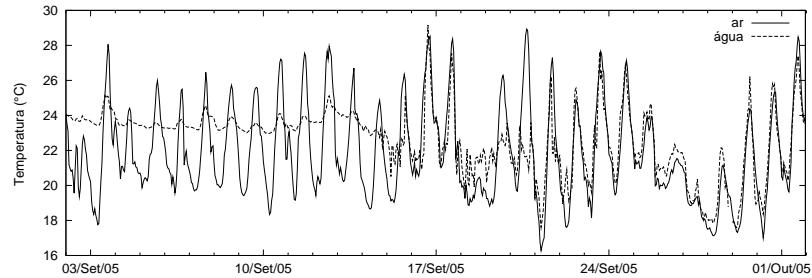


Figura 4: Temperatura da água e do ar no lago de Furnas: claramente, a bóia de medição ficou presa “no ar” quando o nível d’água baixou e passou a registrar basicamente a temperatura do ar, inutilizando sua medição no período subsequente.



Figura 5: Estação Guapé no lago de Furnas: o braço com os instrumentos de medição aponta para o Norte Verdadeiro.

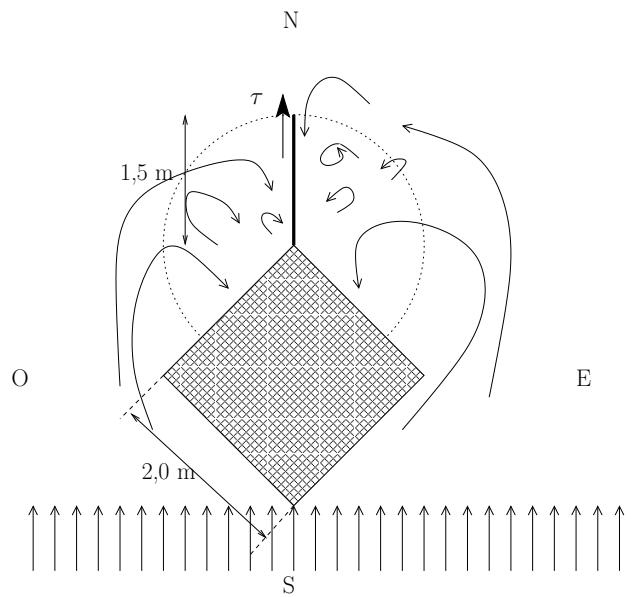


Figura 6: Representação esquemática dos efeitos da esteira da torre de medição sobre o MCT

4.3 – Posicionamento e nivelamento dos sensores

O posicionamento de anemômetros sônicos e seu nivelamento é um ponto importante na realização de medições. Os anemômetros são relativamente volumosos: sensores colocados muito próximos uns dos outros podem interferir negativamente nas medições, por se tornarem eles próprios obstáculos aerodinâmicos. Na verdade, um único sensor gera distorções no campo de velocidade turbulento (Wyngaard, 1986, 1988), e os fabricantes têm procurado incluir algoritmos internos de processamento de dados nos anemômetros sônicos para atenuar o problema. Portanto, o posicionamento de cada anemômetro sônico tão livre de obstáculos próximos quanto possível — principalmente corrente de vento acima — é essencial. O outro ponto muito importante é o nivelamento vertical do aparelho: é desejável que o “eixo z” do anemômetro sônico esteja tão alinhado com a vertical quanto possível. A “resposta de cosseno” dos anemômetros não é ideal, e o não-nivelamento pode introduzir erros (Gash e Dolman, 2003). Mesmo assim, é difícil garantir a manutenção do nivelamento durante longos períodos de medição, quando esforços térmicos e mecânicos (vento, ondas) e eventuais visitas indesejadas de curiosos podem alterar o posicionamento dos sensores. Assim, é recomendável que rotações de coordenadas sejam sempre feitas para minimizar os problemas de nivelamento.

4.4 – Volume de dados, processamento, transmissão

O advento de estações automáticas de monitoramento, com o uso de sistemas de aquisição de dados, criou novos problemas que são qualitativamente muito diferentes dos problemas “clássicos” relacionados à medição manual (ou com registradores mecânicos/gráficos) que existia anteriormente, e que ainda povoam muitos livros-texto de Hidrologia. Em primeiro lugar, a falta de padronização para estações automáticas no início dos anos 90 levou a uma grande variedade de alternativas para o cálculo de médias (horárias, 30 minutos, 15 minutos, 10 minutos, etc.), de taxa de aquisição necessária, etc.. Estes problemas são discutidos detalhadamente em Maggiotto et al. (2007). O ponto importante aqui é que o *volume* de dados aumentou enormemente: uma estação como a da figura 5 gera dezenas de variáveis diferentes a cada intervalo de média de 30 ou 60 minutos. Isto se dá porque as saídas de cada instrumento agora podem ser processadas em tempo real. Um anemômetro sônico,

por exemplo, mede, em geral, além das médias de velocidade \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} e da temperatura sônica \bar{T}_s , toda a matriz de covariâncias entre estas grandezas (neste caso, 4×4 , mais as covariâncias de u , v e w com sensores de escalares, mais máximos (rajadas), etc. (Maggiotto et al., 2007)).

Consequentemente, o controle de qualidade e o acompanhamento destes dados exige agora equipes maiores de analistas. A figura 4 mostra um bom exemplo deste tipo de problema: o sensor de temperatura da água continua funcionando, os dados continuam a ser registrados em uma faixa fisicamente possível para a temperatura da água, mas o “padrão” do dado, conforme pode ser verificado, mudou visivelmente; infelizmente, o reconhecimento de padrões, que é muito facilmente feito por seres humanos, é notoriamente difícil de implementar em algoritmos computacionais. Sistemas de controle automático de qualidade de dados podem ajudar a detectar eventuais problemas (Dias e Marcellini, 1997), mas a sua própria implementação é mais um motivo de aumento de complexidade do processo de análise dos dados. Na experiência dos autores, sistemas de controle de qualidade muitas vezes geram tantos, ou mais, problemas computacionais do que os que eles se dedicam a resolver, e só são em última análise eficazes se houver seres humanos dedicados regularmente a avaliar suas saídas e “olhar” para os dados que estão sendo gerados.

Dados gerados em grande volume também tornam muito mais difícil o problema de sua *transmissão*. Até recentemente, a transmissão de dados por satélite era a escolha mais razoável para diversas redes automáticas de transmissão, bem como para estudos específicos. No caso do estudo de evaporação no Reservatório de Furnas, as medições inicialmente eram coletadas manualmente, em módulos de memória, a cada cerca de 15 dias ou 1 mês. Mesmo com a existência de operadores baseados na barragem, a algumas dezenas de quilômetros do ponto de medição, havia consideráveis dificuldades logísticas para as visitas frequentes que eram necessárias. O sistema foi modificado para transmissão por satélite (GOES), mas houve vários compromissos necessários por causa das limitações de volume possível de transmissão de dados.

A tabela 2 mostra um resumo das falhas verificadas na estação de medição de Guapé, mostrada acima na figura 5. Os principais problemas estiveram relacionados com quebras do anemômetro sônico (*Young 81000*), do sensor de umidade relativa e do sensor de temperatura da superfície da água. Alguns problemas com o anemômetro sônico tiveram solução relativamente simples com a reinicialização do instrumento, e outros foram na verdade relacionados a problemas com a interface de transmissão de dados para o GOES. O sensor de umidade relativa (*Cambpell Sci CS500*) operou no início do estudo desencapado para diminuir seu tempo de resposta (o que não é um procedimento padrão no manual do fabricante), de acordo com um estudo anterior realizado no lago de Itaipu sem maiores problemas (Dias et al., 2002); em Furnas, isto deu margem a alguns problemas de corrosão que foram sanados sempre que detectados com a troca do sensor; uma solução definitiva foi obtida recalibrando-se o método utilizado para a medição de flutuações turbulentas de umidade para a configuração de sensor encapado (Dias et al., 2007). Os problemas com a temperatura da superfície da água, de natureza muito mais mecânica, já foram discutidos acima.

Um sistema bem mais flexível testado e implementado pelo Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental (Lemma) da Universidade Federal do Paraná foi a transmissão de dados por telefonia celular. Este é o sistema que está sendo utilizado até o momento para o monitoramento da evaporação no lago de Itaipu. Aqui, o problema principal é a intermitência do sinal de rádio devido à localização remota do ponto de medição utilizado. No entanto, a largura de banda de transmissão é muito maior, e permite que todas as estatísticas calculadas em tempo real sejam transmitidas diretamente para o computador na “sede” cujo número IP está especificado no sistema de transmissão.

5 – CONCLUSÕES: QUE MÉTODO USAR?

Não há uma resposta única para a pergunta que é título desta seção. A escolha do método deve sempre se basear numa ponderação de tempo e recursos disponíveis, prioridades nas estimativas

Tabela 2: Falhas na operação da estação Guapé (reservatório de Furnas). Início da operacao: 13/06/2003 às 15:30hs; final da operacao: 09/05/2007 às 05:00hs.

Periodo sem dados	dados faltantes	motivo
28/08/2003 a 13/11/2003	Termopar	Quebra Sensor
24/02/2004 a 19/03/2004	Termopar	Quebra Sensor
25/04/2004 a 21/07/2004	Velocidade do vento 3D	Falha Baterias+Vandalismo
08/09/2004 a 15/09/2004	Temperatura da água	Sensor fora da agua
04/11/2004 a 28/01/2005	Umidaade relativa	Quebra do Sensor
*09/11/2004 a 12/01/2005	Velocidade do vento 3D	Quebra do Sensor
*27/01/2005 a 28/01/2005	Velocidade do vento 3D	Quebra do Sensor
10/06/2005 a 01/08/2005	Umidade relativa	Quebra do Sensor
*10/06/2005 a 16/06/2005	Velocidade do vento 3D	Falha Controlador de Tensao
*20/07/2005 a 01/08/2005	Velocidade do vento 3D	Falha GOES
14/09/2005 a 27/12/2005	Temperatura da água	Sensor fora da agua
24/06/2006 a 14/09/2006	Temperatura da água	Sensor fora da agua
*12/07/2006 a 30/07/2006	Velocidade do vento 3D	Falha GOES
23/10/2006 a 31/12/2006	Temperatura da água	Sensor fora da agua

das diversas componentes de balanço hídrico do lago, e características específicas de cada lago. É importante enfatizar, porém, que dependendo do grau de aproximações feitas, e da qualidade dos dados utilizados, a aplicação direta de um “método de medição” tal como o MBE pode ser pouco ou nada superior a uma estimativa feita com modelos simplificados.

Os autores consideram que, no momento, uma combinação do MCT e do MAD pode ser a melhor alternativa sempre que houver pontos de medição adequados, e recursos para manter um esforço contínuo de medição no ambiente do lago. Outra possibilidade é a utilização de bóias, embora neste caso sensores adicionais para medir a “atitude” (posição angular instantânea da bóia) e sua aceleração sejam necessários para corrigir medidas com o MCT. Ainda uma outra alternativa atraente é o uso de plataformas remotas de medição: imagens de satélite e sensores embarcados em aeronaves, possivelmente não-tripuladas (Gonçalves et al., 2006).

Uma tendência encorajadora é a diminuição dos custos de equipamentos. Já é possível vislumbrar uma época em que sensores rápidos de velocidade do vento, temperatura e umidade (para não mencionar gases de efeito estufa, tais como CO₂ e CH₄) serão suficientemente baratos e robustos para serem usados de forma muito mais abrangente e rotineira do que atualmente.

Na contra-mão deste processo, há o fato de que cada vez mais dados estão sendo gerados, e que correções cada vez mais sofisticadas do ponto de vista físico-matemático estão se fazendo necessárias. Portanto, o grau necessário de capacitação e o custo das equipes que realizam as medições e calculam as estimativas de E_L se tornam cada vez maiores, passando a ser, efetivamente, o fator limitante para sua realização.

AGRADECIMENTOS

A ITAIPU BINACIONAL pelo apoio na realização de medições no lago de Itaipu.

A FURNAS CENTRAIS ELÉTRICAS S.A. pelo financiamento do Projeto “Delta-F — Estudos de evaporação e evapotranspiração no reservatório de FURNAS” do Fundo Setorial ANEEL de P&D.

A nossos colegas de Lemma Leocádio Grodzki, Selma R. Maggiotto, Sandro Sanchez, e Sandro Vissotto pelo apoio de campo indispensável.

BIBLIOGRAFIA

- BARBOSA, C. M. D. S. e MATTOS, A. (2007). *Estimativa da evaporação no lago usando uma estação meteorológica flutuante*. Em XVII Simposio Brasileiro de Recursos Hidricos.
- BRUTSAERT, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht.
- BRUTSAERT, W. e YEH, G.-T. (1976). *Implications of a type of empirical evaporation formula for lakes and pans*. Water Resources Research, 6, pp. 1202–1208.
- CANCELLI, D. M. (2006). *Um modelo para a evolução térmica de lagos profundos*. Tese de Mestrado, PPGMNE/Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- DETTO, M., MONTALDO, N., ALBERTSON, J. D., MANCINI, M., e KATUL, G. (2005). *Soil moisture and vegetation controls on evapotranspiration in a heterogeneous Mediterranean ecosystem on Sardinia, Italy*. Water Resources Research, 42, pp. W08419.
- DIAS, N. L. (1986). *Estimativas climatológicas de evaporação em lagos*. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.
- DIAS, N. L. (1992). *Unificação formal de metodologias para cálculo de evaporação em lagos*. Revista Brasileira de Engenharia, 10(2), pp. 61–84.
- DIAS, N. L. (2003). *Obtenção de uma solução analítica da equação de difusão-advecção com decaimento de 1ª ordem pelo método da transformação de similaridade generalizada*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 8, pp. 181–188.
- DIAS, N. L., BERNARDES, M., NOCKO, H. F., e REKSIDLER, R. (2005). *Influência de obstáculos aerodinâmicos na medição de variáveis micrometeorológicas : medições de velocidade de atrito no lago de Furnas*. Em CD-ROM, XVI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos.
- DIAS, N. L., DUARTE, H. F., MAGGIOTTO, S. R., e GRODZKI, L. (2007). *An attenuated eddy covariance method for latent heat flux measurements*. Water Resources Research, 43, pp. W04415.
- DIAS, N. L., GOBBI, M. F., e GOBBI, E. F. (2003). *Formulação de um modelo matemático do efeito de efluentes térmicos em rios e suas implicações para a legislação ambiental brasileira*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 8, pp. 169–180.
- DIAS, N. L. e KAN, A. (1999). *Evaporação e evapotranspiração I: Conceitos fundamentais*. A Água em Revista, 11, pp. 37–44.
- DIAS, N. L., KAN, A., GRODZKI, L., SANCHEZ, S. D., e VISSOTTO, D. (2002). *O método de covariâncias turbulentas atenuadas (MCTA) para medição dos fluxos de calor sensível e latente: aplicação ao lago de Itaipu e seu redor*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 7(1), pp. 143–160.
- DIAS, N. L. e MALHEIROS, A. L. (2003). *Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa*. Em CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, volume Livro de Resumos (artigo completo no CD — full article in CD), p. 260, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

- DIAS, N. L. e MARCELLINI, S. S. (1997). *Implementação do sistema de controle de qualidade de dados objetivo do SIMEPAR: testes preliminares*. Em CD-ROM do XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, número 228, Vitória. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- DIAS, N. L. e REIS, R. J. (1998). *Métodos de cálculo do balanço de entalpia em lagos e erros associados*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 3(3), pp. 45–56.
- DIAS, N. L. e ROCHA, L. S. (1999). *Cálculo da taxa de variação da entalpia para os lagos de Itaipu e Foz do Areia*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 4(3), pp. 39–52.
- DUARTE, H. F., DIAS, N. L., e MAGGIOTTO, S. R. (2006). *Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil*. Agricultural and Forest Meteorology.
- FINNIGAN, J. J. (2004). *A Re-Evaluation of Long-Term Flux Measurement Techniques Part II: Coordinate Systems*. Boundary-Layer Meteorology, 113(1), pp. 1–41.
- FINNIGAN, J. J., CLEMENT, R., MALHI, Y., LEUNING, R., e CLEUGH, H. A. (2003). *A re-evaluation of long-term flux measurement techniques part I: averaging and coordinate rotation*. Boundary-Layer Meteorology, 107, pp. 1–48.
- GARRATT, J. (1994). *The atmospheric boundary layer*. Cambridge University Press, Cambridge.
- GASH, J. H. C. e DOLMAN, A. J. (2003). *Sonic anemometer (co)sine response and flux measurement I. The potential for (co)sine error to affect sonic anemometer-based flux measurements*. Agricultural and Forest Meteorology, 119, pp. 195–207.
- GIBSON, J. J. (2002). *Short-term evaporation and water budget comparisons in shallow Arctic lakes using non-steady isotope mass balance*. Journal of Hydrology, 264, pp. 242–261.
- GONÇALVES, J. E., MALHEIROS, A. L., NASCIMENTO, E. L., MAGGIOTTO, S. R., e DIAS, N. L. (2006). *Veículo aéreo não tripulado para perfilamento atmosférico em alta resolução*. Em XIV Congresso Brasileiro de Meteorologia, Florianópolis. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- HARBECK, JR., G. E. (1962). *A practical field technique for measuring reservoir evaporation utilizing mass-transfer theory*. Professional Paper 272–E, U. S. Geological Survey.
- HORTON, R. E. (1917). *A new evaporation formula developed*. Eng. News Rec., 78, pp. 196–199.
- KAMOGAWA, L. F. (1989). *Influência da evaporação nos reservatórios na geração da cascata do rio Iguaçu*. Relatório Técnico SPE/VPLE-26/89, COPEL, Curitiba.
- KATUL, G. G. e PARLANGE, M. B. (1992). *A Penman-Brutsaert Model for Wet Surface Evaporation*. Water Resources Research, 28(1), pp. 121–126.
- KELMAN, J., KELMAN, R., e PEREIRA, M. V. F. (2004). *Energia Firme de Sistemas Hidrelétricos e Usos Múltiplos dos Recursos Hídricos*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 9(1), pp. 189–198.
- LENSKY, N. G., DVORKIN, Y., LYAKHOVSKY, V., GERTMAN, I., e GAVRIELI, I. (2005). *Water, salt and energy balances of the Dead Sea*. Water Resources Research, 41, pp. W12418.
- LENTERS, J. D., KRATZ, T. K., e BOWSER, C. J. (2005). *Effects of climate variability on lake evaporation: Results from a long-term energy budget study of Sparkling Lake, northern Wisconsin (USA)*. Journal of Hydrology, 308, pp. 168–195.

- MAGGIOTTO, S. R., DIAS, N. L., GRODZKI, L., VISSOTTO, S., PREVEDELLO, C. L., NASCIMENTO, E. L., e SOUZA, M. F. (2007). *Diretrizes para redes automáticas e telemétricas de superfície*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, 12, pp. 1–14.
- MASSMAN, W. J. e LEE, X. (2002). *Eddy covariance flux corrections and uncertainties in long-term studies of carbon and energy exchanges*. Agricultural and Forest Meteorology, 113, pp. 121–144.
- MORTON, F. I. (1966). *Potential evaporation and river basin evaporation*. Journal of the Hydraulics Division, 91(HY6), pp. 67–97.
- MORTON, F. I. (1983). *Operational Estimates of Lake Evaporation*. Journal of Hydrology, 66, pp. 77–100.
- MORTON, F. I. (1986). *Practical Estimates of Lake Evaporation*. Journal of Applied Meteorology, 25, pp. 371–387.
- NETO, A. R., MONTENEGRO, S. M. G. L., MOURA, A. R. C., e CIRILO, J. A. (2007). *ESTIMATIVA DA EVAPORAÇÃO NO LAGO DE SOBRADINHO COM O MÉTODO DO BALANÇO DE ENERGIA*. Em *Anais, XVII Simposio Brasileiro de Recursos Hidricos*.
- NETO, J., KAMOGAWA, L., BORN, P., e AVILA, W. (1990). *Impacto das taxas de evaporação dos reservatórios nos valores de contrato de suprimento entre empresas (E1)*. Relatório Técnico SPE/VPLE-023/90, COPEL.
- REIS, R. J. (1996). *Estudo comparativo de modelos climatológicos de estimativa de evaporação no lago Serra Azul, MG*. Tese de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, MG.
- REIS, R. J. e DIAS, N. L. (1998). *Multi-season lake evaporation: energy-budget estimates and CRLE model assessment*. Journal of Hydrology, 208, pp. 135–147.
- STANHILL, G. (2002). *Is the Class A evaporation pan still the most practical and accurate meteorological method for determining irrigation water requirements?* Agricultural and Forest Meteorology, 112, pp. 233–236.
- STULL, R. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- TROVATTI, L. R. (1987). *Estimativas de evaporação do lago de Ilha Solteira através do modelo de relação complementar*. Em *VII Simpósio Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos, Anais*, pp. 162–67, Salvador. ABRH.
- TWINE, T. E., KUSTAS, W. P., NORMAN, J. M., COOK, D. R., Houser, P. R., MEYERS, T. P., PRUEGER, J. H., STARKS, P. J., e WESELY, M. L. (2000). *Correcting eddy-covariance flux underestimates over a grassland*. Agricultural and Forest Meteorology, 103, pp. 274–300.
- WEBB, E. K. (1960). *On estimating evaporation with fluctuating Bowen ratio*. Journal of Geophysical Research, 65, pp. 3415–3417.
- WEBB, E. K. (1964). *Further Note on Evaporation with Fluctuating Bowen Ratio*. Journal of Geophysical Research, 69(12), pp. 2649–2650.
- WEBB, E. K., PEARMAN, G. I., e LEUNING, R. (1980). *Correction of flux measurements for density effects due to heat and water vapor transfer*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 106, pp. 85–100.
- WYNGAARD, J. C. (1986). *Flow- Distortion Effects on Scalar Flux Measurements in tthe Surface Layer: Implications for Sensor Design*. Boundary-Layer Meteorology.

WYNGAARD, J. C. (1988). *The Effects of Probe-Induced Flow Distortion on Atmospheric Turbulence Measurements: Extension to Scalars*. Journal of the Atmospheric Sciences, 45(22), pp. 3400–3412.

Apêndice H

Dinâmica espectral de turbulência: relatório da 1^a bolsa de pesquisa obtida junto ao CNPq

O efeito da estrutura tri-dimensional da turbulência em
meios estratificados sobre a difusão turbulenta de
poluentes na atmosfera
RELATÓRIO DE BOLSA DE PRODUTIVIDADE EM
PESQUISA
Ref. Proc 304847/2003-8

Nelson Luís Dias

19 de março de 2007

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização do problema da turbulência	1
1.2	Turbulência e poluição atmosférica	2
1.3	Conteúdo dos próximos capítulos	5
2	Principais esforços de pesquisa, 2003–2006	6
2.1	Estimativas de radiação líquida e de evapotranspiração regional a partir de dados hidrometeorológicos convencionais	6
2.2	Métodos robustos de medição de evaporação e evapotranspiração; medições de longo termo	6
2.3	Modelagem de qualidade do ar e medições com veículos aéreos não-tripulados . .	7
2.4	Aspectos fundamentais da turbulência atmosférica	7
3	Equações Governantes	9
3.1	Equações básicas sem forças de flutuação	9
3.2	Equações espectrais de turbulência	10
3.2.1	Transformadas de Fourier	10
3.2.2	A transformada de Fourier do termo de cisalhamento	10
3.2.3	A eliminação do termo de pressão	11
3.2.4	Médias em $ \mathbf{k} $ (<i>shell averages</i>)	13
3.2.5	Interpretação física	14
3.2.6	Produção e dissipação de energia cinética turbulenta	16
4	Modelos espectrais de fechamento para o termo de transferência inercial	17
4.1	Introdução	17
4.2	A formulação original de Pao	18
4.2.1	Discussão:	18
4.2.2	O cálculo de uma integral elementar	19
4.3	O modelo de Lin (1972) para o espectro de energia cinética turbulenta	19
4.3.1	Primeira tentativa de generalizar o modelo de Lin	21
4.3.2	Segunda tentativa de generalizar o modelo de Lin	22
4.4	Um modelo modificado Pao-Hill para a energia cinética turbulenta	24
4.5	Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S em regime permanente	27
4.6	Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S^2 em regime permanente	29
4.7	Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S em regime permanente	32
4.8	Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S^2 em regime permanente	35

5 O fechamento de Pao para um regime transiente	39
5.0.1 O método das características em variáveis adimensionais	39
5.1 Os efeitos de translação, transferência inercial e dissipação	40
5.2 O cálculo de $\epsilon_e(t)$	41
6 Um escoamento com cisalhamento médio unidirecional	48
6.1 Equações espectrais para cisalhamento médio unidirecional	48
6.2 Solução de equações de 1ªordem no espaço com o método das características	49
6.2.1 Um exemplo inicial	49
6.2.2 A solução de $\Phi_{3,3}$	50
6.2.3 A solução de $\Phi_{1,3}$	52
6.2.4 A solução de $\Phi_{3,1}$	54
6.2.5 A solução de $\Phi_{1,1}$	55
7 Conclusões e recomendações	58
7.1 Conclusões	58
7.2 Recomendações	59
A Motivação para a formulação de modelos de transferência	60
B Uma aproximação para $zK_1(z)$	61
C O espectro de Pope e de Kang et al.	62
D A Gamma incompleta e integrais exponenciais	63
E A função $Hil(x, p, a)$	65
F A função $Epi(x)$	68

Resumo

Os problemas locais de poluição atmosférica (isto é: poluição em escalas horizontais da ordem de 200 km ou menos gerada por fontes na mesma região) são essencialmente problemas de modelagem do efeito da turbulência sobre a dispersão de poluentes. Apesar de todos os avanços da Mecânica dos Fluidos ao longo do século XX, e principalmente das contribuições das escolas russa (Kolmogorov, Obukhov) e inglesa (Richardson, Taylor e Batchelor) para o avanço da Mecânica da Turbulência, o prognóstico da difusão turbulenta ainda é limitado. Todo e qualquer avanço, principalmente nos modelos de engenharia, será baseado ou em fortes esforços experimentais ou em modelos básicos que aprofundem nossa compreensão da dinâmica da turbulência e dos seus efeitos sobre escalares. Este trabalho desenvolve-se ao longo da segunda opção, estudando vários aspectos da turbulência ligados principalmente às taxas de dissipaçāo de energia cinética turbulenta e de variância da temperatura do ar. A temperatura, além de ser o escalar mais importante nos efeitos de produção (ou destruição) de energia cinética turbulenta via fluxo de calor sensível, também serve aqui como um sucedâneo para outros escalares tais como os indicadores clássicos de poluição (SO_x, NO_x, CO, CO₂, O₃, etc.). Por ser mais facilmente mensurável em alta freqüência, existem muito mais dados experimentais envolvendo a temperatura do que os gases acima mencionados. Neste trabalho, são desenvolvidos numerosos modelos analíticos para o espectro de energia cinética turbulenta em regime permanente, os quais incoporam o efeito de produção por cisalhamento médio e também modelam a corcova recentemente identificada neste espectro. A constatação de que a corcova pode ser produzida por modelos clássicos de fechamento é uma das contribuições originais do trabalho. Além disso, formulou-se uma nova abordagem para o fechamento espectral que permite que o decaimento da turbulência na ausência de forçantes seja modelado incluindo os termos não-lineares de transferência inercial. Essencialmente, isto é feito por meio da solução de uma equação diferencial parcial não-linear pelo método das características. O método possui um grande potencial de aplicação a problemas transitórios na camada-limite atmosférica, tais como a transição que ocorre no fim da tarde e o acoplamento da camada residual com a camada noturna estável, quando poluentes misturados na camada residual podem retornar à superfície. Finalmente, mostra-se como a teoria de distorção rápida, que é essencialmente uma teoria linear, pode ser estendida para incorporar os efeitos clássicos de transferência inercial bem como o efeito de corcova recentemente identificado na literatura.

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo nós fazemos uma revisão da introdução na proposta original para esta Bolsa de Produtividade em Pesquisa, adicionando novos resultados e informações obtidos ao longo destes 3 anos de pesquisa.

1.1 Contextualização do problema da turbulência

A compreensão dos escoamentos turbulentos permanece, neste início do século XXI, o “grande problema não-resolvido da física clássica” ([McComb, 1992](#)). O problema não são as equações em si que regem o comportamento dos fluidos debaixo da hipótese do contínuo, que são bem conhecidas (as equações de Navier-Stokes), mas a sua natureza não-linear. A não-linearidade das equações governantes dá origem ao fenômeno da turbulência, ao mesmo tempo em que torna extremamente difícil a obtenção de soluções analíticas que esclareçam o que ocorre em escoamentos turbulentos.

Na natureza, assim como na maioria dos escoamentos de interesse em engenharia (escoamentos em tubos e canais, as camadas-limite nos cascos de navios e submarinos e nas fuselagens de aviões, etc.), a *norma* são os escoamentos turbulentos — muito embora escoamentos inviscídios, em que os efeitos viscosos ou mais geralmente de atrito (inclusive turbulento) são desprezados, sejam de grande utilidade e interesse em aerodinâmica e fenômenos ondulatórios em fluidos.

Assim é que a “conquista” de escoamentos turbulentos prototípicos, tais como escoamentos em tubos e canais, foi de uma enorme relevância e constituiu-se numa área de intensa atividade de pesquisa no século XIX e na primeira metade do século XX. Além de engenheiros, os desafios postos pela turbulência atraíram também pesquisadores com interesse em física e matemática, que trouxeram sua própria maneira de encarar o problema, contribuindo de duas formas distintas:

1. Com procedimentos formais para a geração de famílias de equações para “momentos” de qualquer ordem a partir das equações de Navier-Stokes, de forma que existem restrições mecânicas à forma que estes momentos (sejam eles momentos em 1 ponto, funções de estrutura ou espectros) podem assumir. Estes procedimentos incluem as equações de Reynolds, que trazem em seu bojo o “problema do fechamento”: há sempre mais incógnitas (momentos de qualquer ordem da turbulência) do que equações disponíveis para resolvê-las.
2. Com a abordagem mais geral, e historicamente posterior à de Reynolds, da turbulência como um processo estocástico no espaço, para o qual duas simplificações extremamente importantes são as *hipóteses* de homogeneidade e isotropia. Estas são idéias que surgiram com Taylor ([1921; 1935; 1938](#)) e Kolmogorov ([1941](#)), e que nos acompanham até hoje.

As escolas mais teóricas concentraram-se muitas vezes no estudo destas formas mais simplificadas de turbulência, já que nelas a sua “marca registrada”, a “cascata de energia” de Kolmogorov caracterizada por uma faixa inercial no espectro (ou, como proposto no artigo original de Kolmogorov, na função de estrutura), já está presente. Embora extremamente atraente e intuitiva, a idéia de uma cascata de energia (na qual transferência de energia cinética turbulenta é local nos números de onda) ainda carece de verificação direta, e tem sido contestada por pesquisadores importantes (Kraichnan, 1974).

Portanto, do ponto de vista de um físico ou um matemático, o problema já é suficientemente complexo (é não-linear e exibe o espectro característico de todos os escoamentos turbulentos com número de Reynolds suficientemente alto conhecidos), não havendo nenhum motivo para complicá-lo mais ainda com anisotropia e não-homogeneidade antes que progressos claros tenham sido feitos na compreensão destes casos mais simples.

Os “problemas de engenharia” de turbulência que atraem a atividade de pesquisa hoje em dia (por exemplo, difusão turbulenta de poluentes e todo tipo de escoamentos naturais bi ou tridimensionais) são um pouco mais complexos que os escoamentos em tubos e canais estudados por Nikuradse, Prandtl, Blasius e von Kármán, mas mantêm um traço em comum com estes escoamentos “clássicos”, cujas fórmulas para cálculo de perda de carga ganharam os livros de graduação de mecânica dos fluidos: *todos eles são escoamentos em que os fluxos turbulentos de massa, calor e quantidade de movimento são variáveis cuja determinação é central para a sua resolução*. Ora, fluxos turbulentos só podem existir em turbulência não-isotrópica, estando freqüentemente associados também à ocorrência de não-homogeneidade em pelo menos uma das direções coordenadas.

Assim, embora do ponto de vista estritamente teórico haja excelentes motivos para restringir o estudo da turbulência às suas instâncias mais simples de homogeneidade e isotropia, existem inúmeros problemas em engenharia e nas geociências que “não podem esperar”, sendo freqüentemente “resolvidos” de forma simplificada naquelas situações de projeto e de simulação em que uma resposta aproximada (por exemplo, o tempo de chegada de uma pluma de poluente até a tomada d’água para abastecimento) é melhor que nenhuma resposta. Por outro lado, muitas das idéias e dos modelos que existem para turbulência isotrópica ou homogênea podem ser estendidas de forma relativamente simples para situações onde prevaleçam situações anisotrópicas.

1.2 Turbulência e poluição atmosférica

Os objetivos desta proposta de pesquisa são o estudo da anistropia e da não-homogeneidade (ou de sua prima-irmã, a não-estacionariedade) na camada-limite atmosférica, e dos seus efeitos sobre o cálculo de difusão turbulenta de poluentes.

No nosso caso, estamos interessados em determinar, em última análise, o efeito da turbulência sobre poluentes, que podem ser partículas sólidas, líquidas ou então gases dissolvidos na atmosfera. Embora a lista de substâncias potencialmente poluidoras seja gigantesca (Seinfeld e Pandis, 1998), é comum procurar acompanhar as concentrações na atmosfera de algumas substâncias mais facilmente mensuráveis, e que são aceitas na legislação brasileira como indicadores da qualidade do ar, definidas assim pela freqüência de ocorrência e pelos danos causados à saúde e ao meio ambiente:

Partículas Totais em Suspensão — PTS ou Materiais Particulados — MP: são todas as partículas encontradas no ar, incluindo poeira, fuligem, fumo e gotas líquidas. Os materiais particulados podem ficar em suspensão no ar durante muito tempo. Os seus principais processos de remoção são a deposição gravitacional e a “lavagem” pela chuva. Por isso seu impacto é maior em regiões secas ou em períodos de estiagem. Suas fontes

são diversas, tais como veículos, fábricas, estradas não-pavimentadas, extração mineral, etc. Existem particulados que são altamente tóxicos, como é o caso do amianto. Nas atividades de engenharia, tais como a construção de vias de circulação, o material particulado é emitido em várias etapas, como por exemplo na queima de óleo diesel por caminhões e máquinas e na remoção do solo e manuseio de materiais fragmentados. Os danos causados pelos materiais particulados são diversos, como redução da visibilidade, problemas respiratórios e outros efeitos.

Partículas Inaláveis — PI: representam partículas que possuem diâmetro aerodinâmico menor ou igual a 10 µm. Estas, por serem menores, afetam mais a saúde, pois são capazes de atingir partes mais internas do sistema respiratório.

Fumaça: é a fração de partículas geradas principalmente nos processos de combustão e representada pela parte visível da pluma, sendo medida pelo método de reflectância ou método equivalente.

Óxidos de Enxofre — SO_X (SO₂ + SO₃): produzidos na queima de combustíveis que contêm enxofre em suas composições, principalmente óleo cru, carvão e óleo diesel, podendo ainda ser encontrados na queima de gasolina, em menor quantidade. São liberados também na fundição de minério de enxofre e indústria de papel e celulose, sendo bastante solúveis em água e capazes de formar sulfetos. São parcialmente responsáveis pela formação da chuva ácida e quando absorvidos pela respiração podem causar sérios problemas pois são gases muito irritantes e capazes de formar ácidos no interior do sistema respiratório.

Monóxido de Carbono — CO: substância incolor e inodora originada principalmente nos processos de combustão incompleta de combustíveis fósseis (com carvão, petróleo, gás natural) e outros materiais que contenham carbono em sua composição (biomassa, por exemplo). Muito prejudicial ao sistema respiratório, pois agrega-se à hemoglobina do sangue (responsável pelo transporte de oxigênio), formando a carboxi-hemoglobina. Assim, a oxigenação do pulmão fica reduzida, podendo levar à morte por asfixia, dependendo da concentração e da exposição a este contaminante.

Ozônio — O₃: resultante de reações químicas na atmosfera, a partir da presença de óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos e radiação solar. O ozônio na atmosfera pode ser considerado “bom” ou “mau”, dependendo da altitude em que se encontra. Na estratosfera (acima de 12 km) encontra-se a *Camada de Ozônio*, responsável por filtrar a radiação ultravioleta, mas na baixa atmosfera (troposfera) ele é prejudicial. O O₃ pode se formar longe das fontes de seus poluentes precursores, uma vez que é um poluente secundário. Os principais efeitos deste oxidante fotoquímico é a redução da capacidade respiratória, e agravamento de problemas respiratórios tais como a asma. Esta é a substância que mais está causando problemas em grandes cidades ou em regiões industriais, sendo de difícil tratamento por ser produzido em reações químicas, e não ser lançado diretamente para a atmosfera.

Óxidos de Nitrogênio — NO_X (NO e NO₂): são os compostos de nitrogênio e oxigênio resultantes em processos de combustão a altas temperaturas. A grande parte dos óxidos de nitrogênio são incolores e inodoros, mas o NO₂, junto com outras partículas, pode formar uma camada marrom-avermelhada sobre áreas urbanas. Os NO_X também são solúveis em água, podendo causar chuva ácida no meio ambiente. Nos seres vivos, podem afetar todo o aparelho respiratório nos animais, e nas plantas podem afetar principalmente as folhas. Pelas suas propriedades, podem também causar irritações nasais, dos olhos e desconforto pulmonar. Estes gases também colaboram para a formação de ozônio (troposférico), o chamado *smog* fotoquímico.

Tabela 1.1: Padrões de Qualidade do Ar no Brasil e no Paraná (Resoluções CONAMA 003/90 e SEMA 041/02)

POLUENTE	Padrão Primário (μm^{-3})	Padrão Secundário (μm^{-3})	Tempo de Amostra-gem	Método de Medição
Partículas totais em Suspensão (PTS)	240 ¹ 80	150 60	24h anual ³	Amostrador de grandes volumes
Partículas inaláveis (PI)	150 ¹ 50	150 ¹ 50	24 h anual ²	Separação inercial ou Filtração
Fumaça	150 ¹ 60	100 ¹ 40	24 h anual ²	Refletância
Dióxido de Enxofre (SO ₂)	365 ¹ 80	100 ¹ 40	24 h anual ²	Pararrosanilina
Monóxido de Carbono (CO)	40.000 ¹ 10.000 ¹	40.000 ¹ 10.000 ¹	1 h 8 h	Infravermelho não dispersivo
Ozônio (O ₃)	160 ¹	160 ¹	1 h	Quimiluminescência
Dióxido de Nitrogênio (NO ₂)	320 100	190 100	1h anual ¹	Quimiluminescência

Notas:

1 – não deve ser excedido mais do que uma vez por ano

2 – média aritmética

3 – média geométrica

A tabela 1.1 mostra os valores-limite para as substâncias regulamentadas, bem como os períodos de registro de médias e seu método de medição e monitoramento no ambiente.

Todos estes poluentes são partículas razoavelmente pequenas ou gases, de forma que é razoável supor que são transportados de forma muito similar pela turbulência atmosférica. Neste caso, a sua concentração na Camada-Limite Atmosférica (CLA) dependerá essencialmente das condições de turbulência na CLA, e da localização de suas fontes e sumidouros na superfície.

Em princípio, aplica-se uma decomposição de Reynolds ao campo instantâneo de concentração de poluente, na forma

$$C = \langle C \rangle + c, \quad (1.1)$$

onde $\langle C \rangle$ é a média probabilística, e c é a flutuação turbulenta do poluente. Qualquer estudo fundamental da difusão de um poluente pela turbulência atmosférica, portanto, deve se basear na medição das suas flutuações turbulentas c simultaneamente com as flutuações turbulentas do campo tri-dimensional de velocidade.

O problema agora é que pode ser muito difícil medir C em uma freqüência suficientemente rápida ($> 10 \text{ Hz}$) para que seja possível capturar todo o espectro de suas flutuações turbulentas na atmosfera. Em geral medem-se apenas médias temporais de C , as quais são usadas para aproximar $\langle C \rangle$ nos padrões de qualidade do ar: vide tabela 1.1.

Para compreender melhor o transporte e a difusão turbulenta de um poluente na atmosfera, portanto, é preciso lançar mão de conhecimentos obtidos com escalares que funcionem como *sucedâneos* dos poluentes cuja concentração média desejamos, em última análise, modelar e prever. Também está claro que isto não é possível sem um conhecimento igualmente aprofundado do comportamento do campo turbulento de *velocidade tridimensional*. Em resumo, para avançar o estado da arte na capacidade de modelagem de dispersão atmosférica de poluentes e qualidade do ar, é preciso aprofundar o conhecimento sobre a dinâmica da turbulência (*i.e.*

o campo de flutuações de velocidade propriamente dito) e sobre o efeito da turbulência sobre escalares.

Quanto à escolha de escalares que sirvam como sucedâneos para os poluentes atmosféricas, uma possibilidade é o uso de gás traçadores, tais como o hexafluoreto de enxofre (SF_6) (Leclerc et al., 2003a,b) ou os perfluorocarbonos (PFT's) (Watson et al., 2000). Nestes casos, além das dificuldades logísticas e dos custos usuais dos experimentos com traçadores, também existem dificuldades de medição das concentrações destes traçadores em alta freqüência, embora elas não sejam incontornáveis.

A outra possibilidade é analisar registros de alta freqüência do escalar mais fácil e amplamente mensurável na atmosfera, que é a temperatura do ar. Uma complicação é que a temperatura é um escalar *ativo*: as flutuações de temperatura contribuem para a produção de energia cinética turbulenta na atmosfera, via o fluxo cinemático de calor sensível $\langle w\theta \rangle$, onde w é a flutuação de velocidade vertical e θ é a flutuação de temperatura.

Os principais resultados do presente relatório de pesquisa dizem respeito ao espectro de energia cinética turbulenta na atmosfera, e ao espectro de temperatura na atmosfera. Eles consistem portanto, em uma abordagem *indireta* para o estudo da dispersão atmosférica de poluentes, devido à escassez de dados de campo de concentração de poluentes medidos em alta freqüência.

1.3 Conteúdo dos próximos capítulos

No capítulo 2, faz-se uma descrição sucinta dos principais esforços de pesquisa e dos seus resultados obtidos por este autor e colaboradores no período 2003–2006. Embora muitos destes esforços *não* se relacionem diretamente com o tema deste relatório, eles muitas vezes se complementam naturalmente, sendo o tema correlato, ou a técnica de análise similar, aos apresentados neste relatório.

No capítulo 3 são deduzidas as principais equações governantes do problema. Faz-se também uma interpretação física e matemática razoavelmente profunda de todos os termos envolvidos. Embora não haja (naturalmente) resultados novos neste capítulo, os resultados apresentados estão muitas vezes espalhados na literatura e não são facilmente reunidos, justificando o esforço de documentar as equações.

No capítulo 4, mostra-se os principais resultados obtidos com a modelagem do espectro de energia cinética turbulenta na faixa inercial e na região de transição para a faixa de dissipação. Deve-se particular atenção à modelagem de um fenômeno que apenas recentemente foi plenamente percebidos nos espectros de energia cinética turbulenta, que é a “corcova” do espectro compensado na região de transição entre a faixa inercial e a faixa de dissipação (Saddoughi e Veeravallis, 1994; Kang et al., 2003; Lamorgese et al., 2005) Neste capítulo concentram-se os principais resultados analíticos obtidos durante esta pesquisa. Estes resultados serão brevemente submetidos a periódicos internacionais tais como *Physics of Fluids*, *Journal of Turbulence* ou *Journal of Fluid Mechanics*.

No capítulo 5 nós mostramos como um modelo simples de fechamento espectral de turbulência pode ser estendido para uma situação transitória (o decaimento da turbulência homogênea em um túnel de vento), abrindo caminho para uma possível análise da evolução temporal dos espectros de turbulência em uma camada-limite atmosférica não-estacionária.

No capítulo 6, mostra-se os resultados existentes na literatura para turbulência anisotrópica utilizando-se a teoria de distorção rápida, e que continuaram a ser pesquisados por este autor com o objetivo de sua efetiva aplicação a problemas práticos de dispersão de poluentes na atmosfera.

No capítulo 7 apresenta-se as principais conclusões e recomendações.

Capítulo 2

Principais esforços de pesquisa, 2003–2006

2.1 Estimativas de radiação líquida e de evapotranspiração regional a partir de dados hidrometeorológicos convencionais

Um dos grandes problemas da hidrologia física clássica até o início da década de 1980 foi a ausência de métodos confiáveis para a estimativa da evapotranspiração em uma bacia hidrográfica. Atualmente, começam a emergir diversas alternativas, tais como a medição direta com o método de covariâncias turbulentas em torres (Stannard et al., 1994), o uso do mesmo método a bordo de aeronaves (Mahrt et al., 1994), e a modelagem indireta com SVATs (Bélaire et al., 1998). Todas estas alternativas, entretanto, envolvem um esforço observacional intensivo; além disto, a passagem da escala de observação direta dos fluxos para a escala da bacia hidrográfica (e a questão correspondente da variabilidade espacial da cobertura vegetal e da evapotranspiração) ainda é um problema não totalmente resolvido, ao qual têm sido aplicadas diversas técnicas de sensoriamento remoto (Paiva, 2005; Detto et al., 2005; Kim et al., 2006).

A busca de uma alternativa simples, que utilizasse apenas registros históricos de chuva, vazão e dados médios mensais meteorológicos, produziu em 1999 um *Método de Balanço Hídrico Sazonal*, e um *Modelo Hidrometeorológico de Evapotranspiração* (Dias e Kan, 1999). Este trabalho evoluiu para a elaboração de uma tese de doutorado sobre o mesmo tema sob minha orientação (Kan, 2005); em um trabalho completo em congresso (Kan et al., 2006), e em um novo artigo submetido para a Revista Brasileira de Recursos Hídricos (Dias e Kan, 2006).

Além disto, nós realizamos comparações detalhadas do cálculo da irradiância atmosférica incidente sobre a superfície, comparando os resultados de diversos modelos com medições em Ponta Grossa, PR (Duarte et al., 2006). O resultados são modelos de radiação especificamente calibrados para a região de medição dos dados. Eles são importantes para a obtenção de melhores estimativas de radiação líquida no Sul do Brasil.

2.2 Métodos robustos de medição de evaporação e evapotranspiração; medições de longo termo

Um dos métodos mais amplamente aceitos atualmente para a medição de fluxos turbulentos em geral, e do fluxo turbulento de vapor d'água em particular, é o método de medição de covariâncias turbulentas. Este método exige instrumentação cara, limitando a sua aplicabilidade. Alternativas simples utilizando sensores alternativos tanto para a velocidade vertical do vento

como para a umidade do ar surgiram ao longo da década de 1990 (Blanford e Gay, 1992; Stan-nard et al., 1994; Horst et al., 1997). Nossa grupo trabalhou na mesma linha, adotando um anemômetro sônico de baixo custo para medições das flutuações turbulentas de velocidade, e adaptando um higrômetro capacitivo. Os primeiros resultados, utilizando anemômetros de hélice, foram publicados na *Revista Brasileira de Recursos Hídricos* (Dias et al., 2002). Mais recentemente, longas campanhas de medição no lago de Furnas permitiram a publicação de uma versão definitiva do método (Dias et al., 2006). Estes resultados foram obtidos ao longo da tese de mestrado de Henrique Ferro Duarte (Duarte, 2006) sob minha orientação. A aplicação destes métodos para a obtenção de longas séries de dados de evaporação em lago também mereceram nossa atenção: Dias e Malheiros (2003) publicaram os resultados obtidos com a versão inicial do método para o lago de Itaipu. Resultados mais recentes para o lago de Itaipu foram obtidos na tese de mestrado de Diana Maria Cancelli (Cancelli, 2006) sob minha orientação. Alguns destes resultados estarão sendo apresentados no Assembléia Geral da AGU (*American Geophysical Union*) em Acapulco, México (Dias e Cancelli, 2007), e um artigo mais longo está sendo preparado para publicação científica internacional (provavelmente, em *Water Resources Research*).

2.3 Modelagem de qualidade do ar e medições com veículos aéreos não-tripulados

Informações essenciais para a correta modelagem da dispersão de poluentes são os fluxos superficiais de energia, a estabilidade atmosférica, e a altura da camada-limite atmosférica. Este foi o tema da tese de mestrado de André Luciano Malheiros (Malheiros, 2004). Neste trabalho, acoplou-se um modelo solo-vegetação-atmosfera para ambiente rural (ISBA: Boone et al. (1999)) com um modelo semelhante para ambiente urbano (TEB), e com modelos para o cálculo da altura da camada-limite atmosférica a partir dos fluxos superficiais gerados por aqueles modelos. Resultados iniciais já foram publicados em Congressos Científicos (Malheiros e Dias, 2004). A necessidade de métodos práticos e pouco custos de determinação da altura da camada-limite atmosférica levou à proposta de um Veículo Aéreo Não-Tripulado para sua medição, que é um projeto financiado pelo CNPq que está atualmente em curso. Resultados iniciais foram premiados no XV Congresso Brasileiro de Meteorologia (Gonçalves et al., 2006). Este projeto constitui-se na tese de doutorado de André Luciano Malheiros que está atualmente em andamento sob minha orientação.

2.4 Aspectos fundamentais da turbulência atmosférica

A maior parte do que conhecemos agora — e aplicamos em Engenharia — sobre turbulência atmosférica baseia-se nos trabalhos pioneiros de Reynolds, Richardson (Richardson, 1920) e Taylor (Taylor, 1921, 1935, 1938), mas sobretudo na teoria de turbulência proposta por Kolmogorov (1941). Apesar de formidável, ela ainda é essencialmente uma teoria fenomenológica, i.e.: ela não pode ser deduzida diretamente das equações de Navier-Stokes. A teoria foi posteriormente generalizada para escalares por Corrsin (1951). A teoria de Kolmogorov baseia-se essencialmente nas seguintes idéias:

Isotropia local : apesar de as grandes escalas em que a turbulência é produzida geralmente apresentarem anisotropia em escoamentos turbulentos naturais, as “pequenas” escalas são (homegêneas) e isotrópicas: suas estatísticas de 2 pontos separados no espaço dependem apenas da distância r entre estes pontos, sendo independente da posição dos pontos e da orientação do vetor que os liga.

Cascata de Energia : em escoamentos turbulentos em equilíbrio, as estatísticas do campo de velocidade do escoamento dependem da *taxa de dissipação de energia cinética turbulenta* ϵ_e ; analogamente as estatísticas do campo de temperatura dependem (além de ϵ_e) da taxa de dissipação da variância da temperatura, $2\epsilon_{\theta\theta}$ (note que a existência de uma *real cascata de energia*, “local” na escala r , é questionável; veja [Kraichnan \(1974\)](#); o argumento dimensional, entretanto, continua válido).

Segue-se então que deve existir uma *faixa inercial* nas funções de estrutura e nos espectros, na qual a turbulência é *localmente homogênea*, onde as estatísticas obedecem às leis dimensionais de Kolmogorov, e são independentes da viscosidade cinemática ν_u e da difusividade térmica ν_θ .

$$D^p(r) = \langle [u_i(x) - u_i(x + r)]^p \rangle, \quad (2.1)$$

define a *função de estrutura de ordem p*, e i é uma das 3 componentes da flutuação turbulenta de velocidade. A teoria de Kolmogorov prevê

$$D^p(r) = C_p \epsilon_e^{\frac{p}{3}} r^{\frac{p}{3}}. \quad (2.2)$$

Em particular, é possível obter analiticamente $C_3 = 4/5$ a partir das equações de Navier-Stokes e das hipóteses de homogeneidade e isotropia da turbulência ([Hill, 1997b](#)).

Apesar de seu extraordinário sucesso para $p = 2$ e $p = 3$, a teoria de Kolmogorov possui várias limitações, muitas delas reconhecidas pelo próprio [Kolmogorov \(1962\)](#). Existem hoje numerosas evidências de que para $p > 3$, a previsão do expoente $p/3$ de r em (2.2) falha. Para um exemplo aplicado a escoamentos turbulentos na atmosfera, veja [Katul et al. \(2001\)](#). Além disso, a própria validade do conceito de isotropia local está hoje claramente em questionamento. Em particular, existem fortes evidências de não-isotropia nos registros extremamente assimétricos de temperatura na atmosfera, onde foram encontradas estruturas de “rampa” há bastante tempo ([Warhaft, 2000](#)).

Para procurar entender melhor as implicações de não-homegeneidade e não-isotropia, nosso grupo realizou vários estudos. Na tese de mestrado de Marcelo Chamecki ([Chamecki, 2003](#)), investigou-se tanto a não-estacionariedade de escoamentos turbulentos — que equivale à não-isotropia sob a hipótese de turbulência “congelada” de Taylor — ([Dias et al., 2004](#)) quanto a hipótese de isotropia local ([Chamecki e Dias, 2004; Smalley e Antonia, 2006; Chamecki e Dias, 2006](#)). Nossos resultados colocam a “lei dos 4/5” ((2.2) com $p = 3$ e $C_3 = 4/5$) em suspeição para escoamentos com forte cisalhamento próximo de uma superfície sólida.

Num trabalho paralelo, nós também conseguimos obter um considerável avanço na redução dos efeitos de *aliasing* em espectros de turbulência na atmosfera ([Gobbi et al., 2006](#)).

Capítulo 3

Equações Governantes

3.1 Equações básicas sem forças de flutuação

Em um escoamento turbulento, a separação de Reynolds para o campo de velocidade, pressão e densidade respectivamente é

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i, \quad (3.1)$$

$$P = \langle P \rangle + p, \quad (3.2)$$

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \rho. \quad (3.3)$$

onde

$$\langle u_i \rangle = \langle p \rangle = 0; \quad (3.4)$$

além disto, vamos supor inicialmente que as flutuações de densidade sejam desprezíveis (isto é: que o *fluido* é efetivamente incompressível):

$$\rho \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{constante}. \quad (3.5)$$

Conceitualmente, a velocidade total U_i e a flutuação de turbulência u_i são funções aleatórias, e a velocidade média $\langle U_i \rangle$ é uma função determinística da posição \mathbf{x} e do tempo t . Vamos fazer a hipótese de que as flutuações de velocidade u_i e de pressão p são processos estocásticos homogêneos, ou seja: de que quaisquer momentos formados pelos produtos de u_1, u_2, u_3 e p são invariantes debaixo de uma translação. Assim por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_3 u_3 p \rangle = 0. \quad (3.6)$$

A equação da continuidade no domínio do espaço para as 3 componentes de velocidade em (3.1) é

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0. \quad (3.7)$$

A equação para as flutuações turbulentas é

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} [u_i \langle U_n \rangle + \langle U_i \rangle u_n + u_i u_n - \langle u_i u_n \rangle] = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (3.8)$$

Considerável introvisão (*insight*) pode ser obtida pela manipulação da equação dinâmica para as flutuações turbulentas em um escoamento homogêneo. Para tanto, abra a equação com a

regra da derivada do produto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \underbrace{\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n}}_{=0} + \langle U_n \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \langle U_i \rangle \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}}_{=0} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_i \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial x_n}}_{=0} + \\ u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} - \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_n \rangle}{\partial x_n}}_{=0} = -\frac{1}{\mathcal{C}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\mathcal{C}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (3.10)$$

Os 3 primeiros termos nulos em (3.9) são consequência da equação da continuidade (3.7); o quarto termo se anula devido à homogeneidade de u_i .

Desejamos calcular as transformadas de Fourier de cada termo de (3.10). O termo envolvendo $\langle U_n \rangle$ e o termo não-linear merecem atenção especial. A condição de cisalhamento constante, necessária para turbulência homogênea, é

$$\langle U_n \rangle (x_l) = \langle U_n \rangle_0 + \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l, \quad (3.11)$$

onde $\langle U_n \rangle_0$ é a velocidade em $x_l = 0$, e $\partial \langle U_n \rangle / \partial x_l = \text{constante}$ para todo n e l .

Substituindo (3.11) em (3.10),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\mathcal{C}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n} \quad (3.12)$$

3.2 Equações espectrais de turbulência

3.2.1 Transformadas de Fourier

Seja

$$\mathcal{F}[u_i] = \hat{u}_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \quad (3.13)$$

a transformada de Fourier de u_i . A transformada de Fourier do termo não-linear é

$$\mathcal{F}\left[u_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right] = \mathcal{F}[u_n] * \mathcal{F}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right] = \mathcal{F}[u_n] * i k_n \mathcal{F}[u_i] = i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i. \quad (3.14)$$

Em (3.14), $*$ indica convolução; de fato, (3.14) nada mais é do que o próprio teorema da convolução para transformadas de Fourier. A transformada de toda a equação (3.12) é

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i + \mathcal{F}\left[\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right] + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\mathcal{C}} i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i. \quad (3.15)$$

3.2.2 A transformada de Fourier do termo de cisalhamento

A transformada de Fourier do termo entre colchetes em (3.15) necessita de alguns truques inteligentes para ser explicitada. Primeiramente, note que

$$\frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} = -i x_l e^{-i(k_m x_m)}. \quad (3.16)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left[\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] &= \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} x_l \frac{\partial u_i}{\partial x_n} e^{-i(k_m x_m)} d^3 \mathbf{x} \\
&= \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} \right) d^3 \mathbf{x} \\
&= i \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} \left(\mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] \right) \\
&= i \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (i k_n \hat{u}_i) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (k_n \hat{u}_i) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \left(k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \frac{\partial k_n}{\partial k_l} \right) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \left(k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \delta_{nl} \right) \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} \delta_{nl} \hat{u}_i \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_i \\
&= -\frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Levando (3.17) em (3.15),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_n \rangle}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\mathcal{O}} i k_i \hat{p} - \nu(k_n k_n) \hat{u}_i;$$

neste ponto, é conveniente trocar os índices do 3º termo do lado esquerdo:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\mathcal{O}} i k_i \hat{p} - \nu(k_n k_n) \hat{u}_i. \tag{3.18}$$

3.2.3 A eliminação do termo de pressão

A transformada de Fourier da equação da continuidade (3.7) produz

$$i k_n \hat{U}_n = 0, \quad i k_n \widehat{\langle U \rangle}_n = 0, \quad i k_n \hat{u}_n = 0. \tag{3.19}$$

É conveniente eliminar \hat{p} em (3.18); para isto, multiplique a equação por k_i :

$$\frac{\partial(k_i \hat{u}_i)}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n (k_i \hat{u}_i) - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} k_i \hat{u}_n + i k_i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{i}{\mathcal{O}} k_i k_i \hat{p} - \nu(k_n k_n) (k_i \hat{u}_i). \tag{3.20}$$

Em virtude de (3.19), todos os termos contendo $(k_i \hat{u}_i)$ desaparecem, restando

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} k_i \hat{u}_n + i k_i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i &= -\frac{i}{\mathcal{O}} k_i k_i \hat{p}, \\
-\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_i &= -\frac{i}{\mathcal{O}} \hat{p}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Mas

$$k_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} = \frac{\partial}{\partial k_n} (k_i \hat{u}_i) - \hat{u}_i \frac{\partial k_i}{\partial k_n} = -\hat{u}_i \delta_{in} = -\hat{u}_n, \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{i}{\wp} \hat{p} \\ & 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m = -\frac{i}{\wp} \hat{p} \\ & 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m = -\frac{i}{\wp} k_i \hat{p}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Os dois primeiros termos da primeira linha acima são iguais; eles são reunidos na segunda linha, onde o índice m substituiu i ; multiplicando-se por k_i obtém-se (3.23). Substituindo (3.23) em (3.18):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \delta_{im} \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = \\ & 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m - \nu k^2 \hat{u}_i; \\ & \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n - \delta_{im} \hat{u}_n \right] + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i \\ & - i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m + \nu k^2 \hat{u}_i = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A equação (3.24) é o bloco de construção das equações de balanço de momentos espectrais de ordem n , conforme veremos na seqüência. O seu conjugado é

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n^* - \delta_{im} \hat{u}_n^* \right] - i k_n (\hat{u}_n * \hat{u}_i)^* \\ & + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} (\hat{u}_n * \hat{u}_m)^* + \nu k^2 \hat{u}_i^* = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A mesma equação (3.24) com o índice j é

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_j - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial k_n} + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \hat{u}_n - \delta_{jm} \hat{u}_n \right] + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_j \\ & - i \frac{k_j k_m k_n}{k^2} \hat{u}_n * \hat{u}_m + \nu k^2 \hat{u}_j = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O truque padrão agora é pós-multiplicar (3.25) por \hat{u}_j , pré-multiplicar (3.26) por \hat{u}_i^* , e somar:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t} \hat{u}_j + \hat{u}_i^* \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} - \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* \hat{u}_j + \langle U_n \rangle_0 i k_n \hat{u}_i^* \hat{u}_j \\ & - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial k_n} \hat{u}_j + k_m \hat{u}_i^* \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{u}_n^* \hat{u}_j + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \hat{u}_i^* \hat{u}_n - \delta_{im} \hat{u}_n^* \hat{u}_j - \delta_{jm} \hat{u}_i^* \hat{u}_n \right] \\ & + \left[i k_n \hat{u}_i^* (\hat{u}_n * \hat{u}_j) - i k_n (\hat{u}_n * \hat{u}_i)^* \hat{u}_j \right] \\ & - \left[\frac{k_j k_m k_n}{k^2} i \hat{u}_i^* (\hat{u}_n * \hat{u}_m) - \frac{k_i k_m k_n}{k^2} i (\hat{u}_n * \hat{u}_m)^* \hat{u}_j \right] + 2 \nu k^2 \hat{u}_i^* \hat{u}_j = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observe que os termos envolvendo $\langle U_n \rangle_0$ se anulam. A equação ainda pode ser simplificada com a regra da derivada do produto:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial t} \widehat{u}_j + \widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} = \frac{\partial (\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j)}{\partial t}. \quad (3.28)$$

$$k_m \frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial k_n} \widehat{u}_j + k_m \widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial k_n} = k_m \frac{\partial (\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j)}{\partial k_n} \quad (3.29)$$

Utilizando agora a definição do espectro cruzado direcional,

$$\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \rangle, \quad (3.30)$$

e sua extensão natural

$$\Phi_{i,j,k}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \widehat{u}_k \rangle, \quad (3.31)$$

$$\Phi_{ij,k}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)^* \widehat{u}_k \rangle, \quad (3.32)$$

obtém-se a equação para o espectro na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left[k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} + 2 \left(\frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) - (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}) \right] \\ + i k_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}] - i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}] + 2\nu k^2 \Phi_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.2.4 Médias em $|\mathbf{k}|$ (*shell averages*)

É muitas vezes conveniente ou necessário reduzir a dimensionalidade dos espectros de turbulência de 3 para 1. Isto é feito por meio da definição dos espectros unidimensionais em k :

$$E_{i,j}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (3.34)$$

Existem também os espectros unidimensionais em k_1 :

$$F_{i,j}(k_1) \equiv \int_{k_2 \in \mathbb{R}, k_3 \in \mathbb{R}} \Phi_{i,j}(k_1, k_2, k_3) dk_2 dk_3. \quad (3.35)$$

As suas integrais respectivas produzem os elementos da matriz de covariâncias turbulentas:

$$\langle u_i u_j \rangle = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j} d^3 \mathbf{k} = \int_{k=0}^{\infty} E_{i,j}(k) dk = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(k_1) dk_1. \quad (3.36)$$

Em particular, a *energia cinética turbulenta*, $\langle e \rangle$, é dada por

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \langle u_n u_n \rangle = \int_{k=0}^{\infty} E_e(k) dk, \quad (3.37)$$

onde

$$E_e(k) \equiv \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{n,n}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (3.38)$$

Finalmente, quando a turbulência é isotrópica, valem as seguintes relações entre $E_e(k)$ e $F_{11}(k_1)$:

$$E_e(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{k} \frac{dF_{11}(k)}{dk_1} \right), \quad (3.39)$$

$$F_{11}(k_1) = \int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} E(k_1 x) dx. \quad (3.40)$$

3.2.5 Interpretação física

É importante interpretar os termos de (3.33) da forma mais física que for possível.

$$\bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \quad (3.41)$$

funciona como um termo de *transferência do cisalhamento médio*, redistribuindo $\Phi_{i,j}$ entre os números de onda (Deissler, 1998, p. 224–225). De fato, pode-se mostrar com facilidade que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (3.42)$$

Para a prova, basta observar que, por analogia com (3.17),

$$\mathcal{F} \left[r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} \right] = -k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n},$$

onde $R_{i,j}(\mathbf{r})$, a função de covariância cruzada, é a transformada inversa de Fourier do espectro cruzado direcional $\Phi_{i,j}$; então,

$$\begin{aligned} r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} &= -\mathcal{F}^{-1} \left[k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \right] \\ &= -\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

e agora (3.42) segue-se de (3.43) avaliada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

O termo

$$\bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) = -2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left(\frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) \quad (3.44)$$

é a parte linear da interação entre a pressão e a velocidade no espaço de fase (veja a equação (3.23)). Claramente, ele é parcialmente responsável pela redistribuição de covariância $\langle u_i u_j \rangle$ entre as 3 direções do espaço. Por exemplo, multiplicando-se (3.30) por k_i ou k_j e utilizando-se a equação da continuidade (3.19), obtém-se

$$k_i \Phi_{i,j} = k_j \Phi_{i,j} = 0; \quad (3.45)$$

portanto, é imediato que

$$\bar{\Pi}_{ii} = 0. \quad (3.46)$$

No entanto, não parece possível fazer nenhuma afirmação geral sobre

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} :$$

por exemplo, em (Deissler, 1998, p. 228), observa-se que em um particular escoamento com cisalhamento médio unidirecional $d \langle U_1 \rangle / dx_3$, $\bar{\Pi}_{11} < 0$ sempre, $\bar{\Pi}_{22} > 0$ sempre, e que $\bar{\Pi}_{33}$ troca de sinal com o tempo: ele é inicialmente positivo e depois se torna negativo.

O termo de produção por interação com o gradiente de velocidade média é

$$\bar{\Upsilon}_{i,j}(\mathbf{k}) = \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}), \quad (3.47)$$

cuja integral em \mathbf{k} é

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Upsilon}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \delta_{im} \langle u_n u_j \rangle + \delta_{jm} \langle u_i u_n \rangle. \quad (3.48)$$

O termo de transferência inercial é

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = i k_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}]. \quad (3.49)$$

Note que, assim como $\Phi_{i,j}$, Γ_{ij} é hermitiano:

$$\Gamma_{ji}(\mathbf{k}) = \Gamma_{ij}^*(\mathbf{k}). \quad (3.50)$$

Desejo mostrar que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (3.51)$$

Para isto, recuperemos a origem de (3.49) em (3.31)–(3.32), e na terceira linha de (3.27):

$$\begin{aligned} i k_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l} \\ &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l}; \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$i k_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j = i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{l}, \quad (3.53)$$

ou seja: (3.49) tem origem em

$$i k_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) - i k_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j,$$

cuja integral em \mathbf{k} será

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} &= \\ i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} &= \\ i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} [k_n - l_n] \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

(note a troca de \mathbf{k} com \mathbf{l} no segundo termo dentro do colchete na 2ª linha, e o uso da equação da continuidade (3.19) na última linha acima), o que prova (3.51). Note portanto que Γ_{ij} somente redistribui a covariância $\langle u_i u_j \rangle$ entre os vetores número de onda \mathbf{k} de $\Phi_{i,j}$, sem jamais trocá-la com outros espectros cruzados. Este é o mesmo papel do termo de transferência pelo cisalhamento médio $\bar{\Gamma}_{i,j}$.

Também é possível definir um termo unidimensional (em k) de transferência:

$$T_{ij}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (3.55)$$

Finalmente, o termo de redistribuição direcional de energia pelas correlações pressão-velocidade é

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = -i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}]. \quad (3.56)$$

Da mesma forma que ocorre com $\bar{\Pi}_{ij}$, não é (nem deve ser!) possível provar um resultado geral sobre a integral de Π_{ij} em \mathbf{k} . Note entretanto que $\Pi_{ii}(\mathbf{k}) \equiv 0$; de fato,

$$k_i \phi_{i,nm} = k_i \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle (k_i \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = 0. \quad (3.57)$$

3.2.6 Produção e dissipação de energia cinética turbulenta

A contração $i = j$ de (3.33) produz a *equação de evolução da energia cinética turbulenta*:

$$\frac{\partial \Phi_{i,i}}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + i k_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 \Phi_{i,i} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial 2\Phi_e}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + i k_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 (2\Phi_e) = 0. \quad (3.59)$$

Em virtude de (3.49), (3.51) e (3.36), a integral em \mathbf{k} de (3.59) é

$$\frac{\partial}{\partial t} (2e) + 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \langle u_m u_n \rangle + 2\epsilon_e = 0. \quad (3.60)$$

A dissipação de covariância é dada por

$$\epsilon_{ij} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 2 \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_{i,j}(k) dk; \quad (3.61)$$

em particular,

$$\epsilon_e = \frac{1}{2} \epsilon_{ii} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \left(\frac{\Phi_{i,i}(\mathbf{k})}{2} \right) d^3 \mathbf{k} = 2\nu \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_e(k) dk. \quad (3.62)$$

A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta pode ser usada para definir as *microescalas de Kolmogorov* de comprimento e de tempo:

$$r_\epsilon = \nu^{3/4} \epsilon_e^{-1/4}, \quad (3.63)$$

$$t_\epsilon = \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2}. \quad (3.64)$$

Capítulo 4

Modelos espectrais de fechamento para o termo de transferência inercial

4.1 Introdução

Modelos de fechamento relativamente simples podem ser propostos para todos os espectros de ordem 3 cujas integrais em \mathbf{k} se anulam. A idéia geral é escrever estes modelos de fechamento na forma

$$T(k) = \frac{\partial}{\partial k} [g(k)E(k)], \quad (4.1)$$

onde $E(k)$ é um espetro qualquer, $T(k)$ é a sua função de transferência inercial, e $g(k)$ define o particular modelo de fechamento escolhido. Para maiores detalhes, veja o apêndice A.

Note que estamos contando com o fato de que $E(\pm\infty) \rightarrow 0$ suficientemente rápido para garantir que a integral em k de $T(k)$ se anule. A analogia com (3.41) pode ser um bom guia. Sabendo que, dimensionalmente:

$$\llbracket \epsilon_e \rrbracket = \mathbb{L}^2 \mathbb{T}^{-3}, \quad \llbracket k \rrbracket = \mathbb{L}^{-1}, \quad (4.2)$$

posso construir uma escala inversa de tempo análoga a $\partial \langle u_m \rangle / \partial x_n$:

$$\mathbb{T}^{-1} = \left[\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \right] = \llbracket k^{2/3} \epsilon_{mn}^{1/3} \rrbracket. \quad (4.3)$$

Um modelo de fechamento dimensionalmente consistente, e inspirado por (3.41), pode ser da forma

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial}{\partial k_n} [(k^{2/3} \epsilon_{mn}^{1/3}) k_m \Phi_{i,j}]$$

ou, em uma dimensão:

$$T(k) = \frac{\partial}{\partial k} [k^{5/3} \epsilon^{1/3} E(k)], \quad (4.4)$$

— onde ϵ é a taxa de dissipação genérica correspondente a $E(k)$ — que vem a ser *exatamente* (a menos da constante de Kolmogorov, α) o modelo proposto por Pao (1965)! Aparentemente, Pao utilizou as equações de turbulência isotrópica, mas impôs uma condição de regime permanente (ver Pao (1965), p. 1066, texto após a eq. (2.9)), o que é contraditório, já que turbulência isotrópica sem um forçante artificialmente introduzido nas equações de Navier-Stokes não pode se manter, e sempre decaí.

O análogo mais simples das equações (3.33) de balanço espectral que podemos conceber é obtido eliminando-se todos os termos que envolvem cisalhamento médio, produção por interação com este cisalhamento, etc., e adotando como única função de transferência a equação (4.4) (isto

é: eliminando o efeito das correlações entre pressão e velocidade); isto é estritamente correto para o espectro da energia cinética turbulenta. A equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta com o fechamento de Pao é

$$\frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.5)$$

4.2 A formulação original de Pao

Pao (1965) propôs $\partial E_e / \partial t = 0$ (o que está errado, como comentamos) e introduziu a constante α de Kolmogorov explicitamente no modelo de fechamento:

$$\frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.6)$$

Observe a derivada ordinária, já que o problema não depende mais do tempo. A solução prossegue ao longo das linhas clássicas:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \frac{dE_e}{dk} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} k^{2/3} \epsilon_e^{1/3} E_e + 2\nu k^2 E_e &= 0, \\ \frac{dE_e}{dk} + \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] E_e &= 0, \\ \frac{dE_e}{E_e} &= - \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \right] dk, \\ \ln \frac{E_e}{E_{e0}} &= - \frac{5}{3} \ln k - \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \\ E_e &= E_{e0} k^{-5/3} \exp \left[- \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Neste ponto, para calcular E_{e0} basta usar a condição de que a dissipação ϵ_e é dada por

$$\epsilon_e = \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk = \frac{\epsilon_e^{1/3} E_{e0}}{\alpha} \Rightarrow E_{e0} = \alpha \epsilon_e^{2/3}. \quad (4.8)$$

O resultado é o espectro clássico de Kolmogorov, mais uma expressão explícita (um decaimento exponencial) para a faixa de dissipação:

$$E_e = \alpha \epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} \exp \left[- \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right]. \quad (4.9)$$

Uma lição importante é que, provavelmente, nenhum modelo espectral pode dispensar uma restrição integral do tipo (4.8).

4.2.1 Discussão:

Visto pelo ângulo que apresentei aqui, o modelo de fechamento de Pao é quase uma dedução independente da lei dos 5/3: ele é sugerido pelas equações dinâmicas (basicamente Navier-Stokes) em que existe um cisalhamento médio, e onde portanto há uma escala de tempo $\partial \langle u_m \rangle / \partial x_n$ explícita; em seguida, ele é adaptado para a transferência inercial com base em duas idéias: (i) o modelo de fechamento pode ser formulado em termos de uma derivada d/dk ; e (ii) na ausência de uma escala de tempo macroscópica, podemos usar ϵ_e e k para construir uma escala de tempo alternativa. Note que (ii) é muito parecida com as idéias usadas por Kolmogorov, mas que agora, como usamos as equações da dinâmica, existe uma previsão um pouco mais ampla (uma forma explícita para a faixa de dissipação do espectro — que segundo Davidson (2004) é uma das poucas previsões fisicamente razoáveis e compatíveis com a evidência experimental).

4.2.2 O cálculo de uma integral elementar

Primeiramente, note que o espectro de Pao pode ser escrito

$$E_e(k) = E_{e0} k^{-5/3} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3}\right], \quad (4.10)$$

que é apenas uma maneira mais compacta de escrever a mesma coisa. Este tipo de manipulação, embora supérfluo do ponto de vista estritamente matemático, sempre ajuda a colocar a física em perspectiva, e em geral simplifica um pouco a álgebra também. O cálculo da dissipação fica

$$\epsilon_e = E_{e0} \int_0^\infty 2\nu k^{1/3} e^{-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3}} dk. \quad (4.11)$$

A mudança de variável óbvia é (note que u é uma variável auxiliar de integração, e não deve ser confundida com a velocidade do escoamento)

$$u = (r_\epsilon k)^{4/3}, \quad (4.12)$$

$$k = \frac{u^{3/4}}{r_\epsilon}, \quad (4.13)$$

$$k^{1/3} = \frac{u^{1/4}}{r_\epsilon^{1/3}}, \quad (4.14)$$

$$dk = \frac{3u^{-1/4}}{4r_\epsilon} du \quad (4.15)$$

e a dissipação agora é

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= E_{e0} \int_0^\infty 2\nu \frac{u^{1/4}}{r_\epsilon^{1/3}} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}u\right] \frac{3u^{-1/4}}{4r_\epsilon} du \\ &= \frac{E_{e0}\nu r_\epsilon^{-4/3}}{\alpha} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{3\alpha u}{2}\right] \frac{3\alpha}{2} du \\ &= \frac{E_{e0}\nu \epsilon_e^{1/3}}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.3 O modelo de Lin (1972) para o espectro de energia cinética turbulenta

Uma modificação importante é a inclusão do efeito de “gargalo” (*bottleneck effect*) no espectro de energia cinética turbulenta. Tanto quanto seja de meu conhecimento, há muito pouco de explicações teóricas sobre o efeito, a não ser no caso de espectros de escalares onde a explicação padrão aceita (razão entre a difusividade molecular de *momentum* e do escalar muito diferente de 1) é a teoria de Batchelor para as regiões inercial-difusiva e advectiva-viscosa (Batchelor, 1959; Batchelor et al., 1959; Hill, 1978). Hill (1978) introduziu diversos modelos que são capazes de reproduzir a “corcova” observada no espectro no fim da região inercial, e aplicou-os a espectros de escalares de acordo com a teoria padrão de Batchelor. Entretanto, o efeito é claramente observável em espectros de energia cinética turbulenta medidos em túneis de vento (Saddoughi e Veeravallis, 1994; Saddoughi, 1997; Kang et al., 2003) e também em simulações numéricas diretas de turbulência (Lamorgese et al., 2005) onde há apenas *uma* difusividade molecular em ação (a viscosidade cinemática do próprio fluido), e nada nos impede *a priori* de aplicar o modelo proposto por Hill ao espectro de energia cinética turbulenta.

O modelo de Lin (1972) baseia-se na inclusão de uma segunda escala de tempo a $g(k)$ no termo de transferência inercial. Note que no modelo original de Pao,

$$g(k) = \frac{k}{\alpha_e t_k}, \quad (4.17)$$

$$t_k = k^{2/3} \epsilon_e^{1/3}. \quad (4.18)$$

Alternativamente, Lin propôs

$$g(k) = \frac{\alpha_e^{-1} k}{t_k + q t_\epsilon} = \frac{1}{\alpha_e \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} + q^{2/3} \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2}} = \frac{\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}}{1 + q^{2/3} \nu^{1/2} \epsilon^{-1/6} k^{2/3}}, \quad (4.19)$$

com $q = 1$; o parâmetro de ajuste $q^{2/3}$ é uma generalização posteriormente introduzida por Hill (1978).

Utilizando-se a definição da microescala de Kolmogorov (3.63),

$$g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} [(qr_\epsilon k)^{2/3} + 1]^{-1}. \quad (4.20)$$

Para este modelo, a equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta (4.6) com $\partial E_e(k)/\partial t = 0$ é

$$\frac{d}{dk} \left[\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} ((qr_\epsilon k)^{2/3} + 1)^{-1} E_e \right] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.21)$$

Usando o “espectro compensado”

$$E_C(k) \equiv k^{5/3} E_e(k), \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}) \frac{dE_C}{dk} - \frac{\frac{2}{3}(qr_\epsilon k)^{-1/3}(qr_\epsilon)}{(1 + (qr_\epsilon k)^{2/3})^2} E_C \right] + 2\nu k^{1/3} E_C, \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{2}{3} (1 + (qr_\epsilon k)^{2/3})^{-1} (qr_\epsilon k)^{-1/3} (qr_\epsilon) dk - 2\alpha \nu \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} (1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}) dk \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{2}{3} (1 + (qr_\epsilon k)^{2/3})^{-1} (qr_\epsilon k)^{-1/3} d(qr_\epsilon k) - 2\alpha q^{-4/3} (qr_\epsilon k)^{1/3} (1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}) d(qr_\epsilon k) \\ &= \frac{2}{3} (1 + x^{2/3})^{-1} x^{-1/3} dx - 2\alpha q^{-4/3} x^{1/3} (1 + x^{2/3}) dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

para

$$x \equiv qr_\epsilon k. \quad (4.24)$$

As integrais são elementares:

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \ln (x^{2/3} + 1) - \alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} E_e(k) &= E_{C0} k^{-5/3} (x^{2/3} + 1) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right] \\ &= E_{C0} (qr_\epsilon)^{5/3} (x^{-1} + x^{-5/3}) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A constante E_{C0} é obtida por meio da integral de dissipação (4.8):

$$\int_{k=0}^{\infty} 2\nu(qr_\epsilon k)^2 (qr_\epsilon)^{-2} E_{C0} (qr_\epsilon)^{5/3} (x^{-1} + x^{-5/3}) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right] dk = \epsilon_e,$$

$$\nu E_{C0} (r_\epsilon)^{-4/3} \int_{x=0}^{\infty} 2\alpha q^{-4/3} (x + x^{1/3}) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \right] dx = \alpha \epsilon_e. \quad (4.26)$$

A mudança de variável

$$u = \alpha q^{-4/3} \left(x^2 + \frac{3}{2} x^{4/3} \right) \quad (4.27)$$

produz (novamente) a integral elementar

$$\nu E_{C0} r_\epsilon^{-4/3} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \alpha \epsilon_e,$$

$$E_{C0} = \frac{\alpha \epsilon_e r_\epsilon^{4/3}}{\nu} = \alpha \epsilon_e^{-2/3}. \quad (4.28)$$

O espectro compensado adimensional do modelo de Lin é

$$\epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} E_e(r_\epsilon k) = \alpha_e ((qr_\epsilon k)^{2/3} + 1) \exp \left[-\alpha q^{-4/3} \left((qr_\epsilon k)^2 + \frac{3}{2} (qr_\epsilon k)^{4/3} \right) \right]. \quad (4.29)$$

O uso de um modelo alternativo ao de Pao para reproduzir a “corcova” do espectro compensado requer a capacidade de calibrar o modelo para ajustar o valor de $r_\epsilon k$ em que ocorre o máximo desta corcova. Nos espectros unidimensionais compensados de Saddoughi (1997) e Kang et al. (2003), este máximo ocorre em na faixa $10^{-2} < r_\epsilon k_1 < 10^{-1}$. Nossas tentativas de calibração mostraram que o máximo da corcova só pode ser posicionado em $r_\epsilon k_1$ ao preço de um valor absurdamente alto ($q = 10$). Em resumo, o modelo original de Lin, mesmo com a “generalização” $q \neq 1$, não é suficientemente flexível para reproduzir corretamente a corcova do espectro compensado.

4.3.1 Primeira tentativa de generalizar o modelo de Lin

Considere então a próxima generalização óbvia do modelo de Lin:

$$g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} [(qr_\epsilon k)^{2b/3} + 1]^{-1}. \quad (4.30)$$

Prosseguindo em paralelo com o caso anterior:

$$0 = \frac{d}{dk} \left[\alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} (1 + x^{2b/3})^{-1} E_C \right] + 2\nu k^{1/3} E_C,$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left[(1 + x^{2b/3})^{-1} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C,$$

$$0 = \left[\frac{1}{1 + x^{2b/3}} \frac{dE_C}{dx} - \frac{2b}{3} \frac{x^{2b/3-1}}{(1 + x^{2b/3})^2} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C,$$

$$0 = \frac{dE_C}{dx} - \frac{2b}{3} \frac{x^{2b/3-1}}{1 + x^{2b/3}} E_C + 2\alpha_e (q)^{-4/3} (1 + x^{2b/3}) x^{1/3} E_C,$$

$$\frac{dE_C}{E_C} = \frac{2b}{3} \frac{x^{2b/3-1}}{1 + x^{2b/3}} dx - 2\alpha_e (q)^{-4/3} (1 + x^{2b/3}) x^{1/3} dx. \quad (4.31)$$

As integrais são elementares:

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \ln (x^{2b/3} + 1) - 2\alpha q^{-4/3} \left(\frac{3}{4} x^{4/3} + \text{Lin}(x) \right), \quad (4.32)$$

onde

$$\text{Lin}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2b+4}x^{\frac{2b+4}{3}}, & b \neq -2, \\ \ln x, & b = -2. \end{cases} \quad (4.33)$$

O espectro compensado é

$$E_C(x) = \alpha_e \epsilon_e^{2/3} [x^{2b/3} + 1] \exp \left[-2\alpha q^{-4/3} \left(\frac{3}{4} x^{4/3} + \text{Lin}(x) \right) \right]. \quad (4.34)$$

Como sempre, a constante $E_{C0} = \alpha_e \epsilon_e^{2/3}$ é obtida por meio da integral de dissipação (4.8); o cálculo é elementar, e os detalhes foram omitidos.

A introdução do segundo parâmetro torna o ajuste de dados experimentais mais flexível. A figura 4.1 mostra que é possível obter uma ajuste razoável aos dados de Kang et al. (2003) com $q = 4,0$ e $b = 1,5$. Para se obter um ajuste melhor, é necessário utilizar um algortimo automático de otimização. No entanto, o cálculo do espectro unidimensional $F_{11}(r_\epsilon k_1)$ é feito utilizando integração numérica para o cálculo de (3.40): o resultado é uma rotina demasiadamente lenta em um computador de mesa para que o recálculo de (q, b) possa ser feito automaticamente. Expressões analíticas para F_{11} estão sendo desenvolvidas para superar este obstáculo.

4.3.2 Segunda tentativa de generalizar o modelo de Lin

Uma característica evidente de (4.30) é que $g(k)$ se torna muito pequeno quando $x \rightarrow \infty$. Uma maneira de controlar a diminuição de $g(k)$ é

$$g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} \frac{1 + (qr_\epsilon k)^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)(qr_\epsilon k)^{2/3}}. \quad (4.35)$$

Do ponto de vista da análise dimensional, (4.35) é tão válido quanto (4.20) ou (4.30). Em particular, note que

$$\lim_{(qr_\epsilon k) \rightarrow 0} g(k) = \alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}, \quad (4.36)$$

$$\lim_{(qr_\epsilon k) \rightarrow \infty} g(k) = [(1 + \Delta)\alpha_e]^{-1} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3}. \quad (4.37)$$

Prosseguindo em paralelo com o caso anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dk} \left[\alpha_e^{-1} \epsilon_e^{1/3} \frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} E_C \right] + 2\nu k^{1/3} E_C, \\ 0 &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C, \\ 0 &= \left[\frac{1 + x^{2/3}}{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}} \frac{dE_C}{dx} - \frac{2\Delta}{3} \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})^2} E_C \right] + 2\alpha_e (q)^{-4/3} x^{1/3} E_C, \\ 0 &= \frac{dE_C}{dx} - \frac{2\Delta}{3} \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})(1 + x^{2/3})} E_C + 2\alpha_e (q)^{-4/3} \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} E_C, \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \frac{x^{-1/3}}{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})(1 + x^{2/3})} dx - 2\alpha_e (q)^{-4/3} \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

As integrais são elementares (e foram calculadas com o auxílio da linguagem de processamento simbólico MAXIMA; vide <http://www.freshmeat.net/projects/maxima>):

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \ln \frac{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}}{1 + x^{2/3}} - 2\alpha_e q^{-4/3} \left[\frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \right]. \quad (4.39)$$

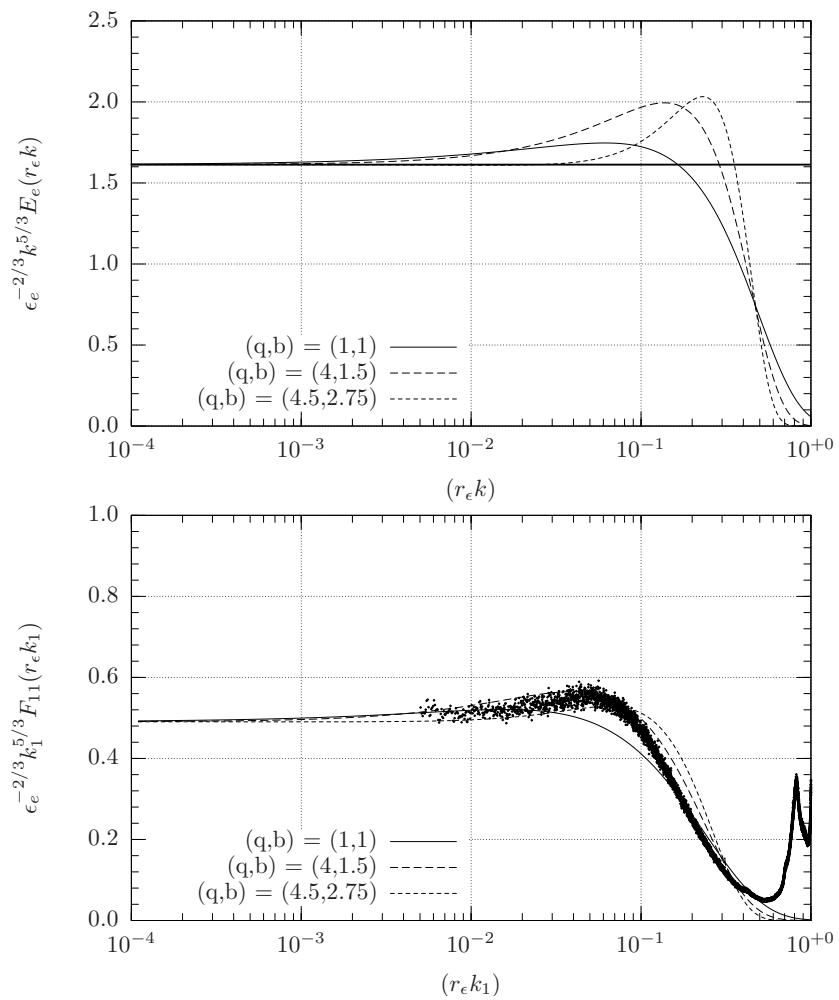


Figura 4.1: Espectros compensados de Pao-Lin com um segundo parâmetro

O espectro compensado é

$$E_C(x) = E_{C0} \left[\frac{1 + (1 + \Delta)x^{2/3}}{1 + x^{2/3}} \right] \exp \left[-2\alpha_e q^{-4/3} \left(\frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \right) \right]. \quad (4.40)$$

A condição de dissipação é

$$2 \int_0^\infty q^{-4/3} x^{1/3} E_C(x) dx = \epsilon_e^{2/3}. \quad (4.41)$$

De maneira quase surpreendente, a mesma manipulação algébrica do modelo original de Pao continua funcionando:

$$u = \frac{3}{4}(1 + \Delta)x^{4/3} - \frac{3\Delta}{2}x^{2/3} + \frac{3\Delta}{2} \ln(x^{2/3} + 1) \Rightarrow \quad (4.42)$$

$$du = \frac{(1 + (1 + \Delta)x^{2/3})x^{1/3}}{1 + x^{2/3}} dx, \quad (4.43)$$

de forma que a integral de dissipação torna-se

$$E_{C0} \int_0^\infty 2\alpha_e q^{-4/3} \exp[-2\alpha_e q^{-4/3} u] du = \alpha_e \epsilon_e^{2/3} \Rightarrow E_{C0} = \alpha_e \epsilon_e^{2/3}. \quad (4.44)$$

4.4 Um modelo modificado Pao-Hill para a energia cinética turbulenta

Hill (1978) propôs alguns modelos adicionais similares ao de Lin. Na seqüência, nós vamos descrever em detalhes o seu “modelo 2”. Ele se baseia na seguinte equação diferencial para $g(k)$:

$$\frac{d \ln g(k)}{dz} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} [1 + \tgh(az)]. \quad (4.45)$$

onde $g(k)$ é a função de definição do modelo de fechamento introduzida em (4.1), e

$$z \equiv \ln \frac{k}{k^*}; \quad (4.46)$$

k^* é um número de onda típico da região onde ocorre a corcova no espectro. Os parâmetros adicionais do modelo de Hill são a e k^* .

Os seguintes comportamentos assintóticos do modelo de Hill para a inclinação ζ de $\ln E_e \times \ln k$ são facilmente verificáveis:

$$\begin{aligned} k \ll k^* &\Rightarrow z \rightarrow -\infty & \Rightarrow \tgh(az) \rightarrow -1 & \zeta = -5/3 \\ k \sim k^* &\Rightarrow z \sim 0 & \Rightarrow \tgh(az) \sim 0 & \zeta = -4/3 \\ k \gg k^* &\Rightarrow z \rightarrow +\infty & \Rightarrow \tgh(az) \rightarrow +1 & \zeta = -1 \end{aligned}$$

A integração do termo envolvendo a tangente hiperbólica é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int [1 + \tgh(az)] dz &= \int \left[1 + \frac{\sinh(az)}{\cosh(az)} \right] dz \\ &= \int \frac{\cosh(az) + \sinh(az)}{\cosh(az)} dz \\ &= \int \frac{2e^{az}}{e^{az} + e^{-az}} dz \end{aligned} \quad (4.47)$$

Fazendo

$$u = e^{az} \Rightarrow dz = \frac{1}{a} \frac{du}{u}, \quad (4.48)$$

a integral transforma-se em

$$\frac{1}{a} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{a} \ln(u^2 + 1). \quad (4.49)$$

Levando este último resultado em (4.45):

$$\begin{aligned} \ln g(k) &= \frac{5}{3} \ln \frac{k}{k^*} - \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] + \ln C, \\ g(k) &= C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Em princípio, nós deveríamos agora resolver uma equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta análoga a (4.5) com $g(k)$ dado por (4.50), e em seguida impor a restrição global de dissipação de energia cinética turbulenta (4.8) para então calcular C . Um caminho mais curto é simplesmente admitir o espectro de Kolmogorov na faixa inercial e impor que o fluxo espectral de energia cinética turbulenta (dado pela derivada de $T(k)$: ver (4.1)) seja igual a ϵ_e nesta faixa:

$$\begin{aligned} g(k)E_e(k) &= \epsilon_e, \\ C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_e(k) &= \epsilon_e, \\ C \left(\frac{k}{k^*} \right)^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \alpha \epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} &= \epsilon_e, \\ C &= \frac{\epsilon_e^{1/3}}{\alpha} k^{*5/3}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde

$$g(k) = \frac{1}{\alpha} \epsilon_e^{1/3} k^{5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}}. \quad (4.52)$$

É importante observar que o resultado de dissipação ainda deve ser verificado *a posteriori* quando tivermos obtido uma equação completa para $E_e(k)$. A equação diferencial de balanço espectral de energia cinética turbulenta agora é (sob a mesma aproximação de Pao de desprezar o termo transitório)

$$\frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e(k) \right\} + 2\nu k^2 E_e(k) = 0; \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C(k) \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C(k) &= 0, \\ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} E_C + 2\nu k^{1/3} E_C &= 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Separando as variáveis,

$$\frac{dE_C}{E_C} = \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx \quad (4.55)$$

onde

$$x = \frac{k}{k^*}. \quad (4.56)$$

A integral é

$$\ln \frac{E_C(k)}{E_{C0}} = \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] - 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \int_1^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx \quad (4.57)$$

Note o aparecimento da função $\text{Hil}(x, 1/3, a)$ definida no apêndice E, equação (E.1); obtém-se o espectro (a menos de uma constante de integração a ser calculada):

$$k^{5/3} E_e(k) = E_{C0} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a) \right]. \quad (4.58)$$

A condição integral de dissipação equivalente a (4.8) do modelo de Pao é

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\ &= \int_0^\infty \frac{2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} E_{C0} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}(k^*)^{4/3} \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a) \right] dk \\ &= \frac{2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}(k^*)^{4/3}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} E_{C0} \int_{x=0}^\infty x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} \exp \left[-2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}(k^*)^{4/3} \text{Hil}(x, 1/3, a) \right] dx \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} \int_{x=0}^\infty \exp \left[-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(x, 1/3, a) \right] 2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \frac{d\text{Hil}(x, 1/3, a)}{dx} dx \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha\epsilon_e^{-1/3}} \exp \left(-2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(0, 1/3, a) \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Portanto,

$$E_{C0} = \alpha\epsilon_e^{2/3} \exp \left(2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} \text{Hil}(0, 1/3, a) \right). \quad (4.60)$$

O espectro de energia cinética decorrente da aplicação do modelo 2 de Hill, finalmente, é dado por

$$E_e(k) = \alpha\epsilon_e^{2/3} k^{-5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} (\text{Hil}(0, 1/3, a) - \text{Hil}(k/k^*, 1/3, a)) \right]. \quad (4.61)$$

O espectro compensado e adimensionalizado torna-se

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \alpha \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[2\alpha(r_\epsilon k^*)^{4/3} (\text{Hil}(0, 1/3, a) - \text{Hil}(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, 1/3, a)) \right] \quad (4.62)$$

A figura 4.2 mostra o resultado de E_e para $a = 1,75$ e $r_\epsilon k^* = 0,075$.

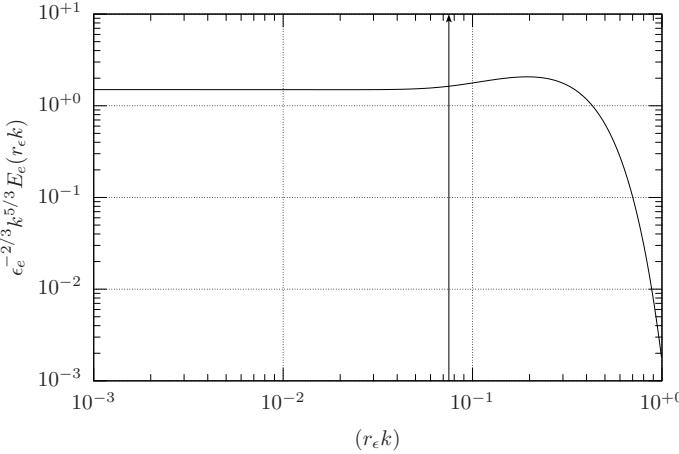


Figura 4.2: Espectro compensado e adimensional de Pao-Hill: $a = 1,75$ e $(r_\epsilon k^*) = 0,075$ (seta vertical). O platô vale $\alpha = 1,5$.

4.5 Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S em regime permanente

O desprezo do termo transitório na formulação de Pao carrega um preço alto: ao contrário do comportamento correto do espectro de energia cinética turbulenta, $E_e(k=0) = 0$, o espectro mantém-se “para sempre” na região inercial enquanto $k \downarrow 0$. Isto é claramente não-físico, e nós vamos agora tentar introduzir uma modificação que produza uma solução mais realista fisicamente. A única maneira de fazer isto é introduzindo um termo que produza continuamente $\langle e \rangle$, de forma que nós modificamos (um tanto arbitrariamente) a equação espectral de balanço para

$$-\mathcal{S}E_e + \frac{d}{dk} [\alpha^{-1}k^{5/3}\epsilon_e^{1/3}E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.63)$$

Comparando (4.63) com (4.5), é evidente que $\llbracket \mathcal{S} \rrbracket = \mathbb{T}^{-1}$. Portanto, \mathcal{S} representa um cisalhamento médio, ou taxa de deformação média, introduzido(a) pela fonte de produção da turbulência; no caso de túneis de vento, esta fonte é a grade passiva ou ativa na entrada do túnel de vento.

Continuando,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{5}{3}\alpha^{-1}k^{2/3}\epsilon_e^{1/3} - \mathcal{S} \right] E_e + \alpha^{-1}\epsilon_e^{1/3}k^{5/3}\frac{dE_e}{dk} + 2\nu k^2 E_e = 0, \\ & \frac{dE_e}{dk} + \left[\frac{5}{3}k^{-1} - \mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{-5/3} + 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{1/3} \right] E_e = 0, \\ & \frac{dE_e}{E_e} = - \left[\frac{5}{3}k^{-1} - \mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{-5/3} + 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{1/3} \right] dk, \\ & \ln \frac{E_e}{E_{e0}} = -\frac{5}{3} \ln k - \frac{3}{2}\mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{-2/3} - \frac{3}{2}\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{4/3}, \\ & E_e = E_{e0}k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2}\mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{-2/3} \right] \exp \left[-\frac{3}{2}\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3}k^{4/3} \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

O espectro agora não diverge quando $k \downarrow 0$; é fácil verificar que $\lim_{k \rightarrow 0} E_e(k) = 0$, devido ao termo contendo \mathcal{S} .

É conveniente agora adimensionalizar o espetro. Para isto, define-se

$$\ell \equiv (\mathcal{S}\epsilon_e^{-1/3})^{-3/2} = \mathcal{S}^{-3/2}\epsilon_e^{1/2}. \quad (4.65)$$

Nós esperamos que $\ell/r_\epsilon \gg 1$; na verdade ℓ pode ser interpretado como uma escala integral do escoamento, e

$$\frac{\ell}{r_\epsilon} = \left(\frac{\epsilon_e}{\mathcal{S}^2\nu}\right)^{3/4} \equiv R_\ell^{3/4} \Rightarrow R_\ell = \frac{\epsilon_e}{\mathcal{S}^2\nu} \quad (4.66)$$

define um número de Reynolds R_ℓ em função da taxa de deformação \mathcal{S} . É interessante notar que a dependência de ℓ/r_ϵ com R_ℓ é uma das primeiras coisas a aparecer no estudo de turbulência (por exemplo, veja: (Davidson, 2004, p. 20, eq. 1.3)). O espetro (4.64) torna-se

$$\begin{aligned} E_e &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2}[(r_\epsilon k)^{4/3} + (\ell k)^{-2/3}]\right\} \\ &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left\{-\frac{3\alpha}{2}\left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \left(\frac{\ell}{r_\epsilon}\right)^{-2/3}(r_\epsilon k)^{-2/3}\right]\right\} \\ &= E_{e0}k^{-5/3} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3} - (3\alpha/2)^{3/2}R_\ell^{-1/2}((3\alpha/2)^{-1/2}(r_\epsilon k)^{-2/3})\right]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

A integral de dissipação será

$$\epsilon_e = \int_{k=0}^{\infty} 2\nu E_{e0}k^{1/3} \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3} - (3\alpha/2)^{3/2}R_\ell^{-1/2}((3\alpha/2)^{-1/2}(r_\epsilon k)^{-2/3})\right] dk. \quad (4.68)$$

A mudança de variável agora é

$$u = (3\alpha/2)^{1/2}(r_\epsilon k)^{2/3}, \quad (4.69)$$

$$k = \frac{u^{3/2}}{(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon}, \quad (4.70)$$

$$k^{1/3} = \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4}r_\epsilon^{1/3}}, \quad (4.71)$$

$$dk = \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon} du, \quad (4.72)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_{u=0}^{\infty} 2\nu E_{e0} \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4}r_\epsilon^{1/3}} \exp\left(-u^2 - \frac{(d_1 R_\ell)^{-1/2}}{u}\right) \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4}r_\epsilon} du \\ &= \frac{2\nu E_{e0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} A_1((d_1 R_\ell)^{-1/2}), \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde

$$d_1 = \left(\frac{2}{3\alpha}\right)^3 = 0,070602994 \quad (4.74)$$

(para $\alpha = 1,613$) e

$$A_1(x) \equiv \int_0^{\infty} u \exp\left(-u^2 - \frac{x}{u}\right) du \quad (4.75)$$

é a *função de Abramowitz* de ordem 1 (Abramowitz, 1953; Abramowitz e Stegun, 1972, p. 1003); Harris (1999, p. 137) chama $A_1(x)$ de *integral de Abramowitz*. O cálculo de $A_1(0) = 1/2$ é elementar, e produz para $\mathcal{S} = 0$ a mesma constante de integração de antes: $E_{e0} = \alpha\epsilon_e^{2/3}$.

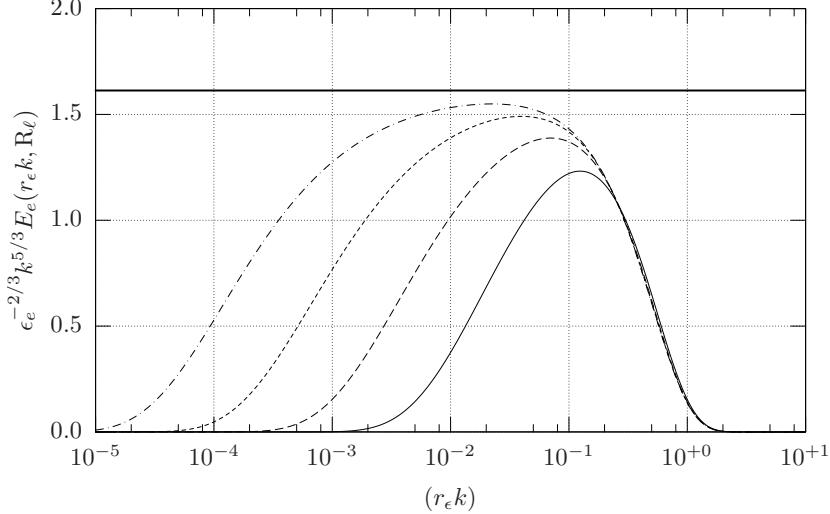


Figura 4.3: Espectros adimensionais de Pao para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$. A linha horizontal corresponde a $\alpha = 1.613$, que neste modelo é o valor assintótico da constante de Kolmogorov para $R_\ell \rightarrow \infty$

Uma aproximação de ordem 2 para a integral é ([Abramowitz e Stegun, 1972](#))

$$\epsilon_e \approx \frac{\nu E_{e0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \left[1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1-\gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1} \right], \quad (4.76)$$

onde $\gamma \approx 0,57721566$ é a constante de Euler; a solução para a constante E_{e0} é

$$E_{e0} = \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3}}{1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1-\gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1}}. \quad (4.77)$$

O espectro adimensional resultante será

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \frac{\alpha \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{-1/2} (d_1 R_\ell)^{-1/2} (r_\epsilon k)^{-2/3} \right]}{1 - \sqrt{\pi} (d_1 R_\ell)^{-1/2} + \left(\frac{3}{2}(1-\gamma) - \ln(d_1 R_\ell)^{-1/2} \right) (d_1 R_\ell)^{-1}}. \quad (4.78)$$

A figura 4.3 mostra os espectros adimensionais resultantes para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$.

Alguns problemas do espectro (4.78) ficam evidentes: além de inexistir o gargalo observado experimentalmente em $E_e(k)$, não há uma faixa inercial claramente definida, exceto para R_ℓ demasiadamente altos, já que mesmo $R_\ell = 10^6$ não é capaz de produzir a faixa inercial.

4.6 Um modelo de fechamento Pao com produção proporcional a S^2 em regime permanente

Para sanar as dificuldades aparentes de (4.78), vamos tentar modelar o termo de produção proporcional a S^2 : a formulação dimensionalmente correta deve-se a [Claussen \(1985\)](#), e é dada por

$$-S^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} E_e + \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} E_e] + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.79)$$

Fisicamente, (4.79) difere de (4.63) pelo fato de que o efeito do cisalhamento \mathcal{S} sobre a produção de ECT agora depende do número de onda k , sendo tanto mais importante quanto menor for k .

Continuando,

$$\begin{aligned} -\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} E_C + \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \frac{dE_C}{dk} + 2\nu k^{1/3} E_C &= 0, \\ \frac{dE_C}{dk} &= \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-7/3} E_C - 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} E_C, \\ \frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-7/3} dk - 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} dk, \\ \ln \frac{E_C}{E_{C0}} &= -\frac{3}{4} \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-4/3} + \frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3}, \\ E_e &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{4} \alpha \mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-2/3} k^{-4/3} \right] \exp \left[\frac{3}{2} \nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

A adimensionalização deste espectro prossegue da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_e &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3\alpha}{2} \left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \frac{1}{2} (\ell k)^{-4/3} \right] \right\} \\ &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3\alpha}{2} \left[(r_\epsilon k)^{4/3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{r_\epsilon} \right)^{-4/3} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right] \right\} \\ &= E_{C0} k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 R_\ell^{-1} \left(\left(\frac{3\alpha}{2} \right)^{-1} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.81)$$

A integral de dissipação será

$$\epsilon_e = \int_{k=0}^{\infty} 2\nu E_{C0} k^{1/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (r_\epsilon k)^{4/3} - \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{2} \right)^2 R_\ell^{-1} \left(\frac{2}{3\alpha} (r_\epsilon k)^{-4/3} \right) \right] dk. \quad (4.82)$$

usando a mesma mudança de variável definida em (4.69)–(4.72), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_{u=0}^{\infty} 2\nu E_{C0} \frac{u^{1/2}}{(3\alpha/2)^{1/4} r_\epsilon^{1/3}} \exp \left(-u^2 - \frac{(d_2 R_\ell)^{-1}}{u^2} \right) \frac{3u^{1/2}}{2(3\alpha/2)^{3/4} r_\epsilon} du \\ &= \frac{2\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \int_{u=0}^{\infty} u \exp \left[-u^2 - \frac{(d_2 R_\ell)^{-1}}{u^2} \right] du \\ &= \frac{\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \int_{v=0}^{\infty} \exp \left[-v - \frac{(d_2 R_\ell)^{-1}}{v} \right] dv \\ &= \frac{\nu E_{C0}}{\alpha r_\epsilon^{4/3}} \sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}} K_1 \left(\sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}} \right), \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde

$$d_2 = 2 \left(\frac{2}{3\alpha} \right)^2 = 0,34164789 \quad (4.84)$$

e $K_1(x)$ é a função modificada de Bessel de terceiro tipo, ou função de McDonald (Lebedev (1972), seção 5.7; Gradshteyn e Ryzhik (1980), eq. 3.324 e Abramowitz e Stegun (1972), seção 9.6). Por segurança, a correção de (4.83) foi verificada com o uso de integração numérica.

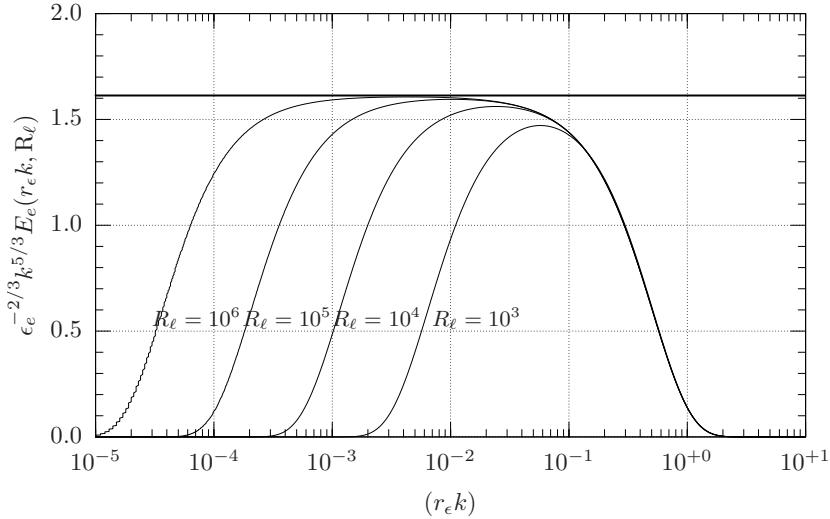


Figura 4.4: Espectro compensado de Pao com produção proporcional a \mathcal{S}^2 : $R_\ell = 10^3, 10^4, 10^5$ e 10^6 . A linha horizontal corresponde ao valor assintótico da constante de Kolmogorov para $R_\ell \rightarrow \infty$.

Uma aproximação de ordem 2 (ver apêndice B) é

$$\begin{aligned} \sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}} K_1\left(\sqrt{4(d_2 R_\ell)^{-1}}\right) &\approx 1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] \\ &\quad + (d_2 R_\ell)^{-2} \left[2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2}\right]. \end{aligned} \quad (4.85)$$

A constante de integração, portanto, é

$$E_{C0} = \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3}}{1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] + (d_2 R_\ell)^{-2} \left[2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2}\right]} \quad (4.86)$$

e o espectro adimensional

$$\epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(k) = \frac{\alpha \exp\left[-\frac{3\alpha}{2}(r_\epsilon k)^{4/3} - (d_2 R_\ell)^{-1} \frac{2}{3\alpha} (r_\epsilon k)^{-4/3}\right]}{1 + (d_2 R_\ell)^{-1} [2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - 1] + (d_2 R_\ell)^{-2} \left[2 \ln(d_2 R_\ell)^{-1/2} + 2\gamma - \frac{5}{2}\right]}. \quad (4.87)$$

A figura 4.4 mostra o efeito de diferentes números de Reynolds R_ℓ sobre o espectro compensado. O resultado, em comparação com a figura 4.3, é bem mais satisfatório, com o surgimento claro de uma faixa inercial.

Também é importante compararmos o resultado de (4.87) com dados medidos. Uma fonte extremamente importante são os dados de Kang et al. (2003) livremente disponíveis na internet: ver

<http://pegasus.me.jhu.edu/~meneveau/datasets/actgriddata.html>.

Os detalhes das medições podem ser encontrados em Kang et al.; trata-se de um experimento em um túnel de vento com geração de turbulência por uma grade ativa, em um túnel com seção de $1,22 \times 0,91 \text{ m}^2$ e 10 m de comprimento. As comparações mostradas aqui são feitas contra medições na primeira seção após a grade, na posição $x/M = 20$, onde $M = 0,152 \text{ m}$ é o tamanho da grade.

Nossas análises mostraram que (4.87) proporciona um ajuste razoável para o espectro em baixos números de onda — na verdade, consideravelmente melhor que os ajustes das equações (C.2) e (C.3). Sozinha, e utilizando os valores medidos de r_ϵ e de R_ℓ , a equação (C.2) produz um espectro nitidamente abaixo dos valores experimentais na região inercial, enquanto que (4.87) produz um bom ajuste nesta região. Com o termo adicional proposto por Kang et al. (2003), a equação (C.3) é capaz de reproduzir de forma razoavelmente boa a corcova do espectro, mas ela continua produzindo um ajuste ruim tanto em baixos números de onda quanto em números de onda $k_1 r_\epsilon \geq 2 \times 10^{-1}$. Mesmo entre para $r_\epsilon k_1 \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ uma análise cuidadosa mostra que (C.3) superestima ligeiramente os valores medidos de F_{11} .

4.7 Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S em regime permanente

Utilizando o mesmo $g(k)$ de Hill, equação (4.52), e o mesmo termo de produção baseado em uma taxa de deformação média \mathcal{S} introduzido na equação (4.63), obtém-se a seguinte equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta em regime permanente:

$$-\mathcal{S}E_e + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e \right\} + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.88)$$

Novamente, procuramos a solução primeiramente em termos do espectro compensado E_C :

$$-\mathcal{S}k^{-5/3}E_C + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C = 0, \quad (4.89)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} + \\ & \left\{ -\mathcal{S}k^{-5/3} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} + 2\nu k^{1/3} \right\} E_C = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{dE_C}{dk} + \left\{ -\mathcal{S}\alpha \epsilon_e^{-1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} k^{-5/3} \right. \\ & \left. - \frac{2}{3k^*} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \right\} E_C = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{dE_C}{E_C} = \mathcal{S}\alpha \epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{-2/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{-5/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*} \right) \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d\left(\frac{k}{k^*} \right) - 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*} \right), \end{aligned}$$

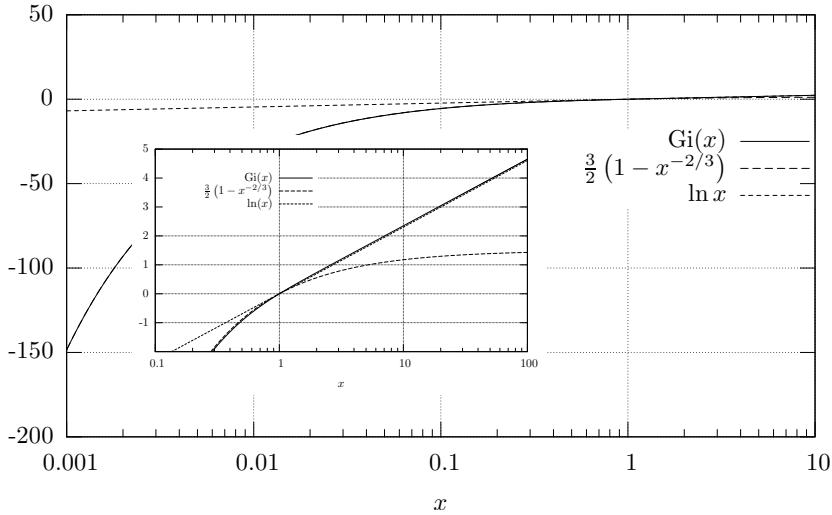


Figura 4.5: Comportamento assintótico de $\text{Gi}(x)$ quando $x \downarrow 0$ e $x \uparrow \infty$.

$$\frac{dE_C}{E_C} = \sigma x^{-5/3} (x^{2a} + 1)^{-\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - \mu x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx, \quad (4.90)$$

onde x foi definido em (4.56);

$$\mu = 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} = 2\alpha (r_\epsilon k^*)^{4/3}; \quad (4.91)$$

e

$$\sigma = \mathcal{S}\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{-2/3}. \quad (4.92)$$

Integrando,

$$\ln \frac{E_C}{E_{C0}} = \sigma \int_1^{k/k^*} x^{-5/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] - \mu \int_0^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx. \quad (4.93)$$

Note o limite inferior (1) da primeira integral em (4.93), uma vez que a integral é divergente nos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$.

Definindo-se agora a representação integral

$$\text{Gi}(x) \equiv \int_1^x \xi^{-5/3} (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi, \quad (4.94)$$

verifica-se facilmente os seguintes comportamentos assintóticos:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow \text{Gi}(x) \approx \frac{3}{2} (1 - x^{-2/3}), \quad (4.95)$$

$$x \uparrow \infty \Rightarrow \text{Gi}(x) \approx \ln x \quad (4.96)$$

A figura 4.5 mostra que os comportamentos assintóticos em (4.95) e (4.96) são na verdade excelentes aproximações para todos os valores dos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$, respectivamente.

O espectro de Pao-Hill com produção constante será

$$\begin{aligned} E_C &= E_{C0} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \text{Gi} \left(\frac{k}{k^*}, a \right) - \mu \text{Hi} \left(\frac{k}{k^*}, a \right) \right] \\ k^{5/3} E_e &= E_{C0} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \text{Gi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) - \mu \text{Hi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

A integral de dissipação será agora

$$\begin{aligned} \epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\ &= 2\nu (k^*)^{1/3} E_{C0} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\sigma \text{Gi}(x, a) - \mu \text{Hi}(x, a)] dx \\ &= \frac{2\nu (k^*)^{4/3} E_{C0}}{\mu} \int_0^\infty \exp [\sigma \text{Gi}(x, a) - \mu \text{Hi}(x, a)] \mu \frac{d\text{Hi}}{dx} dx. \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty \exp [\sigma \text{Gi}(x, a) - \mu \text{Hi}(x, a)] \mu \frac{d\text{Hi}}{dx} dx. \end{aligned} \quad (4.98)$$

A integral (4.98) pode ser aproximada da seguinte forma. Inicialmente, uso (4.96) observando que o maior peso da integral ocorre para $x > 1$; além disso, simplifico $\text{Hi}(x)$ com

$$x \uparrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Hi}(x, a) \approx \frac{x^2}{2}; \quad (4.99)$$

então:

$$\begin{aligned} \epsilon_e &\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^\sigma \exp [-\mu \text{Hi}(x)] \mu \frac{d\text{Hi}}{dx} dx \\ &\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^\sigma \exp \left[-\mu \frac{x^2}{2} \right] \mu x dx \\ &= \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \frac{\sigma}{2} \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right) \Rightarrow E_{C0} = \frac{2\alpha \epsilon_e^{2/3}}{\left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \sigma \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Com isto, a equação para o espectro torna-se

$$\epsilon^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) = \frac{2\alpha}{\left(\frac{2}{\mu} \right)^{\sigma/2} \sigma \Gamma \left(\frac{\sigma}{2} \right)} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\sigma \text{Gi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) - \mu \text{Hi} \left(\frac{r_\epsilon k}{r_\epsilon k^*}, a \right) \right] \quad (4.101)$$

O grande problema desta formulação é que ela não permite o aparecimento explícito de R_ℓ ; de fato, é fácil verificar que

$$R_\ell \propto \frac{1}{\sigma^2 \mu}, \quad (4.102)$$

o que sugere que talvez seja fisicamente muito mais razoável parametrizar a produção em função de S^2 , e não de S . De qualquer modo, por uma questão de completude, nós vamos agora verificar o modelo dado por (4.101). Isto é feito na figura 4.6: a inadequação do modelo é evidente, em sua incapacidade de produzir uma faixa inercial estável.

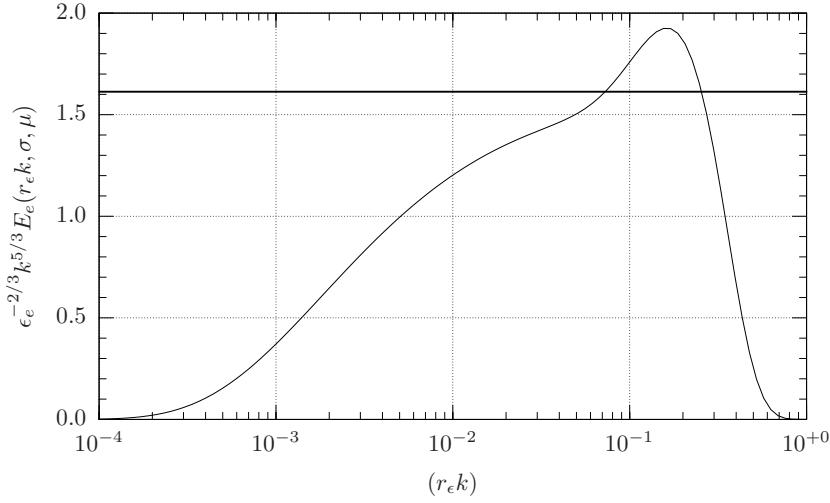


Figura 4.6: Espectro Pao-Hill com termo de produção $\mathcal{S}E_e$; $\mu = 0,25$ e $\sigma = 0,01$.

4.8 Um modelo de fechamento Pao-Hill com produção proporcional a S^2 em regime permanente

Utilizando o mesmo $g(k)$ de Hill, equação (4.52), e o termo de produção proporcional a \mathcal{S}^2 introduzido na equação (4.79), obtém-se a seguinte equação de balanço espectral de energia cinética turbulenta em regime permanente:

$$-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} E_e \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} k^{5/3} E_e \right\} + 2\nu k^2 E_e = 0. \quad (4.103)$$

Novamente, procuramos a solução primeiramente em termos do espectro compensado E_C :

$$-\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} E_C + \frac{d}{dk} \left\{ \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} E_C \right\} + 2\nu k^{1/3} E_C = 0, \quad (4.104)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}} \frac{dE_C}{dk} + \\ & \left\{ -\mathcal{S}^2 \epsilon_e^{-1/3} k^{-7/3} - \frac{2}{3} \alpha^{-1} \epsilon_e^{1/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \frac{1}{k^*} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-\frac{1}{3a}-1} + 2\nu k^{1/3} \right\} E_C = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{dE_C}{dk} + \left\{ -\mathcal{S}^2 \alpha \epsilon_e^{-2/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} k^{-7/3} \right. \\ & \left. - \frac{2}{3k^*} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \right\} E_C = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \ell^{-4/3} (k^*)^{-4/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{-7/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*} \right) \\
&+ \frac{2}{3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d\left(\frac{k}{k^*} \right) - 2\nu\alpha\epsilon_e^{-1/3} (k^*)^{4/3} \left(\frac{k}{k^*} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{k}{k^*} \right), \\
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha \left(\frac{\ell}{r_\epsilon} \right)^{-4/3} (k^* r_\epsilon)^{-4/3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{-7/3} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right) \\
&+ \frac{2}{3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{2a-1} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{2a} + 1 \right]^{-1} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right) - 2\alpha(k^* r_\epsilon)^{4/3} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} d\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right), \\
\frac{dE_C}{E_C} &= \alpha(R_\ell R_*)^{-1} x^{-7/3} (x^{2a} + 1)^{-\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \frac{2ax^{2a-1}}{x^{2a} + 1} dx - 2\alpha R_* x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx, \quad (4.105)
\end{aligned}$$

onde x e foi definido em (4.56), e

$$R_* \equiv (k^* r_\epsilon)^{4/3}. \quad (4.106)$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
\ln \frac{E_C}{E_{C0}} &= \alpha(R_\ell R_*)^{-1} \int_1^{k/k^*} x^{-7/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} dx + \frac{1}{3a} \ln \left[\left(\frac{k}{k^*} \right)^{2a} + 1 \right] \\
&\quad - 2\alpha R_* \int_0^{k/k^*} x^{1/3} (x^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} dx. \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Novamente, o limite inferior da primeira integral em (4.107) é 1, uma vez que a integral é divergente no intervalo $(0, 1]$.

Definindo-se agora a representação integral

$$\text{Fi}(x, a) \equiv \int_1^x \xi^{-7/3} (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi, \quad (4.108)$$

verifica-se facilmente os seguintes comportamentos assintóticos:

$$x \downarrow 0 \Rightarrow \text{Fi}(x) \approx \frac{3}{4} (1 - x^{-4/3}), \quad (4.109)$$

$$x \uparrow \infty \Rightarrow \text{Fi}(x) \approx \frac{3}{2} (1 - x^{-2/3}) \quad (4.110)$$

A figura 4.7 mostra que os comportamentos assintóticos em (4.109) e (4.110) são na verdade excelentes aproximações para todos os valores dos intervalos $(0, 1]$ e $[1, \infty)$, respectivamente.

O espetro de Pao-Hill com produção proporcional a S^2 será

$$E_C = E_{C0} \left[\left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \exp \left[\alpha(R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}, a \right) - 2\alpha R_* \text{Hi} \left(\frac{kr_\epsilon}{k^* r_\epsilon}, a \right) \right]. \quad (4.111)$$

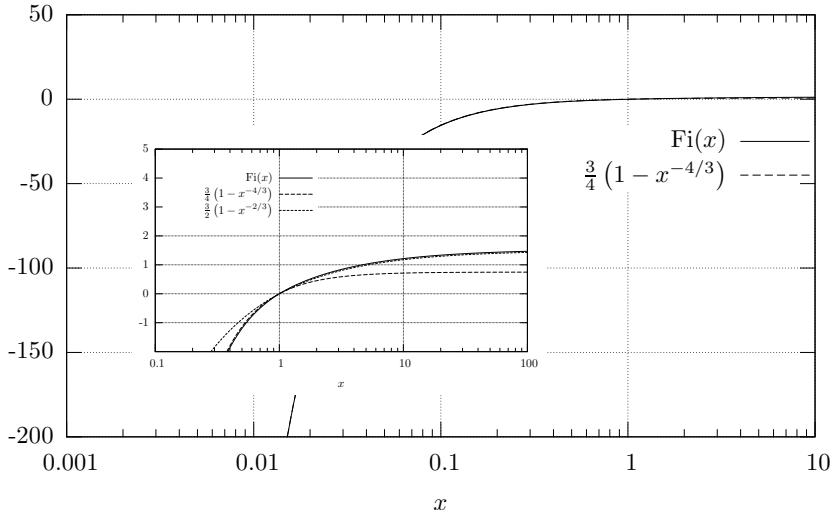


Figura 4.7: Comportamento assintótico de $\text{Fi}(x)$ quando $x \downarrow 0$ e $x \uparrow \infty$.

A integral de dissipação torna-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &= \int_0^\infty 2\nu k^2 E_e(k) dk \\
&= 2\nu R_* r_e^{-4/3} E_{C0} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha(R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2\alpha R_* \text{Hi}(x, a)] dx \\
&= \frac{2E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha(R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2\alpha R_* \text{Hi}(x, a)] \alpha R_* dx \\
&= \frac{2E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty x^{1/3} [x^{2a} + 1]^{\frac{1}{3a}} \exp [\alpha R_* ((R_\ell R_*^2)^{-1} \text{Fi}(x, a) - 2 \text{Hi}(x, a))] \alpha R_* dx. \quad (4.112)
\end{aligned}$$

A integral (4.112) pode ser aproximada da seguinte forma. Inicialmente, uso (4.110) observando que o maior peso da integral ocorre para $x > 1$; além disso, simplifico $\text{Hi}(x)$ com (4.99); então:

$$\epsilon_e \approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_0^\infty \exp \left[\alpha R_* \left((R_\ell R_*^2)^{-1} \left[\frac{3}{2}(1-x^{-2/3}) \right] - x^2 \right) \right] (2\alpha R_* x) dx; \quad (4.113)$$

Fazendo-se

$$u = \alpha R_* x^2, \quad (4.114)$$

$$du = 2\alpha R_* x dx, \quad (4.115)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &\approx \frac{E_{C0}}{\alpha \epsilon_e^{-1/3}} \int_{u=0}^\infty \exp \left[\frac{3}{2} \alpha (R_\ell R_*)^{-1} \right] \exp \left[- \left(u + \frac{3(\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1}}{2u^{1/3}} \right) \right] du, \\
E_{C0} &= \frac{\alpha \epsilon_e^{2/3} \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} (R_\ell R_*)^{-1} \right]}{\text{Epi} \left[\frac{3}{2} (\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1} \right]}, \quad (4.116)
\end{aligned}$$

onde a função $\text{Epi}(x)$ é definida pela integral; seu cálculo está descrito no apêndice F.

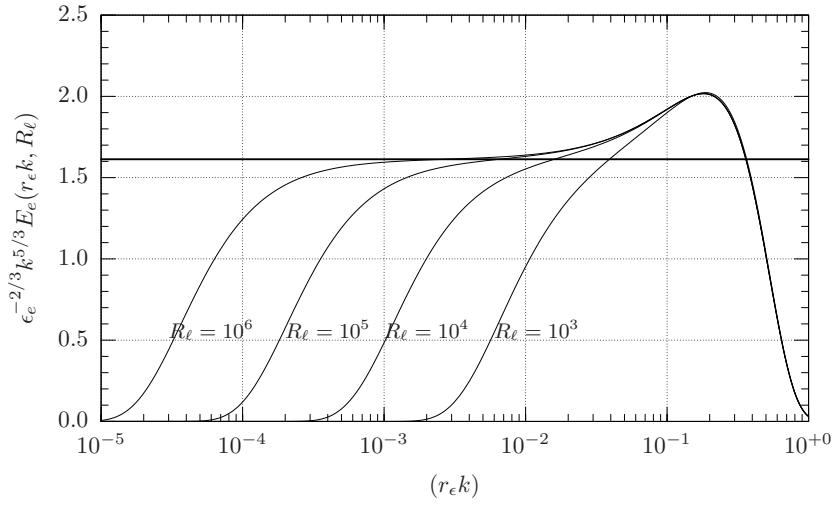


Figura 4.8: Espectro compensado tridimensional de Pao-Hill ($\alpha_e = 1,613$) com termo de produção proporcional a \mathcal{S}^2 , com $a = 0,6$ e $R_* = 0,1$, para $R_\ell = 10^3$, $R_\ell = 10^4$, $R_\ell = 10^5$ e $R_\ell = 10^6$.

O espectro compensado tri-dimensional de energia cinética turbulenta será

$$\begin{aligned} \epsilon_e^{-2/3} k^{5/3} E_e(r_\epsilon k) &= \frac{\alpha \exp\left[-\frac{3\alpha}{2} (R_\ell R_*)^{-1}\right]}{\text{Epi}\left[\frac{3}{2} (\alpha R_*)^{4/3} (R_\ell R_*^2)^{-1}\right]} \left[\left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}} \right)^{2a} + 1 \right]^{\frac{1}{3a}} \\ &\quad \exp\left[\alpha(R_\ell R_*)^{-1} \text{Fi}\left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}}, a\right) - 2\alpha R_* \text{Hi}\left(\frac{r_\epsilon k}{R_*^{3/4}}, a\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Capítulo 5

O fechamento de Pao para um regime transiente

Considere agora uma tentativa de resolver a equação (4.5) completa, com o termo transiente. Entretanto, agora vamos procurar adimensionalizar a equação antes de atacá-la. Usando as microescalas de Kolmogorov (3.63)–(3.64), faça então as adimensionalizações

$$k = \nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa, \quad (5.1)$$

$$t = \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} \tau. \quad (5.2)$$

Substitua agora em (4.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial(\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)} [\alpha^{-1} (\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \Phi] + 2\nu (\nu^{-3/4} \epsilon_e^{1/4} \kappa)^2 \Phi &= 0 \\ \frac{\partial(\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \kappa} [\alpha^{-1} \kappa^{5/3} (\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi)] + 2\kappa^2 (\nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} \Phi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Observe o cuidado em não retirar ϵ_e da derivada $\partial(\cdot)/\partial\tau$, uma vez que $\epsilon_e = \epsilon_e(t)$. É simples obter uma variável dependente adimensional, multiplicando-se (5.3) por $e_0^{-3/2}$, onde e_0 é a energia cinética turbulenta *inicial* do problema (note que, da mesma maneira que ocorre com ϵ_e , não podemos multiplicar (5.3) impunemente por $e = e(t)$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \kappa} [\alpha^{-1} \kappa^{5/3} \psi] + 2\kappa^2 \psi = 0 \quad (5.4)$$

onde

$$\psi = \nu^{-1/2} \epsilon_e^{1/2} e_0^{-3/2} E \quad (5.5)$$

é o espectro adimensional de energia cinética turbulenta. Aparentemente, as 2 condições que devem ser impostas para a solução do problema são (3.37) e (3.62). Em princípio, e_0 e ϵ_{e0} são conhecidos.

5.0.1 O método das características em variáveis adimensionais

Expanda a derivada em relação a κ de (5.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \alpha^{-1} \kappa^{5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha^{-1} \psi \frac{5}{3} \kappa^{2/3} + 2\kappa^2 \psi &= 0 \\ \alpha \kappa^{-5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \frac{5}{3} \kappa^{-1} \psi + 2\alpha \kappa^{1/3} \psi &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} + \alpha \kappa^{-5/3} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= - \left[\frac{5}{3} \kappa^{-1} + 2\alpha \kappa^{1/3} \right] \psi. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Com o auxílio da fórmula da derivada total,

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = \frac{\partial\psi}{\partial\kappa} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \frac{d\tau}{d\kappa}, \quad (5.7)$$

identifique a equação característica

$$\frac{d\tau}{d\kappa} = \alpha\kappa^{-5/3} \Rightarrow \quad (5.8)$$

$$\tau = \frac{3}{2} \left[\kappa_0^{-2/3} - \kappa^{-2/3} \right], \quad (5.9)$$

$$\kappa_0 = \left[\frac{2}{3} \tau + \kappa^{-2/3} \right]^{-3/2} \approx \kappa - \tau \kappa^{5/3} + \frac{(5\tau^2)\kappa^{7/3}}{6} - \frac{(35\tau^3)\kappa^3}{54} + \dots \quad (5.10)$$

As linhas características dadas pela equação (5.10) estão mostradas na figura 5.1 para uma concentração de números de onda em redor de $\kappa_0 = 10^{-4}$. Estes números de onda são transladados ao longo de características para a direita, ou seja: para números de onda progressivamente mais altos. À medida em que isto acontece, os números de onda ganham uma “velocidade” $d\kappa/d\tau$ cada vez maior: em torno de $\kappa = 0,1$ esta velocidade é praticamente infinita, e todos os números de onda da figura que estavam ao redor de 10^{-4} em $\tau = 0$ são lançados para $\kappa = +\infty$. Como veremos a seguir, isto terá um papel importante em lançar os espectros em última instância na faixa de dissipação viscosa. Os números de onda iniciais mostrados na figura 5.1 possuem um tempo *finito* de vida: nenhum deles existe após $\tau = 1000$. Na verdade, o limite exato de existência do número de onda $\kappa_0 = 10^{-4}$ é dado por $\kappa \rightarrow \infty$ em (5.10), e é igual a $\tau = 696$.

O método das características agora consiste em resolver o problema elementar

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = - \left[\frac{5}{3} \kappa^{-1} + 2\alpha\kappa^{1/3} \right] \psi, \quad (5.11)$$

cuja solução é

$$\psi(\kappa, \tau) = \psi_0(\kappa_0) \psi_I(\kappa, \tau) \psi_D(\kappa, \tau), \quad (5.12)$$

onde $\psi_0(\kappa_0)$ é a condição inicial do problema,

$$\psi_I(\kappa_0) = \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right)^{-5/3}, \quad (5.13)$$

$$\psi_D(\kappa, \tau) = \exp \left[-\frac{3\alpha}{2} \left(\kappa^{4/3} - \kappa_0^{4/3} \right) \right] \quad (5.14)$$

e $\kappa_0 = \kappa_0(\kappa, \tau)$ é dado por (5.10).

5.1 Os efeitos de translação, transferência inercial e dissipação

Para obtermos um espectro efetivo, precisamos de uma condição inicial. Nossa primeiro teste é

$$\psi_0(\kappa_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\kappa} \exp \left[- \left(\frac{\kappa_0 - \kappa_c}{\Delta\kappa} \right)^2 \right], \quad (5.15)$$

onde $\kappa_c = 10^{-4}$, e $\Delta\kappa = 8,0 \times 10^{-6}$. Esta condição inicial é uma aproximação de uma “delta de Dirac” centrada em κ_c ; ela sugere uma situação em que inicialmente a turbulência foi gerada em torno de “grandes escalas”.

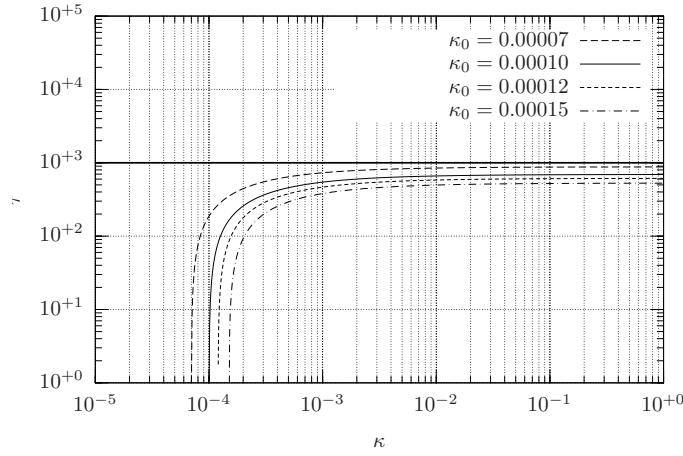


Figura 5.1: As linhas características da solução transiente

O efeito da translação da condição inicial é mostrado na figura 5.3-a, e o efeito da condição inercial transformada pela transferência inercial, ou seja: o produto $\psi_0(\kappa, t)\psi_I(\kappa, t)$, é mostrado na figura 5.3-b. Em 5.3-a, as duas últimas curvas (correspondentes a $\tau = 750$ e $\tau = 825$) não possuem máximos, sendo assintóticas a valores constantes. Isto é porque para estes valores de τ o número de onda que estava em κ_0 (a abscissa do pico em $\tau = 0$) é mapeado para infinito, ou seja: o tempo finito de existência de κ_0 , $\tau = 696$, é menor que os tempos adimensionais destas curvas. Note também que a simples translação da condição inicial ao longo das características não conserva as áreas das curvas $\psi_0(\kappa, \tau)$. Em 5.3-b, note que a transferência inercial modifica os picos da condição inicial no sentido negativo dos números de onda: os picos das curvas de 5.3-b estão todos à esquerda dos picos das curvas respectivas de 5.3-a.

O efeito da dissipação viscosa pode ser verificado plotando-se o termo correspondente em função do tempo adimensional τ (figura 5.4-a) e do número de onda adimensional κ (figura 5.4-b). A figura 5.4-a mostra que para números de onda da ordem de 0,1 ou menores, $\psi_D \approx 1$ por um longo tempo. Para $\kappa \sim 1$, ψ_D decai para um valor não-nulo entre $\tau = 0$ e $\tau = 100$. Finalmente, para $\kappa \gg 1$, ψ_D decai para zero muito rapidamente. A figura 5.4-b mostra o comportamento de ψ_D em κ para 3 valores de τ : a partir de $\tau = 0,1$, a curva não se “move” mais. Isto é coerente com a idéia de que os efeitos da dissipação viscosa se fazem sentir, em qualquer τ , em números de onda $\kappa \sim 1$, ou seja: na microescala de Kolmogorov.

Finalmente, a solução completa $\psi(\kappa, \tau)$ entre os tempos adimensionais $\tau = 0$ e $\tau = 825$ é mostrada na figura 5.5.

5.2 O cálculo de $\epsilon_e(t)$

A equação utilizada para adimensionalizar o espectro, (5.5), envolve a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta $\epsilon_e(t)$, que é uma função do tempo. É importante, portanto, ter à disposição um método que calcule $\epsilon_e(t)$ a partir da solução analítica adimensional $\psi(\kappa, \tau)$. O valor instantâneo de $\epsilon_e(t)$ é dado por (4.8); usando (5.1), (5.2) e (5.5) e substituindo na primeira

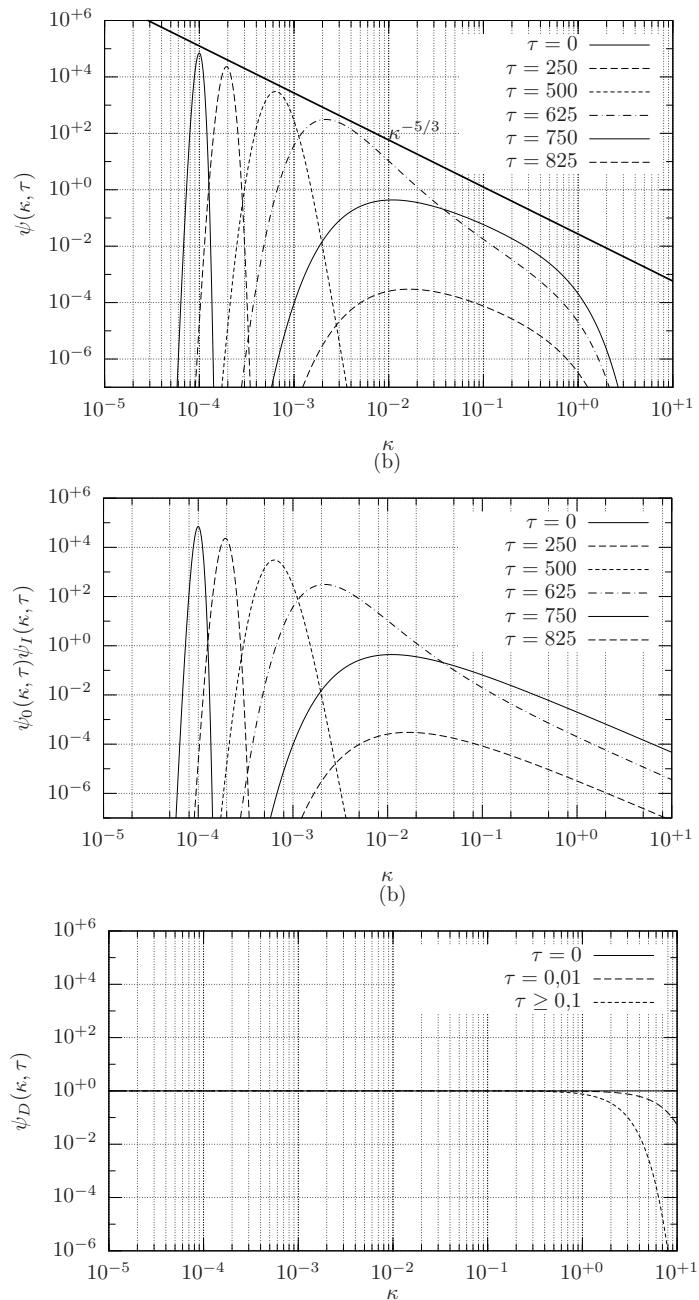


Figura 5.2: Espectro adimensional $\psi(\kappa, \tau)$ obtido pelo método das características

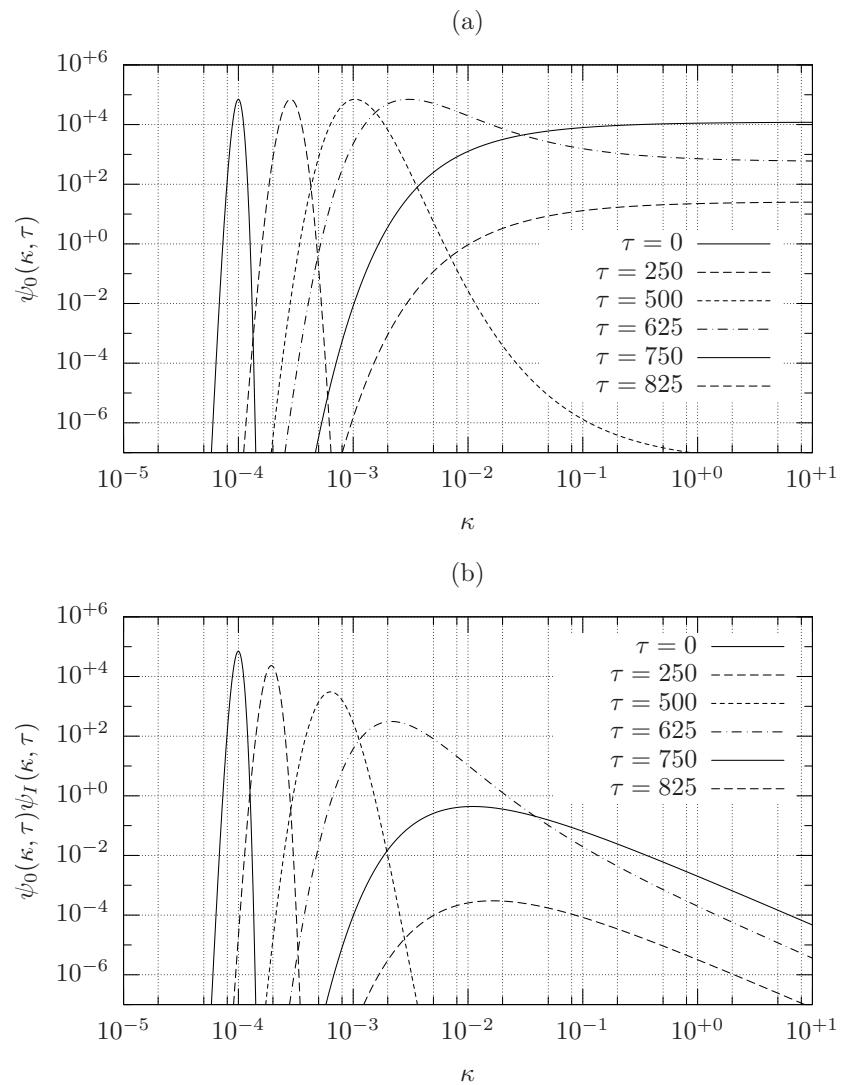


Figura 5.3: Translação da condição inicial (5.15) pelo método das características (a), e sua modificação pela transferência inercial (b)

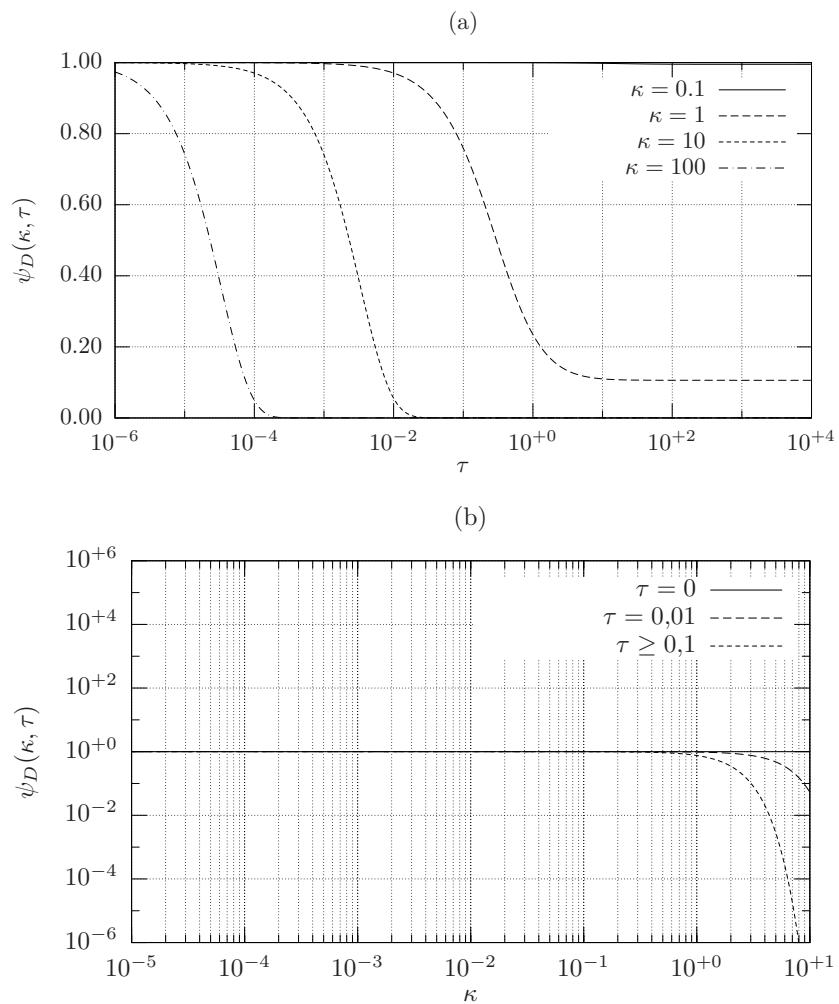


Figura 5.4: O efeito da dissipação viscosa no modelo espectral em função de τ (a) e de κ (b)

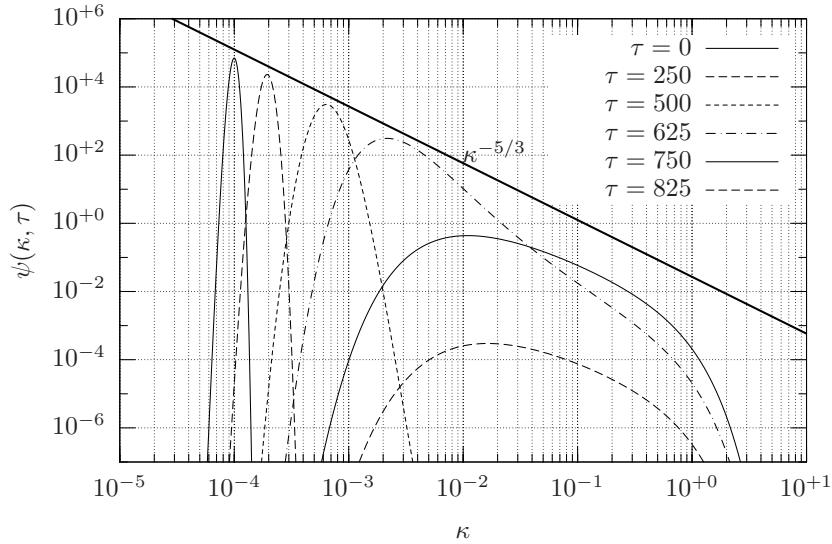


Figura 5.5: Espectro adimensional em função de κ para vários τ 's

equação,

$$\begin{aligned} \epsilon_e(t) &= 2\nu \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_e(k, t) dk \\ &= 2\nu \int_{\kappa=0}^{\infty} [\nu^{-9/4} \epsilon_e^{3/4}] [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa \Rightarrow \\ \epsilon_e(t)^{3/4} \nu^{3/4} e_0^{-3/2} &= 2 \int_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fazendo

$$G(\tau; t) \equiv \left(\frac{\nu \tau}{e_0 t} \right)^{3/2} = \epsilon_e^{3/4} \nu^{3/4} e_0^{-3/2}, \quad (5.17)$$

$$F(\tau) \equiv 2 \int_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \psi(\kappa, \tau) d\kappa, \quad (5.18)$$

o cálculo de $\epsilon_e(t)$ consiste agora em resolver numérica ou analiticamente a equação

$$G(\tau; t) = F(\tau) : \quad (5.19)$$

cada novo valor de t gera uma nova raiz τ a qual produz por sua vez $\epsilon_e(t)$ via (5.2).

A energia cinética turbulenta instantânea é dada por

$$e(t) = \int_{k=0}^{\infty} E_e(k) dk \quad (5.20)$$

$$= \int_{\kappa=0}^{\infty} [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \psi(\kappa, \tau) d\kappa \quad (5.21)$$

$$= [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] \int_{\kappa=0}^{\infty} \psi(\kappa, \tau) d\kappa \equiv [\nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2} e_0^{3/2}] E(\tau). \quad (5.22)$$

De posse da solução analítica (5.12)–(5.14) e a partir da condição inicial adimensional (5.15), as integrais $E(\tau)$ e $F(\tau)$ podem ser calculadas numericamente a partir de $\tau = 0$, com o resultado mostrado na figura 5.6.

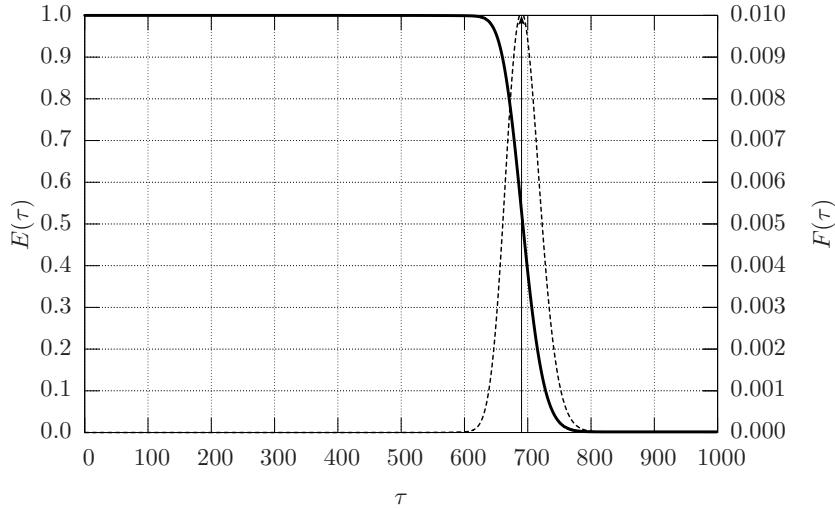


Figura 5.6: Energia cinética turbulenta adimensional $E(\tau)$ (linha grossa contínua) e sua taxa de dissipação adimensional $F(\tau)$ (linha tracejada) em função do tempo adimensional τ . A linha vertical contínua em $\tau \approx 690.2$ indica o máximo de $F(\tau)$ que coincide com o ponto de inflexão de $E(\tau)$.

Agora, valores numéricos precisam ser obtidos. As equações ajustadas por Kang et al. (2003) para $e(t)$ e $\epsilon_e(t)$ em um túnel de vento são

$$e(t) = AU^2 \left(\frac{M}{Ut} \right)^n, \quad (5.23)$$

$$\epsilon_e(t) = -\frac{de}{dt} = \frac{nAU^3}{M} \left(\frac{M}{Ut} \right)^{n+1}, \quad (5.24)$$

onde $U = 11,2 \text{ m s}^{-1}$, é a velocidade média no centro do túnel de vento, $M = 0,152 \text{ m}$ é o tamanho da grade ativa utilizada, $A = 1,8$ e $n = 1,25$. O problema com estas equações é que elas prevêem valores infinitos para $e_0 = e(0)$ e para $\epsilon_{e0} = \epsilon_e(0)$. Os gráficos correspondentes em função do tempo são mostrados na figura 5.7

Tente separação de variáveis, na forma

$$E(k, t) = T(t)K(k) : \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial TK}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} TK] + 2\nu k^2 TK &= 0 \\ K \frac{dT}{dt} + T \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 KT &= 0 \\ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = - \left\{ \frac{1}{K} \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 \right\} &= -\lambda \end{aligned} \quad (5.26)$$

A solução em T não poderia ser mais simples:

$$T = e^{-\lambda t} \quad (5.27)$$

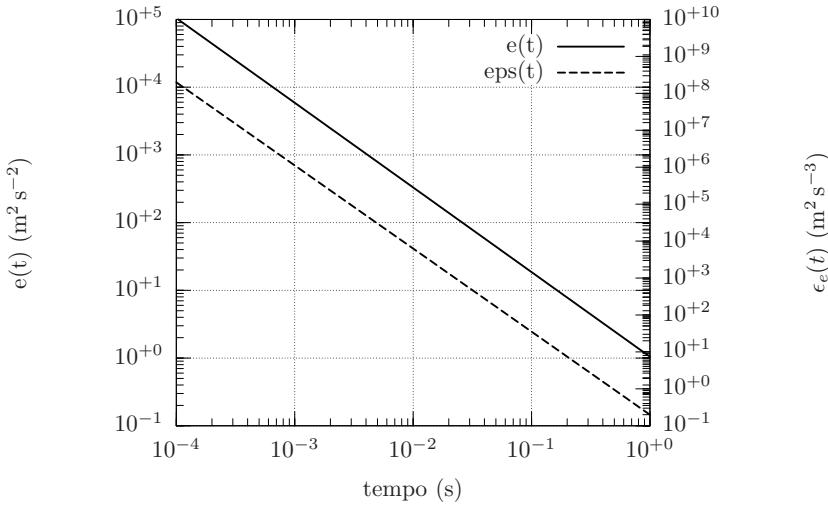


Figura 5.7: evolução temporal da energia cinética turbulenta e da sua taxa de dissipação

e certamente pode ser associada com medições de decaimento de turbulência homogênea (e isotrópica?) em túneis de vento. Agora:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dk} [\alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} K] + 2\nu k^2 K - \lambda K &= 0, \\
 \alpha^{-1} k^{5/3} \epsilon_e^{1/3} \frac{dK}{dk} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} k^{2/3} \epsilon_e^{1/3} K + 2\nu k^2 K - \lambda K &= 0, \\
 \frac{dK}{dk} + \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} - \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} \right] K &= 0, \\
 \frac{dK}{K} = - \left[\frac{5}{3} k^{-1} + 2\nu \alpha \epsilon_e^{-1/3} k^{1/3} - \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-5/3} \right] dk, \\
 \ln \frac{K}{K_0} = \left[k^{-5/3} - \frac{3}{2} \alpha \nu \epsilon_e^{-1/3} k^{4/3} - \frac{3}{2} \alpha \lambda \epsilon_e^{-1/3} k^{-2/3} \right], \\
 K = K_0 k^{-5/3} \exp \left[-\frac{3}{2} \alpha \epsilon_e^{-1/3} (\nu k^{4/3} + \lambda k^{-2/3}) \right]. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Capítulo 6

Um escoamento com cisalhamento médio unidirecional

6.1 Equações espectrais para cisalhamento médio unidirecional

Vamos então agora fazer as simplificações necessárias para resolver o caso linear (sem convoluções e consequentemente sem espectros do tipo $\Phi_{ij,k}$) de um cisalhamento simples do tipo $d\langle U_1 \rangle / dx_3 = \text{constante}$. Seja

$$\frac{d\langle U_1 \rangle}{dx_3}$$

o único gradiente de velocidade média não-nulo no escoamento; então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_i k_1}{k^2} \Phi_{3,j} + \frac{k_j k_1}{k^2} \Phi_{i,3} \right) - (\delta_{i1} \Phi_{3,j} + \delta_{j1} \Phi_{i,3}) \right] \\ + i k_n [\Delta_{jm} \Phi_{i,nm} - \Delta_{im} \Phi_{nm,j}] + 2\nu k^2 \Phi_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

É conveniente escrever explicitamente as equações para componente de $\Phi_{i,j}$. Para tanto, considere um escoamento turbulento em que não haja os fluxos de *momentum* $\langle u_2 u_3 \rangle$ e $\langle u_1 u_2 \rangle$;

as componentes do tensor espectral que sobrevivem são

$$\frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - (\Phi_{3,1} + \Phi_{1,3}) \right] - i k_n [\Delta_{1m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,1}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - \Phi_{3,2} \right] - i k_n [\Delta_{2m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,2}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{1,3} \right) - \Phi_{3,3} \right] - i k_n [\Delta_{3m} \Phi_{1,nm} - \Delta_{1m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{1,3}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) - \Phi_{2,3} \right] - i k_n [\Delta_{1m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,1}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) \right] - i k_n [\Delta_{2m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,2}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{2,3} \right) \right] - i k_n [\Delta_{3m} \Phi_{2,nm} - \Delta_{2m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{2,3}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,1} + \frac{k_1 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) - \Phi_{3,3} \right] - i k_n [\Delta_{1m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,1}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,1}, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,2}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,2} + \frac{k_2 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) \right] - i k_n [\Delta_{2m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,2}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,2}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial t} = \frac{\partial \langle U_1 \rangle}{\partial x_3} \left[k_1 \frac{\partial \Phi_{3,3}}{\partial k_3} + 2 \left(\frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} + \frac{k_3 k_1}{k^2} \Phi_{3,3} \right) \right] - i k_n [\Delta_{3m} \Phi_{3,nm} - \Delta_{3m} \Phi_{nm,3}] - 2\nu k^2 \Phi_{3,3}. \quad (6.10)$$

6.2 Solução de equações de 1^aordem no espaço com o método das características

6.2.1 Um exemplo inicial

Considere a equação linear de coeficientes não-constantes

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{z}{T} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{x}{LT} \phi = 0. \quad (6.11)$$

Para resolvê-la, faça

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{T} \Rightarrow x = \xi + \frac{zt}{T}, \quad (6.12)$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{x}{LT}\phi \\ &= -\frac{\xi + zt/T}{LT}\phi.\end{aligned}\tag{6.13}$$

A interpretação cinemática de (6.13) é a taxa de variação de ϕ ao longo da trajetória da partícula que se move a partir de $x = \xi$ em $t = 0$ com velocidade $dx/dt = z/T$. Conseqüentemente, ξ é constante em (6.13), e a integração ao longo da característica é elementar: z é um parâmetro (uma constante), e

$$\begin{aligned}\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\psi}{\psi} &= \int_{\tau=0}^t -\frac{\xi + z\tau/T}{LT} d\tau, \\ \phi(\xi, z, t) &= \phi_0(\xi, z) \exp\left[-\frac{t^2 z + 2Tt\xi}{2LT^2}\right], \\ \phi(x, z, t) &= \phi_0(x - zt/T) \exp\left[-\frac{t^2 z + 2Tt(x - zt/T)}{2LT^2}\right].\end{aligned}\tag{6.14}$$

6.2.2 A solução de $\Phi_{3,3}$

Escrita de maneira mais fácil a ser resolvida pelo método das características (vide exemplo acima), a equação (6.10) pode ser manipulada da seguinte forma: inicialmente, define-se a característica de uma “partícula” que está em K_3 em $t = 0$ e em k_3 em t (naturalmente, como estamos no espaço de números de onda, esta é uma partícula altamente abstrata — na verdade, trata-se de um “pacote” de onda cuja freqüência vai mudando ao longo do tempo)

$$\frac{dt}{dk_3} = -\frac{1}{ak_1} \Rightarrow K_3 = k_3 + ak_1 t.\tag{6.15}$$

A equação (6.10) pode então ser manipulada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial k_3} &= \left[\frac{4ak_1k_3}{k^2} - 2\nu k^2\right] \Phi_{3,3}, \\ \frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial\Phi_{3,3}}{\partial t} &= -\frac{1}{ak_1} \left[\frac{4ak_1k_3}{k^2} - 2\nu k^2\right] \Phi_{3,3}.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Neste ponto, note que a maneira mais fácil de prosseguir com a álgebra é considerar a derivada total em relação a k_3 , e *não* em relação a t (o que seria mais “natural”, pois coincidiria com a derivada material de mecânica dos fluidos):

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_{3,3}}{dk_3} &= \left[-\frac{4k_3}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} + \frac{2\nu}{ak_1} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)\right] \Phi_{3,3}, \\ \int_{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)}^{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)} \frac{d\Psi}{\Psi} &= \int_{K_3}^{k_3} \left[-\frac{4u}{k_1^2 + k_2^2 + u^2} + \frac{2\nu}{ak_1} (k_1^2 + k_2^2 + u^2)\right] du \\ \ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)} &= -\left[2 \ln(k_1^2 + k_2^2 + u^2)\right]_{K_3}^{k_3} + \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left((k_1^2 + k_2^2)u + \frac{u^3}{3}\right)\right]_{K_3}^{k_3} \\ \Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) &= \Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0) \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp\left\{\left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 u + \frac{u^3}{3}\right)\right]_{K_3}^{k_3}\right\} \blacksquare\end{aligned}\tag{6.17}$$

A forma de (6.17) é particularmente útil para manipulações algébricas futuras, em que ela será parte do termo forçante das equações de evolução de outros $\Phi_{i,j}$'s, como por exemplo $\Phi_{1,3}$ (vide (6.4)); também para simplificar manipulações algébricas futuras nós fizemos

$$b^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \quad (6.18)$$

Deissler propõe como condição inicial para $\Phi_{3,3}$:

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, 0) = \Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0) = A(k^2 - k_3 k_3) = A(k_1^2 + k_2^2) = Ab^2. \quad (6.19)$$

A introdução da condição inicial (6.19) diretamente em (6.17) produz

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp \left\{ \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \right\}. \quad (6.20)$$

Calculando agora a integral definida (6.17),

$$\ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, K_3, 0)} = \ln \left(\frac{(k_1^2 + k_2^2 + K_3^2)^2}{k^4} \right) - \frac{2\nu(K_3 - k_3)(K_3^2 + k_3 K_3 + 3(k_1^2 + k_2^2))}{3ak_1}. \quad (6.21)$$

Como o objetivo da aplicação do método é encontrar a solução geral da equação diferencial (6.16), nós agora utilizamos (6.15) e eliminamos K_3 de (6.21), obtendo

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t)}{\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1 t, 0)} &= \ln \left(\frac{(a^2 k_1^2 t^2 + 2ak_1 k_3 t + k^2)^2}{k^4} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} a^2 k_1^2 \nu t^3 - 2ak_1 k_3 \nu t^2 - 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \nu t \Rightarrow \\ \Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) &= \Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1 t, 0) \frac{(k_1^2 + k_2^2 + (k_3 + ak_1 t)^2)^2}{k^4} \times \\ &\quad \exp [-(2/3)a^2 k_1^2 \nu t^3 - 2ak_1 k_3 \nu t^2 - 2k^2 \nu t] \end{aligned} \quad (6.22)$$

Esta é a *mesma* solução dada pela equação (5-331) do livro de Deissler (1998), que é da forma (na notação deste trabalho, que usa um gradiente na direção x_3 , e não na de Deissler, que usa um gradiente na direção x_2)

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = \frac{f(k_1, k_2, k_3 + ak_1 t)}{k^4} \times \exp [-(2/3)a^2 k_1^2 \nu t^3 - 2ak_1 k_3 \nu t^2 - 2k^2 \nu t]; \quad (6.23)$$

note que $f(\cdot)$ em (6.23) equivale a $\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3 + ak_1 t, 0)[a^2 k_1^2 t^2 + 2ak_1 k_3 t + k^2]^2$ em (6.22). A introdução da condição inicial (6.19) produz

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = A(k_1^2 + k_2^2) \frac{(a^2 k_1^2 t^2 + 2ak_1 k_3 t + k^2)^2}{k^4} \exp [-(2/3)a^2 k_1^2 \nu t^3 - 2ak_1 k_3 \nu t^2 - 2k^2 \nu t]. \quad (6.24)$$

Esta é, essencialmente, a mesma equação (5-334) de Deissler (1998), com A no papel da constante $J_0/(12\pi^2)$ de Deissler. Aqui cabe notar que usar (6.19) como condição inicial para o espectro direcional $\Phi_{3,3}$ pode ser questionado com base no fato de que

$$R_{3,3}(\mathbf{0}, 0) = \langle u_3 u_3 \rangle = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{3,3}(\mathbf{k}, 0) d^3 \mathbf{k} = \infty! \quad (6.25)$$

Além disto, tudo parece indicar que a solução (6.24) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, o que parece contradizer a idéia de equilíbrio entre a produção e a dissipação. Isto é uma observação bem interessante: se for verdade, isto significa que, neste modelo, a dissipação age *diretamente* sobre

os números de onda correspondentes à produção, e também que há algo de não-físico na remoção dos termos de transferência inercial.

A introdução da condição inicial (6.19) diretamente em (6.17) produz um resultado algebricamente mais simples, e também mais fácil de ser manipulado:

$$\Phi_{3,3}(k_1, k_2, k_3, t) = Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} \exp \left\{ \left[\frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 u + \frac{u^3}{3} \right) \right]_{K_3}^{k_3} \right\}. \quad (6.26)$$

6.2.3 A solução de $\Phi_{1,3}$

Considere agora a equação (6.4) para $\Phi_{1,3}$ na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} &= \left[\frac{2ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{1,3} + a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{3,3}, \\ \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial \Phi_{1,3}}{\partial t} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \right] \Phi_{1,3} - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] \Phi_{3,3}, \\ \frac{d\Phi_{1,3}}{dk_3} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \right] \Phi_{1,3} - \left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1} \right] \Phi_{3,3}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Embora monstruosa, esta é, no frigir dos ovos, apenas uma equação diferencial linear ordinária de ordem 1 não-homogênea. Uma maneira que parece bastante frutífera de atacar esta monstruosidade é usar o método de variação de constantes. Considere em geral o problema de resolver

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial \phi}{\partial t} + c(k_3)\phi &= f(k_3), \\ \frac{dt}{dk_3} &= -\frac{1}{ak_1} \Rightarrow k_3 = K_3 - ak_1 t, \\ \frac{d\phi}{dk_3} + a(k_3)\phi &= f(k_3), \end{aligned} \quad (6.28)$$

com condição inicial

$$\phi(K_3) = \phi_0. \quad (6.29)$$

Neste problema, é a dependência do termo forçante $f(k_3)$ de k_3 somente que condiciona a escolha de k_3 como a variável de integração no método das características.

A equação (6.28) pode ser resolvida da seguinte forma: considere a equação homogênea associada,

$$\frac{dh}{dx} + c(k_3)h = 0. \quad (6.30)$$

Ele pode ser facilmente resolvido. Considere uma solução *livre* do problema homogêneo, isto é: suponha que $h(x)$ resolve (6.30), mas não necessariamente a condição inicial (6.29) do problema (note que basta que este h seja uma função de k_3). Tente agora uma solução de (6.28) na forma

$$\phi = g(k_3)h(k_3)$$

onde $g(k_3)$ é uma função a determinar. Esta função deverá ser tal que ϕ atenda à condição inicial (6.29). Substituindo em (6.28),

$$\begin{aligned} \frac{d(gh)}{dk_3} &= c(k_3)gh = f(k_3), \\ g\frac{dh}{dk_3} + gc(k_3)h + h\frac{dg}{dk_3} &= f(k_3), \\ g\left[\frac{dh}{dk_3} + c(k_3)h\right] + h\frac{dg}{dk_3} &= f(k_3), \\ \frac{dg}{dk_3} &= \frac{f(k_3)}{h(k_3)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Vamos olhar cuidadosamente para a condição inicial:

$$g(K_3)h(K_3) = \phi_0 \Rightarrow g(K_3) = \frac{\phi_0}{h(K_3)}, \quad (6.32)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{g(K_3)}^{g(k_3)} &= \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du, \\ g(k_3) - \frac{\phi_0}{h(K_3)} &= \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du, \end{aligned} \quad (6.33)$$

onde

$$\phi(k_3) = h(k_3)g(k_3) = h(k_3) \left[\frac{\phi_0}{h(K_3)} + \int_{K_3}^{k_3} \frac{f(u)}{h(u)} du \right]. \quad (6.34)$$

Observe como (6.34) atende por construção à condição inicial (6.29).

De volta agora à solução de (6.27): a equação homogênea associada é

$$\frac{dh}{dk_3} = - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu k^2}{ak_1} \right] h, \quad (6.35)$$

a qual é bastante fácil de ser obtida, *desde que não se tente colocar o lado direito acima sobre um denominador comum*:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= - \left[\frac{2k_3}{k^2} - \frac{2\nu k^2}{ak_1} \right] dk_3, \\ \ln h &= - \ln k^2 + \frac{2\nu}{ak_1} \left[(k_1^2 + k_2^2)k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right], \\ h &= \frac{1}{k^2} \exp \left\{ \frac{2\nu}{ak_1} \left[b^2 k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Note como não há necessidade de nos preocuparmos com a condição inicial em (6.36). Note também que o argumento de $\exp\{\cdot\}$ também aparece na solução para $\Phi_{3,3}$ na forma (6.26). Para simplificar um pouco a álgebra e poupar espaço na página, é conveniente fazer

$$F(u) \equiv \frac{2\nu}{ak_1} \left[b^2 u + \frac{u^3}{3} \right]. \quad (6.37)$$

A solução para $\Phi_{1,3}(k_1, k_2, k_3, t)$ agora envolve, basicamente, a aplicação de (6.34); para isto, precisamos de

$$\Phi_{1,3}(k_1, k_2, K_3, 0) = A((b^2 + K_3^2)\delta_{1,3} - k_1 K_3) = -Ak_1 K_3. \quad (6.38)$$

O termo forçante (não-homogêneo) de (6.27) é

$$\begin{aligned} f(k_1, k_2, k_3, t) &= -\left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1}\right] \Phi_{3,3} \\ &= -\left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1}\right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} [e^{F(k_3) - F(K_3)}] \end{aligned} \quad (6.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{f}{h} &= -\left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1}\right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^4} [e^{F(k_3) - F(K_3)}] k^2 e^{-F(k_3)} \\ &= -\left[\frac{2k_1}{k^2} - \frac{1}{k_1}\right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{-F(K_3)} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Aplicando então (6.34):

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3} &= \frac{1}{k^2} e^{F(k_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 (b^2 + K_3^2) e^{-F(K_3)} - \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{1}{k_1} \right] Ab^2 \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{(b^2 + u^2)} e^{-F(K_3)} du \right\} \\ &= \frac{(b^2 + K_3^2)}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 - Ab^2 (b^2 + K_3^2) \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{1}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} du \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

As integrais envolvidas não são difíceis:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{2k_1}{(b^2 + u^2)^2} - \frac{1}{k_1(b^2 + u^2)} \right) du &= \frac{2k_1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{2k_1}{2b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} - \frac{1}{k_1 b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \\ &= \left(\frac{-k_2^2}{k_1 b^3} \right) \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_1}{b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} \blacksquare \end{aligned} \quad (6.42)$$

Levando agora (6.42) em (6.41),

$$\begin{aligned} \Phi_{1,3} &= \frac{(b^2 + K_3^2)}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ -Ak_1 K_3 - Ab^2 (b^2 + K_3^2) \left[\left(\frac{-k_2^2}{k_1 b^3} \right) \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_1}{b^2} \frac{u}{(u^2 + b^2)} \right]_{K_3}^{k_3} \right\} \\ &= A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ \frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{k_3}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} &= A \frac{(b^2 + (k_3 + ak_1 t)^2)^2}{k^2} \exp \left[-2\nu t (k^2 + ak_1 k_3 t + \frac{1}{3} a^2 k_1^2 t^2) \right] \times \\ &\quad \left\{ \frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{k_3}{b} - \operatorname{arctg} \frac{(k_3 + ak_1 t)}{b} \right) - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right\} \blacksquare \end{aligned} \quad (6.44)$$

6.2.4 A solução de $\Phi_{3,1}$

A equação diferencial (6.8) para $\Phi_{3,1}$ é

$$\frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial \Phi_{3,1}}{\partial k_3} = \left[\frac{2ak_1 k_3}{k^2} - 2\nu k^2 \right] \Phi_{3,1} + a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{3,3}. \quad (6.45)$$

Note que ela é idêntica a (6.27). A condição inicial proposta por Deissler,

$$\Phi_{3,1}(k_1, k_2, k_3, 0) = -Ak_1 k_3, \quad (6.46)$$

também é igual; portanto,

$$\Phi_{3,1} = \Phi_{1,3} \blacksquare \quad (6.47)$$

6.2.5 A solução de $\Phi_{1,1}$

A equação diferencial (6.2), juntamente com a condição de simetria (6.47), produz

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial t} - ak_1 \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial k_3} &= -2\nu k^2 \Phi_{1,1} + 2a \left[\frac{2k_1^2}{k^2} - 1 \right] \Phi_{1,3} \\ \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial k_3} - \frac{1}{ak_1} \frac{\partial \Phi_{1,1}}{\partial t} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \Phi_{1,1} - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3} \\ \frac{d\Phi_{1,1}}{dk_3} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 \Phi_{1,1} - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3}\end{aligned}\quad (6.48)$$

Da mesma maneira que antes, vamos procurar a solução com o método de variação de constantes. A equação homogênea associada de (6.48) é

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dk_3} &= \frac{2\nu}{ak_1} k^2 h \\ \frac{dh}{h} &= \frac{2\nu}{ak_1} (b^2 + k_3^2) dk_3 \\ \ln h &= \frac{2\nu}{ak_1} \left(b^2 k_3 + \frac{k_3^3}{3} \right) \\ h &= e^{F(k_3)} \blacksquare\end{aligned}\quad (6.49)$$

O termo forçante (não-homogêneo) de (6.48) é

$$\begin{aligned}f &= - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] \Phi_{1,3} \\ &= - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{F(k_3) - F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \Big|_{K_3}^{k_3} - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right]\end{aligned}\quad (6.50)$$

onde

$$\frac{f}{h} = - \left[\frac{4k_1}{k^2} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{k^2} e^{-F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \Big|_{K_3}^{k_3} - \frac{k_1 k_3}{k^2} \right]\quad (6.51)$$

A condição inicial do problema é

$$\Phi_{1,1}(k_1, k_2, K_3, 0) = A((k_1^2 + k_2^2 + K_3^2) - k_1^2) = A(k_2^2 + K_3^2)\quad (6.52)$$

Aplicando (6.34),

$$\begin{aligned}\Phi_{1,1} &= e^{F(k_3)} \left\{ A(k_2^2 + K_3^2) e^{-F(K_3)} - \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] A \frac{(b^2 + K_3^2)^2}{(b^2 + u^2)} e^{-F(K_3)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\} \\ &= A e^{F(k_3) - F(K_3)} \left\{ (k_2^2 + K_3^2) - (b^2 + K_3^2)^2 \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\} \\ &= A e^{F(k_3) - F(K_3)} (b^2 + K_3^2)^2 \left\{ \frac{(k_2^2 + K_3^2)}{(b^2 + K_3^2)^2} + \int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du \right\}\end{aligned}\quad (6.53)$$

Há 6 integrais para serem calculadas em (6.53), já com seus respectivos sinais, *incluindo o sinal de menos na frente do símbolo de integral*:

$$-\frac{4k_2^2}{b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)^2} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} du = \frac{k_2^2}{b^4(b^2 + u^2)} \left[(b^2 + u^2) \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} + 2bu \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + b^2 \right] \\ = -\left(\frac{k_2^2}{b^4} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{k_2^2}{b^2(b^2 + u^2)} \right), \quad (6.54)$$

$$+\frac{4k_2^2}{b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \int \frac{du}{(b^2 + u^2)^2} du = \frac{4k_2^2}{b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \left[\frac{1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{u}{2b^2(b^2 + u^2)} \right] \\ = \frac{2k_2^2}{b^4} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \frac{u}{(b^2 + u^2)}, \quad (6.55)$$

$$+2k_1^2 \int \frac{2u}{(b^2 + u^2)^3} du = -\frac{k_1^2}{(b^2 + u^2)^2}, \quad (6.56)$$

$$+\frac{2k_2^2}{k_1^2 b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} du = \frac{k_2^2}{k_1^2 b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b}, \quad (6.57)$$

$$-\frac{2k_2^2}{k_1^2 b} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \int \frac{1}{(b^2 + u^2)} du = -\frac{2k_2^2}{k_1^2 b^2} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \quad (6.58)$$

$$-\int \frac{2u}{(b^2 + u^2)^2} du = \frac{1}{(b^2 + u^2)}. \quad (6.59)$$

Coletamos agora os termos comuns das equações acima e seus coeficientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} : & \quad -\frac{k_2^2}{b^4} + \frac{k_2^2}{k_1^2 b^2} = \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2}; \\ \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} : & \quad \frac{2k_2^2}{b^4} - \frac{2k_2^2}{k_1^2 b^2} = -\frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2}; \\ \operatorname{arctg} \frac{u}{b} : & \quad -\frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)}; \\ \frac{u}{b^2 + u^2} : & \quad \frac{2k_2^2}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b}; \\ \frac{1}{b^2 + u^2} : & \quad -\frac{k_2^2}{b^2} + 1 = \frac{k_1^2}{b^2}; \\ \frac{1}{(b^2 + u^2)^2} : & \quad -k_1^2. \end{aligned}$$

A reunião dos termos envolvendo arctg e arctg^2 produz

$$\frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} - \frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)} \operatorname{arctg} \frac{u}{b}. \quad (6.60)$$

A reunião dos 3 últimos termos produz a expressão *relativamente simples*:

$$\frac{u}{b^3(b^2 + u^2)^2} \left[b k_1^2 u + 2k_2^2 \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} (u^2 + b^2) \right] \quad (6.61)$$

Olhando para o último termo de (6.60) e o de (6.61), é evidente que é preferível coletá-los no fator comum $(2k_2^2 u)/(b^3(b^2 + u^2)^2)$; a integral *indefinida* em (6.53), portanto, é

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\operatorname{arctg} \frac{u}{b} - \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du = \\ \frac{k_1^2 u^2}{b^2(b^2 + u^2)^2} + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{u}{b} - \frac{2k_2^4}{b^4 k_1^2} \operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} + \frac{2k_2^2 u}{b^3(b^2 + u^2)} \left(\operatorname{arctg} \frac{K_3}{b} - \operatorname{arctg} \frac{u}{b} \right). \end{aligned} \quad (6.62)$$

A integral definida em (6.53), já utilizando $(b^2 + k_3^2) = k^2$, é

$$\int_{K_3}^{k_3} \left[\frac{4k_1}{(b^2 + u^2)} - \frac{2}{k_1} \right] \frac{1}{(b^2 + u^2)} \left[\frac{k_2^2}{k_1 b} \left(\arctg \frac{u}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right) - \frac{k_1 u}{(b^2 + u^2)} \right] du = \\ \frac{k_1^2}{b^2} \left(\frac{k_3^2}{k^4} - \frac{K_3^2}{(b^2 + K_3^2)^2} \right) - \frac{2k_2^2 k_3}{b^3 k^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right] + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right]^2 \quad (6.63)$$

A solução final para $\Phi_{1,1}$ fica

$$\Phi_{1,1} = A e^{F(k_3) - F(K_3)} (b^2 + K_3^2)^2 \left\{ \frac{(k_2^2 + K_3^2)}{(b^2 + K_3^2)^2} + \right. \\ \left. \frac{k_1^2}{b^2} \left(\frac{k_3^2}{k^4} - \frac{K_3^2}{(b^2 + K_3^2)^2} \right) - \frac{2k_2^2 k_3}{b^3 k^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right] + \frac{k_2^4}{b^4 k_1^2} \left[\arctg \frac{k_3}{b} - \arctg \frac{K_3}{b} \right]^2 \right\} \quad (6.64)$$

Esta expressão é equivalente (embora seja um pouco mais compacta) à equação (5-337) de Deissler (1998, p. 227).

Capítulo 7

Conclusões e recomendações

7.1 Conclusões

A turbulência atmosférica próximo à superfície da terra é fortemente anisotrópica, como demonstram [Shen e Warhaft \(2000\)](#), [Warhaft \(2000\)](#), e [Chamecki e Dias \(2004\)](#). Esta anisotropia é claramente verificável principalmente nas funções de estrutura de ordem 3, e se deve principalmente aos forçantes anisotrópicos de larga escala. Conforme proposto por [Claussen \(1985\)](#), e utilizado por [Moraes e Epstein \(1987\)](#), [Moraes e Goedert \(1988\)](#), [Dias e Brutsaert \(1998\)](#) e [Chamecki e Dias \(2004\)](#), estes forçantes anisotrópicos podem ser incorporados em modelos espectrais de turbulência. Nos trabalhos acima, e no capítulo 4, o termo de produção é introduzido de maneira aproximada, em função do espectro de energia cinética turbulenta $E_e(k)$, e o modelo resultante consiste em uma única equação diferencial ordinária em k . Nossa pesquisa mostrou que é possível utilizar esta abordagem para modelar um fenômeno importante, que é a “corcova” no espectro de energia cinética turbulenta. [Hill \(1978\)](#) modelou uma corcova similar no espectro de *temperatura*, a qual ele atribuiu à presença de uma faixa viscosa-convectiva (quando a viscosidade cinemática ν_u é muito maior que a difusividade molecular do calor ν_θ : $\nu_u \gg \nu_\theta$, ou uma faixa inercial-difusiva (ao contrário, quando $\nu_u \ll \nu_\theta$). Esta modelagem é fundamental para aplicações de cintilometria ótica na camada-limite atmosférica [Hill \(1991\)](#), [Hill \(1997a\)](#). Nossos resultados sugerem que o mesmo fenômeno (a “corcova” no espectro de temperatura) pode ter uma causa diferente da proposta por [Hill \(1978\)](#), e ser simplesmente o resultado da corcova equivalente em $E_e(k)$; neste caso, mesmos fluidos com $\nu_u/\nu_\theta = 1$ (número de Prandtl igual a 1) apresentariam uma corcova no espectro de temperatura.

O modelo original de [Pao \(1965\)](#) para o espectro de energia cinética turbulenta também pode ser estendido para situações *transientes*, tais como o decaimento da turbulência em um túnel de vento. Este é um resultado totalmente novo (tanto quanto seja de nosso conhecimento), obtido analiticamente por meio do método das características, e descrito no capítulo 5. Neste capítulo, por simplicidade, nós não modelamos a corcova do espectro $E_e(k)$, o que será feito na continuação desta pesquisa. A modelagem de fenômenos transientes na camada-limite atmosférica pode se beneficiar muito da abordagem proposta neste capítulo, para uma melhor compreensão da transição de condições instáveis para condições estáveis que ocorre com o pôr-do-sol, e também para a compreensão da camada residual acima da camada-limite estável noturna. A camada residual pode ser extremamente importante em episódios de poluição atmosférica noturna (quando os poluentes desta camada podem retornar à superfície por acoplamento dinâmico com a camada-limite estável ([Fochesatto et al., 2001](#)))

Finalmente, o capítulo 6 mostrou como é possível modelar explicitamente a anisotropia das grandes escalas da turbulência. Esta modelagem tem sido até hoje totalmente linear, baseada na teoria de distorção rápida de [Batchelor e Proudman \(1954\)](#). Esta teoria tem sido aplicada com sucesso, por exemplo, por [Deissler \(1961\)](#) para estudar o efeito do cisalhamento sobre

o espectro de energia cinética turbulenta; [Deissler \(1962\)](#) para analisar o efeito estabilizador de um gradiente estável de temperatura sobre a turbulência; [Hanazaki e Hunt \(1996\)](#) para analisar também espectros de energia cinética turbulenta na presença de gradientes estáveis de temperatura, e [Fernando e Hunt \(1997\)](#) para analisar o efeito de interfaces de fluidos com diferentes densidades sobre a turbulência. Uma revisão abrangente, embora não muito recente, pode ser encontrada em [Hunt e Carruthers \(1990\)](#). Embora nossa pesquisa não tenha gerado (até o momento) novos resultados baseados na teoria de distorção rápida, o resultado conjunto dos capítulos 4, 5 e 6 abre caminho para uma teoria *não-linear* de distorção, que poderá permitir incorporar simultaneamente os efeitos das grandes escalas e a cascata de energia de Kolmogorov (e a formação da faixa inercial, chegando até à corcova do espectro de energia cinética turbulenta e toda a faixa de dissipação) em um único modelo espectral.

Isto é fundamental para a dedução de modelos de difusão turbulenta de poluentes solidamente baseados tanto nas características do espectro quanto na teoria de similaridade de Monin-Obukhov [Moraes e Goedert \(1988\)](#).

7.2 Recomendações

Os modelos de corcova do capítulo 4 são muito difíceis de calibrar, uma vez que eles são gerados para $E_e(k)$, mas são verificados contra espectros unidimensionais $F_{11}(k_1)$, obtidos por meio da integral (3.40). A integral, que precisa ser calculada numericamente, torna qualquer método de calibração automática muito lento. Conseqüentemente, é importante avançar na obtenção de aproximações analíticas para $F_{11}(k_1)$ que permitam calibrações mais precisas da corcova do que as que conseguimos obter.

A corcova situa-se na fronteira entre a faixa inercial e a faixa de dissipação, e pode ter uma importância grande no cálculo da taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ_e . Por exemplo, o modelo de 7 parâmetros proposto por [Kang et al. \(2003\)](#) não é capaz de reproduzir os valores medidos de ϵ_e , e um modelo alternativo proposto por [Lamorgese et al. \(2005\)](#) também não foi capaz de reproduzir aspectos importantes do espectro de energia cinética turbulenta. Portanto, um passo lógico é a introdução de um modelo de corcova na modelagem do decaimento de turbulência isotrópica em um túnel de vento desenvolvida no capítulo 5.

Finalmente, a modelagem da anisotropia das grandes escalas deve ser incorporada à modelagem da faixa inercial e da corcova por meio de uma nova teoria não-linear de distorção rápida, conforme esboçado no capítulo 6. Este é um esforço considerável porque envolve a modelagem do tensor espectral $\Phi_{i,j}$ e novos termos de fechamento para $\Phi_{i,j,k}$. Esta alternativa, entretanto, promete uma nova abordagem para a formulação da difusividade turbulenta de escalares na atmosfera firmemente baseada na dinâmica da turbulência.

Apêndice A

Motivação para a formulação de modelos de transferência

Suponha que $\hat{f}(k)$ seja uma função definida em $(-\infty, +\infty)$, e que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0; \quad (\text{A.1})$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{f}}{dk} dk = 0. \quad (\text{A.2})$$

A idéia óbvia dos modelos de fechamento simples de transferência inercial, portanto, é escrever

$$\mathcal{T}(k) = \frac{d\hat{f}}{dk}. \quad (\text{A.3})$$

Para o caso tridimensional, o uso de transformada de Fourier ajuda um pouco. Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_l f(\mathbf{x})] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} x_l f(\mathbf{x}) e^{-i k_m x_m} d^3 \mathbf{x}, \\ &= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_l} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} f(x) [-i x_l e^{-i k_m x_m}] d^3 \mathbf{x} \\ &= i \frac{\partial}{\partial k_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} f(x) e^{-i k_m x_m} d^3 \mathbf{x} \\ &= i \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_l}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Segue-se imediatamente que:

$$\mathcal{F}\left[x_l \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] = -\frac{\partial}{\partial k_l}(k_n \hat{f}) \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_l} d^3 \mathbf{k} = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial(k_n \hat{f})}{\partial k_l} d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Uma aproximação para $zK_1(z)$

A derivada logarítmica da função gama, ou função Digamma, ou função Psi, é (para argumentos inteiros)

$$\psi(1) = -\gamma, \quad (\text{B.1})$$

$$\psi(k+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\gamma = 0,57721566\dots$ é a constante de Euler. [Lebedev \(1972\)](#) dá uma fórmula geral para $K_n(z)$ (equação 5.7.11); para K_1 ela se torna

$$K_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+2) \right]. \quad (\text{B.3})$$

Segue-se que

$$zK_1(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+2}}{k!(k+1)!} \left[2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+2) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Os seguintes valores da função Digamma são relevantes para séries truncadas e $z \rightarrow 0$:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(2) = -\gamma + 1, \quad \psi(3) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, a expansão até $k = 1$ é

$$zK_1(z) \approx 1 + \left(\frac{z}{2} \right)^2 \left[2 \ln \frac{z}{2} + 2\gamma - 1 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^4 \left[2 \ln \frac{z}{2} + 2\gamma - \frac{5}{2} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

O espectro de Pope e de Kang et al.

O espectro é escrito em termos da escala integral ℓ ; para re-escrevê-lo em termos de R_ℓ e de kr_ϵ como no resto deste texto, usamos (4.66) e fazemos

$$k\ell = kr_\epsilon \frac{\ell}{r_\epsilon} = kr_\epsilon R_\ell^{3/4}. \quad (\text{C.1})$$

O espectro originalmente proposto por [Pope \(2000\)](#) é

$$E_C^P(k) = \alpha_e \left[\frac{\left(kr_\epsilon R_\ell^{3/4} \right)}{\left[\left(kr_\epsilon R_\ell^{3/4} \right)^{a_2} + a_1 \right]^{1/a_2}} \right]^{5/3+a_3} \exp[-a_4 kr_\epsilon]; \quad (\text{C.2})$$

[Kang et al. \(2003\)](#) propuseram modelar a corcova do espectro por meio da inclusão de um fator adicional:

$$E_C^K = E_C^P \times \left[1 + a_5 \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(a_6 \log_{10}(kr_\epsilon) + a_7) + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Os valores das constantes, segundo [Kang et al. \(2003\)](#), são: $a_1 = 0,39$, $a_2 = 1,2$, $a_3 = 4,0$, $a_5 = 0,522$, $a_6 = 10,0$ e $a_7 = 12,58$.

Apêndice D

A Gamma incompleta e integrais exponenciais

Dada a função Gamma,

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (\text{D.1})$$

A *gama incompleta* é definida pela representação integral

$$\gamma(x, a) \equiv \int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (\text{D.2})$$

e a gama incompleta complementar por

$$\Gamma(x, a) \equiv \int_a^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (\text{D.3})$$

$\Gamma(x, a)$ tem a vantagem de ser definida para valores negativos e positivos de x — de fato, $\Gamma(x, a)$ é uma função inteira para valores fixos de a (Lebedev, 1972, cap. 1, Exercício 10). Para $x \neq 0, -1, -2, \dots$, a gama incompleta e a gamma incompleta complementar podem ser obtidas por meio de

$$\gamma(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} a^{x+n}; \quad \Gamma(x, a) = \Gamma(x) - \gamma(x, a). \quad (\text{D.4})$$

Note que, ao contrário da integral (D.2), a série (D.4) na verdade converge mesmo quando $x < 0$, desde que $x \neq 0, -1, -2, \dots$. A função $\gamma(x, 1)$ é mostrada na figura D.1.

Quando $x = 0, -1, -2, \dots$, e para $a = 1$, (D.4) falha, mas nós podemos lançar mão das integrais exponenciais

$$E_n(x) \equiv \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt, \quad (\text{D.5})$$

definidas em Abramowitz e Stegun (1972), Eq. 5.1.4, e que possuem a expansão em série

$$E_n(x) = - \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!} + \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} [-\ln x + \psi(n)] - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!}. \quad (\text{D.6})$$

Agora, fazendo-se $z = 1$ e $n = 1 - x$, obtém-se para $x = 0, -1, -2, \dots$,

$$E_{1-x}(1) = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x, 1). \quad (\text{D.7})$$

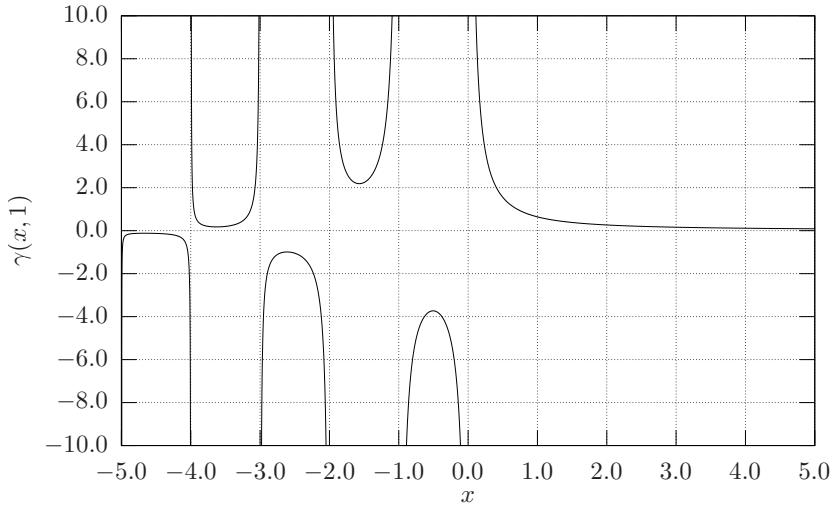


Figura D.1: A função gama incompleta $\gamma(x, 1)$

Finalmente, se $a \neq 1$ e $x = 0, -1, -2, \dots$, faça

$$\begin{aligned}
 E_{1-x}(a) &= \int_{t=1}^{\infty} \frac{e^{-at}}{t^{1-x}} dt \\
 &= \int_{t=1}^{\infty} t^{x-1} e^{-at} dt \\
 &= \int_{s=a}^{\infty} \left(\frac{s}{a}\right)^{x-1} e^{-s} \frac{ds}{a} \\
 &= \frac{1}{a^x} \int_a^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds = \frac{1}{a^x} \Gamma(x, a).
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

A função hipergeométrica generalizada ([Lebedev, 1972](#)) é definida como

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p; \\ \gamma_1, \dots, \gamma_q \end{matrix} \middle| z \right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^p (\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^q (\gamma_s)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{D.9}$$

onde

$$(\alpha_r)_0 = 1, \quad (\alpha_r)_k = \frac{\Gamma(\alpha_r + k)}{\Gamma(\alpha_r)} = \alpha_r(\alpha_r + 1) \cdots (\alpha_r + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots \tag{D.10}$$

Apêndice E

A função $\text{Hil}(x, p, a)$

Defina, para $x > 0$,

$$\text{Hil}(x, p, a) \equiv \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi. \quad (\text{E.1})$$

Desejamos produzir uma aproximação simples, e suficientemente boa para $\text{Hil}(x, p, a)$ para $p = 1/3$, $p = -5/3$ e $p = -7/3$, e para uma gama de a 's tão grande quanto possível, de forma a eliminar a necessidade de calcular integrais numéricas.

Inicialmente, note que

$$\text{Hil}(1, p, a) \equiv 0; \quad (\text{E.2})$$

portanto, qualquer aproximação que produzamos deve atender a esta condição.

Considere $0 < \xi < 1$; aproximando-se $(\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}}$ em série de Taylor em torno de $\xi = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} &= \xi^p \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{3a} \xi^{2a} + \frac{1}{2!} \frac{1}{3a} \left(\frac{1}{3a} - 1 \right) \xi^{4a} + \frac{1}{3!} \frac{1}{3a} \left(\frac{1}{3a} - 1 \right) \left(\frac{1}{3a} - 2 \right) \xi^{6a} + \dots \right] \\ &= \xi^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{2an} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{2an+p}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Integrando-se agora a série termo a termo entre 1 e x , obtém-se

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \mathcal{H}_{+,1}(x, p, a, n), \quad (\text{E.4})$$

onde

$$\mathcal{H}_{+,1}(x, p, a, n) = \begin{cases} \frac{1}{2an+p+1} [x^{2an+p+1} - 1], & 2an + p + 1 \neq 0, \\ \ln x, & 2an + p + 1 = 0. \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Em (E.3) e (E.4), devemos interpretar que

$$\prod_{j=0}^{-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) = 1. \quad (\text{E.6})$$

Em virtude de a série ter sido desenvolvida em torno de $x = 0$, é de se esperar que (E.4) seja uma boa aproximação para $0 < x \leq 1$; note que ela atende por construção à condição (E.2).

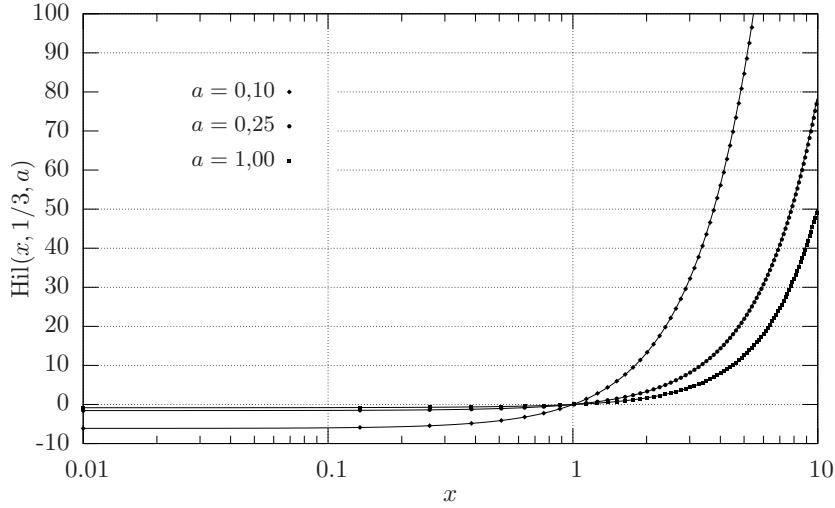


Figura E.1: Função $\text{Hil}(x, 1/3, a)$: comparação entre integração numérica (ícones) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

Considere agora $1 < \xi < \infty$; o “truque” é fazer uma expansão, em torno de zero, na variável $\eta = 1/\xi$:

$$\begin{aligned}
\xi^p \left(\frac{1}{\eta^{2a}} + 1 \right)^{\frac{1}{3a}} &= \frac{\xi^p}{\eta^{2/3}} (1 + \eta^{2a}) \\
&= \xi^{p+2/3} \left(1 + \frac{1}{\xi^{2a}} \right)^{\frac{1}{3a}} \\
&= \xi^{p+2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{-2an} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \xi^{-2an+p+2/3}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Novamente, integramos a série resultante entre 1 e x , obtendo

$$1 < x < \infty \Rightarrow \int_1^x \xi^p (\xi^{2a} + 1)^{\frac{1}{3a}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3a} - j \right) \right] \mathcal{H}_{-5/3}(x, p, a, n), \tag{E.8}$$

onde

$$\mathcal{H}_{-5/3}(x, p, a, n) = \begin{cases} \frac{1}{-2an+p+5/3} [x^{-2an+p+5/3} - 1], & -2an + p + 5/3 \neq 0, \\ \ln x, & -2an + p + 5/3 = 0. \end{cases} \tag{E.9}$$

Em virtude da expansão em série utilizada, é de se esperar que (E.8) seja boa para $1 < x < \infty$.

As figuras E.1, E.2 e E.3 mostram uma comparação do cálculo de $\text{Hil}(x, p, a)$ por meio de integração numérica com as séries (E.4) e (E.8), para $a = 0,1$, $a = 0,25$ e $a = 1,00$ respectivamente.

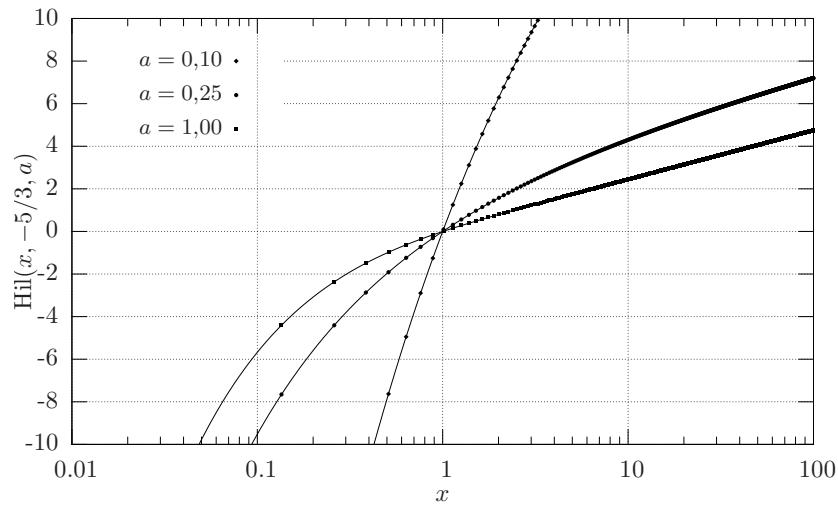


Figura E.2: Função $\text{Hil}(x, -5/3, a)$: comparação entre integração numérica (símbolos) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

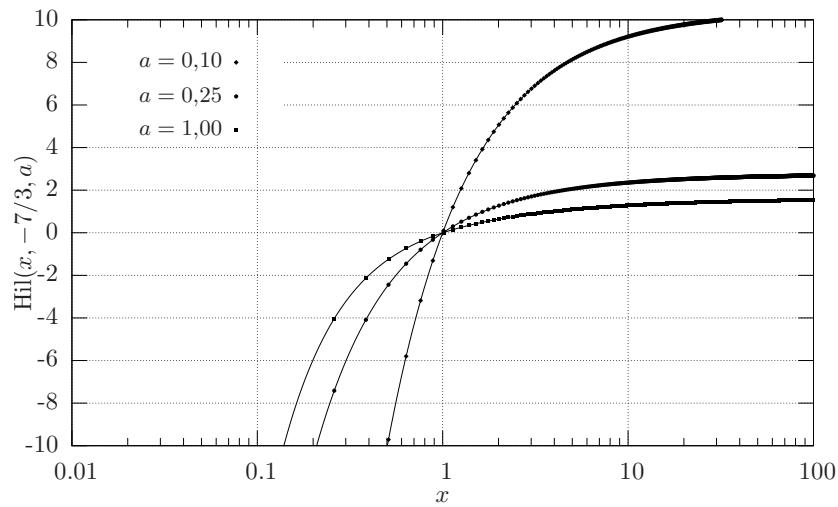


Figura E.3: Função $\text{Hil}(x, -7/3, a)$: comparação entre integração numérica (símbolos) e cálculo com as séries (E.4) e (E.8) (linhas contínuas).

Apêndice F

A função $\text{Epi}(x)$

Dada a integral de um produto de exponenciais na forma

$$\text{Epi}(x) \equiv \int_0^\infty \exp[-u - xu^{-1/3}] du, \quad (\text{F.1})$$

procuramos uma série para o cálculo eficiente de $\text{Epi}(x)$. Para isto, faça

$$\text{Epi}(x) = \text{Epi}_0(x) + \text{Epi}_1(x) = \int_0^1 \exp[-u - xu^{-1/3}] du + \int_1^\infty \exp[-u - xu^{-1/3}] du. \quad (\text{F.2})$$

Na primeira integral, substitua:

$$t = u^{-1/3}, \quad u = t^{-3}, \quad du = -3t^{-4}, \quad (\text{F.3})$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Epi}_0(x) &= -3 \int_{\infty}^1 t^{-4} e^{-(xt + \frac{1}{t^3})} dt \\ &= 3 \int_1^\infty t^{-4} e^{-xt} e^{-\frac{1}{t^3}} dt \\ &= 3 \int_1^\infty t^{-4} e^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{-3n} dt \\ &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^{4+3n}} dt \\ &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} E_{4+3n}(x). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Observe que

$$\text{Epi}_0(0) = \int_0^1 e^{-u} du = 1 - e^{-1}; \quad (\text{F.5})$$

usando o fato de que

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad (\text{F.6})$$

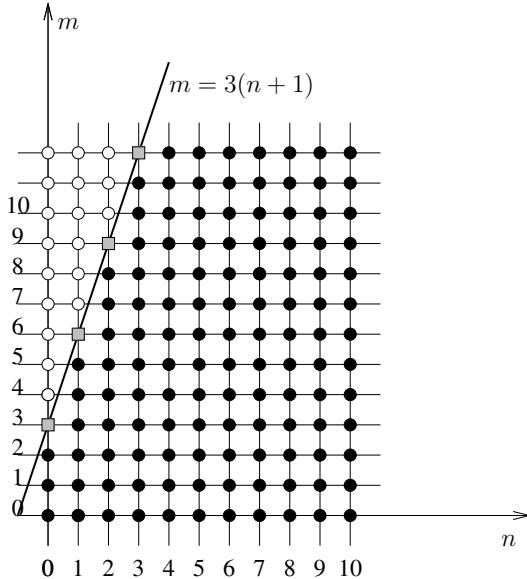


Figura F.1: Ilustração dos pares (n, m) a serem somados para a obtenção de $D_0(x)$.

obtém-se a verificação

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{3+3n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^m}{(m)!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-1 \times (-1)^m}{m!} + 1 = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \\
 &= 1 - e^{-1}.
 \end{aligned} \tag{F.7}$$

Procuramos agora uma expansão em série na forma mais compacta e útil possível para $\text{Epi}_0(x)$. Levando (D.6) em (F.4),

$$\begin{aligned}
 \text{Epi}_0(x) &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ - \sum_{m=0}^{3n+2} \frac{(-x)^m}{[m - 3(n+1)]m!} + \frac{(-x)^{3(n+1)}}{[3(n+1)]!} [-\ln x + \psi(4+3n)] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{m=4+3n}^{\infty} \frac{(-x)^m}{[m - 3(n+1)]m!} \right\}
 \end{aligned} \tag{F.8}$$

Para que (F.8) seja útil, é preciso re-arranjar o somatório para colocar os termos do tipo x^m em evidência. Isto é feito trocando-se a ordem da soma, e está ilustrado na figura F.1. Nos 3 termos entre as chaves da equação (F.8), os círculos pretos indicam o primeiro somatório, os quadrados indicam o termo central (contendo $-\ln x$), e os círculos brancos indicam o último somatório. Os quadrados indicam os casos em que $[n+1 - m/3] = 0$, e portanto não pode constar do denominador nos somatórios. Ao trocarmos a ordem da soma, e começarmos a somar em m , vemos que isto somente acontecerá quando m for divisível por 3 e maior que zero, ou seja, nos casos em que $m = 3, 6, 9, 12, \dots$

A equação (F.8) pode então ser re-escrita:

$$\text{Epi}_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_m}{m!} (-x)^m, \quad (\text{F.9})$$

onde os s_m 's representam agora o somatório interno em n .

Para cada um dos valores $m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots, n$ corre de 0 a ∞ sem que $[n+1-m/3]$ jamais se anule; em virtude de (D.4), então,

$$m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8 \dots \Rightarrow s_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(1-m/3)]n!} = \gamma(1-m/3, 1). \quad (\text{F.10})$$

Já para os valores $m = 3, 6, 9, \dots$, é preciso somar separadamente, em cada horizontal da figura F.1, os pares (m, n) brancos, quadrados e pretos. Isto dá

$$m = 3, 6, 9, \dots \Rightarrow s_m = \sum_{n=0}^{\frac{m}{3}-2} \frac{(-1)^n}{[n+1-m/3]n!} + \frac{3(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} [-\ln x + \psi(m+1)] + \sum_{n=\frac{m}{3}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+1-m/3]n!}. \quad (\text{F.11})$$

O segundo somatório do lado direito é um pouco mais difícil de calcular: lembrando aqui que $m/3 \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(1-m/3)]n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m/3}}{[k+1](k+m/3)!} \\ &= (-1)^{m/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[k+1](k+m/3)!} \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Usando agora a identidade

$$x = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}, \quad [k+1] = \frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+1)} \quad (\text{F.13})$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(1-m/3)]n!} &= (-1)^{m/3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)(-1)^k}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+m/3+1)} \\ &= \frac{(-1)^{m/3}\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(m/3+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)} (-1)^k}{\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(k+m/3+1)}{\Gamma(m/3+1)} \Gamma(k+1)} \\ &= \frac{(-1)^{m/3}\Gamma(1)}{\Gamma(2)\Gamma(m/3+1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; -1 \\ 2, & m/3+1 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{(-1)^{m/3}}{\Gamma(m/3+1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; -1 \\ 2, & m/3+1 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} m = 3, 6, 9, 12, \dots \Rightarrow s_m &= \sum_{n=0}^{m/3-2} \frac{(-1)^n}{[n+1-m/3]n!} + \frac{3(-1)^{m/3-1}}{(m/3-1)!} [-\ln x + \psi(m+1)] \\ &\quad + \frac{(-1)^{m/3}}{\Gamma(m/3+1)} \times {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, & 1; -1 \\ 2, & m/3+1 \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Uma alternativa talvez mais elegante para calcular s_m quando m for múltiplo de 3 é partir de (F.11) e comparar a soma com

$$-E_{\frac{m}{3}}(1) = \sum_{n=0}^{\frac{m}{3}-2} \frac{(-1)^n}{(n+1-m/3)n!} - \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} \psi(m/3) + \sum_{n=m/3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1-m/3)n!}; \quad (\text{F.16})$$

o resultado é

$$m = 3, 6, 9, 12, \dots \Rightarrow s_m = -E_{\frac{m}{3}}(1) + \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} [-3 \ln x + 3\psi(m+1) + \psi(m/3)]. \quad (\text{F.17})$$

A segunda integral é

$$\begin{aligned} \text{Epi}_1(x) &= \int_1^\infty \exp[-u - xu^{-1/3}] du \\ &= \int_1^\infty e^{-u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-xu^{-1/3})^m}{m!} du \\ &= \int_1^\infty e^{-u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m u^{-\frac{m}{3}}}{m!} du \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \int_1^\infty u^{-\frac{m}{3}} e^{-u} du = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \int_1^\infty u^{(1-\frac{m}{3})-1} e^{-u} du = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(1-m/3, 1) \frac{(-x)^m}{m!}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

Em particular, quando m é divisível por 3, segue-se de (D.7) que

$$\Gamma(1-m/3, 1) = E_{\frac{m}{3}}(1). \quad (\text{F.19})$$

Então, $\text{Epi}_0(x)$ é dado por (F.9), com (F.10) e (F.17), e $\text{Epi}_1(x)$ é dado por (F.18). A série para $\text{Epi}(x)$ é dada pela soma (F.2), e tem a forma

$$\text{Epi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} [a_m + b_m \ln x]. \quad (\text{F.20})$$

Quando $m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$, $b_m = 0$; a_m é dado pela soma de $\gamma(1-m/3, 1)$ de (F.10) com $\Gamma(1-m/3, 1)$ de (F.18):

$$m = 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots \Rightarrow a_m = \Gamma(1-m/3), b_m = 0. \quad (\text{F.21})$$

Quando $m = 3, 6, 9, \dots$, a integral exponencial $E_{\frac{m}{3}}(1)$ é eliminada pela soma de (F.17) com (F.19), donde

$$m = 3, 6, 9, \dots \Rightarrow a_m = \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!} [3\psi(m+1) + \psi(m/3)], b_m = -3 \frac{(-1)^{\frac{m}{3}-1}}{(m/3-1)!}. \quad (\text{F.22})$$

A figura F.2 mostra a comparação da série obtida, (F.20), dos seus 3 primeiros termos (até x^2), e do cálculo de $\text{Epi}(x)$ com integração numérica.

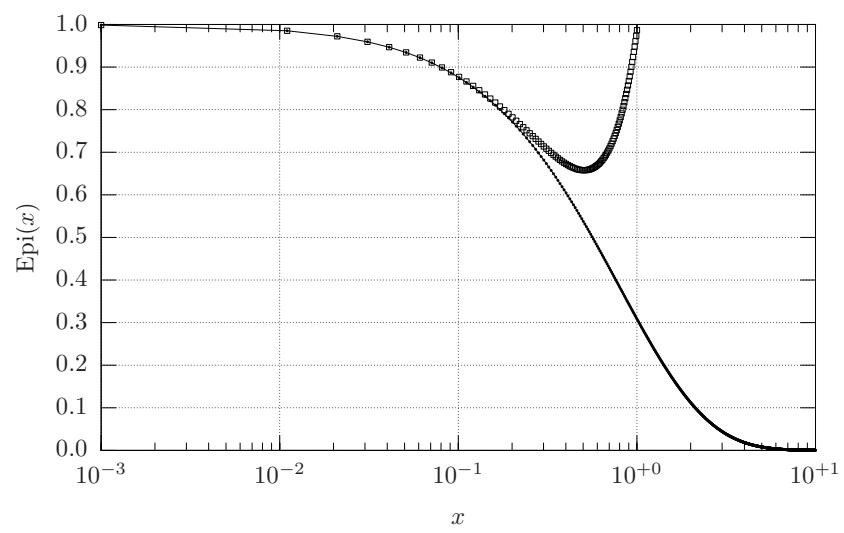


Figura F.2: Cálculo da função $Epi(x)$: série (F.20) (linha contínua), integração numérica (círculos cheios) e 3 primeiros termos de (F.20) (quadrados).

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. (1953). Evaluation of the integral $\int_0^\infty e^{-u^2-x/u} du$. *Journal of Mathematical Physics*, 32:188–192.
- Abramowitz, M. e Stegun, I. A., editores (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.
- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *Journal of Fluid Mechanics*, 5:113–133.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *Journal of Fluid Mechanics*, 5:134–139.
- Batchelor, G. K. e Proudman, I. (1954). The effects of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. *Q. J. Mech. Appl. Maths*, 7:83–103.
- Blanford, J. H. e Gay, L. W. (1992). Tests of a robust eddy correlation system for sensible heat flux. *Theoretical and Applied Climatology*, 46:53–60.
- Boone, A., Calvet, J.-C., e Noilhan, J. (1999). Inclusion of a Third Soil Layer in a Land Surface Scheme Using the Force-Restore Method. *Journal of Applied Meteorology*, 38:1611–1630.
- Bélair, S., Lacarrére, P., Noilhan, J., Masson, V., e Stein, J. (1998). High-resolution simulation of surface and turbulent fluxes during HAPEX-MOBILHY. *Monthly Weather Review*, 126:2234–2253.
- Cancelli, D. M. (2006). Um modelo para a evolução térmica de lagos profundos. Tese de Mestrado, PPGMNE/Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Chamecki, M. (2003). Uma análise da estacionariedade e isotropia da turbulência na camada superficial da atmosfera. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná.
- Chamecki, M. e Dias, N. L. (2004). The local isotropy assumption and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130(603):2733–2752.
- Chamecki, M. e Dias, N. L. (2006). Reply to a comment by R. J. Smalley and R. A. Antonia on ‘The local isotropy hypothesis and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer’ (October B, 2004, 130:2733–2752). *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 132:685–686.
- Claussen, M. (1985). A model of turbulence spectra in the atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 33:151–172.

- Corrsin, S. (1951). On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, 22:469.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers.* Oxford University Press, Oxford.
- Deissler, R. G. (1961). Effects of inhomogeneity and of shear flow in weak turbulent fields. *The Physics of Fluids*, 4(10):1187–1198.
- Deissler, R. G. (1962). Turbulence in the presence of a vertical body force and temperature gradient. *Journal of Geophysical Research*, 67(8):3049–3062.
- Deissler, R. G. (1998). *Turbulent Fluid Motion.* Taylor & Francis, Philadelphia, PA, USA.
- Detto, M., Montaldo, N., Albertson, J. D., Mancini, M., e Katul, G. (2005). Soil moisture and vegetation controls on evapotranspiration in a heterogeneous Mediterranean ecosystem on Sardinia, Italy. *Water Resources Research*, 42:W08419.
- Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1998). Radiative effects on temperature in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 89(1):141–159.
- Dias, N. L. e Cancelli, D. M. (2007). Long-term Lake Evaporation Measurements in Southeastern Brazil. Em *Proceedings, 2007 Joint Assembly*, Acapulco. American Geophysical Union.
- Dias, N. L., Chamecki, M., Kan, A., e Okawa, C. M. P. (2004). A study of spectra, structure and correlation functions and their implication on the stationarity of surface-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorology*, 110:165–189.
- Dias, N. L., Duarte, H. F., Maggiotto, S. R., e Grodzki, L. (2006). An attenuated eddy covariance method for latent heat flux measurements. *Water Resources Research (submitted)*.
- Dias, N. L. e Kan, A. (1999). A hydrometeorological model for basin-wide seasonal evapotranspiration. *Water Resources Research*, 35(11):3409–3418.
- Dias, N. L. e Kan, A. (2006). Evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia, PR: Estimativas dos modelos de relação complementar *versus* balanço hídrico sazonal e balanço de energia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos (submetido)*.
- Dias, N. L., Kan, A., Grodzki, L., Sanchez, S. D., e Vissotto, D. (2002). O método de covariâncias turbulentas atenuadas (MCTA) para medição dos fluxos de calor sensível e latente: aplicação ao lago de Itaipu e seu redor. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 7(1):143–160.
- Dias, N. L. e Malheiros, A. L. (2003). Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, volume Livro de Resumos (artigo completo no CD — full article in CD), página 260, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Duarte, H. F. (2006). Um método para medições do fluxo de calor latente a partir de sensores de umidade capacitivos. Tese de Mestrado, PPGMNE/Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- Duarte, H. F., Dias, N. L., e Maggiotto, S. R. (2006). Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agricultural and Forest Meteorology*.

- Fernando, H. J. S. e Hunt, J. C. R. (1997). Turbulence, waves and mixing at shear-free density interfaces. 1: A theoretical model. *Journal of Fluid Mechanics*, 347:197–234.
- Fochesatto, G. J., Drobinski, P., Flamant, C., Guedalia, D., Sarrat, C., Flamant, P. H., e Pelon, J. (2001). Evidence of dynamical coupling between the residual layer and the developing convective boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 99:451–464.
- Gobbi, M. F., Chamecki, M., e Dias, N. L. (2006). Application of digital filtering for minimizing aliasing effects in the atmospheric turbulent surface layer spectra. *Water Resources Research*, 42:W03405.
- Gonçalves, J. E., Malheiros, A. L., Nascimento, E. L., Maggiotto, S. R., e Dias, N. L. (2006). Veículo aéreo não tripulado para perfilamento atmosférico em alta resolução. Em *XIV Congresso Brasileiro de Meteorologia*, Florianópolis. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- Gradsteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego.
- Hanazaki, H. e Hunt, J. C. R. (1996). Linear processes in unsteady stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 318:303–337.
- Harris, S. (1999). *An introduction to the theory of the Boltzmann equation*. Dover, Mineola, New York.
- Hill, R. J. (1978). Models of the scalar spectrum for turbulent advection. *Journal of Fluid Mechanics*, 88:541–562.
- Hill, R. J. (1991). Comparison of experiment with a new theory of the turbulence temperature structure function. *Physics of Fluids A*, 3(6):1572–1576.
- Hill, R. J. (1997a). Algorithms for obtaining atmospheric surface-layer fluxes from scintillation measurements. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 14:456–467.
- Hill, R. J. (1997b). Applicability of Kolmogorov's and Monin's equations of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 353:67–81.
- Horst, T. W., Oncley, S. P., e Semmer, S. R. (1997). Measurement of water vapor fluxes using capacitive R.H. sensors and cospectral similarity. Em *12th Symposium on Boundary Layers and Turbulence, Preprints*, páginas 360–361, Vancouver, BC, Canada. American Meteorological Society.
- Hunt, J. C. R. e Carruthers, D. J. (1990). Rapid distortion theory and the 'problems' of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 212:497–537.
- Kan, A. (2005). *Estimativa de evapotranspiração real com base na análise de recessão dos hidrogramas*,. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná.
- Kan, A., Dias, N. L., e Prevedello, C. L. (2006). Análise qualitativa de recessões de um hidrograma usando equação de Boussinesq. Em *Anais, I Simpósio de Recursos Hídricos Sul-Sudeste*, volume Anais, CD-ROM. Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Associação Brasileira de Recursos Hídricos.
- Kang, H. S., Chester, S., e Meneveau, C. (2003). Decaying turbulence in an active-grid-generated flow and comparisons with large-eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 480:129–160.

- Katul, G., Vidakovic, B., e Albertson, J. (2001). Estimating global and local scaling exponents in turbulent flows using discrete wavelet transformations. *Physics of Fluids*, 13(1):241–250.
- Kim, J., Guo, Q., Baldocchi, D. D., Leclerc, M., Xu, L., e Schmid, H. (2006). Upscaling fluxes from tower to landscape: Overlaying flux footprints on high-resolution (IKONOS) images of vegetation cover. *Agricultural and Forest Meteorology*, In Press.
- Kolmogorov, A. N. (1962). A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number,. *Journal of Fluid Mechanics*, 13:82–85.
- Kolmogorov, A. N. (1991,1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kraichnan, R. H. (1974). On Kolmogorov's inertial-range theories. *Journal of Fluid Mechanics*, 62, part 2:305–330.
- Lamorgese, A. G., Caughey, D. A., e Pope, S. B. (2005). Direct numerical simulation of homogeneous turbulence with hyperviscosity. *Physics of Fluids*, 17:015106.
- Lebedev, N. N. (1965,1972). *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York.
- Leclerc, M., Karipot, A., Prabha, T., Allwine, G., Lamb, B., e Gholz, H. (2003a). Impact of non-local advection on flux footprints over a tall forest canopy: a tracer flux experiment. *Agricultural and Forest Meteorology*, 115:17–34.
- Leclerc, M. Y., Meskhidze, N., e Finn, D. (2003b). Comparison between measured tracer fluxes and footprint model predictions over a homogeneous canopy of intermediate roughness. *Agricultural and Forest Meteorology*, 117:145–158.
- Lin, J. T. (1972). Velocity spectrum of locally isotropic turbulence in the inertial and dissipation ranges. *Physics of Fluids*, 15:205–207.
- Mahrt, L., MacPherson, J. I., e Desjardins, R. (1994). Observations of fluxes over heterogeneous surfaces. *Boundary-Layer Meteorology*, 67(4):345–367.
- Malheiros, A. L. (2004). Avaliação de modelos para a altura da camada-limite atmosférica urbana e seus efeitos sobre a qualidade do ar. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
- Malheiros, A. L. e Dias, N. L. (2004). Determinação prática da altura da camada-limite atmosférica para aplicação em modelos de dispersão de poluentes. Em *XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia, CD-ROM*, Fortaleza. Sociedade Brasileira de Meteorologia.
- McComb, W. D. (1992). *The physics of fluid turbulence*. Oxford University Press, New York.
- Moraes, O. L. L. e Epstein, M. (1987). The velocity spectra in the stable surface layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 40:407–414.
- Moraes, O. L. L. e Goedert, J. (1988). Kaimal's isopleths from a closure Model. *Boundary-Layer Meteorology*, 45:83–92.

- Paiva, C. M. (2005). *Estimativa do balanço de energia e da temperatura da superfície via satélite NOAA-14*. PhD thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro RJ Brazil.
- Pao, Y. H. (1965). Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers. *The Physics of Fluids*, 8:1063–1075.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., e Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Richardson, L. F. (1920). Some measurements of atmospheric turbulence. *Phil. Trans. R. Soc., A* 221:1–28.
- Saddoughi, S. G. (1997). Local isotropy in complex turbulent boundary layers at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 348:201–245.
- Saddoughi, S. G. e Veeravallis, S. V. (1994). Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 268:333–372.
- Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics*. John Wiley & Sons, New York.
- Shen, X. e Warhaft, Z. (2000). The anisotropy of the small scale structure in high Reynolds number ($R_\lambda \approx 1000$) turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 12:2976–2989.
- Smalley, R. J. e Antonia, R. A. (2006). Comment on “The local isotropy hypothesis and the turbulent kinetic energy dissipation rate in the atmospheric surface layer” by M. Chamecki and N. L. Dias (October B, 2004, 130, 2733?2752). *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 132:681–684.
- Stannard, D. I., Blanford, J. H., Kustas, W. P., Nichols, W. D., Amer, S. A., Schmugge, T. J., e Weltz, M. A. (1994). Interpretation of surface flux measurements in heterogeneous terrain during the Monsoon'90 experiment. *Water Resources Research*, 30:1227–1239.
- Taylor, G. I. (1921). Diffusion by continuous movements. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 20(2):196–211.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–478.
- Taylor, G. I. (1938). The spectrum of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 164:476–490.
- Warhaft, Z. (2000). Passive scalars in turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32:203–240.
- Watson, T. B., Johnson, R., Pitchford, M. L., Green, M., Kuhns, H., e Etyemezian, V. (2000). The Perfluorocarbon Tracer Releases During the Big Bend Regional Aerosol and Visibility Observational (BRAVO) Study. NOAA Technical Memorandum OAR Arl-237, NOAA, Idaho Falls.