TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 25 Fev 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [25] Calcule a difusividade numérica introduzida pelo esquema *upwind* explícito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Sugestão: note que

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} &= \frac{2u_i^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}\\
&= \frac{2u_i^n}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x}\\
&= \frac{-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Reescrevemos o termo advectivo utilizando o resultado da sugestão:

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\left[\frac{-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right] &= 0,\\
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= c\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x},\\
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},\\
D &= \frac{c\Delta x}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, o esquema é equivalente a uma discretização numérica da equação de advecção-difusão, com difusividade numérica dada pela última linha acima ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas implícito para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right) = 0,$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda. Se as condições de contorno são $u_0 = 0$, $u_{N_x} = 0$, a matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{Co} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mathrm{Co} & 1+\mathrm{Co} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\mathrm{Co} & 1+\mathrm{Co} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathrm{Co} & 1+\mathrm{Co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n+1} \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^n \\ u_{N_x-1}^n \end{bmatrix},$$

onde $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$ é o número de Courant. Esse é um sistema que ainda pode ser resolvido pelo algoritmo de Thomas, utilizando por exemplo a rotina `tridag` apresentada em aula. Após a alocação de 3 *arrays* `A`, `B` e `C`, via

```
A = zeros(nx-1,float)
B = zeros(nx-1,float)
C = zeros(nx-1,float)
```

e supondo que o número de Courant já está calculado na variável `Cou`, escreva 3 linhas de Python que preenchem os valores de `A`, `B` e `C` para uso subsequente na rotina `tridag`. Atenção para os índices dos *slices* dos *arrays*.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
A[1:nx-1] = -Cou
B[0:nx-1]= 1.0 + Cou
C[0:nx-2] = 0.0
```
■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, verifique se

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[y_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(x_k^* y_k \right)^* \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]^* \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \right\}^* \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* (y_k + z_k) \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* z_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* \alpha y_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} \neq 0 \Rightarrow \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \frac{k}{n} > 0 \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} 0 \times \frac{k}{n} = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

E portanto o produto interno é legítimo ∎

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dados os vetores

$$\boldsymbol{x} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

e

$$\boldsymbol{y} = (1, 1, \ldots 1),$$

utilize a identidade

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} a_i a_j,$$

o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$, e a desigualdade de Schwarz para encontrar o valor de α em

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \le \alpha.$$

Sugestão: Note que neste caso devemos fazer

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A desigualdade de Schwarz é

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Agora,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}};$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};$$

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n.$$

Substituindo as 3 expressões acima na desigualdade de Schwarz encontramos

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right]^2 &\le \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right] n;\\
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};\\
2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};\\
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le \frac{(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹