TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 28 Nov 2025
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Encontre a função de Green do problema

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = \cos(x), \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Multiplico por $G(x,\xi)$ e integro de 0 a infinito:

$$\int_{\xi=0}^{\infty} G(x,\xi)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi y\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Integrando por partes,

$$G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\infty} + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi G\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$-G(x,0)y(0) + \int_{\xi=0}^{\infty} y(\xi)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi G\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} G(x,\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} - 2\xi G = \delta(\xi - x).$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi G = -\delta(\xi - x).$$

Agora, $G = uv$, e

$$\begin{aligned}
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + 2\xi v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -2\xi v\\
\frac{dv}{v} &= -2\xi\\
\ln\left(\frac{v}{v_0(x)}\right) &= -\xi^2\\
v &= v_0(x)\exp(-\xi^2)\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= -\frac{\exp(\xi^2)}{v_0(x)}\delta(\xi - x)\\
u(\xi) &= u_0(x) - \int_{\eta=0}^{\xi}\frac{\exp(\eta^2)}{v_0(x)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
&= u_0(x) - \frac{H(\xi - x)\exp(x^2)}{v_0(x)} \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= \left[u_0(x)v_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2)\\
&= \left[G_0(x) - H(\xi - x)\exp(x^2)\right]\exp(-\xi^2).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Mas

$$\lim_{\xi \to \infty} G(x,\xi) = 0 \Rightarrow G_0(x) = \exp(x^2)$$

$$G(x,\xi) = [1 - H(\xi - x)] \exp(x^2 - \xi^2) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Encontre os autovalores e autovetores do problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

Sugestão: A equação característica envolve $\sqrt{1-\lambda}$. Você deve estudar os sinais do radical segundo

$$\begin{aligned} &1 - \lambda = k^2 > 0, \qquad k > 0 \\ &1 - \lambda = 0, \\ &1 - \lambda = -k^2 < 0, \qquad k > 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica é

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + \lambda &= 0, \\ r &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{1-\lambda}. \end{aligned}$$

É preciso discutir os sinais de λ.
a) $\lambda < 1$. Neste caso, existem 2 raízes reais distintas. Faça

$$\begin{aligned} 1 - \lambda = k^2 &> 0, \\ 1 - k^2 &= \lambda, \\ \sqrt{1-\lambda} = \sqrt{k^2} &= k. \end{aligned}$$

As raízes são

$$r_{1,2} = 1 \pm k,$$

e a solução geral é do tipo

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left[A \cosh(kx) + B \,\mathrm{senh}(kx)\right].$$

A imposição das condições de contorno produz

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad A\underbrace{\cancel{\cosh(0)}}_{1} + B\underbrace{\cancel{\mathrm{senh}(0)}}_{0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0, \\ y(\pi) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^\pi B \,\mathrm{senh}(k\pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0, \end{aligned}$$

e portanto $\lambda < 1$ não pode ser autovalor.
b) $\lambda = 1$. Neste caso há uma raiz dupla $r = 1$ e

$$y(x) = A\mathrm{e}^x + Bx\mathrm{e}^x$$

A imposição das condições de contorno produz

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad A = 0, \\ y(\pi) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad B\pi\mathrm{e}^\pi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0, \end{aligned}$$

e novamente $\lambda = 1$ não pode ser autovalor.
c) $\lambda > 1$. Neste caso há duas raízes complexas conjugadas. Faça

$$\begin{aligned} 1 - \lambda = -k^2&, \qquad k > 0, \\ \lambda = 1 + k^2&, \\ \sqrt{1-\lambda} = \sqrt{-k^2} = \mathrm{i}k&. \end{aligned}$$

As raízes são

$$r_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}k,$$

e a solução geral é do tipo

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left[A \cos(kx) + B \,\mathrm{sen}(kx)\right].$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

A imposição das condições de contorno produz

$$
\begin{aligned}
&y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A\cos(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = 0,\\
&y(\pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\pi} B \operatorname{sen}(k\pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}(k\pi) = 0,\\
&k\pi = n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots,\\
&k_n = n.
\end{aligned}
$$

Portanto, os autovalores e as autofunções são

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= 1 + n^2,\\
y_n(x) &= \mathrm{e}^{x} \operatorname{sen}(n\pi x) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] **Utilizando obrigatoriamente o método das características**, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} &= 1,\\
u(x,0) &= f(x).
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Suponha que $t = T(s)$, $x = X(s)$. Então,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = u(X(s),T(s)) &= U(s),\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}
$$

Comparando termo a termo com a equação diferencial parcial, impomos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s),\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= 1.
\end{aligned}
$$

Integrando,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}T &= \mathrm{d}s,\\
\int_{T_0}^{T}\mathrm{d}\tau &= \int_0^s \mathrm{d}\sigma,\\
T &= T_0 + s.
\end{aligned}
$$

O problema possui condição inicial em $t = 0$. Faça, portanto, $T_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X(s)s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{X} &= s\,\mathrm{d}s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)}\frac{\mathrm{d}X}{X} &= \int_0^s \sigma\,\mathrm{d}\sigma,\\
\ln\left(\frac{X(s)}{X(0)}\right) &= \frac{1}{2}s^2,\\
X(s) &= X(0)\exp\left(\frac{1}{2}s^2\right).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\mathrm{d}U &= \mathrm{d}s,\\
\int_{U(0)}^{U(s)} &= \int_0^s \mathrm{d}\sigma,\\
U(s) - U(0) &= s.
\end{aligned}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
U(s) &= u(x,t),\\
U(0) &= u(X(0),T(0)) = u(X(0),0) = f(X(0)),\\
X(0) &= X(s)\exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)\\
&= x\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) - f\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\right) &= t,\\
u(x,t) &= t + f\left(x\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Considere a EDP

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2 u_0}{L^3}x,\\
u(x,0) &= u_0,\\
u(0,t) &= 0,\\
u(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

a) [05] Este problema possui uma solução em regime permanente $u_\infty(x)$: quando $t \to \infty$, $\partial u/\partial t \to 0$. Substitua $\partial u/\partial t = 0$ na EDP, e obtenha uma equação diferencial ordinária em $u_\infty(x)$. Resolva a EDO e **mostre que**

$$
u_\infty(x) = \frac{u_0}{6L}x - \frac{u_0}{6L^3}x^3;
$$

as duas constantes de integração podem ser obtidas impondo $u_\infty(0) = 0$ e $u_\infty(L) = 0$.

b) [10] Faça a substituição de variável $v(x,t) = u(x,t) - u_\infty(x)$. Obtenha uma EDP em v; quem são $v(x,0)$, $v(0,t)$ e $v(L,t)$?

c) [05] Finalmente, faça $v(x,t) = X(x)T(t)$, **separe as variáveis**, e obtenha um problema de Sturm-Liouville em $X(x)$. **Atenção: não é necessário encontrar autovalores e autofunções, nem é necessário resolver a EDP em v!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 u_\infty}{\mathrm{d}x^2} + \frac{u_0}{L^3}x = 0,&\\
\frac{\mathrm{d}^2 u_\infty}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{u_0}{L^3}x,\\
\frac{\mathrm{d}u_\infty}{\mathrm{d}x} &= -\frac{u_0}{2L^3}x^2 + c_1,\\
u_\infty(x) &= -\frac{u_0}{6L^3}x^3 + c_1x + c_2,\\
u_\infty(0) &= 0 \Rightarrow c_2 = 0,\\
u_\infty(L) &= 0 \Rightarrow -\frac{u_0}{6} + c_1L = 0,\\
c_1 &= \frac{u_0}{6L},\\
u_\infty(x) &= \frac{u_0}{6L}x - \frac{u_0}{6L^3}x^3.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x,t) + u_\infty;\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t};\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}u_\infty}{\mathrm{d}x};\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 u_\infty}{\mathrm{d}x^2}\\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{u_0}{L^3}x;\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u_0}{L^3}x\right],\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{u_0}{L^3}x + \frac{u_0}{L^3}x\right],\\
\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\
v(x,0) &= u(x,0) - u_\infty(x) = u_0\left[1 - \frac{1}{6L}x + \frac{1}{6L^3}x^3\right],\\
v(0,t) &= u(0,t) - u_\infty(0) = 0 - 0 = 0,\\
v(L,t) &= u(L,t) - u_\infty(L) = 0 - \left[\frac{u_0}{6L}L - \frac{u_0}{6L^3}L^3\right] = 0.
\end{aligned}
$$

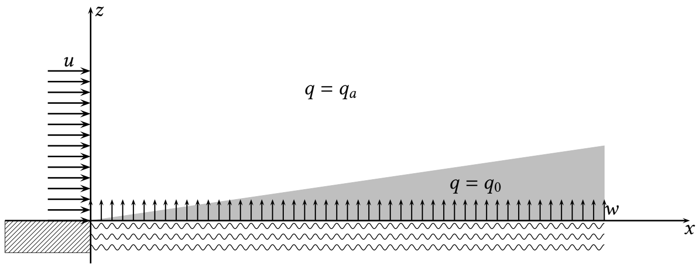
Continue a solução no verso ⟹

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
v(x,t) &= X(x)T(t), \\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= a^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}, \\
\frac{1}{a^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda, \\
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} &= \lambda X, \\
X(0) &= 0, \\
X(L) &= 0 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20]



Dada a equação diferencial de transporte de umidade (sem difusão)

$$u\frac{\partial q}{\partial x} + w\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$
$$q(0,z) = q_a,$$
$$q(x,0) = q_0 > q_a,$$

onde u é uma velocidade horizontal, w uma velocidade vertical, e $q(x,z)$ é uma concentração mássica de umidade, considere as seguintes dimensões:

$$[\![x]\!] = \mathsf{X} \qquad [\![z]\!] = \mathsf{Z},$$
$$[\![u]\!] = \mathsf{X}\mathsf{T}^{-1} \qquad [\![w]\!] = \mathsf{Z}\mathsf{T}^{-1},$$
$$[\![q]\!] = [\![q_a]\!] = [\![q_0]\!] = \mathsf{M_v}\mathsf{M}^{-1},$$

onde X e Z são dimensões distintas de comprimento ao longo de cada eixo, T é tempo, e $\mathsf{M_v}$, M são massa de vapor d'água e massa total de ar,

a) [10] Mostre que
$$\zeta \equiv \frac{uz}{wx}, \qquad \chi \equiv \frac{q-q_a}{q_0-q_a}$$
são duas variáveis adimensionais.

b) [10] Supondo que ζ e χ são as duas únicas variáveis adimensionais governando o problema, então devemos ter $\chi = \chi(\zeta)$. Obtenha uma equação diferencial ordinária de χ em ζ. Determine os valores de $\chi(0)$ e $\chi(\infty)$. **Não tente resolver a EDO!!!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$[\![\zeta]\!] = \left[\!\!\left[\frac{uz}{wx}\right]\!\!\right] = \frac{\mathsf{X}\mathsf{T}^{-1}\mathsf{Z}}{\mathsf{Z}\mathsf{T}^{-1}\mathsf{X}} = 1;$$
$$[\![\chi]\!] = \left[\!\!\left[\frac{q-q_a}{q_0-q_a}\right]\!\!\right] = \frac{\mathsf{M_v}\mathsf{M}^{-1}}{\mathsf{M_v}\mathsf{M}^{-1}} = 1.$$

Continue a solução no verso ⟹

b)

$$
\begin{aligned}
u\frac{\partial q}{\partial x} + w\frac{\partial q}{\partial z} &= 0,\\
\chi &= \frac{q - q_a}{q_0 - q_a},\\
q &= q_a + \chi(q_0 - q_a),\\
u(q_0 - q_a)\frac{\partial \chi}{\partial x} + w(q_0 - q_a)\frac{\partial \chi}{\partial z} &= 0,\\
u\frac{\partial \chi}{\partial x} + w\frac{\partial \chi}{\partial z} &= 0,\\
\zeta &= \frac{uz}{wx},\\
\chi &= \chi(\zeta),\\
\frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta} \times -\frac{uz}{w}\frac{1}{x^2} = -\frac{\zeta}{x}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta},\\
\frac{\partial \chi}{\partial z} &= \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}\frac{u}{wx},\\
u\frac{\partial \chi}{\partial x} + w\frac{\partial \chi}{\partial z} &= -u\frac{\zeta}{x}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta} + w\frac{u}{wx}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}\\
&= \frac{u}{x}\left[-\zeta\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta} + \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}\right] = 0;\\
\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\zeta}(1 - \zeta) &= 0.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno são:

- Em $z = 0$, $\zeta = 0$, $q = q_a$, $\chi = 0$: $\chi(0) = 0$.
- Em $x = 0$, $\zeta = \infty$, $q = q_0$, $\chi = 1$: $\chi(\infty) = 1$ ■

Continue a solução no verso ⟹