TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 27 mar 2024
Prof. Nelson Luís Dias

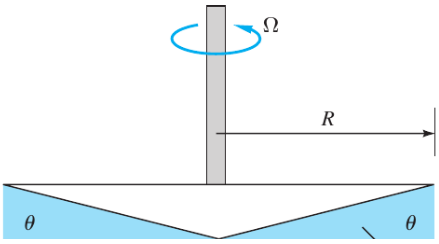
0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

1 [20] A figura ao lado mostra um viscosímetro de cone. O cone invertido gira com velocidade angular Ω, forçado por um torque M (lembre-se de que torque é momento de força) no eixo. O ângulo entre o fluido e o cone é θ. O fluido sob o cone tem viscosidade dinâmica μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$), e o viscosímetro gira com velocidade angular constante Ω. Obtenha os grupos adimensionais deste problema, sendo que um dos grupos deve conter μ com expoente obrigatoriamente igual a 1.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As variáveis do problema e suas dimensões são

θ	1
μ	$\mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$
M	$\mathsf{ML^2T^{-2}}$
R	L
Ω	$\mathsf{T^{-1}}$

Note que θ é adimensional, e que portanto o primeiro grupo é o próprio θ:

$$\Pi_1 = \theta.$$

As 4 variáveis dimensionais restantes envolvem 3 dimensões fundamentais M, L e T, e esperamos que formem $4-3=1$ grupo adimensional adicional:

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \mu M^a R^b \Omega^c\\ [\![\Pi_2]\!] &= [\![\mu]\!]\,[\![M]\!]^a\,[\![R]\!]^b\,[\![\Omega]\!]^c\\ 1 &= \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}[\mathsf{ML^2T^{-2}}]^a[\mathsf{L}]^b[\mathsf{T^{-1}}]^c\\ &= \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-1+2a+b}\mathsf{T}^{-1-2a-c}.\end{aligned}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{aligned}a &= -1,\\ 2a+b &= 1\\ 2a+c &= -1\end{aligned}$$

donde $a=-1$, $b=3$, $c=1$ e

$$\Pi_2 = \frac{\mu\Omega R^3}{M}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] A *regra de Simpson* para um número par de pontos $2n$ é a seguinte:

$$\begin{aligned}
h &= (b-a)/(2n),\\
x_0 &= a,\\
x_{2n} &= b,\\
x_i &= a + ih,
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right].$$

Escreva uma função `simpson(m,a,b,f)` que calcule a integral numérica pela regra de Simpson.

Note que m é obrigatoriamente par, e que $n = m/2$ nas equações acima.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def simpson(m,a,b,f):
   assert(m % 2 == 0)
   h = (b-a)/m
   Se = f(a) + f(b)
   S4 = 0.0
   for i in range(1,m,2):
      xi = a + i*h
      S4 += f(xi)
   S4 *= 4
   S2 = 0.0
   for i in range(2,m,2):
      xi = a + i*h
      S2 += f(xi)
   S2 *= 2
   I = (h/3.0)*(Se + S4 + S2)
   return I
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] A série de Taylor de e^u em torno de 0 é

$$\mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}. \tag{*}$$

a) [10] Obtenha analiticamente

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u.$$

b) [10] Integrando termo a termo a série (*), obtenha a série de $F(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x - 1.$$

b)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^u \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{u^n}{n!} \, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x u^n \, \mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1!} x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned}
m &= n+1, \\
n &= m-1; \; \Rightarrow \\
F(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \\
&= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m}_{\mathrm{e}^x} -1 \\
&= \mathrm{e}^x - 1 \; \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Sabendo que em notação indicial um índice repetido sem parênteses indica soma de 1 a 3, e que um índice repetido entre parênteses suprime a soma, obtenha

a) [10] $\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_l = ?$

b) [10] $\boldsymbol{e}_{(l)} \cdot \boldsymbol{e}_{(l)} = ?$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_l &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}
$$

b)

$$
\boldsymbol{e}_{(l)} \cdot \boldsymbol{e}_{(l)} = 1,
$$

para *um único* l entre 1 e 3 ■

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Seja $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ uma base não-ortogonal do $\mathbb{R}^3$, onde

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (2,0,0),\\
\boldsymbol{v}_2 &= (1,3,0),\\
\boldsymbol{v}_3 &= (2,1,2).
\end{aligned}
$$

Obtenha uma base ortonormal a partir de V utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmmidt.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \boldsymbol{v}_1;\\
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_1|}\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{2}(2,0,0) = (1,0,0);\\
\boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1\\
&= (1,3,0) - ((1,3,0)\cdot(1,0,0))(1,0,0)\\
&= (1,3,0) - 1(1,0,0) = (0,3,0);\\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_2|}\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{3}(0,3,0) = (0,1,0);\\
\boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2\\
&= (2,1,2) - ((2,1,2)\cdot(1,0,0))(1,0,0) - ((2,1,2)\cdot(0,1,0))(0,1,0)\\
&= (2,1,2) - 2(1,0,0) - 1(0,1,0) = (0,0,2);\\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{|\boldsymbol{f}_3|}\boldsymbol{f}_3 = \frac{1}{2}(0,0,2) = (0,0,1) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 10 mai 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] O programa em Python abaixo **não** implementa corretamente a operação matemática de multiplicar um vetor $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3)$ por um escalar 3:

```
a = [1,2,3]
b = 3*a
print(b)
```

Modifique o programa para que ele imprima a resposta certa, `[3,6,9]`.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
from numpy import array
a = array([1,2,3])
b = 3*a
print(b)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabemos que

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$, são os elementos da matriz da transformação $\boldsymbol{P}$, na base canônica, que projeta qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ do $\mathbb{R}^3$ no plano que passa pela origem e é normal ao vetor $\boldsymbol{k}$. **Atenção: aqui, em geral $\boldsymbol{k}$ não é o vetor unitário na direção de x_3, mas sim um vetor qualquer.** Para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ não nulos e não colineares, calcule, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**,

$$[\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a} &= P_{ij} a_j \boldsymbol{e}_i = P_{il} a_l \boldsymbol{e}_i; \\
[\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k} &= \epsilon_{ijk} P_{il} a_l k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk} \left[\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right] a_l k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk} a_i k_j \boldsymbol{e}_k - \frac{(a_l k_l)}{k^2} \epsilon_{ijk} k_i k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k})}{k^2} \underbrace{[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}]}_{\equiv \boldsymbol{0}} \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Calcule os autovalores e autovetores de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica é

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0; \\ (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 &= 0; \\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 &= 0; \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2}; \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}; \\ &= \begin{cases} -1, \\ +3. \end{cases} \end{aligned}$$

Para $\lambda = -1$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= -1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ 1v_1 + 2v_2 &= -v_1, \\ 2v_1 + v_2 &= -v_2 \end{aligned}$$

que produzem uma única equação independente:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 0, \\ v_2 &= -v_1. \end{aligned}$$

portanto, $(1, -1)$ é um autovetor associado a $\lambda = -1$.
Para $\lambda = 3$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \\ v_1 + 2v_2 &= 3v_1, \\ 2v_1 + v_2 &= 3v_2 \end{aligned}$$

que produzem uma única equação independente:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0, \\ v_2 &= v_1. \end{aligned}$$

portanto, $(1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda = 3$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule o jacobiano $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ da mudança de variáveis

$$
\begin{aligned}
x &= 3u,\\
y &= u+v.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Sabendo que, para $c > 0$, tem-se

$$\int \sqrt{1+cy^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{c}y)}{2\sqrt{c}} + \frac{y\sqrt{1+cy^2}}{2},$$

calcule a área da superfície

$$f(x,y) = 1 + x - y^2,$$

cuja projeção no plano xy é a região $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 + x - y^2,\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -2y,\\
A &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1+1+4y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\sqrt{2(1+2y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^{1}\sqrt{2(1+2y^2)}\int_{x=0}^{1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2}\int_{y=0}^{1}\sqrt{1+2y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{c}y)}{2\sqrt{c}} + \frac{y\sqrt{1+cy^2}}{2}\right]_{y=0}^{y=1}\\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+2}}{2}\right]\\
&= \left[\frac{\operatorname{arcsenh}(\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 26 jun 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Obtenha a solução de

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y &= \mathrm{e}^{-x},\\
y(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uv &= \mathrm{e}^{-x},\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_1,\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{-x},\\
|v| &= k_2\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_2\mathrm{e}^{-x} = v_0\mathrm{e}^{-x};\\
v_0\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
v_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0},\\
u &= u_0 + \frac{x}{v_0};\\
y = uv &= \left[u_0 + \frac{x}{v_0}\right]v_0\mathrm{e}^{-x}\\
&= u_0v_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},\\
&= y_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x};\\
y(0) = 1 &\Rightarrow y_0 = 1;\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(1+x) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a solução geral de

$$y'' - 3y' + 2y = x^2.$$

Observação:

$$\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x} + C,$$
$$\int x^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{(2x^2+2x+1)}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução da equação homogênea associada é

$$\begin{aligned} y_h'' - 3y_h' + 2y_h &= 0, \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0, \\ \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ y_h(x) &= c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Use o método de variação de constantes,

$$\begin{aligned} y &= A(x)\mathrm{e}^x + B(x)\mathrm{e}^{2x}, \\ y' &= A\mathrm{e}^x 2B\mathrm{e}^{2x} + \underbrace{\left[A'\mathrm{e}^x + B'\mathrm{e}^{2x}\right]}_{=0}, \\ y'' &= A\mathrm{e}^x + 4B\mathrm{e}^{2x} + A'\mathrm{e}^x + 2B'\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação original,

$$\begin{aligned} \left(A\mathrm{e}^x + 4B\mathrm{e}^{2x} + A'\mathrm{e}^x + 2B'\mathrm{e}^{2x}\right) - 3\left(A\mathrm{e}^x + 2B\mathrm{e}^{2x}\right) + 2\left(A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x}\right) &= x^2, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x + 2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{2x} &= x^2. \end{aligned}$$

Agora, a condição de controle das derivadas segundas de A e B é $A'\mathrm{e}^x + B'\mathrm{e}^{2x} = 0$ (ver termo no colchete horizontal acima); temos portanto o sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem 1:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x + 2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{2x} &= x^2, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{2x} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando primeiro $\mathrm{d}B/\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x &= x^2, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -x^2\mathrm{e}^{-x}, \\ A(x) &= (x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x} + C_1. \end{aligned}$$

Analogamente, eliminando $\mathrm{d}A/\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= x^2\mathrm{e}^{-2x}, \\ B(x) &= -\frac{(2x^2+2x+1)}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C_2. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} y(x) &= A(x)\mathrm{e}^x + B(x)\mathrm{e}^{2x}, \\ &= \left[(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x} + C_1\right]\mathrm{e}^x + \left[-\frac{(2x^2+2x+1)}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C_2\right]\mathrm{e}^{2x}, \\ &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + x^2 + 2x + 2 - \frac{(2x^2+2x+1)}{4} \\ &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se de uma equação de Euler:

$$\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2};\\
(r-1)rx^r + rx^r - x^r &= 0,\\
r^2 - r + r - 1 &= 0,\\
r^2 &= 1,\\
r &= \pm 1.
\end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule a série de Laurent de $f(z) = 1/(z-2)$ em torno de $z = 0$ para o disco $|z| > 2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-2/z)} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 + (2/z) + (2/z)^2 + (2/z)^3 + \ldots\right] \qquad (|z| > 2) \\
&= \left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Utilizando o método de Frobenius, encontre **uma** solução de

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

b) Faça

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

e substitua:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Faça

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r - 1,\\
m &= n - 1,\\
n &= m + 1.
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r)(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r)(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[1-(n+r)]a_n x^{n+r} = 0,$$

$$r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n\right\} x^{n+r} = 0.$$

Faça $a_0 \neq 0$; então $r = 0$ é raiz dupla, e estamos no caso ii do teorema 10.1 do livro-texto. A primeira solução pode ser obtida a partir de

$$\begin{aligned}
(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n &= 0,\\
r &= 0,\\
a_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2} a_n,
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, encontramos

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -1, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 0, \\
&\vdots \\
a_n &= 0, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução é

$$y_1(x) = 1 - x \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
S, 28 jun 2024
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL. VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Em Python, o operador `%` aplicado a argumentos inteiros positivos calcula o resto da divisão. Por exemplo, `10 % 3 == 1`.
Dado o programa em Python abaixo,

```
def mdc(a, b):
   assert (type(a) == int);
   assert (type(b) == int);
   assert (a > 0);
   assert (b > 0);
   while b != 0 :
      t = b
      b = a % b
      a = t
   return a
print(mdc(16,4));
```

faça o algoritmo **manualmente** e mostre o valor que ele imprime na tela.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

inicialmente, `a == 16, b == 4`; `b != 0` e um novo par de valores é computado:

```
t = 4
b = 16 % 4 = 0
a = t = 4,
```

Agora `a == 4, b == 0`, e o corpo do `while` não é mais executado. A rotina devolve o valor de `a`, e o programa imprime `4` ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são 3 vetores do $\mathbb{R}^3$, **utilizando obrigatoriamente notação indicial e a definição do determinante com o auxílio do símbolo de permutação** ϵ_{ijk}, mostre que

$$\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \det(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) &= \epsilon_{ijk}u_iv_jw_k\\ &= \epsilon_{kij}w_ku_iv_j\\ &= \det(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha os autovalores e autovetores de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)\times[(1-\lambda)^2-2] - 2\times[0(1-\lambda)-1(0)] + 1\times[0(2)-0(1-\lambda)] &= 0 \\
(1-\lambda)\times[1-2\lambda+\lambda^2-2] &= 0 \\
(1-\lambda)\times[\lambda^2-2\lambda-1] &= 0, \\
\lambda &= 1, \\
\lambda^2-2\lambda-1 &= 0 \\
\lambda &= \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} \\
\lambda &= \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} \\
\lambda &= 1\pm\sqrt{2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1, \\
\lambda_2 &= 1+\sqrt{2}, \\
\lambda_3 &= 1-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Agora buscamos os autovetores. Se $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= v_1, \\
v_2 + v_3 &= v_2 \\
2v_2 + v_3 &= v_3
\end{aligned}$$

e o primeiro autovetor é (qualquer múltiplo de)

$$(1,0,0).$$

Se $\lambda = 1+\sqrt{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_1, \\
v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_2 \;\Rightarrow\; v_3 = \sqrt{2}v_2 \\
2v_2 + v_3 &= (1+\sqrt{2})v_3 \;\Rightarrow\; 2v_2 = \sqrt{2}v_3
\end{aligned}$$

As 2ª e 3ª equações são LD; substituindo a 2ª na 1ª

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + \sqrt{2}v_2 &= (1+\sqrt{2})v_1, \\
(2+\sqrt{2})v_2 &= \sqrt{2}v_1 \\
(\sqrt{2}+1)v_2 &= v_1,
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

O 2º autovetor é qualquer múltiplo de

$$\begin{aligned}
((1+\sqrt{2})v_2, v_2, \sqrt{2}v_2),\\
(1+\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Se $\lambda = 1 - \sqrt{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (1-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_1,\\
v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_2 \;\Rightarrow\; v_3 = -\sqrt{2}v_2\\
2v_2 + v_3 &= (1-\sqrt{2})v_3 \;\Rightarrow\; 2v_2 = -\sqrt{2}v_3
\end{aligned}$$

As 2ª e 3ª equações são LD; substituindo a 2ª na 1ª

$$\begin{aligned}
v_1 + 2v_2 - \sqrt{2}v_2 &= (1-\sqrt{2})v_1,\\
(2-\sqrt{2})v_2 &= -\sqrt{2}v_1\\
(1-\sqrt{2})v_2 &= v_1,
\end{aligned}$$

O 3º autovetor é qualquer múltiplo de

$$\begin{aligned}
((1-\sqrt{2})v_2, v_2, -\sqrt{2}v_2),\\
(1-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = y.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Esta é uma equação de ordem 1, linear, homogênea, e separável.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x-1)y = 0,&\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (1-x)y,\\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= (1-x)\mathrm{d}x,\\
\ln|y| &= x - \frac{x^2}{2} + c_1,\\
|y| &= \mathrm{e}^{c_1}\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right),\\
|y| &= k_1\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right),\\
y &= \pm k_1\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = k\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Usando obrigatoriamente o método de Frobenius, obtenha a solução geral de

$$y'' + xy = 0$$

em torno de $x = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que $[xp(x)] = 0$, $[x^2q(x)] = x^3$ são analíticas em $x = 0$; além disso, na verdade $x = 0$ é um ponto ordinário, e nós antecipamos que haverá uma solução em série de potências sem expoentes fracionários. Mesmo assim, começo com

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} \\ xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}. \end{aligned}$$

A equação diferencial torna-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{2} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r)a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} = 0.$$

Suponho $a_0 \neq 0$, e obtenho a equação indicial

$$(r-1)r = 0,$$

donde $r = 0$ ou $r = 1$. Sei que neste caso a menor raiz *pode* levar à solução geral. Tento:

$$(0-1) \times (0) \times a_0 x^{-2} + (0) \times (1) \times a_1 x^{-1} + (1) \times (2) \times a_2 x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r)a_n + a_{n-3}\right] x^{n+r-2} = 0.$$

Note que a_0 e a_1 estão livres, e que é *forçoso* fazer $a_2 = 0$. A relação de recorrência para os $a_n s$ é

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{(n-1)n},$$

donde

$$a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots \; 0.$$

A 1ª solução LI é obtida a partir de $a_0 = 1$:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{1}{12960}x^9 + \ldots$$

A 2ª solução LI é obtida a partir de $a_1 = 1$:

$$y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 - \frac{1}{45360}x^{10} + \ldots$$

A solução geral é

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹