TT009 Modelos Matemáticos em Engenharia Ambiental I
P3, 16 Mai 2003
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: ______________________________ Assinatura: ______________

IMPORTANTE: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Encontre a solução geral (isto é: encontre as *séries* de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, onde y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes) de

$$y'' + 5x^3 y = 0$$

pelo método de Frobenius.
SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Faça

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}; \tag{1}$$

derive termo a termo duas vezes e substitua na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+s-1)(n+s) x^{n+s-2} + \sum_{n=5}^{\infty} 5c_{n-5} x^{n+s-2} = 0. \tag{2}$$

Isolando os 5 primeiros termos,

$$\sum_{n=0}^{4} c_n (n+s-1)(n+s) x^{n+s-2} + \sum_{n=5}^{\infty} \left[c_n (n+s-1)(n+s) + 5c_{n-5} \right] = 0. \tag{3}$$

Termo a termo, os 5 primeiros dão:

$$c_0(s-1)s = 0, \tag{4}$$
$$c_1 s(s+1) = 0, \tag{5}$$
$$c_2(s+1)(s+2) = 0, \tag{6}$$
$$c_3(s+2)(s+3) = 0, \tag{7}$$
$$c_4(s+3)(s+4) = 0. \tag{8}$$

Então $s = 0$ ou $s = 1$ na equação em c_0. Neste caso, as raízes da equação indicial *diferem por um inteiro*. Então, de acordo com Butkhov, $s = 0$ (a menor raiz) fornecerá a solução geral. Com $s = 0$, c_0 e c_1 são arbitrários (são as constantes da solução geral); $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ e a relação de recorrência é

$$c_n = -\frac{5c_{n-5}}{(n-1)n}. \tag{9}$$

As duas soluções LI desejadas serão

$$y_1 = 1 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{72}x^{10} - \frac{1}{3024}x^{15} + \ldots \tag{10}$$
$$y_2 = x - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{132}x^{11} - \frac{1}{6336}x^{16} + \ldots \blacksquare \tag{11}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$