

Mecânica da Turbulência

Nelson Luís Dias
(nldias@ufpr.br)
Departamento de Engenharia Ambiental
Universidade Federal do Paraná

6 de agosto de 2016

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados	12
1.2	Processos estocásticos	14
1.3	A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds	15
1.4	Independência ou morte	17
2	Termodinâmica de uma mistura diuída	19
2.1	Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell	19
2.2	Mistura diluída de 2 gases ideais	21
2.2.1	Equações de estado	21
2.2.2	Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal	22
2.2.3	A afinidade de uma mistura de gases ideais	24
3	As equações diferenciais de transporte	27
3.1	Notação indicial	27
3.2	Continuidade	27
3.3	Misturas	28
3.4	Quantidade de movimento	30
3.5	Vorticidade	32
3.6	Energia	36
3.7	Dissipação viscosa	41
3.8	A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas	41
3.9	O balanço do semiquadrado da temperatura	44
4	As macro e micro escalas da turbulência	46
4.1	Macro e micro escalas: uma apresentação informal	46
4.2	Uma definição formal das escalas macroscópicas	50
4.3	Uma definição formal das escalas microscópicas	52
4.4	A cascata de energia	53
4.5	Macro e microescalas de temperatura	54
4.6	Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos	58
5	As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq	61
5.1	O estado hidrostático de referência	61
5.2	O estado de referência na atmosfera	64
5.3	Magnitude das flutuações de densidade	66
5.4	Conservação de massa	67
5.5	Quantidade de movimento	68
5.6	A correlação pressão-temperatura	73

5.7	As ordens de grandeza da equação para a temperatura	74
5.8	A equação para a temperatura potencial	80
6	As equações de ordem 2	83
6.1	Os gradientes microscópicos de densidade	83
6.2	A equação para as flutuações de densidade	83
6.3	Top secret stuff	84
6.4	Um teorema útil	85
6.5	Quantidade de movimento, a partir do zero	85
6.6	A equação de ordem 2 para escoamentos compressíveis	93
6.7	A dedução das equações de ordem 2	96
6.8	Energia cinética da turbulência	99
6.9	As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2	102
7	Soluções laminares das equações de Navier-Stokes	106
7.1	Algumas soluções laminares	106
7.2	A Solução de Blasius	109
7.2.1	Espessura de deslocamento	111
7.2.2	A solução de Blasius	113
7.2.3	Blasius: solução numérica	116
7.2.4	Uma alternativa	119
8	Camadas-limite turbulentas	121
8.1	Escoamento turbulento em um duto	121
8.2	Escoamentos turbulentos com parede rugosa	127
8.3	O regime de transição	129
8.4	A fórmula de Manning	130
9	Isotropia no domínio físico	134
9.1	Isotropia no domínio físico	134
10	O espaço de Fourier	138
10.1	Séries de Fourier	138
10.2	Diferentes tipos de integral	140
10.2.1	Integral de Riemman	140
10.2.2	Integral de Lebesgue	140
10.2.3	Integral de Stieltjes	142
10.3	Energia cinética e a igualdade de Parseval	142
10.4	A transformada de Fourier do campo de velocidade	143
10.4.1	Teorema da convolução e igualdade de Parseval	144
10.5	Funções generalizadas (distribuições)	145
10.6	A transformada de Fourier das equações de Navier-Stokes	147
11	Processos estocásticos e representação espectral	151
11.1	Espectros cruzados em uma dimensão (tempo)	157
11.2	Espectros cruzados de processos estocásticos em 3 dimensões espaciais	159
11.3	Representação espectral de processos estocásticos	160
11.3.1	De uma vez só:	161
11.3.2	Aos poucos	161

12 Aplicações da Teoria Espectral	163
12.1 A função de transferência para separação espacial de sensores	163
12.2 A função de transferência para atenuação de sinal	165
12.3 Adicionando complexidade	166
13 A Teoria de Kolmogorov	167
13.1 Alternativas de descrição da estrutura estocástica da turbulência . . .	167
13.2 Isotropia das funções R_{ij} e D_{ij}	170
13.3 As hipóteses de similaridade de Kolmogorov	174
14 A Intermitência da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência	176
15 Dinâmica espectral	181
15.1 Balanços espectrais	181
15.2 O fluxo espectral de energia nas teorias clássicas	182
15.3 Modelos de fechamento fenomenológicos	183
15.3.1 Heisenberg	184
15.4 A aproximação quase-normal	185
15.4.1 Uma abordagem com P e não com M	188
15.4.2 Detours in search of truth	189
15.5 Uma nova tentativa de obter a aproximação quase-normal	190
A Identidades vetoriais	192
B Difusão em sistemas binários	193
C Soluções dos problemas	194
D Constantes físico-químicas	195
E Equação de estado para a água	196

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa [†]	22
2.2	Entalpia e energia livre de Gibbs de formação, e entropia padrão de gases atmosféricos a 298,15 K e 100.000 Pa [†]	26
8.1	Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1)	127

Lista de Figuras

1.1	10 minutos de medições de concentração de CO_2 sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40.	12
1.2	Ilustração de um processo estocástico univariado $U(t; \omega)$: as unidades de U e t são arbitrárias.	15
4.1	Expansão súbita em uma tubulação.	47
4.2	Escoamento clássico em um tubo com perda de carga.	49
5.1	Dependência da pressão de referência P_r e da densidade de referência φ_r em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude z	66
5.2	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida	75
5.3	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C.	75
7.1	Escoamento laminar sobre uma placa porosa	108
7.2	A camada-limite laminar	109
7.3	Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento θ^*	112
7.4	Perfil de velocidade adimensional de Blasius.	119
8.1	A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto.	122
8.2	Fator de atrito f em função de Re e da rugosidade relativa z_0/δ em um escoamento turbulento em um duto	130
10.1	Soma inferior de Riemman	140
10.2	A equação dinâmica de Navier-Stokes no espaço de números de onda	150
11.1	O espaço amostral das funções aleatórias $u(t)$	152
13.1	Invariantes geométricos em turbulência isotrópica	171
13.2	funções de correlação longitudinal e transversal	172
14.1	Uma figura parecida com a do Jiménez.	177

Notação

Uma grande dificuldade ao escrever este texto foi a enorme quantidade de grandezas diferentes com as quais é necessário tratar. Nós utilizamos ao mesmo tempo grandezas extensivas (em geral escritas com letras maiúsculas) e intensivas (*idem*); variáveis aleatórias e valores observados (realizações) das mesmas, médias turbulentas e flutuações. Diferentes autores encontraram diferentes soluções para denotar com um número limitado de símbolos romanos e gregos um número muito maior de grandezas físicas e suas interpretações e abordagens matemáticas. As soluções que eu encontrei são, como sempre, um compromisso. A notação que utilizo é em parte original, e segue a idéia de ser tão simples quanto possível e ao mesmo razoavelmente clara. No entanto, alguns conflitos de símbolos são inevitáveis, conflitos os quais só podem ser parcialmente aliviados pela notação utilizada. A seguir, são dadas as principais explicações sobre a notação adotada no texto e sobre como lidar com as suas eventuais ambiguidades.

Variáveis extensivas e intensivas

Variáveis extensivas dizem respeito a um corpo como um todo. *Em geral*, mas não sempre, elas são denotadas por letras maiúsculas em itálico com um til. Exemplos são

$\dot{\tilde{W}}$: a taxa de trabalho realizada sobre um corpo,

\tilde{U} : a energia interna total de um corpo,

\tilde{P} : a quantidade de movimento total de um corpo.

Variáveis intensivas (definidas em um ponto) e instantâneas *em geral* são indicadas em maiúsculas em itálico também...ou então em letras gregas maiúsculas:

\mathcal{U} : a energia interna específica (por unidade de massa),

U : a velocidade vetorial do fluido,

T : a temperatura,

t : o vetor de tensões,

T : o tensor de tensões,

φ : a densidade,

Θ : a temperatura potencial.

Observe a exceção para o vetor de tensões t .

Médias e flutuações turbulentas

A *decomposição de Reynolds* (Reynolds, 1895) é o procedimento padrão para distinguir grandezas às quais preferimos dar um tratamento determinístico (as “médias” de Reynolds) daquelas que necessitam ser modeladas como variáveis aleatórias ou como processos estocásticos (as “flutuações turbulentas”). Talvez a maneira mais antiga (mas ainda extremamente usada em engenharia) seja

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i,$$

onde a barra indica a média, e a linha indica a flutuação, da grandeza u_i . A honrosa lista de autores que a utilizam inclui Monin e Yaglom (1971, equações 3.3–3.7, p. 207), Richardson (1920), e Stull (1988, equações 2.4.2k, 2.4.3a–c, p. 40–41). Durante muito tempo ela foi minha preferida, mas o seu efeito quando se trabalha com a transformada de Fourier da flutuação,

$$\widehat{u'_i} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x},$$

é feio e particularmente trabalhoso sempre que se escreve as equações espectrais de turbulência à mão.

Tennekes e Lumley (1972) (equação 2.1.6, p. 28) preferem

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i;$$

Hinze (1975) (p. 4) utiliza

$$U_i = \bar{U}_i + u_i,$$

enquanto que Pope (2000) usa um misto de

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i$$

para a velocidade (equação 4.1, p. 83) e

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$$

para um escalar transportado (equação 4.36, p. 91).

Em todos os casos acima, o lado esquerdo é a grandeza intensiva instantânea, para a qual valem as leis de conservação e/ou as equações constitutivas clássicas, e o lado direito é a soma de uma média probabilística e de uma flutuação turbulenta. Talvez o caso mais infeliz seja o da confusão entre densidade e pressão. Utilizando-se por exemplo uma notação uniforme de letras maiúsculas para as grandezas instantâneas, e os símbolos clássicos p para (flutuação de) pressão e ρ para (flutuação de) densidade, tem-se

$$\begin{aligned} P &= \langle P \rangle + p, \\ P &= \langle P \rangle + \rho, \end{aligned}$$

onde P , além de ser um *rô* maiúsculo, infelizmente, é igual (a menos do tipo *itálico*) ao P romano maiúsculo. A diferença é demasiadamente sutil para ser aceitável, de forma que nenhum autor ousa na prática usar o símbolo P para indicar um *rô* maiúsculo. Muitos autores contornam este problema simplesmente utilizando a hipótese de

um escoamento com densidade estritamente constante ou apelando velada ou abertamente para a aproximação de Boussinesq (sobre a qual falaremos com um razoável nível de detalhe neste texto) e utilizando apenas uma densidade de referência constante (digamos, ρ_r) nas equações. Por exemplo, [Richardson \(1920\)](#) sabia perfeitamente disto:

Note that there is no need to assume ρ to be independent of position. REYNOLDS assumed this, but for a reason that does not need concern us. It will be necessary however to assume that ρ' , the variation of density at a fixed point, is so much smaller in comparison with $\bar{\rho}$ than is v'^* in comparison with \bar{v} , that we may put $\rho' = 0$.

O outro problema de notação encontrado em livros de turbulência são as flutuações de temperatura. A notação original de Reynolds,

$$T = \bar{T} + T'$$

funciona bem, mas o uso estrito de maiúsculas-minúsculas preferido por autores mais recentes produziria neste caso

$$T = \langle T \rangle + t,$$

o que é desagradável, já que t está comprometido com a variável “tempo”.

Minha solução para esses dilemas é utilizar sucedâneos para as letras gregas maiúsculas que estão “faltando”, e letras maiúsculas pequenas (*small caps*) alternativas quando as minúsculas já estiverem “comprometidas”. Em resumo, a notação deste texto para a decomposição de Reynolds é

$$\begin{aligned} U_i &= \langle U_i \rangle + u_i && \text{(velocidade),} \\ P &= \langle P \rangle + p && \text{(pressão),} \\ T &= \langle T \rangle + \mathcal{T} && \text{(temperatura),} \\ \varrho &= \langle \varrho \rangle + \rho && \text{(densidade),} \end{aligned}$$

etc.. Infelizmente, nem tudo está perfeitamente resolvido; ainda restam dois problemas.

Conflitos entre símbolos

Muitos símbolos utilizados neste texto possuem significados distintos em termodinâmica e em mecânica, ou mesmo dentro da mecânica. Alguns casos notórios (na notação deste texto) são

- F é a energia livre de Helmholtz; f_i é uma força de corpo;
- G é a energia livre de Gibbs; g é o módulo da aceleração da gravidade; \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade, e g_i é sua i -ésima componente;
- t é o tempo; \mathbf{t} é o vetor-tensão;
- T é a temperatura; \mathbf{T} é o tensor de tensões,

* v é o símbolo de Richardson para a velocidade

etc..

Em lugar de tentar criar um número suficiente de símbolos novos (por exemplo, [Batchelor \(1967\)](#) utiliza e e não u para a energia interna específica), o que de qualquer forma terminaria por esgotar o estoque de símbolos antes que todas as grandezas estivessem representadas, eu preferi:

1. procurar separar os símbolos sempre que possível por capítulo ou pelo menos por seção (por exemplo, a maior parte dos símbolos termodinâmicos está utilizada no capítulo sobre termodinâmica); e
2. deixar ao leitor atento a compreensão do significado dos símbolos em seu contexto.

Variáveis aleatórias e suas realizações

Em teoria de probabilidades, é usual separar uma variável aleatória X de uma particular realização ou valor de quantil x ; isto facilita muito escrever coisas do tipo:

$$P(X \leq x)$$

é a probabilidade de que a variável aleatória X seja menor ou igual que o valor x . Neste texto, entretanto, as letras maiúsculas representam valores instantâneos. Em particular, as flutuações de velocidade u_i , variáveis aleatórias extremamente importantes, são denotadas em letras minúsculas. Infelizmente, não parece possível separar de forma “limpa” o símbolo de uma variável aleatória do símbolo de uma particular realização ou de um quantil. O melhor que pode ser feito é utilizar os argumentos da variável para explicitar a diferença. Assim, voltando à decomposição de Reynolds, em geral teremos

$$U(\mathbf{x}, t; \omega) = \langle U \rangle(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Aqui, as variáveis aleatórias são função do elemento ω do espaço amostral Ω , além de o serem da posição e do tempo. É conveniente imaginar Ω como uma urna de sorteio, e ω como o particular valor sorteado, que neste caso vai definir uma realização da função aleatória $U(\mathbf{x}, t; \omega)$ ou $u(\mathbf{x}, t; \omega)$.

“É função de ...”

Neste trabalho, quando uma variável ϕ qualquer é (por hipótese) uma função univariada de uma outra variável k , nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k).$$

Quando ϕ é uma função (multivariada) de k entre outras variáveis, nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k, \dots).$$

Quando ϕ não é função de k (mas é, possivelmente, função de outras variáveis), dizemos ff:

$$\phi := \text{ff}(k);$$

Finalmente, ϕ pode ser uma constante:

$$\phi := \text{€}$$

1

Introdução

Todo autor e todo curso se sente na obrigação de fornecer uma introdução de “largo espectro” ao assunto que vai ser estudado. Este é, efetivamente, o espírito deste primeiro capítulo. O objetivo geral deste curso é estudar os aspectos mais teóricos e matemáticos da Teoria de Turbulência. Este é um desafio formidável.

Para se entender turbulência, é preciso antes de mais nada “vê-la”. Richardson a via como turbilhões, de diversos tamanhos, os maiores “alimentando” os menores num processo “contínuo” até que as flutuações do escoamento fossem amortecidas pela viscosidade. Isto é a essência do processo de *transferência inercial, não-linear, de covariâncias*, conforme veremos neste curso (bem mais à frente).

Portanto os pioneiros, Richardson, Taylor e Kolmogorov, tinham uma clara noção de que existem “estruturas”, “pedaços” ou “entes” num escoamento turbulento em um *continuum* de escalas, e que o próprio conceito de “escala” é essencial para a compreensão da turbulência.

No entanto, *escala* é um conceito “físico” ou “fenomenológico”, cuja exata definição matemática em termos dos campos de velocidade $U(\mathbf{x}, t)$ ou de escalares tais como a temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ é consideravelmente difícil, senão impossível. Mesmo assim, é possível identificar diferentes escalas com diversas ferramentas matemáticas, tais como:

- Análise espectral (provavelmente a mais antiga).
- Funções empíricas ortogonais.
- Diferentes algoritmos para a identificação de estruturas e sua decomposição.
- Ondeletas (*Wavelets*).

Essas “estruturas” de diversos tamanhos realmente existem em um escoamento turbulento, mas nós devemos ser cuidadosos em não equacioná-las demais (nem de menos!) com uma particular técnica matemática de identificá-las.

Várias fotografias e figuras coloridas interessantes existem no livro sobre turbulência de Lesieur (1990), e também no de Frisch (1995) (que foi professor de Lesieur): dêem uma olhada nelas.

Existem algumas estruturas e alguns problemas clássicos relacionados um pouco à instabilização de escoamentos, que estão relacionados com a questão de turbulência:

- O experimento de Reynolds: a forma “clássica” de apresentar a turbulência em cursos de graduação, ele ainda conserva um considerável charme e didatismo.

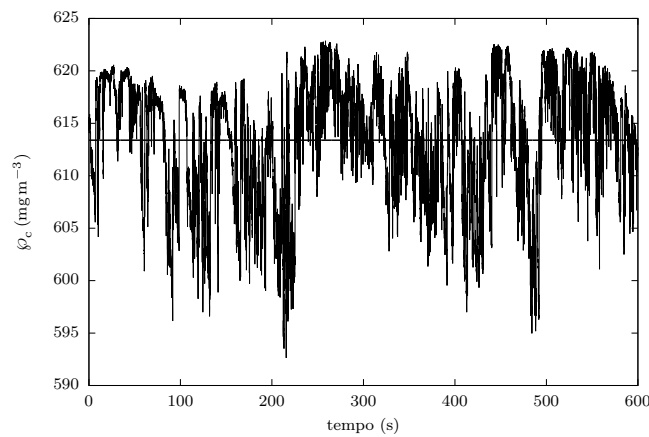


Figura 1.1: 10 minutos de medições de concentração de CO_2 sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40.

- A “Rua de vórtices de von Kármán” (*Kármán vortex street*).
- Jatós e esteiras
- Turbulência atrás de uma grade em um túnel de vento (*grid turbulence*).

1.1 – Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados

Nós estamos acostumados a identificar diversos fenômenos à nossa volta como “aleatórios”: jogos de azar, envolvendo dados e cartas, e loterias, são talvez os mais comuns. Nós percebemos aleatoriedade também, entretanto, em fenômenos que envolvem *física*: por exemplo, a velocidade de uma molécula em um gás, as condições do tempo, e também em numerosos fenômenos de escoamento de fluidos, tais com a superfície de um mar revolto e, é claro, escoamentos turbulentos.

A figura 1.1 é um exemplo disto: ela mostra a medição da densidade φ_c de CO_2 a cerca de 2 m acima do solo, durante 10 minutos, sobre um gramado. A natureza errática de φ_c é inegável, e sugere que existe um componente aleatório na turbulência.

Tratar um fenômeno como aleatório em geral é mais simples do que tentar descrevê-lo em todos os seus detalhes, o que pode levar a uma complexidade analítica ou computacional insuperável. Por exemplo, em princípio nós poderíamos usar as equações da dinâmica de corpos rígidos para tentar prever o resultado do lançamento de um dado. Isto entretanto envolve conhecer em detalhes como o lançamento é feito; a resistência do ar durante a sua queda; a natureza da superfície em que ele cai, etc.. Na prática, o esforço para modelar *cada* lançamento individual é injustificável, e é preferível descrever o processo como probabilístico, com 1/6 de probabilidade de ocorrência do número de cada face.

A situação com turbulência é parecida: nós acreditamos que a turbulência é uma manifestação (ou uma *realização*) das equações de Navier-Stokes, as equações diferenciais que regem o escoamento de um fluido. No entanto, os detalhes associados com a definição das condições iniciais e de contorno, assim como com a solução propriamente dita destas equações não-lineares, são tão formidáveis que alternativas a um ataque direto, e infrutífero, são necessárias. A teoria de probabilidade e proces-

sos estocásticos é um elemento essencial de qualquer abordagem minimamente bem-sucedida ao problema de turbulência.

A melhor abordagem, que todos adotamos modernamente, para a teoria de probabilidade é devida a Kolmogorov, sendo chamada de “abordagem axiomática”. Ela é consideravelmente mais elegante do que a alternativa anterior, histórica, de definir probabilidade como um limite da frequência empírica com que um resultado (um “evento”) é observado. Uma abordagem elementar mas muito clara pode ser encontrada em Papoulis (1991, capítulo 2); em ordem crescente de rigor (mas inevitavelmente, também de dificuldade), outras abordagens podem ser encontradas em James (1981), Rosenthal (2008) e Billingsley (1986).

A essência da abordagem axiomática de Kolmogorov é postular a existência de uma *tripla de probabilidade* (Ω, \mathcal{F}, P) (Rosenthal, 2008, capítulo 2):

- Ω é um conjunto, denominado *espaço amostral*.
- \mathcal{F} é um campo, um conjunto formado por sub-conjuntos de Ω . Mas não *todos* os subconjuntos! (Mais sobre isto em um instante). Em linguagem matemática muito técnica, \mathcal{F} é uma álgebra σ , ou um campo σ .
- P é a medida de probabilidade, que dá, para cada $A \in \mathcal{F}$, a probabilidade do ocorrência do conjunto — ou melhor, do *evento* — A . Mais especificamente, P é uma função do tipo

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A \in \mathcal{F} &\mapsto P(A) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

O segredo (e o enorme problema) da coisa é que \mathcal{F} *não* é, em geral, igual ao conjunto de todos os sub-conjuntos de Ω . Ele é formado apenas pelos conjuntos $A \subseteq \Omega$ para os quais é possível definir $P(A)$ (para mais detalhes, veja a excelente exposição de Rosenthal (2008, capítulo 1)).

Dentro desta abordagem, uma *variável aleatória* VA é agora, a função *mensurável* $U(\omega)$:

$$\begin{aligned} U : \omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\mapsto U = U(\omega). \end{aligned}$$

Por definição, uma função $U(\omega)$ é mensurável se

$$\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq U^\# \} \in \mathcal{F}, \quad U^\# \in \mathbb{R}$$

(Rosenthal, 2008, capítulo 3).

A pergunta mais importante do ponto de vista prático é: qual é a probabilidade de ocorrência de um certo intervalo de *valores* de $U(\omega)$? A resposta é dada com a definição da *função de distribuição* de U , $F(U^\#)$:

$$F(U^\#) \equiv P \left(\left\{ \omega \mid U(\omega) \leq U^\# \right\} \right). \quad (1.1)$$

Em particular, fica então evidente que é necessário que $U(\omega)$ seja mensurável para que $F(U^\#)$ possa ser definida em termos da medida de probabilidade P .

Talvez o descritor mais comum de uma VA seja a sua média, ou valor esperado. Ela é dada por uma integral de $U(\omega)$ sobre Ω , a saber

$$\langle U \rangle \equiv \int_{\Omega} U(\omega) dP(\omega). \quad (1.2)$$

A definição das integrais do tipo (1.2) é tecnicamente muito elaborada, e passa por um assunto denominado *Teoria da medida*; talvez um tratado definitivo sobre o tema, em conexão com a teoria de probabilidade, seja Billingsley (1986). Em engenharia, nós estamos normalmente acostumados com o cálculo de integrais sobre intervalos de números reais, e não em conjuntos mais genéricos e abstratos tais como Ω (cuja natureza sequer foi definida acima!). Felizmente, vem em nosso auxílio o seguinte teorema, que nós citamos sem prova (Rosenthal, 2008, Teorema 6.1.1):

Teorema de mudança de variáveis: Dada uma tripla de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , seja U uma variável aleatória com medida de probabilidade P e distribuição F . Então, para qualquer função mensurável $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF(t). \quad (1.3)$$

Observações:

1. O teorema (1.3) é também a definição do valor esperado de uma função $g(U)$:

$$\langle g(U) \rangle \equiv \int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega). \quad (1.4)$$

2. Em particular, quando $g(t) = t$ (a identidade), nós obtemos a expressão para o valor esperado de U :

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U dF(U). \quad (1.5)$$

3. Finalmente, se $F(U)$ for diferenciável, e se existir a *função densidade de probabilidade*

$$f(U) \equiv \frac{dF}{dU}, \quad (1.6)$$

segue-se que

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U f(U) dU. \quad (1.7)$$

Esta última definição de $\langle U \rangle$ talvez seja a mais comum em cursos introdutórios de probabilidade.

1.2 – Processos estocásticos

Com as ferramentas da seção anterior, nós agora definimos brevemente o que são

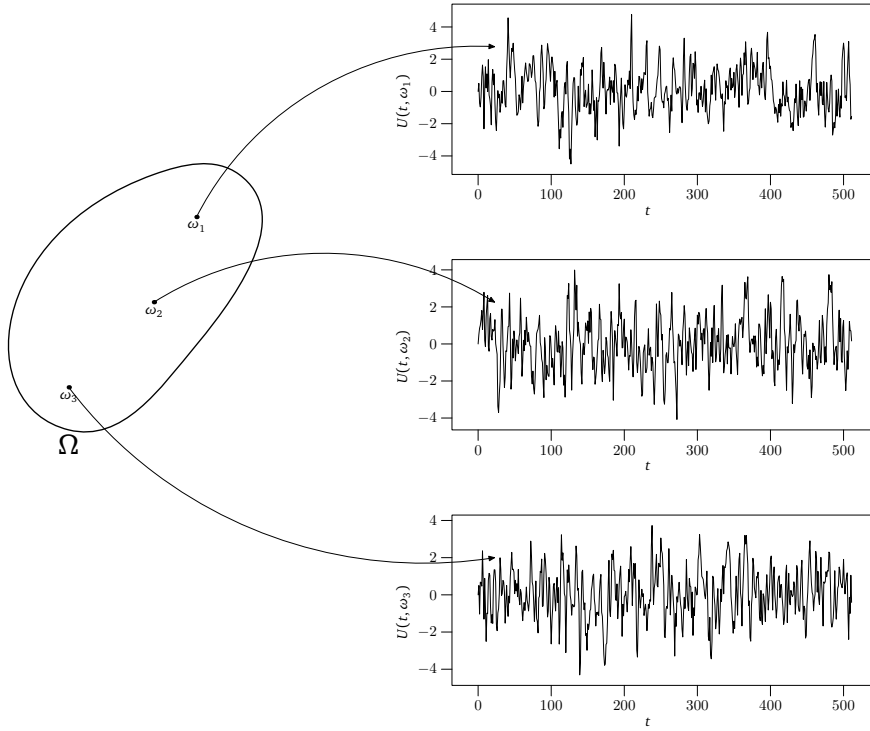


Figura 1.2: Ilustração de um processo estocástico univariado $U(t; \omega)$: as unidades de U e t são arbitrárias.

Processo estocásticos: Seja \mathbb{F} o espaço das funções de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, e $t \in \mathbb{R}$, em \mathbb{R} . Um processo estocástico é uma função

$$U : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$$

$$\omega \mapsto U(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Em outras palavras, a cada “sorteio” ω , em vez de o resultado do sorteio ser um número real (que é a definição de VA), o resultado do sorteio agora é uma função completa U de \mathbf{x} e t . Nós dizemos que U é uma *função aleatória* (note que não há contradição nesta terminologia!). O significado de um processo estocástico está esboçado graficamente na figura 1.2. Por simplicidade, na figura a função aleatória depende apenas de uma variável (t).

A figura 1.2 dá um exemplo da idéia de um *conjunto de realizações* da variável $U(t)$ (na literatura de língua inglesa, um *ensemble*). Para que as médias de U façam sentido, é preciso que elas sejam tomadas sobre todos os “membros” do conjunto. Note entretanto que é exatamente isto o que faz a definição de valor esperado (1.2): o papel de um “membro” do conjunto é desempenhado por um particular $\omega \in \Omega$.

1.3 – A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds

De agora em diante nós vamos postular que em um escoamento turbulento cada variável U_i é um processo estocástico do tipo

$$U_i = U_i(\mathbf{x}, t; \omega). \quad (1.8)$$

Como vimos na seção 1.2, uma *realização* do processo é uma função de \mathbf{x} e t observada para um particular ω , ou ainda: cada ω corresponde a uma *realização diferente* do processo estocástico subjacente.

Dada uma variável U_i em um escoamento turbulento, a *decomposição de Reynolds* consiste em escrever

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i. \quad (1.9)$$

Uma das principais utilidades da decomposição de Reynolds é separar o escoamento em uma variável determinística $\langle U_i \rangle$ (que pode ou não variar no espaço e no tempo) e em uma *flutuação turbulenta* u_i , que é uma VA com valor esperado nulo. De fato, por definição (ver (1.2)) temos que

$$\langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega). \quad (1.10)$$

Note que $\langle U_i \rangle$ é determinística *por definição*. A média de população de u_i então será

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle &= \langle U_i - \langle U_i \rangle \rangle \\ &= \int_{\omega \in \Omega} (U_i(\mathbf{x}, t; \omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t)) dP(\omega) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Infelizmente, (1.11) está longe de garantir que u_i seja um processo estocástico homogêneo. Por exemplo, nada está dito sobre a dependência (ou não) em \mathbf{x} e em t dos momentos de ordem 2 do tipo $\langle u_i u_j \rangle$. Entretanto, ela já é um começo, e pelo menos ela permite separar os efeitos de uma velocidade média com variação local muito forte, como é o caso de camadas-limite turbulentas com forte cisalhamento.

Utilizando (1.9) e (1.10), nós provaremos agora os demais “postulados” de Reynolds:

$$\begin{aligned} \langle \langle U_i \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i \langle U_j \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle \langle u_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Finalmente, as derivadas em relação a x_i e a t comutam com a operação de média probabilística:

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\rangle = \int_{\omega \in \Omega} \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, t; \omega)}{\partial t} dP(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\omega \in \Omega} U_i(x, t; \omega) dP(\omega) \right] \\
&= \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

A prova do resultado para as derivadas parciais em relação a x_i ,

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \tag{1.15}$$

é similar à prova de (1.14), e deixada para o leitor.

O conjunto de relações (1.11)–(1.15) é usualmente conhecido na literatura com o nome de *postulados de Reynolds*. À luz da sua dedução rigorosa acima, o nome mais adequado talvez fosse *lemas de Reynolds*.

1.4 – Independência ou morte

Se duas variáveis U e V são independentes, é relativamente fácil provar que

$$\langle UV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$$

Também é fácil provar que se um processo estocástico é estacionário:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \langle U^2 \rangle &= 0, \\
\left\langle U \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\
\langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\
\left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

É mais difícil mostrar que, se u e v são independentes, então

$$\left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Uma forma de chegar perto é

$$\frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\langle u \rangle \langle v \rangle) = \langle u \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} \langle v \rangle \quad (1.16)$$

Se, como eu já estava pensando quando mudei de notação, u e v são flutuações turbulentas, entretanto, $\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0$; nesse caso, se u e v são independentes, temos o resultado trivial de que

$$\langle uv \rangle = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial t} = 0. \quad (1.18)$$

Vejamos, alternativamente, onde chegamos com

$$\left\langle \frac{\partial(uv)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \quad (1.19)$$

$$= \left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \quad (1.20)$$

$$\left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = - \left\langle v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \quad (1.21)$$

(pois u e v são independentes).

2

Termodinâmica de uma mistura diluída

2.1 – Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell

Para uma mistura de n_c componentes sem reações químicas, pode-se deduzir a regra de fase de Gibbs ([Adkins, 1983](#), p.223, eq. 11.45):

$$n_g = 2 + n_c - n_f, \quad (2.1)$$

onde n_g é o número de graus de liberdade do sistema, e n_f é o número de fases. No caso de $n_c = 2$ e de apenas uma fase ($n_f = 1$), o número de graus de liberdade do sistema é $n_g = 2 + 2 - 1 = 3$. Consequentemente, a equação de estado para uma mistura binária monofásica deve depender de 3 variáveis de estado independentes. Considere agora uma mistura de dois componentes com densidades ρ_1 e ρ_2 , tais que $\rho_1 \gg \rho_2$, ou seja: o sistema é uma mistura diluída da substância 2 na substância 1. Defina a concentração mássica da substância K:

$$c_K \equiv \frac{\rho_K}{\rho}, \quad (2.2)$$

onde

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (2.3)$$

é a densidade total do sistema; isto produz imediatamente as restrições

$$c_1 + c_2 = 1, \quad (2.4)$$

$$dc_1 = -dc_2, \quad (2.5)$$

de modo que dada a concentração de um componente, a concentração do outro está automaticamente determinada. Dependendo da conveniência, portanto, nós utilizaremos o símbolo c como sinônimo de c_2 .

Pela regra de fase de Gibbs, a energia interna (e de fato qualquer outro potencial termodinâmico) deve ser uma função de 3 variáveis de estado. Escolhendo-se as 3 variáveis de estado “naturais” para a energia interna por unidade de massa U ,

$$U = U(v, s, c), \quad (2.6)$$

onde v é o volume específico (volume por unidade de massa)

$$v \equiv \frac{1}{\rho}, \quad (2.7)$$

s é a entalpia específica (entalpia por unidade de massa) e $c = c_2$ é a concentração mássica do componente 2 definida em (2.2).

A diferencial total de U será

$$\begin{aligned} dU &= -pdv + Tds + \sum_{K=1}^2 \mu_K dc_K \\ &= -pdv + Tds + Adc. \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde os μ_K 's são os potenciais químicos dos componentes da mistura, e

$$A = \mu_2 - \mu_1 \quad (2.9)$$

é a *afinidade* da mistura (Kondepudi e Prigogine, 1998, p. 114). Para se obter (2.8), utilizou-se (2.5). Um de nossos principais objetivos neste capítulo é a obtenção de uma expressão para a afinidade A da mistura em termos de grandezas físicas mensuráveis, tais como a temperatura ou calores específicos.

A partir de (2.8), obtém-se 3 relações de Maxwell:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial s} \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v,c} = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{s,c}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c \partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial c} \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_{v,s} = \left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{c,s}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c \partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial c} \Rightarrow -\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)_{s,v} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{c,v}. \quad (2.12)$$

Para a entalpia específica H ,

$$H \equiv U + pV, \quad (2.13)$$

$$dH = vdp + Tds + Adc, \quad (2.14)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.14) são

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{p,c} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s,c}, \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_{p,s} = \left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_{c,s}, \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)_{s,p} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{c,p}. \quad (2.17)$$

Para a energia livre de Helmholtz específica F ,

$$F \equiv U - ST, \quad (2.18)$$

$$dF = -pdv - sdT + Adc, \quad (2.19)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.19) são

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v,c} = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_{T,c}, \quad (2.20)$$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_{v,T} = +\left(\frac{\partial A}{\partial v}\right)_{c,T}, \quad (2.21)$$

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,v} = +\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{c,v}. \quad (2.22)$$

Finalmente, para a energia livre de Gibbs específica,

$$G \equiv H - ST, \quad (2.23)$$

$$dG = vdp - sdT + Adc, \quad (2.24)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.24) serão

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,c} = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,c}, \quad (2.25)$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_{p,T} = +\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_{c,T}, \quad (2.26)$$

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p} = +\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{c,p}. \quad (2.27)$$

2.2 – Mistura diluída de 2 gases ideais

2.2.1 – Equações de estado

Considere agora 2 gases ideais. Cada gás ideal “ K ” da mistura é definido pela equação de estado

$$p_K V = N_K R T, \\ p_K = \frac{M_K}{V} \frac{R}{\mathcal{M}_K} T,$$

e definindo-se a constante e a densidade do gás K

$$R_K \equiv R/\mathcal{M}_K, \quad (2.28)$$

$$\rho_K \equiv \frac{M_K}{V}, \quad (2.29)$$

obtem-se

$$p_K = \rho_K R_K T, \quad (2.30)$$

ou, alternativamente,

$$p_K v_K = R_K T, \quad (2.31)$$

e pela equação para sua energia interna específica,

$$U_K = U_{K0} + c_{vK}(T - T_0) \quad (2.32)$$

(Callen 1985, p. 66; Adkins 1983, p. 116), onde o calor específico a volume constante do gás K é dado por

$$c_{vK} = Z_K R_K \quad (2.33)$$

com $Z_K = 3/2, 5/2$ e 3 para gases monoatômicos, biatômicos e com mais de dois átomos, respectivamente (Müller, 1985, p. 9, eq. 1.20). À temperatura de referência

Tabela 2.1: Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa [†]

propriedade →	\mathcal{M}_K	\mathcal{R}_K	Z_K	c_{pK} (calculado)	c_{pK} (medido)
gás ↓	$10^{-3}\text{kg mol}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$		$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
N ₂	28,013	296,80	5/2	1038,80	1037
O ₂	31,999	259,83	5/2	909,40	909
H ₂ O	18,016	461,48	3	1845,92	1847

[†]Fontes: [Fleagle e Businger \(1980\)](#), [Müller \(1985\)](#), [Iribarne e Godson \(1986\)](#).

T_0 a energia interna possui um valor de referência *arbitrário* U_{K0} . Além disto, p_K é a pressão parcial de vapor do gás K , V é o volume total ocupado, N_K é o número de moles do gás K , R é a constante universal dos gases, M_K é a massa do gás K e \mathcal{M}_K é a massa molar do gás K .

A relação geral entre os calores específicos a volume constante c_v e a pressão constante c_p em uma substância pura é ([Kondepudi e Prigogine, 1998](#), p.46)

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_T \right] \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.34)$$

de forma que da equação de estado (2.31) tem-se

$$c_{pK} - c_{vK} = R_K. \quad (2.35)$$

A tabela 2.2.1 fornece algumas propriedades de gases atmosféricos e a comparação entre os valores calculados de c_{pK} a partir de (2.33) e (2.35) com valores medidos.

2.2.2 – Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal

Entalpia Combinando-se (2.31) e (2.32), obtém-se

$$\begin{aligned} H_K &\equiv U_K + p_K V_K = U_{K0} + c_{vK}(T - T_0) + R_K T \\ &= U_{K0} + R_K T_0 + (c_{vK} + R_K)(T - T_0) \\ &= H_{K0} + (c_{vK} + R_K)(T - T_0) \\ &= H_{K0} + c_{pK}(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Entropia A primeira lei da termodinâmica para o K -ésimo componente da mistura de gases é

$$dU_K = T ds_K - p_K dv_K, \quad (2.37)$$

e como U_K em um gás ideal depende somente de T ,

$$\begin{aligned} c_{vK} dT &= T ds_K - \frac{R_K T}{v_K} dv_K, \\ ds_K &= c_{vK} \frac{dT}{T} + R_K \frac{dv_K}{v_K}, \\ s_K - s_{K0} &= c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{\rho_K}{\rho_{K0}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Alternativamente, use

$$p_K dv_K + v_K dp_K = R_K dT, \quad (2.39)$$

$$\frac{dv_K}{v_K} + \frac{dp_K}{p_K} = \frac{dT}{T}, \quad (2.40)$$

para obter

$$\begin{aligned} ds_K &= (c_{vK} + R_K) \frac{dT}{T} - R_K \frac{dp_K}{p_K}, \\ s_K - s_{K0} &= c_{pK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Novamente, a entropia de referência à temperatura T_0 é s_{K0} . A 3ª lei da termodinâmica prevê que a entropia deve se anular quando a temperatura termodinâmica atinge o zero absoluto, de forma que s_{K0} não deve ser arbitrária; entretanto, nós vamos procurar abordar o problema mais à frente utilizando tabelas de entalpias e entropias de formação dos constituintes da mistura, e de certa forma evitando a 3ª lei.

Energia livre de Gibbs específica Para um gás ideal “K” com equação de estado (2.31), a relação de Maxwell (2.24) resulta em

$$\left(\frac{\partial G_K}{\partial p_K} \right)_T = v_K = \frac{R_K T}{p_K}, \quad (2.42)$$

e agora integrando em relação a p (a T constante) nós obtemos

$$G_K(T, p_K) = \mathcal{G}(T) + R_K T \ln \left(\frac{p_K}{p_{K0}} \right), \quad (2.43)$$

onde $\mathcal{G}(T)$ é uma função somente da temperatura, a determinar. Na verdade, para um gás ideal é possível fazer muito melhor do que isto utilizando-se simplesmente as definições de H_K (2.36) e s_K (2.38):

$$\begin{aligned} G_K &= H_K - T s_K \\ &= H_{K0} + c_{pK}(T - T_0) - T \left[s_{K0} + c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \right] \\ &= H_{K0} + R_K(T - T_0) + c_{vK}(T - T_0) - T \left[s_{K0} + c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \right] \\ &= (H_{K0} - T s_{K0}) + R_K T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \ln \frac{T_0}{T} + T R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \\ &= \underbrace{(H_{K0} - T_0 s_{K0})}_{g_{K0}} - s_{K0} T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) + R_K T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \\ &\quad + c_{vK} T \left(1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + T R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \\ &= g_{K0} + (R_K - s_{K0}) T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \left(1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + T R_K \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Agora, para $T_0/T \approx 1$, se expandirmos $\ln(T_0/T)$ em série de Taylor em torno de 1 até ordem 2, encontraremos

$$G_K \approx G_{K0} + (R_K - s_{K0}) T \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) - \frac{1}{2} c_{vK} T \left(\frac{T_0 - T}{T} \right)^2 + R_K T \ln \frac{p_K}{p_{K0}} \quad (2.45)$$

É importante observar que há necessariamente *duas* constantes de integração a determinar em (2.44) ou em (2.45). Este é o mesmo resultado obtido por Müller (1985) em sua equação (6.72). No nosso caso, nós retivemos a temperatura de referência T_0 de maneira que o argumento de $\ln(\cdot)$ permanece sempre adimensional. O conhecimento de T_0 também será importante quando utilizarmos na próxima sub-seção os conceitos de entalpia, entropia e energia livre de Gibbs de *formação* de uma substância.

2.2.3 – A afinidade de uma mistura de gases ideais

A pressão total de uma mistura de gases ideais será a soma das pressões parciais de vapor (a *lei de Dalton*), do que se obtém a equação de estado da mistura:

$$\begin{aligned}
 P &= \sum p_k \\
 &= \rho_1 R_1 T + \rho_2 R_2 T, \\
 &= \rho \left[\frac{\rho_1}{\rho} R_1 T + \frac{\rho_2}{\rho} R_2 T \right] \\
 &= \rho [c_1 R_1 + c_2 R_2] T \\
 &= \rho [(1 - c) R_1 + c R_2] T \\
 &= \rho [R_1 + (R_2 - R_1) c] T.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Note que a mistura se comporta como se fosse um gás ideal com constante $R(c) = R_1 + (R_2 - R_1)c$ dependente da concentração c .

Além disto, pode-se mostrar que para uma mistura de gases ideais a pressão, a entropia e todos os potenciais termodinâmicos são iguais às somas das quantidades correspondentes de cada gás (Adkins, 1983, p. 215). Nós vamos usar este resultado geral para obter algumas relações de interesse. Por exemplo, para a energia interna,

$$U = U_1 + U_2 = U_1 M_1 + U_2 M_2 \Rightarrow U = c_1 U_1 + c_2 U_2. \tag{2.47}$$

Analogamente, a entalpia e a entropia específicas são dadas por

$$H = c_1 H_1 + c_2 H_2, \tag{2.48}$$

$$S = c_1 S_1 + c_2 S_2. \tag{2.49}$$

Segue-se de (2.48) que o calor específico a pressão constante da mistura é dado por

$$\begin{aligned}
 c_p &\equiv \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,C} = (1 - c) \left(\frac{\partial H_1}{\partial T} \right)_P + c \left(\frac{\partial H_2}{\partial T} \right)_P \\
 &= (1 - c) c_{p1} + c c_{p2} \\
 &= [c_{p1} + (c_{p2} - c_{p1}) c].
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Note que enquanto que v , s , h , etc., são grandezas específicas por unidade de massa *total* M , U_1 e U_2 são energias internas por unidade de massa *de cada gás*, M_1 e M_2 (o mesmo acontecendo com h_1 , h_2 , s_1 , s_2 , etc.). Aqui, as relações-chave são

$$v = \frac{v}{M} = \frac{v}{M_K} \frac{M_K}{M} = v_K c_K \quad (\text{para cada } K), \tag{2.51}$$

$$dv = c_K dv_K + v_K dc_K \tag{2.52}$$

Finalmente, para obtermos a afinidade A da mistura de 2 gases ideais, nós precisamos permitir que c varie. Diferenciando (2.47), obtemos

$$\begin{aligned} dU &= \sum (c_K dU_K + U_K dc_K) \\ &= \sum (c_K (T ds_K - p_K dv_K) + U_K dc_K). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Diferenciando (2.49),

$$\begin{aligned} ds &= \sum (c_K ds_K + s_K dc_K), \\ T \left(\sum c_K ds_K \right) &= T ds - \sum T s_K dc_K, \end{aligned} \quad (2.54)$$

e utilizando (2.51), (2.52) e (2.54) em (2.53):

$$\begin{aligned} dU &= T ds - \sum T s_K dc_K - \sum p_K (dv - v_K dc_K) + \sum U_K dc_K \\ &= T ds - \left(\sum p_K \right) dv - \sum T s_K dc_K + \sum p_K v_K dc_K + \sum U_K dc_K \\ &= T ds - p dv + \sum (U_K + p_K v_K - T s_K) dc_K \\ &= T ds - p dv + \sum G_K dc_K. \end{aligned} \quad (2.55)$$

O resultado, comparado com (2.8), mostra que

$$\mu_K = G_K, \quad (2.56)$$

ou seja: os potenciais químicos de cada componente da mistura são iguais à respectiva energia livre de Gibbs da substância pura correspondente (ambos por unidade de massa); portanto, a afinidade de uma mistura de dois gases ideais é, simplesmente

$$A = G_2 - G_1. \quad (2.57)$$

A rigor, este mesmo resultado poderia ter sido obtido muito mais rapidamente por meio da equação de Euler (Callen, 1985, p. 59),

$$TS = U + pV - \sum_{k=1}^N \mu_K c_K; \quad (2.58)$$

fazendo $N = 1$ para o caso de um único componente, e então $c_K \equiv 1$, obtém-se

$$\mu_K = U_K + p_K v_K - T s_K \equiv G_K. \quad (2.59)$$

Tabela 2.2: Entalpia e energia livre de Gibbs de formação, e entropia padrão de gases atmosféricos a 298,15 K e 100.000 Pa [†]

propriedade →	$\Delta_f H^0$	$\Delta_f G^0$	S^0
gás ↓	MJ kg ⁻¹	MJ kg ⁻¹	kJ kg ⁻¹ K ⁻¹
N ₂	0	0	6,8383
O ₂	0	0	6,4086
H ₂ O	-13,423	-12,688	10,479

[†]Fontes: NIST Chemistry WebBook, <http://webbook.nist.gov/chemistry>.

3

As equações diferenciais de transporte

A turbulência é uma consequência da não-linearidade das equações diferenciais que governam o escoamento de fluidos e o transporte de escalares (vapor d'água, calor, CO₂, etc.). Neste capítulo nós vamos revisar de maneira breve a dedução destas equações a partir de leis de conservação da física e de equações constitutivas.

3.1 – Notação indicial

Uma boa parte de nossas manipulações requer o uso de notação indicial, e dos conceitos de *vetor* e de *tensor*. De maneira extremamente breve, a notação indicial envolve simplesmente a supressão dos símbolos de somatório. Desta forma, um vetor em coordenadas cartesianas na base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \mathbf{e}_i, \quad (3.1)$$

é escrito simplesmente como

$$\mathbf{V} = V_i \mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

A regra geral é que o aparecimento de um mesmo índice duas vezes em uma equação indica soma neste índice. Algumas vezes, entretanto, esta regra não se aplica. Por exemplo, eu posso querer me referir a $V_1 \mathbf{e}_1$ ou $V_2 \mathbf{e}_2$ ou $V_3 \mathbf{e}_3$. Nesse caso, usarei parênteses em torno dos índices, para informar que não há uma soma implícita nestes índices: $V_{(i)} \mathbf{e}_{(i)}$.

3.2 – Continuidade

Considere um volume \mathcal{V} , delimitado por uma superfície fechada \mathcal{S} . O balanço de massa total para \mathcal{V} é dado pela equação de balanço integral

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \quad (3.3)$$

onde \wp é a massa específica, ou densidade, do fluido e \mathbf{U} é o vetor velocidade do escoamento em cada ponto.

Em (3.3), \mathcal{V} é um *volume material* (Slattery, 1972), ou seja, o volume de um corpo que ocupa, instantaneamente, \mathcal{V} . Em Mecânica dos Fluidos básica, frequentemente

as análises se concentram sobre a região do espaço definida por \mathcal{V} , que é então denominado *volume de controle* (Fox e McDonald, 1981).

A idéia de volume material é talvez um pouco mais rica: se considerarmos que cada ponto de \mathcal{V} representa um ponto material imerso no campo de velocidade \mathbf{U} no instante $t = 0$, e seguirmos a trajetória de cada uma dessas partículas, o volume ocupado pelas mesmas em um instante posterior é o volume do mesmo corpo nesse último instante.

O vetor unitário normal à superfície de controle em cada ponto é \mathbf{n} . A integral de superfície acima pode ser transformada em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \, dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \, dV, \\ 0 &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \right) \, dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esboçamos agora o argumento do *Teorema da Localização*: o volume \mathcal{V} para o qual a equação acima se aplica é totalmente genérico: de fato, (3.4) acima aplica-se a *qualquer* volume dentro de um escoamento. Mas isso só é possível se o *integrando* for identicamente nulo, ou seja:

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.5)$$

Uma outra forma útil da equação da continuidade é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \wp}{\partial t} + U_i \frac{\partial \wp}{\partial x_i} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{D\wp}{Dt} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalmente, se utilizarmos o *volume específico*,

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\wp}, \quad (3.7)$$

obteremos uma terceira forma útil da equação da continuidade:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt} \quad \blacksquare \quad (3.8)$$

Fisicamente, (3.8) significa que a divergência do campo de velocidade é igual à taxa temporal de variação do volume de fluido (por unidade de volume!) em cada ponto.

3.3 – Misturas

Nesta seção nós vamos seguir a essência da abordagem de Bird et al. (1960, cap. 16): ela permite entender claramente o significado de difusão molecular de uma substância em um fluido, e em nossa opinião evita totalmente confusões comuns a respeito do papel da difusão e da advecção em meios contínuos.

Além disso, nós vamos considerar, por simplicidade, apenas misturas binárias, com um soluto A dissolvido em um solvente B. A generalização para misturas com mais de 2 componentes é óbvia.

Em uma mistura binária nós postulamos a existência em cada ponto de uma densidade para cada componente, \wp_A e \wp_B , de tal maneira que as massas totais de A e B em um volume material V são, respectivamente,

$$M_A = \int_V \wp_A dV, \quad M_B = \int_V \wp_B dV. \quad (3.9)$$

É evidente que, em cada ponto, devemos ter

$$\wp = \wp_A + \wp_B. \quad (3.10)$$

Note que a abordagem postulatória de (3.9) é compatível com a visão tradicional em Mecânica do Contínuo. Prosseguindo, nós também postulamos a existência de campos de velocidade para cada espécie, U_A e U_B , cujas integrais em um volume material são a quantidade de movimento total de cada espécie, respectivamente P_A e P_B . Por analogia com (3.9)–(3.10), temos

$$P_A = \int_{\mathcal{V}} \wp_A U_A dV, \quad P_B = \int_{\mathcal{V}} \wp_B U_B dV. \quad (3.11)$$

Agora, a quantidade de movimento total do corpo que ocupa \mathcal{V} deve ser

$$P = \int_{\mathcal{V}} \wp U dV, \quad (3.12)$$

onde U é a velocidade do fluido em cada ponto, de tal forma que devemos ter

$$\wp U = \wp_A U_A + \wp_B U_B. \quad (3.13)$$

O ponto fundamental agora é perceber que é extremamente difícil, senão impossível, medir diretamente U_A e U_B . Em seu lugar, é muito mais simples trabalhar unicamente com o campo de velocidade U do fluido como um todo em cada ponto. Para tanto, nós definimos o vetor fluxo difusivo de massa de A:

$$J_A = \wp_A [U_A - U]. \quad (3.14)$$

A concentração mássica de A é

$$C_A \equiv \frac{\wp_A}{\wp}, \quad (3.15)$$

e vale a lei de Fick em cada ponto:

$$J_A = -\wp v_A \nabla C, \quad (3.16)$$

onde v_A é a difusividade molecular de A na mistura. Relações totalmente análogas também valem para o solvente B.

Finalmente, das equações (3.10) e (3.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} J_A + J_B &= \wp_A [U_A - U] + \wp_B [U_B - U] \\ &= \wp_A U_A + \wp_B U_B - (\wp_A + \wp_B) U \\ &= \wp U - \wp U = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Essa equação é válida em todos os pontos de um fluido, *exceto talvez em uma superfície onde haja um fluxo líquido de A para dentro da massa de fluido*.

Prosseguindo, por analogia com (3.3), o balanço integral de A é tão simples quanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_A) dS \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U} + \mathbf{U}]) dS; \\
 - \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U}]) dS &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\
 - \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

onde a introdução de \mathbf{J}_A na última linha segue-se de sua definição (3.14). Uma dedução totalmente análoga vale para B .

A aplicação dos teoremas da divergência e da localização para A e para B produz, agora, duas equações diferenciais de balanço de massa:

$$\frac{\partial \wp_A}{\partial t} + \frac{\partial \wp_A U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{Ai}}{\partial x_i}, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \wp_B}{\partial t} + \frac{\partial \wp_B U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{Bi}}{\partial x_i}. \tag{3.20}$$

A soma de (3.19) e (3.20) tem que restaurar (3.5); dada a equação (3.10), segue-se necessariamente que

$$\frac{\partial J_{Ai}}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{Bi}}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{3.21}$$

(3.21) vale *sempre*; duas coisas podem acontecer. No caso mais geral, qualquer difusão molecular do soluto A é compensada por difusão molecular, também do solvente B , de uma certa forma, “no sentido oposto”. Note entretanto que (3.21) estipula que é a soma das *divergências* dos fluxos difusivos de massa que é nula. Uma situação particular que pode ocorrer é o caso em que $\mathbf{J}_A = \text{const.}$ e $\mathbf{J}_B = \mathbf{0}$; portanto é possível ocorrer fluxo difusivo apenas do soluto, desde que a sua divergência seja nula. É comum a confusão entre um fluxo e sua divergência nas equações de um meio contínuo, e este é um bom exemplo para explicitar sua diferença.

Exercícios

Considere um duto retangular com largura infinita em y , altura h (em z), escoamento laminar, e velocidade constante na seção igual a $U_0 \mathbf{e}_x$. Considere um volume de controle retangular $(0,0)-(L,0)-(L,h)-(0,h)$. Suponha um fluxo de nitrogênio puro entrando no \mathcal{V} em $x = 0$, e um fluxo vertical constante de CO_2 especificado (como condição de contorno) nas duas fronteiras:

$$J_{\text{CO}_2}(x, z = 0) = J_{\text{CO}_2}(x, z = h) = J_0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Supondo que em $x = L$ o CO_2 já está totalmente homogenizado em x , calcule a concentração $c(L, z)$ de CO_2 na seção de saída.

3.4 – Quantidade de movimento

O balanço integral geral de quantidade de movimento para um volume material \mathcal{V} é

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp \mathbf{U} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{3.22}$$

onde F_s são as forças de superfície atuando sobre o volume de controle, e F_c são as forças de corpo. A equação a seguir,

$$F_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \, dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \, dS = \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} \mathbf{e}_i \, dS, \quad (3.23)$$

condensa um volume considerável de conhecimento. A força de superfície é dada pela integral de superfície do *vetor-tensão* \mathbf{t} . Esse por sua vez é escrito na forma $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$, isto é, como o pré-produto do vetor unitário normal \mathbf{n} pelo *tensor de tensões* \mathbf{T} . Finalmente, a *equação constitutiva* para o tensor de tensões \mathbf{T} em função do primeiro coeficiente de viscosidade μ , do segundo coeficiente de viscosidade λ e da pressão termodinâmica P é

$$T_{ji} = \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ji}. \quad (3.24)$$

onde

$$S_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.25)$$

é a taxa de deformação; o delta de Kroenecker é

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (3.26)$$

A integral de superfície correspondente à força de superfície é transformada em uma integral de volume por intermédio do Teorema da divergência:

$$F_s = \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \, dV \right] \mathbf{e}_i = \left[\int_{\mathcal{V}} \left(-\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ji}) \right) \, dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.27)$$

Para obter (3.27), nós supusemos μ constante, e o “retiramos” da operação de diferenciação. Embora estritamente isso não seja verdade, é usual desconsiderar as variações de μ (e eventualmente de λ) com a posição na dedução das equações de Navier-Stokes.

A força de corpo num referencial em rotação deve incluir a aceleração de Coriolis: $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da terra, \mathbf{g} é a aceleração da gravidade (o que inclui os demais efeitos de a Terra ser um referencial não-inercial – veja Liggett (1994)), e

$$F_c = \int_{\mathcal{V}} \wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}] \, dV = \left[\int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k) \, dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.28)$$

Os termos do lado direito são

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} \, dV = \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \wp U_i}{\partial t} \, dV \right] \mathbf{e}_i, \quad (3.29)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \, dS = \left[\oint_{\mathcal{S}} U_i n_j U_j \, dS \right] \mathbf{e}_i = \left[\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_i U_j) \, dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.30)$$

Reunindo todos os termos,

$$\left[\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}) + \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k) - \frac{\partial \wp U_i}{\partial t} - \frac{\partial \wp U_i U_j}{\partial x_j} \right) \, dV \right] \mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Pelo teorema da localização, o integrando deve ser identicamente nulo; então:

$$\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j U_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.32)$$

Expandindo o lado esquerdo e simplificando-o por meio de (3.5), e explicitando T_{ji} com (3.24):

$$\wp \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \wp \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.34)$$

onde nós usamos (3.24) e (3.27), e

$$\wp \nu_u \equiv \mu \quad (3.35)$$

define a viscosidade cinemática ν_u .

Embora (3.34) seja provavelmente a forma mais “clássica” de apresentar as equações de Navier-Stokes compressíveis, ela *não* será a mais útil quando precisarmos lançar mão da aproximação de Boussinesq no capítulo 5. Por isso, preferimos escrever a equação para quantidade de movimento na forma totalmente equivalente

$$\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.36)$$

3.5 – Vorticidade

As seguintes identidades serão úteis na sequência: se $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ é um campo escalar, então:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}]_{=0}}_{=0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Além disso,

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{u}] = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_l$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ik} \\
&= \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{jil} + \epsilon_{ijl}]}_{=0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

A vorticidade em um ponto de um escoamento é definida como o rotacional da velocidade:

$$\Omega = \nabla \times U, \tag{3.39}$$

ou, em notação indicial:

$$\Omega_k \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k. \tag{3.40}$$

É fácil verificar a identidade:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \Omega_k &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\
&= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\
&= \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Considere agora o rotacional da equação de *momentum*, pré-condicionada com a identidade (3.41):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} - \epsilon_{ijk} U_j \Omega_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} \Omega_j U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \\
\frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Nosso próximo passo é calcular o rotacional de (3.42). Isso é natural, na medida em que surgirá uma equação para $D\Omega/Dt$. Note também a presença de dois gradientes em (3.42), $\nabla\phi$ e $\nabla\psi$, onde

$$\phi = \frac{1}{2} (U_j U_j), \quad (3.43)$$

$$\psi = -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k}. \quad (3.44)$$

O rotacional de ambos é nulo, devido a (3.37). Prosseguimos agora termo a termo. O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}. \quad (3.45)$$

O rotacional do segundo termo do lado esquerdo de (3.42) é

$$\begin{aligned} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \epsilon_{lim} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\ &= \epsilon_{mli} \epsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\ &= [\delta_{mj} \delta_{lk} - \delta_{mk} \delta_{lj}] \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m). \end{aligned}$$

Algumas simplificações ainda são possíveis. Note que a velocidade angular da terra, ω , é constante: as suas derivadas espaciais serão nulas. Além disso, note também que, em virtude de (3.38), $\nabla \cdot \Omega = 0$. Aplicando essas simplificações,

$$\begin{aligned} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m) \\ &= U_k \frac{\partial [\Omega_m + 2\omega_m]}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ &\quad - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - U_m \frac{\partial}{\partial x_j} [\Omega_j + 2\omega_j] \\ &= U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Conforme já havíamos comentado, o rotacional do terceiro termo do lado esquerdo de (3.42) é nulo em virtude de (3.37):

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2} \frac{\partial U_j U_j}{\partial x_i} = \epsilon_{lim} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} = 0. \quad (3.47)$$

O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.42) é nulo:

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0. \quad (3.48)$$

Com a ajuda de (3.44), o rotacional do segundo termo do lado direito de (3.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{1}{\wp} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{\wp} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{1}{\wp} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\
&= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right). \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Finalmente, o rotacional do terceiro termo do lado direito de (3.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu_u \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.50)$$

Nós agora reunimos os resultados (3.45)–(3.50) na equação da vorticidade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} &= \underbrace{[\Omega_j + 2\omega_j]}_I \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \underbrace{[\Omega_m + 2\omega_m]}_{II} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{III} + \underbrace{\nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}}_{IV}. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

O lado esquerdo de (3.51) é a derivada material da vorticidade. O termo I do lado direito é o termo de alongamento de vórtice (*vortex stretching*): existe uma tendência a “esticar” as linhas de velocidade, intensificando a vorticidade ao mesmo tempo em que ela ocupa regiões menores (mais “finas”) do escoamento. O termo II do lado direito de (3.51) só vai ser importante em escoamentos compressíveis. O termo III é o termo baroclínico. É fácil ver que

$$III = \frac{1}{\wp^2} \nabla \wp \times \nabla \psi;$$

a presença de desalinhamento entre os gradientes de densidade e de pressão altera a vorticidade; finalmente, o termo IV é o termo viscoso.

É possível definir para a vorticidade, uma grandeza análoga ao que é a energia cinética para a velocidade. O nome dessa grandeza é *enstrofia*:

$$Z \equiv \frac{1}{2} \Omega_m \Omega_m.$$

Da mesma forma que ocorre com a energia mecânica, cuja equação pode ser deduzida a partir da equação de momentum fazendo-se o produto interno dessa última com o vetor velocidade (ver seção 3.7), é possível obter uma equação para a enstrofia tomando-se o produto interno de 3.51 com Ω :

$$\begin{aligned}
\Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + \Omega_m U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} &= \Omega_m [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\
&+ \Omega_m \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \Omega_m \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

O lado esquerdo de (3.52) é

$$\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \quad (3.53)$$

(a derivada material da enstrofia). O único termo para o qual dedicaremos algum esforço algébrico adicional aqui será o último de (3.52). Note que (esse truque será utilizado repetidamente neste livro):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \right) = \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}; \Rightarrow \\ v_u \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} &= v_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - v_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A *natureza* de cada um dos dois termos do lado direito de (3.54) acima é diferente: o primeiro termo é uma divergência e redistribui enstrofia (por difusão molecular), enquanto que o segundo termo é *sempre negativo*: na ausência de efeitos de compressibilidade, ele é o termo responsável pela destruição (dissipação) de enstrofia no escoamento. Note também que o termo baroclínico deu origem a um produto triplo entre os vetores $\nabla \varphi$, ∇P e Ω . Nossa equação final para o balanço de enstrofia fica:

$$\begin{aligned} \frac{DZ}{Dt} &= \Omega_m [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ &+ \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P - (\lambda + v_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \Omega_m + v_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - v_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}. \quad (3.55) \end{aligned}$$

3.6 – Energia

A equação de balanço da energia *total* (ou seja: interna e cinética) para um volume de controle é

$$\dot{\tilde{W}} + \dot{\tilde{Q}} + \dot{\tilde{I}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \quad (3.56)$$

onde $\dot{\tilde{W}}$ é a taxa de trabalho realizada sobre o volume de controle pelas forças de superfície e de corpo, $\dot{\tilde{Q}}$ é o fluxo de calor por condução para dentro do volume de controle e $\dot{\tilde{I}}$ é a taxa de aporte de energia para dentro do volume de controle devido à difusão de massa e consequente mudança relativa de composição química da mistura. Os tis servem para diferenciar valores totais de valores por unidade de massa; assim (por exemplo), \tilde{W} é o trabalho sobre um corpo, enquanto que W é o trabalho por unidade de massa. A energia específica (por unidade de massa) é

$$E = \frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U}, \quad (3.57)$$

onde \mathcal{U} é a energia interna por unidade de massa. Note que nós não incluímos nenhum termo de energia potencial, porque $\dot{\tilde{W}}$ contabilizará *todas* as forças atuando sobre o volume de controle, incluindo as conservativas. O cálculo de cada um dos termos do lado esquerdo de (3.56) é feito como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Q}} &= - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) dS = \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p v_T (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p v_T n_j \frac{\partial T}{\partial x_j} dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\wp c_p v_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde \mathbf{q} é o vetor fluxo de calor. Em notação indicial, a *equação constitutiva* para a transferência de calor por condução, ou difusão molecular, é

$$q_i = -\wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.59)$$

onde c_p é o calor específico a pressão constante do fluido, $\nu_{\mathcal{T}}$ é a difusividade térmica molecular, e T é a temperatura termodinâmica.

A taxa de trabalho realizado sobre \mathcal{V} é

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &= \int_{\mathcal{V}} (\wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\varpi} \times \mathbf{U}] \cdot \mathbf{U}) dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &= \int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk} \varpi_j U_k) U_i dV + \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} U_i dS \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\wp (g_i - 2\epsilon_{ijk} \varpi_j U_k) U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) \right) dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\wp \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \varpi_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) U_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.60)$$

O lado direito de (3.56) é

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(E\wp)}{\partial t} dV = \int_{\mathcal{V}} \left(E \frac{\partial \wp}{\partial t} + \wp \frac{\partial E}{\partial t} \right) dV \quad (3.61)$$

e

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS &= \oint_{\mathcal{S}} E \wp n_j U_j dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_j E) dV = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(E \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} + \wp U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) dV \end{aligned} \quad (3.62)$$

Combinando (3.61) e (3.62) acima, tem-se

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\underbrace{E \left(\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} \right)}_{=0} + \wp \left(\frac{\partial E}{\partial t} + U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) \right) dV, \quad (3.63)$$

onde o primeiro termo é nulo por força da equação da continuidade. O restante é

$$\int_{\mathcal{V}} \wp \frac{DE}{Dt} dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \left(U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) dV. \quad (3.64)$$

Combinando-se todos os termos da equação de energia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} + U_i \wp \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \varpi_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) - \right. \\ \left. \wp \left(U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Colocando em evidência os termos com $\wp U_i$ em comum,

$$\wp U_i \left[\frac{DU_i}{Dt} - \left(g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) \right] \equiv 0, \quad (3.66)$$

já que o termo entre parênteses é a própria equação de balanço de quantidade de movimento! O que resta, após aplicarmos o teorema da localização, é

$$\wp \frac{DU}{Dt} = \wp c_p v_\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}, \quad (3.67)$$

onde, de maneira análoga ao que foi feito com a equação de quantidade de movimento quando consideramos μ constante, nós consideramos o termo $\wp c_p v_\theta$ constante e o retiramos da derivada. Novamente, embora não seja estritamente correto, isso é usual.

O termo $\partial U_i / \partial x_j T_{ji}$ é facilmente calculável:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} = \left(\left(-P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ij} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.68)$$

$$= -P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \lambda \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (3.69)$$

Mas pela simetria dos índices i e j ,

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} 2S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 = 2S_{ij} S_{ij}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Note que (3.71) é uma soma de 9 termos, todos eles positivos. Finalmente, obtemos

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} S_{ij}. \quad (3.72)$$

Os dois últimos termos correspondem à conversão *irreversível* de energia mecânica em energia interna, e é possível mostrar que sua soma é sempre positiva, debaixo da *hipótese de Stokes* (Kundu, 1990, p. 92),

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \quad (3.73)$$

Então, a equação de interação tensor de tensões-gradiente de velocidade fica

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + 2\mu \left(S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \right), \quad (3.74)$$

e podemos completar o quadrado do termo entre parênteses:

$$\begin{aligned}
 S_{ij}S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 &= S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\
 &= S_{ij}S_{ij} - 2 \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\
 &= S_{ij}S_{ij} - 2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\
 &= S_{ij}S_{ij} - 2S_{ij} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \\
 &= \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Finalmente,

$$T_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2. \tag{3.76}$$

A equação diferencial completa para a energia interna fica

$$\wp \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \underbrace{\wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{P \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{\text{II}} + \underbrace{2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{\Phi=\text{III}}, \tag{3.77}$$

onde I representa o aquecimento/resfriamento de uma partícula de fluido por condução, II representa o trabalho reversível realizado pela pressão, e III, que é sempre positivo, é a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna, e denomina-se *dissipação viscosa*. Em muitos livros, a dissipação viscosa é denotada pela letra grega (minúscula ou maiúscula) Φ . Essa última está relacionada com uma grandeza que vai aparecer inúmeras vezes em teoria de turbulência, a *taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa*, \mathcal{E}_e . As duas relacionam-se simplesmente por

$$\Phi = \wp \mathcal{E}_e. \tag{3.78}$$

Uma forma alternativa a (3.77) é facilmente obtida utilizando a definição de entalpia específica,

(2.13) [repetida aqui enquanto o capítulo 2 não é revisado]

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} + P\mathcal{V}.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{P}{\mathcal{V}} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\
 \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\mathcal{U} + P\mathcal{V}) - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\
 \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica, β_P , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade, κ_T , são definidos nesse caso por

$$\beta_P \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P, \quad (3.80)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (3.81)$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa) \mathcal{H} em função de T e P , e calculando seu diferencial,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= c_p dT + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP, \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P. \quad (3.83)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP + TdS, \quad (3.84)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} + T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T; \quad (3.85)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \beta_P \mathcal{V}, \quad (3.86)$$

onde S é a entalpia específica, donde

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} (1 - \beta_P T). \quad (3.87)$$

Para tanto, partimos de (3.79), e utilizamos (3.83) e (3.87) para exprimir $D\mathcal{H}/Dt$:

$$\begin{aligned} \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p \mathcal{V}_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p \mathcal{V}_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p \mathcal{V}_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p \mathcal{V}_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (3.88)$$

3.7 – A dissipação viscosa como perda de energia mecânica e fonte de energia interna

Neste ponto, é muito conveniente nós dedicarmos um pouco mais de atenção à *energia mecânica* do escoamento. Como vimos, utilizando uma série de simplificações baseadas nas leis de conservação de massa e de *momentum*, nós reduzimos o balanço integral que corresponde à conservação *geral* de energia (cinética *mais* interna), (3.56), a uma equação diferencial para a energia interna, (3.77). Na sequência, nós vamos seguir se não passo a passo pelo menos muito de perto a excelente exposição do assunto feita por Kundu (1990). Primeiramente, note de (3.60) que o taxa de trabalho realizado pelas forças de superfície sobre um volume material \mathcal{V} é:

$$\dot{W}_s = \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS = \dots = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) dV. \quad (3.89)$$

Kundu (1990) denomina $\partial (T_{ji} U_i) / \partial x_j$ de *trabalho total*, por unidade de volume, das forças de superfície em um ponto. Já o produto escalar de \mathbf{U} pela equação dinâmica (3.33) é

$$\rho U_i \frac{DU_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \rho U_i g + U_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.90)$$

Note que o trabalho por unidade de volume das forças de superfície efetivamente responsável pela *variação* da energia cinética, $U_i \partial T_{ji} / \partial x_j$, é *diferente* do trabalho total; utilizando a regra da cadeia, entretanto, é elementar que

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \rho U_i g + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji}) - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}. \quad (3.91)$$

O último termo do lado direito da equação acima é denominado por Kundu *trabalho de deformação*. Ele é dado por (3.76), donde

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \underbrace{\rho U_i g}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji})}_{II} + \underbrace{P \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{III} - \underbrace{2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{IV}. \quad (3.92)$$

Nosso quadro de balanço de energia fica, então, completo. O termo I, claro, é o trabalho da força peso. O termo II é um “termo de transporte”. Note que $U_i T_{ji}$ representa um fluxo advectivo de tensão total T_{ji} . Esse termo encontra-se sob a forma de uma divergência: a sua integral sobre um volume suficientemente grande envolvendo o escoamento de interesse anula-se. Isso significa que II não pode criar nem destruir energia cinética localmente, mas representa uma *redistribuição* de energia cinética dentro do escoamento. O interessante é o aparecimento de III e IV: eles são os termos II e III de (3.77), com o sinal trocado. Em (3.92), III é a contribuição do trabalho *reversível* da pressão para o aumento da energia cinética (quando $\partial U_k / \partial x_k > 0$), e IV é a conversão *irreversível* de energia cinética em energia interna.

3.8 – A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas

Duas quantidades que vimos até aqui aparecem de forma natural como quadrados. Elas são a energia cinética do escoamento (por unidade de massa),

$$E_c = \frac{1}{2} U_i U_i \quad (3.93)$$

e \mathcal{E}_e , a taxa de dissipação de E_c :

$$\mathcal{E}_e = 2\nu_u \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (3.94)$$

Em (3.94), nós utilizamos (3.77) e (3.78) juntamente com (3.35).

Aplicando a decomposição de Reynolds (1.9) a (3.93), temos:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle + u_i] [\langle U_i \rangle + u_i] \\ &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle \langle U_i \rangle + 2 \langle U_i \rangle u_i + u_i u_i]. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.11)–(1.13),

$$\langle E_c \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle}_{\langle E_{cm} \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle}_{\langle E_{ct} \rangle}. \quad (3.96)$$

Note que, por ser definida como um quadrado, a “flutuação” de E_c (ou seja, o segundo e o terceiro termos do lado direito de (3.95)) *não* é nula.

O primeiro termo do lado direito de (3.96) é a *energia cinética do escoamento médio*, $\langle E_{cm} \rangle$. O segundo termo de (3.96) é de grande importância em teoria de turbulência. Ele é, apropriadamente, denominado de *energia cinética da turbulência*, $\langle E_{ct} \rangle$, muitas vezes abreviado pela sigla ECT*. Para registro:

$$\langle E_{ct} \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle. \quad (3.97)$$

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de energia cinética é análogo. Comece notando que, novamente com a ajuda da decomposição de Reynolds (1.9), e de (1.15),

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right]}_{\langle S_{ij} \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]}_{s_{ij}} \\ &= \langle S_{ij} \rangle + s_{ij}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde $\langle S_{ij} \rangle$ é a taxa de deformação média, e s_{ij} é a sua flutuação. Da mesma forma, é imediato que

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (3.99)$$

*Em Inglês, *Turbulence Kinetic Energy* ou TKE.

Agora,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_e &= 2\nu_u \left[\left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \times \\
 &\quad \left[\left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \\
 &= 2\nu_u \left\{ \left[\left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]^2 + 2 \left[\left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \right. \\
 &\quad \left. \left[s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^2 \right\} \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Prosseguimos, com a promediação de (3.100) e (novamente) com o uso dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{E}_e \rangle &= 2\nu_u \left[\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \langle S_{ij} \rangle \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \right] \\
 &= 2\nu_u \left[\langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \left\langle s_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \delta_{ij} \delta_{ij} \right]. \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned}
 \langle S_{ij} \rangle \delta_{ij} &= \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k}, \\
 s_{ij} \delta_{ij} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \\
 \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3,
 \end{aligned}$$

donde

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = \underbrace{2\nu_u \left[\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \right]}_{\langle \mathcal{E}_{em} \rangle} + \underbrace{2\nu_u \left[\langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]}_{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle}. \quad (3.102)$$

Da mesma forma que a energia cinética (vide (3.96)), portanto, a taxa de dissipação de energia cinética pode ser decomposta numa taxa de dissipação associada ao escoamento médio $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ (primeiro termo do lado direito de (3.102)), e uma *taxa de dissipação da energia cinética da turbulência*, $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ (segundo termo do lado direito de (3.102)). Essa última é uma grandeza muito importante. Para registro:

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = 2\nu_u \left[\langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]. \quad (3.103)$$

No início da década de 1940, começou a ficar claro que $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ é uma grandeza fundamental em turbulência. No próximo capítulo, nós vamos ver que, com base em alguns argumentos simples e muito razoáveis, $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \gg \langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ quando o número de Reynolds de um escoamento se torna muito grande. Isso por sua vez significa que $\langle s_{ij} s_{ij} \rangle \gg \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$, e que deve existir, no caso escoamentos turbulentos com número de Reynolds muito grande, uma grande separação entre as *escalas macroscópicas* e as *escalas microscópicas* da turbulência. As primeiras estão associadas aos gradientes de velocidade, e taxas de deformação, médios. As segundas estão associadas aos gradientes quadráticos médios (e taxas de deformação quadráticas médias).

3.9 – O balanço do semiquadrado da temperatura

É possível obter uma equação de balanço do semi-quadrado da temperatura de forma totalmente análoga à que foi usada para obter a equação para a energia mecânica, (3.91). Isso é feito multiplicando-se (3.88) por T :

$$\rho c_p T \frac{DT}{Dt} - \beta_P T^2 \frac{DP}{Dt} = \rho c_p \nu_T T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.$$

Mas

$$\begin{aligned} T \frac{DT}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{T^2}{2} \right), \\ T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{T^2}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}; \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{T^2}{2} \right) + \frac{\beta_P}{\rho c_p} T^2 \frac{DP}{Dt} = \nu_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{T^2}{2} \right) - \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + T\Phi. \quad (3.104)$$

Observamos que, em escoamentos naturais, o segundo termo do lado esquerdo em geral é desprezado com base em argumentos de ordem de grandeza (mais sobre isso depois), e que o primeiro termo do lado direito é a divergência do vetor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{T^2}{2} \right) \mathbf{e}_j;$$

como tal, pelo Teorema da Divergência, esse termo redistribui, mas não cria nem destrói globalmente, a grandeza $T^2/2$ (observe a analogia com o termo III de (3.92)).

O último segundo do lado direito de (3.104), $\nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}$, é responsável pela dissipação local da grandeza $T^2/2$. Como tal, ele é análogo ao último termo (termo de dissipação de energia cinética) em (3.92), dado em destaque em (3.94). Nós definimos portanto a quantidade análoga

$$\mathcal{E}_T \equiv \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (3.105)$$

O último termo do lado direito de (3.104) é um termo de fonte, geralmente desimportante, devido à dissipação de energia mecânica em energia interna.

Por analogia com o que fizemos com a Energia Cinética da Turbulência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{2} &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle + \mathcal{T}] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] \\ &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle \langle T \rangle + 2 \langle T \rangle \mathcal{T} + \mathcal{T}\mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.11)–(1.13),

$$\left\langle \frac{1}{2} T^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle T \rangle \langle T \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{T}\mathcal{T} \rangle \quad (3.107)$$

O segundo termo do lado direito de (3.107) é a semivariância das flutuações de temperatura. Ele é um termo importante em escoamentos turbulentos em que existem flutuações de temperatura (e de densidade).

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de $T^2/2$ se segue.

$$\langle \mathcal{E}_T \rangle = \nu_T \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \right\rangle \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} &= \nu_T \left\langle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \underbrace{\nu_T \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle} + \underbrace{\nu_T \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle}_{\langle \mathcal{E}_{Ti} \rangle} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Da mesma forma que acontece com $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ e $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$, nós veremos em seguida que $\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle \ll \langle \mathcal{E}_{Ti} \rangle$. Esse último, a taxa de dissipação da semivariância das flutuações de temperatura, é um parâmetro fundamental para descrever a dinâmica das flutuações turbulentas de temperatura.

4

As macro e micro escalas da turbulência

4.1 – Macro e micro escalas: uma apresentação informal

Como observa [Davidson \(2004, p. 19–20\)](#), uma *boa parte* do que nós sabemos sobre turbulência pode ser resumido nas relações

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \sim \tilde{u}^3 / \ell, \quad (4.1)$$

$$\eta_u = \left(\frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4}, \quad (4.2)$$

$$\check{u} = (v_u \langle \mathcal{E}_{et} \rangle)^{1/4}, \quad (4.3)$$

$$\tau_u = \left(\frac{v_u}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

O restante é como se segue: \tilde{u} e ℓ são macroescalas de velocidade e de comprimento, respectivamente. Elas refletem as velocidades e comprimentos “macroscópicos” que nós “vemos” em um escoamento: o diâmetro da tubulação, a distância da superfície em uma camada-limite, a profundidade do escoamento em um rio, etc. (ℓ); e as diferenças de velocidade entre duas seções, a intensidade das flutuações turbulentas de velocidade, etc. (\tilde{u}).

Para as ordens de grandezas de termos nas equações, nós vamos adotar a notação de [Tennekes e Lumley \(1972\)](#): em (4.1), o símbolo \sim significa que o coeficiente adimensional que torna a relação uma equação não é maior do que 5, e não é menor do que 1/5.

Já η_u (“eta”, em grego), \check{u} e τ_u (“tau”, em grego) são microescalas de comprimento, velocidade e de tempo; em homenagem ao seu proponente, elas são chamadas atualmente de *microescalas de Kolmogorov* ([Kolmogorov, 1941, 1991](#)). \check{u} e η_u não podem ser “vistas”; elas refletem as diferenças de velocidade e de comprimento que ocorrem em cada ponto de um escoamento turbulento, e que só podem ser estimadas (na média quadrática, como veremos em breve) em função da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência, $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$, e da viscosidade cinemática ν_u .

Para o estudante que aborda Turbulência pela primeira vez, ℓ e \tilde{u} são estranhos e difíceis de compreender, enquanto que η_u , \check{u} , e τ_u são completamente impossíveis. Numa tentativa de aliviar a estranheza, a abordagem que se segue procura dar um pouco de concretude a esses conceitos, por meio de alguns exemplos.

Em lugar de prosseguir com “escalas” arbitrárias \tilde{u} e ℓ , considere o escoamento clássico de um fluido com densidade φ constante através de uma expansão súbita em

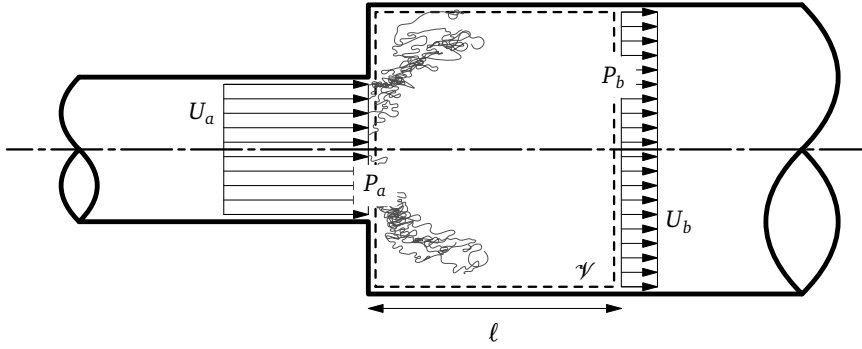


Figura 4.1: Expansão súbita em uma tubulação.

uma tubulação, mostrado na figura 4.1. As áreas das seções transversais antes e depois da expansão são A_a e A_b .

Os perfis esboçados na figura 4.1 são idealizações: é bem conhecido que a velocidade (relativa) de um fluido junto a uma parede sólida é zero, que é a “condição de não-deslizamento”. O significado físico da figura 4.1, portanto, é que na maior parte do escoamento “antes”, e “depois”, da expansão súbita de área, a velocidade é *aproximadamente* constante.

Para o volume material \mathcal{V} (com superfície \mathcal{S}) indicado pela linha pontilhada na figura 4.1, as equações macroscópicas de balanço são (3.3) (massa); (3.22) (quantidade de movimento) e (3.56) (energia, com $\tilde{I} \equiv 0$), repetidas aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ \tilde{W} + \tilde{Q} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \end{aligned}$$

Suponha agora perfis uniformes de velocidade nas seções de entrada (a) e saída (b),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a &= U_a \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{U}_b &= U_b \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Para \wp constante, a equação macroscópica de conservação de massa em regime permanente produz

$$U_a A_a = U_b A_b. \quad (4.5)$$

Para a conservação de quantidade de movimento, é preciso supor que as forças de atrito têm efeito desprezível, e que as forças de superfície são, preponderantemente, devidas à diferença de pressão entre as sessões a (entrada) e b (saída), de tal forma que

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot [-P \boldsymbol{\delta}] dS = \oint_{\mathcal{S}} [-P \mathbf{n}] dS.$$

Na entrada, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$, e na saída $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$, donde (para perfis uniformes de pressão na entrada (P_a) e na saída (P_b)),

$$F_{s1} = (P_a - P_b) A_b.$$

Observe que A_b é comum, na expressão acima, para P_a e para P_b . A interpretação é que, imediatamente após a expansão, a pressão (na seção a) *ainda* é P_a , e age de forma aproximadamente uniforme sobre a face esquerda do volume de controle. Com o termo transiente identicamente nulo, e $F_c \equiv \mathbf{0}$, segue-se agora que (na direção longitudinal, que é a única direção relevante para os balanços macroscópicos),

$$(P_a - P_b) A_b = \oint [-U_a^2 A_a + U_b^2 A_b] = \oint [U_b - U_a] (U_a A_a) \quad (4.6)$$

O trabalho realizado sobre a superfície de controle é preponderantemente devido à pressão:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &= \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dS \\ &= \int_{A_a} U_a \mathbf{e}_1 \cdot [-P_a(-\mathbf{e}_1)] \, dS + \int_{A_b} U_b \mathbf{e}_1 \cdot [-P_b(+\mathbf{e}_1)] \, dS \\ &= P_a U_a A_a - P_b U_b A_b. \end{aligned}$$

A equação de balanço de energia, portanto, torna-se

$$(P_a - P_b)(U_a A_a) = \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \underbrace{\oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}}_{\text{Tx. de Dissipação}}. \quad (4.7)$$

Os dois últimos termos do lado direito são o fluxo líquido de energia interna (\mathcal{U}_A e \mathcal{U}_B são as energias internas por unidade de massa na entrada e na saída do volume de controle), e a taxa de calor trocada com o volume de controle. Por hipótese, a dissipação de energia mecânica deve fazer com que ambos sejam positivos, ou seja: $\mathcal{U}_B > \mathcal{U}_A$ (a dissipação aumenta a energia interna específica do fluido) e $\dot{\tilde{Q}} < 0$ (parte de energia mecânica dissipada flui como calor para fora do volume de controle). Por definição, a sua soma é a taxa total de dissipação de energia. Se $\overline{\epsilon_e}$ é a dissipação média por unidade de massa dentro do volume de controle, temos

$$\oint A_b \ell \overline{\epsilon_e} = \oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}.$$

Note primeiramente que a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\left[(P_a + (1/2)\oint U_a^2) - (P_b + (1/2)\oint U_b^2) \right] (U_a A_a) = \oint A_b \ell \overline{\epsilon_e},$$

ou seja, a “perda de carga” hidráulica entre as seções a e b é igual à dissipação de energia. Do ponto de vista de obter uma expressão final para $\overline{\epsilon_e}$, entretanto, é mais frutífero primeiro eliminar a diferença de pressão entre as sessões utilizando (4.6):

$$P_a - P_b = \oint (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b},$$

e em seguida substituir na equação (4.7):

$$\begin{aligned} \oint (U_b - U_a) \frac{(U_a A_a)^2}{A_b} &= \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \oint A_b \ell \overline{\epsilon_e}, \\ (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b} &= [(1/2)(U_a + U_b)(U_b - U_a)] + \frac{\ell \overline{\epsilon_e} A_a}{U_a A_b}, \end{aligned}$$

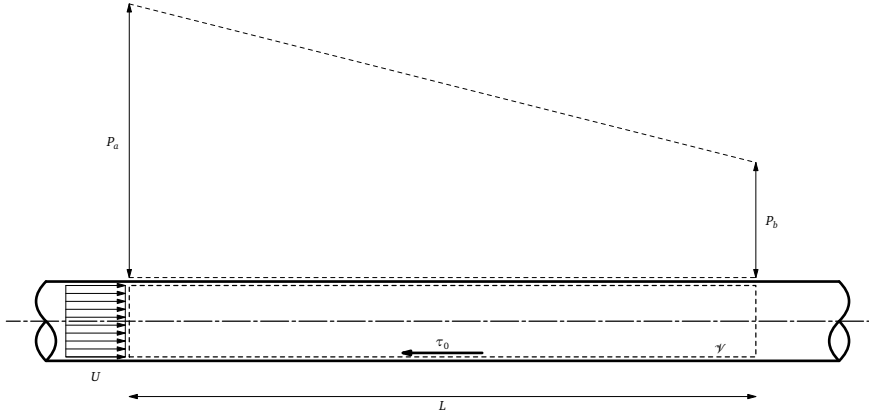


Figura 4.2: Escoamento clássico em um tubo com perda de carga.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(U_a + U_b) - U_a \frac{A_a}{A_b} &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a(U_a - U_b)} \bar{\epsilon}_e, \\
 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{A_a}{A_b} \right] U_a &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a^2 \left(1 - \frac{A_a}{A_b} \right)} \bar{\epsilon}_e, \\
 \bar{\epsilon}_e &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_a}{A_b} \right)^2 \frac{A_a}{A_b} \right] \frac{U_a^3}{\ell}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que (4.8) tem a mesma forma de (4.1). No entanto, há uma diferença significativa: enquanto que na sequência nós suporemos que (4.1) vale *pontualmente*, (4.8) dá a taxa de dissipação *média* dentro do volume de controle. Um argumento mais “crítico” — no sentido de que de fato não existe nada de excepcional em (4.8) — é que as duas equações têm que ter a mesma forma simplesmente pelo fato de que $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ e $\bar{\epsilon}_e$ possuem as mesmas dimensões físicas. No entanto, a equação (4.1) aparecerá repetidamente neste livro, e espera-se que a dedução da análoga (4.8) ajude o estudante a compreender a sua motivação.

Nosso segundo exemplo, mostrado na figura 4.2, é o escoamento clássico ao longo de um tubo com perda de carga. Esse problema vai ser estudado detalhadamente do ponto de vista do perfil de velocidade, e de como a perda de carga é calculada, mais à frente neste texto. Por enquanto, vamos supor que há uma perda de carga linear ao longo da tubulação e fazer a mesma aproximação de um perfil constante de velocidade na seção que fizemos no exemplo anterior. Os balanços integrais de massa, quantidade de movimento e energia entre as seções A e B do volume de controle \mathcal{V} indicado na figura resultam em

$$\begin{aligned}
 U &= \text{constante em } x, \\
 (P_a - P_b)A - \tau_0 \times 2\pi RL &= 0, \\
 (P_a - P_b)UA &= \underbrace{\wp(\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)UA}_{\wp AL \bar{\epsilon}_e} - \tilde{Q},
 \end{aligned}$$

onde $A = \pi R^2$ é a área da seção transversal, e τ_0 é a tensão de cisalhamento entre a parede do tubo e o escoamento. Da equação de balanço de quantidade de movimento,

$$P_a - P_b = \frac{2\tau_0 L}{R},$$

que levada à equação de balanço de energia produz

$$\begin{aligned}\frac{2\tau_0 L}{R} U &= \wp L \overline{\epsilon_e}, \\ 2 \frac{\tau_0}{\wp} \frac{U}{R} &= \overline{\epsilon_e}.\end{aligned}$$

Neste ponto, é conveniente introduzir o *coeficiente de arrasto* C_D e a *velocidade de atrito* u_* :

$$\tau_0 \equiv \wp C_D U^2, \quad (4.9)$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\wp}} = u_*^2, \quad (4.10)$$

donde

$$\overline{\epsilon_e} = \frac{2}{\sqrt{C_D}} \frac{u_*^3}{R}. \quad (4.11)$$

Observe que, novamente, (4.11) tem a forma geral de (4.1). Novamente, trata-se de uma taxa de dissipação *média*, e um observador rigoroso poderá também argumentar que em sua essência (4.11) é simplesmente uma consequência das dimensões físicas de $\overline{\epsilon_e}$.

No entato, tanto (4.8) quanto (4.11) contam uma “história” importante: a taxa de dissipação de energia mecânica $\overline{\epsilon_e}$ está sendo *imposta* pelas escalas macroscópicas do escoamento. Observe como o coeficiente de viscosidade cinemática não comparece em nenhuma das duas equações. Em ambos os casos, o escoamento turbulento se “ajustará” a essa taxa imposta pelas escalas macroscópicas.

Hoje conhecemos que o processo pelo qual a energia mecânica injetada no escoamento pelas escalas macroscópicas é dissipada possui dois “estágios”: no primeiro estágio, forma-se uma “cascata” de energia, que se redistribui sob a forma de energia cinética da turbulência em escalas progressivamente menores. O termo responsável por esse estágio nas equações de Navier-Stokes é o termo não-linear, $U_k \partial U_i / \partial x_k$. Em geral, supõe-se que esse processo é acompanhado pela geração de turbilhões sucessivamente menores, e ele é bem descrito pelas equações de vorticidade. Em 3 dimensões, o processo de transferência inercial de energia é compreendido como sucessivos alongamentos de vórtices (*vortex stretching*) e entortamentos de vórtices (*vortex tilting*). Em um dado momento, as escalas espaciais que caracterizam esses vórtices são suficientemente pequenas para que a viscosidade do escoamento interaja diretamente com eles.

Esse é o segundo estágio, no qual a energia desses numerosos pequenos vórtices é dissipada. As escalas características da “faixa de dissipação” são η_u , \hat{u} , e τ_u . Um argumento dimensional simples sugere que $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \sim \nu (\hat{u} / \eta_u)^2$. Nessas pequenas escalas o escoamento é “laminar”, no sentido de que o número de Reynolds formado pelas escalas locais de comprimento e de velocidade que caracterizam os menores vórtices do escoamento é da ordem de 1, como veremos em detalhe a seguir.

4.2 – Uma definição formal das escalas macroscópicas

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de $\langle U \rangle$ e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de “cova-

riâncias turbulentas”, por exemplo de $\langle u_i u_j \rangle$. Para o campo de velocidade, nós adotaremos inicialmente as seguintes estimativas:

$$\langle U_i \rangle \sim \tilde{u}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}}{\ell}, \quad (4.13)$$

$$\langle u_i u_j \rangle \sim \tilde{u}^2. \quad (4.14)$$

Uma dificuldade é que, como muitas vezes a notação de ordem de grandeza será utilizada em conjunto com a notação indicial de Einstein, a “ordem” de um termo envolvendo índices repetidos pode se referir a um ou alguns dos sub-termos, ou à soma de todos os sub-termos. Para evitar qualquer ambiguidade, nós usaremos \sim para indicar a ordem de grandeza do *maior em módulo* (e possivelmente outros) de todos os sub-termos; e $\sim\sim$ para indicar explicitamente a *soma* de todos os sub-termos. Portanto,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \sim \tilde{u}/\ell,$$

significa que

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} \left| \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right| \sim \tilde{u}/\ell,$$

enquanto que

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \sim\sim \tilde{u}/\ell$$

significa que

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right) \sim \tilde{u}/\ell.$$

Note que a segunda notação, $\sim\sim$, só faz sentido quando houver pelo menos um índice repetido do lado esquerdo. Note também que (4.12)–(4.14) já seguem essa notação, ou seja: em cada uma delas, a ordem de grandeza refere-se a *termos individuais*, ou ao maior em módulo dos termos obtidos variando-se i e j .

Apesar de (4.14) não ser necessária nesta seção, nós a incluímos aqui para que a discussão a seguir fique auto-contida. Como vimos acima, \tilde{u} é uma escala macroscópica de velocidade. As equações (4.12)–(4.14), e suas generalizações óbvias para outras variáveis do escoamento, tais como densidade, pressão, concentração de um escalar e temperatura, constituem-se em um poderoso instrumento de análise das equações que regem um escoamento turbulento. Sua interpretação, entretanto, é difícil. [Tennekes e Lumley \(1972, p. 47\)](#) comentam sobre diversos erros comuns de interpretação de (4.12)–(4.14), e discutem em detalhe suas justificativas.

Além disso, elas não são necessariamente universais! Por exemplo, nada obriga que haja apenas uma escala de velocidade \tilde{u} , e uma escala de comprimento ℓ , macroscópicas. Dependendo da geometria, e da complexidade do escoamento, várias escalas macroscópicas de velocidade e comprimento (e diversas outras variáveis, é claro) podem surgir.

No entanto, as relações (4.12)–(4.14) tendem a valer em escoamentos com cisalhamento médio que possuem uma única escala característica de velocidade, e uma única escala característica de comprimento ([Tennekes e Lumley, 1972, p. 47–50](#)). O essencial de (4.12)–(4.14) é a suposição de que as mesmas escalas \tilde{u} e ℓ comparecem

tanto na estimativa da ordem de grandeza dos gradientes de grandezas médias *quanto* das covariâncias turbulentas. Veremos mais à frente que ℓ também pode ser associada à *escala integral da turbulência*, que tem uma definição estatística precisa. Como observam Tennekes e Lumley (1972), essa suposição de que as escalas macroscópicas servem a dois papéis reflete o fato de que elas são as únicas escalas características do escoamento; conseqüentemente, seu surgimento (a menos de coeficientes da ordem de 1) é uma exigência da consistência dimensional das expressões envolvidas.

Naturalmente, essa hipótese restringe a complexidade dos escoamentos que podemos analisar utilizando as equações (4.12)–(4.14); mesmo em situações ligeiramente mais complexas, entretanto, idéias similares revelam-se úteis e em geral ajudam a compreender ou modelar melhor o problema.

As equações (4.12)–(4.13) são suficientes para estimarmos a contribuição da taxa de dissipação associada ao escoamento médio $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ para a taxa total de dissipação de energia cinética, $\langle \mathcal{E}_e \rangle$. Levando (4.13) em (3.102), encontramos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{em} \rangle &\sim \nu_u \left(\frac{\tilde{u}}{\ell} \right)^2 \\ &= \nu_u \frac{\tilde{u}^3}{\tilde{u} \ell^2} \\ &= \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \Rightarrow \\ \langle \mathcal{E}_{em} \rangle &\sim \text{Re}_\ell^{-1} \langle \mathcal{E}_e \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Em (4.15), nós encontramos pela primeira vez o número de Reynolds (na escala ℓ):

$$\text{Re}_\ell \equiv \frac{\tilde{u} \ell}{\nu_u}, \quad (4.16)$$

e usamos a estimativa (4.1) para a taxa total de dissipação.

De fato, se nós admitirmos como vínhamos comentando que a dissipação total é dada por (4.1), (4.15) nos informa que os gradientes do escoamento médio são extremamente ineficazes para produzir essa dissipação em escoamentos turbulentos, nos quais o número de Reynolds em (4.16) é frequentemente da ordem de 10^3 ou maior.

A figura simples, porém extremamente útil, que surge é a seguinte: se a taxa de dissipação total de energia cinética é imposta pelas “grandes escalas” \tilde{u} , ℓ , do escoamento, essas mesmas escalas produzem gradientes de velocidade (e conseqüentemente taxas de deformação) que são incapazes de dissipar a energia cinética nessa taxa!

Isso significa que devem existir no escoamento gradientes de velocidade, e conseqüentemente taxas de deformação, *muito maiores* . Para encontrá-las, precisamos obviamente estudar a ordem de grandeza da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência, $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$.

4.3 – Uma definição formal das escalas microscópicas

Se tomarmos (formalmente) o limite $\text{Re}_\ell \rightarrow \infty$, a contribuição de $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$ para $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ tende a zero em (4.15). Isso *não é uma mera formalidade*. Na maioria dos escoamentos naturais e industriais, os números de Reynolds são muito altos.

Por exemplo, a 20°C , $\nu_u [\text{água}] = 1,005 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, e $\nu_u [\text{ar}] = 1,50 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (à pressão atmosférica padrão ao nível do mar). Então, para um rio com uma velocidade

típica $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ e uma profundidade típica de $\ell = 1 \text{ m}$, $\text{Re}_\ell = 10^6$. Da mesma forma, para uma velocidade do vento $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ a uma altura $\ell = 10 \text{ m}$, nós temos $\text{Re}_\ell = 10^6$.

A equação (4.15) então nos dá $\langle \mathcal{E}_e \rangle \approx \langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ nessas condições. Retornando a (3.103), isso só pode significar que a ordem de grandeza de $\langle s_{ij}s_{ij} \rangle$ (e eventualmente de $\langle (\partial u_k / \partial x_k)^2 \rangle$) deve ser tal que

$$\langle s_{ij}s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \sim \left(\frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2, \quad (4.17)$$

onde devemos ter

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \nu_u \left(\frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2. \quad (4.18)$$

A equação (4.17) mostra claramente que a ordem de grandeza do *gradiente microscópico de velocidade* \tilde{u}/η_u é definida por uma média quadrática. Por sua vez, (4.18) é suficiente para definir esse gradiente, mas é por si só incapaz de “separar” as escalas microscópicas de velocidade, \tilde{u} , e de comprimento, η_u . Isso pode ser feito de duas maneiras. A primeira é puramente dimensional: se as únicas grandezas disponíveis para definir η_u e \tilde{u} são $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ e ν_u , então (4.2) e (4.3) seguem-se necessariamente do Teorema dos Π 's de Buckingham.

A segunda é encontrar η_u , \tilde{u} como a solução de um sistema de duas equações, a primeira das quais é (4.18). A segunda equação é obtida a partir da intuição (*insight*) de que, *localmente*, o escoamento deve ser laminar. O número de Reynolds associado deve ser de ordem 1:

$$\text{Re}_{\eta_u} = \frac{\tilde{u}\eta_u}{\nu_u} = 1. \quad (4.19)$$

A solução do sistema (4.18)–(4.19) produz, novamente, as microescalas de Kolmogorov dadas por (4.2) e (4.3).

4.4 – A cascata de energia

Conforme notado pela primeira vez por Kolmogorov (1941), (4.1) não se aplica apenas à escala integral de comprimento ℓ . Com alguma modificação, ela pode ser usada para todas as escalas intermediárias de comprimento r entre ℓ e η_u . Para ver isso de uma maneira um pouco mais formal, defina a *função de estrutura de ordem 2* da velocidade:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; \quad (4.20)$$

$$D_{uu}(\mathbf{r}) \equiv \langle [\mathbf{U}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_1)] \cdot [\mathbf{U}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_1)] \rangle \quad (4.21)$$

A definição (4.21) só é possível se os incrementos de velocidade do escoamento forem *homogêneos*; nesse caso, D_{uu} depende apenas da diferença $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, e não de cada um dos dois vetores.

Se, além disso, o escoamento for *isotrópico*, $D_{uu} = D_{uu}(r)$ apenas, onde $r = |\mathbf{r}|$. Kolmogorov (1941) formulou a hipótese de *isotropia local*: segundo essa hipótese, apenas para $r \ll \ell$, o escoamento é isotrópico. Isso sem dúvida é uma analogia com o caso molecular, em que as velocidades das moléculas se distribuem igualmente em todas as direções, e do *Teorema de equipartição de energia*: a energia cinética das moléculas de um gás divide-se igualmente nas 3 direções x , y , e z . No caso de turbulência, a situação é mais complicada: em escoamentos no mundo real, as “grandes escalas” ℓ

quase nunca são homogêneas, uma vez que, como veremos, existem direções preferenciais de produção da energia cinética da turbulência. Nesse sentido, o termo *local* desempenha um papel importante: aqui, a hipótese é que a natureza difusiva da turbulência *tende* a equalizar a distribuição direcional de energia cinética da turbulência apenas para escalas r muito menores do que ℓ . *Apenas* nessas escalas o escoamento (segundo essa hipótese) é isotrópico. Nesse último caso, escrevemos

$$D_{uu}(r) = \langle [u(r) - u(0)]^2 \rangle \equiv (\delta u_r)^2, \quad (4.22)$$

e definimos uma escala de velocidade δu_r na escala de comprimento r .

Outra hipótese da teoria de Kolmogorov é que, para $\eta_u \ll r \ll \ell$, (4.1) continua valendo na forma

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \alpha^{3/2} \frac{(\delta u_r)^3}{r}. \quad (4.23)$$

Segue-se, imediatamente, a previsão da teoria de Kolmogorov (1941) para a faixa inercial da função de estrutura:

$$D_{uu}(r) = \alpha \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{2/3} r^{2/3}. \quad (4.24)$$

Essencialmente, (4.24) é apenas a afirmativa de que $(\delta u_r)^3/r$ é invariante para uma faixa de separações r que correspondem a diferenças de velocidade δu_r . Essa faixa, $\eta_u \ll r \ll \ell$, é a *faixa inercial*.

4.5 – Macro e microescalas de temperatura

Macro e microescalas adicionais devem ser adicionadas à lista (4.1)–(4.3) quando a temperatura representa um papel importante em um escoamento turbulento. Começamos por notar, sem demonstração (ainda) que existe uma cascata de semi-variância de temperatura da turbulência que é análoga à cascata de energia cinética da turbulência que discutimos na seção 4.4.

Dizer onde isso será feito!

Na seção 3.9, nós obtivemos

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = \nu_T \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \quad (4.25)$$

para a taxa de dissipação de semi-variância da temperatura da turbulência. A equação análoga a (4.1) é

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \sim \frac{\tilde{\mathcal{T}}^2 \tilde{u}}{\ell}. \quad (4.26)$$

Em (4.26), $\tilde{\mathcal{T}}$ é uma macroescala de temperatura, e estamos supondo que a macroescala de comprimento associada à temperatura é o mesmo ℓ já utilizado antes para a energia cinética.

A equação que define a microescala de gradientes de temperatura análoga a (4.18) é

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = \nu_T \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_T^2}. \quad (4.27)$$

onde $\check{\mathcal{T}}$ é a microescala de temperatura; η_T é a microescala de comprimento para temperatura; e \tilde{u} é a microescala de velocidade.

Para separar $\check{\mathcal{T}}$ de $\eta_{\mathcal{T}}$, nós podemos recorrer ao Teorema dos Pi's, e escrever

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{c_1}, \quad (4.28)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{c_2}, \quad (4.29)$$

Note que precisamos *incluir* $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ na lista de variáveis intervenientes. A equação (4.28) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{c_1}, \\ \mathcal{L} &= [\Theta^2 \mathcal{T}^{-1}]^{a_1} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}]^{b_1} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}]^{c_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= -3c_1, \\ 2(b_1 + c_1) &= 1, \end{aligned}$$

ou $a_1 = 0$, $b_1 = 3/4$, $c_1 = -1/4$. Segue-se que

$$\eta_{\mathcal{T}} = \left(\frac{\nu_{\mathcal{T}}^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4}, \quad (4.30)$$

um resultado totalmente análogo a (4.2), exceto que $\nu_{\mathcal{T}}$ aparece no lugar de ν_u .

Já (4.29) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{c_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \mathcal{T}^{-1}]^{a_2} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}]^{b_2} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}]^{c_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - 3c_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou $a_2 = 0$, $b_2 = 1/4$, $c_2 = -1/4$. Segue-se que

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4}, \quad (4.31)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{T}}^2 &= \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/2}, \\ \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle &= \check{\mathcal{T}}^2 \nu_{\mathcal{T}}^{-1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/2}, \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 \nu_{\mathcal{T}}^{-3/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/2} \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 \left[\underbrace{\nu_{\mathcal{T}}^{-3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/4}}_{\eta_{\mathcal{T}}^{-1}} \right]^2 \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \left(\frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \end{aligned}$$

Naturalmente, esse resultado é o mesmo que (4.27): a obtenção de $\eta_{\mathcal{T}}$ por meio do Teorema dos Pi's em (4.29) é equivalente à definição (4.27).

Esse resultado, representado pelas escalas (4.30) e (4.5), entretanto, é limitado pelas hipóteses que fizemos na aplicação do Teorema dos Pi's em (4.28)–(4.29): note que nós estamos supondo que as microescalas associadas à temperatura *não dependem da viscosidade cinemática* ν_u .

Na prática, isso só é verdade se o número de Prandtl do fluido,

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu_u}{\nu_{\mathcal{T}}}, \quad (4.32)$$

for da ordem de 1. De fato, se $\text{Pr} \sim 1$, apenas uma das difusividades é necessária em (4.28)–(4.29): a inclusão da outra levaria a um sistema com mais incógnitas do que equações, já que há apenas 3 dimensões subjacentes (Θ , L e T).

Se $\text{Pr} \ll 1$ ou $\text{Pr} \gg 1$, entretanto, (4.30) deixa de ser verdadeira. A teoria envolvida deve, então, necessariamente incluir tanto $\nu_{\mathcal{T}}$ quando ν_u : ela foi desenvolvida por Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959), e prevê que a microescala de comprimento $\eta_{\mathcal{T}}$ depende de Pr .

Para $\text{Pr} \geq 1$, Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) obtiveram

$$\frac{\eta_{\mathcal{T}}}{\eta_u} = \text{Pr}^{-1/2}, \quad (4.33)$$

donde

$$\check{\mathcal{T}} = \left(\frac{\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{1/2} \eta_{\mathcal{T}}. \quad (4.34)$$

Os resultados de Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) podem ser obtidos com uma relativa facilidade da seguinte maneira. Em primeiro lugar nós incluímos ν_u na lista de variáveis que governam a dinâmica da dissipação das flutuações de temperatura. Em segundo lugar, nós incluímos uma nova dimensão L_{θ} no problema.

A previsão do Teorema dos Pi's para $\eta_{\mathcal{T}}$ e para $\check{\mathcal{T}}$ agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_1}, \quad (4.35)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_2}, \quad (4.36)$$

A equação (4.35) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_1}, \\ L_{\theta} &= [\Theta^2 T^{-1}]^{a_1} [L^2 T^{-1}]^{b_1} [L_{\theta}^2 T^{-1}]^{c_1} [L^2 T^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(b_1 + d_1) &= 0, \\ 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou $a_1 = 0$, $b_1 = 1/4$, $c_1 = 1/2$, $d_1 = -1/4$. Segue-se que

$$\eta_{\mathcal{T}} = \nu_u^{1/4} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4}$$

$$\begin{aligned}
&= v_u^{1/4} v_u^{1/2} v_u^{-1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\
&= v_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \left(\frac{v_{\mathcal{T}}}{v_u} \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4} \left(\frac{v_u}{v_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\
&= \eta_u \text{Pr}^{-1/2},
\end{aligned} \tag{4.37}$$

que é o mesmo que (4.33), de Batchelor (1959). Já (4.36) produz

$$\begin{aligned}
\llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket v_u \rrbracket^{b_2} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_2}, \\
\Theta &= [\Theta^2 \text{T}^{-1}]^{a_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_2} [\text{L}_0^2 \text{T}^{-1}]^{c_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
2a_2 &= 1, \\
2b_2 + 2d_2 &= 0, \\
2c_2 &= 0, \\
-a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0,
\end{aligned}$$

ou $a_2 = 1/2$, $b_2 = 1/4$, $c_2 = 0$, $d_2 = -1/4$. O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = v_{\mathcal{T}} \left(\frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (4.5) e (4.27). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura, $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$, em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura \mathcal{E}_{Tt} .

O outro caso

A previsão do Teorema dos Pi's para $\eta_{\mathcal{T}}$ e para $\check{\mathcal{T}}$ agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [v_u]^{b_1} [v_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_1}, \tag{4.38}$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [v_u]^{b_2} [v_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_2}, \tag{4.39}$$

mas as dimensões serão diferentes! Em particular,

$$\llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket = \Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_0^{-1}$$

A equação (4.38) produz

$$\begin{aligned}
\llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket v_u \rrbracket^{b_1} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_1}, \\
\text{L}_0 &= [\Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_0^{-1}]^{a_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_1} [\text{L}_0^2 \text{T}^{-1}]^{c_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_1},
\end{aligned}$$

donde

$$2a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} 2(a_1 + b_1 + d_1) &= 0, \\ -a_1 + 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou $a_1 = 0$, $b_1 = 1/4$, $c_1 = 1/2$, $d_1 = -1/4$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= v_u^{1/4} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\ &= v_u^{1/4} v_u^{1/2} v_u^{-1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\ &= v_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \left(\frac{v_{\mathcal{T}}}{v_u} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4} \left(\frac{v_u}{v_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

que é o mesmo que (4.33), de Batchelor (1959). Já (4.39) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket v_u \rrbracket^{b_2} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \text{T}^{-1}]^{a_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_2} [\text{L}_0^2 \text{T}^{-1}]^{c_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou $a_2 = 1/2$, $b_2 = 1/4$, $c_2 = 0$, $d_2 = -1/4$. O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = v_{\mathcal{T}} \left(\frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (4.5) e (4.27). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura, $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$, em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura \mathcal{E}_{Tt} .

4.6 – Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos

Os gradientes microscópicos de velocidade e de temperatura (e por conseguinte, de densidade, via (4.17) e (4.25) são

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \sim \left(\frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2, \tag{4.41}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \right\rangle \sim \left(\frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \tag{4.42}$$

Esses gradientes microscópicos podem, agora, ser facilmente relacionados com os gradientes macroscópicos (sempre em *ordem de magnitude*), como se segue:

$$\begin{aligned}
 v_u \frac{\check{u}^2}{\eta_u^2} &= \frac{\check{u}^3}{\ell}, \\
 \frac{\check{u}}{\eta_u} &= \left(\frac{\check{u}^3}{v_u \ell} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\check{u}^2}{\ell^2} \frac{\check{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{u}}{\ell} \left(\frac{\check{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Para valores típicos na atmosfera próximo à superfície, e supondo, de forma conservadora, $\ell \sim 1\text{m}$, $\check{u} \sim 1\text{ m s}^{-1}$, $v_u = 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\text{Re}_\ell = 662690$, $\text{Re}_\ell^{1/2} \sim 1000$. Os gradientes microscópicos de velocidade são mil vezes maiores que os gradientes macroscópicos.

Além disso, é útil registrar, para uso posterior, o seguinte: de (4.1) e (4.2), segue-se que

$$\begin{aligned}
 \eta_u &= \left(v_u^3 \frac{\ell}{\check{u}^3} \right)^{1/4}, \\
 \eta_u^4 &= \frac{v_u^3 \ell}{\check{u}^3}, \\
 \left(\frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \frac{v_u^3}{\ell^3 \check{u}^3}, \\
 \left(\frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \text{Re}^{-3}, \\
 \frac{\eta_u}{\ell} &= \text{Re}^{-3/4}.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Analogamente,

$$\frac{\check{u}}{\check{\eta}} = \text{Re}^{-1/4}. \tag{4.45}$$

O mesmo pode ser feito para os gradientes microscópicos de temperatura e, por conseguinte, de densidade:

$$\begin{aligned}
 v_T \frac{\check{T}^2}{\eta_T^2} &= \frac{\check{u} \check{T}^2}{\ell}, \\
 \frac{\check{T}}{\eta_T} &= \left(\frac{\check{u} \check{T}^2}{v_T \ell} \right)^{1/2} \\
 &= \left(\frac{\check{T}^2}{\ell^2} \frac{\check{u} \ell}{v_T} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{T}}{\ell} \left(\frac{\check{u} \ell}{v_T} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\check{\mathcal{J}}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}. \quad (4.46)$$

(4.46) utiliza um número de Péclet

$$\text{Pe}_\ell = \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} = \text{Re}_\ell \text{Pr} \quad (4.47)$$

que é análogo ao número de Reynolds Re_ℓ definido em (4.16). Mais uma vez, em analogia com (4.45), a partir de (4.46) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\check{\mathcal{J}}}{\ell} &= \frac{\eta_\mathcal{T}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \frac{\eta_u}{\ell} \frac{\eta_\mathcal{T}}{\eta_u} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \text{Re}_\ell^{-3/4} \text{Pr}^{-1/2} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \left(\frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4} \left(\frac{\nu_u}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4} \left(\frac{\nu_\mathcal{T}}{\nu_u} \right)^{1/2} \left(\frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4+1/2} \\ &= \text{Re}_\ell^{-1/4}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde usamos (4.44) para η_u/ℓ e (4.32)–(4.33) para $\eta_\mathcal{T}/\eta_u$.

5

As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq

As equações de Navier-Stokes, e da energia, podem ser consideravelmente simplificadas antes de serem usadas em problemas de interesse físico. As simplificações adotadas são de duas naturezas.

Primeiramente, utilizando-se uma decomposição proposta por Boussinesq para os campos de velocidade, densidade, temperatura e pressão que é baseada em um estado hidrostático de referência, é possível obter um conjunto de equações grandemente simplificadas. As principais simplificações são a substituição da densidade variável por uma densidade de referência (que pode ser variável de acordo com uma distribuição hidrostática, mas que não precisa mais ser *prognosticada*), e a adoção de um campo de velocidade solenoidal. Portanto, uma aproximação de incompressibilidade é obtida, *mesmo em escoamentos com densidade variável*. Nas próximas seções nós vamos mostrar que isso não constituiu nenhum paradoxo.

Em segundo lugar, a equação da energia é essencialmente inútil na variável dependente \mathcal{U} . É preciso manipular a equação (3.77) e reescrevê-la em termos de variáveis prognósticas “úteis”, isto é, efetivamente mensuráveis ou calculáveis. Via de regra, essas variáveis são ou a temperatura termodinâmica T , ou a temperatura potencial Θ .

Ao final do capítulo, teremos obtido um conjunto de equações para as variáveis dependentes *médias* $\langle U \rangle$, $\langle P \rangle$, e $\langle T \rangle$ (ou $\langle \Theta \rangle$) as quais, por sua vez, nos dão informações úteis sobre os escoamentos do mundo real.

5.1 – O estado hidrostático de referência, e a altura de escala

Nesta seção nós obtemos um “estado hidrostático de referência” suficientemente geral para gases perfeitos e líquidos nas condições normalmente encontradas no ambiente. Esse estado será denominado (φ_r, P_r, T_r) , e dependerá somente da altura z .

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica, β_P , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade, κ_T , são definidos nesse caso por

$$\beta_P \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P, \quad (5.1)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (5.2)$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa) \mathcal{H} em função de T e P , e calculando seu diferencial,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= c_p dT + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P. \quad (5.4)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP + TdS, \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} + T \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T; \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \beta_P \mathcal{V}, \quad (5.7)$$

onde S é a entalpia específica, donde

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} (1 - \beta_P T). \quad (5.8)$$

Supondo agora um processo isentrópico ($dS = 0$); levando (5.5) em (5.3); e utilizando (5.8),

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP = c_p dT + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) dP, \quad (5.9)$$

$$c_p dT = \beta_P T \mathcal{V} dP. \quad (5.10)$$

Utilizando a equação da hidrostática,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{\mathcal{V}} \Rightarrow \mathcal{V}dP = -g dz, \quad (5.11)$$

e substituindo em (5.10), obtemos um resultado central e muito importante:

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_P T \frac{g}{c_p} \quad (5.12)$$

O sistema de equações diferenciais (5.11)–(5.12) pode ser resolvido simultaneamente, pois $\beta_P = \beta_P(P, T)$ e $1/\wp = \mathcal{V} = \mathcal{V}(P, T)$ (essa última é a equação de estado). Portanto, em princípio, temos, após a integração a partir das condições iniciais P_0, T_0, \wp_0 em $z = 0$, os perfis do estado termodinâmico de referência $P_r(z)$, $T_r(z)$ e $\wp_r(z)$.

Um parâmetro essencial para a análise de escala das equações da Mecânica dos Fluidos aplicadas a escoamentos naturais é a “altura de escala” D (em Inglês, *scale height*). Ela é definida a partir do estado de referência hidrostático de densidade:

$$D \equiv \left| \frac{1}{\wp_0} \frac{d\wp_r(0)}{dz} \right|^{-1}. \quad (5.13)$$

A altura de escala pode ser facilmente obtida usando (5.1), (5.2), (5.11) e (5.12):

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{1}{\mathcal{V}}, \\ d\varrho &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}; \\ d\varrho &= \frac{d\varrho}{d\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P dT + \frac{d\varrho}{d\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (\mathcal{V}\beta_P) dT + -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (-\mathcal{V}\kappa_T) dP \\ &= -\varrho\beta_P dT + \varrho\kappa_T dP \Rightarrow\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varrho}{dz} &= -\varrho\beta_P \left(-\beta_P T \frac{g}{c_p} \right) + \varrho\kappa_T (-\varrho g); \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dz} &= \beta_P^2 T \frac{g}{c_p} - \kappa_T \varrho g \Rightarrow \\ D &= \left| \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_r(0)}{dz} \right|^{-1} = \left| \beta_P^2 T_0 \frac{g}{c_p} - \kappa_T \varrho_0 g \right|^{-1}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Para água a $T_0 = 15^\circ\text{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\varrho_0 &= 999,1 \text{ kg m}^{-3}, \\ \beta_P &= 1,5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}, \\ \kappa_T &= 4,9 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto, $D_{\text{água}} = 2,089 \times 10^{+05} \text{ m}$. Também é conveniente relacionar β_P e κ_T com a pressão e a temperatura ambientes. Para os mesmos valores de referência acima, e $P_0 = 101325 \text{ Pa}$,

$$\kappa_T^{-1} \approx 20000 P_0, \quad (5.16)$$

$$\beta_P^{-1} \approx 23 T_0. \quad (5.17)$$

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$P = \varrho RT, \quad \text{ou} \quad P\mathcal{V} = RT, \quad (5.18)$$

onde R é a constante específica do gás (ou da particular mistura de gases: por exemplo, para o ar seco tem-se $R = 287$, $c_p = 1005$, e $c_v = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$), P é a pressão termodinâmica, e T é a temperatura. Diferenciando-se (5.18), obtém-se imediatamente:

$$dP = R\varrho dT + RT d\varrho \quad \text{ou} \quad Pd\mathcal{V} + \mathcal{V}dP = RdT, \quad (5.19)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dT}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}. \quad (5.20)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{RT}{P}, \\ \beta_P &= \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P\mathcal{V}} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T},\end{aligned}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{RT}{P^2} = \frac{1}{P},$$

e

$$\begin{aligned} \beta^2 T \frac{g}{c_p} - \frac{\kappa g}{\mathcal{V}} &= \frac{g}{c_p T} - \frac{g}{RT} \\ &= \frac{g}{T} \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{g}{T} \left(\frac{R - c_p}{c_p R} \right) \\ &= -\frac{c_v}{c_p R} \frac{g}{T}. \end{aligned}$$

Para o ar seco, com $T_0 = 15^\circ \text{C} = 288.15 \text{ K}$, $R = 287$, $c_p = 1005$ e $c_v = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, obtém-se $D_{\text{ar}} = 1,180 \times 10^{+04} \text{ m}$

5.2 – O estado de referência em uma atmosfera adiabática seca

O valor da taxa de variação de temperatura em (5.12), com $\beta_P = 1/T$, é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera adiabática e hidrostática, portanto, a temperatura cai a partir de $z = 0$ segundo

$$T_r(z) = T_0 - \frac{g}{c_p} z. \quad (5.21)$$

A partir do perfil de temperatura, obtém-se facilmente o perfil de pressão:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\wp g, \\ \frac{dP}{dz} &= -\frac{Pg}{RT}, \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{g dz}{RT} = \frac{c_p}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \ln \frac{P_r}{P_0} &= \ln \left[\frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right]^{c_p/R}, \\ P_r(z) &= P_0 \left(\frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_p/R}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.22)$$

Analogamente, fazendo-se $dT = -g dz / c_p$, obtém-se, para o perfil de \wp ,

$$\begin{aligned} \frac{d\wp}{\wp} &= \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\frac{g dz}{RT} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\left(-\frac{g}{RT} + \frac{g}{c_p T} \right) dz \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{(-g dz)}{c_p T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_v}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\
\wp_r(z) &= \wp_0 \left(\frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_v/R} \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Relações diretas entre P , \wp e T também podem ser obtidas. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} dP &= c_p dT, \\
\frac{RT}{P} dP &= c_p dT, \\
\frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
\ln \frac{T_0}{T} &= \ln \left(\frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}, \\
T_0 &= T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

A equação (5.24) relaciona os valores de T e P em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de temperatura e pressão na superfície são T_0 e P_0 . Ela *também* serve para *definir* a temperatura potencial em uma atmosfera qualquer:

$$\Theta \equiv T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}. \tag{5.25}$$

Portanto, segue-se a definição “verbal” frequentemente encontrada nos livros, de que a temperatura potencial Θ é a temperatura de uma parcela trazida adiabaticamente (e hidrostaticamente) do nível de pressão P até o nível de pressão P_0 na superfície.

O mesmo pode ser feito com \wp , P , naturalmente:

$$\begin{aligned}
-P d\mathcal{V} &= c_v dT, \\
-\frac{RT}{\mathcal{V}} d\mathcal{V} &= c_v dT, \\
\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} &= -\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{c_v}{R} - \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
&= -\frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}; \\
\frac{d\wp}{\wp} &= \frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
\wp_0 &= \wp \left(\frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Novamente, (5.26) relaciona \wp com P em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de densidade e pressão na superfície são \wp_0 e P_0 . Para uma atmosfera qualquer, ela é usada para definir a *densidade potencial* \wp_Θ :

$$\wp_\Theta \equiv \wp \left(\frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}. \tag{5.27}$$

A Figura 5.1 mostra os perfis de Pressão (a) e Densidade (b) do estado hidrostático de referência em uma atmosfera seca. Na figura 5.1, a interseção da tangente em $z = 0$ com o eixo das ordenadas marca a altura de escala D .

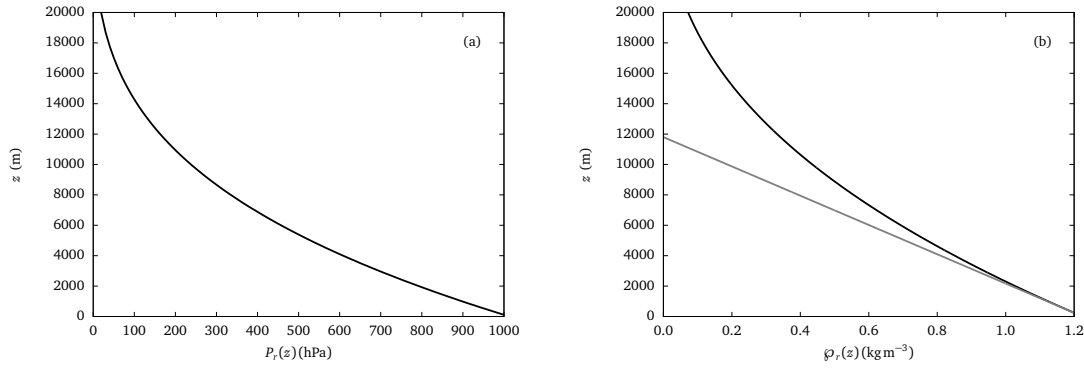


Figura 5.1: Dependência da pressão de referência P_r e da densidade de referência ϕ_r em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude z .

5.3 – Hipóteses para a magnitude das flutuações de densidade

Para um fluido cujo estado hidrostático de referência tem uma altura de escala D , suponha que o escoamento turbulento de interesse ocorre em uma camada cuja espessura ℓ é tal que $\ell \ll D$. Para um ponto qualquer com $0 \leq z \leq \ell$, a variação $\Delta\phi_r = |\phi_r(z) - \phi_r(0)|$ é

$$\Delta\phi_r \leq \left| \int_0^\ell \frac{d\phi_r}{dz} dz \right| \leq \int_0^\ell \left| \frac{d\phi_r}{dz} \right| dz \leq \int_0^\ell \max \left| \frac{d\phi_r}{dz} \right| dz = \phi_0 \frac{\ell}{D}, \quad (5.28)$$

Segue-se que

$$\frac{\Delta\phi_r}{\phi_0} \leq \frac{\ell}{D} \ll 1. \quad (5.29)$$

Faça agora cada um dos campos instantâneos do escoamento ser decomposto na soma de um estado de referência hidrostático e de uma flutuação de Boussinesq (*cuidado: essa **não** é a decomposição de Reynolds, e a flutuação **não** é uma flutuação turbulenta*):

$$U_i = 0 + U'_i, \quad (5.30)$$

$$\phi = \phi_r + \phi', \quad (5.31)$$

$$P = P_r + P', \quad (5.32)$$

$$T = T_r + T', \quad (5.33)$$

etc..

Um nível adicional de formalização pode ser obtido da seguinte forma: na região $0 \leq z \leq \ell$, a densidade de referência é muito proximamente igual à expansão de ϕ_r até o primeiro termo de sua série de Taylor; de (5.13),

$$\frac{\phi_r}{\phi_0} \approx 1 - \frac{z}{D}, \quad (5.34)$$

donde

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial z} \sim \frac{\phi_0}{D}. \quad (5.35)$$

Nós pretendemos avaliar a ordem de grandeza dos termos que comparecem na equação diferencial de conservação de massa (3.6). Para isso, nós precisamos estimar

a ordem de grandeza dos gradientes de densidade, $\partial\wp/\partial x_i$ e dos gradientes de velocidade, $\partial U_i/\partial x_i$. Em ambos os casos, é preciso decompor o escoamento tanto em termos de estado hidrostático/flutuação dinâmica (Boussinesq) quanto em termos de média/flutuação turbulenta (Reynolds). O processo, para densidade, é como se segue:

$$\wp = \wp_r + \wp', \quad (5.36)$$

$$\langle \wp \rangle = \wp_r + \langle \wp' \rangle, \quad (5.37)$$

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho, \quad (5.38)$$

$$\wp = \wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho. \quad (5.39)$$

A aproximação de Boussinesq consiste, primeiramente, em supor

$$\wp' \sim \wp_0 \frac{\ell}{D} \ll \wp_r. \quad (5.40)$$

Em outras palavras, estamos supondo que as flutuações de densidade são, no máximo, da mesma ordem que as variações na densidade de referência.

Conforme vimos acima, entretanto, não basta avaliar a ordem de grandeza das flutuações de densidade; é preciso também estimar a ordem de grandeza dos seus gradientes. Já temos uma estimativa da ordem de grandeza do gradiente vertical de \wp_r em (5.35).

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de $\langle \wp' \rangle$ e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de covariâncias turbulentas, por exemplo de $\langle u_i \rho \rangle$. As estimativas que nós adotaremos são análogas às feitas em (4.12)–(4.14): são as seguintes:

$$\langle \wp' \rangle \sim \tilde{\rho}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\ell}, \quad (5.42)$$

$$\langle u_i \rho \rangle \sim \tilde{u} \tilde{\rho}. \quad (5.43)$$

Como vimos no capítulo 4, \tilde{u} é uma escala macroscópica de velocidade, e é natural que $\tilde{\rho}$, agora, seja uma escala macroscópica de densidade. Note que, de (5.40) e (5.41),

$$\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\ell}{D}. \quad (5.44)$$

Aqui, valem as mesmas considerações feitas na seção 4.2 a respeito da validade das estimativas (5.41)–(5.43), e uma releitura dessa seção é recomendável para que o leitor reforce seu entendimento da utilidade desse tipo de estimativa, mas também de suas limitações.

5.4 – A aproximação de Boussinesq para a conservação de massa

Comece agora com a equação instantânea de conservação de massa, (3.5), e tire a média; então, utilizando a decomposição e os postulados de Reynolds, obtém-se

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i)}{\partial x_i} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \wp U_i \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i] \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle] + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

A equação (5.45) é a equação de conservação de massa *exata* para as médias. Note o aparecimento das covariâncias $\langle \rho u_i \rangle$: a primeira lição é que em um escoamento com flutuações de densidade a equação da continuidade *média* contém um termo envolvendo as covariâncias de densidade com a velocidade. Aplicando agora (5.39),

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i}}_{II} + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_{IV} + \underbrace{\langle \wp' \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i}}_{VI} = 0. \tag{5.46}$$

A ordem de grandeza de cada termo pode ser facilmente estabelecida:

$$\begin{aligned}
I &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
II &\sim \frac{\wp_0 \tilde{u}}{D} \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
III &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
IV &\sim \frac{\wp_0 \tilde{u}}{\ell} \\
V &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell} \\
VI &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}
\end{aligned}$$

Em II, usamos (5.44). Em função de que $\ell/D \ll 1$, $\tilde{\rho}/\wp_0 \ll 1$, é evidente que o termo IV é muito maior do que todos os outros; nesse sentido, podemos escrever

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \right) \approx 0. \tag{5.47}$$

Portanto, uma primeira consequência das hipóteses da aproximação de Boussinesq para as macroescalas é que o escoamento médio $\langle U \rangle$ é *aproximadamente* solenoidal, ou seja: $\nabla \cdot U \approx 0$.

5.5 – A aproximação de Boussinesq para a equação de quantidade de movimento

Em notação indicial, a equação da hidrostática (5.11) pode ser escrita

$$\wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} = 0. \tag{5.48}$$

Introduza agora a decomposição de Boussinesq na forma de (5.31) e (5.32), por enquanto apenas nos termos envolvendo a pressão e a aceleração da gravidade, na equação para a quantidade de movimento, (3.34), e simplifique utilizando (5.40) e (5.48):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= (\wp_r + \wp') \left[g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-(P_r + P') + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= \underbrace{\left[\wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} \right]}_{\equiv 0} + \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &\approx \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \tag{5.49}
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental da *aproximação de Boussinesq* para a equação de quantidade de movimento consiste no seguinte: em (5.49), nós fazemos

$$\wp_r + \wp' \approx \wp_r \tag{5.50}$$

em todos os termos em que \wp aparece *fora* das derivadas, com base em (5.40), *exceto no caso do termo de empuxo* $\wp' g_i$. Esse último fica como está. A justificativa para esse procedimento tem base na física que estamos querendo representar (e, num sentido matemático muito concreto, *preservar!*). Em escoamentos com estratificação de densidade, esse é justamente o termo que produz convecção: é mais ou menos óbvio que, se o desprezarmos, a equação resultante não será mais capaz de representar *nenhum* efeito de empuxo devido a variações de densidade dentro do fluido.

Além disso, a substituição de \wp por \wp_r apenas nos termos fora de derivadas é um outro ponto crucial, já que $\wp' \ll \wp_r$ não implica $\partial \wp' / \partial x_k \ll \partial \wp_r / \partial x_k$! Isso significa que não podemos fazer essa aproximação *ainda* no lado esquerdo de (5.49). Muito pelo contrário, como \wp' inclui as flutuações turbulentas, seus gradientes incluem também os gradientes locais dessas flutuações, os quais, conforme vimos no capítulo 4, são muito maiores que os gradientes das grandezas médias.

Portanto, a equação (5.49), nessa forma, é pouco útil, já que todos os gradientes que aparecem na equação envolvem tanto as macro quanto as microescalas que foram introduzidas no capítulo 4: não é possível fazer uma análise de escalas de (5.49). O próximo passo é promediá-la:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\langle P' \rangle + \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Os termos do lado direito de (5.51) estão prontos para uma análise de escalas, mas o lado esquerdo precisa ser “aberto”, com o uso, como sempre, da decomposição e dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle U_i \rangle + u_i] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \rho u_i \rangle];\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle U_i \rangle + u_i] [\langle U_j \rangle + u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle u_j + \langle \wp \rangle u_i \langle U_j \rangle + \rho \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle] \rangle \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle u_i u_j + \langle U_i \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho u_i + \rho u_i u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle]\end{aligned}$$

Substituindo em (5.51),

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ &\frac{\partial \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\ &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \quad (5.52)\end{aligned}$$

É possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.45):

$$\begin{aligned}&\langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\ &\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\ &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo $\langle \wp \rangle$ fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.50) (na forma promediada, que utiliza (5.37)):

$$\begin{aligned}
& \wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\
& \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\
& = \langle \wp \rangle g_i - 2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Finalmente, expandimos $\partial \langle \wp \rangle / \partial x_j$ usando mais uma vez (5.37):

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\
& \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{\frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
& = \underbrace{\langle \wp \rangle g_i}_{\text{IX}} - \underbrace{2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle}_{\text{X}} - \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i}}_{\text{XI}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)}_{\text{XII}} + \underbrace{2 \wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}}_{\text{XIII}}. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Se estendermos as estimativas de ordem de grandeza que já fizemos para velocidades e densidades para as pressões (em analogia, por exemplo, a (5.41)–(5.43)), devemos ter:

$$\langle P' \rangle \sim \tilde{p}, \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \quad (5.55)$$

$$\langle u_i p \rangle \sim \tilde{u} \tilde{p}. \quad (5.56)$$

As ordens de grandeza de cada termo se seguem:

$$\begin{aligned}
\text{I} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{II} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{III} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IV} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{V} & \sim \frac{\wp_0}{D} \tilde{u}^2 = \wp_0 \frac{\ell}{D} \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \sim \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VI} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VII} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{VIII} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IX} &\sim \tilde{\rho}g, \\
\text{X} &\sim \wp_0 f \tilde{u} = \frac{\wp_0}{l} \frac{f l}{\tilde{u}} \tilde{u}^2 \sim \frac{1}{\text{Ro}} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XI} &\sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \\
\text{XII} &\sim \wp_0 \nu \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu}{\tilde{u}\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XIII} &\sim \wp_0 \nu \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu}{\tilde{u}\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}.
\end{aligned}$$

Os termos de maior ordem são I, III e IV (todos os três da mesma ordem), IX, e XI. Esses dois últimos são os “forçantes” da equação de quantidade de movimento, e consequentemente *têm* que produzir a ordem de magnitude observada em I, III e IV. Em X, $f = 2\omega \sin(\phi)$ é o parâmetro, ou frequência, de Coriolis; ϕ é a latitude; e

$$\text{Ro} \equiv \frac{\tilde{u}}{f\ell} \quad (5.57)$$

é o número de Rossby. Na escala ℓ do escoamento, o número de Rossby é muito grande, e podemos desprezar X *vis-à-vis* I, III e IV. Da mesma forma, em escoamentos turbulentos na natureza, Re_ℓ é muito grande, e podemos desprezar XII e XIII *vis-à-vis* I, III e IV.

A equação aproximada de quantidade de movimento resultante é

$$\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.58)$$

Uma última simplificação é possível abrindo a derivada do 2º termo à esquerda e tomando ordens de grandeza:

$$\wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} = \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j}$$

Utilizando (5.47),

$$\begin{aligned}
\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \tilde{u} \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \ll \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\wp_r \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \right] = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.59)$$

Ficamos então com as seguintes relações de ordens de grandeza em (5.58) ou (5.59):

$$g\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \quad (5.60)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\ell} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \Rightarrow \quad (5.61)$$

$$\tilde{p} \sim \tilde{\rho} g \ell. \quad (5.62)$$

Flutuações de pressão são extremamente difíceis de medir na atmosfera. [Wynngaard \(2010\)](#) dá a estimativa $p \sim \wp_0 \tilde{u}^2$ para escoamentos com densidade \wp constante (segundo o autor): note que isso é o mesmo que (5.61), que foi obtida sem exigência de constância da densidade do escoamento. [Hauf et al. \(1996\)](#) observaram valores de p da ordem de 2,5 Pa, ou seja: da mesma ordem que a estimativa de Wynngaard e de (5.61). Esses dados observacionais reforçam as conclusões desta seção de que é razoável desprezar os efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações (tanto no sentido de Boussinesq quanto no de Reynolds) de densidade.

Levando (5.62) em (5.14), obtém-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \sim \underbrace{\beta_P \tilde{T}}_I + \underbrace{\kappa_T \tilde{p}}_{II}, \quad (5.63)$$

onde I representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade, e II representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações de densidade. Utilizando os valores listados nas páginas 63 e 64 para β_P , κ_T , T_0 , \wp_0 , P_0 ; $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$, $\ell = 10 \text{ m}$, $\tilde{T} = 1 \text{ K}$, e (5.60)–(5.62), obtemos as seguintes estimativas:

água: $I \sim 1,500 \times 10^{-04}$, $II \sim 4,900 \times 10^{-07}$;

ar: $I \sim 3,470 \times 10^{-03}$, $II \sim 1,184 \times 10^{-05}$.

O efeito das flutuações de pressão sobre as de densidade é cerca de 100 vezes (no ar) a 1000 vezes (na água) menor do que o efeito das flutuações de temperatura. Isso permite simplificar (5.14) com (5.63) para

$$\wp' \approx -\wp_r \beta_{P_r} T', \quad (5.64)$$

$$\langle \wp' \rangle \approx -\wp_r \beta_{P_r} \langle T' \rangle, \quad (5.65)$$

$$\rho \approx -\langle \wp \rangle \beta_{P_m} T. \quad (5.66)$$

Em (5.64)–(5.65), o coeficiente isobárico de expansão térmica é calculado em (T_r, P_r) :

$$\beta_{P_r} = \beta_P(T_r, P_r),$$

porque se trata das flutuações em torno do estado de referência; em (5.66), ele é calculado em $(\langle T \rangle, \langle P \rangle)$:

$$\beta_{P_m} = \beta_P(\langle T \rangle, \langle P \rangle),$$

porque se trata das flutuações turbulentas. Uma notação análoga vale para κ_T .

5.6 – A correlação pressão-temperatura

Ainda de (5.14), obtém-se

$$\frac{\rho}{\langle \wp \rangle} = -\beta_{P_m} T + \kappa_{T_m} p, \quad (5.67)$$

onde

$$|\kappa_{Tm}p| \ll |\beta_{Pm}\mathcal{T}|. \quad (5.68)$$

Multiplicando-se (5.67) por $\mathcal{T}/\langle T \rangle$ e promediando-se,

$$\frac{\langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\langle \rho \rangle \langle T \rangle} = -\beta_{Pm} \frac{\langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle} + \kappa_{Tm} \frac{\langle p \mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (5.69)$$

e pelos mesmos argumentos de ordens de grandeza de p e \mathcal{T} ,

$$|\kappa_{Tm} \langle p \mathcal{T} \rangle| \ll |\beta_{Pm} \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle|. \quad (5.70)$$

Utilizando (5.16)–(5.17), e os valores respectivos utilizados para estimar ordens de grandeza,

$$|\langle p \mathcal{T} \rangle| \ll \frac{1000 \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle}{T_0^2} P_0 T_0 \approx \frac{P_0 T_0}{100}. \quad (5.71)$$

Sob a validade da hipótese de Boussinesq, pressão e temperatura são muito fracamente correlacionadas (em termos das ordens de grandeza em (5.70); as flutuações de densidade respondem basicamente às flutuações de temperatura (densidade e temperatura são quase que perfeitamente anti-correlacionadas), e as flutuações de pressão respondem essencialmente ao campo de flutuações de velocidades, apenas.

5.7 – As ordens de grandeza da equação para a temperatura

Inicialmente, procuraremos escrever a equação da energia em uma forma que atenda a dois requisitos importantes:

1. Ser expressa em termos de grandezas mensuráveis *em princípio* (note que tanto (3.77) quanto (3.79) estão dadas em termos de funções termodinâmicas (\mathcal{U} e \mathcal{H}) que não são diretamente mensuráveis).
2. Ter validade tanto para líquidos quanto para gases.

Para tanto, partimos de (3.79), e utilizamos (5.4) e (5.8) para exprimir $D\mathcal{H}/Dt$:

$$\begin{aligned} \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V}(1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Daqui para a frente, uma *primeira* aproximação (no sentido da aproximação de Boussinesq) consistirá em supor que c_p é avaliado no estado hidrostático de referência. Com isso, poderemos supor c_p “constante” e mantê-lo fora das derivadas.

Para um gás ideal, $\beta_P T \equiv 1$, o que simplifica bastante a análise subsequente de (5.72); para água, entretanto, $\beta_P T$ varia consideravelmente com a temperatura. Isso pode ser visto nas figuras 5.2 and 5.3, onde essa função está plotada para água à pressão atmosférica (<http://www.physchem.kfunigraz.ac.at/sm/Service/Water/H2Othermexp.htm>).

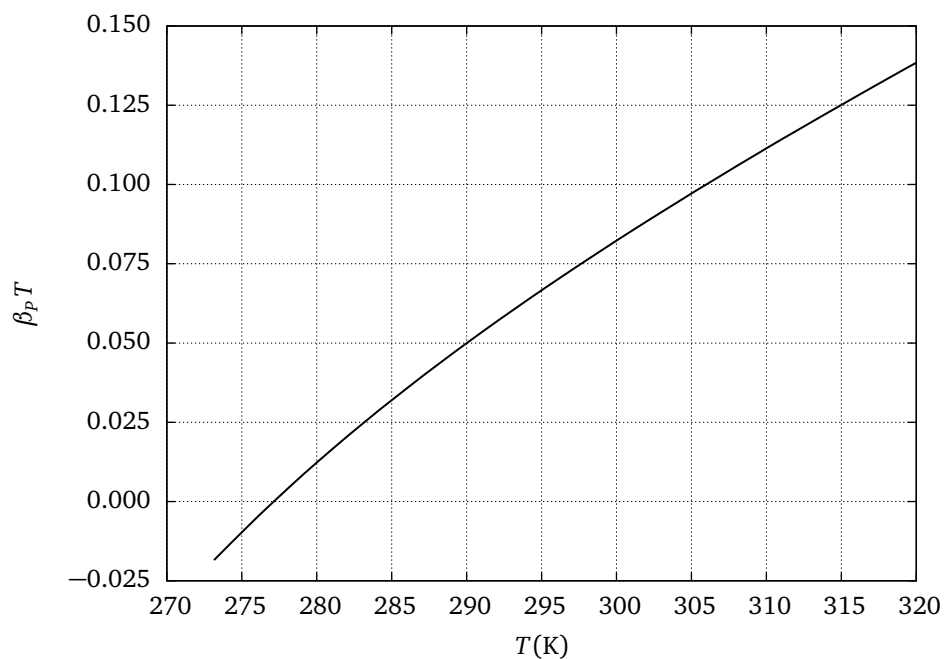


Figura 5.2: Dependência de $\beta_P T$ com a temperatura para água líquida

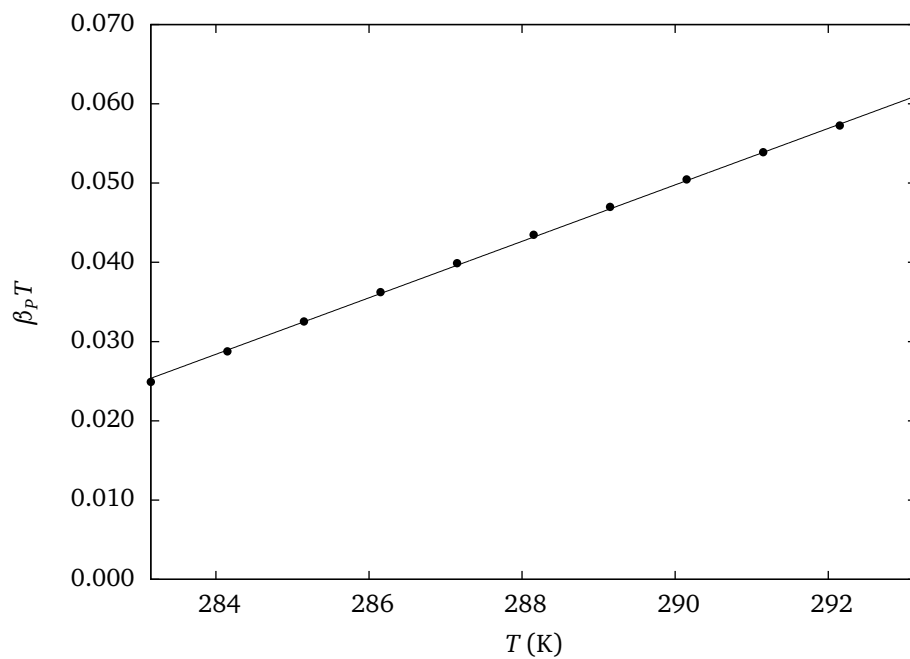


Figura 5.3: Dependência de $\beta_P T$ com a temperatura para água líquida na faixa 10–20°C.

Para T_r na faixa 10–20° C (que é um exemplo razoável de condições encontradas em escoamentos de água líquida no ambiente), tem-se

$$\begin{aligned}
 (\beta_P T) &\equiv \phi(T) = \phi(T_r) + bT' \\
 &= \phi(T_r) + b\langle T' \rangle + b\mathcal{T} \\
 &= \phi(\langle T \rangle) + b\mathcal{T} \\
 &\approx \langle \phi(T) \rangle + b\mathcal{T} \\
 &= \langle \beta_P T \rangle + b\mathcal{T}.
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

(pois ϕ é aproximadamente linear), onde $b = 0.00356 \text{ K}^{-1}$ é obtido por regressão linear através dos pontos na figura 5.3. O único objetivo de (5.73) é proporcionar uma base concreta sobre a qual estimativas de ordem de grandeza podem ser feitas.

Em seguida, nós aproximamos a densidade do lado direito por \wp_r (novamente, uma aproximação de Boussinesq) e utilizamos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
 \wp c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + T c_p \left[\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial \wp U_j}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi; \\
 c_p \left[\frac{\partial(\wp T)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp T U_j)}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Prosseguimos para promediar. A hipótese fundamental que simplificará extraordinariamente a álgebra é a ausência de correlação entre a temperatura e a pressão. Como acabamos de ver, para um gás $\beta_P T \equiv 1$, e nesse caso ficamos simplesmente com $\frac{D\langle P \rangle}{Dt}$ no termo correspondente. Para água, devido à dependência de β_P com T , temos formalmente:

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle = \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle + b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle. \tag{5.75}$$

Estimativas da ordem de grandeza das correlações entre as flutuações de temperatura \mathcal{T} e os *gradientes* de pressão não estão diretamente disponíveis, mas parece muito razoável supor que elas não devem exceder as correlações entre pressão e temperatura, das quais temos uma excelente estimativa em (5.71) em termos dos valores ambientes (*i.e.*, “médios”) de P e T . Adotando essas estimativas em (5.75), devemos agora ter:

$$\begin{aligned}
 b &\sim \beta_P / 10, \\
 \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle T \rangle}{100} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle, \\
 b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle \beta_P T \rangle}{1000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \frac{1}{23000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Os efeitos da correlação temperatura-(gradiente de pressão) na água são portanto desprezíveis, e adotamos

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle. \tag{5.76}$$

Com (5.76) em mãos, retornamos agora a (5.74) e promediamos:

$$c_p \left[\frac{\partial \langle \wp T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \wp T U_j \rangle}{\partial x_j} \right] - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle; \tag{5.77}$$

Os termos do lado esquerdo são expandidos da maneira usual:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp T \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \wp \rangle \mathcal{T} + \rho \langle T \rangle + \rho \mathcal{T}] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \rho \mathcal{T} \rangle];\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp T U_j \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] [\langle U_j \rangle + u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle T \rangle u_j + \langle \wp \rangle \mathcal{T} \langle U_j \rangle + \rho \langle T \rangle \langle U_j \rangle] \rangle \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \mathcal{T} u_j + \langle T \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho \mathcal{T} + \rho \mathcal{T} u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle + \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle + \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle]\end{aligned}$$

Substituindo em (5.77),

$$\begin{aligned}c_p \left[\frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \right. \\ \left. \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \right] \\ - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.\end{aligned}$$

Novamente, é possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.45):

$$\begin{aligned}c_p \left[\langle \wp \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right. \\ \left. \langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \right] \\ - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo $\langle \wp \rangle$ fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.50) (na forma promediada, que utiliza (5.37)):

$$c_p \left[\wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right] +$$

$$\begin{aligned} & \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \Big] \\ & - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Mais uma vez, expandimos $\partial \langle \wp \rangle / \partial x_j$ usando (5.37):

$$\begin{aligned} & \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\ & \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\ & - \underbrace{\langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle}_{\text{IX}} \approx \underbrace{\wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{X}} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_{\text{XI}}. \quad (5.78) \end{aligned}$$

Todos os termos de (5.78) estão prontos para uma análise de ordem de grandeza, exceto pelo ainda ligeiramente problemático termo IX. Aqui, observe que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{D(P_r + P')}{Dt} \right\rangle \\ &= \left\langle U_j \frac{\partial P_r}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial P'}{\partial t} + U_j \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial P_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t} + \left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \underbrace{\langle W \rangle \frac{\partial P_r}{\partial z}}_{\text{i}} + \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t}}_{\text{ii}} + \underbrace{\left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{iii}} + \underbrace{\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{iv}} \quad (5.79) \end{aligned}$$

Em primeira aproximação, $\langle W \rangle \approx 0$. Uma análise de ordem de grandeza mais consistente com o que é feito usualmente em camadas-limite, utilizando a equação da continuidade (5.47), é supor $\partial \langle U \rangle / \partial x \ll \partial \langle W \rangle / \partial z$; mais especificamente, utilizaremos a altura de escala D para estimar os gradientes horizontais de velocidade média (isso é, infelizmente, uma hipótese adicional):

$$\frac{\langle U \rangle}{D} \sim \frac{\langle W \rangle}{\ell} \Rightarrow \langle W \rangle \sim \frac{\ell}{D} \tilde{u} = \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u}.$$

Retornando a (5.79), descobrimos que todos os termos são da mesma ordem:

$$\begin{aligned} \text{i} &\sim \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 g = \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 \frac{\tilde{p}}{\rho \ell} = \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\ \text{ii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\ \text{iii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \end{aligned}$$

$$\text{iv} \sim \frac{\tilde{p}\tilde{u}}{\ell} = \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.$$

Em (i), usamos (5.62); (ii) e (iii) são simples. (iv) é obtido supondo-se que as flutuações turbulentas de velocidade e do gradiente de pressão são bem correlacionadas. À luz da equação não-promediada da quantidade de movimento (por exemplo, (5.49)), isso parece razoável e bastante natural, já que os gradientes de pressão por unidade de volume devem ser da mesma ordem que as acelerações. Na segunda igualdade de (iv), usamos (5.61).

Com isso, as ordens de magnitude de todos os termos de (5.78) estão estabelecidos:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{II} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{III} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{IV} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{V} &\sim \tilde{T}\tilde{u} \frac{\wp_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VI} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VIII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{IX} &\sim (\beta_{P_0} T_0) \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \\ \text{X} &\sim \wp_0 c_p \nu_T \frac{\tilde{T}}{\ell^2} = \wp_0 c_p \frac{\nu_T}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{PrRe}_\ell} \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{XI} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \end{aligned}$$

O parâmetro adimensional

$$\text{Ga}_0 \equiv \beta_{P_0} T_0 \quad (5.80)$$

é o número de Gay-Lussac; para o ar (como já vimos), $\text{Ga}_0 \equiv 1$; para a água, um valor conservador para sua ordem de magnitude (vide Figura 5.2) é $\beta_{P_0} T_0 \sim 0,1$.

Claramente, I, III e IV são os termos dominantes; II, V, VI, VII, VIII, são todos da mesma ordem de magnitude, e bem menores; assim como X, uma vez que o número de Reynolds Re_ℓ em escoamentos turbulentos é muito grande. IX e XI podem ser comparados com (I,II,IV) por meio do número turbulento de Eckart,

$$\text{Ec} \equiv \frac{\tilde{u}^2}{c_p \tilde{\tau}}; \quad (5.81)$$

obtemos

$$\text{I,III,IV} \sim \frac{1}{\text{Ec}} \wp_0 \tilde{u}^3 / \ell,$$

onde $Ec = \mathcal{O}(10^{-3})$ tanto para ar quanto para água. Portanto,

$$I, II, IV \gg IX, XI.$$

Tanto para ar quanto para água, a equação simplificada para a temperatura termodinâmica T que se obtém com a aproximação de Boussinesq é

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{\mathcal{T}} \tilde{u}}{\ell} \right). \quad (5.82)$$

Observe que não houve necessidade, ainda, de introduzir a temperatura potencial: na região onde supomos que a aproximação de Boussinesq é estritamente válida, $\ell/D \ll 1$, é suficiente trabalhar com a temperatura termodinâmica T , mesmo no caso do ar.

5.8 – A equação para a temperatura potencial

Uma formulação alternativa para a equação da energia utiliza o conceito de temperatura potencial. Para um gás ideal, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$, e (3.79) com (5.3) torna-se

$$\wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.83)$$

Utilizando a temperatura potencial introduzida em (5.25) e diferenciando,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ \frac{1}{\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{c_p P} \frac{DP}{Dt}, \\ \frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Comparando (5.84) com (5.83), chegamos finalmente à equação para a energia interna em termos da temperatura potencial,

$$\frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.85)$$

O termo

$$\frac{c_p P}{R\Theta} = \frac{c_p P}{RT} \frac{T}{\Theta}$$

é muito proximamente igual a

$$\frac{c_p P}{RT} = c_p \wp;$$

de fato,

$$\frac{T}{\Theta} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p} = \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \approx \frac{287.15}{288.15} = 0.9966,$$

para $T_0 = 288.15 \text{ K}$, $g = 9.81 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e $z = 100 \text{ m}$. Para $z = 1000 \text{ m}$, que é a ordem de grandeza da altura da camada-limite atmosférica, o valor acima muda

para 0.9661: ainda próximo de 1, mas com diferenças maiores do que 1%. Debaixo das hipóteses da aproximação de Boussinesq, portanto, podemos aproximar (5.85) por

$$\wp c_p \frac{D\Theta}{Dt} = \wp_r c_p \nu_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.86)$$

Podemos agora manipular o lado esquerdo de (5.86) exatamente como fizemos para ir de (5.74) até (5.78), só que com Θ no lugar de T . Basta, portanto, copiar os termos dessa última com Θ em lugar de T :

$$\begin{aligned} & \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta \rangle}{\partial t}}_{II} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j}}_{III} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{IV} + \\ & \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_V + \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{VI} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \theta \rangle)}{\partial x_j}}_{VII} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{VIII} \\ & \approx \underbrace{\wp_r c_p \nu_\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} \right)}_{IX} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_X. \quad (5.87) \end{aligned}$$

Claramente, as mesmas escalas macroscópicas $\tilde{\tau}$ e ℓ aplicam-se a (5.87); as ordens de magnitude são:

$$\begin{aligned} I & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ II & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ III & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ IV & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ V & \sim \tilde{\tau} \tilde{u} \frac{\wp_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ VI & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ VII & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ VIII & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ IX & \sim \wp_0 c_p \nu_\tau \frac{\tilde{\tau}}{\ell^2} = \wp_0 c_p \frac{\nu_\tau}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{PrRe}_\ell} \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ X & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \end{aligned}$$

Mantendo-se apenas os termos de maior ordem de magnitude, o resultado é uma equação análoga a (5.82):

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \right). \quad (5.88)$$

A equação (5.88) é um pouco mais robusta e parcimoniosa de hipóteses do que (5.82): em particular, não precisamos nos preocupar com a interação entre os gradientes de pressão $\partial P_r / \partial z$ e a velocidade vertical média $\langle W \rangle$: não precisamos supor portanto que $\langle W \rangle \ll \langle U \rangle$, e (5.88) é aplicável mesmo em regiões de alta velocidade vertical, como por exemplo dentro de térmicas. Por outro lado, continuamos restritos a $\ell \ll D$: na análise de escalas que estamos fazendo aqui, para a atmosfera, $\ell \sim 1000$ m já está claramente violando aquela condição, e não há garantia (sob esse aspecto) de que as equações para as médias obtidas com a aproximação de Boussinesq valham para toda a camada-limite atmosférica.

6

As equações de ordem 2

6.1 – Os gradientes microscópicos de densidade

A equação (5.66) nos permite obter microescalas de Kolmogorov para densidade. Definimos

$$\left(\frac{\check{\rho}}{\eta_\rho}\right)^2 = \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right\rangle = (\langle \wp \rangle \beta_{P_m})^2 \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle = (\langle \wp \rangle \beta_{P_m})^2 \left(\frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_\mathcal{T}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\check{\rho} = \langle \wp \rangle \beta_{P_m} \check{\mathcal{T}}, \quad (6.1)$$

para $\eta_\rho = \eta_\mathcal{T}$. A linearidade entre as microescalas de densidade e de temperatura produz agora as estimativas de ordem de grandeza, a partir de (4.46) e (4.48):

$$\frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\check{\rho}}{\tilde{\rho}} = \text{Re}_\ell^{-1/4}. \quad (6.3)$$

6.2 – A equação para as flutuações de densidade

A equação local de conservação de massa pode ser expandida em termos das decomposições de Boussinesq e de Reynolds. Primeiramente, considere apenas a decomposição de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle + \rho] + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\langle \wp \rangle + \rho) (\langle U_i \rangle + u_i)] = 0,$$

$$\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\langle \wp \rangle u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho \langle U_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (6.4)$$

Subtraia agora (5.45):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\langle \wp \rangle u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho \langle U_i \rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} = 0. \quad (6.5)$$

É tentador estimar a ordem de grandeza de cada um dos termos de (6.7) individualmente, mas isso estaria *errado*! Exceto pelos dois últimos, a média de cada um deles é identicamente nula (verifique, utilizando os postulados de Reynolds); a média conjunta dos dois últimos também é zero, garantindo que a média da equação como um todo é zero, como não poderia deixar de ser.

6.3 – Top secret stuff

ou:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho] + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho) (\langle U_i \rangle + u_i)] = 0, \\ \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i} + \wp_r \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i} \\ + \langle \wp' \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} + \langle \wp' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} \\ + \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Muitos dos termos de (6.6) comparecem em (5.46); subtraindo a segunda da primeira,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \wp_r \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i} + \langle \wp' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (6.7)$$

É tentador estimar a ordem de grandeza de cada um dos termos de (6.7) individualmente, mas isso estaria *errado*! Exceto pelos dois últimos, a média de cada um deles é identicamente nula (verifique, utilizando os postulados de Reynolds); a média conjunta dos dois últimos também é zero, garantindo que a média da equação como um todo é zero, como não poderia deixar de ser.

O foco de nosso interesse é a ordem de grandeza de $\partial u_i / \partial x_i$ em (6.7). Para estimá-la, fazemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \wp_r \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i} + \langle \wp' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} + \\ \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} = 0; \end{aligned}$$

e promediamos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle}_I + \underbrace{\wp_r \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle}_II + \underbrace{\left\langle u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i}}_III + \underbrace{\langle \wp' \rangle \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle}_IV + \\ \underbrace{\left\langle u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\left\langle \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_VI + \underbrace{\langle U_i \rangle \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle}_VII + \underbrace{\left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} \right\rangle}_VIII = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Seguem-se agora, como já nos é familiar, as ordens de grandeza de cada termo:

$$\begin{aligned} I \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\eta_\rho \eta_u} &= \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{1/2} \text{Pe}_\ell^{1/2} \text{Re}_\ell^{-1/4} \\ &= \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell \text{Pr}^{1/2} \text{Re}_\ell^{-1/4} = \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{3/4} \text{Pr}^{1/2}; \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$II \sim \wp_0 \left(\frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2 = \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell; \quad (6.10)$$

$$III \sim \frac{\tilde{u}^2}{\eta_u} \frac{\wp_0}{D} = \frac{\tilde{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} \tilde{u} \text{Re}_\ell^{-1/4} \frac{\tilde{\rho}}{\ell} = \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{1/4}; \quad (6.11)$$

$$\text{IV} \sim \tilde{\rho} \left(\frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2 = \tilde{\rho} \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell; \quad (6.12)$$

$$\text{V} \sim \frac{\check{u}^2 \tilde{\rho}}{\eta_u \ell} = \tilde{\rho} \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{1/4}; \quad (6.13)$$

$$\text{VI} \sim \tilde{\rho} \frac{\check{u}}{\eta_u} \frac{\check{u}}{\ell} = \tilde{\rho} \text{Re}_\ell^{-1/4} \frac{\check{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} \frac{\check{u}}{\ell} = \tilde{\rho} \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{1/4}. \quad (6.14)$$

$$\text{VII} \sim \check{u} \frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} \frac{\check{u}}{\eta_u} = \check{u} \frac{\check{\rho}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} \text{Pr}^{1/2} \frac{\check{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} = \tilde{\rho} \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell \text{Pr}^{1/2}. \quad (6.15)$$

O termo VIII é ligeiramente problemático, porque não está imediatamente claro qual microescala devemos utilizar para estimar o gradiente de $\partial(\rho u_i)/\partial x_i$. Podemos, é claro, abrir as derivadas com a regra da derivada do produto, e estimar dois termos individualmente. Mas podemos, também, majorar o termo dividindo pelo menor entre (η_u, η_τ) . De (4.33), para $\text{Pr} \geq 1$, $\eta_\tau < \eta_u$; então,

$$\text{VIII} \sim \frac{\check{u}}{\eta_u} \frac{\check{\rho} \check{u}}{\eta_\rho} = \frac{\check{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} \frac{\check{\rho}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2} \text{Pr}^{1/2} \check{u} \text{Re}_\ell^{-1/4} = \tilde{\rho} \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \text{Re}_\ell^{3/4} \text{Pr}^{1/2}. \quad (6.16)$$

Em primeira ordem, o campo de flutuações de velocidade também é solenoidal; o termo de maior ordem é II ($\sim \wp_0 \check{u}^2 / \ell^2 \text{Re}_\ell$), seguido de dois termos da mesma ordem de grandeza, IV e VII ($\sim \tilde{\rho} \check{u}^2 / \ell^2 \text{Re}_\ell$). Portanto,

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle \sim \left[\frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \left(\frac{\check{u}}{\ell} \right)^2 \text{Re}_\ell \right]. \quad (6.17)$$

6.4 – Um teorema útil

Teorema 1 *Se $u(\mathbf{x}, t; \omega)$ é um processo estocástico estacionário, então*

$$\left\langle u \frac{du}{dt} \right\rangle = 0. \quad (6.18)$$

Prova: como o processo é estacionário,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u^2 \right\rangle = 2 \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle. \quad (6.19)$$

A mesma dedução vale para as derivadas parciais em relação a x_i , donde

$$\left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (6.20)$$

6.5 – Quantidade de movimento, a partir do zero

O lado esquerdo é o bicho, porque é aqui que estão os termos não-lineares, e porque em princípio todos os \wp 's estão dentro de derivadas.

$$\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_k)}{\partial x_k} = \dots$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial([\langle\wp\rangle + \rho)][\langle U_i \rangle + u_i]}{\partial t} + \frac{\partial([\langle\wp\rangle + \rho)][\langle U_i \rangle + u_i][\langle U_k \rangle + u_k]}{\partial x_k} = \dots \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \langle U_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho \langle U_i \rangle u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \\
& \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k - \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Repetimos aqui a equação (5.52):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle U_i \rangle \langle \rho u_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \\
& \langle\wp'\rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Subtraindo (6.22) de (6.21),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho \langle U_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\langle U_i \rangle \rho u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_i \rangle \langle \rho u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\langle U_k \rangle \rho u_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Essa aí é a equação (correta) de flutuação de quantidade de movimento. Talvez ela possa agora ser simplificada com a equação (igualmente correta, e sem nenhuma aproximação) para as flutuações de densidade:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \cancel{\langle U_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \\
& \cancel{\langle U_i \rangle \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_k)}{\partial x_k}} + (\langle\wp\rangle u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \cancel{\langle U_i \rangle \frac{\partial(\rho \langle U_k \rangle)}{\partial x_k}} + (\rho \langle U_k \rangle) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\langle\wp\rangle u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle\wp\rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cancel{\langle U_i \rangle \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}} + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \cancel{\langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k}} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \frac{\partial(\langle U_k \rangle \rho u_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

os termos marcados cancelam-se em virtude de

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \wp \rangle u_k + \rho \langle U_k \rangle + \rho u_k] - \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = 0.$$

Portanto, resta:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + (\langle \wp \rangle u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} \\
& + (\rho \langle U_k \rangle) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \frac{\partial(\langle U_k \rangle \rho u_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Agora multiplique por u_j , e promedie:

$$\begin{aligned}
& \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \left\langle u_j \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i)}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} \right\rangle + \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \left\langle u_j \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \quad \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \left\langle u_j \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i u_k)}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \left\langle u_j \frac{\partial(\langle U_k \rangle \rho u_i)}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_j \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} \right\rangle = \\
& \quad \langle \rho u_j \rangle g_i - \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle + 2 \wp_r v_u \left\langle u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle
\end{aligned}$$

Aparentemente, é possível simplificar mais uma vez:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i)}{\partial t} + \cancel{u_j \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\
& (\langle \wp \rangle u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \rho \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \cancel{u_i \frac{\partial(\langle \wp \rangle u_k)}{\partial x_k}} + \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \quad + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \cancel{u_i \frac{\partial(\langle U_k \rangle \rho)}{\partial x_k}} + \langle U_k \rangle \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \quad \cancel{u_i \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}} + (\rho u_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

observe que os termos marcados, agora, *não* se cancelam, mas podem ser substituídos por

$$u_i \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k},$$

donde:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle \wp \rangle u_i)}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ & (\langle \wp \rangle u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial (\langle \wp \rangle u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \rho \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\ & + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \langle U_k \rangle \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\ & (\rho u_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}; \end{aligned}$$

Ainda vale a pena abrir algumas derivadas:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ & \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \rho \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\ & + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \langle U_k \rangle \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\ & (\rho u_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}; \end{aligned}$$

Também é bom lembrar-nos de que vale uma equação igual trocando-se i por j :

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_j \rangle}{\partial t} + \\ & \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \rho \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle \wp \rangle u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\ & + (\rho u_k) \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} - \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \end{aligned}$$

$$\langle U_k \rangle \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle)}{\partial x_k} + (\rho u_k) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_j u_k \rangle}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k};$$

Prosseguindo, multiplicamos a equação em i por u_j :

$$\begin{aligned} & \rho u_j \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_j \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ & \langle \wp \rangle u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_i u_j \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \rho u_j \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle \wp \rangle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\ & + (\rho u_j u_k) \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} - u_j \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \langle U_k \rangle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial(\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\ & (\rho u_j u_k) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + u_i u_j \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \rho u_j g_i - u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}; \end{aligned}$$

Promediamos:

$$\begin{aligned} & \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \cancel{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t}} + \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \\ & \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \cancel{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k}} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \langle \wp \rangle \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \cancel{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k}} = \\ & \langle \rho u_j \rangle g_i - \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle + 2 \wp_r v_u \left\langle u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle; \end{aligned}$$

Mais uma vez, os termos marcados cancelam-se, dessa vez em virtude da equação da continuidade promediada, (5.45). Restam

$$\begin{aligned} & \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \\ & \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \langle \wp \rangle \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ & \langle \rho u_j \rangle g_i - \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle + 2 \wp_r v_u \left\langle u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle; \end{aligned}$$

Lembre-mos de que uma equação absolutamente análoga vale trocando-se i por j ; consequentemente, somando as duas (termo a termo, para facilitar) teremos:

$$\begin{aligned}
& \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \rho u_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \right\rangle + \\
& \quad \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \right\rangle + \\
& \quad \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \left\langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle \wp \rangle \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \\
& \quad \langle \rho u_j \rangle g_i + \langle \rho u_i \rangle g_j - \left(\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle \right) + \left(\left\langle u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle \right) \\
& \quad + 2 \wp_r v_u \left(\left\langle u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} \right\rangle \right);
\end{aligned}$$

Isso pode ser facilmente rearranjado:

$$\begin{aligned}
& \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \rho u_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \right\rangle + \\
& \quad \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle \wp \rangle \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \quad \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = \dots;
\end{aligned}$$

Ainda existem coisas que podem ser feitas sempre utilizando a forma completa (compressível) da equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
& \left\langle u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_i u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i u_j u_k \right\rangle \frac{\partial \wp}{\partial x_k} + \\
& \quad \left\langle \rho u_i u_j \right\rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \left\langle u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle u_i u_j \right\rangle \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = 0.
\end{aligned}$$

Salpicamos agora a penúltima equação acima com cada um dos termos da última:

$$\langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle \rho u_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle +$$

$$\begin{aligned}
& \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_j \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle \wp \rangle \left\langle u_i u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle \wp \rangle \left\langle u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle u_i u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle U_k \rangle \left\langle \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \langle U_k \rangle \left\langle u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \left\langle \rho u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \rho u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \dots; \\
\\
& \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle \wp \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_j u_k \rangle + \langle \rho u_j \rangle \left[\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \right] + \langle \rho u_i \rangle \left[\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} \right] + \\
& \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u_i u_j \rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \rho u_i u_j \rangle + \\
& \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \rho u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \\
& \langle u_i u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \rho u_i u_j u_k \rangle - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k} = \dots; \\
\\
& = 0.
\end{aligned}$$

Continue, indo em direção aos portões do inferno:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\
& u_k \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \\
& \rho \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle) \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \\
& u_i u_k \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle \rho u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_i \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial (\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \dots
\end{aligned} \tag{6.24}$$

A equação é enorme, mas a esta altura eu não consigo ver com clareza um conjunto razoável de simplificações. Sou forçado, portanto, a manter tudo como está. A equação também vale se eu trocar i por j :

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \langle \rho u_j \rangle}{\partial t} + \\
& u_k \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \\
& \rho \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + (\langle U_j \rangle \langle U_k \rangle) \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \\
& u_j u_k \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_j u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_k \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \langle U_j \rangle \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_j \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \frac{\partial (\rho u_j u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle \rho u_j u_k \rangle}{\partial x_k} = \dots
\end{aligned} \tag{6.25}$$

O procedimento formal para se chegar às equações de ordem 2 é multiplicar (6.24) por u_j ; multiplicar (6.25) por u_i ; promediar (ambas) e somar:

$$\begin{aligned}
& \rho u_j \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i u_j \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} - u_j \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\
& u_j u_k \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + u_i u_j \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \\
& \rho u_j \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle) u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \\
& u_i u_j u_k \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle u_j \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle u_i u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle \rho u_k \rangle)}{\partial x_k} + \\
& \rho u_i u_j \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle u_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \\
& u_j \frac{\partial (\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \dots
\end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \left\langle u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \langle \wp \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle u_i u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \\
& \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial (\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \langle \rho u_j \rangle \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + (\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle) \left\langle u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \langle u_i u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \left\langle u_j \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \langle \rho u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \left\langle u_j \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \langle \rho u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \left\langle u_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_k} \right\rangle + \\
& \left\langle u_j \frac{\partial (\rho u_i u_k)}{\partial x_k} \right\rangle = \dots
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Deve ser possível aliviar um pouquinho a complexidade do monstro acima, com a ajuda da equação promediada da continuidade, que repetimos aqui:

$$\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \wp \rangle \langle U_k \rangle + \langle \rho u_k \rangle] = 0.$$

6.6 – A equação de ordem 2 para escoamentos compressíveis

Escreva a equação de balanço de quantidade de movimento, (5.49), na forma

$$\frac{\partial (\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i U_k)}{\partial x_k} = \text{Dir}_i, \tag{6.28}$$

$$\text{Dir}_i = \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \tag{6.29}$$

Em (6.29), a densidade não sofreu nenhuma aproximação do lado esquerdo, porque nós vamos precisar usar a equação da continuidade em sua forma mais geral para obter uma forma útil (e igualmente geral) para a equação envolvendo a quantidade $U_i U_j$.

A manipulação do lado direito de (6.28), Dir_i , é relativamente simples, e pode ser deixada para depois. Concentremo-nos no lado esquerdo. Multiplicamos (6.28) por U_j , e repetimos trocando o índice; e adicionamos uma terceira equação, que é a equação da continuidade, (3.5), multiplicada por $U_i U_j$:

$$U_j \left[\frac{\partial(\varphi U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi U_i U_k)}{\partial x_k} \right] = U_j \text{Dir}_i, \quad (6.30)$$

$$U_i \left[\frac{\partial(\varphi U_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi U_j U_k)}{\partial x_k} \right] = U_i \text{Dir}_j, \quad (6.31)$$

$$U_i U_j \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi U_k)}{\partial x_k} \right] = 0. \quad (6.32)$$

Somamos agora as 3 equações acima (os traços abaixo indicam cancelamento com a equação da continuidade (3.5):

$$\begin{aligned} & U_j \left[\cancel{U_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}} + \varphi \frac{\partial U_i}{\partial t} + \cancel{U_i \frac{\partial \varphi U_k}{\partial x_k}} + \varphi U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] + \\ & U_i \left[\cancel{U_j \frac{\partial \varphi}{\partial t}} + \varphi \frac{\partial U_j}{\partial t} + \cancel{U_j \frac{\partial \varphi U_k}{\partial x_k}} + \varphi U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] + \\ & U_i U_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_i U_j U_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + U_i U_j \varphi \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \\ & \left(U_j \varphi \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \varphi \frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i U_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left(\varphi U_j U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \varphi U_i U_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + U_i U_j \varphi \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + U_i U_j U_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \\ & \frac{\partial(\varphi U_i U_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi U_i U_j U_k)}{\partial x_k} = U_j \text{Dir}_i + U_i \text{Dir}_j. \quad (6.33) \end{aligned}$$

A última igualdade acima é a equação de transporte de $\varphi U_i U_j$. O lado direito é relativamente “padrão”, e sua manipulação pode ser adiada um pouco mais. O lado esquerdo, por outro lado, contém diversas escalas, que podem ser mais bem identificadas por meio de uma decomposição de Reynolds (longa) para cada uma das 4 variáveis. Vale a pena o detalhamento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi U_i U_j)}{\partial t} &= \frac{\partial[\langle \varphi \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i][\langle U_j \rangle + u_j]}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle u_j + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle u_i + \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \rho + \right. \\ & \quad \left. \langle \varphi \rangle u_i u_j + \langle U_i \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho u_i + \rho u_i u_j \right] \quad (6.34) \end{aligned}$$

Tiramos a média:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi U_i U_j \rangle}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial[\langle \varphi \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i][\langle U_j \rangle + u_j]}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \varphi \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle \right] \quad (6.35) \end{aligned}$$

Para as derivadas espaciais,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\varphi U_i U_j U_k)}{\partial x_k} &= \frac{\partial[\langle \varphi \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i][\langle U_j \rangle + u_j][\langle U_k \rangle + u_k]}{\partial x_k} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle u_k + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle u_i + \langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle u_j + \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle \rho] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle u_j u_k + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle u_i u_k + \langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle u_i u_j] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle \rho u_i + \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \rho u_k] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle u_i u_j u_k + \langle U_i \rangle \rho u_j u_k + \langle U_j \rangle \rho u_i u_k + \langle U_k \rangle \rho u_i u_j] + \frac{\partial(\rho u_i u_j u_k)}{\partial x_k}. \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

Novamente, a média simplifica um pouco:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\langle \varphi U_i U_j U_k \rangle}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle u_j u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle \langle u_i u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle \langle u_i u_j \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle \rho u_k \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle u_i u_j u_k \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j u_k \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i u_k \rangle + \langle U_k \rangle \langle \rho u_i u_j \rangle] + \frac{\partial\langle \rho u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k}. \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

Podemos agora tentar simplificar mais usando a equação da continuidade *** promediada, (5.45):

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \varphi \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle u_j u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle \langle u_i u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle \langle u_i u_j \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \langle \rho u_k \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle u_i u_j u_k \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j u_k \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i u_k \rangle + \langle U_k \rangle \langle \rho u_i u_j \rangle] + \frac{\partial\langle \rho u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
 &\langle \varphi \rangle \frac{\partial\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle}{\partial t} + \cancel{\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial\varphi}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t} [\langle \varphi \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle] + \\
 &\quad \langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle] + \cancel{\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle]} + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \varphi \rangle \langle U_i \rangle \langle u_j u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_j \rangle \langle u_i u_k \rangle + \langle \varphi \rangle \langle U_k \rangle \langle u_i u_j \rangle] + \\
 &\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle] + \cancel{\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial\langle \rho u_k \rangle}{\partial x_k}} + \langle \rho u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle] +
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [\langle \wp \rangle \langle u_i u_j u_k \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j u_k \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i u_k \rangle + \langle U_k \rangle \langle \rho u_i u_j \rangle] + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k}. \quad (6.38)$$

Dê uma olhada no seguinte:

$$\begin{aligned} & \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ & \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} \\ & = \langle \wp' \rangle g_i - 2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_k \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Como antes, multiplique por $\langle U_j \rangle$, e depois repita trocando os índices:

$$\begin{aligned} & \langle U_j \rangle \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + U_j \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ & \langle U_j \rangle \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_j \rangle \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_j \rangle \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle U_j \rangle \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_k} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \rho u_i u_k \rangle}{\partial x_k} \\ & = \langle U_j \rangle \langle \wp' \rangle g_i - 2 \langle U_j \rangle \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_k \langle U_k \rangle - \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \langle U_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2 \langle U_j \rangle \wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_k} \\ & \quad \langle U_i \rangle \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \rho u_j \rangle}{\partial t} + \\ & \langle U_i \rangle \langle \wp \rangle \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \frac{\partial (\langle U_k \rangle \langle \rho u_j \rangle)}{\partial x_k} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \rho u_j u_k \rangle}{\partial x_k} \\ & = \langle U_i \rangle \langle \wp' \rangle g_j - 2 \langle U_i \rangle \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_k \langle U_k \rangle - \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j} + \langle U_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2 \langle U_i \rangle \wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

6.7 – A dedução das equações de ordem 2

A partir de agora, nós vamos supor válidos a decomposição e os postulados de Reynolds:

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i, \quad (6.39)$$

$$\langle U_i U_j \rangle = \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle, \quad (6.40)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial s}, \quad (6.41)$$

onde f é qualquer momento central e s é x_k ou t . A aproximação de Boussinesq complica a decomposição de Reynolds para \wp , T (ou Θ) e P . Como antes,

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho, \quad (6.42)$$

$$P = \langle P \rangle + p, \quad (6.43)$$

porém agora vale também a decomposição de Boussinesq (5.30), (5.31), (5.32), (5.33), de modo que

$$\wp = \wp_r + \wp' = \langle \wp_r + \wp' \rangle + \rho = \wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho \quad (6.44)$$

$$P = P_r + P' = \langle P_r + P' \rangle + p = P_r + \langle P' \rangle + p \quad (6.45)$$

$$T = T_r + T' = \langle T_r + T' \rangle + \mathcal{T} = T_r + \langle T' \rangle + \mathcal{T} \quad (6.46)$$

Subtraindo-se \wp_r , P_r e T_r das equações acima, vê-se que as flutuações turbulentas são as flutuações *em relação às médias das flutuações dinâmicas*, $\wp' = \langle \wp' \rangle + \rho$, $P' = \langle P' \rangle + p$, $T' = \langle T' \rangle + \mathcal{T}$.

As equações com que vamos trabalhar são as equações de Navier-Stokes com a aproximação de Boussinesq :

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} = -\delta_{i3} g \frac{\wp'}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l U_k - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.48)$$

Nessa última, o i entre parênteses significa “não somar em i ”. Ele também tem a estranha utilidade de que as equações deduzidas, devidamente interpretadas, também se aplicarão a escalares, seguindo uma notação utilizada por Dias (1994).

É importante notar que, estritamente falando, nós não mostramos que (6.47) se aplica a escoamentos naturais (por exemplo, na atmosfera, em rios, lagos e oceanos). O que nós realmente mostramos foi que $\partial \langle U_k \rangle / \partial x_k \approx 0$. No entanto, o que todo mundo faz em turbulência é utilizar (6.47); é o que faremos na sequência, mas com a advertência de que a realidade talvez seja mais complicada do que isso

Note que, em virtude de (6.47),

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial (U_i U_k)}{\partial x_k}. \quad (6.49)$$

A média da equação da continuidade produz

$$\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.50)$$

Substituindo a decomposição de Reynolds na equação dinâmica,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] = \\ & -\delta_{i3} g \frac{\langle \wp' \rangle + \rho}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l [\langle U \rangle_k + u_k] - \frac{1}{\wp_r} \left[\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Note que a *média* de (6.51) destrói todos os termos que dependem linearmente de uma flutuação. O único “problema” é com os termos não-lineares:

$$\langle [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] \rangle = \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle, \quad (6.52)$$

donde se deduz de uma vez por todas as equações para as médias,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = -\delta_{i3} g \frac{\langle \wp' \rangle}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle U_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k}. \quad (6.53)$$

O único termo “novo” é o fluxo cinemático turbulento $\langle u_i u_k \rangle$. Subtraindo (6.53) de (6.51),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i \langle u_k \rangle + \langle U_i \rangle u_k + u_i u_k - \langle u_i u_k \rangle] = \\ - \delta_{i3} g \frac{\rho}{\varphi_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_k - \frac{1}{\varphi_r} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.54)$$

cujá pré-multiplicação por u_j dá

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle u_k \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \delta_{i3} g \frac{u_j \rho}{\varphi_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_j u_k - \frac{1}{\varphi_r} u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

É óbvio que uma equação igual a (6.55) vale se trocarmos os índices. Essas duas equações irmãs devem ser combinadas agora. Note que

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k} &= u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ &= u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j p}{\partial x_i} &= u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Rightarrow \\ \frac{\partial u_j p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i p}{\partial x_j} &= u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \\ u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \frac{\partial (u_j p)}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_j} - p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

O trabalho com o termo viscoso é um pouco mais sofisticado; note que

$$\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j s_{ik}) = \nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \nu_{(i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik}; \quad (6.59)$$

por simetria,

$$\nu_{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i s_{jk}) = \nu_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} + \nu_{(j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk}; \quad (6.60)$$

somando-se as duas, obtém-se o resultado importante:

$$\nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \nu_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu_{(i)} u_j s_{ik} + \nu_{(j)} u_i s_{jk}) - \left[\nu_{(i)} s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu_{(j)} s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]. \quad (6.61)$$

A equação para os momentos de segunda ordem fica

$$\underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}}_{\text{II}} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \underbrace{\langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k}}_{\text{V}} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{g}{\wp_r} (\delta_{i3} \langle u_j \rho \rangle + \delta_{j3} \langle u_i \rho \rangle)}_{\text{VI}} - \underbrace{2\omega_l [\epsilon_{ilk} \langle u_j u_k \rangle + \epsilon_{jlk} \langle u_i u_k \rangle]}_{\text{VII}} \\
& - \underbrace{\frac{1}{\wp_r} \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_j p \rangle \delta_{ik} + \langle u_i p \rangle \delta_{jk}]}_{\text{VIII}} + \underbrace{\left\langle \frac{p}{\wp_r} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle}_{\text{IX}} + \\
& \underbrace{2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu_{(i)} \langle u_j s_{ik} \rangle + \nu_{(j)} \langle u_i s_{jk} \rangle)}_{\text{X}} - \underbrace{2 \left[\nu_{(i)} \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \nu_{(j)} \left\langle s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]}_{\text{XI}}. \quad (6.62)
\end{aligned}$$

6.8 – Energia cinética da turbulência

A contração de (6.62) produz a equação de transporte de (duas vezes a) energia cinética da turbulência,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
- \frac{2g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{2}{\wp_r} \left[\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] \\
+ 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i s_{ik} \rangle + \langle u_i s_{ik} \rangle) - 2\nu_{(i)} \left[\left\langle s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \quad (6.63)
\end{aligned}$$

Dividindo por 2 e utilizando (3.71) para o último termo acima,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial x_k}}_{\text{II}} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k}}_{\text{IV}} = \\
- \underbrace{\frac{g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle}_{\text{V}} - \underbrace{\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle}_{\text{VI}} - \underbrace{\frac{1}{\wp_r} \left[\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right]}_{\text{VII}} \\
+ \underbrace{2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle u_i s_{ik} \rangle}{\partial x_k}}_{\text{VIII}} - \underbrace{2\nu_{(i)} \langle s_{ik} s_{ik} \rangle}_{\text{IX}}. \quad (6.64)
\end{aligned}$$

Agora,

- I. é a derivada local de $\langle E_{ct} \rangle$;
- II. é a derivada advectiva de $\langle E_{ct} \rangle$;
- III. é (menos) o termo de produção por gradiente;
- IV. é (menos) o transporte turbulento de ECT;
- V. é a produção pelo fluxo de flutuabilidade, $\langle u_3 \rho \rangle$;
- VI. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial (em geral isso é desprezado);
- VII. é o termo de pressão (muito difícil de medir e de modelar)

VIII. é o termo de transporte difusivo (nulo em uma integral sobre todo o escoamento, da mesma maneira que IV, mas de ordem de grandeza muito menor;

IX. é $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ (em um escoamento incompressível).

De (3.103), nós reconhecemos que, para um escoamento incompressível nas flutuações ($\partial u_k / \partial x_k = 0$), o último termo acima é $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$. Além disso, também utilizando incompressibilidade,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \langle u_i s_{ik} \rangle}{\partial x_k} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Calculando as derivadas de produto do penúltimo termo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - 2 \epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{2}{\rho_r} \left[\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] + 2 \nu_{(i)} \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle. \quad (6.65) \end{aligned}$$

Essa última equação “não conta toda a história” da turbulência corretamente. Alguma melhora de interpretação pode ser obtida por meio da identidade (facilmente verificável)

$$2 \nu_{(i)} \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle = \nu_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \langle u_i u_i \rangle - 2 \nu_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (6.66)$$

É tentador identificar o primeiro termo do lado direito como um termo de difusão de energia cinética turbulenta (por analogia com o termo viscoso de Navier-Stokes) e o segundo como o termo de dissipação de energia cinética turbulenta; no entanto, rigorosamente falando tal interpretação está errada! Lembre-se de que o tensor de tensões depende do tensor taxa de deformação; conseqüentemente, antes da simplificação por meio da equação da continuidade, o termo viscoso de Navier-Stokes para as flutuações turbulentas é

$$\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right);$$

pré-multiplicando-se por u_j encontra-se o produto

$$u_j \nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \nu_{(i)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\}, \quad (6.67)$$

cujo lado direito é exatamente igual aos termos IV e V da equação (1-110) de [Hinze \(1975\)](#). Tirando-se os valores esperados, fazendo-se a contração $i = j$, e multiplicando-se por 2, conclui-se que

$$2 \left\langle u_i \nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle = 2 \nu_{(i)} \left[\left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle \right] = 2 \nu_{(i)} \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= v_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \langle u_i u_i \rangle - \underbrace{2v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{\approx 2\epsilon_e} \\
&= 2v_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \underbrace{2v_{(i)} \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{2\epsilon_e} \quad (6.68)
\end{aligned}$$

Essa é a equação que antecede (1-111) de [Hinze \(1975\)](#) (p. 74). Na primeira linha, note a simplificação com a equação da continuidade. A segunda linha é a aplicação de (6.66). A terceira linha é o valor esperado do lado direito de (6.67), com a contração $i = j$.

Compare o segundo termo do lado direito da terceira linha de (6.68) com (3.77): conforme indicado na chave horizontal, este é o termo exato para a taxa média de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ . De fato,

$$\begin{aligned}
2v_{(i)} \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 4v_{(i)} \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \\
&= 4v_{(i)} \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \\
&= 2v_{(i)} \left\langle \left(s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + s_{ki} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\
&= 2v_{(i)} \left\langle \left(s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + s_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\
&= 2v_{(i)} \left\langle s_{ik} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\
&= 2 \times 2v_{(i)} \langle s_{ik} s_{ik} \rangle = 2\epsilon_e. \quad (6.69)
\end{aligned}$$

O motivo deste longo exercício é que vemos agora que podemos escrever a equação para a energia cinética da turbulência, (6.65), de outras *duas* formas que enfatizam um pouco melhor os termos que são responsáveis, *aproximadamente* ou *exatamente*, pela taxa de dissipação de energia cinética turbulenta ϵ_e .

Assim se usarmos (6.66) em (6.68), e dividirmos por 2 (para encontrarmos a equação de evolução de $u_i u_i / 2$), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
- \epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \left[\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] + v_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle - \underbrace{v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{\approx \epsilon_e}. \quad (6.70)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se usarmos a primeira e última linhas de (6.67), a mesma equação fica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
- \epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \left[\frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] + v_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \underbrace{v_{(i)} \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{\equiv \epsilon_e}. \quad (6.71)
\end{aligned}$$

Em um certo sentido, (6.71) é mais “correta” do que (6.70) porque nela ϵ_e aparece explicitamente, e exatamente. Agora, se a turbulência for homogênea, os dois penúltimos termos de (6.70) e de (6.71) são nulos, e o último termo de (6.70) para ϵ_e torna-se exato. Em turbulência homogênea portanto, vale

$$\epsilon_e = \nu_{(i)} \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = \nu_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (6.72)$$

A equação (6.72) é uma entre várias relações similares que podem ser obtidas em turbulência homogênea e incompressível. Sua dedução pode ser feita diretamente a partir das hipóteses de homogeneidade e incompressibilidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.73)$$

Resultados um pouco mais gerais também se aplicam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.74)$$

Finalmente, usando (6.74),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.75)$$

6.9 – As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2

A escala integral \mathcal{T} de um processo estocástico $u(t)$ estacionário com média zero é definida por meio da integral da função de autocorrelação:

$$\mathcal{T}R_{uu}(0) = \mathcal{T} \langle u^2(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) d\tau. \quad (6.76)$$

No caso de turbulência tridimensional, a rigor existiriam diversas “escalas” integrais para as diferentes funções de correlação R_{ij} , R_{ijk} , etc. Por simplicidade, vamos

definir uma escala integral de *comprimento* \mathcal{L} supondo (provisoriamente) que a turbulência seja homogênea, e escolhendo as flutuações u_1 na direção x_1 :

$$\langle u_1 u_1 \rangle \mathcal{L} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(x_1) dx_1. \quad (6.77)$$

Existem diversas formas de se escolher uma escala de velocidade \tilde{u} (por exemplo, a *velocidade de atrito* é sempre uma candidata); para os nossos propósitos (e também porque em turbulência isotrópica essa é uma variável particularmente frequente) provavelmente basta usar o desvio-padrão:

$$\tilde{u} \equiv \sqrt{\langle u_1 u_1 \rangle}. \quad (6.78)$$

Uma escala de tempo agora se segue naturalmente,

$$\tilde{t} \equiv \mathcal{L} / \tilde{u}. \quad (6.79)$$

Em geral os textos e artigos científicos mencionam as “escalas integrais”, sem serem precisos nem atentarem ao fato de que em processos estocásticos multidimensionais existem muitas possíveis escalas integrais, e ainda que quando a turbulência for não-homogênea a definição clássica baseada na função de autocorrelação é simplesmente inaplicável, já que neste tipo de turbulência a função de autocorrelação simplesmente *não existe*.

Prosseguindo, define-se a microescala de Taylor λ por

$$\left. \frac{\partial^2 R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1 \partial x_1} \right|_{x_1=0} \equiv -2 \frac{\langle u_1 u_1 \rangle}{\lambda^2}. \quad (6.80)$$

Teorema 2 *Em turbulência homogênea,*

$$\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{\langle u_1 u_1 \rangle}{\lambda^2}. \quad (6.81)$$

Prova:

$$\begin{aligned} R_{1,1}(x_1, 0, 0) &= \langle u_1(0, 0, 0) u_1(x_1, 0, 0) \rangle, \\ \frac{\partial R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1} &= \left\langle u_1(0, 0, 0) \frac{\partial u_1(x_1, 0, 0)}{\partial x_1} \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1^2} &= \left\langle u_1(0, 0, 0) \frac{\partial^2 u_1(x_1, 0, 0)}{\partial x_1 \partial x_1} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Mas em turbulência homogênea, vale (6.18), na forma

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = 0; \quad (6.83)$$

derivando novamente essa última expressão,

$$\left\langle u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = 0, \quad (6.84)$$

donde se segue (6.81).

Vamos agora estudar as ordens de grandeza dos termos de (6.62). Nós começamos por admitir que, em geral,

$$\mathcal{O}(\langle u_i u_j \rangle) = \tilde{u}^2. \quad (6.85)$$

Os termos *I* e *II* têm que ter (*no máximo*) a mesma ordem de grandeza dos demais, já que juntos eles formam uma “derivada material” seguindo o escoamento médio,

$$\frac{\overline{D}\langle u_i u_j \rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}. \quad (6.86)$$

Note que (6.86) pode ser interpretada como a derivada material seguindo o escoamento *médio*, já que é formada com $\langle U_k \rangle$, e não com U_k . A barra sobre o D serve para explicitar a diferença.

Vamos também supor que as escalas integrais (ou, como dizem os russos, *externas*) são impostas fisicamente ao escoamento, e por conseguinte estão relacionadas com os gradientes de velocidade média:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \sim \frac{\tilde{u}}{\mathcal{L}}. \quad (6.87)$$

Neste caso,

$$\mathcal{O}(\text{III, IV, V}) \sim \frac{\tilde{u}^3}{\mathcal{L}} \quad (6.88)$$

no máximo, porque na verdade não temos muita idéia sobre o comportamento das correlações triplas. Continuando,

$$\mathcal{O}(\text{VI}) \sim \frac{g\tilde{u}\varrho}{\wp_r}, \quad (6.89)$$

onde ϱ é a escala externa das flutuações de densidade. Isso na verdade define uma *nova* escala de comprimento,

$$g\tilde{u}\frac{\varrho}{\wp_r} \equiv \frac{\tilde{u}^3}{\mathcal{L}_\rho} \Rightarrow \mathcal{L}_\rho = \frac{g\varrho}{\tilde{u}^2\wp_r}, \quad (6.90)$$

o que nos deixa a um passo do comprimento de essabilidade de Obukhov.

A ordem de grandeza das covariâncias com a pressão vem a seguir. É razoável supor que

$$p \sim \wp_r \tilde{u}^2, \quad (6.91)$$

mas ainda é necessário estimar o *nível de correlação* entre p , u_i e $\partial u_i / \partial x_k$. Note que, se u_i e $\partial u_i / \partial x_k$ fossem bem correlacionados, então $\langle u_i \partial u_i / \partial x_k \rangle \sim \tilde{u}^2 / \lambda$ em virtude de (6.81); no entanto, seguindo a linha de raciocínio de Tennekes e Lumley (1972, p. 70):

$$\left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_i \rangle \sim \frac{\tilde{u}^2}{\mathcal{L}} \ll \frac{\tilde{u}^2}{\lambda}. \quad (6.92)$$

O motivo para essa discrepância é que u_i e $\partial u_i / \partial x_k$ não estão distribuídos na mesma faixa de números de onda. De fato, se pensarmos nos espectros respectivos,

$$\Phi_{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \sim k^2 \Phi_{i,i}, \quad (6.93)$$

ou seja, as faixas de números de onda das derivadas é bem mais alta. Daqui somos capazes de deduzir que o nível de correlação entre u_i e suas derivadas espaciais é

$$r_{u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \sim \frac{\lambda}{\mathcal{L}}. \quad (6.94)$$

Note que o coeficiente de correlação é *identicamente nulo* em turbulência homogênea.

A ordem de grandeza dos termos envolvendo a aceleração de Coriolis é:

$$\mathcal{O}(\text{VII}) \sim 2\omega\tilde{u}^2. \quad (6.95)$$

Note que se os termos dominantes da equação de momentos de ordem 2 são de ordem \tilde{u}^3/\mathcal{L} , o *número de Rossby turbulento* é

$$Ro = \frac{\omega\tilde{u}^2}{\tilde{u}^3/\mathcal{L}} = \frac{\omega\mathcal{L}}{\tilde{u}} \sim 0,007 \ll 1, \quad (6.96)$$

donde se conclui que a influência destes termos na turbulência propriamente dita é desprezível.

Da mesma forma que no caso de $\langle u_i \partial u_i / \partial x_k \rangle$, VIII é nulo em turbulência homogênea; alguns autores (Stull, por exemplo) sugerem que VIII é desprezível na camada-limite atmosférica. Neste ponto, parece razoável partir da idéia de que se um termo é nulo em turbulência homogênea, ele deve ser relativamente pequeno em turbulência não-homogênea real. É claro que isso não resolve a questão do nível de correlação entre flutuações de pressão e as derivadas das flutuações de velocidade. Talvez o melhor que se possa fazer a essa altura (alguma contribuição para os modelos de fechamento dos termos de pressão?) seja mencionar que um modelo clássico de fechamento é (Hinze, 1975)

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \frac{c \sqrt{\langle u_k u_k \rangle}}{\mathcal{L}} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{1}{6} \delta_{ij} \langle u_k u_k \rangle \right) \sim \frac{\tilde{u}^3}{\mathcal{L}}. \quad (6.97)$$

Isso significa que os termos de correlação de pressão *são importantes*, da mesma ordem que os termos de produção e (possivelmente) de correlação tripla.

Continuamos a análise de ordens de grandeza, atacando agora os termos que envolvem viscosidade. Ao olhar para X, vemos imediatamente um termo que é identicamente nulo em turbulência homogênea; é de se esperar portanto que sua importância em geral seja pequena; nossa estimativa é

$$\mathcal{O}(\text{X}) = \frac{1}{\mathcal{L}} \left(\nu \frac{\tilde{u}^2}{\mathcal{L}} \right) = \frac{\nu \tilde{u}^2}{\mathcal{L}^2}, \quad (6.98)$$

enquanto que

$$\mathcal{O}(\text{XI}) = \nu \left(\frac{\tilde{u}}{\lambda} \right)^2 \gg \frac{\nu \tilde{u}^2}{\mathcal{L}^2} \quad \text{se } i = j! \quad (6.99)$$

Essa rápida análise mostra que o termo difusivo X é muito menor que o termo dissipativo XI. Neste ponto, é interessante definir uma taxa de dissipação de covariância,

$$2\epsilon_{ij} \approx (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle \approx \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon_e. \quad (6.100)$$

Segundo Wyngaard (1981), a 2ª equação é estritamente válida se a turbulência for isotrópica. Ver também Hinze (1975, p. 189).

***coloca o 6 aqui!!!!

7

Soluções laminares das equações de Navier-Stokes

A maioria das camadas-limite encontradas em escoamentos industriais ou naturais é turbulenta. Além disso, é nessas camadas-limite que ocorrem os *fluxos* mais intensos de quantidade de movimento, calor e massa. Por exemplo, e para citar o mais óbvio, a assim chamada “perda de carga” em tubos e canais está ligada diretamente ao atrito entre paredes e escoamento, e à dissipação de energia cinética da turbulência em calor que lhe está associada. Para os engenheiros ao fim do século XIX e início do XX, este era um problema de grande importância, pois dele dependiam critérios de projeto de tubulações industriais e canais. Os primeiros resultados de engenharia foram obtidos de forma “empírica” (um físico diria: “fenomenológica”) e antecederam os resultados mais fundamentais de Mecânica dos Fluidos e Teoria de Turbulência. Frequentemente, usamos a palavra “Hidráulica” para caracterizar essa abordagem, que produziu, entre outras, fórmulas empíricas tais como a de Hazen-Williams e a de Manning. Entretanto, também desde o século XIX já se conhecia o suficiente da física de fluidos para saber que, em princípio, qualquer escoamento pode ser obtido como uma solução das equações de Navier-Stokes. Blasius obteve a primeira solução das equações de Navier-Stokes de interesse real em engenharia. Nosso objetivo neste capítulo será procurar entender da forma mais fundamental possível o comportamento das camadas-limite turbulentas.

7.1 – Algumas soluções laminares

O escoamento em um duto com seção retangular de largura infinita em y e de espessura $h = 2\delta$ em z , em regime laminar sob a ação de um gradiente de pressão, é regido pelas equações de Navier-Stokes em duas dimensões,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (7.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (7.2)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right). \quad (7.3)$$

As condições de contorno são

$$U(0) = 0, \quad (7.4)$$

$$W(0) = 0, \quad (7.5)$$

$$W(2\delta) = 0, \quad (7.6)$$

$$W(2\delta) = 0. \quad (7.7)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção x , $\partial(\cdot)/\partial x = 0$ (exceto, é claro, para a pressão) e a solução de (7.1) é $W(z) = 0$. Este resultado por sua vez anula todos os termos envolvendo W em (7.3), cuja solução então será simplesmente uma distribuição hidrostática em z :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow P(x, z) = -\rho g z + P_0(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}. \quad (7.8)$$

Observe que $P_0(x)$ é, por definição, a pressão na parede em $z = 0$.

Em (7.2), as condições de escoamento plenamente desenvolvido em x e velocidade vertical nula anulam os termos não lineares, e usando-se (7.8) obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = gJ, \quad (7.9)$$

onde a constante gJ deve-se ao fato de que o lado esquerdo de (7.9) é (no máximo) função somente de x , e o lado esquerdo de z . J é a perda de carga unitária, constante em x . A introdução da aceleração da gravidade na definição da constante em (7.9) objetiva tornar J adimensional. Obtém-se portanto os resultados

$$\frac{dP_0}{dx} = -\rho g J \quad (7.10)$$

e (aplicando-se as condições de contorno para u)

$$U(z) = \frac{gJ}{2\nu} z (2\delta - z). \quad (7.11)$$

Essa última equação é o bem conhecido perfil parabólico de velocidade em um escoamento de Hagen-Poiseuille; sua integração produz a velocidade média na seção do duto:

$$\bar{U} = \frac{gJ\delta^2}{3\nu}, \quad (7.12)$$

a qual pode ser reescrita em termos de um fator de atrito f :

$$J = \frac{f}{\delta} \frac{\bar{U}^2}{2g} \quad (7.13)$$

onde

$$f = \frac{6\nu}{\bar{U}\delta} = \frac{6}{\text{Re}} \quad (7.14)$$

é o fator de atrito que depende, em um escoamento laminar, do número de Reynolds aqui definido em termos da semi-espessura δ :

$$\text{Re} = \frac{\bar{U}\delta}{\nu}. \quad (7.15)$$

O fator numérico em (7.14) depende, naturalmente, das definições de f em (7.13) e de Re em (7.15)*. Todo o desenvolvimento acima é clássico e muito bem conhecido. O

*É interessante notar que (7.14) tem um coeficiente numérico dez vezes menor que o da fórmula similar para o fator de atrito de Darcy em *tubos* de seção circular, $f_D = 64/\text{Re}_D$, onde o número de Reynolds neste caso é $\text{Re}_D = UD/\nu$, e D é o *diâmetro* do tubo.

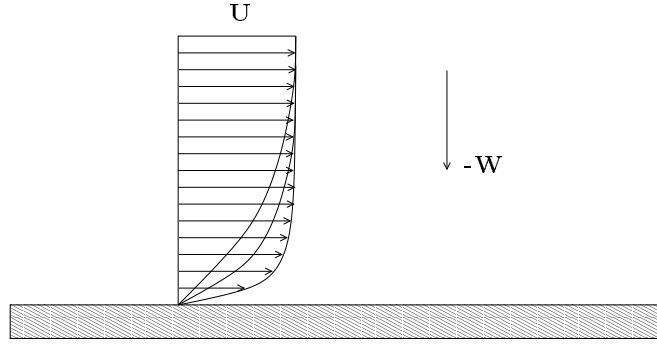


Figura 7.1: Escoamento laminar sobre uma placa porosa

ponto importante aqui é que vamos utilizar um desenvolvimento totalmente análogo para escoamentos turbulentos, recuperando diversos resultados obtidos para escoamento laminar, inclusive a constância do gradiente de pressão. A obtenção do perfil de velocidade em função da perda de carga unitária em (7.11) é claramente o passo fundamental, que precisará ser repetido, ainda que com mais dificuldade, em escoamentos turbulentos.

Considere agora um escoamento bi-dimensional sobre uma placa porosa, com velocidade U_∞ horizontal longe da placa, e um campo de velocidade vertical uniforme $-W_0$ (figura 7.1). As equações governantes (para um fluido com densidade constante) são novamente (7.1)–(7.3). As condições de contorno são

$$u(0) = 0, \quad (7.16)$$

$$u(\infty) = U_\infty, \quad (7.17)$$

$$w(0) = -W_0. \quad (7.18)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção x , $\partial(\cdot)/\partial x = 0$, e a solução de (7.1) é $W(z) = -W_0$. A solução de (7.3) é simplesmente uma distribuição hidrostática de pressão na vertical, e finalmente (7.2) conduz à equação diferencial ordinária

$$\nu \frac{d^2 U}{dz^2} + W_0 \frac{du}{dz} = 0, \quad (7.19)$$

cujas soluções para as condições de contorno em U é

$$U(z) = U_\infty (1 - e^{-\frac{W_0 z}{\nu}}). \quad (7.20)$$

Observe que (7.20) é uma solução *laminar*, e em princípio sem utilidade para a solução de problemas reais turbulentos. Ela tem, entretanto, a característica interessante de depender do “número de Reynolds”

$$\text{Re}_z = \frac{W_0 z}{\nu}; \quad (7.21)$$

quanto maior Re_z , mais “reto” fica o perfil — em outras palavras, mais delgada se torna a camada-limite viscosa próximo da parede. Este é exatamente o tipo de comportamento que ocorre em escoamentos turbulentos reais. Em retrospecto, o responsável pelo “achatamento” do perfil de velocidade $u(z)$ é o fluxo advectivo de quantidade de movimento $-U(z)W_0$. Em escoamentos turbulentos, a grandeza equivalente será o fluxo turbulento de quantidade de movimento (ou tensão de Reynolds) $-\langle uw \rangle$.

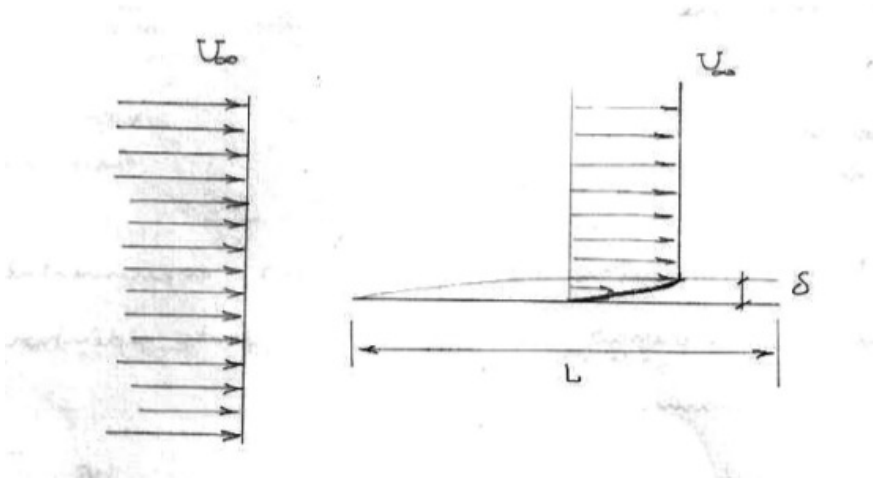


Figura 7.2: A camada-limite laminar

7.2 – A Solução de Blasius

Considere a figura 7.2.

Desejamos resolver o sistema de equações

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_I + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{II} = 0, \quad (7.22)$$

$$\underbrace{U \frac{\partial U}{\partial x}}_{III} + \underbrace{V \frac{\partial U}{\partial y}}_{IV} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}}_V + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}_{VI} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{VII}, \quad (7.23)$$

$$\underbrace{U \frac{\partial V}{\partial x}}_{VIII} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial y}}_{IX} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}}_X + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}_{XI} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{XII} \quad (7.24)$$

1ª Observação: uma análise linear, que não é necessariamente fácil, deve indicar que, devido à presença da derivada segunda em relação a y , $\partial^2 \cdot / \partial y^2$, este é um sistema elítico, que requer condições de contorno na extremidade direita da placa. Isso é, em um certo sentido, não-natural. O primeiro passo, portanto, é modificar as equações, por meio de uma análise da ordem de grandeza dos termos. A observação fundamental, de natureza experimental, é que a espessura da camada-limite é muito em comparação com as distâncias em x :

$$\frac{\delta}{L} \ll 1. \quad (7.25)$$

Da equação da continuidade, temos

$$\frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty. \quad (7.26)$$

Seguem-se as seguintes ordens de grandeza:

$$I \sim U_\infty/L, \quad (7.27)$$

$$\text{II} \sim \frac{U_\infty \delta}{L}, \quad (7.28)$$

$$\text{III} \sim U_\infty^2/L, \quad (7.29)$$

$$\text{IV} \sim U_\infty \frac{\delta U_\infty/L}{\delta} = U_\infty^2/L \quad (7.30)$$

Com a hipótese adicional

$$P \sim \wp U_\infty^2,$$

nós prosseguimos nas estimativas de ordens de grandeza:

$$\text{V} \sim U_\infty^2/L, \quad (7.31)$$

$$\text{VI} \sim \nu \frac{U_\infty}{L^2} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.32)$$

$$\text{VII} \sim \frac{\nu U_\infty}{\delta^2}. \quad (7.33)$$

Claramente, VI é muito menor que todos os demais termos em (7.23). Observe entretanto que VII possui uma escala à primeira vista “independente” das demais. Na região de interesse, entretanto, próximo da parede, VII é o único termo que ressa que inclui os efeitos viscosos. Para que estes efeitos sejam da mesma ordem que a aceleração convectiva dada por III, e IV,

$$\frac{\nu U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}. \quad (7.34)$$

É conveniente observar que

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}. \quad (7.35)$$

Finalmente, devemos explorar “até o fim” a última equação, de balanço de quantidade de movimento em y (utilizando em todos os casos (7.34)):

$$\text{VIII} \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.36)$$

$$\text{IX} \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.37)$$

$$\text{X} \sim \frac{L}{\delta} U_\infty^2/L = \sqrt{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.38)$$

$$\text{XI} \sim \frac{\nu}{L^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\delta}{L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L^{3/2}} U_\infty^2/L, \quad (7.39)$$

$$\text{XII} \sim \frac{\nu}{\delta^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu U_\infty}{\delta L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{L}{\delta} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L. \quad (7.40)$$

Estes resultados mostram que, em primeira aproximação, nós podemos re-escrever o sistema (7.22)–(7.24) como

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (7.41)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (7.42)$$

$$0 = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (7.43)$$

Vários pontos são dignos de nota aqui. Em primeiro lugar, nós observamos que (7.43) significa que o gradiente de pressão $\partial P/\partial x$ observado no escoamento *longe* da placa é “imposto” pelo escoamento sobre a mesma. Em outras palavras, é possível substituir $\partial P/\partial x$, em (7.42), por $\partial P_\infty/\partial x$, sendo que este último é a solução do problema invíscido longe da parede.

Em segundo lugar, existe um estranho problema de 2ª ordem (uma perturbação?)

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \quad (7.44)$$

Se essa equação é ou não identicamente atendida pela solução de Blasius, que virá a seguir, é motivo de investigação futura.

7.2.1 – Espessura de deslocamento

Dada uma distância h da parede, pode-se definir uma escala de comprimento δ_h^* via

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_0^h U(y) dy \equiv \int_{\delta_h^*}^h U_\infty dy, \\ &= U_\infty (h - \delta_h^*) \Rightarrow \\ U_\infty \delta_h^* &= \int_0^h (U_\infty - U(y)) dy; \\ \delta_h^* &= \int_0^h \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty} \right) dy. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Note que h foi necessário, como um “andaime” para construir o resultado (7.45); agora, entretanto, podemos passar ao limite, e definir

$$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty} \right) dy. \quad (7.46)$$

Para definir a espessura de quantidade de movimento θ^* , nós precisamos de um volume de controle adequado; tal volume é mostrado na figura 7.3.

A equação de balanço de massa é

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &= \int_1 \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi U(L, y) dy + \int_3 \varphi V(x, h) dx \Rightarrow \\ \dot{M} &= \int_3 \varphi V(x, h) dx = \int_1 \varphi(U_\infty) dy - \int_2 \varphi U(L, y) dy; \\ \varphi \delta_h^* U_\infty &\equiv \dot{M} = \int_0^h \varphi(U_\infty - U(y)) dy. \end{aligned}$$

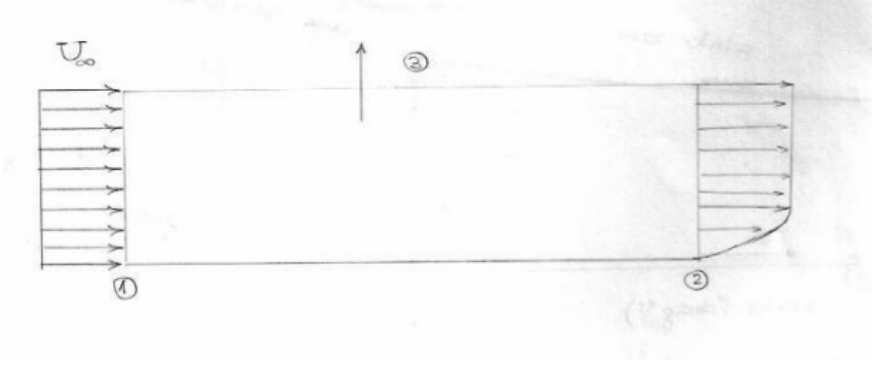


Figura 7.3: Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento θ^* .

Disso resulta a mesma expressão já obtida para δ_h^* ,

$$\delta_h^* = \int_0^h \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty}\right) dy. \quad (7.47)$$

O balanço de quantidade de movimento é

$$\begin{aligned} -D &= \int_{\mathcal{S}} U \varphi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &= \int_1 U_\infty \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi[U(L, y)]^2 dy + \int_3 U_\infty \varphi V(x, h) dx \\ &= \int_1 U_\infty \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi[U(L, y)]^2 dy + U_\infty \int_3 \varphi V(x, h) dx \\ &= \int_1 U_\infty \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi[U(L, y)]^2 dy + U_\infty \dot{M} \\ &= \int_1 U_\infty \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi[U(L, y)]^2 dy + U_\infty \int_0^h \varphi(U_\infty - U(L, y)) dy \\ &= \int_0^h \varphi[U(L, y)]^2 dy - U_\infty \int_0^h \varphi U(L, y) dy \Rightarrow \\ D &= \int_0^h U(L, y) (U_\infty - U(L, y)) \varphi dy. \end{aligned}$$

Defina agora a espessura de *momentum*:

$$D \equiv \varphi U_\infty^2 \theta^*, \quad (7.48)$$

donde, fazendo $h \rightarrow \infty$:

$$\theta^* = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy. \quad (7.49)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} D &= \int_0^x \tau_0(\xi) d\xi \Rightarrow \\ \tau_0 &= \frac{dD}{dx}, \\ \tau_0 &= \varphi U_\infty^2 \frac{d\theta^*}{dx}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

7.2.2 – A solução de Blasius

Tente

$$\frac{U}{U_\infty} = g(\eta), \quad (7.51)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.52)$$

Procure uma solução em termos de uma função-corrente Ψ :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (7.53)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.54)$$

Segue-se que

$$\Psi = \int_0^y U \, dY \quad (7.55)$$

$$= \delta(x) \int_0^y U \, d\eta = U_\infty \delta(x) \int_0^\eta \frac{U}{U_\infty} \, dH \quad (7.56)$$

$$= U_\infty \delta(x) \int_0^\eta g(H) \, dH, \quad (7.57)$$

onde

$$g(\eta) = \frac{df}{d\eta}. \quad (7.58)$$

Note que a adoção de uma função-corrente faz com que a equação da continuidade (na sua forma incompressível) seja atendida automaticamente (*remember* Lorenz); portanto, restou a equação de momentum em x , na qual (lembremo-nos)

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

A equação diferencial parcial em Ψ que precisamos resolver é, portanto,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (7.60)$$

Nossa proposta de adimensionalização para Ψ é

$$\Psi(x, y) = U_\infty \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (7.61)$$

Vamos tentar fazer com Maxima, mas por enquanto temos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U_\infty \left[f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right]; \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{U_\infty \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta}, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}. \quad (7.66)$$

Detalhadamente, para aprendermos a derivar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_\infty \left[f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &= U_\infty \left[f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \right] \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} &= -\frac{y}{\delta^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= U_\infty \left[f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[U_\infty \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[U_\infty \delta \frac{df}{d\eta} \times \frac{1}{\delta} \right] \\ &= U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{df}{d\eta} \right] \\ &= U_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} &= -\frac{\eta}{\delta} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{U_\infty \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_\infty \frac{df}{d\eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [U_\infty \delta(x) f(\eta)]$$

$$\begin{aligned}
&= U_{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{df}{d\eta} \right] \\
&= U_{\infty} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{U_{\infty}}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}.$$

Substituindo-se todos os termos, encontra-se

$$\begin{aligned}
U_{\infty} f' \left[-\frac{U_{\infty} \eta f''}{\delta} \right] - U_{\infty} [f - f' \eta] \frac{d\delta}{dx} \frac{U_{\infty} f''}{\delta} &= \nu \frac{U_{\infty} f'''}{\delta^2}, \\
\frac{U_{\infty}^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} [-\eta f' f'' - f f'' + \eta f' f''] &= \nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} f''' \\
-\frac{U_{\infty} \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} [f f''] &= f'''.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\delta &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}, \\
\frac{d\delta}{dx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\nu x}{U_{\infty}} \right)^{-1/2} \frac{\nu}{U_{\infty}}, \\
\frac{U_{\infty} \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0.$$

Agora com Maxima, para verificar:

```

load(pdiff)$
eq : U * (nu*x/U)^(1/2) * F(y/(nu*x/U)^(1/2))$
diff(eq,y) * diff(eq,x,1,y,1) - diff(eq,x)*diff(eq,y,2) - nu*diff(eq,y,3)$
ratsubst(w,y/sqrt((nu*x)/U),%)$
factor(%);

```

resulta em:

```

Maxima 5.22.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.

```

The function `bug_report()` provides bug reporting information.

```
(%i1) batch(psiblasius.max)
```

read and interpret file: #p/home/nldias/work/posgraduacao/tx752-metmatengamb/psiblasius

```
(%i2) load(pdifff)
```

```
(%i3) eq : U (----) F(-----)
          nu x 1/2 y
          U      nu x 1/2
                (----)
                U
```

```
(%i4) - nu diff(eq, y, 3) - diff(eq, x) diff(eq, y, 2)
      + diff(eq, y) diff(eq, x, 1, y, 1)
```

```
(%i5) ratsubst(w, -----, %)
          y
          nu x
          sqrt(----)
          U
```

```
(%i6) factor(%)
      (2 F (w) + F(w) F (w)) U
      (3) (2)
```

```
(%o6) - -----
      2 x
      psiblasius.max
```

Essa expressão significa

$$-\frac{2f''' + ff''}{2x}U_{\infty}^2,$$

que é a mesma equação que nós obtivemos “na mão”. Novamente, nós fomos capazes de reduzir um problema em equações diferenciais parciais a um problema em equações diferenciais ordinárias. Mas cuidado: isso nem sempre é possível.

7.2.3 – Blasius: solução numérica

Como vimos, uma camada-limite laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão longitudinal pode ser resolvida com

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (7.67)$$

sujeita às condições de contorno

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (7.68)$$

onde

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, y)}{U_{\infty}\delta(x)} \quad (7.69)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (7.70)$$

e

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (7.71)$$

As condições 7.68 não configuram um problema de valor inicial clássico, mas sim um problema de valor de contorno. Mesmo assim, vale a pena a seguinte abordagem. A mudança de variáveis

$$u_1 = f, \quad u_2 = f', \quad u_3 = f'', \quad (7.72)$$

produz o seguinte sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -\frac{1}{2}u_1u_3 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

Este sistema pode agora ser resolvido com 3 condições iniciais

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = \gamma \quad (7.74)$$

onde γ é um valor inicial arbitrário para $f''(0)$. A solução de 7.73 pode ser obtida com o programa `blasius.py`:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
# -----
# blasius.py
# -----
from __future__ import print_function
from numpy import array
from sys import argv
# -----
# por comodidade, a condição inicial é na linha de comando
# -----
gamma = float(argv[1])
h = 0.01
t = [0.0]
x = [array([0.0,0.0,gamma])]
n = int(20.0/h)          # número de passos
# -----
# sistema a ser integrado
# -----
def ff(t,x):
    return array( [ x[1],x[2],-0.5*x[0]*x[2] ] )
def rk4(t,x,h,ff):
    '''
    rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
    '''
    k1 = h*ff(t,x)
    k2 = h*ff(t+h/2,x+k1/2)
    k3 = h*ff(t+h/2,x+k2/2)
```

```

    k4 = h*ff(t+h,x+k3)
    xn = x + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
    return xn
for i in range(0,n):          # loop da solução numérica
    tn = (i+1)*h
    xn = rk4(t[i],x[i],h,ff)
    t.append(tn)
    x.append(xn)
fou = open('blasius.out','wt')
for i in range(0,n+1):       # imprime o arquivo de saída
    fou.write( '%12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n' %
               (t[i],x[i][0],x[i][1],x[i][2]) )
print('%12.6f %12.6f' % (xn[1], xn[2]) )
fou.close()

```

Sucessivas rodadas de `blasius.c` produzem a seguinte tabela:

γ	$f'(\infty)$
0.1	0.449
0.2	0.731
0.3	0.934
0.4	1.132
0.35	1.035
0.32	0.975
0.33	0.995
0.335	1.005
0.334	1.003
0.333	1.001
0.3325	1.0008
0.3322	1.0002
1.0	2.085409

Se o processo todo estiver certo, então a última saída deve ter gerado o perfil de velocidade

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad (7.75)$$

O seguinte *script* de `gnuplot` deve plotar o resultado:

```

set terminal postscript eps monochrome "Times-Roman" 18
set xlabel 'eta'
set ylabel 'u/Uoo'
set output 'blasius.eps'
set grid
plot 'blasius.out' using 1:3 notitle with lines lt 1 lw 2
exit

```

O resultado pode ser visso na figura [7.4](#)

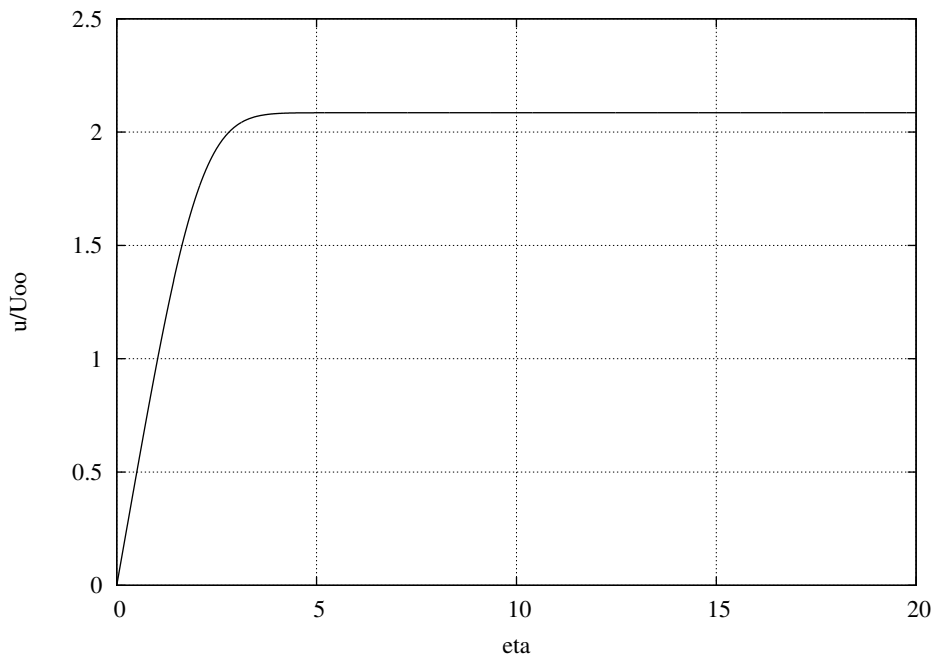


Figura 7.4: Perfil de velocidade adimensional de Blasius.

7.2.4 – Uma alternativa

Liggett (1994) sugere a seguinte alternativa para definir condições de contorno em $\eta = 0$, e consequentemente produzir um problema de valor inicial desde o início:

$$f = \alpha g, \quad (7.76)$$

$$\xi = \beta \eta \quad (7.77)$$

Agora, em $\xi = \eta = 0$, a derivada segunda de f (que nós acabamos de determinar por tentativa-e-erro acima) é $f''(0) = \gamma$. A derivada segunda de g em relação a ξ será

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\xi} \\ &= \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Então,

$$\left. \frac{d^2 g}{d\xi^2} \right|_0 = \frac{1}{\alpha \beta^2} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_0 = \frac{\gamma}{\alpha \beta^2}. \quad (7.79)$$

Agora, imponha $\gamma/(\alpha\beta^2) = 1$, de tal modo que $d^2g(0)/d\xi^2 = 1$.

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{d(f/\alpha)}{d(\beta\eta)} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{df}{d\eta} \quad (7.80)$$

$$\frac{d^2g}{d\xi^2} = \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2f}{d\eta^2} \quad (7.81)$$

$$\frac{d^3g}{d\xi^3} = \frac{1}{\alpha\beta^3} \frac{d^3f}{d\eta^3} \quad (7.82)$$

Voltando à equação diferencial original,

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0, \\ 2\alpha\beta^3g''' + \alpha g\alpha\beta^2g'' &= 0 \end{aligned} \quad (7.83)$$

É conveniente agora fazer $\alpha = \beta$, de modo que a equação (7.83) torna-se

$$2g''' + gg'' = 0. \quad (7.84)$$

Trata-se evidentemente da *mesma* equação de Blasius, porém com condições iniciais diferentes. A sua solução levará à obtenção do valor de α : de (7.80),

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{\alpha^2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (7.85)$$

Rodando blasius de novo com $f''(0) = 1$ (na verdade, $g''(0) = 1!$), $g'(\infty) = 2.085409$ (veja a última linha da tabela, convenientemente inserida à espera deste momento); $\alpha = 0.69247544534044858$, e $\gamma = \alpha^3 = 0.33205737835621146 = f''(0)$, o que concorda com nosso resultado anterior obtido por tentativa-e-erro.

8

Camadas-limite turbulentas

8.1 – Escoamento turbulento em um duto

No capítulo 6, nós obtivemos as equações médias

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (8.1)$$

e

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = -\delta_{i3} g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \nu_{(i)} \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (8.2)$$

Considere agora essas equações em um duto com seção retangular “infinita” na direção y e espessura na direção z dada por $h = 2\delta$, para um escoamento plenamente desenvolvido em x . O “plenamente desenvolvido” significa que as *médias* turbulentas não variam em x : $\partial \langle \cdot \rangle / \partial x = 0$; da mesma forma, a seção “infinita” em y implica homogeneidade nessa direção: $\partial \langle \cdot \rangle / \partial y = 0$. Substituindo na equação da continuidade, obtém-se

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial z} = 0 \Rightarrow \langle W \rangle(z) = \text{constante} \Rightarrow \langle W \rangle(z) = 0, \quad (8.3)$$

pois as condições de contorno em $\langle W \rangle$ são $\langle W \rangle(0) = \langle W \rangle(h) = 0$.

A solução obtida $\langle W \rangle = 0$ e a homogeneidade da turbulência em x e y simplificam a equação de *momentum* em z para

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle ww \rangle = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Assim, um dos efeitos da turbulência é *desviar* a distribuição vertical de pressão média do estado hidrostático! Note que a imposição de *homogeneidade* da turbulência em x e y significa que $\langle ww \rangle$ é uma função de z somente; tendo isso em mente, integre (8.4) entre 0 e z e imponha $\langle ww \rangle(0) = 0$ (essa condição de contorno significa que a intensidade da turbulência “morre” na parede), para obter

$$\langle ww \rangle(z) + gz + \frac{1}{\rho} \langle P \rangle(x, z) = \frac{1}{\rho} \langle P \rangle(x, 0) \equiv \frac{1}{\rho} P_0(x), \quad (8.5)$$

onde $P_0(x)$ significa a pressão média medida na parede do escoamento (teoricamente, também não há flutuações de pressão na parede). Um resultado importante pode ser obtido derivando-se essa última equação em relação a x :

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}, \quad (8.6)$$

ou seja:

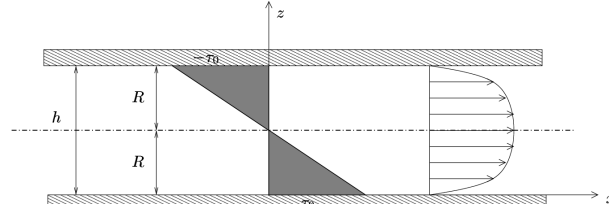


Figura 8.1: A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto.

O gradiente longitudinal da pressão média em todos os pontos do escoamento é igual ao gradiente de pressão na parede.

A homogeneidade em y faz com que a equação de *momentum* na direção y seja trivial: $0 = 0$; na direção x teremos

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w'u' \rangle = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial z^2}, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w'u' \rangle - \nu \frac{d^2 \langle U \rangle}{dz^2} = -\frac{1}{\wp} \frac{dP_0}{dx} \equiv gJ. \quad (8.8)$$

O lado esquerdo dessa equação é uma função só de z , e o lado direito, uma função só de x . Os dois portanto devem ser constantes, donde se segue que, assim como no caso do escoamento laminar em um duto, a *perda de carga* J (para usar uma terminologia de engenheiros) é linear com x — um fato geralmente apresentado sem muita discussão em cursos de graduação. Note que (7.10) e (8.8) são a mesma equação, que portanto se aplica tanto para o regime laminar quanto para o turbulento.

Integrando (8.8) entre 0 e z (e lembrando que $\langle w'u' \rangle(0) = 0$ devido ao fato de que a intensidade da turbulência é nula na parede),

$$-\frac{z}{\wp} \frac{dP_0}{dx} - \langle u'w' \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0), \quad (8.9)$$

onde

$$\nu \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\wp \nu}{\wp} \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\tau_0}{\wp} \equiv u_*^2, \quad (8.10)$$

e τ_0 é a tensão cisalhante na parede. Pela primeira vez, aparece explicitamente uma escala de velocidade específica do problema, a *velocidade de atrito* u_* .

O resultado,

$$-\frac{z}{\wp} \frac{dP_0}{dx} - \underbrace{\langle u'w' \rangle}_{\tau/\wp} + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = u_*^2 \quad (8.11)$$

permite determinar *analiticamente* a tensão total τ (turbulenta + viscosa) de cisalhamento em função de z :

$$\tau = \tau_0 + \frac{dP_0}{dx} z, \quad (8.12)$$

com o resultado mostrado na figura 8.1.

A distribuição de tensões τ é antisimétrica, com $\tau(2\delta) = -\tau_0^*$. Segue-se então que $\tau(\delta) = 0$, donde

$$-\frac{\delta}{\rho} \frac{dP_0}{dx} = u_*^2 \Rightarrow \quad (8.13)$$

$$-\langle u'w' \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right). \quad (8.14)$$

Este resultado é muito importante, pois foi obtido a partir somente da hipótese de estacionariedade e homogeneidade em x e y do escoamento. Dividindo por u_*^2 :

$$\frac{-\langle u'w' \rangle}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*\delta} \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)} = 1 - \frac{z}{\delta}. \quad (8.15)$$

Observe o aparecimento do número de Reynolds $Re_* = u_*\delta/\nu$. Quando $Re_* \rightarrow \infty$, o gradiente

$$\frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)}$$

desaparece (isso é: anula-se) de (8.15). Para analisarmos o que acontece próximo da parede, devemos encontrar uma forma de “preservar” o gradiente; ei-la:

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} + \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)} = 1 - \frac{\nu}{\delta u_*} \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.16)$$

Está claro que nós aplicamos duas adimensionalizações diferentes para o gradiente de velocidade. Em ambas, a velocidade adimensional é $\langle U \rangle / u_*$. Na primeira adimensionalização, que corresponde à equação (8.15), a variável adimensional é

$$\eta \equiv z/\delta; \quad (8.17)$$

na segunda, a variável adimensional é

$$z_+ \equiv \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.18)$$

As equações (8.15) e (8.16) nas variáveis acima são

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} + \frac{1}{Re_*} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \eta, \quad (8.19)$$

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} + \frac{d}{dz_+} \left(\frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \frac{1}{Re_*} z_+. \quad (8.20)$$

Note agora como o efeito de $Re_* \rightarrow \infty$ é diferente em cada uma delas. Obviamente, para $z/\delta \ll 1$, $\tau \approx$ constante. Essas condições definem a região *inercial* da camada-limite turbulenta. Por outro lado, para $Re_* \rightarrow \infty$ e $\eta \sim 1$, (8.19) produz

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*} = 1 - \eta. \quad (8.21)$$

*Tanto em $z = 0$ quanto em $z = 2\delta$, a componente x do vetor de tensão é $-\tau_0$; em $z = 0$ o vetor normal ao fluido é $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$, e em $z = 2\delta$ ele é $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Da relação entre o vetor de tensão e o tensor de tensões, $t_j = n_i T_{ij}$, para um estado bi-dimensional de tensões deduz-se que $T_{12}(z) = \tau(z)$ e $\tau(2\delta) = -\tau_0$.

Tennekes e Lumley (1972) observam que essa equação não pode ser válida em $\eta = 0$. Sua região de validade é o *core layer* (camada central).

Alguma espécie de argumento dimensional agora é necessário para que possamos prosseguir. Tennekes e Lumley (1972) usam a equação de balanço de energia cinética turbulenta (6.63) para argumentar que $d\langle U \rangle / dz \sim u_* / \delta$; isso é uma forma particular do argumento mais geral utilizado no capítulo 6, onde mostramos que o termo III (produção por gradiente) da equação para os momentos de 2ª ordem é da ordem de $\tilde{u}^3 / \mathcal{L}$.

Alternativamente aos argumentos de Tennekes e Lumley (1972), e talvez de maneira mais direta, observe que, de acordo com (8.19), o gradiente da velocidade adimensionalizada $\langle u \rangle / u_*$ deve ser uma função de η (embora ele desapareça da equação quando $\text{Re}_* \rightarrow \infty$). Suponha que a velocidade adimensionalizada também só dependa de η nessa região, na forma

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*}, \quad (8.22)$$

onde U_δ é o valor de $\langle U \rangle$ no centro do duto, em $z = \delta$. A inclusão de U_δ é necessária porque o gradiente de velocidade deve ser integrado do *centro* do duto em direção à parede, uma vez que a relação de similaridade (8.23) não pode valer até a parede porque, em sua proximidade, as escalas de comprimento típicas do escoamento são diferentes de (na verdade, são muito menores que) δ (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). De acordo com Wosnik et al. (2000), a inclusão de U_δ elimina a necessidade de levar em consideração efeitos viscosos próximo da parede quando o processo de tomada de limites que se segue for realizado. Então,

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*} = F_\delta \left(\frac{z}{\delta}; \text{Re}_* \right) \Rightarrow \lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.23)$$

onde $F(\eta)$, a “lei da diferença de velocidade” (*velocity defect law*), é uma função adimensional a determinar.

De forma totalmente análoga e simétrica, em (8.20) vemos que o gradiente da velocidade adimensionalizada é uma função de z_+ ; dessa vez, é este último que desaparece da equação quando $\text{Re}_* \rightarrow \infty$. A adimensionalização “natural” para o gradiente de velocidade média agora é

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_v(z_+; \text{Re}_*) \Rightarrow \lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_v}{dz_+}, \quad (8.24)$$

que é conhecida em Mecânica dos Fluidos como “lei da parede”.

As variáveis z_+ e η descrevem o balanço de quantidade de movimento sob duas “ópticas” (na verdade, duas escalas) diferentes: z_+ é a variável adequada próximo da parede, e η a variável adequada na região central do escoamento. A técnica denominada *asymptotic matching* (“ajuste assintótico”) permite utilizar uma análise de múltiplas escalas para obter um resultado analítico. O argumento é que, embora F_v e F_δ descrevam a velocidade em regiões diferentes do escoamento, deve haver uma região onde ambas as descrições são válidas. Historicamente, essa abordagem surgiu apenas para o $\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty}$; daí sua presença em (8.23) e (8.24). Na região de “casamento”, ambas as equações devem valer, e essa região deve corresponder aos limites $z_+ \rightarrow \infty$ e $\eta \rightarrow 0$:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}. \quad (8.25)$$

Multiplicando por z ambos os lados e rearrumando os termos:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{zu_*}{\nu} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{z}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.26)$$

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} z_+ \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.27)$$

Note que cada lado de (8.27) depende, respectivamente, de z_+ e de η , e por um argumento semelhante ao usado no método de separação de variáveis para a solução de equações diferenciais parciais, os dois devem no limite ser iguais a uma constante, aqui definida como $1/\kappa$ (κ é a constante de vón Kármán). Assim, obtém-se, imediatamente,

$$F_\delta(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_\delta, \quad (8.28)$$

$$F_\nu(z_+) = \frac{1}{\kappa} \ln z_+ + C_\nu. \quad (8.29)$$

Essa região de “casamento” é denominada *região inercial*. Os argumentos aqui utilizados para mostrar que, nessa região, o perfil de velocidade é logarítmico guardam uma semelhança intrigante com os argumentos que levam à “faixa inercial” do espectro na teoria clássica de turbulência de Kolmogorov (capítulo 13). Segundo Pope (2000), $C_\nu = 5,2$, e, como é bem conhecido, a constante de vón Kármán é $\kappa = 0,4$. Por consistência com $\langle U \rangle(\delta) = U_\delta$, devemos ter $C_\delta = 0$, embora valores pequenos e diferentes de zero possam ser encontrados experimentalmente.

Uma região diferente permite também uma integração analítica do perfil de velocidade: em (8.20), quando $z_+ \rightarrow 0$, a tensão de Reynolds $\langle u'w' \rangle$ tende a zero, donde se segue imediatamente que o perfil adimensional de velocidade é *linear* em z_+ :

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = z_+. \quad (8.30)$$

Essa previsão parece à primeira vista conflitar-se com a previsão de um perfil parabólico no caso do escoamento laminar em dutos (Hagen-Poiseuille) com a mesma geometria. Entretanto, é fácil reescrever o resultado *laminar* na forma

$$\frac{U}{u_*} = z_+ - \frac{1}{2\text{Re}_*} z_+^2 : \quad (8.31)$$

é evidente que, sendo o escoamento para o qual essa equação foi deduzida laminar, é proibido que Re_* atinja valores muito altos, ou tenda para o infinito. O $\lim_{z_+ \rightarrow 0}$ de (8.31) para valores finitos de Re_* , por outro lado, reconcilia-a com (8.30).

Considere agora (8.20) com $\text{Re}_* \rightarrow \infty$, $z_+ \rightarrow \infty$; para remover a indeterminação z_+/Re_* , note que

$$\lim_{\substack{\text{Re}_* \rightarrow \infty \\ z_+ \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{z_+}{\text{Re}_*} = \frac{\frac{zu_*}{\nu}}{\frac{u_*\delta}{\nu}} = \frac{z}{\delta} = \eta = 0. \quad (8.32)$$

Além disso, nessa região, em virtude de (8.27)

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa z_+} = 0; \quad (8.33)$$

portanto, na região inercial, (8.19) fica

$$-\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} \approx 1 \quad (8.34)$$

ou seja: a tensão de Reynolds nessa região é aproximadamente constante.

Para cumprir um programa semelhante ao realizado com o escoamento laminar em dutos, é preciso integrar o perfil de velocidade ao longo da seção, para então obter uma equação para a perda de carga. O perfil previsto por (8.29) não pode ser integrado desde $z = 0$, pois essa equação possui uma singularidade logarítmica aí. Alternativamente, nós podemos usar (8.28), e integrar sobre toda a seção. Naturalmente, a lei da diferença de velocidade não pode ser válida próximo da parede (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). No entanto, para escoamentos turbulentos em dutos, na região próxima à parede onde a lei não se aplica a contribuição para o cálculo da velocidade média é desprezível (Pope, 2000, p. 278). Então, a velocidade média é

$$\bar{U} = \frac{u_*}{\delta} \int_{z=0}^{\delta} \left[\frac{U_{\delta}}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta} \right] dz = U_{\delta} - \frac{u_*}{\kappa}. \quad (8.35)$$

Para que uma expressão para a perda de carga possa ser encontrada, é preciso ainda eliminar U_{δ} . Isso pode ser feito, por exemplo, supondo-se que (8.29) vale até o centro do duto; este ponto, naturalmente, está fora da região de validade de (8.29), porém novamente as diferenças para escoamentos em dutos são relativamente pequenas (Pope, 2000, figura 7.9). Faça portanto

$$U_{\delta} = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{\nu} + C_v \right] \Rightarrow \quad (8.36)$$

$$\bar{U} = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta u_*}{\nu} - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.37)$$

Observe que o problema de projeto de engenharia de uma tubulação está essencialmente resolvido: para uma vazão por unidade de largura $2\bar{U}\delta$, (8.37) determina o valor correspondente da velocidade de atrito u_* ; então, o gradiente de pressão que precisa ser impresso ao duto para que se atinja o valor prescrito de \bar{U} é dado por (8.13).

O procedimento de cálculo para projeto pode ser otimizado da seguinte forma: inicialmente, note que J pode ser relacionado diretamente com u_* eliminando-se dP_0/dx entre (8.8) e (8.13):

$$gJ\delta = u_*^2 \quad (8.38)$$

que, juntamente com (7.13), produz

$$\frac{u_*}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{f}{2}}. \quad (8.39)$$

O uso dessa última equação em (8.37) produz

$$\bar{U} = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.40)$$

Finalmente, levando-se (8.40) de volta em (8.38) e eliminando-se u_* obtém-se uma equação padrão para o fator de atrito, na mesma forma que (7.13):

$$J = \frac{2}{\underbrace{\left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]^2}_f} \frac{1}{\delta} \frac{\overline{U}^2}{2g} \Rightarrow \quad (8.41)$$

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \left(\text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.42)$$

A equação (8.42) pode ser descrita como uma equação de Prandtl para escoamento turbulento com paredes lisas em dutos de seção retangular e largura infinita. Ela define implicitamente a função $f = f(\text{Re})$. Em engenharia, os diagramas que plotam essa função são denominados “diagramas de perda de carga”.

8.2 – Escoamentos turbulentos com parede rugosa

Na definição de z_+ em (8.18), está implícita uma escala de comprimento viscosa

$$z_v \equiv \frac{\nu}{u_*}. \quad (8.43)$$

Para o ar a 20°C, $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; para a água a 20°C, $\nu = 1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Batchelor, 1967, apêndice 1, p. 594). Portanto, se $u_* \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$, $z_v \sim 10^{-4}$ a 10^{-3} m . Tanto em tubulações industriais quanto em escoamentos sobre superfícies naturais, há imperfeições ou “elementos de rugosidade” na superfície cuja ordem de grandeza é z_0 .

A tabela 8.1 ilustra alguns valores típicos de z_0 para diferentes materiais: embora o valor de u_* que usamos seja uma estimativa que obviamente variará de escoamento para escoamento, fica claro que em muitas situações $z_0 \sim z_v$; de fato, segundo Morris e Wiggert (1972), a maioria dos escoamentos em tubos são deste tipo. É de se esperar que estes sejam os casos mais difíceis para se lidar. Por outro lado, também é de se esperar que existam casos em que $z_0 \gg z_v$; para eles, é possível desenvolver uma teoria de “escoamento turbulento rugoso”. De fato, tudo é uma questão de quão alto é o número de Reynolds Re : para um valor suficientemente alto, a camada viscosa deve se tornar tão delgada que, no limite, toda a parede de qualquer material se torna “rugosa” no sentido de que seus elementos de rugosidade se estendem além da subcamada viscosa.

Se $z_0 \gg z_v$, é natural tentar adimensionalizar (8.14) com z_0 , em vez de z_v . Portanto, para as variáveis adimensionais

$$\text{Re}_0 \equiv \frac{u_* z_0}{\nu} = \frac{z_0}{z_v}, \quad (8.44)$$

$$z_* \equiv \frac{z}{z_0} \quad (8.45)$$

(Re_0 é um número de Reynolds de rugosidade (Brutsaert, 1982)), (8.14) admite a adimensionalização

$$-\frac{\langle w'u \rangle}{u_*^2} + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_*}\right)}{dz_*} = 1 - z_* \frac{z_0}{\delta}. \quad (8.46)$$

Tabela 8.1: Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1)

Material	$z_0(\text{m})$
Aço muito corrugado	0,001
Aço pouco corrugado	0,01
Concreto liso	0,0003
Concreto rugoso	0,003
Madeira lisa	0,00018
Madeira rugosa	0,001
Aço laminado	0,00026
Aço galvanizado	0,00015
asphalted castiron	0,00012
Aço comercial novo	0,00004
Aço soldado	0,00004
Vidro	0,0000015

De forma totalmente análoga aos resultados obtidos anteriormente para paredes lisas, nós esperamos que para uma região relativamente próxima da parede valha uma adimensionalização com a forma

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0(z_*, \text{Re}_*) \Rightarrow \lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*}. \quad (8.47)$$

Essa equação é análoga ao par (8.23) e (8.24): de fato, desde que $z_0 \ll \delta$, basta substituir z_v por z_0 na análise de ajuste ou casamento assintótico. O argumento padrão que conduz a um resultado análogo a (8.27), portanto, será

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0\left(\frac{z}{z_0}, \text{Re}_*\right) \Rightarrow \quad (8.48)$$

$$\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*} \Rightarrow \quad (8.49)$$

$$\lim_{z_* \rightarrow \infty} z_* \frac{dF_0}{dz_*} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.50)$$

O perfil na região influenciada pela escala z_0 portanto será novamente logarítmico:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + C_0. \quad (8.51)$$

Para os experimentos clássicos de Nikuradse de perda de carga em tubos muito lisos aos quais uma rugosidade artificial foi adicionada com grãos de areia, o $\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty}$ produz $C_0 = 8.5$. Não há na literatura (tanto quanto seja de nosso conhecimento) valores específicos para escoamentos em dutos muito largos sob pressão, portanto vamos admitir que este valor também se aplique. Com este valor para C_0 , a previsão de (8.51) para a anulação de $\langle U \rangle$ é

$$\ln \frac{z}{z_0} = -3,4 \Rightarrow \langle U \rangle(z = 0,0334z_0) = 0. \quad (8.52)$$

O objetivo agora é obter uma equação para o fator de atrito em escoamento plenamente rugoso. Para este fim, vamos usar novamente (8.35) e supor agora que u_δ

pode ser calculado com a nova lei da parede “rugosa” (8.51); o resultado é

$$\langle U \rangle = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right] \quad (8.53)$$

— note que não há nenhuma dependência do número de Reynolds Re_* — e a equação correspondente para o fator de atrito é

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.54)$$

8.3 – O regime de transição

Considere agora o caso “mais complicado”, $z_0 \sim z_v$; ambas as escalas podem ser usadas em um ajuste assintótico com a sub-camada externa, e é de se esperar que na camada inercial o perfil de velocidade dependa de ambos. Em termos de variáveis adimensionais:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, \frac{z_0 u_*}{\nu} \right). \quad (8.55)$$

Note que o segundo argumento, é o número de Reynolds de rugosidade Re_0 , a razão entre z_0 e z_v : veja a equação (8.44). A idéia é que o regime “liso” seja recuperado quando $Re_0 \rightarrow 0$, e o regime “rugoso” quando $Re_0 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{Re_0 \rightarrow 0} F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_v \left(\frac{z u_*}{\nu} \right), \quad (8.56)$$

$$\lim_{Re_0 \rightarrow \infty} F_{0v} \left(\frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_0 \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (8.57)$$

Nosso objetivo, portanto, deve ser procurar uma forma analítica para a função das variáveis z/z_0 e Re_0 que “colapse” ambas em $z u_*/\nu$ no primeiro caso, e que seja assintoticamente independente de Re_0 no segundo. A propriedade do logaritmo do produto sugere que para escoamento liso devemos ter

$$F_{0v} \sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} + \ln \frac{z_0 u_*}{\nu} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z u_*}{\nu}, \quad (8.58)$$

onde “ \sim ” deve ser lido “comporta-se como ... a menos de uma constante”. Para escoamento rugoso, por outro lado, Re_0 deve desaparecer. Uma forma de obter ambos os comportamentos assintóticos é fazer

$$\begin{aligned} F_{0v} &\sim \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} + \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{Re_0} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} - \ln \left(\frac{1}{Re_0} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.59)$$

De fato, para $Re_0 \rightarrow 0$, (8.59) é praticamente igual a (8.58), enquanto que para $Re_0 \rightarrow \infty$ ela se torna, como desejado, assintoticamente independente de Re_0 . Falta ainda garantir os valores exatos das constantes C_v e C_0 em (8.56)–(8.57); isso pode ser obtido com

$$F_{0v} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_0} - \ln \left(\frac{B_{0v}}{Re_0} + 1 \right) \right] + C_0. \quad (8.60)$$

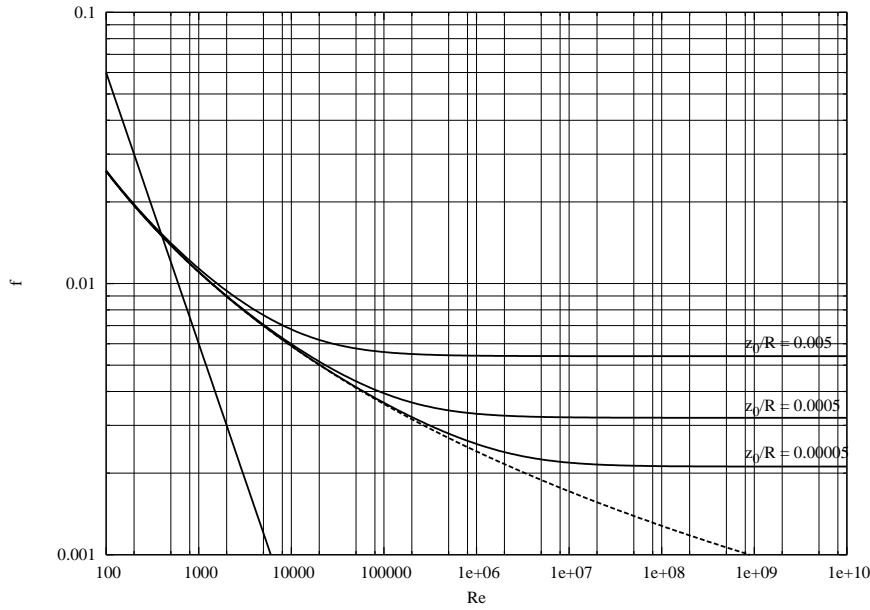


Figura 8.2: Fator de atrito f em função de Re e da rugosidade relativa z_0/δ em um escoamento turbulento em um duto

Claramente, (8.60) atende à constante C_0 em (8.57): veja (8.51). Por outro lado, para que (8.60) também atenda à constante C_v , basta escolher B_{0v} de tal forma que

$$-\frac{1}{\kappa} \ln B_{0v} + C_0 = C_v, \quad (8.61)$$

donde se obtém, para dutos, que $B_{0v} = 3,74$. Um procedimento totalmente análogo ao feito anteriormente para escoamentos lisos e rugosos permite obter uma equação para o cálculo de fatores de atrito em escoamentos em regime de transição:

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[\frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - \ln \left(\sqrt{\frac{2}{f}} \frac{B_{0v}}{Re} \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.62)$$

Em (8.62) f depende, convenientemente, tanto de δ/z_0 como de Re ; em princípio, essa equação pode ser usada para calcular f em *qualquer* regime. Uma equação totalmente análoga a (8.62) foi obtida pela primeira vez por Colebrook e White para escoamentos transicionais em tubos de seção circular (Morris e Wiggert, 1972, p. 67): os coeficientes numéricos, naturalmente, são diferentes dos fornecidos aqui por conta da geometria diferente da seção; a rugosidade relativa de Colebrook e White é dada na forma z_0/D , e o número de Reynolds na forma UD/ν .

O diagrama de fator de atrito para o escoamento em um duto de seção retangular e largura infinita *versus* o número de Reynolds para $z_0/\delta = 0,05$, $0,005$ e $0,00005$ está mostrado na figura 8.3.

8.4 – A fórmula de Manning

A fórmula

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (8.63)$$

foi proposta por Manning em 1889. A menos que se atribua uma dimensão física a n , ela é dimensionalmente inconsistente. Ela é uma equação “empírica”, ou seja: ela foi proposta sem base em uma dedução a partir de equações mais fundamentais.

Chen (1991) mostrou entretanto que ela pode ser deduzida. A vazão volumétrica através da seção, por definição, é

$$Q = \int_{y=0}^B \int_{z=z_f(y)}^Z \langle U \rangle (y, z) dz dy \quad (8.64)$$

onde B é a largura da seção, $z_f(y)$ são as cotas do fundo e Z é a cota da superfície.

Dedução (Chen, 1991)

$$\langle U \rangle (y, z) = au_*(y) \left(\frac{z - z_f(y)}{z_0} \right)^m, \quad (8.65)$$

$$Q = \int_{y=0}^B \frac{au_*(y)}{m+1} \left(\frac{h(y)}{z_0} \right)^m h(y) dy, \quad (8.66)$$

$$h(y) = Z - z_f(y) \quad (8.67)$$

A velocidade de atrito média ao longo da seção transversal, u_* , deve satisfazer à relação

$$u_* = \frac{1}{P} \int_{y'=0}^P u_*(y') dy' \approx \frac{1}{B} \int_{y=0}^B u_*(y) dy \quad (8.68)$$

$$\eta = \frac{y}{B}, \quad g(\eta) = \frac{u_*(\eta)}{u_*} \Rightarrow \quad (8.69)$$

$$Q = \frac{au_* R_h^m (R_h P)}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left(\frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta, \quad (8.70)$$

$$u_* = \sqrt{g R_h S_f}, \quad (8.71)$$

$$V = \underbrace{\left[\frac{a \sqrt{g}}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left(\frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta \right]}_{1/n} R_h^{m+1/2} S_f^{1/2} \quad (8.72)$$

que é a fórmula de Manning para $m = 1/6$.

Dias (1995) — ajuste de um perfil de velocidade ao longo da seção por mínimos quadrados não-lineares:

$$\langle U \rangle (\eta, z) = \frac{u_* g(\eta)}{\kappa} \ln \left(\frac{z - z_f(\eta)}{z_0} \right), \quad (8.73)$$

$$\frac{u_*}{g(\eta)} \kappa = -a_0 \eta (\eta - 1) (\eta^2 - 2a_1 \eta + a_2^2) \quad (8.74)$$

$$m = \frac{u_*}{\kappa V} \quad (8.75)$$

Alguns resultados no Iguaçu

Estimativa de u_* (contra medidas usando a declividade da linha d'água):

Expoente m da equação de Manning

Funções potência?

Suponha (por pura conjectura) que

$$F_V = A_+ z_+^m, \quad (8.76)$$

$$F_R = \bar{A} \bar{z}^m \Rightarrow \quad (8.77)$$

$$z_+ \frac{dF_V}{dz_+} = \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}}, \text{ se} \quad (8.78)$$

$$\frac{\bar{A}}{A_+} = R_+^m. \quad (8.79)$$

Resultados modernos

De volta aos dutos retangulares sob pressão. Wosnik, Castillo e George (2000) — as equações para os perfis nas variáveis z_+ e \bar{z} representam o *mesmo* campo de velocidade:

$$F_V - \frac{u_R}{u_*} = F_R, \quad (8.80)$$

$$G(R_+) \equiv \frac{u_*}{u_R}, \quad (8.81)$$

$$F_V(z/z_+, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(z/R, R_+), \quad (8.82)$$

$$\partial/\partial z; \times z \Rightarrow \frac{z}{z_+} \frac{dF_V}{dz_+} = \frac{z}{R} \frac{dF_R}{d\bar{z}}. \quad (8.83)$$

Aproximação assintótica local

Este é o mesmo resultado de casamento de perfis de antes, mas dessa vez para valores *finitos*, ainda que suficientemente altos, de R_+ .

Um resultado *novos* e *diferente* é obtido do processo de aproximação assintótica local (*near asymptotics*):

$$z_+ = \tilde{z} R_+^n, \quad \bar{z} = \tilde{z} R_+^{n-1} \quad 0 < n < 1 \quad (8.84)$$

$$F_V(R_+^n, \tilde{z}, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(R_+^{n-1} \tilde{z}, R_+), \quad (8.85)$$

$$\partial/\partial z \Rightarrow \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}} = \frac{1}{\kappa(R_+)} - \dots, \quad (8.86)$$

$$\frac{1}{\kappa(R_+)} \equiv \frac{d1/G}{d \ln R_+}. \quad (8.87)$$

Evidências de uma meso-camada

Seja $y = x + a$, $x, y > 0$; então, se $f = \ln x$,

$$x \frac{df}{dx} = x \frac{1}{x} = 1; \quad (8.88)$$

$$y \frac{df}{dy} = (x + a) \frac{1}{(x + a)} = 1 = x \frac{df}{dx}. \quad (8.89)$$

Isso significa que o processo de casamento de perfis de Milikan, que envolve a constante de von Kármán, admite soluções um pouco mais gerais:

$$\frac{\langle U \rangle - u_R}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [\bar{z} + \bar{a}(R_+)] + \bar{C}(R_+), \quad (8.90)$$

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [z_+ + a_+(R_+)] + C_+(R_+). \quad (8.91)$$

Conclusões

- Ao contrário do que às vezes se pensa, resultados analíticos *são* possíveis a partir das equações de Navier-Stokes e Reynolds para escoamentos turbulentos.
- Ao longo do século XX e até os dias de hoje, novos resultados analíticos e experimentais continuam a esclarecer diversos pontos sobre “velhos” problemas.
- A equação de Manning, por exemplo, pode ser entendida como o resultado de uma *aproximação* em “lei de potência” para o perfil de velocidade em uma camada-limite turbulenta.
- As teorias analíticas existentes ainda dependem de constantes empíricas, notadamente a “constante” de von Kármán \rightarrow número de von Kármán: $\kappa = \kappa(R_+)$. Obter previsões teóricas diretamente a partir das eqs de N-S é um desafio para os dinamicistas de fluidos.

9

Isotropia no domínio físico

9.1 – Isotropia no domínio físico

As equações de Navier-Stokes/Reynolds para \wp constante, e consequentemente escoamento incompressível, são as equações de continuidade

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (9.3)$$

e as equações de balanço de quantidade de movimento

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\langle U_i \rangle u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_i \langle U_k \rangle)}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \langle U_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\wp} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

A numeração é repetida aqui para que este pequeno capítulo fique auto-contido, mas no futuro, quando isto for um livro, as equações de outros capítulos devem ser referenciadas.

As coisas importantes aqui serão: as equações devem ser invariantes sob uma transformação de Galileu. Neste capítulo, utilizaremos a notação (x_1, x_2, x_3, t) e $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t})$ para representar a posição e o instante em dois referenciais distintos, e (U_1, U_2, U_3) e $(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3)$ para representar um mesmo vetor em cada um dos dois referenciais (as barras pequenas *não* significam médias!). Note que, ao contrário do que foi feito nos capítulos 5 e 6, nós estamos (por enquanto!) fazendo um caso muito simples, com \wp constante e sem flutuações de Boussinesq — portanto, não há necessidade de escrever P' , etc..

Translação simples

No caso de uma translação simples, a transformação de Galileu é

$$\bar{x}_i = x_i - V_i t, \quad (9.7)$$

$$\bar{t} = t. \quad (9.8)$$

De acordo com (9.7)–(9.8) $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ coincide com $Ox_1x_2x_3$ em $t = 0$, e afasta-se de sua origem com velocidade vetorial positiva \mathbf{V} (medida no referencial $Ox_1x_2x_3$). De (9.7),

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}, \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t} = -V_i. \quad (9.10)$$

A composição de velocidades é

$$U_i(x_k, t) = V_i + \bar{U}_i(\bar{x}_k, \bar{t}) = V_i + \bar{U}_i(x_k - V_k t, t). \quad (9.11)$$

Já a pressão é um escalar, e se transforma como

$$P(x_k, t) = \bar{P}(\bar{x}_k, \bar{t}) = \bar{P}(x_k - V_k t, t). \quad (9.12)$$

Isso define as seguintes regras para as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}} = -V_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_l} \delta_{lk} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_l} \delta_{li} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \left[\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} \right] \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \left[\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} \right] \delta_{lk} = \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_k}. \end{aligned}$$

As 3 “equações da continuidade” (9.1)–(9.3) são formalmente iguais, e basta averiguar como uma delas se transforma:

$$0 = \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}_l} \delta_{lk} = \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}_k}.$$

Portanto, a equação da continuidade permanece invariante sob uma translação galileana.

Para as equações de balanço de quantidade de movimento, fazemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} - V_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} + [V_k + \bar{U}_k] \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_k}; \\ \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_k}, \end{aligned}$$

e com isso mostramos que as equações de Navier-Stokes são invariantes sob uma translação galileana.

Rotação e translação

Para uma translação seguida de uma rotação, as equações da transformação mais geral de Galileu são No caso de uma translação simples, a transformação de Galileu é

$$\bar{x}_j = C_{ij}(x_i - V_i t), \quad (9.13)$$

$$\bar{t} = t. \quad (9.14)$$

Em (9.13), C é uma rotação. Note também que a ordem rotação/translação não importa:

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= C_{ij}(x_i - V_i t), \\ \bar{x}_j &= C_{ij}x_i - C_{ij}V_i = C_{ij}x_i - \bar{V}_j t. \end{aligned}$$

As regras de derivação agora são

$$\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} = C_{ij}, \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t} = -C_{ij}V_i = -\bar{V}_j. \quad (9.16)$$

A composição de velocidades na presença de rotação é

$$\bar{U}_j(\bar{x}_k, \bar{t}) = C_{ij}(U_i(x_k, t) - V_i) = C_{ij}U_i - \bar{V}_j. \quad (9.17)$$

Como antes, a transformação da pressão é simples (pois ela é um escalar):

$$P(x_k, t) = \bar{P}(\bar{x}_l, \bar{t}) = \bar{P}(C_{il}x_i - \bar{V}_l t, t) \quad (9.18)$$

Isso define as seguintes regras para as derivadas:

$$\begin{aligned} C_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (C_{ij}U_i) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_j + \bar{V}_j) = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial t} = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} - V_l \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_l}; \\ C_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (C_{ij}U_i) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{U}_j + \bar{V}_j) = \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} = C_{kl} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l}; \\ C_{ij} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= C_{ij} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_i} = C_{ij}C_{il} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_l} = \delta_{jl} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_l} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_j}; \\ C_{ij} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (C_{ij}U_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (\bar{U}_j + \bar{V}_j) \\ &= \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_m} \left[\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_m \partial \bar{x}_l} C_{kl} C_{km} = \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_m \partial \bar{x}_l} \delta_{lm} = \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l \partial \bar{x}_l}. \end{aligned}$$

Para a equação da continuidade,

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial (C_{kl}U_k)}{\partial \bar{x}_l} = \frac{\partial (\bar{U}_l + \bar{V}_l)}{\partial \bar{x}_l} = \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial \bar{x}_l}.$$

Multiplicamos, em seguida, as equações de quantidade de movimento por C_{ij} :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k},$$

$$\begin{aligned}
C_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial t} + C_{ij} U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &= -C_{ij} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial x_i} + C_{ij} \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\
\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} - \bar{V}_l \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} + C_{kl} U_k \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} &= -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l \partial \bar{x}_l}, \\
\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} - \bar{V}_l \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} + (\bar{U}_l + \bar{V}_l) \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} &= -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l \partial \bar{x}_l}, \\
\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \bar{U}_l \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l} &= -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_l \partial \bar{x}_l}.
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração de invariância das equações de Navier-Stokes em sua forma original, ou seja: (9.1) e (9.4). Para verificar a invariância de (9.2), (9.3), (9.5), e (9.6), por outro lado, precisamos conhecer como as médias $\langle U_i \rangle$ e as flutuações u_i são transformadas em uma transformação de Galileu. Isso não é difícil. Partindo de (9.17) e promediando,

$$\langle \bar{U}_j \rangle(\bar{x}_k, \bar{t}) = \langle C_{ij}(U_i(x_k, t) - V_i) \rangle = C_{ij} \langle U_i \rangle - \bar{V}_j \quad (9.19)$$

(pois V é constante); subtraindo agora (9.17) de (9.19), e levando em conta a decomposição de Reynolds (1.9),

$$\bar{u}_j = C_{ij} u_i. \quad (9.20)$$

A transformação (9.19) é formalmente a mesma que (9.17); consequentemente, (9.2) é invariante sob uma transformação de Galileu. Por outro lado, a equação de quantidade de movimento promediada (9.5) só tem um termo formalmente distinto de (9.4):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_k \rangle.$$

Basta, portanto, verificar como ele se transforma:

$$\begin{aligned}
C_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_k \rangle &= \frac{\partial}{\partial x_k} \langle C_{ij} u_i u_k \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \langle C_{ij} u_i u_k \rangle \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \langle C_{ij} u_i C_{kl} u_k \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_l} \langle \bar{u}_j \bar{u}_l \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, (9.2) e (9.5) também são invariantes sob uma transformação de Galileu.

Exercícios Propostos

9.1 Mostre que (9.6) também é invariante sob uma transformação de Galileu.

10

O espaço de Fourier

Nosso principal objetivo neste capítulo é compreender séries e transformadas de Fourier em 3 dimensões. Além disso, em processos estocásticos homogêneos e/ou estacionários, não existem transformadas de Fourier do campo de velocidade em termos de funções clássicas, já que as integrais correspondentes não convergem. Uma abordagem alternativa é necessária, a qual pode ser obtida ou com o Teorema da Representação Espectral ou com o uso de distribuições (funções generalizadas). Em ambos os casos, é necessário trabalhar com integrais mais gerais que a de Riemann, e por este motivo nós fazemos uma breve revisão das integrais de Lebesgue e Stieltjes. O capítulo termina com um empreendimento considerável, que é a obtenção da *Transformadas de Fourier* das equações de Navier-Stokes, que foram deduzidas no capítulo ??.

10.1 – Séries de Fourier

Seja $f(x)$, $x \in [0, L]$, f contínua por partes em $\Omega = [0, L]$. Então,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2in\pi x}{L}}, \quad (10.1)$$

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2in\pi x}{L}} dx. \quad (10.2)$$

A equação (10.1) é uma *série de Fourier complexa*. Para provar (10.2), note que

$$I = \int_0^L e^{-\frac{2im\pi x}{L}} e^{\frac{2in\pi x}{L}} dx = \int_0^L e^{-\frac{2i(m-n)\pi x}{L}} dx = \delta_{mn} L. \quad (10.3)$$

De fato, podemos separar os seguintes casos:

$$m = n \Rightarrow I = L; \quad (10.4)$$

$$m \neq n \Rightarrow I = -\frac{L}{2i(n-m)\pi} (e^{-2i(n-m)\pi} - 1) = 0, \quad (10.5)$$

pois

$$e^{-2ki\pi} = \cos(2k\pi) - i \sin(2k\pi) = 1. \quad (10.6)$$

Suponha agora que (10.1) seja válida; então, *formalmente* temos

$$f(x) e^{-\frac{2im\pi x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\frac{2im\pi x}{L}} e^{\frac{2in\pi x}{L}}, \quad (10.7)$$

$$\int_0^L f(x) e^{-\frac{2im\pi x}{L}} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \underbrace{\int_0^L e^{-\frac{2im\pi x}{L}} e^{\frac{2in\pi x}{L}} dx}_{\delta_{mn}L}, \quad (10.8)$$

$$c_m = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2im\pi x}{L}} dx. \quad (10.9)$$

Mudando a notação de c_n para $\widehat{u}(k_n)$, uma série de Fourier é efetivamente uma transformada de Fourier quando a função $u(x)$ ocupa um domínio Ω finito (ou ainda, é de *suporte compacto*). A nova notação dá ênfase a este fato:

$$\widehat{u}(k_n) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x) e^{-ik_n x} dx, \quad (10.10)$$

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k_n) e^{ik_n x} \quad (10.11)$$

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}. \quad (10.12)$$

A última equação acima define o *número de onda* k_n .

Generalizando para 3 dimensões, devemos ter

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^3} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x} \quad (10.13)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (10.14)$$

Para “provar” (formalmente apenas) essas relações:

$$\int_{\mathbf{x} \in \Omega} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} = \quad (10.15)$$

$$\int_{\mathbf{x} \in \Omega} e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (10.16)$$

$$\left[\int_{x_1=0}^L e^{i(k_1 - p_1)x_1} dx_1 \right] \left[\int_{x_2=0}^L e^{i(k_2 - p_2)x_2} dx_2 \right] \left[\int_{x_3=0}^L e^{i(k_3 - p_3)x_3} dx_3 \right]. \quad (10.17)$$

Essas 3 integrais são independentes umas das outras (Teorema de Fubini), e o resultado de seu produto será diferente de zero sempre que $k_i = p_i$ para $i = 1$ e $i = 2$ e $i = 3$, ou seja: apenas quando $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. Em qualquer outro caso, a integral é nula:

$$\int_{\mathbf{x} \in \Omega} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} = \begin{cases} L^3 & \mathbf{p} = \mathbf{k}, \\ 0 & \mathbf{p} \neq \mathbf{k}. \end{cases} \quad (10.18)$$

De posse deste atraente resultado, e partindo de (10.14):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (10.19)$$

$$\int_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{x} \in \Omega} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \quad (10.20)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^3} \int_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \quad (10.21)$$

com inversa

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (10.22)$$

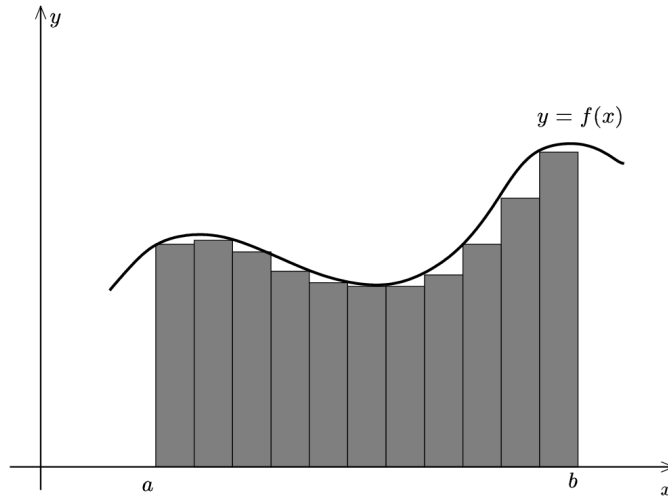


Figura 10.1: Soma inferior de Riemman

10.2 – Diferentes tipos de integral

10.2.1 – Integral de Riemman

A integral de Riemman é baseada no conceito do limite da soma sob (ou sobre) $f(x)$. As condições necessárias para a sua existência são que os limites de integração a e b devem ser finitos, e que a função deve ser limitada no intervalo aberto (a, b) . Consequentemente (Champeney, 1989), a integral própria de Riemman é incapaz de lidar com limites infinitos de integração (a ou b ou ambos) ou com singularidades infinitas de $f(x)$. Para que este tipo de integral “imprópria” seja possível, é necessário definir um processo adicional de limites:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx. \quad (10.23)$$

Quando existe uma singularidade de $f(x)$ em $c \in (a, b)$, é necessário adicionalmente trabalhar com as integrais sobre (a, c) e (c, b) , desde que o resultado faça algum tipo de sentido (por exemplo, o valor principal de Cauchy).

10.2.2 – Integral de Lebesgue

Para se definir a integral de Lebesgue, são necessários alguns passos preliminares.

Definição 1 Um conjunto de números reais é um conjunto nulo ou tem medida zero quando, $\forall \epsilon > 0$, é possível cobrir todos os pontos do conjunto com uma quantidade finita ou enumerável de intervalos abertos (a_i, b_i) tais que

$$\sum_i (b_i - a_i) < \epsilon. \quad (10.24)$$

Se uma determinada propriedade P aplica-se a todos os números reais (ou a todos os pontos de um domínio, etc.) exceto para um sub-conjunto de medida zero, diz-se que P se aplica *quase sempre* ou em *quase todo* x (q.t.x.). Se $f(x) = g(x)$ exceto em um conjunto de medida zero, diz-se que f e g são *essencialmente iguais*.

Para definir a integral de Lebesgue, construa um conjunto de *funções-degrau*, i.e.: funções constantes sobre cada um dos intervalos $(a_0, a_1], (a_1, a_2], \dots, (a_{n-1}, a_n]$ com $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Considere agora uma sequência de funções-degrau $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ (note que os índices de f e de a são diferentes; em particular, para cada índice m de $f_m(x)$ poderá haver um n diferente: $n = n(m)$). Uma tal sequência é *crescente* quando

$$f_{m+1}(x) \geq f_m(x), \quad \forall x, m. \quad (10.25)$$

Segundo Champeney, não há restrições sobre a altura de cada degrau, se $f(x)$ tende ou não a infinito em cada degrau, se o número n de degraus tende a infinito ou não, se a base $a_{j+1} - a_j$ tende a zero ou não, etc. Simplesmente, constrói-se a soma

$$I_m = \sum_{i=1}^{n(m)} (a_{i+1} - a_i) f_m(x), \quad (10.26)$$

onde obviamente $f_m(x)$ é constante para cada $x \in (a_i, a_{i+1}]$. Se existir o limite

$$I = \lim_{m \rightarrow \infty} I_m, \quad (10.27)$$

e se

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x), \quad \text{q.t.x.} \quad (10.28)$$

então I é a integral de Lebesgue de f . Note como a integral é definida em princípio sobre todo o conjunto dos números reais; o intervalo de integração passa a depender da definição dos valores de f . Ainda segundo Champeney, seja C a condição:

f definida no intervalo $[a, b]$ é contínua q.t.x., e f é limitada em $[a, b]$.

Então C é uma condição necessária e suficiente para a existência da integral de Riemman, e uma condição suficiente para a integral de Lebesgue. Isso significa que “Riemman implica Lebesgue”, mas não o contrário, ou seja: a integral de Lebesgue é mais geral que a de Riemman, podendo lidar com casos de funções que não são Riemman-integráveis.

Finalmente, com o conceito de integral de Lebesgue em mãos, é possível dar a seguinte definição de *medida*. Dado um conjunto E , define-se a *função indicador* de E como

$$I_E(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases} \quad (10.29)$$

Definição 2 Se $I_E(x)$ é Lebesgue-integrável, a medida de E é

$$\mu(E) \equiv \int I_E(x) dx \quad (10.30)$$

(integral no sentido de Lebesgue, é claro).

Naturalmente, é possível definir *primeiro* medida e *depois* integral de Lebesgue. Em termos de teoria da medida, cada medida μ distinta em \mathbb{R}^n define uma nova integral, que se denota por

$$\int f(x) d\mu \quad \text{ou} \quad \int f(x) \mu(dx).$$

De fato, a medida de Lebesgue de um intervalo $(a, b]$ é simplesmente $\mu(a, b] = b - a$.

Definição 3 L é o espaço das funções f Lebesgue-integráveis em \mathbb{R}^d , isso é, todas as funções f tais que

$$\int f(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} < \infty. \quad (10.31)$$

Definição 4 L^p é o espaço das funções f tais que

$$\int |f(\mathbf{x})|^p d^d \mathbf{x} < \infty. \quad (10.32)$$

Definição 5 A norma p de uma função $f \in L^p$ é

$$\|f(\mathbf{x})\|_p \equiv \left(\int |f(\mathbf{x})|^p d^d \mathbf{x} \right)^{1/p}. \quad (10.33)$$

10.2.3 – Integral de Stieltjes

Seja $F(x)$ uma função monótona e não-decrescente com

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad (10.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \text{e} \quad (10.35)$$

$$F(x+a) - F(x) \geq 0, \quad \forall a > 0. \quad (10.36)$$

Considere agora uma função $f(x)$ entre a e b ; define-se a integral de Stieltjes como

$$\int_a^b f(x) dF(x) \equiv \lim_{\substack{\max |x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^N f(x_k^*) (F(x_k) - F(x_{k-1})), \quad (10.37)$$

onde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $x_{k-1} < x_k^* < x_k$.

A integral imprópria é o limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \equiv \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dF(x). \quad (10.38)$$

A integral de Stieltjes é uma generalização da integral de Riemman (Shilov e Gurevich, 1977). Ela pode ser relacionada bi-univocamente com uma medida μ em \mathbb{R} (Billingsley, 1986) de tal forma que

$$F \leftrightarrow \mu \quad (10.39)$$

$$\int_{A \subset \mathbb{R}} f(x) dF = \int_{A \subset \mathbb{R}} f(x) d\mu. \quad (10.40)$$

10.3 – Energia cinética e a igualdade de Parseval

A igualdade de Parseval aplica-se a um espaço de funções $f(x)$ de dimensões finitas ou infinitas (mas o último caso é o único interessante) na forma (Greenberg, 1978, p. 327)

$$f(x) = \sum (f, e_n) e_n(x) = \sum_n c_n e_n(x), \quad (10.41)$$

$$\|f(x)\|^2 = \sum_n |c_n|^2, \quad (10.42)$$

onde (\cdot, \cdot) significa o produto interno. Note que (10.42) é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Os $e_n(x)$'s são funções ortonormais que geram o espaço de funções, e a norma $\|\cdot\|$ é definida pelo produto interno utilizado. No nosso caso, trata-se da norma L_2 definida em (10.33) com $p = 2$. De fato, se

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} f^* g \, d^3 \mathbf{x}, \quad (10.43)$$

onde $*$ significa o conjugado complexo, então

$$(f, f) = \int_{\Omega} f^* f \, d^3 \mathbf{x} = \int_{\Omega} |f|^2 \, d^3 \mathbf{x} = \|f\|_2^2. \quad (10.44)$$

Nossos resultados anteriores referentes a séries de Fourier podem ser obtidos novamente em termos de análise linear se supusermos que o conjunto de funções $\{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\}$ gera L_2 . A partir de agora nós vamos omitir o índice 2 de nossas normas, com o entendimento de que sempre estaremos tratando de $\|\cdot\|_2$. De (10.18) sabemos que

$$\|e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\|^2 = \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \, d^3 \mathbf{x} = L^3. \quad (10.45)$$

Portanto, o conjunto de funções ortonormais em questão é

$$e_{\mathbf{k}} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} / L^{3/2}. \quad (10.46)$$

Então,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{u}(\mathbf{x}), e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})) e_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (10.47)$$

onde $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ é dado por (10.13). Evidentemente,

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, d^3 \mathbf{x} = 2L^3 \langle e_c \rangle. \quad (10.48)$$

Aqui, $\langle e_c \rangle$ significa a energia cinética por unidade de massa média dentro de Ω . Pela igualdade de Parseval, tem-se então que

$$\frac{1}{L^3} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d^3 \mathbf{x} = \sum_{\mathbf{k}} |\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2. \quad (10.49)$$

Ou seja: $|\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 = \widehat{\mathbf{u}}^* \widehat{\mathbf{u}}$ pode ser interpretado como duas vezes a energia cinética média associada a cada vetor número de onda \mathbf{k} .

10.4 – A transformada de Fourier do campo de velocidade

Num domínio finito $[0, L]$, a série de Fourier de uma função $f(x)$ envolve um número infinito porém enumerável de números de onda $k_n = 2\pi n/L$. Já num domínio infinito, sobre toda a reta dos reais, vão aparecer um número infinito e não-enumerável de números de onda. Em outras palavras, o espectro de $f(x)$ passa a ser contínuo. A

passagem de um ao outro caso em uma dimensão é dada pela fórmula da integral de Fourier,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] dk. \quad (10.50)$$

O fator $1/(2\pi)$ está intencionalmente dentro dos colchetes para explicitar nossa opção de definição de transformada de Fourier unidimensional:

$$\widehat{f}(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (10.51)$$

quando então a integral de Fourier dá a fórmula da transformada inversa:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{+ikx} dk. \quad (10.52)$$

A questão importante que se coloca agora é se a transformada de Fourier pode ser aplicada a um campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (ou a uma de suas componentes $u_i(\mathbf{x})$), ou a uma amostra espacial linear $u(x)$ (*transect* em inglês) ou finalmente a uma série euleriana de medições $u(t)$.

No caso unidimensional, uma condição suficiente para a existência da transformada de Fourier é que $f(x)$ seja absolutamente integrável. Em particular, funções que decaem “rápido” no infinito possuem transformada de Fourier. De fato, multiplicando-se a definição (10.51) por $(ik)^n$ integrando-se por partes n vezes (Saichev e Woyczyński, 1997):

$$(ik)^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x) e^{-ikx} dx. \quad (10.53)$$

Se $f^{(n)}(x) e^{-ikx}$ for absolutamente integrável, então para algum número real M positivo:

$$|(ik)^n \widehat{f}(k)| \leq M \quad (10.54)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|^n}. \quad (10.55)$$

Auto-crítica: isso aí acima parece uma demonstração de que $\widehat{f}(k)$ decai rápido, mas não parece dizer grande coisa a respeito de $f(x)$.

Já $f(x) \equiv 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ não atende a este tipo de condição de decaimento, e consequentemente não possui uma transformada de Fourier no sentido estrito. Ora, um sinal típico de $u(x)$ em um escoamento turbulento tem a aparência da figura ??, e claramente não “decai” em valor absoluto em $x \rightarrow \pm\infty$. Talvez o(a) leitor(a) se surpreenda com o fato de que a função da figura ?? não tem *nenhuma* relação com turbulência, sendo um gráfico de $f(x) = 2 + \sin(x^3) \sin(x^5)$! É claramente impossível falar da transformada de Fourier (no sentido clássico) quando as funções a serem transformadas não decaem suficientemente rápido. É preciso “algo mais”.

10.4.1 – Teorema da convolução e igualdade de Parseval

Ainda no contexto de funções $f(x)$ absolutamente integráveis, e que portanto possuem transformada de Fourier, é conveniente citar (sem demonstração) o teorema da convolução nas formas (Saichev e Woyczyński, 1997)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{\phi}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \phi(x - \xi) d\xi \quad (10.56)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(p)\widehat{\phi}(k-p) dp \quad (10.57)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk. \quad (10.58)$$

$$\mathcal{F}[f(x) * \phi(x)] = 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(k) \quad (10.59)$$

$$\mathcal{F}[f(x)\phi(x)] = \widehat{f}(k) * \widehat{\phi}(k). \quad (10.60)$$

É elementar provar que (10.56) \Rightarrow (10.59), enquanto que (10.60) é simplesmente uma forma resumida de (10.57). Vale a pena provar essa última: comece com

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(p)e^{ipx} dk; \quad (10.61)$$

multiplique agora por $g(x)e^{-ikx}$ e integre:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(p)e^{ipx} dk dx \quad (10.62)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-i(k-p)x} dx \right] \widehat{f}(p) dp \quad (10.63)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k-p)\widehat{f}(p) dp. \quad (10.64)$$

10.5 – Funções generalizadas (distribuições)

Um funcional $T[\phi]$ é uma *função* de uma função $\phi(x)$ em um escalar:

$$\begin{aligned} T : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi(x) \in D &\rightarrow T[\phi] \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uma forma simples de produzir um funcional é por meio de uma integral,

$$T[\phi] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx, \quad (10.65)$$

onde f é denominada *núcleo* do funcional. Entretanto, T não precisa ser definido por uma integral; por exemplo, a distribuição δ de Dirac é definida como

$$\delta[\phi] \equiv \phi(0) \text{ “=” } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x) dx \quad (10.66)$$

onde a segundo igualdade foi escrita entre aspas para enfatizar seu lado puramente notacional, já que a integral em questão não faz sentido.

Definição 6 Uma distribuição é um funcional linear.

Considere então o teorema da convolução na forma (10.56). Define-se a transformada de Fourier $\widehat{T}(k)$ do funcional T pela condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(k)\widehat{\phi}(k)e^{ikx} \equiv \frac{1}{2\pi} T(x) * \phi(x) \quad (10.67)$$

(note o significado simbólico do lado direito). Por exemplo, se $T = \delta$,

$$T * \phi = \delta * \phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) \phi(x - \xi) d\xi = \phi(x), \quad (10.68)$$

e portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta}(k) \widehat{\phi}(k) e^{ikx} dk = \frac{\phi(x)}{2\pi} \Leftrightarrow \widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}. \quad (10.69)$$

Simbolicamente, portanto:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk, \quad (10.70)$$

$$\widehat{1} = \delta(k). \quad (10.71)$$

Nossa questão central agora é como *definir* e depois como *operar com* a transformada de Fourier da velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Conforme vimos, ao contrário das funções classicamente integráveis e Fourier-transformáveis, $u(\infty) \rightarrow 0$. Em outras palavras, precisamos trabalhar com a transformada de Fourier de uma função $u(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx = \infty. \quad (10.72)$$

[Lumley \(1970, seção 3.15\)](#) menciona 3 abordagens:

1. Multiplicar u por uma função absolutamente integrável f_a , com $f_a \rightarrow 1$ quando $a \rightarrow 0$; obter

$$[u(x)f_a(x)]^\wedge(k)$$

e em seguida fazer

$$\widehat{u}(k) \text{ “=” } \lim_{a \rightarrow 0} [u(x)f_a(x)]^\wedge(k).$$

2. Utilizar o “teorema da representação espectral”,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dZ(k), \quad (10.73)$$

onde $Z(k)$ é um processo estocástico homogêneo com incrementos decorrelacionados:

$$\langle Z^*(\Delta_1 k) Z(\Delta_2 k) \rangle = 0. \quad (10.74)$$

(Mais a respeito de processos estocásticos e representação espectral nas próximas aulas).

3. Usar distribuições (essa é também a abordagem de Frisch e Lesieur).

Note que enquanto que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k) e^{ikx} dk \quad (10.75)$$

faz sentido, como distribuição (\widehat{u} é uma distribuição) para cada realização $u(x)$ de um escoamento turbulento entendido aqui como um processo estocástico homogêneo, (10.73) só faz sentido na média quadrática do processo estocástico inteiro.

10.6 – A transformada de Fourier das equações de Navier-Stokes

Seja a um campo qualquer, escalar ou vetorial, de um escoamento turbulento. Precisamos de uma definição de transformada de Fourier tridimensional. Comparando (10.13) para uma *série de Fourier* tridimensional com (10.51) para uma *transformada de Fourier* unidimensional, é (quase...) evidente que a definição de uma transformada de Fourier tridimensional é

$$\mathcal{F}[a] \equiv \widehat{a} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} a(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}, \quad (10.76)$$

cujas inversa é

$$a(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \widehat{a}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k} \quad (10.77)$$

(Batchelor, 1993, p. 21).

Exercício Prove (10.76) e (10.77) a partir de (10.50).

Na verdade, basta trabalhar em 2 dimensões para compreender o mecanismo da prova. Começo com uma função $f(x, y)$ e aplico (10.50) para a 1ª variável independente, x , obtendo

$$f(x, y) = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi, y) e^{-ik_1 \xi} d\xi \right] dk_1. \quad (10.78)$$

Agora eu aplico (10.50) novamente para a 2ª variável independente, y :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} e^{ik_2 y} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-ik_1 \xi} d\xi \right] dk_1 e^{-ik_2 \eta} d\eta \right] dk_2, \\ &= \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} e^{ik_2 y} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-ik_2 \eta} \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-ik_1 \xi} d\xi \right] dk_1 d\eta \right] dk_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-ik_1 \xi} e^{-ik_2 \eta} d\xi d\eta dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Em 2 dimensões, com $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ e $\xi = (\xi, \eta)$:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \left[\left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\xi \in \mathbb{R}^2} f(\xi) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \xi)} d^2 \xi \right] d^2 \mathbf{k}. \quad (10.80)$$

A generalização para 3 dimensões deve ser óbvia.

Como sabemos, em matemática aplicada é comum a utilização de alguma transformada (Fourier, Laplace, etc.) para transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica. A partir de agora, essaremos trabalhando sempre com as equações de Navier-Stokes de um escoamento incompressível. Neste caso, a equação da continuidade (3.5) reduz-se a (Batchelor, 1967; Kundu, 1990)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (10.81)$$

A transformada de Fourier dessa equação é

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] = ik_i \widehat{u}_i = 0; \quad (10.82)$$

vetorialmente,

$$\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = 0. \quad (10.83)$$

A interpretação geométrica é fundamental: observe que (10.82) ou (10.83) significam que o vetor $\widehat{\mathbf{u}}$ é perpendicular ao vetor número de onda \mathbf{k} em todos os pontos do espaço transformado (isso é: o espaço onde “vivem” os vetores número de onda e as transformadas de Fourier do campo de velocidade).

A equação dinâmica que vamos utilizar contém (neste estágio) 3 simplificações: a modificação do termo não-linear utilizando a equação da continuidade (10.81), o desprezo da aceleração de Coriolis, e a incorporação da força de corpo por unidade de massa à pressão p , a qual a partir de agora passa a representar a “pressão modificada” (Batchelor, 1967, p. 176), (Kundu, 1990, p.266). O primeiro “truque” será tão recorrente em turbulência que bem merece ser feito em detalhe. Considere o termo não-linear de (3.33), $u_j \partial u_i / \partial x_j$; em virtude de (10.81) nós podemos escrever a identidade

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j). \quad (10.84)$$

Com (10.84), e desconsiderando-se g_i (incorporada à pressão modificada) e Ω_j (por hipótese desprezível nos escoamentos que essaremos analisando), a equação dinâmica de Navier-Stokes (3.33) reduz-se a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (10.85)$$

As transformadas de Fourier dos termos lineares são

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t}, \quad (10.86)$$

$$\mathcal{F} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] = -\frac{1}{\rho} i k_i \widehat{p}. \quad (10.87)$$

$$\mathcal{F} \left[\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right] = -\nu k_j k_j \widehat{u}_i. \quad (10.88)$$

Observe que $\widehat{\mathbf{u}}$, $\partial \widehat{\mathbf{u}} / \partial t$ e $-\nu k^2 \widehat{\mathbf{u}}$ são todos perpendiculares ao vetor número de onda \mathbf{k} , enquanto que $(-1/\rho) i \widehat{p} \mathbf{k}$ é paralelo a \mathbf{k} . Em outras palavras, a projeção do gradiente de pressão (no espaço dos números de onda) sobre o plano π perpendicular a \mathbf{k} é zero. Para projetar um vetor \mathbf{a} num plano $\pi \perp \mathbf{k}$, faça

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (10.89)$$

operar sobre \mathbf{a} ; então, o vetor-projeção de \mathbf{a} em π será

$$\mathbf{b} = \left[\delta_{ij} a_j - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j \right] \mathbf{e}_i, \quad (10.90)$$

cujo produto escalar com \mathbf{k} deve ser nulo; de fato,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = \delta_{ij} a_j k_i - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j k_i = a_i k_i - a_j k_j = 0. \quad (10.91)$$

Agora vamos transformar o termo não-linear. Pela generalização tridimensional do teorema da convolução,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{f}(\mathbf{p})\widehat{g}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \\ &= \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{f}(\mathbf{p})\widehat{g}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}\end{aligned}\quad (10.92)$$

Portanto a transformada de Fourier do termo não-linear será

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)\right] = ik_j \widehat{(u_i u_j)} = ik_j \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_i(\mathbf{p})\widehat{u}_j(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}. \quad (10.93)$$

Juntando todas as transformadas obtém-se a seguinte equação vetorial:

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{u}}}{\partial t} + i \left[\int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{p})\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} \right] \cdot \mathbf{k} + \frac{i}{\rho} \widehat{p} \mathbf{k} + \nu k^2 \widehat{\mathbf{u}} = 0. \quad (10.94)$$

Graficamente, o termo não-linear $\boldsymbol{\eta}$ e o termo de pressão podem ser visualizados na figura 10.2. A projeção de $\boldsymbol{\eta}$ perpendicular a π anula o termo de pressão. Se estabelecermos uma equação para a interação de $\boldsymbol{\eta}$ em π com os demais termos lineares, teremos eliminado a pressão da equação.

Agora, a componente j (por analogia com a_j) do vetor não-linear $\boldsymbol{\eta}$ será

$$\eta_j = ik_m \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_j(\mathbf{p})\widehat{u}_m(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} \quad (10.95)$$

e a projeção de $\boldsymbol{\eta}$ em π na direção i será

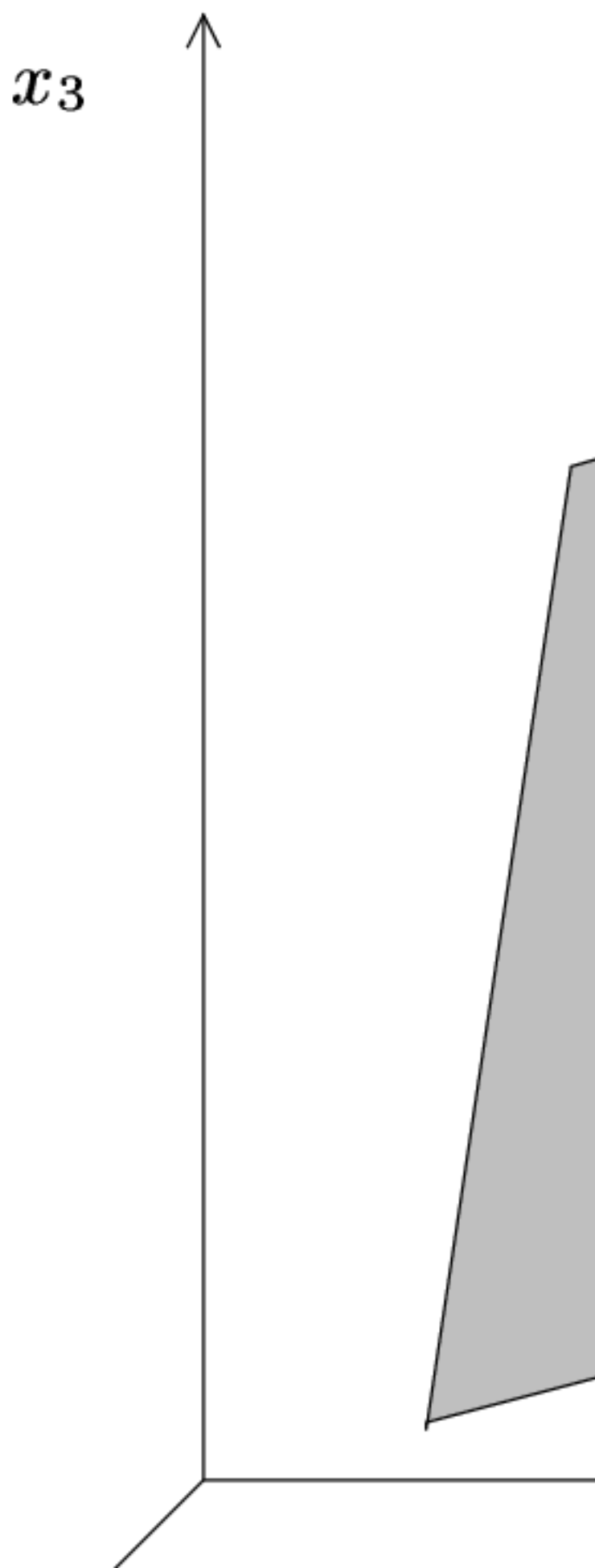
$$P_{ij}\eta_j = P_{ij}ik_m \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_j(\mathbf{p})\widehat{u}_m(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}. \quad (10.96)$$

Como vimos, essa projeção deve equilibrar os termos lineares que não o de pressão, donde

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \nu_u k^2 \widehat{u}_i + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) ik_m \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_j(\mathbf{p})\widehat{u}_m(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} = 0. \quad (10.97)$$

Exercício: deduza a equação para um escalar (por exemplo a temperatura):

$$\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} + \nu_u k^2 \widehat{\theta} = -ik_j \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_j(\mathbf{p})\widehat{\theta}(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}. \quad (10.98)$$



11

Processos estocásticos e representação espectral

Um processo estocástico é uma função

$$u = U(\omega, t), \quad (11.1)$$

com $\omega \in \Omega$. Ω é denominado *espaço amostral*. Além disso, é preciso especificar uma álgebra do conjunto dos sub-conjuntos de Ω , e uma medida de probabilidade P definida sobre estes conjuntos. As propriedades elementares de probabilidades de eventos *disjuntos* A_1, \dots, A_n ,

$$P(A_i) \geq 0, \quad (11.2)$$

$$P(\Omega) = 1, \quad (11.3)$$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) + P(A_j), \quad (11.4)$$

são o início da construção de um *campo* \mathcal{F} , definido como uma classe de conjuntos (que é só uma maneira não pleonástica de dizer *conjunto de conjuntos*) com as seguintes propriedades (as 3 últimas são consequências):

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}, \quad (11.5)$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ e } B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}, \quad (11.6)$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ e } B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}, \quad (11.7)$$

$$\emptyset \in \mathcal{F}, \quad (11.8)$$

$$\Omega \in \mathcal{F}. \quad (11.9)$$

Quando as uniões e interseções de *sequências infinitas* de elementos A_1, \dots, A_n de um campo \mathcal{F} também pertencem a \mathcal{F} (isso é, quando (11.6) e (11.7) se estendem a uma infinidade enumerável de conjuntos), diz-se que \mathcal{F} é um *campo de Borel*. O *Axioma da aditividade infinita* é: se A_1, A_2, \dots são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (11.10)$$

Para nós, o espaço amostral é o planeta alienígena de onde vêm os “traços” ou “registros” $u(t)$ de turbulência que medimos (ou que simulamos no computador), e com os quais trabalhamos. Isso está ilustrado na figura 11.1. Note que a variável independente *não* é uma variável aleatória, e que ela pode ser t, x, r, \mathbf{x} , etc.

Nosso problema será estimar a estrutura probabilística de U a partir de uma única realização $u(t)$. Para tal, nós precisamos lançar mão de conceitos tais como

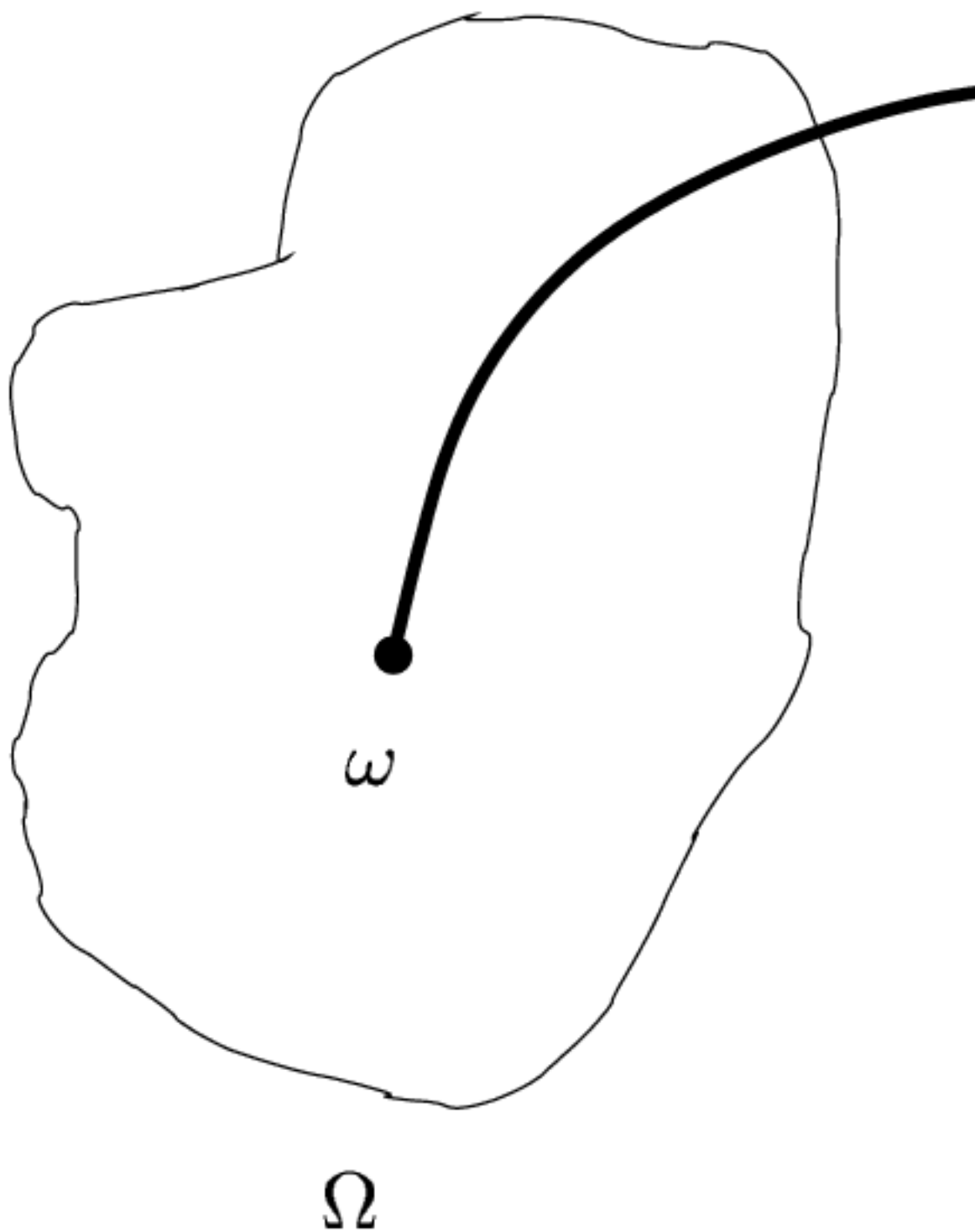


Figura 11.1: O espaço amostral das funções aleatórias $u(t)$.

- essacionariedade
- ergodicidade
- estimadores

Dado um processo estocástico $U(t)$, a sua distribuição conjunta de ordem n é

$$F(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = P\{U(t_1) \leq u_1, \dots, U(t_n) \leq u_n\}. \quad (11.11)$$

O conhecimento de F especifica totalmente (“define a estrutura estocástica”) de uma ampla classe de processos denominados *separáveis* (Papoulis, 1991, p. 293). No caso de um processo estocástico em \mathbb{R}^3 , a notação precisa ser mais sofisticada:

$$F((u^{(1)}; i_1), \dots, (u^{(n)}; i_n); \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = P\{U_{i_1}(\mathbf{x}_1) \leq u^{(1)}, \dots, U_{i_n}(\mathbf{x}_n) \leq u^{(n)}\} \quad (11.12)$$

com $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$.

Por simplicidade, vamos prosseguir com definições univariadas, usando o tempo t ; as generalizações são relativamente óbvias. O que é importante observar em (11.11) é a sua dimensionalidade: para conhecer a estrutura estocástica do processo, é necessário conhecer não apenas *um* F , mas *todos* os F 's para todos os n 's e todas as escolhas possíveis de t_1, \dots, t_n ! Uma forma alternativa de *descrever* F é por meio dos momentos conjuntos (Batchelor, 1993, p. 20):

$$R_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle U_{i_1}(t_1) U_{i_2}(t_2) \dots U_{i_n}(t_n) \rangle, \quad (11.13)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ significa o valor esperado no espaço amostral.

Questão: escreva a expressão para o valor esperado de um processo em \mathbb{R}^3 , em termos de uma integral envolvendo F ; como isso pode (ou não) ser usado para deduzir os “postulados” de Reynolds?

Este é um problema formidável, que precisa ser aliviado de alguma forma. A primeira delas é

Definição 7 Um processo estocástico $U(t; \omega)$ é *essacionário* quando

$$F(\cdot; t_1, \dots, t_n) = F(\cdot; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (11.14)$$

Existe uma definição equivalente para um processo estocástico *homogêneo* no espaço.

Sugestão para os participantes: como fazer a definição *precisa* de um processo estocástico homogêneo em \mathbb{R}^3 ?

Algumas consequências (para essacionariedade) se seguem.

A média de U é

$$\langle U(t) \rangle = R_1(t) = R_1(t + \tau), \forall \tau \Rightarrow \langle U(t) \rangle = \text{const.} \quad (11.15)$$

O momento de ordem 2 de U (que pode ser relacionado com a variância, mas que é diferente dela!) é

$$\langle U(t)U(t) \rangle = R_{1,1}(t, t) = R_{1,1}(t + \tau, t + \tau), \forall \tau \Rightarrow \langle U^2(t) \rangle = \text{const.} \quad (11.16)$$

Da mesma forma, $\langle U^n(t) \rangle = \text{const}$, $\forall n$, ou seja: a distribuição acumulada marginal de probabilidades de U é independente do tempo: $F(u, t) = F(u)$. No caso de processos multidimensionais, a generalização natural do momento de ordem 2 é

$$\langle U_i(t)U_j(t + \tau) \rangle = R_{ij}(t, t + \tau) = R_{ij}(0, \tau); \Rightarrow R_{ij} = f(\tau). \quad (11.17)$$

Ou seja: em um processo estocástico estacionário, a *função de correlação cruzada* R_{ij} depende apenas da diferença no tempo, τ , entre U_i e U_j .

No caso de um processo estocástico *unidimensional* $\{U_1(t)\}$, a função de correlação é

$$R_{1,1}(s, t) = \langle U_1(s)U_1(t) \rangle. \quad (11.18)$$

Naturalmente, $R_{1,1}$ é simétrica nos índices (s, t) :

$$R_{1,1}(s, t) = R_{1,1}(t, s). \quad (11.19)$$

De acordo com (Yaglom, 1987, p. 46), $R_{1,1}$ é um *núcleo positivo definido*. De fato, considere um vetor de números reais $[c_1, \dots, c_n]$ e de variáveis aleatórias $[U_1(t_1), \dots, U_1(t_n)]$ do mesmo processo estocástico $U(t)$; então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle [c_1 U_1(t_1) + \dots + c_n U_1(t_n)]^2 \rangle = \\ &c_1^2 \langle U_1(t_1)U_1(t_1) \rangle + \dots + c_n^2 \langle U_1(t_n)U_1(t_n) \rangle + 2 \sum_i \sum_{j>i} c_i c_j \langle U_1(t_i)U_1(t_j) \rangle = \\ &\sum_i \sum_{j=i} c_i c_j \langle U_1(t_i)U_1(t_j) \rangle + \sum_i \sum_{j>i} c_i c_j \langle U_1(t_i)U_1(t_j) \rangle + \sum_i \sum_{j<i} c_i c_j \langle U_1(t_i)U_1(t_j) \rangle = \\ &\sum_i \sum_j c_i \langle U_1(t_i)U_1(t_j) \rangle c_j = c_i R_{1,1}(t_i, t_j) c_j. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Note que nós utilizamos (11.19) na passagem da 2ª para a 3ª linhas acima. No lado esquerdo da última igualdade, usou-se notação indicial e os somatórios foram suprimidos. Essa dedução foi bastante melhorada em sala de aula. A versão abaixo foi fornecida por Nadiane Smaha (thanks).

Problema

Questão: é possível mostrar que R_{ij} é uma matriz positiva definida? Acho que sim!

Provar que a matriz R_{ij} é positiva definida.

Para qualquer a_i e a_j temos a identidade:

$$\langle \left| \sum_{i=1}^n a_i U_1(t_i) \right|^2 \rangle \geq 0 \quad (11.21)$$

Abrindo o quadrado:

$$\langle a_1^2 U_1^2(t_1) + \dots + a_n^2 U_1^2(t_n) + \sum_i \sum_{j>i} 2a_i a_j U_1(t_i) U_1(t_j) \rangle \geq 0 \quad (11.22)$$

Ou ainda:

$$\sum_i a_i^2 \langle U_1(t_i) U_1(t_i) \rangle + \sum_i \sum_{j>i} 2a_i a_j \langle U_1(t_i) U_1(t_j) \rangle \geq 0 \quad (11.23)$$

Sendo:

$$\langle U_1(t_i) U_1(t_j) \rangle = R_{1,1}(t_i, t_j) \quad (11.24)$$

Mas para qualquer matriz quadrada C_{ij} :

$$\sum_i^n \sum_{j>i}^n a_i a_j C_{ij} = \sum_i^n \sum_{j \geq i}^n a_i a_j C_{ij} - \sum_{k=1}^n C_{kk} \quad (11.25)$$

Onde C_{kk} representa a diagonal principal.

Trocando os índices i e j na equação 11.25:

$$\sum_j^n \sum_{i \geq j}^n a_j a_i C_{ji} - \sum_{k=1}^n C_{kk} \quad (11.26)$$

Mas para qualquer matriz quadrada C_{ji} :

$$\sum_j^n \sum_{i \geq j}^n C_{ji} = \sum_i^n \sum_{i \geq j}^n C_{ji} \quad (11.27)$$

Então temos a equação 11.26:

$$\sum_i^n \sum_{i \geq j}^n a_j a_i C_{ji} - \sum_{k=1}^n C_{kk} = \sum_i^n \sum_{i > j}^n a_j a_i C_{ji} \quad (11.28)$$

Sabendo-se que para uma matriz simétrica $C_{ij} = C_{ji}$, e aplicando as equações 11.25 à 11.28 na equação 11.23, temos:

$$\sum_i^n \sum_{j=i}^n a_i a_j \langle U_1(t_i) U_1(t_i) \rangle + \sum_i^n \sum_{j<i}^n a_i a_j \langle U_1(t_i) U_1(t_j) \rangle + \sum_i^n \sum_{j>i}^n a_i a_j \langle U_1(t_i) U_1(t_j) \rangle \geq 0 \quad (11.29)$$

$$\sum_i^n \sum_j^n a_i a_j \langle U_1(t_i) U_1(t_i) \rangle \geq 0 \quad (11.30)$$

$$a_i a_j R_{1,1}(t_i, t_j) \geq 0 \quad (11.31)$$

E portanto:

$$R_{1,1}(t_i, t_j) \geq 0 \quad (11.32)$$

De qualquer modo, note que $R_{1,1}(\tau)$ (note também a sutil mudança de notação, uma vez que apenas um argumento é necessário em processos estocásticos estacionários) é uma função par:

$$R_{1,1}(\tau) = \langle U(0)U(\tau) \rangle = \langle U(0-\tau)U(\tau-\tau) \rangle = \langle U(-\tau)U(0) \rangle = \langle U(0)U(-\tau) \rangle = R_{1,1}(-\tau). \quad (11.33)$$

De forma análoga, pode-se mostrar que

$$R_{i,j}(\tau) = R_{j,i}(-\tau) \quad (11.34)$$

$$|R_{ij}(\tau)|^2 \leq R_{ii}(0)R_{jj}(0). \quad (11.35)$$

A demonstração de (11.34) é elementar, e imita a demonstração de (11.33):

$$R_{ij}(\tau) = \langle U_i(0)U_j(\tau) \rangle = \langle U_i(0 - \tau)U_j(\tau - \tau) \rangle = \langle U_i(-\tau)U_j(0) \rangle = \langle U_j(0)U_i(-\tau) \rangle = R_{ji}(-\tau). \quad (11.36)$$

Já a demonstração de (11.35) me parece um pouco mais elaborada. A chave do sucesso talvez seja a desigualdade de Schwarz: se (\cdot, \cdot) é um produto interno, para dois vetores quaisquer u, v nós sabemos que

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v). \quad (11.37)$$

Agora note que $\langle UV \rangle$ proporciona um produto interno legítimo entre $U(t)$ e $V(t)$.

Exercício: Mostre que as propriedades (i) a (iv) de um produto interno que nós estudamos no seminário de análise funcional se aplicam a $\langle UV \rangle$. Neste caso,

$$|R_{ij}(0)|^2 = \langle U_i(t)U_j(t) \rangle^2 \leq \langle U_i^2(t) \rangle \langle U_j^2(t) \rangle = R_{ii}(0)R_{jj}(0). \quad (11.38)$$

Agora basta observar ou provar que $|R_{ij}(\tau)| \leq |R_{ij}(0)|$.

As funções de covariância cruzada são definidas de forma análoga às funções de correlação:

$$C_{ij}(\tau) = \langle (U_i(t) - R_i)(U_j(t + \tau) - R_j) \rangle. \quad (11.39)$$

Note que R_i e R_j são os *valores esperados* constantes das componentes i e j ; uma notação mais óbvia seria $\langle U_i \rangle$ e $\langle U_j \rangle$.

Existe uma tendência de confundirmos C_{ij} com R_{ij} ; note que as duas são iguais apenas no caso (muito fácil de se construir ou supor) em que $\langle U_i \rangle = 0$. Note que $C_{ij}(0)$ é a covariância (variância, quando $i = j$) entre as variáveis aleatórias U_i e U_j .

O coeficiente de (auto) correlação para a separação τ é

$$\varrho_{i,i}(\tau) = \frac{C_{i,i}(\tau)}{C_{i,i}(0)}. \quad (11.40)$$

O coeficiente de correlação cruzada é

$$\varrho_{i,j}(\tau) = \frac{C_{i,j}(\tau)}{\sqrt{C_{i,i}(0)C_{j,j}(0)}}. \quad (11.41)$$

Finalmente, uma estatística que tem uma grande importância em teoria de turbulência é a função de estrutura. Por exemplo, a função de estrutura (cruzada) de ordem 2 é

$$D_{ij}(\tau) = \langle (U_i(t + \tau) - U_i(t))(U_j(t + \tau) - U_j(t)) \rangle. \quad (11.42)$$

A função de estrutura de ordem 2 é conhecida como *variograma* em geoestatística.

Em geral, para a ordem n nós teremos

$$D_{i_1, \dots, i_n}(\tau) = \langle (U_{i_1}(t + \tau) - U_{i_1}(t)) \dots (U_{i_n}(t + \tau) - U_{i_n}(t)) \rangle. \quad (11.43)$$

Aqui existe a necessidade de alguma discussão sobre a motivação para trabalharmos com as funções de estrutura. Note que $D_i(\tau) = \langle U_i(t + \tau) - U_i(t) \rangle$ é o valor esperado do *incremento* de U_i sobre uma separação τ . Agora, para que D_i dependa apenas

da separação τ , basta que este incremento seja um processo estocástico estacionário. Vemos portanto que para que, em geral, $D_{i_1, \dots, i_n}(\tau)$ seja definido não é necessário que $U(t)$ seja estacionário; em vez disso, basta apenas que os seus incrementos sejam estacionários.

Quando em 1941 Kolmogorov propôs a sua famosa teoria de turbulência, ele o fez em termos de funções de estrutura. Pouco tempo depois, Obukhov fez o mesmo em termos dos espectros, que estudaremos na próxima seção. O ponto importante a se notar aqui é que a existência dos espectros/funções de correlação exige que o processo correspondente seja estacionário, mas as funções de estrutura podem ser definidas para uma classe mais ampla de processos. Portanto, Kolmogorov foi cuidadoso em formular sua teoria para a situação mais geral possível.

O que ainda não se sabe completamente é até que ponto é realmente útil se trabalhar com a hipótese mais fraca de procesos com incrementos estacionários. Em princípio, isso seria particularmente útil para analisar períodos em que a turbulência é não-estacionária (ou, analogamente, regiões do espaço em que ela é não-homogênea). Essa é de fato a afirmação que encontramos em (Lumley e Panofsky, 1964, p. 15–16).

Dias et al. (2004) entretanto encontraram muito pouca diferença entre analisar períodos claramente não estacionários de turbulência atmosférica com a função de estrutura ou com a função coeficiente de autocorrelação: em ambos os casos o sinal da não-estacionariedade é claramente visível. Em outras palavras, o uso da função estrutura não resultou em nenhuma vantagem sensível na análise de registros não-estacionários.

11.1 – Espectros cruzados em uma dimensão (tempo)

Quando trabalhamos com um registro temporal $U(t)$ de turbulência, é muitas vezes conveniente usar a frequência cíclica n em lugar da frequência angular ω , que é o análogo do número de onda k ; como este é um texto pitecantrópico (em evolução), nessa seção eu vou usar frequências cíclicas e não frequências angulares.

Considere a função de correlação cruzada $R_{ij}(\tau)$ de um processo estacionário e ergódico, no tempo t ; é razoável admitir que $R_{ij}(\tau) \rightarrow 0$ suficientemente rápido quando $\tau \rightarrow \infty$ para que a integral

$$S_{ij}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \quad (11.44)$$

exista; $S_{ij}(n)$ é o *espectro cruzado* de U_i, U_j . Quando $i = j$, S_{ii} (com ou sem soma em i) é denominado simplesmente *espectro*.

Questão: Mostre que quando o índice repetido implica soma, S_{ii} é igual a duas vezes o espectro da energia cinética turbulenta

Note que $R_{ij}(-\tau) = R_{ji}(\tau)$; então,

$$S_{ij}(-n) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(t) e^{+2\pi i n t} dt = S_{ij}^*(n) \quad (11.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ji}(-t) e^{2\pi i n t} dt \quad (11.46)$$

$$= - \int_{\infty}^{-\infty} R_{ji}(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ji}(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \quad (11.47)$$

$$= S_{j,i}(n). \quad (11.48)$$

Em resumo,

$$S_{i,i}^*(n) = S_{i,i}(n) \Rightarrow S_{i,i} \text{ é real} \quad (11.49)$$

$$S_{i,j}^*(n) = S_{j,i}(n) \Rightarrow S_{i,j} \text{ é complexo hermitiano.} \quad (11.50)$$

Note que o espectro cruzado, sendo uma quantidade complexa, pode ser escrito

$$S_{i,j}(n) = a(n) - ib(n), \quad (11.51)$$

$$S_{i,j}(-n) = a(n) + ib(n). \quad (11.52)$$

A simetria/anti-simetria exibida pelos espectros cruzados permite sempre definir os *espectros (cruzados) unilaterais*:

$$G_{i,j}(n) = 2S_{i,j}(n) = \text{Co}_{i,j}(n) - i\text{Qu}_{i,j}(n), \quad (11.53)$$

onde $\text{Co}_{i,j}(n)$ é o *co-espectro*, e $\text{Qu}_{i,j}(n)$ é o *espectro de quadratura*. A fase do espectro cruzado unilateral $G_{i,j}(n)$ é dada por

$$\varphi_{i,j}(n) = \arg G_{i,j}(n), \quad (11.54)$$

e a função de coerência entre as componentes $U_i(t)$ e $U_j(t)$ é dada por

$$\gamma_{i,j}^2(n) = \frac{|G_{i,j}(n)|^2}{G_{i,i}(n)G_{j,j}(n)} \quad (11.55)$$

(a coerência é sempre positiva). Um problema aparente com a função de coerência é que ela não é capaz de detectar diferenças de fase; para isso, seria preciso trabalhar com um “coeficiente de correlação espectral”, menos comum em textos de análise espectral, definido por

$$\varrho_{i,j}(n) = \frac{\text{Co}_{i,j}(n)}{\sqrt{G_{i,i}(n)G_{j,j}(n)}} \quad (11.56)$$

Questão: Você consegue identificar a diferença básica entre a função de coerência e o coeficiente de correlação espectral?

Questão: Prove que $\gamma_{i,j}^2 \leq 1$

Questão: Prove que $|\varrho_{i,j}| \leq 1$

Finalmente (chega!!!), “o momento cruzado de ordem 2 é igual à integral do co-espectro”:

$$\langle U_i(t)U_j(t+\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{i,j}(n)e^{2\pi in\tau} dn \quad (11.57)$$

$$= \int_{-\infty}^0 S_{i,j}(n)e^{2\pi in\tau} dn + \int_0^{\infty} S_{i,j}(n)e^{2\pi in\tau} dn \quad (11.58)$$

$$= - \int_{\infty}^0 S_{i,j}(-m)e^{-2\pi im\tau} dm + \int_0^{\infty} S_{i,j}(n)e^{2\pi in\tau} dn \quad (11.59)$$

$$= + \int_0^{\infty} S_{i,j}^*(m)e^{-2\pi im\tau} dm + \int_0^{\infty} S_{i,j}(n)e^{2\pi in\tau} dn. \quad (11.60)$$

Em $\tau = 0$,

$$\langle U_i(t)U_j(t) \rangle = R_{i,j}(0) = \int_0^{\infty} (S_{i,j}(n) + S_{i,j}^*(n)) dn = \int_0^{\infty} \text{Co}_{i,j}(n) dn. \quad (11.61)$$

11.2 – Espectros cruzados de processos estocásticos em 3 dimensões espaciais

Uma nova olhada na delta de Dirac: considere a relação de Fourier inversa

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) d^3 \mathbf{k}; \quad (11.62)$$

se $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k})$, então segue-se que

$$1 = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{k}, t) d^3 \mathbf{k}; \quad (11.63)$$

portanto (formalmente):

$$\delta(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}. \quad (11.64)$$

A função de correlação cruzada espacial é

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle. \quad (11.65)$$

Vamos usar isso para definir espectros cruzados:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) &\equiv \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \rangle. \end{aligned} \quad (11.66)$$

Prova:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} u_j(\xi, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \xi)} d^3 \xi \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int_{\mathbf{x}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{r} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \right] \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ &= \delta(\mathbf{0}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (11.67)$$

O tensor espectral Φ é hermitiano; note que

$$R_{ij}(-\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) \rangle = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle = R_{ji}(\mathbf{r}), \quad (11.68)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(-\mathbf{k}, t) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} = \Phi_{ij}^*(\mathbf{k}, t) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{ji}(-\mathbf{r}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ (s = -\mathbf{r} \Rightarrow) &= - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3} R_{ji}(\mathbf{s}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{s \in \mathbb{R}^3} R_{j,i}(s) e^{-i(k \cdot s)} d^3 s = \Phi_{j,i}(\mathbf{k}, t) \Rightarrow \\
\Phi_{i,j}(-\mathbf{k}, t) &= \Phi_{i,j}^*(\mathbf{k}, t) = \Phi_{j,i}(\mathbf{k}, t).
\end{aligned} \tag{11.69}$$

Além disso, uma relação semelhante a (11.61) vale para o espectro cruzado tri-dimensional. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
R_{i,j}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k} - \int_{-\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(-\mathbf{l}, t) e^{-i(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{l} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k} + \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}^*(\mathbf{l}, t) e^{-i(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{l} \right\}.
\end{aligned} \tag{11.70}$$

Portanto, em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$,

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle = R_{i,j}(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2} (\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) + \Phi_{i,j}^*(\mathbf{k}, t)) d^3 \mathbf{k} = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \text{Re} [\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t)] d^3 \mathbf{k}. \tag{11.71}$$

Combinando (11.70) com (11.71) acima, temos

$$\int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) d^3 \mathbf{k} = \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \text{Re} [\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t)] d^3 \mathbf{k} \Rightarrow \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \Im [\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t)] d^3 \mathbf{k} = 0. \tag{11.72}$$

Essa última equação levanta a curiosa possibilidade de que, se $\langle u_i u_j \rangle = 0$, o co-espectro cruzado $\text{Re} [\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t)]$ seja identicamente nulo, mas que o espectro de quadratura não: $\Im [\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t)] \neq 0$. No caso do espectro de quadratura entre w e um escalar na camada-limite atmosférica, eu *sei* que ele é identicamente nulo; seria interessante verificar a mesma coisa para os espectros de quadratura de u, w, u, v e v, w .

11.3 – Representação espectral de processos estocásticos

Suponha que $U(t)$ seja um processo estocástico estacionário, $u(t)$ seja uma realização, e que

$$\frac{1}{T} \int_0^T u^*(t) u(t + \tau) dt$$

convirja com probabilidade 1 para $R_{1,1}(\tau) = \langle U^*(t) U(t + \tau) \rangle$, ou seja: suponha que $U(t)$ seja ergódico. Do teorema de Bochner-Kinchine, segue-se que, em termos de uma integral de Fourier-Stieltjes,

$$R_{1,1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega). \tag{11.73}$$

Essa é uma maneira alternativa de definir o *espectro* $F(\omega)$ de $U(t)$.

Agora, se $U(t)$ é um processo estocástico estacionário com média zero, dados $\epsilon > 0, T > 0$, existem $n(\epsilon, T)$ variáveis aleatórias $\{U_1, \dots, U_n\}$ (atenção!!! os índices não significam componentes de velocidade!!!!) e números reais $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ tais que

$$\left\langle \left| U(t) - \sum_{k=1}^n U_k e^{i\omega_k t} \right|^2 \right\rangle < \epsilon, \tag{11.74}$$

o que significa convergência média quadrática. Usando a desigualdade de Chebyshev, torna-se imediato que

$$P[|U(t) - \sum_{k=1}^n U_k e^{i\omega_k t}| < \epsilon] > 1 - \eta, \forall t : |t| \leq T. \quad (11.75)$$

Neste sentido, escreve-se

$$U(t) \approx \sum_{k=1}^n U_k e^{i\omega_k t}, \quad (11.76)$$

isso é, $U(t)$ é dado por uma série de Fourier.

11.3.1 – De uma vez só:

Para melhorar a aproximação, aumente n e diminua $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k$. A soma $\sum U_k$ em $\Delta\omega$ de variáveis não-correlacionadas aos pares converge para uma variável $Z(\Delta\omega)$; então,

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega). \quad (11.77)$$

11.3.2 – Aos poucos

Defina um intervalo

$$a = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = b$$

e escreva

$$U(t) = \sum_k U_k e^{i\omega_k t}. \quad (11.78)$$

Divida agora os ω 's em intervalos $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$. Para cada intervalo i produza $\omega_k = \omega_{i,j}$; cada intervalo i agora possui n_i frequências. A equação (11.78) torna-se

$$U(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} U_{i,j} e^{i\omega_{i,j} t}. \quad (11.79)$$

Agora, à medida em que n cresce e $\Delta\omega_i \rightarrow 0$, escolha um ω'_i representativo, e faça

$$\sum_{j=1}^{n_i} U_{i,j} e^{i\omega_{i,j} t} \approx \left[\sum_{j=1}^{n_i} U_{i,j} \right] e^{i\omega'_i t}, \quad (11.80)$$

de forma que a soma das variáveis aleatórias $U_{i,j}$ no intervalo i de frequências se aproxima de uma variável aleatória $Z(\Delta\omega_i)$:

$$U(t) \approx \sum_{i=1}^m e^{i\omega'_i t} Z(\Delta\omega_i), \quad (11.81)$$

que é o mesmo que

$$U(t) \approx \sum_{k=1}^n e^{i\omega'_k t} Z(\Delta\omega_k). \quad (11.82)$$

Das propriedades de U tem-se que

$$\langle Z(\Delta\omega_k) \rangle = 0, \quad (11.83)$$

$$\langle Z^*(\Delta\omega_i)Z(\Delta\omega_j) \rangle = 0, \quad (11.84)$$

$$Z(\Delta\omega_i + \Delta\omega_{i+1}) = Z(\Delta\omega_i) + Z(\Delta\omega_{i+1}). \quad (11.85)$$

(Se $\Delta\omega_i$ e $\Delta\omega_j$ são intervalos disjuntos).

Alternativamente, construa agora a função

$$Z(\omega) = Z\{(-\infty, \omega]\}; \quad (11.86)$$

de fato, segundo (Yaglom, 1987, p. 99), Z pode ser construída como uma *random set function*, i.e., uma função definida sobre conjuntos A_ω de tal forma que

$$Z(A_\omega \cup B_\omega) = Z(A_\omega) + Z(B_\omega) \text{ quando } A_\omega \cap B_\omega = \emptyset \quad (11.87)$$

(essa é a condição de aditividade). Claramente, a função $Z(\omega)$ é crescente; a rigor, ela introduz uma *medida aleatória* e agora

$$U(t) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty \\ \max |\Delta\omega_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n e^{i\omega'_k t} Z(\Delta\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (11.88)$$

Alternativamente,

$$U(t) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \left\{ \lim_{\max_k |\Delta\omega_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\omega'_k t} [Z(\omega_k) - Z(\omega_{k-1})] \right\}, \quad (11.89)$$

onde a função $Z(\omega)$ satisfaz

$$\langle Z(\omega) \rangle = 0, \quad \forall \omega, \quad (11.90)$$

$$\langle (Z^*(\omega_1 + \Delta\omega_1) - Z^*(\omega_1))(Z(\omega_2 + \Delta\omega_2) - Z(\omega_2)) \rangle = 0. \quad (11.91)$$

Exercícios

11.1 Mostre que

$$\int_{n=-\infty}^{+\infty} \Im[S_{i,j}(n)] dn = 0$$

12

Aplicações da Teoria Espectral

Hoje, 2016-05-30T17:04:05, será necessário reescrever algumas equações e portanto deixar o texto redundante. Ao longo do tempo, eu tenho alguma esperança de melhorar muito isso. A transformada de Fourier de qualquer componente u_i das flutuações de velocidade é

$$\widehat{u}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} u_i(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}.$$

Conforme já vimos em (11.66), temos as seguintes relações (sem prova; já foram demonstradas lá):

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \rangle, \quad (12.1)$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (12.2)$$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}, \quad (12.3)$$

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k}. \quad (12.4)$$

12.1 – A função de transferência para separação espacial de sensores

Sabemos que o espectro cruzado projetado sobre o eixo k_1 é

$$F_{ij}(k_1) = \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3) dk_3 dk_2. \quad (12.5)$$

Em princípio, quando medimos uma covariância $\langle u_i u_j \rangle$ que representa um fluxo, etc., desejamos fazê-lo em *um ponto do espaço*. Desejamos, portanto (ver (12.2),

$$\langle u_i u_j \rangle = R_{ij}(0). \quad (12.6)$$

Infelizmente, não podemos instalar todos os nossos sensores no mesmo lugar. Precisamos muitas vezes deslocar os sensores que medem u_i e u_j entre si de uma distância $\mathbf{r} \neq 0$. (lembre-se do truque de usar u_4, u_5 , etc., para indicar diversos escalares). Portanto, o que *efetivamente* medimos é uma outra covariância, que denotaremos por $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle$:

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = R_{ij}(\mathbf{r}). \quad (12.7)$$

Lembremo-nos de que a verdadeira covariância pode ser obtida a partir do espectro cruzado via

$$\langle u_i u_j \rangle = R_{ij}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{ij}(k_1) dk_1. \quad (12.8)$$

Entretanto, lembremo-nos também de que o que *realmente* medimos foi

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = R_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k} = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{ij}(k_1) dk_1. \quad (12.9)$$

Correndo o risco de sermos repetitivos (o que podemos mudar em uma versão mais refinada deste texto): o que nos está diretamente disponível são a covariância *medida* $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle$, assim como o espectro cruzado *medido* $\tilde{F}_{ij}(k_1)$. Nosso problema é, utilizando um modelo para $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$, *recuperar* $F_{ij}(k_1)$ e, conseqüentemente, $\langle u_i u_j \rangle$. Claramente, devemos considerar um espectro cruzado tridimensional “medido” (embora espectros tridimensionais nunca sejam medidos...) $\tilde{\Phi}_{ij}(\mathbf{k})$, dado por

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \Phi_{ij} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (12.10)$$

Com isso, recuperamos as equações em (12.9) de acordo com

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ij}(k_1) &= \int_{k_2} \int_{k_3} \tilde{\Phi}_{ij}(k_1, k_2, k_3) dk_3 dk_2 \\ &= \int_{k_2} \int_{k_3} \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} dk_3 dk_2. \end{aligned} \quad (12.11)$$

As equações (12.5) e (12.11) mostram com clareza que, se $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ existe, então tanto $F_{ij}(k_1)$ quando $\tilde{F}_{ij}(k_1)$ existem e que ambas são, conforme indicado na notação, funções que dependem apenas de k_1 . Conseqüentemente, podemos definir uma “função de transferência” (na falta de um nome melhor; também é preciso ver se estamos realmente tratando da função de transferência, ou de seu inverso. Mas isso fica para depois) $T_{\text{sep}}(k_1)$, de tal forma que

$$F_{ij}(k_1) = T_{\text{sep}}(k_1) \tilde{F}_{ij}(k_1). \quad (12.12)$$

É evidente que, se tivermos $\Phi(\mathbf{k})$, temos como calcular $T_{\text{sep}}(k_1)$. É importante observar que é intrínseco à natureza do problema que $T_{\text{sep}}(k_1)$ é um número complexo. A outra questão (igualmente importante!) é a seguinte: sabemos que os espectros cruzados são hermitianos. O que podemos dizer sobre isso a respeito de $T_{\text{sep}}(k_1)$? A resposta é que T é hermitiano também! Começamos com o fato de que F e \tilde{F} são hermitianos:

$$\begin{aligned} F(-k_1) &= F^*(k_1), \\ \tilde{F}(-k_1) &= \tilde{F}^*(k_1). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} F(k_1) &= T(k_1) \tilde{F}(k_1), \\ T(k_1) &= \frac{F(k_1)}{\tilde{F}(k_1)} = \frac{F(k_1) \tilde{F}^*(k_1)}{|\tilde{F}(k_1)|^2} = \frac{F(k_1) \tilde{F}(k_1)}{|\tilde{F}(k_1)|^2}. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$T(-k_1) = \frac{F(-k_1) \tilde{F}(k_1)}{|\tilde{F}(-k_1)|^2} = \frac{F^*(k_1) \tilde{F}(k_1)}{|\tilde{F}(k_1)|^2} = T^*(k_1) \blacksquare$$

12.2 – A função de transferência para atenuação de sinal

Tanto as médias ao longo do caminho de um sensor (um anemômetro sônico ou um sensor infra-vermelho, ultra-violeta, etc.) quanto os efeitos de resposta de sensores podem ser escritos, de maneira geral, como uma convolução no espaço (ou no tempo). Isso precisa ser elaborado um pouco.

Por exemplo, considere a abordagem de [Kaimal et al. \(1968\)](#) para a média ao longo do caminho de um anemômetro sônico. Suponha que o vetor unitário ao longo do caminho seja \mathbf{p} , e que o caminho total seja $\mathbf{l} = \ell \mathbf{p}$. Agora, a velocidade “medida” será

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\ell. \quad (12.13)$$

Faça

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\ell \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x} + \mathbf{r}])} d^3 \mathbf{k} d\ell \\ &= \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} e^{+i(\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x} + \mathbf{r}])} d\ell \right\} d^3 \mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\ell \right\} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{\text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}/2)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})/2} \right\} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Neste caso, vemos claramente que a transformada de Fourier de \tilde{u}_i é

$$\hat{\tilde{u}}_i(\mathbf{k}) = \hat{u}_i(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{k}),$$

com

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \frac{\text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}/2)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})/2}.$$

Segue-se (sem demonstração, mas isso pode ser feito com calma depois) que o espectro cruzado aparente ou medido $\tilde{\Phi}(\mathbf{k})$, para duas medições \tilde{u}_i, \tilde{u}_j , sobre o mesmo caminho \mathbf{l} , deve ser

$$\tilde{\Phi}_{i,j}(\mathbf{k}) = \left[\frac{\text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}/2)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})/2} \right]^2 \Phi_{i,j}(\mathbf{k}).$$

É interessante notar que a simetria da média no espaço não introduz efeitos de fase, e que o espectro cruzado amortecido $\tilde{\Phi}_{i,j}$ é dado pelo produto do espectro verdadeiro por uma função de transferência tridimensional simétrica em \mathbf{k} (entre colchetes, acima):

$$\tau_{i,j}(\mathbf{k}) = \left[\frac{\text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}/2)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})/2} \right]^2.$$

Este talvez seja o único caso desta análise em que a função de transferência seja genuinamente real.

É claro que também teremos um espectro cruzado “aparente” ou “medido” unidimensional, dado como sempre por

$$\tilde{F}_{i,j}(k_1) = \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}/2)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})/2} \right]^2 \Phi_{i,j}(k_1, k_2, k_3) dk_3 dk_2. \quad (12.14)$$

Compare a expressão acima com (12.11).

Da mesma maneira que fizemos em (12.12), portanto, podemos *definir* (não custa insistir: sem uma formulação analítica (ou pelo menos numérica) para $\Phi_{i,j}(\mathbf{k})$, não podemos ainda efetivamente *calcular*) uma função de transferência para médias sobre o caminho, utilizando agora (12.14):

$$F_{i,j}(k_1) = T_{\text{path}}(k_1) \tilde{F}_{i,j}(k_1). \quad (12.15)$$

Note também que, embora $\tau_{i,j}(\mathbf{k})$ seja simétrica em \mathbf{k} e real, $T_{\text{path}}(k_1)$ continua a ser complexa e hermitiana! Isso continua a ser uma consequência de dedução análoga para T_{sep} no final da seção acima, uma vez que tanto $F_{i,j}(k_1)$ quanto $\tilde{F}_{i,j}(k_1)$ ainda são, igualmente, complexos e hermitianos.

12.3 – Adicionando complexidade

Suponha agora separação espacial e média ao longo de um caminho ocorrendo simultaneamente:

$$\tilde{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\ell, \quad (12.16)$$

$$\tilde{u}_j(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}+\mathbf{d}-(\ell/2)\mathbf{q}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+\mathbf{d}+(\ell/2)\mathbf{q}} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{d} + \mathbf{r}) d\ell \quad (12.17)$$

$$\langle \widehat{\tilde{u}}_i^* \widehat{\tilde{u}}_j \rangle(\mathbf{k}) = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{\ell} \int_{\mathbf{r}=\mathbf{x}-(\ell/2)\mathbf{p}}^{\mathbf{r}=\mathbf{x}+(\ell/2)\mathbf{p}} u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\ell \right] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \right\}$$

13

A Teoria de Kolmogorov

A teoria de Kolmogorov de 1941 de turbulência é, com toda a justiça, celebrada como talvez a mais importante realização em turbulência até o presente. Em sua edição russa original, ela foi apresentada em um artigo de 4 páginas (Kolmogorov, 1941); em uma tradução recente para o inglês, ela ocupa apenas 6 (Kolmogorov, 1991). Neste capítulo, nós apresentamos a teoria em uma notação consistente com o restante deste livro, bem como alguns resultados que podem ser obtidos a partir dela, tais como uma expressão para a taxa de dissipação da energia cinética da turbulência em turbulência isotrópica.

13.1 – Alternativas de descrição da estrutura estocástica da turbulência

Kolmogorov (1941, 1991) “evitou” a decomposição de Reynolds

$$U = \langle U \rangle + u, \quad (13.1)$$

trabalhando em seu lugar com as diferenças de velocidade entre pontos vizinhos:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}) &= U(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - U(\mathbf{x}) \\ &= \langle U(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle - \langle U(\mathbf{x}) \rangle + u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x}) \\ &\approx \underbrace{\mathbf{r} \cdot \nabla \langle U \rangle}_{\langle W(\mathbf{r}) \rangle} + \underbrace{u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})}_{w(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (13.2)$$

O desenvolvimento acima mostra que as diferenças de velocidade entre dois pontos também obedecem a uma decomposição de Reynolds. A hipótese de *homogeneidade global* é que U , ou pelo menos u , é um campo homogêneo (no sentido estocástico); então, necessariamente,

$$\langle w \rangle = \langle u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (13.3)$$

Uma hipótese mais fraca, denominada por Kolmogorov de *homogeneidade local*, é que apenas w é homogêneo em \mathbf{r} , i.e.: que u é um campo com incrementos homogêneos. Nesse caso, $\langle w \rangle$ não é necessariamente nulo.

É importante reforçar que, em seu trabalho original, Kolmogorov trabalhou com U e W , e não com as flutuações. Como já vimos, especificar que apenas as flutuações u são um processo homogêneo permite supor um campo médio $\langle U \rangle$ determinístico que pode variar linearmente no espaço, o que nos aproxima, embora apenas um pouco mais, de situações mais realistas.

Em seguida, Kolmogorov especifica (*i.e.*, supõe) *isotropia local*: no nosso contexto, em que estamos trabalhando com as flutuações, isso significa supor que todos os momentos de w são invariantes debaixo de translações (em \mathbf{r}), rotações e reflexões. No \mathbb{R}^3 , o conjunto de todas as rotações e translações possíveis é formado pelas transformações ortogonais C , com $\det C = \pm 1$ (o determinante de C é ± 1). O caso $\det C = +1$ corresponde a uma rotação, e o caso $\det C = -1$ corresponde à reflexão de pelo menos um dos eixos coordenados.

Voltando à questão central agora, a invariância da média de w implica

$$C \cdot \langle w \rangle = \langle w \rangle$$

Suponha entretanto que $\langle C \rangle$ seja, em particular, a reflexão em torno da origem; então

$$C \cdot \langle w \rangle = -\langle w \rangle$$

e

$$\langle w \rangle = -\langle w \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle w \rangle = 0.$$

Concluimos que $\langle w \rangle = 0$ segue-se necessariamente da hipótese de isotropia. Naturalmente, se preferirmos definir isotropia em u , obteremos um resultado análogo, mas isso já era consequência da decomposição de Reynolds. Por outro lado, se impusermos (com mais força) a isotropia de U , obteremos o resultado mais restritivo $\langle U \rangle = 0$.

Conforme mencionado acima, neste texto nós preferimos trabalhar com as estatísticas das flutuações. Em um escoamento globalmente homogêneo em u , o tensor de covariâncias é definido por

$$R_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (13.4)$$

Por outro lado, o tensor função de estrutura de um campo de velocidades localmente homogêneo é definido por

$$D_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \langle (u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_i(\mathbf{x})) (u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_j(\mathbf{x})) \rangle = \langle w_i w_j \rangle. \quad (13.5)$$

Agora, se a turbulência for globalmente isotrópica, deveremos ter

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij}(r), \quad (13.6)$$

onde

$$r^2 = r_k r_k; \quad (13.7)$$

da mesma forma, se a turbulência for localmente isotrópica,

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}(r). \quad (13.8)$$

É importante notar que, até agora, a região de validade das hipóteses de homogeneidade e de isotropia ainda não tinha sido comentada por Kolmogorov. No § 2, lemos

The hypothesis of isotropy in the sense of Taylor is experimentally quite well confirmed in the case of turbulence caused by passing of a flow through a grid (cf. (3)). In the majority of other cases interesting from the

practical point of view it may be considered only as a rather far approximation of reality even for small domains G and very large Reynolds numbers.

On the other hand we think it rather likely that in an arbitrary turbulent flow with a sufficiently large Reynolds number

$$R = LU/\nu$$

the hypothesis of local isotropy is realized with good approximation in sufficiently small domains G of the four-dimensional space (x_1, x_2, x_3, t) not lying near the boundary of the flow or its other singularities. By a ‘small domain’ we mean here a domain whose linear dimensions are small in comparison with L and time dimensions – in comparison with

$$T = U/L.$$

It is natural that in so general and somewhat indefinite a formulation the just advanced proposition cannot be rigorously proved.

Em outras palavras, dada a escala integral do escoamento ℓ que nós definimos no capítulo 4, a hipótese de homogeneidade e isotropia local só deve valer para $r \ll \ell$.

Antes de prosseguirmos, vamos revisitar as relações entre os tensores função de estrutura, função de correlação e espectro:

$$D = \langle (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \rangle \quad (13.9)$$

$$R = \langle \mathbf{u}\dot{\mathbf{u}} \rangle \quad (13.10)$$

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}. \quad (13.11)$$

Nas equações acima, \mathbf{u} significa a flutuação de velocidade no ponto \mathbf{x} , e $\dot{\mathbf{u}}$ significa a flutuação de velocidade no ponto $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$. Note ainda que é possível relacionarmos as 3 estatísticas, D , R e Φ , se (e somente se) a turbulência além de localmente homogênea – o que garante a existência de D – também for globalmente homogênea – o que garante que R e Φ existem. Mas

$$D = \langle \dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}\dot{\mathbf{u}} \rangle - \langle \dot{\mathbf{u}}\mathbf{u} \rangle; \quad (13.12)$$

em turbulência homogênea,

$$\langle \dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle = R(0); \quad (13.13)$$

finalmente,

$$R(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}(0)\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{u}(-\mathbf{r})\mathbf{u}(0) \rangle = \langle \mathbf{u}(0)\mathbf{u}(-\mathbf{r}) \rangle^T = R^T(-\mathbf{r}). \quad (13.14)$$

Portanto, a relação entre os tensores função de estrutura e de correlação é

$$D(\mathbf{r}) = 2R(0) - R(\mathbf{r}) - R^T(-\mathbf{r}), \quad (13.15)$$

ou seja: conhecendo-se D tem-se R (e consequentemente Φ), e vice-versa.

Considere agora o tensor

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r})u_j(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle u_j(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \rangle \\ &= R_{ji}(-\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (13.16)$$

A “álgebra” da turbulência homogênea [Deissler \(1998\)](#); [Hill \(2002\)](#) pode ser obtida a partir de

$$\xi_i = x_i + r_i, \quad (13.17)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial r_i}. \quad (13.18)$$

13.2 – Isotropia das funções R_{ij} e D_{ij}

O material desta seção segue a exposição de [Batchelor \(1993\)](#). Dado \mathbf{R} , é possível contrai-lo segundo 2 direções dadas pelos vetores unitários \mathbf{a} e \mathbf{b} , produzindo um escalar R :

$$R = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}, \quad (13.19)$$

ou, em notação indicial,

$$R = a_i R_{ij} b_j. \quad (13.20)$$

Geometricamente, se a turbulência for isotrópica então R só deve depender de invariantes geométricos sob rotação. A figura 13.1 ilustra essa situação.

Os invariantes envolvendo \mathbf{a} , \mathbf{b} e o vetor deslocamento \mathbf{r} entre dois pontos são

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = \delta_{ij} a_i b_j, \quad (13.21)$$

$$|\mathbf{r}| = r_k r_k = r^2, \quad (13.22)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = a_i r_i, \quad (13.23)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = b_j r_j, \quad (13.24)$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{r} = \epsilon_{ijk} a_i b_j r_k. \quad (13.25)$$

Comparando (13.20) com os invariantes acima, conclui-se que R_{ij} deve ser da forma

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = F(r)\delta_{ij} + G(r)r_i r_j + H(r)\epsilon_{ijk} r_k, \quad (13.26)$$

onde $r = |\mathbf{r}|$. Mas em condições isotrópicas, R deve ser um invariante debaixo de uma reflexão, ou seja, R deve permanecer o mesmo se trocarmos \mathbf{r} por $-\mathbf{r}$. Note que, então,

$$R_{ij}(-\mathbf{r}) = F(r)\delta_{ij} + G(r)r_i r_j - H(r)\epsilon_{ijk} r_k, \quad (13.27)$$

de forma que, para garantirmos isotropia, é necessário que $H(r) \equiv 0$.

Agora, tendo obtido (13.26), note que toda turbulência isotrópica também é homogênea, já que a homogeneidade é a hipótese necessária para que o tensor \mathbf{R} só dependa de $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$, e que portanto

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = \frac{\partial \langle u_i(x_k)u_j(x_k + r_k) \rangle}{\partial r_j} = \left\langle u_i(x) \frac{\partial u_j(\xi_k)}{\partial \xi_j} \right\rangle = 0, \quad (13.28)$$

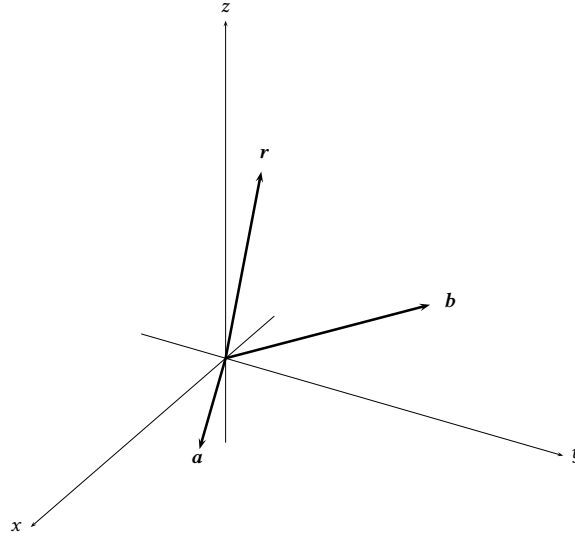


Figura 13.1: Invariantes geométricos em turbulência isotrópica

(devido à equação da continuidade, (9.3), e à regra de derivação (13.18), donde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} &= \frac{\partial F}{\partial r_j} \frac{\partial r}{\partial r_j} \delta_{ij} + G(r) r_i \frac{\partial r_j}{\partial r_j} + G(r) r_j \frac{\partial r_i}{\partial r_j} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_j} r_i r_j \\
 &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{r_j}{r} \delta_{ij} + 3r_i G(r) + r_j G(r) \delta_{ij} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{r_j}{r} r_i r_j \\
 &= r_i \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4r_i G(r) + r_i \frac{r^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \\
 &= r_i \left[\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4G(r) + r \frac{\partial G}{\partial r} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{13.29}$$

onde usamos

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}, \tag{13.30}$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r}. \tag{13.31}$$

É usual definir funções de correlação longitudinal $f(r)$ e transversal $g(r)$ em turbulência isotrópica em termos das flutuações de velocidade em dois pontos separados por uma distância r ao longo da linha de separação (\mathbf{u}_{\parallel}) e transversalmente a ela (\mathbf{u}_{\perp}):

$$f(r) \equiv \frac{1}{\langle u_{\parallel}(\mathbf{x}) u_{\parallel}(\mathbf{x}) \rangle} \langle u_{\parallel}(\mathbf{x}) u_{\parallel}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \tag{13.32}$$

$$g(r) \equiv \frac{1}{\langle u_{\perp}(\mathbf{x}) u_{\perp}(\mathbf{x}) \rangle} \langle u_{\perp}(\mathbf{x}) u_{\perp}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \tag{13.33}$$

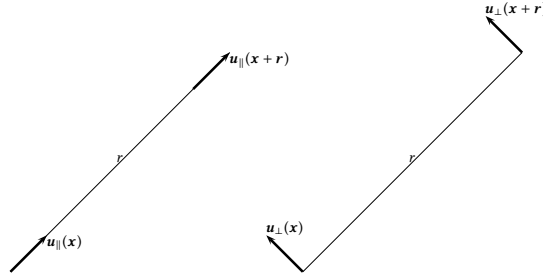


Figura 13.2: funções de correlação longitudinal e transversal

(13.34)

onde $u_{||} = |\mathbf{u}_{||}|$ e $u_{\perp} = |\mathbf{u}_{\perp}|$. Agora oriente \mathbf{r} segundo x_1 , \mathbf{u}_{\perp} segundo x_2 , e faça $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ e $\xi = (r_1, 0, 0)$; então,

$$R_{1,1}(r) = G(r)r_1^2 + F(r) = \langle u'_1 u'_1 \rangle f(r), \quad (13.35)$$

$$R_{2,2}(r) = G(r)r_2^2 + F(r) = F(r) = \langle u'_2 u'_2 \rangle g(r). \quad (13.36)$$

Como em turbulência isotrópica $\langle u'_{(i)} u'_{(i)} \rangle \equiv \sigma^2$ é independente de (i) , segue-se o sistema de equações

$$r^2 F + G = \sigma^2 f, \quad (13.37)$$

$$G = \sigma^2 g, \quad (13.38)$$

isso é: podemos expressar (F, G) em função de (f, g) e vice-versa. Obtém-se então facilmente a expressão para o tensor de correlação isotrópico

$$R_{ij} = \sigma^2 \left(\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r) \delta_{ij} \right). \quad (13.39)$$

Finalmente, aplicando (13.29), obtém-se

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r f'(r), \quad (13.40)$$

e isso mostra que em turbulência isotrópica e incompressível $R_{ij}(\mathbf{r})$ depende de uma única função escalar $f(r)$.

Historicamente, a microescala de Taylor λ é introduzida em associação à função coeficiente de autocorrelação longitudinal da turbulência isotrópica, $f(r)$:

$$\frac{d^2 f(0)}{dr^2} \equiv -\frac{1}{\lambda^2} \quad (13.41)$$

(note que essa definição é compatível com nossa definição anterior de microescala de Taylor).

Finalmente, um resultado importante:

$$R_{i,i} = \sigma^2 \left(\frac{f - g}{r^2} r_i r_i + g \delta_{ii} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 ((f - g) + 3g) \\
&= \sigma^2 (f + 2g) \\
&= \sigma^2 \left(f + 2 \left(f + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \right) \right) \\
&= \sigma^2 \left(3f + r \frac{df}{dr} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 f(r) \right). \tag{13.42}
\end{aligned}$$

Agora resta considerar

$$\begin{aligned}
\nabla^2 R_{i,i} &= \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \left(3f + r \frac{df}{dr} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left(3 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \frac{\partial r}{\partial r_k} \frac{df}{dr} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left(3 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left(4 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right). \tag{13.43}
\end{aligned}$$

Antes de prosseguir, estabelecemos o resultado auxiliar

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{r_k}{r} = \frac{r \delta_{kk} - r_k \frac{r_k}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r}. \tag{13.44}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 R_{i,i} &= \left(4 \frac{df}{dr} \frac{2}{r} + 4 \frac{r_k}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \frac{r_k}{r} + \frac{d^2 f}{dr^2} \delta_{kk} + r_k \frac{d^3 f}{dr^3} \frac{r_k}{r} \right) \\
&= \left(4 \frac{d^2 f}{dr^2} + 3 \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r} \frac{df}{dr} + r \frac{d^3 f}{dr^3} \right). \tag{13.45}
\end{aligned}$$

Observando agora que, pela regra de l'Hôpital,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dr}}{r} = \frac{\frac{d^2 f}{dr^2}}{1} = \frac{d^2 f}{dr^2}, \tag{13.46}$$

conclui-se que

$$\nabla^2 R_{i,i}(0) = 15 \frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{15}{\lambda^2}. \tag{13.47}$$

Isso tem grande importância, já que é possível provar os seguintes fatos para turbulência isotrópica:

$$\langle \omega'_i(\mathbf{x}) \omega'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -\nabla^2 R_{i,i}(\mathbf{r}), \tag{13.48}$$

$$\epsilon_e = \nu \langle \omega'_i \omega'_i \rangle = -\nu \nabla^2 R_{i,i}(0) = \frac{15\nu \langle u'u' \rangle}{\lambda^2} = 15\nu \left\langle \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right\rangle. \tag{13.49}$$

O último termo à direita de (13.49) é diretamente mensurável em uma turbulência real, embora exija uma frequência de medição altíssima (**por quê?**), sendo algumas vezes utilizado para “medir” a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Aliás, isso dá um paper fenomenal.

13.3 – As hipóteses de similaridade de Kolmogorov

Seja então $D_{ij}(r_k) = D_{ij}(r)$ em turbulência localmente isotrópica.

Considere a taxa *média* de dissipação de energia cinética turbulenta; conforme vimos no capítulo 6, em escoamentos globalmente homogêneos,

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right\rangle, \quad (13.50)$$

sendo que essa relação vale com bom grau de aproximação mesmo quando o escoamento não for globalmente homogêneo.

No capítulo 4, nós introduzimos as macro (ℓ) e microescalas da turbulência (η_u, \check{u}) dadas pelas equações (4.1)–(4.3).

A obtenção das microescalas é parte da 1ª hipótese de similaridade de Kolmogorov. Ele prevê então que (por argumentos meramente dimensionais)

$$D(r) = (\check{u})^2 \beta \left(\frac{r}{\eta} \right), \quad (13.51)$$

onde β é uma função *adimensional* e *universal* da variável adimensional r/η . Note a consistência dimensional de (13.51). O assunto torna-se mais interessante ainda para uma particular situação assintótica: $r \gg \eta$. Nesse caso, Kolmogorov supõe:

1. Que β pode ser escrita como uma função potência.
2. Que $D(r)$ torna-se independente de ν .

Então:

$$D(r) = C (\nu \epsilon)^{1/2} \left(\frac{r}{\nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}} \right)^n. \quad (13.52)$$

Observe como, para que $D(r)$ possa ser independente de ν , é indispensável que β seja da forma $(r/\eta)^n$. Prosseguindo,

$$D(r) = C \nu^{1/2-3n/4} \epsilon^{1/2+n/4} r^n. \quad (13.53)$$

Forçando o expoente de ν a ser nulo, obtém-se finalmente a celebrada relação de Kolmogorov para a faixa inercial,

$$D(r) = C \epsilon^{2/3} r^{2/3}. \quad (13.54)$$

Essa relação também pode ser expressa em termos espectrais:

$$D_{i,i}(r) = 2 (R_{i,i}(0) - R_{i,i}(r)), \quad (13.55)$$

$$R_{i,i}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} S_{i,i}(k) dk \quad (13.56)$$

$$R_{i,i}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{i,i}(k) dk \Rightarrow \quad (13.57)$$

$$D_{i,i}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ikr}) S_{i,i}(k) dk \quad (13.58)$$

Suponha agora

$$S_{i,i} = B \epsilon_e^{2/3} |k|^{-m}; \quad (13.59)$$

(a dependência explícita de ϵ_e é uma consequência da teoria de Kolmogorov, e pode ser facilmente justificada *a posteriori*; sua inclusão é apenas para facilitar a álgebra subsequente) a substituição direta de uma função potência como essa em (13.57) produz uma integral *divergente* (Frisch, 1995, p.54), enquanto que sua substituição em (13.58) produz

$$D_{i,i}(r) = 2B \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ikr}) |k|^{-m} dk; \quad (13.60)$$

fazendo $u = kr$,

$$D_{i,i}(r) = 2B|r|^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{iu}) |u|^{-m} |r| dk, \quad (13.61)$$

donde se conclui que

$$D(r) = BA_m |r|^{m-1} \quad (13.62)$$

com

$$A_m = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{iu}) |u|^{-m} du. \quad (13.63)$$

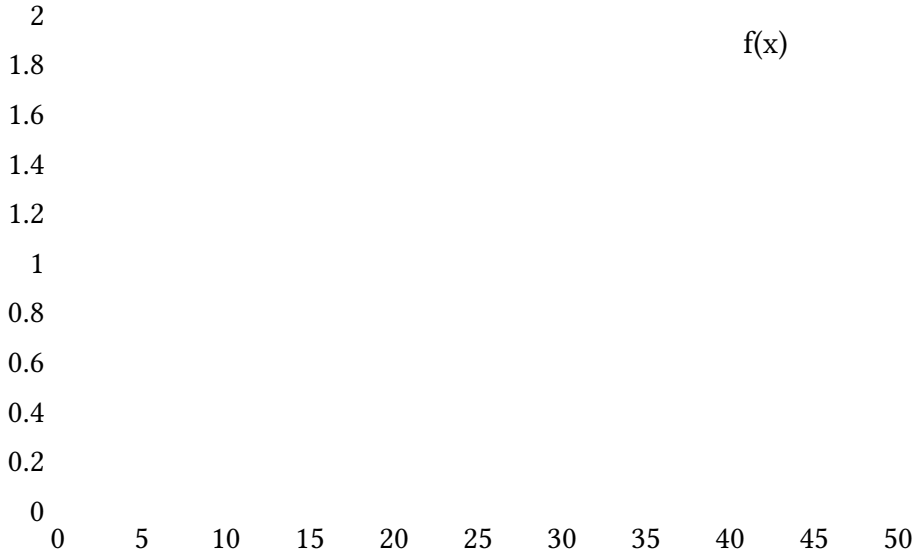
Essa última integral, ao contrário do que acontece com a integral do espectro, é *convergente* para uma certa faixa de valores de m . Para ver como, basta usar a fórmula de Euler e obter (Gradshteyn e Ryzhik, 1980, p. 447, §3.823)

$$A_m = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos(u)) u^{-m} du = \frac{16}{2^m} \int_0^{\infty} v^{-m} \sin^2 v dv = -4\Gamma(1-m) \cos \frac{(1-m)\pi}{2}, \quad (13.64)$$

que converge para $m \in (1, 3)$. Agora, se $m - 1 = 2/3$, $m = 5/3$, e comparando (13.54) com (13.59),

$$-4\Gamma(1-m) \cos \left(\frac{1-m}{2} \pi \right) B = C \quad (13.65)$$

e (13.59) com $m = 5/3$ dá a mesma lei de Kolmogorov para a faixa inercial para o comportamento do *espectro*.



Em resumo, nós concluímos que se $D(r)$ é *qualquer* um dos componentes da diagonal do tensor de estrutura $D(\mathbf{r})$ sobre *qualquer* direção \mathbf{n} do espaço,

$$r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \quad (13.66)$$

e existe uma região onde $r \gg \eta$ na qual D se comporta como uma função potência dada por 13.54, cuja contrapartida espectral é (13.59) com $m = 5/3$.

14

A Intermitência da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência

2014-11-16T11:10:20 Todos já receberam o pdf do Jiménez? Já leram?

2014-11-16T10:50:50 Neste momento, este será um capítulo bem pequeno, e muito baseado no livro de Uriel Frisch ([Frisch, 1995](#)). Na sua maior parte, vamos ler e digerir o Capítulo 8.

2014-11-16T11:01:03 Vamos começar deduzindo a previsão geral da Teoria de Kolmogorov para a função estrutura de ordem p ,

$$D_p(r) \equiv \left\langle [\mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}_{\parallel}(\mathbf{x})]^p \right\rangle.$$

Por hipótese, na faixa inercial,

$$\begin{aligned} D_p(r) &= C_p \langle \mathcal{E}_e \rangle^a r^b \\ L^p T^{-p} &= [L^2 T^{-3}]^a [L]^b \\ &= L^{2a+b} T^{-3a} \\ p &= 3a, \\ a &= p/3; \\ p &= 2a + b; \\ p &= 2p/3 + b; \\ b &= p/3. \end{aligned}$$

Segue-se que a previsão da Teoria de Kolmogorov para os momentos de *qualquer* ordem é extraordinariamente simples:

$$D_p(r) = C_p \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} r^{p/3}. \quad (14.1)$$

Para os momentos de mais alta ordem, (14.1) não é obedecida: veja a figura 14.1

Landau comentou que os C_p 's não poderiam ser constantes universais. O argumento é criticamente dependente de *promediação*! Existem várias maneiras de definir \mathcal{E}_{et} e $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$. Frisch propõe um *super-ensemble*. Se (14.1) vale para cada realização i e vale também para o *super-ensemble*, dadas as médias

$$\begin{aligned} \overline{D_p(r)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_p^i(r), \\ \overline{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^i, \end{aligned}$$

Uma figura parecida com a do Jiménez

Figura 14.1: Uma figura parecida com a do Jiménez.

Se C_p é universal então devem valer ao mesmo tempo:

$$\begin{aligned} D_p^i(r) &= C_p \left(\langle \mathcal{E}_{et} \rangle^i \right)^{p/3} r^{p/3}, \\ \overline{D_p(r)} &= C_p \overline{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3}} r^{p/3}. \end{aligned}$$

Tirando a média da primeira acima, e igualando à segunda,

$$\begin{aligned} C_p \overline{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3}} r^{p/3} &= C_p \left(\overline{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{p/3} r^{p/3}, \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\langle \mathcal{E}_{et} \rangle^i \right)^{p/3} &= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^i \right)^{p/3}. \end{aligned}$$

Mas as duas só são iguais para $p = 3$, e portanto, pelo argumento, C_p não é universal.

Como Frisch, podemos começar pelo comentário de Landau:

It might be thought that the possibility exists in principle of obtaining a universal formula, applicable to any turbulent flow, which should give $D_{uu}(r)$ for all distances r that are small compared to ℓ . In fact, however, there can be no such formula, as we see from the following argument. The instantaneous value of $\delta u_{\parallel}(r)^2$ might in principle be expressed as a universal function of the dissipation \mathcal{E} *at the instant considered*. When we average these expressions, however, an important part will be played by the manner of variation of \mathcal{E} over times of the order of the periods of the large eddies (with size $\sim \ell$), and this variation is different for different flows. The result of the averaging therefore cannot be universal.

A teoria de Kolmogorov de 1962 modifica a teoria de 1941 da seguinte forma. Primeiramente, define-se uma taxa *local* de dissipação. Na nossa notação,

$$\mathcal{E}_r(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{|\mathbf{y}| < r} \mathcal{E}_{et}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) d^3 \mathbf{y}.$$

O valor esperado de \mathcal{E}_r é conhecido!

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_r \rangle &= \left\langle \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{|\mathbf{y}| < r} \mathcal{E}_{et}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) d^3 \mathbf{y} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(4/3)\pi r^3} \int_{|\mathbf{y}| < r} \langle \mathcal{E}_{et}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \rangle d^3 \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$= \langle \mathcal{E}_{et} \rangle.$$

O próximo passo de Kolmogorov foi propor uma distribuição de probabilidade para \mathcal{E}_r . Kolmogorov propôs uma log-normal (ou lognormal?) Reforma! A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Y distribuída lognormalmente é

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right].$$

Isso significa que $X = \ln Y$ é uma variável aleatória normal, com

$$\begin{aligned} \mu &= \langle X \rangle, \\ \sigma^2 &= \langle [X - \mu]^2 \rangle \end{aligned}$$

Enquanto isso, temos

$$\begin{aligned} m &= \langle Y \rangle, \\ s^2 &= \langle [Y - m]^2 \rangle. \end{aligned}$$

As relações entre (μ, σ) e (m, s) são conhecidas:

$$\begin{aligned} \mu &= \ln \left(\frac{m}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{m^2}}} \right), & m &= \exp \left(\mu + \sigma^2/2 \right), \\ \sigma^2 &= \ln \left(1 + \frac{s^2}{m^2} \right), & s^2 &= e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \end{aligned}$$

bem como uma expressão para o p -ésimo momento de Y em relação a 0:

$$\langle Y^p \rangle = \exp \left(p\mu + \frac{p^2}{2} \sigma^2 \right). \quad (14.2)$$

No caso da teoria de Kolmogorov, se \mathcal{E}_r é lognormalmente distribuída, teremos

$$\begin{aligned} m &= \langle \mathcal{E}_r \rangle = \langle \mathcal{E}_{et} \rangle, \\ s^2 &= \text{Var}\{\mathcal{E}_r\} = \langle [\mathcal{E}_r - \langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_r^2 \rangle - \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^2. \end{aligned}$$

Neste ponto, nós devemos apresentar a proposta de Kolmogorov para o parâmetro σ^2 :

$$\sigma_r^2 = A(\mathbf{x}, t) + 9k \ln \left(\frac{\ell}{r} \right). \quad (14.3)$$

Esta última expressão é justificada em Frisch (1995) com um modelo de cascata multiplicativo. Nada tão impossível assim de se entender! A expressão de Kraichnan, entretanto,

$$\sigma_r^2 = \langle [\ln(\mathcal{E}_r / \langle \mathcal{E}_{et} \rangle)]^2 \rangle,$$

não parece ser justificada! (Mais um errinho?)

Agora, temos uma primeira aplicação de (14.2):

$$\langle \mathcal{E}_r^2 \rangle = \exp \left(2\mu + 2\sigma^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\exp(\mu + \sigma^2) \right]^2 \\
&= \left[\exp(\mu + \sigma^2/2) \exp(\sigma^2/2) \right]^2 \\
&= \left[\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \exp(\sigma^2/2) \right]^2.
\end{aligned}$$

Agora usamos (14.3):

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) &= \exp\left[\frac{A}{2} + \frac{9k}{2} \ln\left(\frac{\ell}{r}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{A}{2}\right] \exp\left[\frac{9k}{2} \ln\left(\frac{\ell}{r}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{A}{2}\right] \exp\left[\ln\left(\left(\frac{\ell}{r}\right)^{\frac{9k}{2}}\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{A}{2}\right] \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k/2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_r^2 \rangle &= \left[\exp\left(\frac{A}{2}\right) \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k/2} \right]^2 \\
&= \left[\exp\left(\frac{A}{2}\right) \right]^2 \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^2 \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k}; \\
s^2 &= \left[\exp(A) \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k} - 1 \right] \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^2.
\end{aligned}$$

Na teoria de Kolmogorov, a variância segue uma lei de potência com expoente fixo 2, e coeficiente adimensional que varia com r .

Feito isso, vamos prosseguir com a álgebra que levará a K62. Nós vamos (aparentemente) ter que supor que vale o seguinte:

$$\begin{aligned}
|\delta u_{\parallel}(r)|^3 &= C \mathcal{E}_r r, \\
|\delta u_{\parallel}(r)|^p &= (C \mathcal{E}_r r)^{p/3},
\end{aligned}$$

onde C deve ser uma constante universal (4/5 em turbulência isotrópica!). Note que estamos precisando (de novo, aparentemente) supor que as equações acima valem *sem promediação*. Essa promediação vem agora:

$$\langle |\delta u_{\parallel}(r)|^p \rangle = (C \mathcal{E}_r)^{p/3} \langle \mathcal{E}_r^{p/3} \rangle$$

. Novamente, aplicaremos (14.2); antes, entretanto, vamos estabelecer o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{s^2}{m^2} &= \exp(A) \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k} - 1; \\
1 + \frac{s^2}{m^2} &= \exp(A) \left(\frac{\ell}{r}\right)^{9k};
\end{aligned}$$

$$\mu = \ln \left(\frac{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle}{\left[\exp(A) \left(\frac{\ell}{r} \right)^{9k} \right]^{1/2}} \right);$$

$$\exp(\mu) = \frac{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle}{\left[\exp(A) \left(\frac{\ell}{r} \right)^{9k} \right]^{1/2}} = \frac{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle}{\exp(A/2) \left(\frac{\ell}{r} \right)^{9k/2}}.$$

Com esse resultado em mãos,

$$\langle \mathcal{E}_r^{p/3} \rangle = \exp \left(\frac{p}{3} \mu \right) \exp \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{9} \sigma^2 \right)$$

Vamos aos pedaços:

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{p}{3} \mu \right) &= [\exp(\mu)]^{p/3} \\ &= \left[\frac{1}{\exp(A/2)} \right]^{p/3} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} \left[\left(\frac{\ell}{r} \right)^{-9k/2} \right]^{p/3} \\ &= \left[\frac{1}{\exp(A/2)} \right]^{p/3} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{-3kp/2}. \end{aligned}$$

O outro termo é:

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{p^2}{9} \sigma^2 \right) &= \exp \left[\frac{1}{2} \frac{p^2}{9} \left(A + 9k \ln \left(\frac{\ell}{r} \right) \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{A p^2}{2 \cdot 9} + \frac{p^2}{2} k \ln \left(\frac{\ell}{r} \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{A p^2}{2 \cdot 9} \right] \exp \left[\frac{p^2}{2} k \ln \left(\frac{\ell}{r} \right) \right] \\ &= [\exp(A/2)]^{p^2/9} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{p^2 k/2}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_r^{p/3} \rangle &= \left[\frac{1}{\exp(A/2)} \right]^{p/3} [\exp(A/2)]^{p^2/9} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{-3kp/2} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{p^2 k/2} \\ &= [\exp(A/2)]^{(p/3)^2 - p/3} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{\frac{k}{2}(p^2 - 3p)} \\ &= [\exp(A/2)]^{\frac{p}{3}(\frac{p}{3} - 1)} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{p/3} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{\frac{kp}{2}(p-3)} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$D_p(r) = (C \langle \mathcal{E}_{et} \rangle r)^{p/3} [\exp(A/2)]^{\frac{p}{3}(\frac{p}{3} - 1)} \left(\frac{\ell}{r} \right)^{\frac{kp}{2}(p-3)}$$

Essa é a equação (10) de [Kolmogorov \(1962\)](#).

15

Dinâmica espectral

15.1 – Balanços espectrais

Considere as equações de Navier-Stokes para as flutuações turbulentas em turbulência homogênea e isotrópica,

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \frac{\partial u'_k u'_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu_{(j)} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (15.1)$$

cuja transformada de Fourier é

$$\frac{\partial \widehat{u}'_j}{\partial t} + ik_k \widehat{u'_k u'_j} = -\frac{1}{\bar{\rho}} ik_k \widehat{p'} - \nu_{(j)} k^2 \widehat{u}'_j, \quad (15.2)$$

analogamente,

$$\frac{\partial \widehat{u}'_i^*}{\partial t} - ik_k \widehat{u'_k u'_i}^* = +\frac{1}{\bar{\rho}} ik_k \widehat{p'}^* - \nu_{(i)} k^2 \widehat{u}'_i^*. \quad (15.3)$$

Pré-multiplicando (15.2) por \widehat{u}'_i^* , e pós-multiplicando (15.3) por \widehat{u}'_j , obtém-se

$$\frac{\partial \widehat{u}'_i^* \widehat{u}'_j}{\partial t} + ik_k \left(\widehat{u}'_i^* \widehat{u'_k u'_j} - \widehat{u'_k u'_j}^* \widehat{u}'_j \right) = \frac{i}{\bar{\rho}} \left(k_i \widehat{p'}^* \widehat{u}'_j - k_j \widehat{u}'_i^* \widehat{p'} \right) - (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) k^2 \widehat{u}'_i^* \widehat{u}'_j. \quad (15.4)$$

Calculando-se o valor esperado $\langle \cdot \rangle$ da equação acima, e “dividindo-se” por $\delta(0)$, obtém-se, via (11.66):

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} + ik_k \left(\Phi_{i,j,k} - \Phi_{i,k,j} \right) = \frac{i}{\bar{\rho}} \left(k_i \Phi_{p,j} - k_j \Phi_{i,p} \right) - (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) k^2 \Phi_{i,j}. \quad (15.5)$$

Fazendo-se a contração $i = j$, o termo envolvendo espectros cruzados com a pressão desaparece, devido a (10.82); além disso,

$$\begin{aligned} ik_k \left(\Phi_{i,ik} - \Phi_{ik,i} \right) &= ik_k \left(\left\langle \widehat{u}'_i^* \widehat{u'_i u'_k} \right\rangle - \left\langle \widehat{u'_i u'_k}^* \widehat{u}'_i \right\rangle \right) \\ &= ik_k \left(\left\langle \widehat{u}'_i^* \widehat{u'_i u'_k} \right\rangle - \left\langle \left(\widehat{u}'_i^* \widehat{u'_i u'_k} \right)^* \right\rangle \right) \\ &= 2k_k \mathcal{Q}_{u,i,k}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Portanto, definindo-se

$$\Phi_e \equiv \frac{1}{2} \Phi_{i,i}, \quad (15.7)$$

$$E_e(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_e(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k}, \quad (15.8)$$

$$T_e(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} k_k \mathcal{Q}u_{i,ik}(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k}, \quad (15.9)$$

obtem-se finalmente a equação de Kármán-Howarth,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu_u k^2 \right) E_e(k) + T_e(k) = 0. \quad (15.10)$$

$\Phi_e(\mathbf{k})$ é o *espectro direcional de energia cinética turbulenta* (direcional porque depende em geral do vetor \mathbf{k}). Nas equações acima, o termo de *transferência inercial* $T_e(k)$ tem origem em

$$ik_k \left(\widehat{u'_i}^* \widehat{u'_k u'_j} - \widehat{u'_k}^* \widehat{u'_j u'_i} \right); \quad (15.11)$$

nosso objetivo agora é mostrar que a integral deste termo (e consequentemente a integral de $T_e(k)$) é nula. Para isso, usamos o teorema da convolução de transformadas de Fourier na forma (10.92) para escrever

$$ik_k \widehat{u'_i}^* \widehat{u'_k u'_j} = i \int_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3} k_k \widehat{u'_k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \widehat{u'_i}^*(\mathbf{k}) \widehat{u'_j}(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' \quad (15.12)$$

$$-ik_k \widehat{u'_k}^* \widehat{u'_j u'_i} = -i \int_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3} k_k \widehat{u'_k}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \widehat{u'_i}(\mathbf{k}') \widehat{u'_j}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}' \quad (15.13)$$

Consequentemente, a integral de (15.11) será

$$i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3} \left[k_k \widehat{u'_k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \widehat{u'_i}^*(\mathbf{k}) \widehat{u'_j}(\mathbf{k}') - k_k \widehat{u'_k}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \widehat{u'_i}(\mathbf{k}') \widehat{u'_j}(\mathbf{k}) \right] d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{k}. \quad (15.14)$$

Trocando \mathbf{k} e \mathbf{k}' no segundo termo dentro dos colchetes,

$$i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3} \left[k_k \widehat{u'_k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - k_k \widehat{u'_k}^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right] \widehat{u'_i}^*(\mathbf{k}) \widehat{u'_j}(\mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' d^3\mathbf{k} = 0, \quad (15.15)$$

pois o termo dentro do colchete se anula, devido ao fato de que $\widehat{u'}^*(\mathbf{k}) = \widehat{u'}(-\mathbf{k})$. Consequentemente, a integral de (15.6) sobre todos os vetores número de onda \mathbf{k} é nula; em termos de $T_e(k)$ isso é o mesmo que

$$\int_{k=0}^{\infty} T_e(k) dk = \int_{k=0}^{\infty} \int_{|\mathbf{k}|=k} k_k \mathcal{Q}u_{i,ik}(\mathbf{k}) d^2\mathbf{k} dk = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} k_k \mathcal{Q}u_{i,ik}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = 0. \quad (15.16)$$

15.2 – O fluxo espectral de energia nas teorias clássicas

Considere a contração de (15.84),

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} + k_k \mathcal{Q}u_{i,ik} + 2\nu_u k^2 \Phi_e, \quad (15.17)$$

filtrada por um filtro ideal $H_k(\mathbf{k})$ com número de onda (escalar) de corte k tal que

$$H_k(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{k}| \leq k, \\ 0, & |\mathbf{k}| > k. \end{cases} \quad (15.18)$$

Então o *espectro acumulado* de energia cinética $\mathcal{E}(k)$ é definido pela operação de $H_k(\mathbf{k})$ sobre Φ_e :

$$\mathcal{E}(k) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} H_k(\mathbf{k}) \Phi_e(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \int_{p=0}^k \int_{|\mathbf{k}|=p} \Phi_e(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k} dp = \int_{p=0}^k E_e(p) dp. \quad (15.19)$$

Analogamente, a *enstrofia acumulada* $\Omega(k)$ é

$$\begin{aligned} \Omega(k) &\equiv \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} H_k(\mathbf{k}) k^2 \Phi_e(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \int_{p=0}^k \int_{|\mathbf{k}|=p} H_k(\mathbf{k}) k^2 \Phi_e(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k} dp \\ &= \int_{p=0}^k k^2 E_e(p) dp \end{aligned} \quad (15.20)$$

O último termo a ser submetido à operação de filtragem de passa-baixa em (15.17) é

$$\Pi(k) \equiv \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} H_k(\mathbf{k}) k_k \mathcal{Q} u_{i,k}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \int_{p=0}^k T_e(p) dp \quad (15.21)$$

que é, por definição, o *fluxo espectral* de energia. Agora, é usual adicionar-se um termo forçante $F(k)$ ao lado direito de (15.10) em simulações de turbulência isotrópica para evitar o seu (de outra forma inevitável) decaimento. Seja então

$$F(k) = \epsilon_e \delta(k - k_i), \quad (15.22)$$

onde $k_i = 2\pi/L$ é um número de onda que define, a menos de uma constante da ordem de 1, uma escala integral de turbulência; então

$$\mathcal{F}(k) = \int_{p=0}^k F(p) dp = \begin{cases} 0, & k < k_i, \\ \epsilon_e, & k > k_i. \end{cases} \quad (15.23)$$

A integral de (15.10) será

$$\frac{\partial \mathcal{E}(k)}{\partial t} + \Pi(k) + 2\nu_u \Omega(k) = \mathcal{F}(k). \quad (15.24)$$

Supondo que a turbulência seja estatisticamente estacionária (graças à presença de $F(k)$), e notando que para k finito, $0 < \Omega(k) < \infty$, segue-se que (Lesieur, 1990, p. 136)

$$\lim_{\nu_u \rightarrow 0} \Pi(k) = 0, \quad k < k_i, \quad (15.25)$$

$$\lim_{\nu_u \rightarrow 0} \Pi(k) = \epsilon_e, \quad k > k_i. \quad (15.26)$$

Lesieur observa que essas equações têm um papel preponderante na teoria de Kolmogorov. Note também que a integral até infinito de (15.10) resulta em

$$\epsilon_e = 2\nu \Omega(\infty). \quad (15.27)$$

15.3 – Modelos de fechamento fenomenológicos

O que diabo significa *fenomenológicos*?

15.3.1 – Heisenberg

Brodkey (Brodkey, 1967, p. 292 em diante) faz uma excelente revisão das idéias por trás dos modelos clássicos de fechamento. Na teoria de fechamento proposta por Heisenberg, existe uma analogia com o papel da viscosidade cinemática $\nu_{(i)}$ no termo de dissipação envolvendo a enstrofia $\Omega(k)$ em (15.20). A idéia é escrever $\Pi(k)$ em função de $\Omega(k)$,

$$\Pi(k) = 2\nu_T(k)\Omega(k) = 2\nu_T(k) \int_0^k q^2 E_e(q) dq, \quad (15.28)$$

com a *viscosidade turbulenta espectral* $\nu_T(k)$ dada por

$$\nu_T(k) = \alpha_H \int_k^\infty p^{-3/2} [E(p)]^{1/2} dp. \quad (15.29)$$

Como a integral do termo de transferência inercial é nula, o decaimento da energia cinética turbulenta em turbulência isotrópica é

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle u'_k u'_k \rangle}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E_e(k) dk = -2\nu_u \Omega(\infty) = -\epsilon_e. \quad (15.30)$$

Fazendo-se a aproximação

$$\frac{\langle u'_k u'_k \rangle}{2} \approx \int_0^k E_e(k) dk, \quad k \gg k_i \quad (15.31)$$

obtém-se

$$-\epsilon_e + \Pi(k) + 2\nu_u \int_0^k q^2 E(q) dq = 0. \quad (15.32)$$

Usando (15.28) e (15.29),

$$\epsilon_e = 2 \left[\nu_u + \alpha_H \int_k^\infty p^{-3/2} [E(p)]^{1/2} dp \right] \Omega(k). \quad (15.33)$$

Mas pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{d\Omega}{dk} = k^2 E(k), \quad (15.34)$$

donde

$$\frac{\epsilon_e}{\Omega(k)} = 2 \left[\nu_u + \alpha_H \int_k^\infty p^{-5/2} \left(\frac{d\Omega}{dp} \right)^{1/2} dp \right] \quad (15.35)$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_e}{\Omega(k)^2} \frac{d\Omega}{dk} &= 2\alpha_H k^{-5/2} \left(\frac{d\Omega}{dp} \right)^{1/2}, \\ \frac{\epsilon_e^2}{\Omega(k)^4} \frac{d\Omega}{dk} &= 4\alpha_H^2 k^{-5}, \\ \Omega^{-4} d\Omega &= 4 \frac{\alpha_H^2}{\epsilon_e^2} k^{-5} dk. \end{aligned} \quad (15.36)$$

Essa última é uma equação diferencial separável facilmente integrável, para o quê é preciso utilizar (15.27). O resultado é

$$\Omega(k) = \left[\left(\frac{\epsilon_e}{\nu_u} \right)^{-3} + 3 \left(\frac{\alpha_h}{\epsilon_e} \right)^2 k^{-4} \right]^{-1/3}. \quad (15.37)$$

Utilizando-se (15.34), com um pouco de paciência para a álgebra, obtém-se

$$E_e(k) = \left(\frac{8\epsilon_e}{9\alpha_H} \right)^{2/3} k^{-5/3} \left[1 + \frac{8\nu_u^3}{3\alpha_H^2 \epsilon_e} k^4 \right]^{-4/3}. \quad (15.38)$$

Este resultado reproduz o comportamento do espectro na faixa inercial previsto pela teoria de Kolmogorov, assim como prevê um decaimento mais rápido na faixa viscosa. Crítica: existe um certo grau de liberdade na escolha dos expoentes, de forma que a teoria não é tão “profunda” assim; ela apenas compatibiliza a viscosidade turbulenta com o espectro na faixa inercial, cujo comportamento já é conhecido.

15.4 – A aproximação quase-normal

Vamos iniciar essa seção com uma breve revisão de resultados que já obtivemos, mas que serão manipulados sob uma nova luz. Considere as definições de transformadas de Fourier:

$$\hat{u}(k) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}, \quad (15.39)$$

$$\hat{u}(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\xi) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \xi)} d^3 \xi. \quad (15.40)$$

Consequentemente,

$$\langle \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{p}) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int \int_{\mathbf{x}, \xi \in \mathbb{R}^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\xi) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \xi)} d^3 \xi d^3 \mathbf{x}. \quad (15.41)$$

Faça $\xi = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, e obtenha

$$\langle \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{p}) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int \int_{\mathbf{x}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{x}. \quad (15.42)$$

Agora, se $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ é a função de correlação, que só depende de \mathbf{r} em uma turbulência homogênea, então:

$$\langle \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{p}) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} e^{-i([\mathbf{k} + \mathbf{p}] \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}}_{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \mathbf{R}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}, \quad (15.43)$$

ou seja:

$$\langle \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{p}) \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \mathbf{R}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}. \quad (15.44)$$

Um resultado que nós recuperamos imediatamente é a definição de espectro usando funções generalizadas que possuíamos anteriormente:

$$\hat{u}^*(\mathbf{p}) = \hat{u}(-\mathbf{p}), \quad (15.45)$$

$$\mathbf{k} = -\mathbf{p}, \quad (15.46)$$

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \rangle = \delta(0) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \mathbf{R}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}}_{\Phi(\mathbf{p})}, \quad (15.47)$$

onde $\Phi(\mathbf{p})$ é o tensor espectral do campo de velocidade.

Os resultados da aproximação quase-normal serão obtidos a partir de (15.44); essa equação mostra que

$$\langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \rangle = 0 \text{ a não ser que } \mathbf{k} + \mathbf{p} = 0, \quad (15.48)$$

e este é um resultado muito importante. Analogamente,

$$\langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0, \quad (15.49)$$

$$\langle \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1) \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_2) \dots \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_n) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n = 0. \quad (15.50)$$

$$(15.51)$$

Considere agora novamente a equação (10.97), que nós reescrevemos aqui por comodidade:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu_u k^2 \hat{u}_i + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) i k_m \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} = 0. \quad (15.52)$$

Usando a equação (10.89),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu_u k^2 \hat{u}_i + P_{ij}(\mathbf{k}) i k_m \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} = 0. \quad (15.53)$$

É bom lembrar que $P_{ij}(\mathbf{k})$ foi definido como o operador que projeta no plano perpendicular a \mathbf{k} ,

$$k_i P_{ij}(\mathbf{k}) a_j = 0, \quad (15.54)$$

para um vetor \mathbf{a} qualquer. Uma forma equivalente a (15.53) é

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu_u k^2 \hat{u}_i + P_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} = 0, \quad (15.55)$$

onde

$$P_{ijm}(\mathbf{k}) \equiv \frac{i}{2} \left[k_j P_{im}(\mathbf{k}) + k_m P_{ij}(\mathbf{k}) \right]. \quad (15.56)$$

Para provar essa última, observe que

$$\begin{aligned} k_j P_{im} u_j u_m &= k_j \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} \right) u_j u_m \\ &= (k_j u_j) u_i - \frac{k_i (k_j u_j) (k_m u_m)}{k^2}, \end{aligned} \quad (15.57)$$

enquanto que

$$k_m P_{ij} u_j u_m = k_m \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) u_j u_m$$

$$= (k_m u_m) u_i - \frac{k_i (k_j u_j) (k_m u_m)}{k^2}. \quad (15.58)$$

Note que (15.57) e (15.58) são iguais, donde (15.55) se segue.

Agora faça

$$M_{ijm} \equiv -P_{ijm} \quad (15.59)$$

e tire a média de (15.55); o resultado é

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_u k^2 \right) \langle \hat{u}_i \rangle = M_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \langle \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) \rangle d^3 \mathbf{p}. \quad (15.60)$$

Agora, dados os seguintes fatos,

$$M_{ijm}(\mathbf{0}) = 0 \quad (15.61)$$

$$\langle \hat{u}_j(\mathbf{p}) \hat{u}_m(\mathbf{q}) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (15.62)$$

segue-se de (15.60) que

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k}. \quad (15.63)$$

Vamos agora obter novamente a equação de evolução para $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$. O ponto de partida são duas equações gêmeas de (15.55) em \hat{u}_i e \hat{u}_j com M_{ijm} em lugar de P_{ijm} . Como já fizemos inúmeras vezes antes, a equação em \hat{u}_i é multiplicada por \hat{u}_j e vice-versa; os números de onda dos argumentos são \mathbf{k}' e \mathbf{k} , respectivamente:

$$\hat{u}_j(\mathbf{k}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_u k^2 \right) \hat{u}_i(\mathbf{k}') = M_{imn}(\mathbf{k}') \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'} \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p}, \quad (15.64)$$

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}') \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_u k^2 \right) \hat{u}_j(\mathbf{k}) = M_{jkl}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_i(\mathbf{k}') \hat{u}_k(\mathbf{p}) \hat{u}_l(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} \quad (15.65)$$

A soma das duas produz, imediatamente (após a tomada das médias),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_u (k^2 + k'^2) \right) \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}') \hat{u}_j(\mathbf{k}) \rangle &= M_{imn}(\mathbf{k}') \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'} \langle \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \rangle d^3 \mathbf{p} \\ &+ M_{jkl}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}') \hat{u}_k(\mathbf{p}) \hat{u}_l(\mathbf{q}) \rangle d^3 \mathbf{p} \end{aligned} \quad (15.66)$$

que dá, para o único caso não-trivial $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2v_u k^2 \right) \langle \hat{u}_i(-\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{k}) \rangle &= M_{imn}(-\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=-\mathbf{k}} \langle \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \hat{u}_n(\mathbf{q}) \rangle d^3 \mathbf{p} \\ &+ M_{jkl}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \langle \hat{u}_i(-\mathbf{k}) \hat{u}_k(\mathbf{p}) \hat{u}_l(\mathbf{q}) \rangle d^3 \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (15.67)$$

Dessa equação para a equação de evolução de $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$ é um pulo. Trocando \mathbf{q} por $-\mathbf{q}$ e utilizando

$$M_{ikl}(-\mathbf{k}) = -M_{ikl}(\mathbf{k}), \quad (15.68)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2v_u k^2 \right) \langle \hat{u}_i(-\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{k}) \rangle = -M_{ikl}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{k}=\mathbf{q}} \langle \hat{u}_l(-\mathbf{q}) \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_k(\mathbf{p}) \rangle d^3 \mathbf{p}$$

$$+ M_{jkl}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \langle \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{p}) \widehat{u}_l(\mathbf{q}) \rangle d^3\mathbf{p}. \quad (15.69)$$

Pelo teorema da convolução tridimensional, (10.92), as duas integrais acima podem ser relacionadas aos espectros cruzados de ordem 3 como se segue:

$$\int_{\mathbf{p}+\mathbf{k}=\mathbf{q}} \langle \widehat{u}_l(-\mathbf{q}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{p}) \rangle d^3\mathbf{p} = \langle \widehat{u}_l \widehat{u}_j \widehat{u}_k \rangle = \delta(\mathbf{0}) \Phi_{ljk}(\mathbf{k}) \quad (15.70)$$

$$\int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \langle \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{p}) \widehat{u}_l(\mathbf{q}) \rangle d^3\mathbf{p} = \langle \widehat{u}_i \widehat{u}_k \widehat{u}_l \rangle = \delta(\mathbf{0}) \Phi_{ilk}(\mathbf{k}). \quad (15.71)$$

Com (15.70) e (15.71), (15.69) torna-se, finalmente,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right) \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = M_{jkl}(\mathbf{k}) \Phi_{ilk}(\mathbf{k}) - M_{ikl}(\mathbf{k}) \Phi_{ljk}(\mathbf{k}), \quad (15.72)$$

que deve ser comparada com a equação obtida anteriormente:

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) k^2 \Phi_{ij} = ik_k (\Phi_{ikj} - \Phi_{ijk}) + \frac{i}{\rho} (k_i \Phi_{pj} - k_j \Phi_{ip}). \quad (15.73)$$

15.4.1 – Uma abordagem com P e não com M

Vamos agora obter novamente a equação de evolução para $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$. O ponto de partida são duas equações gêmeas de (15.55) em \widehat{u}_i e \widehat{u}_j com M_{ijm} em lugar de P_{ijm} . Como já fizemos inúmeras vezes antes, a equação em \widehat{u}_i é multiplicada por \widehat{u}_j e vice-versa; os números de onda dos argumentos são \mathbf{k}' e \mathbf{k} , respectivamente:

$$\widehat{u}_j(\mathbf{k}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{(i)} k^2 \right) \widehat{u}_i(\mathbf{k}') + P_{im}(\mathbf{k}') ik'_n \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'} \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} = 0 \quad (15.74)$$

$$\widehat{u}_i(\mathbf{k}') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_{(j)} k^2 \right) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) + P_{jm}(\mathbf{k}) ik_n \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_i(\mathbf{k}') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} = 0 \quad (15.75)$$

A soma das duas produz, imediatamente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\nu_{(j)} k^2 + \nu_{(i)} k'^2) \right) \widehat{u}_i(\mathbf{k}') \widehat{u}_j(\mathbf{k}) &= -P_{im}(\mathbf{k}') ik'_n \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}'} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} \\ &\quad - P_{jm}(\mathbf{k}) ik_n \widehat{u}_i(\mathbf{k}') \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}, \end{aligned} \quad (15.76)$$

que dá, para o único caso não-trivial $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) k^2 \right) \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) &= P_{im}(\mathbf{k}) ik_n \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=-\mathbf{k}} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p} \\ &\quad - P_{jm}(\mathbf{k}) ik_n \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (15.77)$$

Note que nós utilizamos a propriedade

$$P_{ij}(-\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}), \quad (15.78)$$

implícita em (10.89). Pelo teorema da convolução tridimensional, (10.92), as duas integrais acima podem ser escritas como transformadas de Fourier de *produtos* $u_m u_n$:

$$\int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=-\mathbf{k}} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} = \widehat{u_m u_n}(-\mathbf{k}) \quad (15.79)$$

$$\int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{p} = \widehat{u_m u_n}(\mathbf{k}). \quad (15.80)$$

Levando (15.79) e (15.80) em (15.77), tomando o seu valor esperado e usando as seguintes relações para os espectros cruzados de ordem 3:

$$\delta(\mathbf{0}) \Phi_{mn,j}(\mathbf{k}) = \langle \widehat{u_m u_n}(-\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \rangle, \quad (15.81)$$

$$\delta(\mathbf{0}) \Phi_{i,mn}(\mathbf{k}) = \langle \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u_m u_n}(\mathbf{k}) \rangle, \quad (15.82)$$

nós obtemos a equação para a evolução do espectro cruzado $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$:

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + (v_{(i)} + v_{(j)}) k^2 \Phi_{ij} = i k_n (P_{im} \Phi_{mn,j} - P_{jm} \Phi_{i,mn}), \quad (15.83)$$

que deve ser comparada com a equação obtida anteriormente:

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} + (v_{(i)} + v_{(j)}) k^2 \Phi_{ij} = i k_n (\Phi_{in,j} - \Phi_{i,jn}) + \frac{i}{\rho} (k_i \Phi_{p,j} - k_j \Phi_{i,p}). \quad (15.84)$$

15.4.2 – Detours in search of truth

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2v_u k^2 \right) \langle \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \rangle &= P_{im}(\mathbf{k}) i k_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \langle \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(-[\mathbf{k} + \mathbf{p}]) \rangle d^3 \mathbf{p} \\ &- P_{jm}(\mathbf{k}) i k_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \langle \widehat{u}_i(-\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{p}) \widehat{u}_l(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \rangle d^3 \mathbf{p} \end{aligned} \quad (15.85)$$

Para a equação de balanço dos momentos de ordem 3, faça:

$$\widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{(i)} k^2 \right) \widehat{u}_i(\mathbf{k}) + P_{im}(\mathbf{k}) i k_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \quad (15.86)$$

$$\widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{(j)} k'^2 \right) \widehat{u}_j(\mathbf{k}') + P_{jm}(\mathbf{k}') i k'_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \quad (15.87)$$

$$\widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{(k)} k''^2 \right) \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') + P_{km}(\mathbf{k}'') i k''_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k}'' - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} \quad (15.88)$$

A combinação das 3 equações produz

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{(i)} k^2 + v_{(j)} k'^2 + v_{(k)} k''^2 \right) \langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \rangle &= \\ -P_{im}(\mathbf{k}) i k_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} & \\ -P_{jm}(\mathbf{k}') i k'_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_k(\mathbf{k}'') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} & \\ -P_{km}(\mathbf{k}'') i k''_n \int_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}') \widehat{u}_m(\mathbf{p}) \widehat{u}_n(\mathbf{k}'' - \mathbf{p}) d^3 \mathbf{p}. & \end{aligned} \quad (15.89)$$

Como sabemos, (15.89) só faz sentido para $\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{0}$.

15.5 – Uma nova tentativa de obter a aproximação quase-normal

Para os momentos de ordem 2, espectros e funções de correlação são

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \rangle = \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j) \Phi_{ij}(\mathbf{k}_j). \quad (15.90)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}_j) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r}} \langle u_i(\mathbf{x}_i) u_j(\mathbf{x}_i + \mathbf{r}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (15.91)$$

A generalização para a ordem 3 deve ser cuidadosa. É natural esperar que

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \rangle = \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k) \Phi_{ijk}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_k). \quad (15.92)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ijk}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_k) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{s}} \langle u_i(\mathbf{x}_i) u_j(\mathbf{x}_i + \mathbf{r}) u_k(\mathbf{x}_i + \mathbf{s}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{s} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{s}} R_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (15.93)$$

Uma operação de convolução sobre um momento de ordem 3 deve reduzir o número de vetores independentes de 2 para 1: $\Phi_{ijk}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_k) \rightarrow \Phi_{ij,k}(\mathbf{k}_k)$ ou $\Phi_{i,jk}(\mathbf{k}_k)$. Considere então

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \int_{\mathbf{k}_j} \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) d^3 \mathbf{k}_j \right\rangle &= \\ \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{s}} R_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \int_{\mathbf{k}_j} e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + [\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j] \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{k}_j d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{s} &= \\ \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r}, \mathbf{s}} R_{ijk}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}_j} e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{s}])} d^3 \mathbf{k}_j}_{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s})} e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{s} &= \\ \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{s}} R_{ijk}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s})} d^3 \mathbf{s} &= \\ \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k) \Phi_{i,jk}(\mathbf{k}_k). \end{aligned} \quad (15.94)$$

Em resumo, a operação de convolução produziu o seguinte efeito:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k) \Phi_{ijk}(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_k) \Rightarrow \\ \langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k) \Phi_{i,jk}(\mathbf{k}_k). \end{aligned} \quad (15.95)$$

Formalmente,

$$\frac{\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \rangle}{\delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k)} = \Phi_{i,jk}(\mathbf{k}_k) = \Phi_{jk,i}(-\mathbf{k}_k) = \Phi_{jk,i}(\mathbf{k}_i)$$

ou, permutando os índices,

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) * \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \rangle = \delta(\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k) \Phi_{ij,k}(\mathbf{k}_k). \quad (15.96)$$

As equações (15.95)–(15.96) são muito importantes porque elas permitem automatizar a álgebra das operações de convolução. Essas por sua vez permitem reduzir os

momentos de 3^a e 4^a ordens que dependem respectivamente de 2 e 3 vetores número de onda a expressões que envolvem apenas 1 vetor número de onda. A generalização óbvia dessas equações para ordem 4 é

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) * \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) * \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l) \Phi_{ij,kl}(\mathbf{k}_l) \quad (15.97)$$

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) * \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_l) \Phi_{ijkl}(\mathbf{k}_l) \quad (15.98)$$

A dedução de (15.97)–(15.98) é muito fácil uma vez que temos (15.94). De fato, seja

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k) \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^9 \int_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}} R_{i,j,k,l}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{s} d^3 \mathbf{t}. \quad (15.99)$$

Como a convolução $\widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j)$ não envolve os termos em \mathbf{k}_l e em \mathbf{t} , a aplicação de (15.94) produz, imediatamente,

$$\langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} R_{i,j,k,l}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} d^3 \mathbf{s} d^3 \mathbf{t}. \quad (15.100)$$

Observe que $R_{i,j,k,l}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é a mesma coisa que $R_{i,jk,l}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. É interessante reescrever a equação acima em termos de $R_{jk,i,l}$. Para fazer isso, nós inicialmente usamos a propriedade de homogeneidade para fazer

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} &= \langle u_i(\mathbf{0}) u_j(\mathbf{s}) u_k(\mathbf{s}) u_l(\mathbf{t}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} \\ &= \langle u_i(-\mathbf{s}) u_j(\mathbf{0}) u_k(\mathbf{0}) u_l(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})}. \end{aligned} \quad (15.101)$$

Agora aplicamos a mudança de variáveis

$$\mathbf{y} = -\mathbf{s}, \quad (15.102)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{t} - \mathbf{s}; \quad (15.103)$$

o resultado é

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l}(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} &= \langle u_j(\mathbf{0}) u_k(\mathbf{0}) u_i(\mathbf{y}) u_l(\mathbf{z}) \rangle e^{-i(-\mathbf{k}_k \cdot \mathbf{y} + \mathbf{k}_l \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{y}])} \\ &= \langle u_j(\mathbf{0}) u_k(\mathbf{0}) u_i(\mathbf{y}) u_l(\mathbf{z}) \rangle e^{-i(-[\mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l] \cdot \mathbf{y} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{z})} \\ &= \langle u_j(\mathbf{0}) u_k(\mathbf{0}) u_i(\mathbf{y}) u_l(\mathbf{z}) \rangle e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{y} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{z})} \\ &= R_{jk,i,l} e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{y} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{z})}. \end{aligned} \quad (15.104)$$

Para passar de $-[\mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l]$ para \mathbf{k}_i nós usamos a relação $\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l = \mathbf{0}$. Levando (15.104) em (15.100):

$$\langle \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_k + \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_l) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \right)^6 \int_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} R_{jk,i,l}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} d^3 \mathbf{s} d^3 \mathbf{t}}_{\Phi_{jk,i,l}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_l)}. \quad (15.105)$$

Finalmente, uma aplicação adicional de (15.95) produz

$$\langle \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) * \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l) \rangle = \delta(\mathbf{k}_k + \mathbf{k}_l) \Phi_{jk,i,l}(\mathbf{k}_l), \quad (15.106)$$

que é o mesmo que 15.97. A mesma equação (15.100) é usada para provar (15.98).

Agora, nós simplesmente aplicamos (15.95) novamente, para obter

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}_i(\mathbf{k}_i) \widehat{u}_j(\mathbf{k}_j) * \widehat{u}_k(\mathbf{k}_k - \mathbf{k}_j) * \widehat{u}_l(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_k) \rangle &= \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_l) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} R_{i,j,k,l}(\mathbf{t}, \mathbf{t}, \mathbf{t}) e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{t})} d^3 \mathbf{t} \\ &= \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_l) \Phi_{ijkl}. \end{aligned} \quad (15.107)$$

A

Identidades vetoriais

Para qualquer função escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ razoavelmente bem comportada, devemos ter

$$\nabla \times \nabla \phi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} &= \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Para qualquer função vetorial $\mathbf{u} \dots$

B

Difusão em sistemas binários

Considere um pequeno volume $\delta\mathcal{V}$ no qual há instantaneamente \mathcal{N}_A moléculas da substância A , e \mathcal{N}_B moléculas da substância B . As velocidades macroscópicas de A e de B , \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B , no centro de massa de $\delta\mathcal{V}$ são definidas como

$$\left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \mathbf{v}_{Ai} \right] \equiv \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \right) \mathbf{v}_A, \quad (\text{B.1})$$

$$\left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \mathbf{v}_{Bj} \right] \equiv \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right) \mathbf{v}_B, \quad (\text{B.2})$$

onde \mathbf{v}_{Ai} é a velocidade individual da i -ésima molécula de A , e m_A é a massa de cada molécula de A , o mesmo valendo para a substância B .

A velocidade macroscópica do fluido como um todo no centro de massa de $\delta\mathcal{V}$, \mathbf{u} , é

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \mathbf{v}_{Ai} + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \mathbf{v}_{Bj} \right] &\equiv \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{u}, \\ \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \right] \mathbf{v}_A + \left[\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{v}_B &= \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A divisão deste resultado por $\delta\mathcal{V}$ produz

$$\rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B = (\rho_A + \rho_B) \mathbf{u} \Rightarrow \rho_A [\mathbf{v}_A - \mathbf{u}] + \rho_B [\mathbf{v}_B - \mathbf{u}] = \mathbf{0}. \quad (\text{B.4})$$

Os vetores resultantes representam os fluxos difusivos de massa de A e de B :

$$\mathbf{j}_A \equiv \rho_A [\mathbf{v}_A - \mathbf{u}], \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{j}_B \equiv \rho_B [\mathbf{v}_B - \mathbf{u}] \Rightarrow \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{j}_A + \mathbf{j}_B = \mathbf{0}. \quad (\text{B.7})$$

C

Soluções dos problemas

De $S_{i,j}(-n) = S_{i,j}^*(n)$ ($S_{i,j}$ é hermitiano), faça

$$\begin{aligned} S_{i,j}(n) &= a(n) + ib(n), \\ b(-n) &= -b(n), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \int_{n=-\infty}^{+\infty} \Im[S_{i,j}(n)] \, dn &= \int_{n=-\infty}^0 b(n) \, dn + \int_{n=0}^{\infty} b(n) \, dn \\ &= - \int_{m=\infty}^0 b(-m) \, dm + \int_{n=0}^{\infty} b(n) \, dn \\ &= \int_{m=0}^{\infty} b(-m) \, dm + \int_{n=0}^{\infty} b(n) \, dn \\ &= \int_{n=0}^{\infty} [b(-n) + b(n)] \, dn \\ &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

D

Constantes físico-químicas

1 cal = 4,1868 J.

E

Equação de estado para a água

A equação de Tumlirz adaptada por [Fischer e Dial \(1975\)](#) é

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\infty}(T) + \frac{\lambda(T)}{P_0(T) + P} \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} \lambda = & 1788.316 + 21.55053T - 0.4695911T^2 + 3.096363 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 0.7341182 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} P_0 = & 5928.499 + 58.05267T - 1.1253317T^2 + 6.6123869 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 1.4661625 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} V_{\infty} = & 0.6980547 - 0.7435626 \times 10^{-3}T + 0.3704258 \times 10^{-4}T^2 \\ & - 0.6315724 \times 10^{-6}T^3 + 0.9829576 \times 10^{-8}T^4 - 0.1197269 \times 10^{-9}T^5 \\ & + 0.1005461 \times 10^{-11}T^6 - 0.5437898 \times 10^{-14}T^7 + 0.1699460 \times 10^{-16}T^8 \\ & - 0.2295363 \times 10^{-19}T^9 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Referências Bibliográficas

- Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, New York.
- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:113–133.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Batchelor, G. K. (1993). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:134–139.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, New York, 2nd^a edição.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (1960). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York.
- Brodkey, R. S. (1967). *The Phenomena of Fluid Motions*. Dover, New York.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.
- Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley.
- Champeney, D. C. (1989). *A handbook of Fourier theorems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Oxford. 657 pp.
- Deissler, R. G. (1998). *Turbulent Fluid Motion*. Taylor & Francis, Philadelphia, PA, USA.
- Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer*. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.
- Dias, N. L., Chamecki, M., Kan, A., e Okawa, C. M. P. (2004). A study of spectra, structure and correlation functions and their implication on the stationarity of surface-layer turbulence. *Boundary-Layer Meteorol.*, 110:165–189.

- Fischer, F. H. e Dial, Jr., O. E. (1975). Equation of state of pure water and sea water. Relatório técnico, Marine Physical Laboratory, Scripps Institution of Oceanography.
- Fleagle, R. G. e Businger, J. A. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Orlando.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego.
- Greenberg, M. D. (1978). *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, London.
- Hauf, T., Finke, U., Neisser, J., Bull, G., e Stangenberg, J.-G. (1996). A ground-based network for atmospheric pressure fluctuations. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 13:1001–1023.
- Hill, R. J. (2002). Exact second-order structure-function relationships. *J. of Fluid Mech.*, 468:317–326.
- Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1986). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht.
- James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Kaimal, J. C., Wyngaard, J. C., e Haugen, D. A. (1968). Deriving power spectra from a three-dimensional sonic anemometer. *J. Appl. Meteorol.*, 7:827–837.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (in Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).
- Kolmogorov, A. N. (1962). A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mech.*, 13:82–85.
- Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kondepudi, D. e Prigogine, I. (1998). *Modern thermodynamics — From heat engines to dissipative structures*. John Wiley & Sons.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lesieur, M. (1990). *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2nd^a edição.

- Liggett, J. A. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Lumley, J. L. (1970). *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press, New York.
- Lumley, J. L. e Panofksy, H. A. (1964). *The structure of atmospheric turbulence*. Interscience, New York. 239 pp.
- Müller, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Advanced Publishing Program.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Morris, H. M. e Wiggert, J. M. (1972). *Applied hydraulics in engineering*. John Wiley & Sons, New York, 2ª edição.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, New York, 3rdª edição.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Richardson, L. F. (1920). Some measurements of atmospheric turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. A* 221:1–28.
- Rosenthal, J. S. (2008). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Saichev, A. I. e Woyczyński, W. A. (1997). *Distributions in the physical and engineering sciences*. Birkhäuser, Boston.
- Shilov, G. E. e Gurevich, B. L. (1977). *Integral, measure, and derivative: a unified approach*. Dover, New York.
- Slattery, J. C. (1972). *Momentum, energy, and mass transfer in continua*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wosnik, M., Castillo, L., e George, W. K. (2000). A theory for turbulent pipe and channel flows. *J. of Fluid Mech.*, 421:115–146.
- Wyngaard, J. C. (1981). Boundary-layer modeling. Em Nieuwstadt, F. T. M. e van Dop, H., editores, *Atmospheric turbulence and air pollution modelling*, capítulo 3. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Wyngaard, J. C. (2010). *Turbulence in the atmosphere*. Cambridge.
- Yaglom, A. M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions I: Basic results*. Springer-Verlag, New York. 526 pp.