$$
\begin{aligned}
a^2 &= e^2 + h^2;\\
b^2 &= d^2 + h^2;\\
c &= (d+e);\\
c^2 &= d^2 + e^2 + 2de \ \Rightarrow e^2 = c^2 - d^2 - 2de\\
a^2 - b^2 &= e^2 - d^2\\
a^2 &= b^2 + e^2 - d^2\\
a^2 &= b^2 + c^2 - d^2 - 2de - d^2\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2d^2 - 2de\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2d(d+e)\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cd\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cb\cos(\theta)\\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Antes disso, notação!

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},\\
\boldsymbol{v} &= v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}
$$

Note que se $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ for a base canônica, os elementos do vetor se confundem com as coordenadas *nesta* base.

Lembre-se de que “no início”, o vetor vem “absoluto”, sem “base”:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (u_1, u_2, u_3),\\
\boldsymbol{v} &= (v_1, v_2, v_3).
\end{aligned}
$$

O produto escalar de um vetor $\boldsymbol{v}$ consigo mesmo é o quadrado do seu módulo:

$$
|\boldsymbol{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.
$$

A definição do produto escalar agora pode ser feita sem que se recorra a nenhuma base!

$$
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\\
&= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3\\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}] &= \sum_{i=1}^{3} u_i(v_i + w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} (u_i v_i + u_i w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} u_i v_i + \sum_{i=1}^{3} u_i w_i \\
&= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} \blacksquare
\end{aligned}
$$

A propriedade mais importante do produto escalar aparece agora:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] \cdot [\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] \\
&= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} \\
|\boldsymbol{a}|^2 &= |\boldsymbol{b}|^2 - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{c}|^2 \\
a^2 &= b^2 - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + c^2 \\
b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta) &= b^2 - 2\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + c^2 \\
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

$$
(q_{01}, q_{02}, q_{03}) = t_2(p_1, p_2, p_3) - t_1(m_1, m_2, m_3)
$$