TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
Trabalho Computacional. Data de entrega: 24 de Abril de 2020
Prof. Nelson Luís Dias

1 Instruções para a entrega do trabalho

Atenção: O grupo entregará apenas 2 arquivos digitais, que devem ser enviados para

`nldias@ufpr.br`,

com o assunto: `TEA010-tc-1-pennl`. Os nomes dos arquivos serão

1. `tc-1-pennl.py`,
2. `tc-1-pennl.pdf`.

O seu programa deve estar escrito em Python $\geq 3.x$. O programa `pennl.py` deve gerar obrigatoriamente apenas um arquivo de saída, cujo nome será

`pennl.out`

O arquivo `tc-1-pennl.pdf` deve conter suas respostas ao enunciado mais abaixo, figuras, equações utilizadas, referências bibliográficas, etc.. Não há regras muito fixas, mas você deve obedecer ao seguinte:

- 2,5 cm de margem (direita, esquerda, acima e abaixo)
- espaçamento simples
- Tipo romano com serifa (por exemplo, Times Roman ou Times New Roman; **não use tipos sem serifa, tais como Arial ou Calibri**)

O arquivo `tc-1-pennl.out` deve ser um arquivo texto contendo apenas dígitos. Ele deve ser organizado em 2 colunas de 10 caracteres cada, impressas com o formato `%10.6f`, sem brancos adicionais entre as colunas. A primeira coluna deve conter os valores de Θ_0, a partir de $\Delta\Theta_0$, em incrementos $\Delta\Theta_0 = 0.05$ até $\Theta_0 = 3$ (que é um pouco menor que $\pi/2$); a segunda coluna deve conter os valores de T_τ (vide seção 3).

2 Correção do trabalho

Os critérios de correção são os seguintes

- Se o programa não rodar, por qualquer motivo, a nota do trabalho é zero.
- Se o programa não gerar os arquivos de saída com os nomes e o formato especificados, a nota é zero.
- Eu vou comparar graficamente o arquivo de saída contendo a sua solução com a solução numérica correta. As duas soluções devem concordar visualmente.
- O Português da apresentação deve ser correto. **Cuidado com erros de pontuação, concordância e ortografia**.
- A qualidade da apresentação deve ser boa. O texto deve ser claro, as referências a figuras e tabelas (se houver) devem seguir as regras acadêmicas usuais (figuras e tabelas numeradas, gráficos bem feitos, etc.).
- Pesquisa sobre o tema; referências adicionais; explorações adicionais do tema do trabalho; profundidade; etc., serão considerados na nota do trabalho.

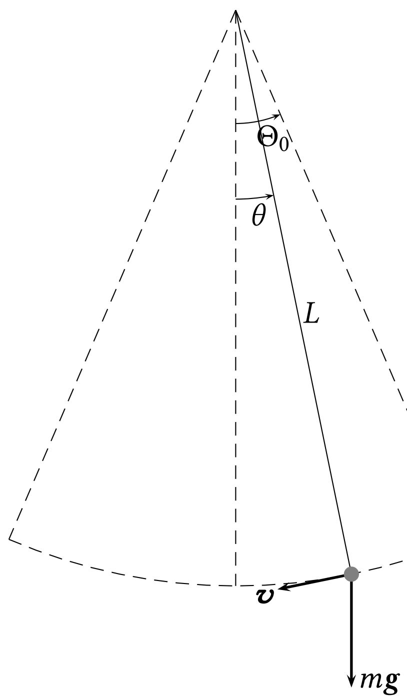

Figura 1: Um pêndulo (possivelmente) não-linear.

3 Trabalho computacional: O método de Runge-Kutta e um pêndulo não-linear

A figura 1 mostra um pêndulo cujo cabo tem comprimento L, de massa m. O pêndulo sempre parte de uma posição angular inicial $\theta = \Theta_0$, com velocidade inicial nula. O comprimento de arco descrito pelo pêndulo a partir do ponto inicial; sua velocidade escalar; e sua aceleração escalar, são

$$\begin{aligned} s &= L(\Theta_0 - \theta), \\ v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \\ a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned}$$

A $2^{\underline{a}}$ lei de Newton nos dá

$$-mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = mg\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{1}$$

A dimensão da equação (1) é

$$\frac{1}{\mathsf{T}^2},$$

mas ela pode ser adimensionalizada via

$$\begin{aligned} \tau &= t\sqrt{\frac{g}{L}}, \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{\frac{g}{L}}, \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}[\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t]}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{g}{L}. \end{aligned}$$

Substituindo agora na equação (1), obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \operatorname{sen}\theta = 0, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0 \tag{2}$$

(note que nós agora incluímos as condições inciais).

Essa equação diferencial não pode ser resolvida por métodos analíticos em termos apenas em funções transcedentais elementares (funções baseadas nas funções trigonométricas e na função exponencial (incluindo as inversas)). Se a posição angular inicial Θ_0 for "pequena", podemos aproximar o seno por uma série de Taylor apenas até o primeiro termo, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, e transformar a equação diferencial em

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta = 0, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0;\\
\theta(\tau) = A\cos\tau + B\operatorname{sen}\tau,\\
A = \Theta_0, \qquad B = 0 \;\Rightarrow\\
\theta = \Theta_0\cos\tau = \Theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).
\end{aligned}$$

Talvez a característica mais interessante dessa solução seja que o período de oscilação *não depende da amplitude* Θ_0: de acordo com a solução analítica (aproximada) acima, ele é obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) &= \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right),\\
\frac{2\pi t}{T} &= \sqrt{\frac{g}{L}}t,\\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.
\end{aligned}$$

As coisas ficam ainda mais simples nas variáveis adimensionais: o período em unidades de τ é, simplesmente,

$$T_\tau = 2\pi.$$

Para o pêndulo não linear, por outro lado, é razoável prever, com base nas ferramentas de análise dimensional discutidas no início do curso, que o período de oscilação tem a forma

$$T = f(\Theta_0)\sqrt{\frac{g}{L}},$$

onde $f(0) = 2\pi$. **O objetivo deste trabalho é a obtenção "experimental" de $f(\Theta_0)$.**

O plano agora é resolver a equação correta numericamente para um grande número de condições inciais Θ_0, e plotar o período de cada uma dessas soluções contra Θ_0.

Para resolver o problema não-linear, escrevemos, a partir de (2):

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \omega, \qquad \theta(0) = \Theta_0, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\tau} = -\operatorname{sen}\theta, \qquad \omega(0) = 0, \tag{4}$$

e resolvemos o sistema (3)–(4) com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para um grande número de condições iniciais Θ_0, a saber: $\Theta_0 = 0.05$, $\Theta_0 = 0.1$, …, $\Theta_0 = 3$. Para cada um desses valores, nós determinamos o período da solução. Em termos da variável adimensional independente τ, o período é justamente o valor de $f(\Theta_0)$.

O cálculo do período $f(\Theta_0)$ exige um algoritmo próprio, *além da solução numérica por Runge-Kutta de (3)–(4)*. Uma idéia simples e que funciona é a seguinte:

1. Adote um passo pequeno para a solução numérica de (3)–(4). Por exemplo, $\Delta\tau = 0.001$, e simule até $\tau = 50$ para obter um certo número de períodos.

2. *Para cada* Θ_0*, resolva numericamente o problema*, gerando uma lista de valores $\theta_i = \Theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$, que são a solução numérica do problema. Note que o primeiro valor é $\theta_0 = \Theta_0$, que é a condição inicial em θ do problema.

3. Percorra a lista de θ_i's para $i = 1, \ldots, N$: toda vez que $p = -\theta_{i-1}/\theta_i > 0$, a função trocou de sinal. Obtenha o zero da função $\theta(t)$ por interpolalção linear:

$$\tau_k = \tau_{i-1} + \frac{p}{1+p}\Delta\tau.$$

   Adicione τ_k a uma lista separada com os zeros de $\theta(t)$.

4. Calcule as diferenças entre esses zeros:

$$\delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}.$$

5. Obtenha a média aritmética $\overline{\delta_k}$ dos δ_k's. O período será

$$f(\Theta_0) = 2\overline{\delta_k}$$

6. Guarde esse $f(\Theta_0)$, e prossiga para o próximo Θ_0 em 2.

Você deve plotar os seus resultados para conferir. A função $f(\Theta_0)$ é mostrada na figura 2

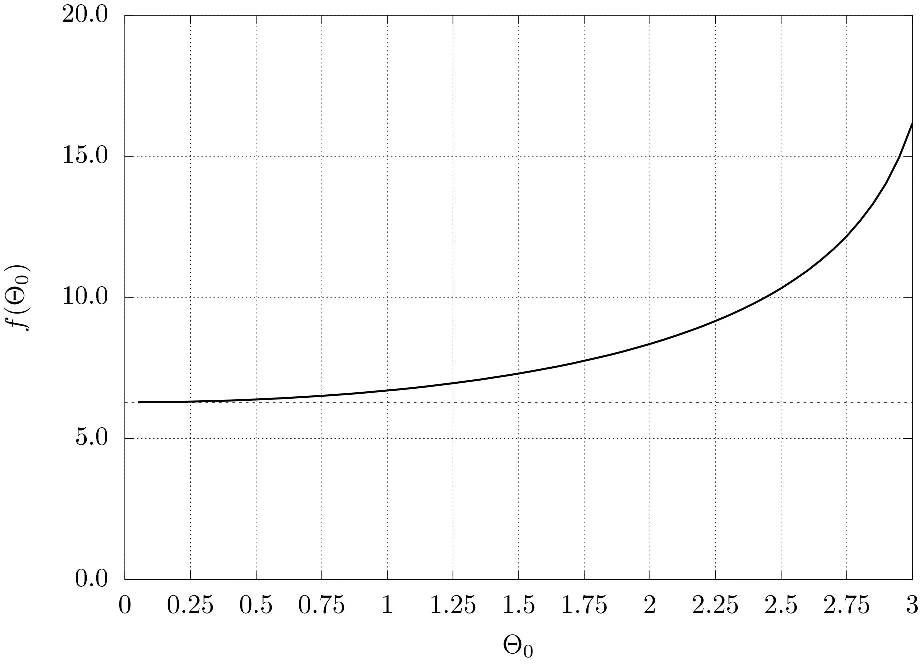

Figura 2: O período de um pêndulo não linear em função da amplitude inicial Θ_0. A linha tracejada é o valor teórico $f(0) = 2\pi$ para oscilações de pequena amplitude.