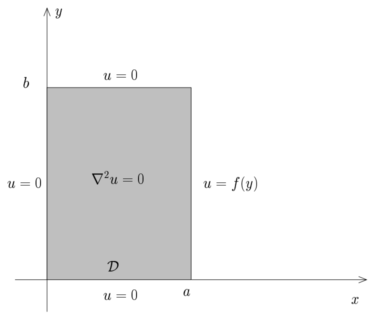
TT009 Matemática Aplicada I
P14, 15 Ago 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Seja o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



Sujeito às condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad 0 < y < b,\\ u(a,y) &= f(y) \quad 0 < y < b,\\ u(x,0) &= u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a, \end{aligned}$$

no domínio $\mathcal{D}$ retangular da figura.

a) [5,0] Faça $u = X(x)Y(y)$; obtenha as equações diferenciais $X'' - \lambda X = 0$ e $Y'' + \lambda Y = 0$. Resolva as equações diferenciais ordinárias e mostre que, *a menos de uma constante multiplicativa*, as soluções têm que ser $X = \operatorname{senh}(n\pi y/b)$ e $Y = \operatorname{sen}(n\pi x/b)$.

b) [5,0] Deduza que a solução geral é $u = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{senh}(n\pi x/b)\operatorname{sen}(n\pi y/b)$, com

$$Q_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy.$$

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Tente

$$u = X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'';$$

então,

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \Rightarrow X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Neste ponto, a maioria dos alunos supôs $\lambda > 0$ sem justificar o fato; isto é um erro **grave**. É preciso chegar a esta conclusão com o auxílio das condições de contorno. De fato,

$$Y = \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow & c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},\\ \lambda = 0 \Rightarrow & c_3 + c_4 x,\\ \lambda > 0 \Rightarrow & c_5\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_6 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x). \end{cases}$$

De $u(x,0) = u(x,b) = 0$, tem-se $Y(0) = Y(b) = 0$; note que uma solução não-trivial somente é possível no último caso, donde:

$$\begin{aligned} c_5\cos(0) + c_6\operatorname{sen}(0) = 0 &\Rightarrow c_5 = 0,\\ c_6 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}b) = 0 &\Rightarrow \sqrt{\lambda}b = n\pi,\ n = 1,2,3,\ldots, \Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Levando este valor de λ na equação diferencial ordinária para X,

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2} = 0 \Rightarrow X(x) = d_1 \cosh\frac{n\pi x}{b} + d_2 \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}.$$

Esta forma é equivalente à soma de duas exponenciais, e mais conveniente neste caso. Se você utilizasse exponenciais, seria levado necessariamente ao mesmo resultado. Da condição de contorno $X(0) = 0$, deduzo que $d_1 = 0$, de forma que os u's que atendem automaticamente às condições de contorno homogêneas são do tipo

$$u = c_6 d_2 \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}.$$

Tento portanto uma solução em série do tipo

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}.$$

Para calcular os Q_n's, uso a última condição de contorno que resta, e que é não-homogênea:

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b} = f(y)$$

$$\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}\,\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}\,dy = \int_0^b f(y)\,\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}\,dy$$

Uso agora o fato de que $\int_0^b \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{b}\,dy = 0$, quando $n \neq m$, para obter:

$$Q_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\int_0^b \operatorname{sen}^2\frac{n\pi x}{b}\,dy = \int_0^b f(y)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy.$$

A integral do seno ao quadrado precisa ser *calculada*:

$$\begin{aligned}
\int_0^b \operatorname{sen}^2\frac{n\pi x}{b}\,dy &= \frac{b}{n\pi}\int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2\frac{n\pi y}{b}\,d\frac{n\pi y}{b} \\
&= \frac{b}{n\pi}\int_0^{n\pi} \operatorname{sen}^2 u\,du \\
&= \frac{b}{n\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{n\pi}(1-\cos 2u)\,du\right] = \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
Q_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\frac{b}{2} &= \int_0^b f(y)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy, \\
Q_n &= \frac{2}{b\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b f(y)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$