TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 27 Abr 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

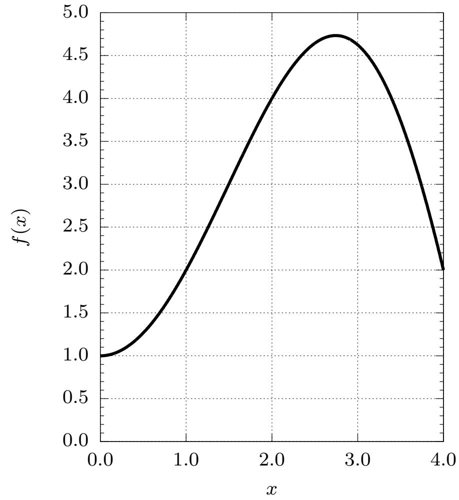
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________________

1 [20]

a) [10] Dada $f(x)$ definida no intervalo $[x_0, x_0+2h]$, deduza a regra de Simpson para 3 pontos interpolando a função $g(x) = ax^2 + bx + c$ através dos pontos (x_0, f_0), (x_1, f_1) e (x_2, f_2).

b) [05] Repetindo a fórmula obtida em (a) para $[x_0 + 2h, x_0 + 4h]$ e juntando as duas, deduza a regra de Simpson para 5 pontos, ou seja: deduza a fórmula para a integral de Simpson de envolvendo (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3) e (x_4, f_4).

c) [10] Use o resultado de (b) para obter numericamente $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, onde $f(x)$ é a função da figura ao lado. Obviamente, você tem que "ler" os valores de $f(x)$ do gráfico.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Faça $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$. Agora

$$
\begin{aligned}
c &= f_0,\\
ah^2 + bh + c &= f_1,\\
4ah^2 + 2bh + c &= f_2.
\end{aligned}
$$

Ou:

$$
\begin{aligned}
ah^2 + bh &= f_1 - f_0,\\
4ah^2 + 2bh &= f_2 - f_0.
\end{aligned}
$$

Ou:

$$
\begin{aligned}
bh &= (f_1 - f_0) - ah^2,\\
4ah^2 + 2\left[(f_1 - f_0) - ah^2\right] &= f_2 - f_0,\\
2ah^2 + 2f_1 - 2f_0 &= f_2 - f_0,\\
2ah^2 &= f_0 - 2f_1 + f_2,\\
a &= \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2},\\
bh &= f_1 - f_0 - \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2},\\
bh &= -(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2,\\
b &= \frac{-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2}{h}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2h} (ax^2 + bx + c)\, \mathrm{d}x &= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^{2h} \\
&= \frac{8ah^3}{3} + \frac{4bh^2}{2} + 2ch \\
&= \frac{8h^3}{3} \left[\frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2} \right] + \frac{4h^2}{2} \left[\frac{-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2}{h} \right] + 2f_0 h \\
&= h \left[\frac{8}{6}(f_0 - 2f_1 + f_2) \right] + 2h \left[-(3/2)f_0 + 2f_1 - (1/2)f_2 \right] + 2f_0 \\
&= h \left[(4/3 - 3 + 2)f_0 + (-8/3 + 4)f_1 + (4/3 - 1)f_2 \right] \\
&= \frac{h}{3} \left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right].
\end{aligned}
$$

b) Some dois trechos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{4h} f(x)\, \mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3} \left[f_0 + 4f_1 + f_2 \right] + \frac{h}{3} \left[f_2 + 4f_3 + f_4 \right] \\
&= \frac{h}{3} \left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4 \right].
\end{aligned}
$$

c) $h = 1$;

$$
\begin{aligned}
\int_0^{4} f(x)\, \mathrm{d}x &\approx \frac{1}{3}[1 + 4 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 4.65 + 2] \\
&= \frac{41.6}{3} = \frac{208}{15} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] A *contração* de dois tensores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ é definida por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j : B_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m \equiv A_{ij}B_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m).$$

Se $\boldsymbol{S}$ é um tensor simétrico de ordem 2, e $\boldsymbol{A}$ é um tensor anti-simétrico de ordem 2:

$$\boldsymbol{S} = S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j,\ S_{ij} = S_{ji}; \qquad \boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m,\ A_{lm} = -A_{ml},$$

mostre que

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} &= S_{ij}A_{lm}(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_m). \\
&= S_{ij}A_{lm}\delta_{jl}\delta_{im} \\
&= S_{ij}A_{ji} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}A_{ji} + \frac{1}{2}S_{ji}A_{ij} \\
&= \frac{1}{2}S_{ij}\left(A_{ji} + A_{ij}\right) = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Para $x(t), y(t) \in \mathbb{C};\ t \in \mathbb{R}$, resolva (isto é, obtenha a solução geral de):

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x - 3y,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x + y.
\end{aligned}
$$

Atenção: resolva o problema do começo ao fim com números complexos. Não se preocupe em obter soluções puramente "reais". Fica mais fácil assim!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.
$$

Os autovalores e autovetores correspondentes da matriz são:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_1 = (1, \mathrm{i}/\sqrt{3});\\
\lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \Rightarrow \boldsymbol{f}_2 = (1, -\mathrm{i}/\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

Vamos então decompor o vetor com componentes (x, y) na base canônica na base de autovetores:

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= a(1, \mathrm{i}/\sqrt{3}) + b(1, -\mathrm{i}/\sqrt{3});\\
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}/\sqrt{3} & -\mathrm{i}/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\\
a &= \frac{1}{2}\left(x - \mathrm{i}\sqrt{3}y\right),\\
b &= \frac{1}{2}\left(x + \mathrm{i}\sqrt{3}y\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, na base dos autovetores, o sistema é dado por

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}
$$

Este sistema está na forma diagonal, e tem solução

$$
\begin{aligned}
a(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t},\\
b(t) &= B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} + B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t},\\
y(t) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left[A_0 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})t} - B_0 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})t}\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ parametriza uma superfície S no $\mathbb{R}^3$, e se $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a S em cada ponto, então é verdade que

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Portanto, dada uma função vetorial $\boldsymbol{v}(x,y,z)$,

$$I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S = \int_{R_{uv}} \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sabendo disso, calcule $I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S$, onde S é a superfície

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= u^2, \\ z &= v, \end{aligned}$$

$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, e $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (1-x, 1-y, 1-z)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 2u, 0), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (2u, -1, 0), \\ \boldsymbol{v}(u,v) &= (1-u, 1-u^2, 1-v), \\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v} &= -u^2 + 2u - 1, \\ I &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} (-u^2 + 2u - 1)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2^2\boldsymbol{e}_2 + x_3^3\boldsymbol{e}_3,$$

Calcule $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 1 + 2x_2 + 3x_3^2 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹