TT009 Matemática Aplicada I
P13, 08 Ago 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Se $f(t)$, $\widehat{f}(\omega)$ são um par transformada/transformada inversa de Fourier, e f é uma função par com $f(0) \geq f(t), \forall t$, uma forma de enunciar o *princípio da incerteza* é:

$$T \equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\right] \Big/ f(0), \quad \Omega \equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\,d\omega\right] \Big/ \widehat{f}_{\text{máx}}, \quad \Omega T \geq 2\pi.$$

Considere o par transformada/transformada inversa de Fourier de funções *gaussianas*:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} \quad \leftrightarrow \quad \widehat{f}(\omega) = \sigma e^{-\left(\frac{\omega\sigma}{2}\right)^2}.$$

Use a fórmula bem conhecida $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$ para mostrar que, no caso das gaussianas acima, $\Omega T = 2\pi$, ou seja: vale a igualdade. No sentido de reduzir a incerteza, portanto, as gaussianas são uma escolha *ótima*. **Sugestão:** as gaussianas são sempre positivas, portanto esqueça-se do módulo nas definições acima; além disto, tanto f quanto $\widehat{f}$ têm seus máximos na origem.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

As integrais que aparecem nas definições de T e de Ω são

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t/\sigma)^2}\,dt \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t/\sigma)^2}\,d(t/\sigma) \\
&= \sigma; \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\,d\omega &= \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{-(\omega\sigma/2)^2}\,d(\omega\sigma/2) \\
&= 2\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{\pi}\sigma, \\
\Omega &= 2\sqrt{\pi}/\sigma, \\
\Omega T &= 2\pi \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$