TT009 Modelos Matemáticos em Engenharia Ambiental I
P1, 30 Abr 2003
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: ______________________________ Assinatura: ____________________

IMPORTANTE: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [5,0] Seja $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canônica em $\mathbb{R}^3$. Desejo construir uma base ortonormal dextrógira $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Os vetores $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ são

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \tag{1}$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1). \tag{2}$$

a) [2,0] Mostre que

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \tag{3}$$

b) [3,0] Calcule a matriz de rotação $[\mathbf{C}]$ cujos elementos atendem a $\mathbf{f}_j = \sum_i C_{ij}\mathbf{e}_i$.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

1a) é óbvia: $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$.
1b) é resolvida com $C_{ij} = (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{e}_i)$, donde

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Calcule a área da superfície externa do parabolóide de revolução $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.
SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

Com $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, e

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dydx \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, drd\theta \\ &= \pi \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$