TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 08 out 2021
Entrega em 09 out 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ________________________

---

1 [25] Considere o programa a seguir

```
1 #!/usr/bin/python
2 from numpy import array
3 a = array([1,2,3])
4 b = array([4,5,6])
5 c = a*b
6 print(c)
```

Utilizando apenas elementos de Python abordados no livro-texto, como você deve modificar o programa para que ele imprima o produto escalar $(1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6)$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Devemos modificar a linha 6 para `print(c.sum())` ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O estudo de perfis de vento na atmosfera próximo da superfície indica que a derivada da velocidade do vento médio, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, depende da distância da superfície z, da tensão média de cisalhamento do vento com a superfície τ, do fluxo de calor sensível H (que aquece a atmosfera a partir da superfície), do calor específico a pressão constante do ar c_p, da massa específica do ar ρ, e do "parâmetro de flutuabilidade" g/T, onde g é a aceleração da gravidade e T é a temperatura média do ar próximo da superfície. Essa lista pode ser significativamente reduzida definindo-se a velocidade de atrito u_* e a escala turbulenta de temperatura T_*:

$$
\begin{aligned}
u_* &\equiv \sqrt{\frac{\tau}{\rho}},\\
H &\equiv \rho c_p u_* T_*.
\end{aligned}
$$

A lista de variáveis intervenientes torna-se então z, u_*, T_*, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z$, e g/T. Utilizando como variáveis comuns, **obrigatoriamente**, z, u_* e T_*, encontre os parâmetros adimensionais que regem o problema. **Note que uma das dimensões fundamentais que deve ser usada é a temperatura** Θ.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A lista de dimensões fundamentais é L, T e Θ. A lista de variáveis e suas dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![z]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![u_*]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-1},\\
[\![T_*]\!] &= \Theta,\\
[\![du/dz]\!] &= \mathsf{T}^{-1},\\
[\![g/T]\!] &= \mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\Theta^{-1}.
\end{aligned}
$$

Os primeiro parâmetro adimensional é:

$$
\Pi_1 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} z^a u_*^b T_*^c,
$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$, e

$$
\Pi_1 = \frac{z}{u_*}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}.
$$

O segundo parâmetro adimensional é:

$$
\Pi_2 = \frac{g}{T} z^a u_*^b T_*^c
$$

donde (por inspeção) $a = 1$, $b = -2$, e $c = -1$, e

$$
\Pi_2 = \frac{gzT_*}{Tu_*^2} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

não pode ser integrada em termos de funções transcedentais elementares. No entanto, expandindo-se $\exp(-x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, é possível obter facilmente uma "série" para $f(x)$, cujos primeiros termos são

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{24} - \frac{x^{9/2}}{120} + \ldots$$

a) [10] Obtenha o termo geral da série acima, ou seja: obtenha as expressões para C_n e p_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ que concordam com os termos acima e tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{p_n}.$$

b) [15] Integrando termo a termo, encontre a série (isto é, D_n e q_n) da primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{q_n}$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}\frac{\exp(-x)}{x^{1/2}} &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!};\end{aligned}$$

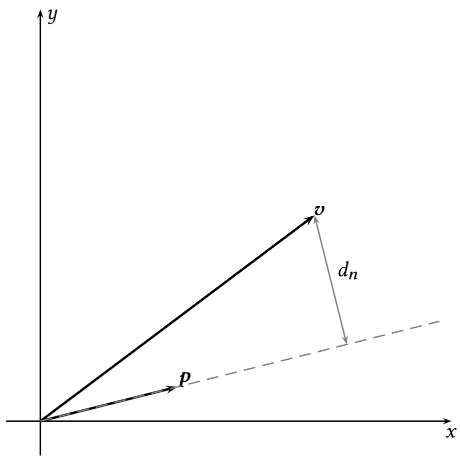
portanto, $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ e $p_n = n - 1/2$.
b) Integrando termo a termo,

$$\begin{aligned}F(x) = \int f(x)\,dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1/2}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!} x^{n+1/2};\end{aligned}$$

logo, $D_n = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}$ e $q_n = n + 1/2$ ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Na figura ao lado, se $\boldsymbol{p} = (2, 1/2)$ e $\boldsymbol{v} = (4, 3)$, obtenha d_n, a distância do ponto $(4, 3)$ à reta-suporte de $\boldsymbol{p}$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O vetor unitário $\boldsymbol{m}$ paralelo a $\boldsymbol{p}$ é

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}| &= \sqrt{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}} = \sqrt{4+1/4}\\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p}\\
&= \frac{1}{\sqrt{4+1/4}}(2, 1/2).
\end{aligned}
$$

A projeção de $\boldsymbol{v}$ na direção de $\boldsymbol{p}$ é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m} &= (4,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{4+1/4}}(2,1/2)\\
&= \frac{19}{2\sqrt{4+1/4}}
\end{aligned}
$$

Portanto, o vetor que vai da origem até imediatamente abaixo de $\boldsymbol{v}$ é

$$
\boldsymbol{w} = \frac{19}{2\sqrt{4+1/4}}\frac{1}{\sqrt{4+1/4}}(2,1/2) = \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right).
$$

O vetor que vai da ponta de $\boldsymbol{w}$ até a ponta de $\boldsymbol{v}$ é

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\\
&= (4,3) - \left(\frac{76}{17}, \frac{19}{17}\right)\\
&= \left(-\frac{8}{17}, \frac{32}{17}\right),
\end{aligned}
$$

donde

$$
d_n = \sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}} = \frac{8}{\sqrt{17}} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 29 out 2021
Entrega em 30 out 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________________

---

1 [25] Das aulas, sabemos que

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$, são os elementos da matriz da transformação $\boldsymbol{P}$, na base canônica, que projeta qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ do $\mathbb{R}^3$ no plano que passa pela origem e é normal ao vetor $\boldsymbol{k}$. Para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ não nulos e não colineares, calcule, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**,

$$[\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a} &= P_{ij} a_j \boldsymbol{e}_i = P_{il} a_l \boldsymbol{e}_i; \\
[\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}] \times \boldsymbol{k} &= \epsilon_{ijk} P_{il} a_l k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk} \left[\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right] a_l k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ijk} a_i k_j \boldsymbol{e}_k - \frac{(a_l k_l)}{k^2} \epsilon_{ijk} k_i k_j \boldsymbol{e}_k \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k})}{k^2} \underbrace{[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}]}_{\equiv \boldsymbol{0}} \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O produto escalar de dois vetores pode ser estendido para vetores no $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3),\ z_i \in \mathbb{C}\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos, via

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3; \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \equiv u_i^* v_i,$$

onde u_i^* significa o complexo conjugado de u_i. Neste caso, podemos definir o ângulo entre dois vetores do $\mathbb{C}^3$ por

$$\cos(\alpha) \equiv \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

A matriz

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa uma rotação de θ radianos no sentido positivo do eixo Ox_3 *real*. Os seus pares de autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) & \boldsymbol{v}_i &= (1, \mathrm{i}, 0), \\ \lambda_{ii} &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) & \boldsymbol{v}_{ii} &= (1, -\mathrm{i}, 0), \\ \lambda_{iii} &= 1 & \boldsymbol{v}_{iii} &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

a) [10] Calcule os ângulos entre $\boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{v}_{ii}$, $\boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{v}_{iii}$ e $\boldsymbol{v}_{ii}$ e $\boldsymbol{v}_{iii}$.

b) [15] Verifique que $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ **para cada um dos pares** $(\lambda, \boldsymbol{v})$ **acima**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) &= \frac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_{ii}}{|\boldsymbol{v}_i||\boldsymbol{v}_{ii}|} \\ &= \frac{(1, \mathrm{i}, 0) \cdot (1, -\mathrm{i}, 0)}{\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times i}\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times -\mathrm{i}}{\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times i}\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 - 1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \pi/2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_2) &= \frac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_{iii}}{|\boldsymbol{v}_i||\boldsymbol{v}_{iii}|} \\ &= \frac{(1, \mathrm{i}, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 \times 1}\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times \mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 \times 0 - \mathrm{i} \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \pi/2;; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_3) &= \frac{(1, -\mathrm{i}, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}\sqrt{1 \times 1}} \\ &= \frac{1 \times 0 + \mathrm{i} \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}\sqrt{1 \times 1}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \pi/2. \end{aligned}$$

b)

$$[C][\boldsymbol{v}_i] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = (\cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i[\boldsymbol{v}_i];$$

Continue a solução no verso ⟹

$$[C][v_{ii}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)) \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_{ii}[v_{ii}];$$

$$[C][v_{iii}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_{iii}[v_{iii}] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] A força produzida pela hélice de um navio, F, depende da frequência n de rotação, do diâmetro D da hélice, da velocidade V do navio, da aceleração da gravidade g, da massa específica da água ρ e da viscosidade cinemática da água ν. As dimensões fundamentais deste problema são M, L e T.

a) [10] *Utilizando-as nesta ordem*: 1ª linha para M, 2ª linha para L e 3ª linha para T; ordem das colunas F, n, D, V, g, ρ, ν, obtenha a matriz dimensional do problema. Nota: $[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$.

b) [15] Escreva de forma matricial explícita (com todos os elementos de cada matriz a seguir) a condição

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{b}]$$

que deve ser atendida pela matriz-coluna $[\boldsymbol{x}] = [x_1\,x_2\,\ldots\,x_7]^\top$ dos expoentes dos grupos adimensionais $\Pi = F^{x_1} n^{x_2} D^{x_3} \ldots \nu^{x_7}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A matriz dimensional é

	F	n	D	V	g	ρ	ν
M	1	0	0	0	0	1	0
L	1	0	1	1	1	−3	2
T	−2	−1	0	−1	−2	0	−1

b) A equação dos expoentes $x_1, \ldots, x_7$ dos grupos adimensionais do problema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Seja $[A_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz antissimétrica,

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

e o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = A_{ij}u_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_i u_i}{2}\right) = u_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= u_i A_{ij} u_j \\
&= A_{ij} u_i u_j \\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij}u_iu_j + A_{ji}u_ju_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) u_iu_j = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 19 nov 2021
Entrega em 20 nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1/x}^{2/x}\frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\mathrm{d}t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A regra de Leibnitz é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = f(x,b)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} - f(x,a)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{1/x}^{2/x}\frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\,\mathrm{d}t &= \frac{\operatorname{sen}(x(2/x))}{2/x}\frac{\mathrm{d}(2/x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\operatorname{sen}(x(1/x))}{1/x}\frac{\mathrm{d}(1/x)}{\mathrm{d}x} + \int_{1/x}^{2/x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\operatorname{sen}(xt)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\operatorname{sen}(2)}{2/x}\times\frac{-2}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{1/x}\times\frac{-1}{x^2} + \int_{1/x}^{2/x}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\operatorname{sen}(2)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^2\cos(xt)\,\mathrm{d}(xt) \\
&= -\frac{\operatorname{sen}(2)}{x} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{x} + \frac{1}{x}\left[\operatorname{sen}(2) - \operatorname{sen}(1)\right] = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se

$$\boldsymbol{F} = 1\boldsymbol{i}$$

dentro e sobre o círculo $\mathscr{L} : x^2 + y^2 = 1$, calcule

$$\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Use o Teorema de Green:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (P, Q) = (1, 0),\\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (1, 0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}x,\\
\oint_{\mathscr{L}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \iint_{\mathscr{S}} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} 0 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} &= x,\\
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{uv}{x} &= x,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x}\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{v}{x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}x}{x} &= 0\\
\ln|v| + \ln|x| &= k_v,\\
\ln|xv| &= k_v,\\
|xv| &= \mathrm{e}^{k_v},\\
xv &= \pm\mathrm{e}^{k_v} = C_v,\\
v &= \frac{C_v}{x};\\
v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x,\\
\frac{C_v}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{C_v}x^2,\\
u &= \frac{x^3}{3C_v} + C_u,\\
y = uv &= \left[\frac{x^3}{3C_v} + C_u\right]\frac{C_v}{x}\\
&= \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Obtenha a solução geral de

$$y'' + y = \operatorname{sen}(x).$$

Atenção: simplifique ao máximo sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y'' + y = \operatorname{sen}(x);$$

Tente

$$\begin{aligned}
y &= A(x)\cos(x) + B(x)\operatorname{sen}(x);\\
y' &= -A\operatorname{sen}(x) + B\cos(x) + \underbrace{A'\cos(x) + B'\operatorname{sen}(x)}_{=0}\\
y'' &= -A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) - A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x).
\end{aligned}$$

Substitua na EDO:

$$\begin{aligned}
y'' + y &= \operatorname{sen}(x);\\
[-A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) - A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x)] + A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x) &= \operatorname{sen}(x);\\
-A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x) &= \operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Agora resolva o sistema de EDOs

$$\begin{aligned}
A'\cos(x) + B'\operatorname{sen}(x) &= 0,\\
-A'\operatorname{sen}(x) + B'\cos(x) &= \operatorname{sen}(x);
\end{aligned}$$

Para eliminar B:

$$\begin{aligned}
A'\cos^2(x) + B'\operatorname{sen}(x)\cos(x) &= 0,\\
A'\operatorname{sen}^2(x) - B'\operatorname{sen}(x)\cos(x) &= -\operatorname{sen}^2(x);\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -\operatorname{sen}^2(x);\\
A(x) &= \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{4} + k_1.
\end{aligned}$$

Para eliminar A:

$$\begin{aligned}
A'\operatorname{sen}(x)\cos(x) + B'\operatorname{sen}^2(x) &= 0,\\
-A'\operatorname{sen}(x)\cos(x) + B'\cos^2(x) &= \operatorname{sen}(x)\cos(x);\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \operatorname{sen}(x)\cos(x);\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{2};\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2};\\
\mathrm{d}B &= \frac{2\operatorname{sen}(2x)(2\mathrm{d}x)}{4};\\
B(x) &= \frac{-\cos(2x)}{4} + k_2.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Reunindo tudo,

$$
\begin{aligned}
y &= A(x)\cos(x) + B(x)\,\mathrm{sen}(x) \\
&= \left[\frac{\mathrm{sen}(2x) - 2x}{4} + k_1\right]\cos(x) + \left[\frac{-\cos(2x)}{4} + k_2\right]\mathrm{sen}(x) \\
&= -\frac{x\cos(x)}{2} + k_1\cos(x) + \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\cos^2(x)}{4} + k_2\,\mathrm{sen}(x) - \frac{(\cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x))\,\mathrm{sen}(x)}{4} \\
&= -\frac{x\cos(x)}{2} + k_1\cos(x) + \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\cos^2(x)}{4} + k_2\,\mathrm{sen}(x) - \frac{(\cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x) - \cos^2(x) + \cos^2(x))\,\mathrm{sen}(x)}{4} \\
&= -\frac{x\cos(x)}{2} + k_1\cos(x) + \frac{2\,\mathrm{sen}(x)\cos^2(x)}{4} + \left(k_2 + \frac{1}{4}\right)\mathrm{sen}(x) - \frac{2\cos^2(x)\,\mathrm{sen}(x)}{4} \\
&= C_1\cos(x) + C_2\,\mathrm{sen}(x) - \frac{x\cos(x)}{2} \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B [EXCLUSIVAMENTE 2ª CHAMADA PARA Luis Gabriel Coutinho da Rocha Filho], 06 dez 2021
Entrega em 07 dez 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina.
Simplifique ao máximo suas soluções e inclua todos os passos relevantes.
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Obtenha a área da superfície externa de

$$\begin{aligned} x &= 2u\cos(v), \\ y &= u\,\mathrm{sen}(v), \\ z &= u, \end{aligned}$$

$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. Você deve deixar seu resultado indicado na forma

$$A_{\mathscr{S}} = \int_{v=0}^{2\pi} f(v)\,\mathrm{d}v,$$

ou seja: faça todos os cálculos até encontrar a forma **mais simples possível** para $f(v)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\\
A_{\mathscr{S}} &= \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v;\\
\boldsymbol{r} &= (2u\cos(v), u\,\mathrm{sen}(v), u);\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (2\cos(v), \mathrm{sen}(v), 1),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-2u\,\mathrm{sen}(v), u\cos(v), 0),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-u\cos(v), -2u\,\mathrm{sen}(v), 2u);\\
\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| &= \sqrt{u^2\cos^2(v) + 4u^2\,\mathrm{sen}^2(v) + 4u^2}\\
&= \sqrt{u^2\cos^2(v) + u^2\,\mathrm{sen}^2(v) + 3u^2\,\mathrm{sen}^2(v) + 4u^2}\\
&= \sqrt{3u^2\,\mathrm{sen}^2(v) + 5u^2}\\
&= u\sqrt{3\,\mathrm{sen}^2(v) + 5};\\
A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{2\pi} u\sqrt{3\,\mathrm{sen}^2(v)+5}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3\,\mathrm{sen}^2(v)+5}}{2}\,\mathrm{d}v \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dado o Teorema de Stokes,

$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}])\,\mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

faça $\boldsymbol{F} = \phi\boldsymbol{\gamma} = \phi\gamma_j\boldsymbol{e}_j$, onde $\boldsymbol{\gamma} = (1,1,1)$ e $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3)$ é um campo escalar, e mostre (usando **obrigatoriamente** notação indicial) que

$$\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi]\,\mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Do lado esquerdo,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}]) &= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \\
&= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial(\phi\gamma_j)}{\partial x_i} \\
&= n_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\gamma_j \\
&= \epsilon_{kij} n_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\gamma_j \\
&= [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi] \cdot \boldsymbol{\gamma}.
\end{aligned}$$

Do lado direito,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \phi\gamma_j \mathrm{d}r_j \\
&= \phi\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.
\end{aligned}$$

Igualando ambos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi] \cdot \boldsymbol{\gamma}\,\mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{L}} \phi\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \\
\left\{\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi]\,\mathrm{d}A\right\} \cdot \boldsymbol{\gamma} &= \left\{\oint_{\mathscr{L}} \phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right\} \cdot \boldsymbol{\gamma}; \Rightarrow \\
\int_{\mathscr{S}} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\nabla}\phi]\,\mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{L}} \phi\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x+1}uv &= (x+1)^3,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x+1}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= (x+1)^3\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \frac{2\mathrm{d}x}{x+1},\\
\ln|v| &= 2\ln|x+1| + k_v,\\
|v| &= C'_v|x+1|^2\\
v(x) &= C_v(x+1)^2\\
C_v(x+1)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= (x+1)^3,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{C_v}(x+1),\\
u(x) &= \frac{(x+1)^2}{2C_v} + C_u,\\
y(x) &= C_v(x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2C_v} + C_u\right]\\
&= \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2};\\
x^2[(r-1)rx^{r-2}] + x[rx^{r-1}] - x^r &= 0,\\
r(r-1) + r - 1 &= 0,\\
r^2 - r + r - 1 &= 0,\\
r^2 - 1 &= 0,\\
(r+1)(r-1) &= 0,\\
r &= \pm 1,\\
y(x) &= C_1x + \frac{C_2}{x} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 17 dez 2021
Entrega em 18 nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Simplifique ao máximo suas soluções e inclua todos os passos relevantes.
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ________________________

---

1 [30] Utilizando **obrigatoriamente** a fórmula de Euler, calcule

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$$

para $a > 0$, $b > 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\left[\cos(bx) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(bx)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}\\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty\\
&= \frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\\
&= \frac{1}{a^2-2\mathrm{i}ab-b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{[a^2-b^2-2\mathrm{i}ab][a^2-b^2+2\mathrm{i}ab]}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2-b^2)^2-4\mathrm{i}^2a^2b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4-2a^2b^2+b^4-4\mathrm{i}^2a^2b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2+b^2)^2},
\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30]

a) [10] Para $|z| < 1$, encontre a série de Taylor de

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

em torno de $z = 0$.

b) [20] Utilizando o resultado de (a), encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

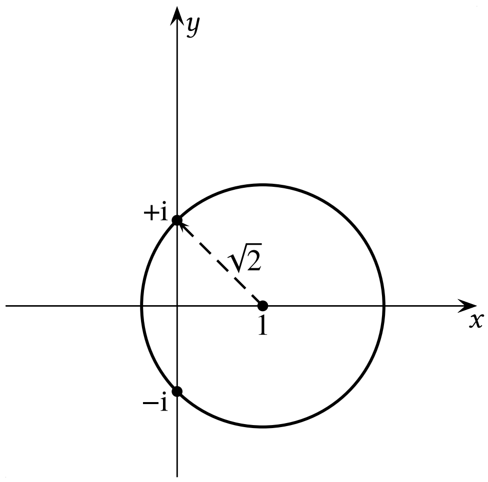
em torno de $z = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+z)^2} &= \left[\frac{1}{1+z}\right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{(1+z)}\right]\left[\frac{1}{(1+z)}\right] \\
&= \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right]\left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right] \\
&= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\qquad + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&= 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - 6z^5 + 7z^6 - 8z^7 + \ldots
\end{aligned}$$

b) A figura a seguir mostra a região de convergência da série de Laurent desejada, centrada em $z = 1$:



Desejamos uma série em potências de $z - 1$; portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{(z - 1 + 1 - \mathrm{i})^2} \\
&= \frac{1}{\left[(1-\mathrm{i})\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}} + 1\right)\right]^2} \\
&= \frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}\left[1 - 2\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right) + 3\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^2 - 4\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^3 + 5\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^4 - 6\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^5 + 7\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^6 - 8\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^7 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Dada a EDO

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0,$$

a) [05] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [35] Utilizando o método de Frobenius, encontre duas soluções linearmente independentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A forma normal é

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0;$$

Então

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1-x,\\ x^2q(x) &= x, \end{aligned}$$

são ambas analíticas, e o ponto é singular regular.
b) Faça

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1},\\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

e substitua:

$$\begin{aligned} x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned} m+r &= n+r-1,\\ m &= n-1,\\ n &= m+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r)(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r)(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0,\\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[1-(n+r)]a_n x^{n+r} &= 0,\\ r^2a_0x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r+1)^2a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n\right\}x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Faça $a_0 \neq 0$; então $r = 0$ é raiz dupla, e estamos no caso ii do Teorema 10.1 do livro-texto. A primeira solução pode ser obtida a partir de

$$
\begin{aligned}
(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n &= 0,\\
r &= 0,\\
a_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2} a_n,
\end{aligned}
$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, encontramos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1,\\
a_1 &= -1,\\
a_2 &= 0,\\
a_3 &= 0,\\
&\vdots\\
a_n &= 0, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, a 1ª solução é

$$
y_1(x) = 1 - x.
$$

A 2ª solução é da forma

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad \Rightarrow\\
y_2'(x) &= \frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},\\
y_2''(x) &= -\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação diferencial ordinária,

$$
x\left[-\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)nc_n x^{n-2}\right] + (1-x)\left[\frac{y_1}{x} + y_1'\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}\right] + y_1\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,
$$

$$
\ln(x)\left[xy_1'' + (1-x)y_1' + y_1\right] - \frac{y_1}{x} + 2y_1' + \frac{1-x}{x}y_1 + x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)nc_n x^{n-2}\right] + (1-x)\left[+\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0.
$$

Substituindo $y_1 = 1 - x$,

$$
x - 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)nc_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,
$$

Faça

$$
\begin{aligned}
m &= n-1,\\
n &= m+1.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)c_{m+1}x^m + \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m - \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n &= 3-x,\\
\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n &= 3-x,\\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-n)c_nx^n &= 3-x,\\
c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n\right]x^n &= 3-x.
\end{aligned}$$

Claramente, os expoentes 0 e 1 de x são especiais. Para esses casos,

$$\begin{aligned}
n &= 0 && \Rightarrow && c_1 = 3,\\
n &= 1 && \Rightarrow && 4c_2 = -1,\\
c_2 &= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

A partir de $n = 2$,

$$\begin{aligned}
(n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n &= 0,\\
c_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2}c_n,\\
c_3 &= \frac{1}{3^2}c_2 = -\frac{1}{3^2} \times \frac{-1}{4},\\
c_4 &= \frac{2}{4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{288},\\
c_5 &= \frac{3 \times 2}{5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{2400},\\
c_6 &= \frac{4 \times 3 \times 2}{6^2 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{21600},\\
&\vdots\\
c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 4}\\
c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2}\\
c_n &= -\frac{(n-2)!}{(n!)^2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Note que a fórmula geral para c_n também vale para $n = 2$. Portanto a 2ª solução é

$$y_2(x) = (1-x)\ln(x) + 3x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!}{(n!)^2}x^n \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

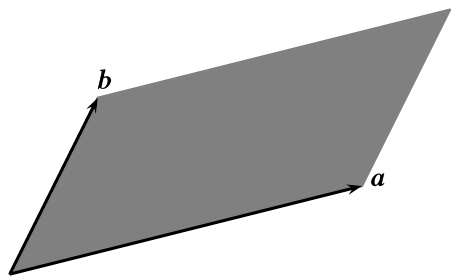
TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 20 dez 2021
Entrega em 21 nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Simplifique ao máximo suas soluções e inclua todos os passos relevantes.
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________________

---

1 [25] **Sem utilizar o produto vetorial, e sem utilizar notação indicial**, obtenha uma fórmula para a área do paralelogramo definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, envolvendo apenas: módulos de vetores, operações de soma entre vetores e produto de escalar por vetor, os próprios vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e os produtos escalares $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})$ e $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O vetor unitário na direção e no sentido de $\boldsymbol{a}$ é

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

O vetor perpendicular a $\boldsymbol{a}$ cujo módulo é a altura do paralelogramo é

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

A área do paralelogramo é

$$\begin{aligned} A &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{h}| \\ &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}| \\ &= |\boldsymbol{a}| \left| \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a})\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} \right| \\ &= |\boldsymbol{a}| \left| \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \right| \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são vetores no $\mathbb{R}^3$, calcule

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot \epsilon_{lmn} v_l w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} v_l w_m (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} v_l w_m \delta_{kn} \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmk} v_l w_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} u_i v_j v_l w_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_i v_j v_l w_m \\
&= u_i v_j v_i w_j - u_i v_j v_j w_i \\
&= (u_i v_i)(v_j w_j) - (u_i w_i)(v_j v_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre a solução geral de

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se de uma generalização da Equação de Euler para ordem 3. Faça

$$\begin{aligned} y &= x^r, \\ y' &= rx^{r-1}, \\ y'' &= (r-1)rx^{r-2}, \\ y''' &= (r-2)(r-1)rx^{r-3}, \end{aligned}$$

e substitua:

$$\begin{aligned} (r-2)(r-1)rx^r - 3(r-1)rx^r + 6rx^r - 6x^r &= 0, \\ \left[r(r^2-3r+2) - 3(r^2-r) + 6r - 6\right] &= 0, \\ r^3 - 3r^2 + 2r - 3r^2 + 3r + 6r - 6 &= 0, \\ r^3 - 6r^2 + 11r - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente, $r = 1$ é raiz. Dividindo o polinômio,

$$\begin{aligned} \frac{r^3 - 6r^2 + 11r - 6}{r-1} &= (r-3)(r-2), \\ r_1 &= 1, \\ r_2 &= 2, \\ r_3 &= 3. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] **Utilizando obrigatoriamente o Teorema dos Resíduos**, calcule

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2 + \operatorname{sen}(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

Sugestão: substitua $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, e integre ao longo do círculo unitário $|z| = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O maior problema é substituir $\operatorname{sen}(\theta)$. Mas

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
z^{-1} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
z - z^{-1} &= 2\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
2\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) &= z - \frac{1}{z} = \frac{z^2-1}{z},\\
\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}.
\end{aligned}$$

Além disso, sobre o círculo unitário,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.
\end{aligned}$$

Desejamos, portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z^2 - 4z - \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 - 4z/\mathrm{i} - 1}\,\mathrm{d}z\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4\mathrm{i}z - 1}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

O denominador é singular em:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (\sqrt{3} - 2)\mathrm{i},\\
z_2 &= (-\sqrt{3} - 2)\mathrm{i},
\end{aligned}$$

mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. O resíduo do integrando nesse ponto é

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \lim_{z\to z_1} (z - z_1)\frac{2}{z^2 + 4\mathrm{i}z - 1}\\
&= \lim_{z\to z_1} (z - z_1)\frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)}\\
&= \frac{2}{z_1 - z_2} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema dos Resíduos,

$$I = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} = -2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$