TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 30 Nov 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [20] O problema de dispersão atmosférica

$$
\begin{aligned}
U\frac{\partial C}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C(x,0)}{\partial z} &= \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0,\\
C(0,z) &= \frac{Q}{U}B(z),
\end{aligned}
$$

onde $B(z)$ é um retângulo delgado na altura de emissão, possui discretização

$$
-\mathrm{Fo}C_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_i^{n+1} - \mathrm{Fo}C_{i+1}^{n+1} = C_i^n, \qquad (\star)
$$

onde

$$
\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta x}{U\Delta z^2}
$$

e $i = 1, \ldots, N-1$ (i é o índice do eixo z). As condições de contorno podem ser implementadas numericamente fazendo

$$
C_0 = C_1, \qquad C_{N-1} = C_N.
$$

Escreva ($\star$) para esses dois casos, eliminando em cada caso a variável $C_?$ que **não** pode aparecer.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

1º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}C_0^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n,\\
-\mathrm{Fo}C_1^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n,\\
(1+\mathrm{Fo})C_1^{n+1} - \mathrm{Fo}C_2^{n+1} &= C_1^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

2º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}C_N^{n+1} &= C_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}C_{N-1}^{n+1} &= C_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}C_{N-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})C_{N-1}^{n+1} &= C_{N-1}^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere o seguinte fato: se $|f(x)| \le g(x)$, e $g(x)$ é integrável em um intervalo, então $f(x)$ também é:

$$|f(x)| \le g(x) \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Utilizando este fato, mostre que $\operatorname{sen}(x)/x$ é quadrado-integrável em $[0, +\infty)$. **Sugestão: note que** $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$**. Esta questão é fácil: a solução se baseia no fato de que** $|\operatorname{sen}(x)| \le 1$**.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2};$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2};$$

$$\operatorname{sen}^2(x) \le 1 \Rightarrow f(x) \le g(x) \;\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha a série de Fourier **complexa**, no intervalo $[0, 1]$, de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/3; \\ 0, & 1/3 < x \le 1. \end{cases}$$

Você pode deixar os coeficientes de Fourier na forma complexa.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}; \\ a = 0;\ b = 1;\ L &= 1; \\ c_n &= \frac{1}{L} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ c_0 &= 1/3; \\ n \ne 0 \Rightarrow c_n &= \int_0^{1/3} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi n}\left[\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n}{3}} - 1\right] \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |k| < k_0, \\ 0, & |k| > k_0, \end{cases}$$

calcule a sua transformada de Fourier inversa $g(x)$, usando a definição adotada neste curso.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{+k_0} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}x} \int_{-k_0}^{+k_0} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}(\mathrm{i}kx) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}x} \left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_0x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0x} \right] \\ &= \frac{1}{\pi x} \operatorname{sen}(k_0 x) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
U\frac{\partial C}{\partial x} &= K\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C}{\partial x} &= \alpha^2\frac{\partial^2 C}{\partial z^2},\\
\frac{\partial C(x,0)}{\partial z} &= \frac{\partial C(x,h)}{\partial z} = 0,\\
C(0,z) &= \frac{Q}{U}B(z),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{K}{U},\\
B(z) &= \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & |z - z_e| \le \sigma/2,\\ 0, & |z - z_e| > \sigma/2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Tente $C(x,z) = X(x)Z(z)$; a equação fica

$$
\begin{aligned}
Z\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{K}{U}X\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno sugerem um problema de Sturm-Liouville em Z:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}[X(x)Z(0)] = 0 \Rightarrow Z'(0) = 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}[X(x)Z(h)] = 0 \Rightarrow Z'(h) = 0.
\end{aligned}
$$

A equação em z fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} - \lambda Z = 0,\\
Z'(0) = Z'(h) = 0.
\end{aligned}
$$

Tentemos $\lambda = k^2 > 0$ com $k > 0$; a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= A\cosh(kz) + B\,\mathrm{senh}(kz);\\
Z'(z) &= k\left[A\,\mathrm{senh}(kz) + B\cosh(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow kA\,\mathrm{senh}(kh) = 0;\ A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda > 0$ leva à solução trivial, que não pode ser autofunção.
Tentemos $\lambda = 0$; a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= D + Fz;\\
Z'(z) &= F;\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow F = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow F = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ admite a solução não-trivial $Z(z) = D$, desde que $D \neq 0$.
Tentemos $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$. A solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= A\cos(kz) + B\,\mathrm{sen}(kz);\\
Z'(z) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kz) + B\cos(kz)\right];\\
Z'(0) = 0 &\Rightarrow kB = 0;\ B = 0;\\
Z'(h) = 0 &\Rightarrow A\,\mathrm{sen}(kh) = 0;\ k_n h = n\pi;\ k_n = \frac{n\pi}{h}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Os autovalores e as autofunções são

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{h^2},$$
$$Z_n = \cos\left(\frac{\pi n z}{h}\right).$$

Usamos agora os autovalores para obter as funções X_n correspondentes:

$$\lambda_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = 0 \ \Rightarrow X = X_{00}(\text{constante});$$
$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2 X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = -\frac{n^2\pi^2}{h^2} \ \Rightarrow X_n(x) = X_{0n}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 x}{h^2}}$$

A solução que atende às condições de contorno é

$$C(x,z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-k_n^2\alpha^2 x}\cos(k_n z).$$

Precisamos dos coeficientes de Fourier: em $x = 0$,

$$\frac{Q}{U}B(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n z).$$

Para calcular a_0, simplesmente integre:

$$\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\,dz = h\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^h a_n \cos(k_n z)\,dz}_{\equiv 0} \ \Rightarrow$$
$$a_0 = \frac{2Q}{hU}.$$

Para os demais coeficientes, $m > 0$,

$$\frac{Q}{U}B(z)\cos(k_m z) = \frac{a_0}{2}\cos(k_m z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n z)\cos(k_m z),$$
$$\frac{Q}{U}\int_0^h B(z)\cos(k_m z)\,dz = \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz,$$
$$\frac{Q}{U\sigma}\int_{z_e-\sigma/2}^{z_e+\sigma/2} \cos(k_m z)\,dz = \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz,$$
$$\frac{2Q}{U\sigma k_m}\operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e) = \frac{a_0}{2}\int_0^h \cos(k_m z)\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz.$$

As funções no lado direito do somatório acima são ortogonais:

$$\int_0^h \cos(k_n z)\cos(k_m z)\,dz = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ h/2 & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Segue-se que

$$a_m = \frac{4Q}{U\sigma\pi m}\operatorname{sen}\left(\frac{k_m\sigma}{2}\right)\cos(k_m z_e), \ m > 0 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$