TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 14 Fev 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [25] Qual é a saída do programa a seguir?

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
a = array([0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
b = (a[0:9] + a[1:10] + a[2:11])//3
print(a)
print(b)
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
[ 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10]
[1 2 3 4 5 6 7 8 9]
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda.

a) [05] Escreva u_i^{n+1} em função de u_i^n, u_{i-1}^n, u_{i-2}^n e $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$.

b) [20] Faça uma análise de estabilidade de von Neumann: quais são os valores permitidos para Co?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),\\
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),\\
u_i^{n+1} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right)u_i^n + \frac{\mathrm{Co}}{2}u_{i-2}^n.
\end{aligned}$$

b) A análise de estabilidade de von Newmann se inicia pela equação de evolução para cada harmônico do erro de arredondamento:

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right)\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \frac{\mathrm{Co}}{2}\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-2)\Delta x};\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_l\Delta x};\\
\theta &\equiv 2k_l\Delta x;\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta};\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)\right);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\cos(\theta) - \mathrm{i}\frac{\mathrm{Co}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 + \frac{\mathrm{Co}}{2}(\cos(\theta) - 1) - \mathrm{i}\frac{\mathrm{Co}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta);
\end{aligned}$$

Agora impomos

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &\le 1;\\
1 + \mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos(\theta) - 1)^2 + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta) &\le 1\\
1 + \mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) + 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta) &\le 1\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4} + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 2) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{2}(-\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta))\left[-1 + \frac{\mathrm{Co}}{2}\right] &\le 0; \Rightarrow\\
\frac{\mathrm{Co}}{2} &\le 1,\\
\mathrm{Co} &\le 2 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Um esquema implícito *upwind* para a equação da onda cinemática é

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x},$$

onde c é a celeridade da onda. Como é o esquema de Crank-Nicholson equivalente?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2}\left[\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Obtenha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{-|x|} \cos(x)\, \mathrm{d}x,$$

onde $\delta(x)$ é a delta de Dirac.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, \mathrm{d}x = f(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{-|x|} \cos(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-|0|} \cos(0) = 1 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 25 Fev 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [25] Calcule a difusividade numérica introduzida pelo esquema *upwind* explícito

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0.$$

Sugestão: note que

$$\begin{aligned}\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}&=\frac{2u_i^n}{2\Delta x}-\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}\\&=\frac{2u_i^n}{2\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{u_{i-1}^n}{\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x}-\frac{u_{i+1}^n}{2\Delta x}\\&=\frac{-u_{i+1}^n+2u_i^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Reescrevemos o termo advectivo utilizando o resultado da sugestão:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\left[\frac{-u_{i+1}^n+2u_i^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right]&=0,\\\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}&=c\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{2\Delta x},\\\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}&=D\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2},\\D&=\frac{c\Delta x}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, o esquema é equivalente a uma discretização numérica da equação de advecção-difusão, com difusividade numérica dada pela última linha acima ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas implícito para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x}\left(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right) = 0,$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda. Se as condições de contorno são $u_0 = 0$, $u_{N_x} = 0$, a matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1+\text{Co} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\text{Co} & 1+\text{Co} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\text{Co} & 1+\text{Co} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\text{Co} & 1+\text{Co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n+1} \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ \vdots \\ u_{N_x-2}^{n} \\ u_{N_x-1}^{n} \end{bmatrix},$$

onde $\text{Co} = c\Delta t/\Delta x$ é o número de Courant. Esse é um sistema que ainda pode ser resolvido pelo algoritmo de Thomas, utilizando por exemplo a rotina `tridag` apresentada em aula. Após a alocação de 3 *arrays* `A`, `B` e `C`, via

```
A = zeros(nx-1,float)
B = zeros(nx-1,float)
C = zeros(nx-1,float)
```

e supondo que o número de Courant já está calculado na variável `Cou`, escreva 3 linhas de Python que preenchem os valores de `A`, `B` e `C` para uso subsequente na rotina `tridag`. Atenção para os índices dos *slices* dos *arrays*.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
A[1:nx-1] = -Cou
B[0:nx-1]= 1.0 + Cou
C[0:nx-2] = 0.0
```
■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, verifique se

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[y_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(x_k^* y_k \right)^* \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right]^* \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \right\}^* \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^* \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* (y_k + z_k) \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* z_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* \alpha y_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* y_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} \neq 0 \Rightarrow \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \frac{k}{n} > 0 \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left[x_k^* x_k \frac{k}{n} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} 0 \times \frac{k}{n} = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

E portanto o produto interno é legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dados os vetores

$$\boldsymbol{x} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

e

$$\boldsymbol{y} = (1, 1, \ldots 1),$$

utilize a identidade

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} a_i a_j,$$

o produto interno canônico do $\mathbb{R}^n$, e a desigualdade de Schwarz para encontrar o valor de α em

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \le \alpha.$$

Sugestão: Note que neste caso devemos fazer

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A desigualdade de Schwarz é

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Agora,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}};$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};$$

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n.$$

Substituindo as 3 expressões acima na desigualdade de Schwarz encontramos

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right]^2 &\le \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right] n;\\
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};\\
2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i};\\
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{\sqrt{ij}} &\le \frac{(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 11 Mar 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO.

---

1 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ uma base ortonormal de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k,\\
\boldsymbol{b} &= \sum_{l=1}^{n} b_l \boldsymbol{e}_l.
\end{aligned}
$$

Calcule $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, **justificando todas as passagens**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k, \sum_{l=1}^{n} b_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k, b_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle a_k \boldsymbol{e}_k, b_l \boldsymbol{e}_l \rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_l \langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l \rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_l \delta_{kl}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$\phi(x) = \cos(\pi x), \qquad -1 \le x \le 1,$$

ou seja: obtenha os $c_n s$ em

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\pi \mathrm{i} n x\right).$$

Sugestão: Você pode usar os seguintes fatos:

$$\int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \ne \pm 1,$$
$$\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall n,$$
$$\int_{-1}^{+1} \cos^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a &= -1,\\
b &= +1,\\
L &= 2,\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}\phi(x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-n\pi \mathrm{i} x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para $n \ne \pm 1$, o enunciado nos informa que $c_n = 0$. Para $n = 1$, o enunciado também nos dá diretamente as integrais de interesse. Para $n = -1$,

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(-\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(-\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$c_{\pm 1} = \frac{1}{2},$$

e ficamos reduzidos ao resultado trivial

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= c_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x} + c_{+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}\\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}\right]\\
&\equiv \cos(\pi x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série de Fourier trigonométrica da extensão ímpar de

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Sabemos que todos os coeficientes dos cossenos ($A_n s$) são nulos. Os coeficientes dos senos são

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f_I(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f_I(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{+1} f(x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^{+1} x\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n},\\
f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a forma trigonométrica da série de Fourier de uma função,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

onde f é definida em $[a, b]$ e $b - a = L$, obtenha a igualdade de Parseval correspondente. Lembre-se de que os coeficientes da série de Fourier complexa são

$$c_n = \frac{1}{2}\left[A_n - \mathrm{i}B_n\right],$$

e que a desigualdade de Parseval para os coeficientes da série complexa é

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Ver a seção 14.7 do livro-texto:

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^2 + B_n^2\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02B, 18 Mar 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de funções **reais** em $[-\pi/2, +\pi/2]$, e seja o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x,$$

com

$$w(x) = \cos(x).$$

As funcões $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são ortogonais **sob esse produto interno?** Justifique matematicamente sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \operatorname{sen}(x) \times 1 \times \cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underbrace{\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{ímpar}}\underbrace{\cos(x)}_{\text{par}}}_{\text{ímpar}}\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

e as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são, de fato, ortogonais ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Seja $\mathbb{V}$ o espaço das funções **reais** quadrado-integráveis em $[0,\pi]$ com o produto interno canônico

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Faça $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$, e use obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz para encontrar α tal que

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x \le \alpha.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
|\langle f, g\rangle|^2 &\le \langle f, f\rangle \langle g, g\rangle,\\
\left|\int_0^\pi 1\times\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2 &\le \left[\int_0^\pi 1^2\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^\pi \left(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \pi\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi;\\
\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{2\pi} = \alpha \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha os coeficientes c_n da série de Fourier **complexa** de $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $-1 \le x \le +1$. **Sugestão**: preste bastante atenção às integrais de funções pares e ímpares envolvidas, e às simplificações possíveis.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
a &= -1,\\
b &= +1,\\
L &= 2,\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\left[\cos(\pi n x) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi n x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\left[\cos(\pi n x) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi n x)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\cos(\pi n x)}_{\text{par}}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\mathrm{sen}(\pi n x)}_{\text{ímpar}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\cos(\pi n x)}_{\text{par}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{0}^{+1} \mathrm{e}^{-x}\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2 + 1} - \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}\left(\pi^2 n^2 + 1\right)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-|k|}\cos(k),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-|k|}\operatorname{sen}(k),$$

obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2}\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi\mathrm{e}^{-|k|}\cos(k) - \mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-|k|}\operatorname{sen}(k)\right]$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}\left[\cos(k) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(k)\right]$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-(|k|+\mathrm{i}k)}}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 01 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Generalize a identidade de Parseval. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções complexas de uma variável real x no intervalo $[a, b]$, e se

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \mathrm{e}^{\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}},\\
g(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}},
\end{aligned}
$$

obtenha

$$
\frac{1}{L}\int_a^b f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x
$$

como uma soma sobre os $c_n s$ e $d_n s$. **Sugestão:** escreva o produto $f^*(x)g(x)$ em termos das séries de Fourier acima, e integre de a até b. Observe que

$$
\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}\,\mathrm{d}x = \delta_{mn} L.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
f^*(x)g(x) &= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^* \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}\right]\\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}};\\
\int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2m\pi \mathrm{i} x}{L}} \mathrm{e}^{\frac{2n\pi \mathrm{i} x}{L}}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_m^* d_n \delta_{mn} L \;\Rightarrow\\
\frac{1}{L}\int_a^b f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* d_n \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **Usando obrigatoriamente funções de Green**, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + tx &= f(t),\\
x(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \tau G(t,\tau)x(\tau) &= G(t,\tau)f(\tau),\\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
G(t,\tau)x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

Faça $G(t,\infty) = 0$;

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G\right]\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau;\\
-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G = \delta(\tau - t) &\;\Rightarrow\\
x(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Agora resolvemos a EDO para $G(t,\tau)$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G &= \delta(\tau - t),\\
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau),\\
-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + \tau uv &= \delta(\tau - t),\\
u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \tau v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t),\\
-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \tau v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} &= \tau v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \tau \mathrm{d}\tau,\\
\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\xi=0}^{\tau} \xi \mathrm{d}\xi,\\
\ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2},\\
v(t,\tau) &= v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}};\\
-v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\delta(\tau - t),\\
\int_{u(t,0)}^{u(t,\tau)} \mathrm{d}u &= -\frac{1}{v(t,0)}\int_{\xi=0}^{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi,\\
u(t,\tau) - u(t,0) &= -\frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau - t),\\
u(t,\tau) &= u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau - t).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Substituímos agora na função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau) \\
&= \left[u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau-t)\right]v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}} \\
&= G(t,0)\mathrm{e}^{\tau^2/2} - H(\tau-t)\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2} \\
&= \left[G(t,0) - H(\tau-t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]\mathrm{e}^{\tau^2/2}.
\end{aligned}
$$

mas

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau) = 0 \;\Rightarrow \\
&G(t,0) = \mathrm{e}^{-t^2/2}, \\
&G(t,\tau) = \left[\mathrm{e}^{-t^2/2} - H(\tau-t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]\mathrm{e}^{\tau^2/2} \\
&\qquad = \left[1 - H(\tau-t)\right]\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty} \left[1 - H(\tau-t)\right]\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3

a) [12.5] Calcule

$$\widehat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x.$$

Se $\delta(x) = \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}$, onde

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0,\\ 0 & x < 0,\end{cases}$$

mostre que

$$\widehat{H}(k) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}.$$

b) [12.5] Prove que

$$\mathscr{F}\{f(x-a)\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\widehat{f}(k) \Leftrightarrow f(x-a) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-a)}\,\mathrm{d}k.$$

Sugestão: faça $\xi = x - a$ e substitua na definição de $\mathscr{F}\{f(x-a)\}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{2\pi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x},\\ \widehat{\delta}(k) &= \mathrm{i}k\widehat{H}(k),\\ \widehat{H}(k) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f(x-a)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\xi+a)}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\widehat{f}(k)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Desenhe a função $H(x+L) - H(x-L)$, onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Utilizando obrigatoriamente a transformada de Fourier, e os resultados da questão **3** (mesmo que você não tenha conseguido fazê-la), resolva a EDP

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} &= 0,\\ u &= \text{constante},\\ c(x,0) &= c_0\left[H(x+L) - H(x-L)\right],\\ c_0 &= \text{constante}.\end{aligned}$$

Sugestão: não use $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)$; deixe todas as exponenciais complexas intactas e interprete, utilizando os resultados da questão **3**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + u\mathrm{i}k\widehat{c} &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\widehat{c}} &= -u\mathrm{i}k\mathrm{d}t,\\ \ln\frac{\widehat{c}(k,t)}{\widehat{c}(k,0)} &= -u\mathrm{i}kt,\\ \widehat{c}(k,t) &= \widehat{c}(k,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}.\end{aligned}$$

Agora encontramos $\widehat{c}(k,0)$:

$$\begin{aligned}\widehat{c}(k,0) &= \mathscr{F}\{c(x,0)\}\\ &= \mathscr{F}\{c_0\left[H(x+L) - H(x-L)\right]\}\\ &= \frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\right].\end{aligned}$$

Voltando ao problema original,

$$\begin{aligned}c(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{c}(k,t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k - \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kut}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\ &= \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ut+L)}\,\mathrm{d}k - \int_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_0}{2\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-ut-L)}\,\mathrm{d}k\\ &= c_0H(x-ut+L) - c_0H(x-ut-L)\\ &= c_0\left[H(x-ut+L) - H(x-ut-L)\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 08 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2, & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

obtenha a sua transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$, sabendo que

$$\int_0^a \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{sen}(ak) - 2ak\cos(ak)}{a^2k^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\,\mathrm{sen}(ak) - 2ak\cos(ak)}{\pi a^2k^3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **Usando obrigatoriamente funções de Green**, resolva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + tx = f(t),$$
$$x(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \tau G(t,\tau)x(\tau) = G(t,\tau)f(\tau),$$
$$\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$G(t,\tau)x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} \tau G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

Faça $G(t,\infty) = 0$;

$$\int_{\tau=0}^{\infty} x(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G\right]\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau;$$
$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G = \delta(\tau - t) \;\Rightarrow$$
$$x(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Agora resolvemos a EDO para $G(t,\tau)$:

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \tau G = \delta(\tau - t),$$
$$G(t,\tau) = u(t,\tau)v(t,\tau),$$
$$-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + \tau uv = \delta(\tau - t),$$
$$u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \tau v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \delta(\tau - t),$$
$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \tau v = 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \tau v,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \tau\mathrm{d}\tau,$$
$$\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_{\xi=0}^{\tau} \xi\mathrm{d}\xi,$$
$$\ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} = \frac{\tau^2}{2},$$
$$v(t,\tau) = v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}};$$
$$-v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \delta(\tau - t),$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2}}\delta(\tau - t),$$
$$\int_{u(t,0)}^{u(t,\tau)} \mathrm{d}u = -\frac{1}{v(t,0)}\int_{\xi=0}^{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$u(t,\tau) - u(t,0) = -\frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau - t),$$
$$u(t,\tau) = u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau - t).$$

Continue a solução no verso ⟹

Substituímos agora na função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau)\\
&= \left[u(t,0) - \frac{1}{v(t,0)}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}H(\tau-t)\right]v(t,0)\mathrm{e}^{\frac{\tau^2}{2}}\\
&= G(t,0)\mathrm{e}^{\tau^2/2} - H(\tau-t)\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2}\\
&= \left[G(t,0) - H(\tau-t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]\mathrm{e}^{\tau^2/2}.
\end{aligned}
$$

mas

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau) = 0 \;\Rightarrow\\
&G(t,0) = \mathrm{e}^{-t^2/2},\\
&G(t,\tau) = \left[\mathrm{e}^{-t^2/2} - H(\tau-t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]\mathrm{e}^{\tau^2/2}\\
&\qquad\quad = \left[1 - H(\tau-t)\right]\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{\tau=0}^{\infty}\left[1 - H(\tau-t)\right]\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_{\tau=0}^{t}\mathrm{e}^{(\tau^2-t^2)/2}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se

$$f(x) = x,$$
$$g(x) = \mathrm{e}^{-|x|},$$

Calcule a integral de convolução (no sentido de Fourier) $[f * g](x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[f * g](x) &= \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi=-\infty}^{0} (x-\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{+\infty} (x-\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\xi=-\infty}^{0} (x-\xi)\mathrm{e}^{\xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\xi=0}^{+\infty} (x-\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= (x+1) + (x-1) = 2x \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Dada a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + E\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4},$$

onde D e E são constantes reais e $\phi = \phi(x,t)$, obtenha a equação diferencial ordinária em $\widehat{\phi}(k,t)$, onde

$$\widehat{\phi}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,t)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

é a transformada de Fourier de $\phi(x,t)$ (em relação a x). **Não tente resolver a equação resultante**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} &= D(\mathrm{i}k)^2\widehat{\phi} + E(\mathrm{i}k)^4\widehat{\phi},\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} &= -Dk^2\widehat{\phi} + Ek^4\widehat{\phi},\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} &= \left[-Dk^2 + Ek^4\right]\widehat{\phi} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

21

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALUNO GENÉRICO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

20

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALUNO GENÉRICO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= 0,\\ f(0) &= 0,\\ f(1) &= 1.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

19

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: FELIPE BORTOLLETTO CIVITATE Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

18

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: CAMILA RIBEIRO SCHNEIDER Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$\nabla^2 f = 0,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(1) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= 0,\\
\phi(0, y) &= 0,\\
\phi(a, y) &= 0,\\
\phi(x, 0) &= 0,\\
\phi(x, b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

17

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: VITOR KURTEN FEITOSA Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

16

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABRIELA DA SILVEIRA MULLER Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

15

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: MIRELLY LACERDA PINHEIRO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

14

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ROBERTA MARIA TELLES KULIK Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

13

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALEXANDRE SOKOLOSKI DE MACEDO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

12

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: LISANDRA GONÇALVES DIAS Assinatura: ____________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

11

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: HIAN DA SILVA PINTO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

10

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: PAULO VINICIUS ALVES Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

9

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GRENDA IZABELI MENEZES DA SILVA Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

8

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: EMILI BATISTA DA SILVA Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

7

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: BARBARA SANCHES ANTUNES GOELDNER Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

6

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ALESSANDRO ENOS TULIO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

5

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: BRENDA CAMILA FERREIRA Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0, \\
f(0) &= 0, \\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0, y) &= 0,\\
\phi(a, y) &= 0,\\
\phi(x, 0) &= 0,\\
\phi(x, b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

4

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GIOVANA SABBAG PIURKOSKI Assinatura: ________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

3

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: RAFAELA COSTA MIRABILE Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

2

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: ARIANE APARECIDA CRUZ DA SILVA Assinatura: ____________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0, 1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

1

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: KAROLLYN LARISSA DE QUADROS Assinatura: ______________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \alpha^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} &= F,\\
A &= 1,\\
B &= 1,\\
C &= 1,\\
\Delta &= B^2 - AC = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação é parabólica ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t};\\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \phi_0/L;\\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na EDP, encontramos

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
$$

Substituindo as condições iniciais e de contorno, encontramos:

$$
\begin{aligned}
&\phi(x,0) = u(x,0) + \phi_0(1 - x/L) = 0;\\
&u(x,0) = -\phi_0(1 - x/L).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi(0,t) = u(0,t) + \phi_0 = \phi_0;\\
&u(0,t) = 0;\\
&\phi(L,t) = u(L,t) = 0;\\
&u(L,t) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, agora as condições de contorno em u são homogênas. Resolvemos agora um problema bem conhecido para $u(x,t)$ (ver seção 17.3 do livro-texto):

Continue a solução no verso ⟹

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
&\vdots,\\
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
T_n(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\
&= -\phi_0(1-x/L);\\
&\vdots\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L -\phi_0(1-x/L)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2\phi_0}{\pi n};\\
\phi(x,t) &= \phi_0(1-x/L) - \phi_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= 0,\\ f(0) &= 0,\\ f(1) &= 1.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Obviamente,

$$\nabla^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 0,\\ &f(x) = ax + b,\\ &f(0) = 0 \ \Rightarrow b = 0,\\ &f(1) = 1 \ \Rightarrow a = 1,\\ &f(x) = x \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= X(x)Y(y),\\
Y\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Claramente, o candidato a um problema de Sturm-Liouville é a equação em x:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= \lambda X,\\
X(0) &= 0,\\
X(a) &= 0,\\
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad n = 1,2,\ldots,\\
X_n &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).
\end{aligned}
$$

A equação em y é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= -\lambda Y_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n,\\
\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n &= 0,\\
Y_n &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right).
\end{aligned}
$$

A solução geral é do tipo

$$
\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Agora,

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi 0}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,\\
\phi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,\\
A_n &= 0;\\
\phi(x,b) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \phi_0 x,
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x = \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{a}{2} &= \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\, \mathrm{d}x,\\
B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{a}{2} &= -\phi_0 \frac{a^2(-1)^m}{m\pi},\\
B_m &= -\phi_0 \frac{2a(-1)^m}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right) m\pi} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 06 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [20] Classifique a equacao diferencial (elítica, parababólica ou hiperbólica?) abaixo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} &= F,\\
A &= 1,\\
B &= 1/2,\\
C &= 0,\\
\Delta = B^2 - AC &= 1/4 > 0
\end{aligned}$$

Portanto, a equação é hiperbólica ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [40] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x} = xt, \qquad \phi(x,0) = f(x),$$

para $-\infty \le x \le +\infty$, $t \ge 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi = \Phi(s)$, $x = X(s)$ e $t = T(s)$. A derivada total de Φ e a EDP são

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s},\\
xt &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Isso nos dá 3 EDO*s*:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X(s),\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
T(s) &= s \qquad \Leftrightarrow s = t;\\
\frac{\mathrm{d}X}{X} &= \mathrm{d}s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \frac{\mathrm{d}X}{X} &= \int_{\sigma=0}^{s} \mathrm{d}\sigma,\\
\ln\left(\frac{X(s)}{X(0)}\right) &= s,\\
X(s) &= X(0)\mathrm{e}^{s};\\
\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= X(0)s\mathrm{e}^{s},\\
\mathrm{d}\Phi &= X(0)s\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s,\\
\int_{\Phi(0)}^{\Phi(s)} &= X(0)\int_{\sigma=0}^{s} \sigma\mathrm{e}^{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma,\\
\Phi(s) - \Phi(0) &= X(0)\left[(s-1)\mathrm{e}^{s} + 1\right],\\
\Phi(s) &= \Phi(0) + X(0)\left[(s-1)\mathrm{e}^{s} + 1\right].
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
X(0) &= X(s)\mathrm{e}^{-s} = x\mathrm{e}^{-t};\\
\Phi(0) &= \phi(X(0),T(0)) = \phi(X(0),0) = f(X(0)) = f(x\mathrm{e}^{-t});
\end{aligned}$$

portanto,

$$\phi(x,t) = f(x\mathrm{e}^{-t}) + x\mathrm{e}^{-t}\left[(t-1)\mathrm{e}^{t} + 1\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -kx, \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0, \qquad \phi(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = 0,$$

$k > 0$, $L > 0$. Obtenha uma solução da forma

$$\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x),$$

onde ψ é uma solução da equação de onda homogênea (sem o termo $-kx$), e $u(x)$ é uma solução de regime permanente, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -kx.$$

Você pode usar o seguinte fato:

$$\int_0^L x(L^2 - x^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{6L^4(-1)^m}{\pi^3 m^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{kx^2}{2} + A,\\
u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B
\end{aligned}$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL,\\
A &= \frac{kL^2}{6},\\
u(x) &= \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].
\end{aligned}$$

Como fica o problema em ψ?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[\psi + u]}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2[\psi + u]}{\partial t^2} + kx = 0,\\
\underbrace{[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + kx]}_{=0} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}$$

Restou, portanto, a equação clássica da onda em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{aligned}
0 = \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(0,t) = 0,\\
0 = \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(L,t) = 0,\\
0 = \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right] \qquad &\Rightarrow \qquad \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right],\\
0 = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x,0) + u(x)] \qquad &\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$\begin{aligned}
X''T &= \frac{1}{c^2}XT''\\
\frac{X''}{X} &= \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + B_n\cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Agora,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0 \Rightarrow B_n = 0,$$
$$\psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right],$$
$$-\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow$$
$$-\int_0^L\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = A_m\frac{L}{2},$$

cujo resultado é

$$A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2-x^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k(-1)^nL^3}{n^3\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 09 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Considere a equação diferencial parcial

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -ku,
$$

onde $[\![c]\!] = \mathsf{LT}^{-1}$ e $[\![k]\!] = \mathsf{T}^{-1}$. Discretize-a, com um esquema **totalmente implícito**, **progressivo** no tempo e **centrado** no espaço, obtendo

$$
Au_{i-1}^{n+1} + Bu_i^{n+1} + Cu_{i-1}^{n+1} = Du_i^n.
$$

Encontre A, B, C e D em função de c, k, Δx e Δt.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= -ku_i^{n+1},\\
u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= -k\Delta t u_i^{n+1},\\
(1 + k\Delta t)\, u_i^{n+1} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= u_i^n,\\
\frac{c\Delta t}{2\Delta x}u_{i+1}^{n+1} + (1 + k\Delta t)\, u_i^{n+1} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}u_{i-1}^{n+1} &= u_i^n; \ \Rightarrow\\
A &= \frac{c\Delta t}{2\Delta x},\\
B &= (1 + k\Delta t)\,,\\
C &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x},\\
D &= 1 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Verifique se

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x,$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções complexas em $[0,1]$, e $w(x) = x - 1$ é uma função real e **não-positiva** em $[0,1]$, é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Para que a operação definida acima seja um produto interno legítmo, ela precisa atender às propriedades definidoras

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\,,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &> 0, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= 0, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \left[f(x) g^*(x) w(x) \right]^*\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\int_0^1 g^*(x) f(x) w(x) \right]^*\\
&= \langle g, f \rangle^*\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g + h \rangle &= \int_0^1 f^*(x) [g(x) + h(x)] w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f^*(x) h(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha g \rangle &= \int_0^1 f^*(x) [\alpha g(x)] w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \alpha \int_0^1 f^*(x) g(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \alpha \langle f, g \rangle\,;
\end{aligned}$$

Se $f \not\equiv 0$ em $[0,1]$,

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \int_0^1 f^*(x) f(x) w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \underbrace{|f(x)|^2}_{>0} \underbrace{w(x)}_{\leq 0}\,\mathrm{d}x < 0,
\end{aligned}$$

e portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **não** é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série **trigonométrica** de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le +1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]; \\
L &= b - a = 1 - (-1) = 2; \\
A_0 &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}; \\
A_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n \xi}{2}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \xi \cos\left(\pi n \xi\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}; \\
B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n \xi}{L}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n \xi}{2}\right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}\left(\pi n \xi\right) \mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\phi(1,t) &= 1,\\
\phi(x,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sugestão: As condições de contorno não levam a um problema de Sturm-Liouville em ϕ. Faça $\phi(x,t) = u(x,t) + x$. Substitua $u(x) + x$ na equação diferencial parcial. Agora, você vai obter um problema de Sturm-Liouville a partir de $u(x)$. Prossiga.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,t) &= u(x,t) + x,\\
\frac{\partial[u+x]}{\partial t} &= \frac{\partial^2[u+x]}{\partial x^2},\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\\
u(0,t) &= \phi(0,t) - 0 = 0,\\
u(1,t) &= \phi(1,t) - 1 = 1 - 1 = 0;\\
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2},\\
\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda;\\
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &+ \lambda X = 0,\\
X(0) &= X(1) = 0;\\
\lambda_n &= n^2\pi^2,\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x);\\
T_n(x) &= \mathrm{e}^{-n\pi t};\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t);\\
u(x,0) &= \phi(x,0) - x;\\
-x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x);\\
-x\operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x);\\
-\int_0^1 x\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x;\\
-\int_0^1 x\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= A_m \int_0^1 \operatorname{sen}^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{A_m}{2};\\
A_m &= -2\int_0^1 x\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi};\\
\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\mathrm{e}^{-n\pi t} + x \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FB, 13 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Considere a solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

utilizando um esquema de diferenças finitas explícito, "upwind":

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x},$$

onde todos os símbolos têm os significados usuais utilizados no livro-texto. Suponha que você declarou (também da forma usual) o `array` com as soluções em dois passos de tempo seguidos:

```
u = zeros((2,nx+1),float)
```

Sejam `old` e `new` os índices para `u` nos instantes n e $n+1$, e considere que os índices `i=0` e `i=nx` indicam o contorno da grade computacional. Escreva o cálculo de `u[new,1:nx]` **em uma linha de Python**, utilizando *slicing*. Considere que você tem uma variável `Co` com o número de Courant $c\Delta t/\Delta x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Co*(u[old,1:nx]-u[old,0:nx-1]) ■
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sejam $P_n(x)$ os polinômios reais de grau n ortogonais no intervalo $x \in [-1, +1]$ em relação ao produto interno usual

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x,$$

e tais que $P(1) = 1$. Os dois primeiros são

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x. \end{aligned}$$

Faça $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ e obtenha a, b e c de tal forma que

$$\begin{aligned} P_2(1) &= 1, \\ \langle P_0, P_2 \rangle &= 0, \\ \langle P_1, P_2 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} P_2(1) &= a + b + c = 1; \\ \int_{-1}^{+1} P_0(x) P_2(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} (ax^2 + bx + c) \, \mathrm{d}x \\ &= \left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2a}{3} + 2c = 0; \\ \int_{-1}^{+1} P_1(x) P_2(x) \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} x(ax^2 + bx + c) \, \mathrm{d}x \\ &= \left. \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \right|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2b}{3} = 0; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= 3/2, \\ b &= 0, \\ c &= -1/2 \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Sabendo que

$$\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x) = 2\cos(x)\cos(kx),$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi(1+k)}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1+k)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\pi(1-k)}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1-k)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}((1+k)x)\bigg|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{4\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}((1-k)x)\bigg|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\
&= \frac{2}{4\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{2}{4\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} &= x,\\
u(x,0) &= f(x).
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
x &= X(s),\\
t &= T(s),\\
u(x,t) &= u(X(s),T(s)) = U(s);\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s},\\
x &= \frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= T(s),\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s);\\
T(s) &= s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}X &= \int_{\sigma=0}^{s} \sigma\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}s^2;\\
X(s) &= X(0) + \frac{1}{2}s^2;\\
X(0) &= X(s) - \frac{1}{2}s^2 = x - \frac{t^2}{2};\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= [X(0) + \frac{1}{2}s^2];\\
\int_{U(0)}^{U(s)} \mathrm{d}U &= \int_{\sigma=0}^{s} [X(0) + \frac{1}{2}\sigma^2]\,\mathrm{d}\sigma,\\
U(s) - U(0) &= X(0)s + \frac{1}{6}s^3;\\
U(0) &= u(X(0),T(0)) = u(x - t^2/2, 0) = f(x - t^2/2);\\
U(s) &= u(x,t) = f(x - t^2/2) + [x - t^2/2]t + \frac{1}{6}t^3 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹