TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 11 Mar 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO.

---

1 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ uma base ortonormal de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k,\\
\boldsymbol{b} &= \sum_{l=1}^{n} b_l \boldsymbol{e}_l.
\end{aligned}
$$

Calcule $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, **justificando todas as passagens**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k, \sum_{l=1}^{n} b_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k, b_l \boldsymbol{e}_l \right\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle a_k \boldsymbol{e}_k, b_l \boldsymbol{e}_l \rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_l \langle \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l \rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_l \delta_{kl}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Obtenha a série de Fourier **complexa** de

$$\phi(x) = \cos(\pi x), \qquad -1 \le x \le 1,$$

ou seja: obtenha os $c_n s$ em

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\pi i n x\right).$$

Sugestão: Você pode usar os seguintes fatos:

$$\int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n \ne \pm 1,$$
$$\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall n,$$
$$\int_{-1}^{+1} \cos^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a &= -1,\\
b &= +1,\\
L &= 2,\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{2n\pi i x}{L}}\phi(x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-n\pi i x}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para $n \ne \pm 1$, o enunciado nos informa que $c_n = 0$. Para $n = 1$, o enunciado também nos dá diretamente as integrais de interesse. Para $n = -1$,

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(-\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(-\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \cos(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x + \frac{i}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x,\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$c_{\pm 1} = \frac{1}{2},$$

e ficamos reduzidos ao resultado trivial

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= c_{-1}\mathrm{e}^{-i\pi x} + c_{+1}\mathrm{e}^{i\pi x}\\
&= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-i\pi x} + \mathrm{e}^{i\pi x}\right]\\
&\equiv \cos(\pi x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série de Fourier trigonométrica da extensão ímpar de

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Sabemos que todos os coeficientes dos cossenos ($A_n s$) são nulos. Os coeficientes dos senos são

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f_I(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f_I(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+1} f(x) \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+1} x \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}, \\
f_I(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \operatorname{sen}(n\pi x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a forma trigonométrica da série de Fourier de uma função,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right),$$

onde f é definida em $[a, b]$ e $b - a = L$, obtenha a igualdade de Parseval correspondente. Lembre-se de que os coeficientes da série de Fourier complexa são

$$c_n = \frac{1}{2}\left[A_n - \mathrm{i}B_n\right],$$

e que a desigualdade de Parseval para os coeficientes da série complexa é

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Ver a seção 14.7 do livro-texto:

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n^2 + B_n^2\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹