TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 22 Jun 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O seguinte trecho de programa,

```
def ff(x,y):
    a = 0.00001
    b = 1.0/14.0
    return array([-a*y[0]*y[1],a*y[0]*y[1] - b*y[1],b*y[1]])
```

é usado para resolver um sistema de equações

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}$$

com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Baseando-se no código mostrado, escreva as fórmulas de f_1, f_2 e f_3.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} f_1 &= -ay_1y_2, \\ f_2 &= ay_1y_2 - by_2, \\ f_3 &= by_2 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Simplifique **ao máximo** cada uma das expressões abaixo, deixando (no máximo) quantidades reais no denominador. Na resposta final, todas as exponenciais complexas do tipo $e^{i\theta}$ devem ser convertidas para a forma algébrica correspondente, $x + iy$.

(a) $\dfrac{1}{1-4i}$ (c) $\left[\dfrac{1}{1-i}\right]^{1/4}$

(b) $\left[2e^{i\pi/6}\right]^3$ (d) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-4i} &= \frac{1+4i}{(1-4i)(1+4i)}\\ &= \frac{1+4i}{1-16i^2}\\ &= \frac{1+4i}{17} \ \blacksquare\end{aligned}$$

(b)

$$\left[2e^{i\pi/6}\right]^3 = 8e^{i\pi/2} = 8i \ \blacksquare$$

(c)

$$\begin{aligned}w &= \left[\frac{1}{1-i}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{1+i}{2}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2k\pi)}}{2}\right]^{1/4}\\ &= \left[\frac{e^{i(\pi/4+2k\pi)}}{2^{1/2}}\right]^{1/4}\\ &= \frac{1}{2^{1/8}}e^{i\pi/16+k\pi/2}, \qquad k = 0,1,2,3 \qquad \Rightarrow\\ w_1 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(\pi/16) + i\,\mathrm{sen}(\pi/16)\right),\\ w_2 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(9\pi/16) + i\,\mathrm{sen}(9\pi/16)\right),\\ w_3 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(17\pi/16) + i\,\mathrm{sen}(9\pi/16)\right),\\ w_2 &= \frac{1}{2^{1/8}}\left(\cos(25\pi/16) + i\,\mathrm{sen}(25\pi/16)\right) \ \blacksquare\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} &= \frac{(1-i)+(1+i)}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{2}{2} = 1 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Encontre **uma** solução da equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

da forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Obtenha a forma geral dos a_n's.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y'' + \frac{1}{x}y' + y &= 0\\
xy'' + y' + xy &= 0\\
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}\\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{r+m-1}\\
xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)(r+n) a_n x^{r+n-1}
\end{aligned}$$

Reunindo todos os termos em x^{r+m-1},

$$[a_0 r + a_0(r-1)r]\, x^{r-1} + [a_1(r+1) + a_1 r(r+1)]\, x^r + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n\,[(r+n) + (r+n-1)(r+n)] + a_{n-2}\}\, x^{r+n-1} = 0.$$

A equação indicial é

$$r + r^2 - r = 0 \ \Rightarrow\ r = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
a_n\,[n + (n-1)n] + a_{n-2} &= 0\\
a_n n^2 + a_{n-2} &= 0\\
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Para conseguir uma fórmula geral, note que

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2},\\
a_4 &= -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{4^2 \times 2^2} = +\frac{a_0}{(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = +\frac{a_0}{[2^2(2\times 1)]^2},\\
a_6 &= -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{6^2 \times 4^2 \times 2^2} = -\frac{a_0}{(2\times 3)^2(2\times 2)^2(2\times 1)^2} = -\frac{a_0}{[2^3(3\times 2\times 1)]^2},\\
&\ \vdots\\
a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{[2^k k!]^2}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Calcule

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{\zeta^4}{\zeta - [1+\mathrm{i}]}\, \mathrm{d}\zeta,$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo definido por

$$|\zeta - [1+\mathrm{i}]| = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Esta é uma aplicação direta da fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{L}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta &= 2\pi\mathrm{i} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ [1+\mathrm{i}]^4 \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ \left[\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right]^4 \\
&= 2\pi\mathrm{i}\, 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\
&= -8\pi\mathrm{i}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, obtenha a solução de

$$y'' - 2y' + y = \operatorname{sen}(x), \qquad y(0) = 1/2, \qquad y'(0) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0) - 2[s\overline{y} - y(0)] + \overline{y} &= \frac{1}{1+s^2}\\
s^2\overline{y} - \frac{s}{2} - 2[s\overline{y} - \frac{1}{2}] + \overline{y} &= \frac{1}{1+s^2}\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} - \frac{s}{2} + 1 &= \frac{1}{1+s^2}\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} &= \frac{1}{1+s^2} + \frac{s}{2} - 1\\
(s^2 - 2s + 1)\overline{y} &= \frac{(s-1)^2 s}{2(s^2+1)}\\
(s-1)^2\overline{y} &= \frac{(s-1)^2 s}{2(s^2+1)}\\
\overline{y} &= \frac{s}{2(s^2+1)}\\
y &= \frac{1}{2}\cos(x) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹