Relação Momento angular – velocidade angular:

Em 3 dimensões, **não** é verdade que

$$\begin{aligned} L_x &= I_x\omega_x, \\ L_y &= I_y\omega_y, \\ L_z &= I_z\omega_z. \end{aligned}$$

A realidade é mais complexa:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} = x_{Ej}\boldsymbol{e}_j.$$

Onde estamos?

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x} &= x_j\boldsymbol{e}_j, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(x_j\boldsymbol{e}_j) = x_j\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j) \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j) &= A_{ij}\boldsymbol{e}_i \;\Rightarrow \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= x_jA_{ij}\boldsymbol{e}_i = A_{ij}x_j\boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

Se eu definir que

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i,$$

então isso significa que

$$y_i = A_{ij}x_j \qquad [\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}].$$

A base utilizada para representar os vetores do domínio pode ser **diferente** da base utilizada para representar os vetores do contra-domínio! Sejam então

$$\begin{aligned} E &= (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n), \\ F &= (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n). \end{aligned}$$

O que é que muda?

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(x_j\boldsymbol{e}_j) = x_j\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j); \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_j) &= A_{ij}\boldsymbol{f}_i, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= A_{ij}x_j\boldsymbol{f}_i, \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{f}_i = A_{ij}x_j\boldsymbol{f}_i; \;\Rightarrow \\ y_i &= A_{ij}x_j; \qquad [\boldsymbol{y}]_F = [\boldsymbol{A}]_{F,E}[\boldsymbol{x}]_E. \end{aligned}$$

Agora, vamos usar o Teorema da Representação!

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(x_j\boldsymbol{e}_j) = x_jA_{ij}\boldsymbol{f}_i$$

Agora eu serei um pouco criativo: olhe para x_jA_{ij}. Como há repetição do índice j, isso é uma soma de 1 a n. Interpreto-a como um produto escalar entre o vetor $\boldsymbol{x} = x_k\boldsymbol{e}_k$ e o vetor $\boldsymbol{A}_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j$:

$$\boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{x} = A_{ij}x_j.$$

Note que só posso fazer isso se E for uma base **ortonormal** de $\mathbb{V}$! Daqui por diante (nesta aula!) suporemos portanto que E e F são bases ortonormais. De volta a $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= [\boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{x}]\boldsymbol{f}_i, \\
&= [A_{ij}\boldsymbol{e}_j \cdot x_k\boldsymbol{e}_k]\,\boldsymbol{f}_i \\
&= A_{ij}\boldsymbol{f}_i x_k(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\
&= A_{ij}\boldsymbol{f}_i x_k\delta_{jk} \\
&= A_{ij}x_j\boldsymbol{f}_i.
\end{aligned}$$

Tudo isso sugere fortemente a seguinte **notação**:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_{ij}\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{e}_j; \\
\boldsymbol{x} &= x_k\boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \;\Rightarrow \\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} &= [A_{ij}\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{e}_j] \cdot [x_k\boldsymbol{e}_k] \\
&= A_{ij}x_k\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)
\end{aligned}$$

Desgraçadamente, você também pode interpretar $\boldsymbol{A}$ como um vetor do espaço vetorial $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$:-(.

Repare que no quadro negro nós usamos $\sim$ ou $\rightarrow$:

$$\underset{\approx}{A}$$

é um tensor de ordem 2; e

$$\underset{\sim}{x}$$

é um tensor de ordem 1, ou vetor.