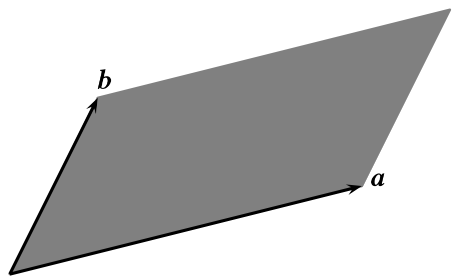
TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 20 dez 2021
Entrega em 21 nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Simplifique ao máximo suas soluções e inclua todos os passos relevantes.
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] **Sem utilizar o produto vetorial, e sem utilizar notação indicial**, obtenha uma fórmula para a área do paralelogramo definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, envolvendo apenas: módulos de vetores, operações de soma entre vetores e produto de escalar por vetor, os próprios vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e os produtos escalares $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})$ e $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})$.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O vetor unitário na direção e no sentido de $\boldsymbol{a}$ é

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

O vetor perpendicular a $\boldsymbol{a}$ cujo módulo é a altura do paralelogramo é

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}.$$

A área do paralelogramo é

$$\begin{aligned} A &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{h}| \\ &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}| \\ &= |\boldsymbol{a}| \left| \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}) \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} \right| \\ &= |\boldsymbol{a}| \left| \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \right| \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são vetores no $\mathbb{R}^3$, calcule

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot \epsilon_{lmn} v_l w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} v_l w_m (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmn} v_l w_m \delta_{kn} \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \epsilon_{lmk} v_l w_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} u_i v_j v_l w_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) u_i v_j v_l w_m \\
&= u_i v_j v_i w_j - u_i v_j v_j w_i \\
&= (u_i v_i)(v_j w_j) - (u_i w_i)(v_j v_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Encontre a solução geral de

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Trata-se de uma generalização da Equação de Euler para ordem 3. Faça

$$\begin{aligned} y &= x^r, \\ y' &= rx^{r-1}, \\ y'' &= (r-1)rx^{r-2}, \\ y''' &= (r-2)(r-1)rx^{r-3}, \end{aligned}$$

e substitua:

$$\begin{aligned} (r-2)(r-1)rx^r - 3(r-1)rx^r + 6rx^r - 6x^r &= 0, \\ \left[r(r^2-3r+2) - 3(r^2-r) + 6r - 6\right] &= 0, \\ r^3 - 3r^2 + 2r - 3r^2 + 3r + 6r - 6 &= 0, \\ r^3 - 6r^2 + 11r - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente, $r = 1$ é raiz. Dividindo o polinômio,

$$\begin{aligned} \frac{r^3 - 6r^2 + 11r - 6}{r-1} &= (r-3)(r-2), \\ r_1 &= 1, \\ r_2 &= 2, \\ r_3 &= 3. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] **Utilizando obrigatoriamente o Teorema dos Resíduos**, calcule

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

Sugestão: substitua $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, e integre ao longo do círculo unitário $|z| = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O maior problema é substituir $\operatorname{sen}(\theta)$. Mas

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
z^{-1} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
z - z^{-1} &= 2\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta),\\
2\mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) &= z - \frac{1}{z} = \frac{z^2-1}{z},\\
\operatorname{sen}(\theta) &= \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}.
\end{aligned}$$

Além disso, sobre o círculo unitário,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}\theta &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.
\end{aligned}$$

Desejamos, portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z^2 - 4z - \mathrm{i}}\,\mathrm{d}z\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 - 4z/\mathrm{i} - 1}\,\mathrm{d}z\\
&= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4\mathrm{i}z - 1}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

O denominador é singular em:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (\sqrt{3} - 2)\mathrm{i},\\
z_2 &= (-\sqrt{3} - 2)\mathrm{i},
\end{aligned}$$

mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. O resíduo do integrando nesse ponto é

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \lim_{z\to z_1}(z - z_1)\frac{2}{z^2 + 4\mathrm{i}z - 1}\\
&= \lim_{z\to z_1}(z - z_1)\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}\\
&= \frac{2}{z_1 - z_2} = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema dos Resíduos,

$$I = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} = -2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹