TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [20] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

As condições são não-homogêneas. A solução de regime permanente é

$$
\phi(x) = \phi_0\left(1 - \frac{x}{L}\right).
$$

Façamos, portanto,

$$
u(x,t) = \phi(x,t) - \phi_0\left(1 - \frac{x}{L}\right);
$$

a equação diferencial em $u(x,t)$ é a mesma:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
$$

com as condições inicial e de contorno

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= 0,\\
u(L,t) &= 0,\\
u(x,0) &= -\phi_0\left(1 - \frac{x}{L}\right).
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t);\\
XT' &= a^2 T X'';\\
\frac{T'}{a^2 T} &= \frac{X''}{X} = \lambda.
\end{aligned}
$$

A discussão usual de sinais produz

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -k^2 < 0,\\
k_n &= \frac{n\pi}{L},\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
T_n(t) &= \exp\left[-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right].
\end{aligned}
$$

Agora a forma geral da solução é

$$
\phi(x,t) = \phi_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
$$

Continue a solução no verso ⟹

Finalmente, impomos a condição inicial:

$$
\begin{aligned}
-\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);\\
-\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right);\\
-\int_{x=0}^{L}\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{x=0}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x;\\
-\int_{x=0}^{L}\phi_0\left(1-\frac{x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_m \frac{L}{2};\\
A_m &= -\frac{2\phi_0}{m\pi}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

O método das características se impõe. Se

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ y &= Y(s), \end{aligned}$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x,y) = u(X(s),Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$\begin{aligned} xy &= 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 3X(s), & X(0) &= \xi, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= 3, & Y(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)Y(s), & U(0) &= u(\xi,0) = \mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= 3ds, \\ \ln\frac{X}{\xi} &= 3s, \\ X &= \xi\mathrm{e}^{3s}; \\ Y &= 3s; \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \xi\mathrm{e}^{3s}3s, \\ U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s z\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3}. \end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned} s &= y/3, \\ \xi &= x/\mathrm{e}^{3s} = x/\mathrm{e}^{y}; \\ u(x,y) = U(s) &= U(0) + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-(x/\mathrm{e}^y)^2} + \frac{((y-1)\mathrm{e}^{y}+1)\,\frac{x}{\mathrm{e}^y}}{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Resolva

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

com

$$\phi(0,y) = 0, \qquad \phi(L,y) = 0,$$
$$\phi(x,M) = 0, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

Deixe seu resultado indicado em termos de integrais envolvendo $f(x)$ para os coeficientes de Fourier.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como é comum:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= X(x)Y(y),\\
YX'' + XY'' &= 0,\\
\frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.
\end{aligned}$$

O sinal de menos para λ é uma conveniência algébrica. Olhe para as condições de contorno: um problema homogêneo (Sturm-Liouville) é imediatamente disponível em x; portanto,

$$\begin{aligned}
X'' + \lambda X &= 0,\\
r^2 + \lambda &= 0,\\
r &= \pm\mathrm{i}\sqrt{\lambda},\\
X(x) &= A(x)\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\
X(0) &= X(L) = 0.
\end{aligned}$$

As constantes são:

$$\begin{aligned}
X(0) &= 0 && \Rightarrow && A = 0,\\
X(L) &= 0 && \Rightarrow && \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}L) = n\pi,\\
\sqrt{\lambda} &= \frac{n\pi}{L},\\
\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}$$

Agora em y:

$$\begin{aligned}
Y'' &= \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y,\\
Y'' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y &= 0,\\
Y_n &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right).
\end{aligned}$$

As constantes A_n e B_n são obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n\,\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right];\\
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right);\\
\int_{x=0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{x=0}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x,\\
A_m &= \frac{2}{L}\int_{x=0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Com os A_m's calculados, prosseguimos para obter os B_n's:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right)\right];$$

$$B_n = -A_n \operatorname{cotgh}\left(\frac{n\pi M}{L}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Ache a série trigonométrica de Fourier (isto é: a série em senos e cossenos) de

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right], \\
A_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi, \\
B_n &= \frac{2}{L} \int_a^b f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo no cálculo dos coeficientes,

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \\
A_n &= \int_0^1 \xi \cos\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2}, \\
B_n &= \int_0^1 \xi \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi\xi}{L}\right) d\xi = -\frac{\cos(n\pi)}{\pi n} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se $f(x)$ é uma função qualquer de x, e se sua transformada de Fourier é $\mathscr{F}\{f(x)\}$, mostre que

$$\mathscr{F}\{xf(x)\} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k},$$

usando obrigatoriamente o fato:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right] = -\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-\mathrm{i}}\int_{x=-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}\{f(x)\}}{\mathrm{d}k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹