TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 06 Out 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

1 ANULADA!!! Todos os alunos ganharam 25.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sendo $H(x)$ a função de Heaviside, calcule

$$I(x,a) = \int_{0_-}^{x} H(\xi - a)\xi \operatorname{sen}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad 0 < a < \infty, \qquad 0 < x < \infty.$$

Seu resultado deve envolver uma única expressão usando $H(x-a)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
a > x &\Rightarrow I(x,a) = 0;\\
0 < a < x &\Rightarrow\\
I(x,a) &= \int_a^x \xi \operatorname{sen}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) - \operatorname{sen}(a) + a\cos(a).
\end{aligned}$$

Juntando tudo,

$$I(x,a) = H(x-a)\left[\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) - \operatorname{sen}(a) + a\cos(a)\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Para $a > 0$, e sendo $H(x)$ a função de Heaviside, calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(|x| - a)(1 - |x|/a).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O enunciado estava com erro de tipografia! Deveria ter sido: calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = H(a - |x|)(1 - |x|/a).$$

Todos os alunos ganharam a questão integralmente.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(a-|x|)\left[1-\frac{|x|}{a}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\left[1-\frac{|x|}{a}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a}\left[1-\frac{x}{a}\right]\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi a k^2}\left[1-\cos(ak)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{T^2}y = \frac{af(t)}{T},$$

onde as dimensões físicas das variáveis são $[\![y]\!] = [\![f]\!]$, e $[\![T]\!] = [\![t]\!]$,

a) [5] Quem é $[\![a]\!]$?

b) [20] Obtenha a função de Green $G(t,\tau)$ da equação diferencial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Compare o primeiro termo do lado esquerdo com o lado direito:

$$\frac{[\![y]\!]}{[\![t]\!]} = [\![a]\!]\frac{[\![f]\!]}{[\![T]\!]} \Rightarrow [\![a]\!] = 1 \blacksquare$$

b) Como sempre:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau) &= \frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T},\\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau,\\
G(t,\tau)y(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}y(\tau)\,d\tau &= \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Imponho

$$\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau)y(\tau) = 0$$

e rearranjo os termos restantes:

$$-G(t,0)y(0) + \int_{\tau=0}^{\infty} y(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\right]d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty}\frac{af(\tau)G(t,\tau)}{T}\,d\tau.$$

O problema torna-se

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} = \delta(\tau - t), \qquad G(t,\infty) = 0.$$

Primeiro, procuro uma solução do problema homogêneo:

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} + h(t,\tau)\frac{\tau}{T^2} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{h\tau}{T^2},\\
\frac{dh}{h} &= \frac{\tau d\tau}{T^2},\\
\ln\frac{h(t,\tau)}{h(t,0)} &= \frac{\tau^2}{2T^2},\\
h(t,\tau) &= h(t,0)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right].
\end{aligned}$$

Agora procuro a solução para G pelo método de variação de parâmetros:

$$\begin{aligned}
G(t,\tau) &= A(t,\tau)\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}G(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] \Rightarrow\\
-\frac{\mathrm{d}A(t,\tau)}{\mathrm{d}\tau}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] - A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] &+ A(t,\tau)\frac{\tau}{T^2}\exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right] = \delta(\tau - t)
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A(t,\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi-t);\\
A(t,\tau)-A(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} -\exp\left[-\frac{\xi^2}{2T^2}\right]\delta(\xi-t)\,d\xi;\\
A(t,\tau) &= A(t,0) - H(\tau-t)\exp\left[-\frac{t^2}{2T^2}\right];\\
G(t,\tau) &= \exp\left[\frac{\tau^2}{2T^2}\right]\left[A(t,0)-H(\tau-t)\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para que $G(t,\infty)=0$, é necessário que

$$A(t,0)=\exp\left(-\frac{t^2}{2T^2}\right).$$

Finalmente,

$$G(t,\tau)=[1-H(\tau-t)]\exp\left(\frac{\tau^2-t^2}{2T^2}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹