TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 03 Jul 2017, **sala PA-02**
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: EM TODAS AS QUESTÕES, EXCETO QUANDO O ENUNCIADO DETERMINAR QUE VOCÊ DEIXE ALGUNS RESULTADOS INDICADOS, JUSTIFIQUE OS SEUS RESULTADOS. RESULTADOS SEM DESENVOLVIMENTO E DEDUÇÃO RAZOÁVEIS NÃO SERÃO CONSIDERADOS.

---

1 [20] Uma função real $f(x)$ é discretizada em $2n+1$ pontos **igualmente espaçados** de uma distância $h = (b-a)/(2n)$ no intervalo $[a,b]$ de tal forma que $x_0 \equiv a$, $x_k = a + kh$, e $x_{2n} \equiv b$. Seja $f_k = f(x_k)$. O código em Python ao lado calcula uma integral numérica do tipo

$$I = \alpha\left[f(a) + f(b)\right] + \beta \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + \gamma \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k}.$$

Inspecionando o código,

a) [5,0] determine α;

b) [7,5] determine β;

c) [7,5] determine γ.

```
def simp(n,a,b,f):
   h = (b-a)/(2*n)
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   Sp = 0.0
   for k in range(1,n+1):
      xi = a + (2*k - 1)*h
      Si +=  f(xi)
   pass
   for k in range(1,n):
      xp = a + 2*k*h
      Sp += f(xp)
   pass
   Si *= 4
   Sp *= 2
   return h*(Se + Si + Sp)/3
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\alpha = h/3,$$
$$\beta = 4h/3,$$
$$\gamma = 2h/3 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere a transformação linear C definida pelas relações

$$\begin{aligned} C \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1, \\ C \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2, \\ C \cdot \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

onde $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

a) [5,0] Qual é a matriz $[C]$ dessa transformação na base canônica?

b) [7,5] Qual é o significado **geométrico** de C? O que é que C faz com cada vetor do $\mathbb{R}^3$?

c) [7,5] Portanto, qual é a matriz inversa $[C]^{-1}$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) C é uma reflexão em torno do plano x_1x_2.

c) Para sair de um vetor $\boldsymbol{v}$ e voltar para ele mesmo, basta refleti-lo novamente em torno do plano x_1x_2; portanto,

$$[C]^{-1} = [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Utilizando **obrigatoriamente** a regra de Leibniz, calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

ATENÇÃO: NÃO CALCULE NENHUMA INTEGRAL! DEIXE TODAS AS INTEGRAIS QUE APARECEREM INDICADAS.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau = f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau; \qquad \text{10 pontos se souber a fórmula}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{sen}(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \ \blacksquare \qquad \text{mais 10 pontos se acertar a questão.}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' + 3y = 0$$

em termos de **funções reais** da variável real x.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) [5,0] Esta é uma equação de Euler (se o aluno não identificou a equação, ele já perdeu a questão)

b) [5,0] Portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= x^r, \\ y'(x) &= rx^{r-1}, \\ y''(x) &= (r-1)rx^{r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação,

$$\begin{aligned} (r-1)rx^r + rx^r + 3x^r &= 0, \\ \left[r^2 - r + r + 3\right] x^r &= 0, \\ r^2 + 3 &= 0, \\ r &= \pm\sqrt{3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = K_1x^{r_1} + K_2x^{r_2} = K_1x^{\sqrt{3}\mathrm{i}} + K_2x^{-\sqrt{3}\mathrm{i}}.$$

No entanto, o enunciado orienta que o aluno procure uma solução **puramente real**; essa solução ainda está em termos de funções complexas. **O aluno tem que prosseguir!**

c) [5,0]

$$\begin{aligned} x^r &= \exp(\ln(x^r)) = \exp(r\ln(x)); \\ x^{\mathrm{i}\beta} &= \exp(\mathrm{i}\beta\ln(x)) = \cos(\beta\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\beta\ln(x)) \end{aligned}$$

Até aqui, o aluno já ganhou 15 pontos. Mas ele precisa completar a questão:

d) [5,0] Sejam

$$\begin{aligned} C &\equiv \cos(\sqrt{3}\ln(x)), \\ S &\equiv \mathrm{sen}(\sqrt{3}\ln(x)). \end{aligned}$$

Então,

$$y(x) = K_1[C + \mathrm{i}S] + K_2[C - \mathrm{i}S].$$

Para $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$, faça

$$\begin{aligned} K_1 &= (A - \mathrm{i}B)/2, \\ K_2 &= (A + \mathrm{i}B)/2 \ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= [A - \mathrm{i}B][C + \mathrm{i}S]/2 + [A + \mathrm{i}B][C - \mathrm{i}S]/2 \\ &= (AC - \mathrm{i}^2BS)/2 + \mathrm{i}(AS - BC)/2 + (AC - \mathrm{i}^2BS)/2 - \mathrm{i}(AS - BC)/2 \\ &= AC + BS \\ &= A\cos(\sqrt{3}\ln(x)) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\ln(x)) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

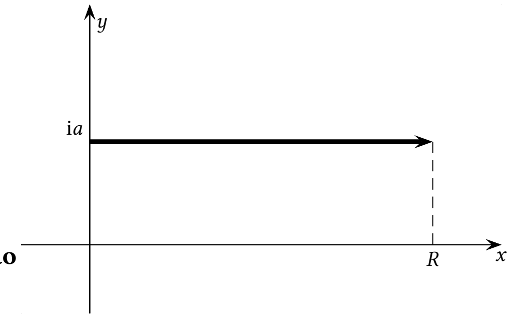
5 [20] Seja a função complexa $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}az}$ com $a > 0$. Calcule

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{z=\mathrm{i}a}^{z=R+\mathrm{i}a} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

sabendo que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

O caminho de integração é indicado pela seta grossa na figura ao lado.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Este problema na verdade é uma parte do problema 9.6 do livro-texto.
a) [5,0] Claramente, a integral pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty}\int_{z=\mathrm{i}a}^{z=R+\mathrm{i}a} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{x=0}^{R} f(x+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

b)[10,0] Mas

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+\mathrm{i}a) \\ &= \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a(x+\mathrm{i}a)} \\ &= \mathrm{e}^{-(x^2+2\mathrm{i}ax+\mathrm{i}^2a^2)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax+2\mathrm{i}^2a^2} \\ &= \mathrm{e}^{-x^2-2\mathrm{i}ax+a^2+2\mathrm{i}ax-2a^2} \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

c) [5,0] Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹