TT009 Matemática Aplicada I — P5, 23 Mai 2003

Prof. Nelson Luís Dias

NOME: GABARITO

Assinatura: ______________________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [5,0] Usando a fórmula clássica da série de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

mostre que (**Você *tem* que deduzir**) a série de Taylor de $f(z) = 1/(z+i)$ em torno de $z = i$ é

$$\frac{1}{z+i} = -\frac{i}{2} + \frac{z-i}{4} + \frac{i(z-i)^2}{8} - \frac{(z-i)^3}{16} - \frac{i(z-i)^4}{32} + \ldots$$

(basta chegar até a quarta potência).

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)} \qquad \Rightarrow f(i) = \frac{-i}{2}, \tag{1}$$

$$f^{(1)}(z) = \frac{-1}{(z+i)^2} \Rightarrow f^{(1)}(i) = \frac{1}{4}, \tag{2}$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{2}{(z+i)^3} \Rightarrow \frac{f^{(2)}(i)}{2!} = \frac{i}{8}, \tag{3}$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{-6}{(z+i)^4} \Rightarrow \frac{f^{(3)}(i)}{3!} = \frac{-1}{16}, \tag{4}$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{24}{(z+i)^5} \Rightarrow \frac{f^{(4)}(i)}{4!} = \frac{-i}{32}. \tag{5}$$

Observe que o sinal do termo em $(z-i)^3$ no enunciado está *errado*.

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Agora, mesmo que você não tenha feito a 1ª questão, use o seu resultado para mostrar rapidamente que a série de Laurent de

$$g(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

em torno de $z = i$ é

$$g(z) = \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} + \frac{i(z-i)}{8} - \frac{(z-i)^2}{16} - \frac{i(z-i)^3}{32} + \dots$$

Sugestão: $(z^2+1) = (z-i)(z+i)$.
SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z-i)}\frac{1}{(z+i)} && (6)\\
&= \frac{1}{(z-i)}\left[-\frac{i}{2} + \frac{z-i}{4} + \frac{i(z-i)^2}{8} - \frac{(z-i)^3}{16} - \frac{i(z-i)^4}{32} + \dots\right] && (7)\\
&= \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} + \frac{i(z-i)}{8} - \frac{(z-i)^2}{16} - \frac{i(z-i)^3}{32} + \dots && (8)
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹