TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FB, 13 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Considere a solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

utilizando um esquema de diferenças finitas explícito, "upwind":

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x},$$

onde todos os símbolos têm os significados usuais utilizados no livro-texto. Suponha que você declarou (também da forma usual) o `array` com as soluções em dois passos de tempo seguidos:

```
u = zeros((2,nx+1),float)
```

Sejam `old` e `new` os índices para `u` nos instantes n e $n+1$, e considere que os índices `i=0` e `i=nx` indicam o contorno da grade computacional. Escreva o cálculo de `u[new,1:nx]` **em uma linha de Python**, utilizando *slicing*. Considere que você tem uma variável `Co` com o número de Courant $c\Delta t/\Delta x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Co*(u[old,1:nx]-u[old,0:nx-1]) ■
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sejam $P_n(x)$ os polinômios reais de grau n ortogonais no intervalo $x \in [-1,+1]$ em relação ao produto interno usual

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

e tais que $P(1) = 1$. Os dois primeiros são

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1,\\ P_1(x) &= x. \end{aligned}$$

Faça $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ e obtenha a, b e c de tal forma que

$$\begin{aligned} P_2(1) &= 1,\\ \langle P_0, P_2\rangle &= 0,\\ \langle P_1, P_2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} P_2(1) &= a + b + c = 1;\\ \int_{-1}^{+1} P_0(x)P_2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right|_{-1}^{+1}\\ &= \frac{2a}{3} + 2c = 0;\\ \int_{-1}^{+1} P_1(x)P_2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} x(ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x\\ &= \left.\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\right|_{-1}^{+1}\\ &= \frac{2b}{3} = 0; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= 3/2,\\ b &= 0,\\ c &= -1/2\ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Sabendo que

$$\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x) = 2\cos(x)\cos(kx),$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\cos((1+k)x) + \cos((1-k)x)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi(1+k)}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1+k)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\pi(1-k)}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos((1-k)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}((1+k)x)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{4\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}((1-k)x)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\
&= \frac{2}{4\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{2}{4\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1+k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1+k)\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi(1-k)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{2}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} &= x,\\ u(x,0) &= f(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
x &= X(s),\\
t &= T(s),\\
u(x,t) &= u(X(s),T(s)) = U(s);\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s},\\
x &= \frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= T(s),\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s);\\
T(s) &= s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= s,\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}X &= \int_{\sigma=0}^{s} \sigma\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}s^2;\\
X(s) &= X(0) + \frac{1}{2}s^2;\\
X(0) &= X(s) - \frac{1}{2}s^2 = x - \frac{t^2}{2};\\
\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= [X(0) + \frac{1}{2}s^2];\\
\int_{U(0)}^{U(s)} \mathrm{d}U &= \int_{\sigma=0}^{s} [X(0) + \frac{1}{2}\sigma^2]\,\mathrm{d}\sigma,\\
U(s) - U(0) &= X(0)s + \frac{1}{6}s^3;\\
U(0) &= u(X(0),T(0)) = u(x - t^2/2, 0) = f(x - t^2/2);\\
U(s) &= u(x,t) = f(x - t^2/2) + [x - t^2/2]t + \frac{1}{6}t^3 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹