TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 3 Mai 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

1 [25] Dada a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenha:

a) [10] todos os seus autovalores;

b) [15] todos os seus autovetores.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) a : matrix([1,1,1],[1,2,3],[2,2,1]) ;
                                   [ 1  1  1 ]
                                   [         ]
(%o1)                              [ 1  2  3 ]
                                   [         ]
                                   [ 2  2  1 ]
(%i2) [vals, vecs] : eigenvectors(a);
           sqrt(21) - 5  5 + sqrt(21)
(%o2) [[[- ------------, ------------, - 1], [1, 1, 1]],
                2             2
        5 sqrt(21) - 7    sqrt(3) sqrt(7) - 7
[[[1, - --------------, - -------------------]],
              14                  7
     7 + 5 sqrt(21)  7 + sqrt(3) sqrt(7)
[[1, --------------, -------------------]], [[0, 1, - 1]]]]
           14                 7
(%i3)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] As coordenadas elípticas (μ, ν) no $\mathbb{R}^2$ são definidas por meio de

$$x = a\cosh(\mu)\cos(\nu),$$
$$y = a\,\mathrm{senh}(\mu)\,\mathrm{sen}(\nu).$$

Calcule o jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}\ .$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) x : a*cosh(mu)*cos(nu) ;
(%o1)                         a cosh(mu) cos(nu)
(%i2) y : a * sinh(mu)*sin(nu);
(%o2)                         a sinh(mu) sin(nu)
(%i3) jacob : matrix([diff(x,mu),diff(x,nu)],[diff(y,mu),diff(y,nu)]);
                  [ a sinh(mu) cos(nu)  - a cosh(mu) sin(nu) ]
(%o3)             [                                          ]
                  [ a cosh(mu) sin(nu)   a sinh(mu) cos(nu)  ]
(%i4) determinant(jacob);
                   2     2        2        2     2        2
(%o4)             a  cosh (mu) sin (nu) + a  sinh (mu) cos (nu)
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule o perímetro da elipse

$$x = a\cos(\theta),$$
$$y = b\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad\qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

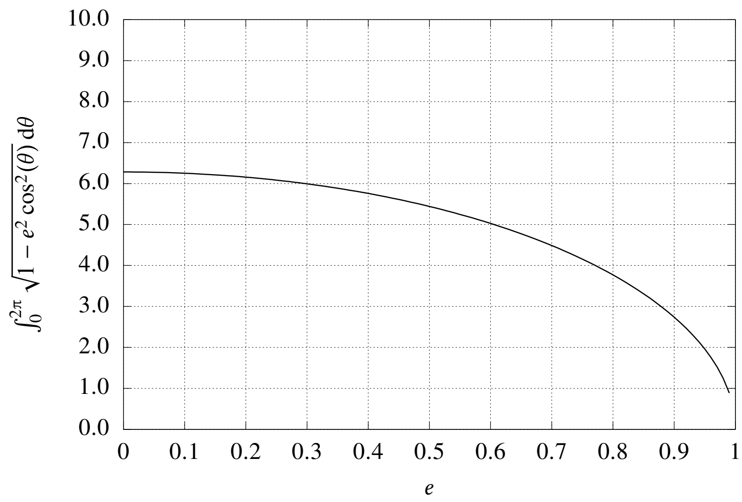
cuja excentricidade é $e = 0{,}3$, na forma

$$p = \gamma a,$$

onde γ é um número puro. Suponha $0 < b < a$ (a é o semi-eixo maior, e b é o semi-eixo menor). A excentricidade da elipse é dada por

$$e = \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right]^{1/2}.$$

Este problema leva a uma integral que não pode ser obtida analiticamente por meio de técnicas de integração aprendidas em Cálculo. A figura a seguir foi feita para que você seja capaz de obter o valor de γ graficamente.
Atenção: você precisa apresentar o desenvolvimento completo do cálculo do perímetro em termos de uma integral de linha. Apenas "adivinhar" o valor de γ, etc., NÃO É SUFICIENTE.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$p(e) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta;$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta} = (-a\,\mathrm{sen}(\theta), b\cos(\theta));$$
$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left(a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right)^{1/2};$$
$$p(e) = \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta.$$

Dado que

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$
$$e^2 a^2 = a^2 - b^2,$$
$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

temos que

$$\begin{aligned} p(e) &= \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + a^2(1 - e^2)\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + a^2\cos^2(\theta) - a^2e^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \left[1 - e^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \Rightarrow \gamma \approx 6 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Usando notação indicial e a definição de $\boldsymbol{\nabla}$ em coordenadas cartesianas, prove que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\epsilon_{ijk} u_i v_j \right] \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{ijk} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{ijk} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{jki} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} u_i \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j - \epsilon_{kji} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} u_i \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$