$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{3} u_{kj}v_{km} = s_{jm}$$

Vocês aprenderam o produto vetorial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
&= (u_y v_z - v_y u_z)\boldsymbol{i} - (u_x v_z - v_x u_z)\boldsymbol{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Para nós: se $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, e $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é NECESSARIAMENTE A BASE CANÔNICA, então

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3) &= \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_i v_j\right]}_{w_k} \boldsymbol{e}_k \\
&= \epsilon_{ij1} u_i v_j \boldsymbol{e}_1 + \epsilon_{ij2} u_i v_j \boldsymbol{e}_2 + \epsilon_{ij3} u_i v_j \boldsymbol{e}_3 \\
&= (\epsilon_{231} u_2 v_3 + \epsilon_{321} u_3 v_2)\boldsymbol{e}_1 + (\epsilon_{132} u_1 v_3 + \epsilon_{312} u_3 v_1)\boldsymbol{e}_2 + (\epsilon_{123} u_1 v_2 + \epsilon_{213} u_2 v_1)\boldsymbol{e}_3 \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\boldsymbol{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{e}_3 \\
&= (u_y v_z - v_y u_z)\boldsymbol{i} + (v_x u_z - u_x v_z)\boldsymbol{j} + (u_x v_y - v_x u_y)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

É sempre bom lembrar!

$$\begin{array}{rl}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} & \text{é um escalar (produto escalar)} \\
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} & \text{é um vetor (produto vetorial)}
\end{array}$$

isso é diferente da notação para números reais:

$$a \times b = a \cdot b = ab$$

Pior! $\boldsymbol{uv}$ é um *terceiro* produto, chamado produto tensorial.

O produto vetorial $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ é um vetor perpendicular a $\boldsymbol{u}$ e a $\boldsymbol{v}$ (ou seja: perpendicular ao plano definido pelo par $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{u} &= [\epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k] \cdot u_l \boldsymbol{e}_l \\
&= (\epsilon_{ijk} u_l u_i v_j)(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) \\
&= (\epsilon_{ijk} u_l u_i v_j)\delta_{kl} \\
&= (\epsilon_{ijk} u_i v_j)(\delta_{kl} u_l) \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j u_k \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \frac{1}{2}\epsilon_{(ivan)j(karla)} u_{(ivan)} v_j u_{(karla)} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \frac{1}{2}\epsilon_{kji} u_k v_j u_i \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{kji}]}_{=0} u_i v_j u_k \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

mas

$$
\epsilon_{kji} = \epsilon_{ikj} = \epsilon_{jik} \neq \epsilon_{ijk}!
$$