TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 10 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

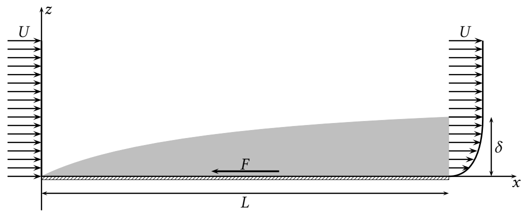
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Quando um escoamento uniforme com velocidade U encontra uma placa de comprimento L, forma-se uma **camada-limite** (mostrada ao lado em cinza), que é uma região em que a velocidade vai de zero na placa até U no limite superior da camada-limite. As variáveis de interesse do problema são a força **por unidade de largura** F da placa sobre o escoamento, a massa específica ρ do fluido, a viscosidade cinemática ν do fluido ($[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$), o comprimento L da placa, a espessura δ da camada-limite em $x = L$, e a velocidade não-perturbada U.
Utilizando como variáveis comuns (no máximo) ρ, U e L, obtenha os 3 grupos adimensionais do problema.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A lista de variáveis e dimensões é

$$
\begin{aligned}
[\![F]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2},\\
[\![\nu]\!] &= \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1},\\
[\![\delta]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3},\\
[\![U]\!] &= \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}\\
[\![L]\!] &= \mathsf{L}.
\end{aligned}
$$

Os 3 grupos adimensionais são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= F\rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= [\mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-2}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{1+a}\mathsf{L}^{-3a+b+c}\mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a + 1 &= 0,\\
-3a + b + c &= 0,\\
-b - 2 &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = -1$, $b = -2$, $c = -1$ e

$$
\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 L}.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \nu\rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^{a}\mathsf{L}^{2-3a+b+c}\mathsf{T}^{-1-b}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a &= 0,\\
-3a + b + c + 2 &= 0,\\
-b - 1 &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -1$, $c = -1$ e

$$
\Pi_2 = \frac{\nu}{UL}.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_3 &= \delta \rho^a U^b L^c,\\
[\![\Pi_3]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-3}]^a[\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}]^b[\mathsf{L}]^c\\
1 &= \mathsf{M}^0\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 = \mathsf{M}^a\mathsf{L}^{1-3a+b+c}\mathsf{T}^{-b}
\end{aligned}
$$

O sistema de equações é

$$
\begin{aligned}
a &= 0,\\
-3a + b + c + 1 &= 0,\\
-b &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $a = 0$, $b = -0$, $c = -1$ e

$$
\Pi_3 = \frac{\delta}{L} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Dado o programa em Python a seguir,

```
#!/usr/bin/python3
from numpy.random import rand
fob = open('a.bin','wb')
for k in range(3):
   a = rand(10)
   a.tofile(fob)
fob.close()
```

e sabendo que um `float` ocupa 8 bytes em Python, qual é o tamanho do arquivo `'a.bin'` em bytes que o programa gera?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
240

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A **Regra de Simpson** para integração numérica utiliza um número par de intervalos e aproxima a integral de $f(x)$ com $2n+1$ pontos segundo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\right],$$

onde $x_0 = a$, $x_{2n} = b$, e $\Delta x = (b-a)/(2n)$. Escreva uma função `simpson` (em Python) que calcula a fórmula acima. Os argumentos de entrada devem ser `(m,a,b,f)`, onde $m = 2n$ e f é a função a ser integrada.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def simpson(m,a,b,f):
   assert(m % 2 == 0)
   dx = (b-a)/m
   Se = f(a) + b(b)
   S4 = 0.0
   for i in range(1,m,2):
      xk = a + k*dx
      S4 += f(xk)
   S4 *= 4
   S2 = 0.0
   for i in range(2,m,2):
      xk = a + k*dx
      S2 += f(xk)
   S2 *= 2
   I = (dx/3.0)*(Se + S4 + S2)
   return I
```

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] A função

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

não pode ser integrada em termos de funções transcedentais elementares. No entanto, expandindo-se $\exp(-x)$ em série de Taylor em torno de $x = 0$, é possível obter facilmente uma "série" para $f(x)$, cujos primeiros termos são

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} - \frac{x^{5/2}}{6} + \frac{x^{7/2}}{24} - \frac{x^{9/2}}{120} + \ldots$$

a) [12.5] Obtenha o termo geral da série acima, ou seja: obtenha as expressões para C_n e p_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$ que concordam com os termos acima e tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{p_n}.$$

b) [12.5] Integrando termo a termo, encontre a série (isto é, D_n e q_n) da primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{q_n}$$

de tal forma que $F'(x) = f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}\frac{\exp(-x)}{x^{1/2}} &= x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!};\end{aligned}$$

portanto, $C_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ e $p_n = n - 1/2$.
b) Integrando termo a termo,

$$\begin{aligned}F(x) = \int f(x)\,dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1/2}}{n!}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int x^{n-1/2}\,dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!} x^{n+1/2};\end{aligned}$$

logo, $D_n = \frac{(-1)^n}{(n+1/2)n!}$ e $q_n = n + 1/2$ ■

Continue a solução no verso ⟹