TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Ago Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________

---

1 [20] Considere o conjunto das funções **reais** $f(x)$ quadrado-integráveis em $[0, L]$. Mostre que

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Preciso verificar 4 coisas:
a)

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^l g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \langle g, f\rangle \text{. OK}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\langle f, g+h\rangle &= \int_0^L f(x)[g(x)+h(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L \{f(x)g(x)+f(x)h(x)\}\ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle \text{. OK}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^L f(x)[\alpha g(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\int_0^L f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \alpha\,\langle f, g\rangle \text{. OK}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \int_0^L [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\\ &\begin{cases} > 0, & f(x)\not\equiv 0,\\ = 0, & f(x)\equiv 0.\end{cases}\ \text{OK} \blacksquare\end{aligned}$$

As afirmativas acima valem exceto em um conjunto de medida zero, o que não muda o valor do produto interno em cada caso.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] Uma forma da desigualdade de Cauchy-Schwarz é

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \le \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle .$$

Agora sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n), \\ \boldsymbol{y} &= (1, 1, \ldots, 1), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= 1. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Havia um erro no enunciado: deveria ter sido: Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i \times 1) \right|^2 &\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right), \\ 1 &\le n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 &\ge \frac{1}{n} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2},$$

obtenha a transformada de Fourier **exatamente como definida neste curso** de

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUA RESPOSTA.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{(\pi + k\pi)\mathrm{e}^{-|k|}}{2} \\
&= \frac{(1+k)\mathrm{e}^{-|k|}}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Sabendo que

$$\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2k^2t}\cos(bk)\,\mathrm{d}k = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}},$$

resolva **usando obrigatoriamente transformada de Fourier em** x:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = a^2\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$
$$c(x,0) = \frac{M}{A}\delta(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Fourier da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}ku\widehat{c} &= -a^2k^2\widehat{c};\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{c}}{\mathrm{d}t} &= -[\mathrm{i}ku + a^2k^2]\widehat{c};\\
\widehat{c}(k,t) &= \widehat{c}(k,0)\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}.
\end{aligned}$$

O valor inicial é simplesmente

$$\begin{aligned}
\widehat{c}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{M}{A}\delta(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{M}{2\pi A}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
c(x,t) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{c}(k,t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\
&= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{M}{2\pi A}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}ku+a^2k^2)t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\\
&= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ut)}\,\mathrm{d}k\\
&= \frac{M}{2\pi A}\int_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2a^2t}\cos(k(x-ut))\,\mathrm{d}k\\
&= \frac{M}{2\pi A}\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{a\sqrt{t}}\\
&= \frac{M}{A}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-ut)^2}{4a^2}}}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Sejam os pares de transformada de Fourier

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad \leftrightarrow \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi(k^2+1)};$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \leftrightarrow \qquad \widehat{g}(k) = \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}.$$

Calcule

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-|\xi|}}{1+(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se da transformada de Fourier de uma convolução:

$$\begin{aligned}\widehat{h}(k) &= \mathscr{F}\left\{f(x) * g(x)\right\}\\ &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{k^2+1}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹