TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 06 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [20] Classifique a equacao diferencial (elítica, parababólica ou hiperbólica?) abaixo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} &= F,\\
A &= 1,\\
B &= 1/2,\\
C &= 0,\\
\Delta &= B^2 - AC = 1/4 > 0
\end{aligned}$$

Portanto, a equação é hiperbólica ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [40] Utilizando **obrigatoriamente** o método das características, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x} = xt, \qquad \phi(x,0) = f(x),$$

para $-\infty \le x \le +\infty$, $t \ge 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $\phi = \Phi(s)$, $x = X(s)$ e $t = T(s)$. A derivada total de Φ e a EDP são

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s},\\ xt &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + x\frac{\partial \phi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Isso nos dá 3 EDO*s*:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X(s),\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s).\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}T(s) &= s \qquad \Leftrightarrow s = t;\\ \frac{\mathrm{d}X}{X} &= \mathrm{d}s,\\ \int_{X(0)}^{X(s)} \frac{\mathrm{d}X}{X} &= \int_{\sigma=0}^{s} \mathrm{d}\sigma,\\ \ln\left(\frac{X(s)}{X(0)}\right) &= s,\\ X(s) &= X(0)\mathrm{e}^{s};\\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} &= X(0)s\mathrm{e}^{s},\\ \mathrm{d}\Phi &= X(0)s\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s,\\ \int_{\Phi(0)}^{\Phi(s)} &= X(0)\int_{\sigma=0}^{s} \sigma\mathrm{e}^{\sigma}\,\mathrm{d}\sigma,\\ \Phi(s) - \Phi(0) &= X(0)\left[(s-1)\mathrm{e}^{s} + 1\right],\\ \Phi(s) &= \Phi(0) + X(0)\left[(s-1)\mathrm{e}^{s} + 1\right].\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}X(0) &= X(s)\mathrm{e}^{-s} = x\mathrm{e}^{-t};\\ \Phi(0) &= \phi(X(0),T(0)) = \phi(X(0),0) = f(X(0)) = f(x\mathrm{e}^{-t});\end{aligned}$$

portanto,

$$\phi(x,t) = f(x\mathrm{e}^{-t}) + x\mathrm{e}^{-t}\left[(t-1)\mathrm{e}^{t} + 1\right] \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -kx, \qquad \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0, \qquad \phi(x,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = 0,$$

$k > 0$, $L > 0$. Obtenha uma solução da forma

$$\phi(x,t) = \psi(x,t) + u(x),$$

onde ψ é uma solução da equação de onda homogênea (sem o termo $-kx$), e $u(x)$ é uma solução de regime permanente, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = -kx.$$

Você pode usar o seguinte fato:

$$\int_0^L x(L^2 - x^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{6L^4(-1)^m}{\pi^3 m^3}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução $u(x)$, independente do tempo, deve atender a

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + kx = 0, \qquad u(0) = u(L) = 0.$$

A solução é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{kx^2}{2} + A,\\ u(x) &= -\frac{kx^3}{6} + Ax + B\end{aligned}$$

A CC $u(0) = 0$ leva a $B = 0$; a CC $u(L) = 0$ leva a

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{kL^3}{6} + AL,\\ A &= \frac{kL^2}{6},\\ u(x) &= \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right].\end{aligned}$$

Como fica o problema em ψ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[\psi+u]}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2[\psi+u]}{\partial t^2} + kx &= 0,\\ \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + kx\right]}_{=0} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

Restou, portanto, a equação clássica da onda em uma dimensão. As condições de contorno e iniciais em ψ são:

$$\begin{aligned}
&0 = \phi(0,t) = \psi(0,t) + u(0) && \Rightarrow && \psi(0,t) = 0,\\
&0 = \phi(L,t) = \psi(0,t) + u(L) && \Rightarrow && \psi(L,t) = 0,\\
&0 = \psi(x,0) + \frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right] && \Rightarrow && \psi(x,0) = -\frac{k}{6}\left[x(L^2 - x^2)\right],\\
&0 = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x,0) + u(x)] && \Rightarrow && \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0.
\end{aligned}$$

Este portanto é um problema de valor de contorno e inicial (a equação da onda) perfeitamente bem especificado. Separando as variáveis em ψ:

$$\begin{aligned}X''T &= \frac{1}{c^2}XT''\\ \frac{X''}{X} &= \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Existe agora um problema de Sturm-Liouville em x clássico, e após a usual discussão de sinais obtém-se

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

As soluções para ψ, portanto, deverão ser do tipo

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= \frac{n\pi c}{L}\left[-A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L} + B_n\cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = 0 &\Rightarrow B_n = 0, \\ \psi(x,0) &= -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right], \\ -\frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow \\ -\int_0^L \frac{k}{6}\left[x(L^2-x^2)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = A_m\frac{L}{2}, \end{aligned}$$

cujo resultado é

$$A_m = \frac{2k(-1)^m L^3}{m^3\pi^3}.$$

A solução completa portanto é

$$\phi(x,t) = \frac{k}{6}x(L^2-x^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k(-1)^n L^3}{n^3\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹