TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 30 set 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Dada a equação da difusão unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L,$$

e o esquema de discretização

$$\begin{aligned}
\Delta x &= L/N_x,\\
x_i &= i\Delta x, \qquad i = 0, \ldots, N_x,\\
t_n &= t\Delta t,\\
u_i^n &= u(x_i, t_n),\\
\frac{1}{2\Delta t}\left[(u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n)\right] &= D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},
\end{aligned}$$

obtenha o critério de estabilidade por meio de uma análise de estabilidade de von Neumann.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Suponha que a equação diferencial se aplique ao erro:

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} \;\Rightarrow$$

Então

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x}) + (\xi_l e^{a(t_n+\Delta t)} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} - \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right] = D\frac{\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \xi_l e^{at_n} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2};$$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(\xi_l e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - \xi_l e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x}) + (\xi_l e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} - \xi_l e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right] = D\frac{\xi_l e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\xi_l e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \xi_l e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[(e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x}) + (e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right] = D\frac{e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\, e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$\left[(e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x}) + (e^{a\Delta t} e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} - e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right] = \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\left[e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\, e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right]$$

$$\begin{aligned}
e^{a\Delta t}\left[e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right] &= e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x} + 2\mathrm{Fo}\left[e^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} - 2\, e^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + e^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right]\\
e^{a\Delta t}\left[e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right] &= e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x} + 2\mathrm{Fo}\left[e^{\mathrm{i}k_l\Delta x} - 2 + e^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right]\\
e^{a\Delta t} &= 1 + 2\mathrm{Fo}\frac{2\cos(k_l\Delta x) - 2}{2\cos(k_l\Delta x)}\\
&= 1 + 2\mathrm{Fo}\frac{\cos(k_l\Delta x) - 1}{\cos(k_l\Delta x)}\\
&= 1 - 4\mathrm{Fo}\frac{\operatorname{sen}^2(k_l\Delta x/2)}{\cos(k_l\Delta x)}.
\end{aligned}$$

A função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos(x)}$$

possui singularidades em $\pi/2 + k\pi$, e muda de sinal em torno destas singularidades: não é possível garantir que $|e^{a\Delta t}| < 1$ uniformemente, e o esquema é incondicionalmente instável.

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L,$$

com condições iniciais e de contorno

$$u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = c, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0,$$

onde c é uma constante. Dado o esquema de discretização implícito clássico,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

(com a mesma discretização x_i, t_n, u_i^n da questão **1**), e para $N_x = 8$, obtenha o sistema de equações lineares

$$[A][u]^{n+1} = [b]$$

onde os $A_{i,j}$'s dependem do número de grade de Fourier, e os b_i's dependem dos u_i^n's. Em outras palavras, **escreva explicitamente a matriz quadrada** $[A]$ **e a matriz-coluna** $[b]$ **para** $N_x = 8$.
Atenção: As condições de contorno geram linhas especiais em $[A]$ e $[b]$.
Atenção: A condição de contorno em $x = L$ é **diferente** das condições de contorno discutidas em sala de aula: discretize a derivada correspondente, e obtenha uma relação entre u_{N_x-1} e u_{N_x}.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $N_x = 8$, o contorno está em $i = 0$ e em $i = 8$. O esquema de diferenças finitas é simples:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= \mathrm{Fo}\left[u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right], \\ -\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} &= u_i^n, \end{aligned}$$

e esta última equação formará o grosso das linhas da matriz do sistema. Como sempre, é preciso levar em consideração as condições de contorno discretizadas. Elas são (para qualquer n)

$$\begin{aligned} u_0 &= c, \\ \frac{u_{N_x} - u_{N_x-1}}{\Delta x} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_{N_x} = u_{N_x-1} \\ u_8 &= u_7 \end{aligned}$$

Portanto, a 1ª linha será

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}c + (1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n, \\ (1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n + \mathrm{Fo}c; \end{aligned}$$

a última linha será

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_6^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_7^{n+1} &= u_7^n. \end{aligned}$$

A matriz do sistema será

$$\begin{bmatrix} 1+2\mathrm{Fo} & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+2\mathrm{Fo}) & -\mathrm{Fo} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Fo} & (1+\mathrm{Fo}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ u_5^{n+1} \\ u_6^{n+1} \\ u_7^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n + \mathrm{Fo}c \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ u_5^n \\ u_6^n \\ u_7^n \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 04 nov 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere um espaço vetorial $\mathbb{V} = \{f(x)\}$, com campo escalar $\mathbb{R}$ e composto por funções reais de uma variável real, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Atenção: isto significa que não há números complexos nesta questão**. Defina o produto interno entre duas funções $f, g \in \mathbb{V}$ como

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$$

Então, o conjunto das funções $H_n(x)$ definidas abaixo é ortogonal:

$$H_n(x) \equiv (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n. \end{cases}$$

(Este é um fato que você não precisa provar!) Isto significa que é possível decompor $f(x)$ em uma série de Fourier nas funções $H(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x).$$

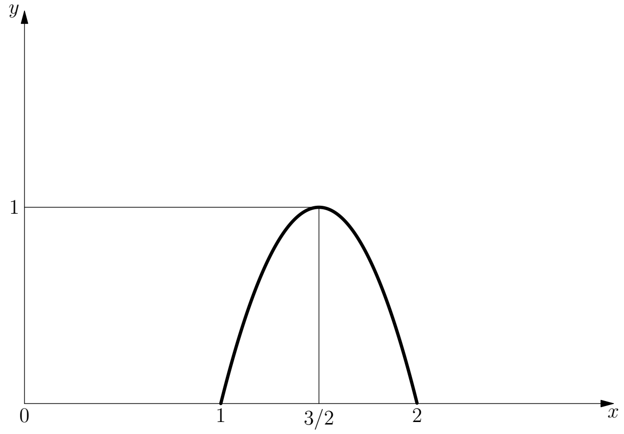
Obtenha uma expressão para c_n em termos de uma integral envolvendo $f(x)$, $H_n(x)$ e e^{-x^2}. **Calma: isto é apenas o bom e velho procedimento de obtenção de coeficientes de Fourier, só que com um novo conjunto de funções ortogonais**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \\
f(x) H_m(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) H_m(x) \\
f(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2} \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n H_n(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= c_m 2^m m! \sqrt{\pi} \ \Rightarrow \\
c_m &= \frac{1}{2^m m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [40] A função da figura, definida entre $x = 1$ e $x = 2$, é uma parábola do 2º grau. Obtenha sua série de Fourier trigonométrica.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A parábola possui equação

$$f(x) = A(x-1)(x-2)$$

com

$$1 = A(3/2-1)(3/2-2) \Rightarrow A = -4.$$

Agora, usamos os coeficientes de Fourier clássicos:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}\,dx;\\
A_0 &= 2\int_1^2 -4(x-1)(x-2)\,dx = 4/3;\\
A_n &= 2\int_1^2 -4(x-1)(x-2)\cos(2n\pi x)\,dx = -\frac{4}{\pi^2 n^2}, \qquad n \le 1;\\
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{L}\,dx;\\
B_n &= 2\int_1^2 -4(x-1)(x-2)\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-4(x-1)(x-2) = \frac{4}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(2n\pi x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

1 [40] **Utilizando obrigatoriamente transformada de Fourier**, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha\phi, \qquad \phi(x,0) = M\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a delta de Dirac, para $t \geq 0$ e $-\infty < x < +\infty$. Use o par de transformada-antitransformada de Fourier: $\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2a^2}{4}}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro, transformo a condição inicial para uso posterior:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(k,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} M\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,dx\\ &= \frac{M}{2\pi}.\end{aligned}$$

Em seguida, transformo a EDP:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi,\\ \frac{d\widehat{\phi}}{dt} &= (\mathrm{i}k)^2 D\widehat{\phi} + \alpha\widehat{\phi}\\ \frac{d\widehat{\phi}}{dt} &= \left[(\mathrm{i}k)^2 D + \alpha\right]\widehat{\phi}\\ \frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} &= \left(-k^2D + \alpha\right)dt\\ \ln\frac{\widehat{\phi}(k,t)}{\widehat{\phi}(k,0)} &= (-k^2D+\alpha)t\\ \widehat{\phi}(k,t) &= \frac{M}{2\pi}\mathrm{e}^{(-k^2D+\alpha)t}\end{aligned}$$

Agora é uma questão de utilizar corretamente as fórmulas dadas:

$$\phi(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}M}{2\pi}\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathrm{e}^{-k^2Dt}\right\};$$

reconhecendo

$$\begin{aligned}a &= 4Dt,\\ \phi(x,t) &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}M}{2\pi}\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{4Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}M}{\sqrt{4\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 24 nov 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica da extensão ímpar de

$$
f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 1/2, \\ 1-x & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Para a extensão ímpar, $L = 2$, e:

$$
\begin{aligned}
A_n &= 0; \\
B_n &= \frac{2}{L}\int_{-1}^{1} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \int_{-1}^{+1} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{+1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[1 + \frac{2}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right];
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi n}\left[1 + \frac{2}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\mathrm{sen}(n\pi x)\right\} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [40] Obtenha a função de Green de

$$\frac{dy}{dx} - (\operatorname{tg} x)y = f(x), \qquad y(0) = y_0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi} - G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi}\,d\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{dG}{d\xi}y\,d\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\operatorname{tg}\xi)y\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty \left[\frac{dG}{d\xi} + (\operatorname{tg}\xi)G\right]y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

Neste ponto, nós desejamos:

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{dG}{d\xi} + (\operatorname{tg}\xi)G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Não é uma boa idéia usar transformada de Laplace, por causa da $(\operatorname{tg}\xi)$; façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$, e prossigamos.

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{d\xi} + v\frac{du}{d\xi} + (\operatorname{tg}\xi)uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{dv}{d\xi} + (\operatorname{tg}\xi)v\right] + v\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{dv}{d\xi} &= -v\operatorname{tg}\xi\\
\frac{dv}{v} &= -\operatorname{tg}\xi d\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{dv}{v} &= -\int_0^\xi \operatorname{tg}\xi'\,d\xi'\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \ln(\cos(\xi))\\
v(x,\xi) = v(x,0)\cos(\xi);
\end{aligned}$$

Seguimos para u:

$$\begin{aligned}
v(x,0)\cos(\xi)\frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x),\\
v(x,0)\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} du &= \int_0^\xi \frac{1}{\cos\eta}\delta(\eta - x)\,d\eta\\
v(x,0)[u(x,\xi) - u(x,0)] &= \frac{1}{\cos(x)}H(\xi - x)\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)\cos(x)}H(\xi - x)\\
G(x,\xi) &= u(x,\xi)v(x,\xi) = u(x,0)v(x,0)\cos(\xi) + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)}H(\xi - x)\\
&= G(x,0)\cos(\xi) + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)}H(\xi - x).
\end{aligned}$$

Isto já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= \cos(\infty)\left[G(x,0) + \frac{1}{\cos(x)}\right],\\
G(x,0) &= -\frac{1}{\cos(x)}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Finalmente,

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{-\cos(\xi)}{\cos(x)} + \frac{\cos(\xi)}{\cos(x)} H(\xi - x), \\ &= -[1 - H(\xi - x)]\frac{\cos(\xi)}{\cos(x)} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

1 [40] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
y''(0) + \lambda^2 y &= 0,\\
y'(0) &= 0,\\
y(1) + y'(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

a) [20] Encontre a equação (que não pode ser resolvida algebricamente) cujas (infinitas) soluções dão os autovalores λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) [05] Desenhe uma figura mostrando estas soluções como interseções de 2 funções de λ.

c) [15] Encontre as autofunções $y_n(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
y(x) = \begin{cases} C + Dx & \lambda = 0,\\ A\cos(\lambda x) + B\,\text{sen}(\lambda x) & \lambda > 0 \end{cases}
$$

Para o caso $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C + Dx,\\
y'(x) &= D;\ y'(0) = 0 \Rightarrow D = 0;\\
y(1) + y'(1) &= C + D + D = C + 2D = C = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ não é autovalor.
Para $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
y(x) &= A\cos(\lambda x) + B\,\text{sen}(\lambda x),\\
y'(x) &= \lambda\left[-A\,\text{sen}(\lambda x) + B\cos(\lambda x)\right];\\
y'(0) &= \lambda B\cos(\lambda 0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0;\\
y(x) &= A\cos(\lambda x),\\
y'(x) &= -A\lambda\,\text{sen}(\lambda x).
\end{aligned}
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
y(1) + y'(1) &= A\cos\lambda - A\lambda\,\text{sen}\,\lambda = 0,\\
\cos\lambda &= \lambda\,\text{sen}\,\lambda,\\
\text{tg}\,\lambda &= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

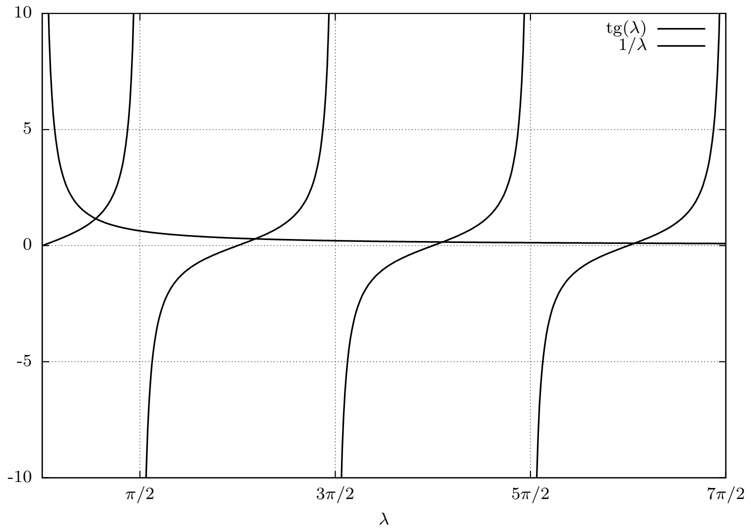
Portanto, a equação que dá os autovalores é

$$
\text{tg}\,\lambda_n = \frac{1}{\lambda_n}
$$

e as autofunções são

$$
y_n = \cos(\lambda_n)
$$

A figura a seguir mostra as interseções que definem os λ_n's.



Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 16 dez 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Dada a equação diferencial não-linear de Boussinesq,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right],\\
h(x,0) &= H,\\
h(0,t) &= H_0,\\
\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=1} &= 0,
\end{aligned}
$$

obtenha uma discretização linearizada da mesma em diferenças finitas do tipo

$$
h(x_i,t_n) = h(i\Delta x, n\Delta t) = h_i^n
$$

da seguinte forma:

- discretize a derivada parcial em relação ao tempo com um esquema progressivo no tempo entre n e $n+1$;
- aproxime h dentro do colchete por h_i^n (este é o truque que lineariza o esquema de diferenças finitas) **e mantenha-o assim**;
- utilize esquemas de diferenças finitas implícitos centrados no espaço para as derivadas parciais em relação a x, **exceto no termo h_i^n do item anterior**.

NÃO MEXA COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t} &= \frac{h_i^n\frac{h_{i+1}^{n+1}-h_i^{n+1}}{\Delta x} - h_i^n\frac{h_i^{n+1}-h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}}{\Delta x}\\
\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t} &= h_i^n\frac{h_{i+1}^{n+1}-2h_i^{n+1}+h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [20] Obtenha os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
r^2 + \lambda &= 0,\\
r^2 &= -\lambda,\\
r &= \pm\sqrt{-\lambda},\\
y(x) &= A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x),\\
y'(x) &= \sqrt{-\lambda}\left[A\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x) + B\cosh(\sqrt{-\lambda}x)\right]
\end{aligned}$$

Agora implementamos as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
y'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0,\\
y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \Rightarrow A\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $y \equiv 0$, e $\lambda < 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Ax + B,\\
y'(x) &= A,\\
y'(0) &= 0 \Rightarrow A = 0,\\
y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \Rightarrow B = 0.
\end{aligned}$$

A única solução possível é $y \equiv 0$, e $\lambda = 0$ não é autovalor.
Se $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\
y'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x) +\right],\\
y'(0) &= 0 \Rightarrow B = 0,\\
y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \Rightarrow A\cos\left(\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0,\\
\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores e as autofunções são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= (2n-1)^2,\\
y_n &= \cos\left((2n-1)x\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Sabendo que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[H(k+1)-H(k-1)\right],$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi(k^2+1)},$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, calcule

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\int_{\xi=-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}(x-\xi)}{x-\xi}\mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se da transformada de Fourier da convolução de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ com $g(x) = e^{-x}$; mas pelo Teorema da Convolução,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[f * g\right](x) &= 2\pi\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\\ &= \frac{H(k+1)-H(k-1)}{k^2+1}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Mostre que

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[h\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

é uma EDP parabólica.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial t} &= h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x},\\
h\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x},\\
B^2 - AC &= 0 - h \times 0 = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Obtenha por **separação de variáveis** uma solução "livre" (isto é: independente de condições iniciais ou de contorno) para a EDP

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h^n)}{\partial x} = 0, \qquad n > 1$$

em função de 3 constantes de integração k_1, k_2 e k_3 (**não se preocupe: elas surgirão naturalmente**).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
h &= X(x)T(t),\\
\frac{\partial (XT)}{\partial t} + \frac{\partial (XT)^n}{\partial x} &= 0,\\
X\frac{dT}{dt} + n(XT)^{n-1}T\frac{dX}{dx} &= 0\\
X\frac{dT}{dt} + nX^{n-1}T^n\frac{dX}{dx} &= 0\\
T^{-n}\frac{dT}{dt} + nX^{n-2}\frac{dX}{dx} &= 0\\
T^{-n}\frac{dT}{dt} = -nX^{n-2}\frac{dX}{dx} &= k_1.
\end{aligned}$$

Integração em T:

$$\begin{aligned}
T^{-n}dT &= k_1 dt,\\
\frac{T^{1-n}}{1-n} &= k_1 t + k_2,\\
T^{1-n} &= (1-n)(k_1 t + k_2),\\
T(t) &= \left[(1-n)(k_1 t + k_2)\right]^{\frac{1}{1-n}}.
\end{aligned}$$

Integração em x:

$$\begin{aligned}
-nX^{n-2}dX &= k_1 dx,\\
\frac{-n}{n-1}X^{n-1} &= k_1 x + k_3,\\
X^{n-1} &= -\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\\
X &= \left[-\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\right]^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$h(x,t) = XT = \left[-\frac{n-1}{n}(k_1 x + k_3)\right]^{\frac{1}{n-1}} \left[(1-n)(k_1 t + k_2)\right]^{\frac{1}{1-n}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 09 jan 2011
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

---

1 [20] Dada a equação diferencial ordinária não-linear

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{y^2}{y_c L}}_{\mathrm{II}} = \underbrace{\frac{y_c}{x}}_{\mathrm{III}}, \qquad y(L) = y_c,$$

onde: $y = y(x)$; $y_c > 0$ e $L > 0$ são constantes; $[\![y]\!] = [\![y_c]\!]$, e $[\![x]\!] = [\![L]\!]$:

a) [05] Mostre que a equação é dimensionalmente homogênea.

b) [15] Utilizando um Δx constante, obtenha um esquema totalmente implícito fazendo $y = y_{n+1}$ em II e $x = x_{n+1}$ em III. Encontre uma equação do 2º grau, e resolva para y_{n+1}: qual das duas raízes você deve usar?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + \frac{y_{n+1}^2}{y_c L} - \frac{y_c}{x_{n+1}} = 0,$$

$$\frac{1}{y_c L} y_{n+1}^2 + \frac{1}{\Delta x} y_{n+1} - \left[\frac{y_n}{\Delta x} + \frac{y_c}{x_{n+1}}\right] = 0,$$

$$y_{n+1} = \left[-\frac{1}{\Delta x} + \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{4}{y_c L}\left(\frac{y_n}{\Delta x} + \frac{y_c}{x_{n+1}}\right)}\right]\frac{y_c L}{2}.$$

O termo no radical é maior, em módulo, que $1/\Delta x$: assim, se $y_0 = y_c$ (veja a condição inicial), y_1 trocaria de sinal se usássemos o sinal de menos. O sinal correto, portanto, é o de mais ∎

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Esta questão é dividida em duas etapas. Dado o par de transformada-antitransformada de Fourier

$$\mathscr{F}\left\{f(x)\right\} = \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leftrightarrow\; \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{f}(k)\right\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\mathrm{i}kx}\widehat{f}(k)\,\mathrm{d}k,$$

algumas integrais podem não existir no sentido clássico, mas apenas no sentido de distribuições.

a) [10] Obtenha a transformada de Fourier de $g(x) = 1$. Sugestão: calcule a antitransformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(k)$.

b) [10] Utilizando o resultado acima, e

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d\widehat{g}}{dk}\right\} = -\mathrm{i}xg(x),$$

calcule a transformada de Fourier de $f(x) = x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Se $\widehat{g}(k) = \delta(k)$, então

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+\mathrm{i}kx}\delta(k)\,\mathrm{d}k = 1;$$

logo,

$$\mathscr{F}\{1\} = \delta(k).$$

b) Fazendo $g(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d\widehat{g}}{dk}\right\} &= -\mathrm{i}xg(x),\\
\mathscr{F}\left\{\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d\delta}{dk}\right\}\right\} &= \mathscr{F}\left\{-\mathrm{i}x\right\},\\
-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{d\delta}{dk} &= \mathscr{F}\left\{x\right\} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + 4y' + (4 - 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = y(L) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 e^{(-2+3\sqrt{\lambda})L} + c_2 c_2 e^{(-2-3\sqrt{\lambda})L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda > 0$ não é autovalor.
Se $\lambda = 0$:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 L e^{-2L} &= 0, \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 0$, e $\lambda = 0$ não é autovalor.
Se $\lambda < 0$:

$$y(x) = e^{-2x}\left(c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(3\sqrt{-\lambda}x)\right).$$

As condições de contorno levam a

$$\begin{aligned} c_2 &= 0, \\ e^{-2L} c_1 \operatorname{sen}(3\sqrt{-\lambda}L) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3\sqrt{-\lambda}L &= n\pi, \\ \lambda_n &= -\frac{\pi^2 n^2}{9L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

As autofunções correspondentes são

$$y_n(x) = e^{-2x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] **Utilizando obrigatoriamente o método das características, resolva**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta k \frac{\partial u}{\partial k} - \beta u + \nu k^2 u = 0, \qquad u(k,0) = f(k)$$

para $u(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Suponha $u = U(s)$, $t = T(s)$, $k = K(s)$:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial k}\frac{dK}{ds},$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{ds} &= 1, \\
\frac{dK}{ds} &= -\beta K, \\
\frac{dU}{ds} &= \beta U - \nu K^2 U.
\end{aligned}$$

Encontre: $T = s$ (sem perda de generalidade, a constante de integração $T(0) = 0$), $K(s) = \xi \mathrm{e}^{-\beta s}$. Agora, $K^2(s) = \xi^2 \mathrm{e}^{-2\beta s}$, e

$$\frac{dU}{ds} = \beta U - \nu \xi^2 \mathrm{e}^{-2\beta s} U.$$

Esta entretanto é uma equação *separável*:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}U}{U} &= \beta \mathrm{d}s - \nu \xi^2 \mathrm{e}^{2\beta s}\, \mathrm{d}s \\
\int_{u(\xi,0)}^{u(\xi,t)} \frac{\mathrm{d}U}{U} &= \int_0^t \beta \mathrm{d}s - \nu \xi^2 \mathrm{e}^{2\beta s}\, \mathrm{d}s \\
\ln \frac{u(\xi,t)}{f(\xi)} &= \beta t - \frac{\nu \xi^2}{2\beta}\left[1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}\right] \\
u(k,t) &= f(k) \exp\left[\beta t - \frac{\nu k^2 \mathrm{e}^{2\beta t}}{2\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t}\right)\right] \\
u(k,t) &= f(k) \exp\left[\beta t - \frac{\nu k^2}{2\beta}\left(\mathrm{e}^{2\beta t} - 1\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Obtenha a série trigonométrica de Fourier da extensão ímpar de

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad 0 < x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f_I(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \equiv 0,\\
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f_I(x)\operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-1}^{1} f_I(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2\pi n}{\pi^2 n^2 + 1}\left[1 - (-1)^n \mathrm{e}\pi\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$