TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02B, 18 Mar 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de funções **reais** em $[-\pi/2, +\pi/2]$, e seja o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x,$$

com

$$w(x) = \cos(x).$$

As funcões $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são ortogonais **sob esse produto interno?** Justifique matematicamente sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \operatorname{sen}(x) \times 1 \times \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \underbrace{\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{\text{ímpar}}\,\underbrace{\cos(x)}_{\text{par}}}_{\text{ímpar}}\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

e as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 1$ são, de fato, ortogonais ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Seja $\mathbb{V}$ o espaço das funções **reais** quadrado-integráveis em $[0,\pi]$ com o produto interno canônico

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Faça $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$, e use obrigatoriamente a desigualdade de Schwarz para encontrar α tal que

$$\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x \le \alpha.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
|\langle f,g\rangle|^2 &\le \langle f,f\rangle \langle g,g\rangle\,,\\
\left|\int_0^\pi 1\times\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2 &\le \left[\int_0^\pi 1^2\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_0^\pi \left(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}\right)^2\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \pi\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi;\\
\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}(x)}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{2\pi} = \alpha \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha os coeficientes c_n da série de Fourier **complexa** de $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $-1 \le x \le +1$. **Sugestão**: preste bastante atenção às integrais de funções pares e ímpares envolvidas, e às simplificações possíveis.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
a &= -1,\\
b &= +1,\\
L &= 2,\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}nx}{L}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}nx}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\left[\cos(\pi nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi nx)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-|x|}\left[\cos(\pi nx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\pi nx)\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\cos(\pi nx)}_{\text{par}}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\mathrm{sen}(\pi nx)}_{\text{ímpar}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \underbrace{\mathrm{e}^{-|x|}}_{\text{par}}\underbrace{\cos(\pi nx)}_{\text{par}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+1} \mathrm{e}^{-x}\cos(\pi nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi^2n^2+1} - \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}\left(\pi^2n^2+1\right)}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Sabendo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-|k|}\cos(k),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \pi \mathrm{e}^{-|k|}\operatorname{sen}(k),$$

obtenha a transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2}\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\pi \mathrm{e}^{-|k|}\cos(k) - \mathrm{i}\pi \mathrm{e}^{-|k|}\operatorname{sen}(k)\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}\left[\cos(k) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(k)\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-|k|}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(|k|+\mathrm{i}k)}}{2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹