TT009 Modelos Matemáticos em Engenharia Ambiental I
P2, 09 Mai 2003
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: ______________________________ Assinatura: ____________________

IMPORTANTE: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [5,0] Resolva a equação diferencial com a condição inicial a seguir:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right), \quad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Faça $y = uv$ e obtenha

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + x^2 uv = \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right), \tag{1}$$

$$u\left[\frac{dv}{dx} + x^2 v\right] + v\frac{du}{dx} = \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right); \tag{2}$$

forçando o termo dentro dos colchetes a ser zero,

$$\frac{dv}{v} = -x^2\,dx \tag{3}$$

$$\ln|v| = -\frac{x^3}{3} \tag{4}$$

$$v = \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right). \tag{5}$$

Levando de volta este resultado na equação diferencial,

$$\frac{du}{dx} = 1, \tag{6}$$

$$u = x + C. \tag{7}$$

A solução geral será $y(x) = (x + C)\exp(-\frac{x^3}{3})$; de $y(0) = 1$, $C = 1$ e, finalmente,

$$y(x) = (x + 1)\exp(-\frac{x^3}{3}). \tag{8}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [5,0] Obtenha a solução geral de $y'' - 2y' + y = \exp(x)$
SOLUÇÃO DA 2ª Questão:

A equação característica é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, que possui raiz $\lambda = 1$ dupla. Uma solução da equação *homogênea*, portanto, é $y = C_1 \exp(x)$, onde C_1 é uma constante. Para obter uma segunda solução LI, substitua $y = v(x)\exp(x)$ na equação homogênea associada, obtendo

$$\frac{d^2v}{dx^2}\exp(x) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \tag{10}$$

$$v(x) = k_1x + k_2. \tag{11}$$

Mas k_2 simplesmente se incorporaria à primeira solução já obtida, de forma que a solução geral da equação homogênea tem a forma $y_h(x) = C_1\exp(x) + C_2x\exp(x)$. A busca da segunda solução LI da equação homogênea associada torna a obtenção da solução particular quase óbvia: tente de novo $y = u(x)\exp(x)$, mas agora substitua na equação *não-homogênea*, obtendo

$$\frac{d^2u}{dx^2}\exp(x) = \exp(x), \tag{12}$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2}. \tag{13}$$

A solução particular desejada, portanto, é $y_p = \frac{x^2}{2}\exp(x)$ e a solução geral da equação não-homogênea é

$$y(x) = \left[C_1 + C_2x + \frac{x^2}{2}\right]\exp(x). \tag{14}$$

Continue a solução no verso ⟹