TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 2 Jun 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Um pouco de *background*: é fácil mostrar que

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad u^2 + v^2 \le h^2,$$

são equações paramétricas de um cone invertido cuja ponta se encontra na origem de um sistema de eixos cartesianos O_{xyz}. Se você adicionar a restrição $v \le 0$, isso representa a metade do cone, que fica sobre a região onde $y \le 0$. Suponha que esse meio-cone seja uma barragem, sobre a qual age, em cada ponto, um vetor-tensão $\boldsymbol{t} = -p\boldsymbol{n}$, onde $\boldsymbol{n}$ é um vetor normal unitário apontando para *fora* do cone, e $p = p_0 + \rho g(h - z)$ é a pressão hidrostática. Calcule a componente vertical da força resultante $F_z = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{k})\, \mathrm{d}A$ da água sobre a barragem ($\boldsymbol{k}$ é o vetor unitário ao longo do eixo z; p_0 é a pressão atmosférica, ρ é a massa específica da água, g é a aceleração da gravidade, e $\mathscr{S}$ é a superfície da barragem).
Para facilitar sua vida, você pode usar o fato de que

$$\boldsymbol{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1 \right),$$

e que a integral de superfície de uma função escalar $f(\boldsymbol{r}(u, v))$ sobre $\mathscr{S}$ é

$$I_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} f(\boldsymbol{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro o vetor normal. Dada a superfície $F(x, y, z) = 0$, o normal é

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} F|} \boldsymbol{\nabla} F$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \left[x^2 + y^2\right]^{1/2} - z = 0;\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= x \left[x^2 + y^2\right]^{-1/2};\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= y \left[x^2 + y^2\right]^{-1/2};\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -1;\\
|\boldsymbol{\nabla} F| &= \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 \right]^{1/2} = \sqrt{2};\\
\boldsymbol{n}(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1 \right).
\end{aligned}$$

Agora, a integral de superfície F_z é dada por

$$F_z = \iint_{R_{uv}} -p(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

O produto vetorial é formado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right);
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

em seguida,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right);
$$

$$
\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{2}.
$$

A integral simplifica-se para

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} &= -1/\sqrt{2}; \\
F_z &= \iint_{R_{uv}} -[p_0 + \rho g(h-z)] \times (-1/\sqrt{2}) \times \sqrt{2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_{R_{uv}} [p_0 + \rho g(h - \sqrt{u^2+v^2})] \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{\theta=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{h} [p_0 + \rho g(h-r)] r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi h^2}{6} (3p_0 + \rho g h) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv \Rightarrow \\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - xuv &= x; \\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - xv\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x; \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= xv; \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= x\mathrm{d}x; \\
\int_{v_0}^{v(x)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_0^x y\,\mathrm{d}y; \\
\ln\left(\frac{v(x)}{v_0}\right) &= \frac{1}{2}x^2; \\
v(x) &= v_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right); \\
v_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x, \\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v_0} x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right); \\
u(x) - u_0 &= \frac{1}{v_0}\int_0^x y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{v_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \Rightarrow \\
u(x) &= u_0 + \frac{1}{v_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]; \\
y(x) &= u(x)v(x) = (u_0 v_0)\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \\
&= (u_0 v_0)\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 1 \\
&= C\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 1 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a solução geral de

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

Sugestão: procure uma solução particular $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução homogênea é fácil:

$$y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

A busca da solução particular é bem simples:

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c; \\ y_p' &= 2ax + b; \\ y_p'' &= 2a. \end{aligned}$$

Substitua:

$$\begin{aligned} 2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) &= x^2; \\ 2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c &= x^2; \\ 2a = 1 &\Rightarrow a = 1/2; \\ (6a + 2b) = 0 &\Rightarrow (3 + 2b) = 0;\ b = -3/2; \\ (2a + 3b + 2c) = 0 &\Rightarrow (1 - 9/2 + 2c) = 0;\ c = 7/4 \ \Rightarrow \\ y(x) &= C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x} + x^2/2 - 3x/2 + 7/4 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Se $|x| < 1$, $x \in \mathbb{R}$, calcule em forma fechada

$$S(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y = x^3 &\Rightarrow |y| < 1; \\ S(x) &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$