TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 02 Set 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Esta questão envolve uma solução numérica de uma função $u(x,t)$ do tipo

$$u_i^n = u(x_i, t_n) = u(i\Delta x, n\Delta t)$$

com i, n inteiros maiores que ou iguais a zero, e Δx e Δt fixos. Eis a questão: dada a equação da onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

formule um método explícito, centrando tanto a derivada segunda no tempo quanto a derivada segunda no espaço em u_i^n. Obtenha uma fórmula explícita para u_i^{n+1} em função de u_i^n, u_{i+1}^n, u_{i-1}^n, e u_i^{n-1}, e do número de Courant $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2};\\
u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} &= \frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right];\\
u_i^{n+1} &= 2\left[1 - \mathrm{Co}^2\right] u_i^n + \mathrm{Co}^2\left[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right] - u_i^{n-1}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Dado esquema explícito

$$u_i^{n+1} = 2\left[1 - \mathrm{Co}^2\right] u_i^n + \mathrm{Co}^2\left[u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right] - u_i^{n-1},$$

onde Co é o número de Courant, utilize a análise de estabilidade de von Neumann para obter uma expressão do tipo $\mathrm{e}^{a\Delta t} + \mathrm{e}^{-a\Delta t} = \ldots$ (ou seja: obtenha o lado direito do sinal de igual!). Note que $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ é o fator de amplificação usual da análise de estabilidade.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Cada modo de Fourier do erro de truncamento evolui segundo

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} &= 2\left[1-\mathrm{Co}^2\right]\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i} + \mathrm{Co}^2\left[\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i+\Delta x)} + \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(x_i-\Delta x)}\right] - \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n-\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i};\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} + \mathrm{e}^{-a\Delta t} &= 2\left[1-\mathrm{Co}^2\right] + \mathrm{Co}^2\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o programa a seguir:

```
#!/usr/bin/python
from numpy import zeros
a = zeros(10,float)
b = a + 1
c = a + 2
d = a + b + c
print(d)
```

Que tipo de variável é `d`, e o que o programa imprime na tela ? (**Sua resposta deve ser completa e precisa.**)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

`d` é um array de `floats` com 10 elementos. O programa imprime na tela 10 números "3.0" entre chaves.

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Um produto interno num certo espaço de funções *reais* $\mathbb{V}$ é definido como

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exiba uma função f que *não pertença* a $\mathbb{V}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Por exemplo,

$$f(x) = 1/x,$$

pois neste caso teríamos

$$\begin{aligned} \|f\| &= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\bigg|_0^1 = -1 + \infty \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/4, \\ 0, & 1/4 < x \le 1 \end{cases}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n\pi x) + B_n \operatorname{sen}(2n\pi x); \\
A_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{1/4} \cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x; \\
A_0 &= 1/2; \\
A_n &= \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n > 0); \\
B_n &= 2\int_0^{1/4} \operatorname{sen}(2n\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 30 Set 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

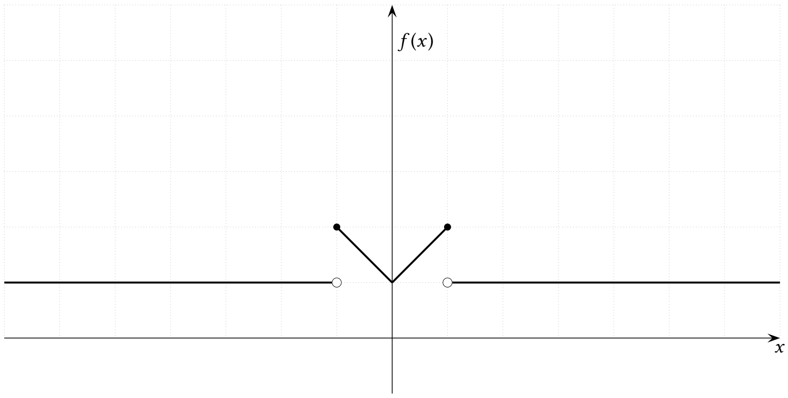
1 [20] A figura ao lado mostra a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + |x|, & |x| \le 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

Sabendo que

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x,$$

Calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$ de $f(x)$.



Sugestão: Escreva $f(x) = 1 + g(x)$ (quem é $g(x)$?), e calcule a transformadas de Fourier de 1 e de $g(x)$ separadamente. Some.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Evidentemente, $\delta(k)$ é a transformada de Fourier de $f(x) = 1$, $-\infty < x < +\infty$. Resta calcular a transformada de Fourier de

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

que é

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} |x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi k^2}\left[k\,\mathrm{sen}(k) + \cos(k) - 1\right], \end{aligned}$$

donde

$$\widehat{f}(k) = \delta(k) + \frac{1}{\pi k^2}\left[k\,\mathrm{sen}(k) + \cos(k) - 1\right] \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Seja

$$
L = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right], \qquad f(0) = f(1) = 0,
$$

um operador diferencial definido no intervalo $[0,1]$. O espaço vetorial são as funções *reais* (integráveis, etc.) de uma variável *real* nesse intervalo. O produto interno é

$$
\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.
$$

Obtenha o operador adjunto $L^\#$. **Atenção:** você vai precisar integrar por partes 2 vezes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sabemos que

$$
\langle Lf, g\rangle = \left\langle f, L^\# g\right\rangle.
$$

Integramos:

$$
\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right] g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \cancelto{0}{g(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\bigg|_0^1} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \cancelto{0}{g(x)f(x)\bigg|_0^1} - \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}f} - \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\right] - \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(x)\left[\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x \Rightarrow \\
L^\# &= \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right], \qquad g(0) = g(1) = 0 \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Obtenha a função de Green de

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t), \qquad t \geq 1;\; x(1) = x_1.$$

Faça todas as integrais partindo de 1, e não de 0.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{1}{\tau}f(\tau),\\
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= G(t,\tau)\frac{1}{\tau}f(\tau),\\
\int_1^\infty G\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau &= \int_1^\infty \frac{G}{\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
G(t,\tau)x(\tau)\Big|_1^\infty - \int_1^\infty x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau &= \int_1^\infty \frac{G}{\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
[G(t,\infty)x(\infty) - G(t,1)x(1)] - \int_1^\infty x\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau &= \int_1^\infty \frac{G}{\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Impomos

$$\begin{aligned}
G(t,\infty) &= 0,\\
-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t);
\end{aligned}$$

obtemos

$$x(t) = G(t,1)x_1 + \int_1^\infty \frac{G(t,\tau)}{\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} &= -\delta(\tau - t),\\
\int_1^\tau dG = G(t,\tau) - G(t,1) &= -\int_1^\tau \delta(\xi - t)\,\mathrm{d}\xi\\
G(t,\tau) - G(t,1) &= -H(\tau - t),\\
G(t,\tau) &= G(t,1) - H(\tau - t),\\
G(t,\infty) &= G(t,1) - 1 = 0 \Rightarrow G(t,1) = 1,\\
G(t,\tau) &= 1 - H(\tau - t)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Use a igualdade de Parseval

$$\frac{1}{L}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

e os valores dados dos coeficientes de Fourier de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[\left(2\mathrm{i}\pi^2 n^2 + 2\pi n - \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n} + \mathrm{i}\right], & n \neq 0, \\ ?, & n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(Por sua conta!)}$$

para provar que

$$\frac{8}{45} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4}\right].$$

Atenção: Sua dedução deve ser clara, completa e detalhada. Os pontos da questão serão descontados parcial ou integralmente se houver passagens “mágicas”, obscuras, etc.. **Portanto, justifique todas as simplificações que fizer. Livre-se de todos os números complexos.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/3; \\
\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} &= \sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{+\infty}\left|\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[\left(2\mathrm{i}\pi^2 n^2 + 2\pi n - \mathrm{i}\right)\cancelto{1}{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n}} + \mathrm{i}\right]\right|^2 + \frac{1}{9} \\
&= \sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{+\infty}\left|\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[\left(2\mathrm{i}\pi^2 n^2 + 2\pi n - \mathrm{i}\right) + \mathrm{i}\right]\right|^2 + \frac{1}{9} \\
&= \sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{+\infty}\left|\frac{1}{4\pi^3 n^3}\left[2\mathrm{i}\pi^2 n^2 + 2\pi n\right]\right|^2 + \frac{1}{9} \\
&= \sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{+\infty}\left|\frac{\mathrm{i}}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right|^2 + \frac{1}{9} \\
&= \sum_{n=-\infty;n\neq 0}^{+\infty}\left[\frac{1}{4\pi^2 n^2} + \frac{1}{4\pi^4 n^4}\right] + \frac{1}{9} \\
\frac{4}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi^2 n^2} + \frac{1}{2\pi^4 n^4}\right] \\
\frac{8}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^4 n^4}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Calcule a matriz-adjunta de

$$
\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 30 Set 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [40] Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = xt, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Suponha uma curva característica parametrizada por

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ t &= T(s). \end{aligned}$$

Sobre ela,

$$u = u(x,y) = u(X(s),T(s)) = U(s).$$

Compare:

$$\begin{aligned} xt &= \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial s} \end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1, \\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)T(s). \end{aligned}$$

Resolvendo as duas primeiras,

$$\begin{aligned} T(s) &= t, \\ \frac{\mathrm{d}X}{X} &= s, \\ \ln\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right) &= t, \\ X(t) &= X(0)\mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

Retornando para U,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= X(s)T(s)\,\mathrm{d}s \\ \int_{U(0)}^{U(t)} \mathrm{d}U &= \int_{s=0}^{t} X(0)s\mathrm{e}^{s}\,\mathrm{d}s \\ U(t) - U(0) &= X(0)\left[(t-1)\mathrm{e}^{t} + 1\right] \\ U(t) - U(0) &= x\mathrm{e}^{-t}\left[(t-1)\mathrm{e}^{t} + 1\right] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} U(t) &= u(X(t),t) = u(x,t), \\ U(0) &= u(X(0),0) = u(X(t)\mathrm{e}^{-t},0) = \mathrm{e}^{-|X(t)\mathrm{e}^{-t}|} = \mathrm{e}^{-|x\mathrm{e}^{-t}|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathrm{e}^{-|x\mathrm{e}^{-t}|} + x\mathrm{e}^{-t}\left[(t-1)\mathrm{e}^{t} + 1\right] \\ &= \mathrm{e}^{-|x\mathrm{e}^{-t}|} + x\left[t - 1 + \mathrm{e}^{-t}\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [60] Utilizando **obrigatoriamente** o método de separação de variáveis, resolva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u \\
u(x,0) &= x, \\
u(0,t) &= 0, \\
\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}$$

Atenção: como você descobrirá naturalmente, neste problema você deve estudar os casos $\lambda + 1 < 0$, $\lambda + 1 = 0$ e $\lambda + 1 > 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t); \\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= XT \\
\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + 1 = -\lambda.
\end{aligned}$$

Identificamos o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X + \lambda X &= 0, \\
X(0) &= 0, \\
\frac{\mathrm{d}X(1)}{\mathrm{d}x} &= 0.
\end{aligned}$$

Observe que $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $w(x) = 1$. Buscamos agora, sistematicamente, os sinais de λ.

$\lambda + 1 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda + 1)X &= 0, \\
r^2 + (\lambda + 1) &= 0, \\
r &= \pm\sqrt{-(\lambda+1)}, \\
X(x) &= A\cosh\left(\sqrt{-(\lambda+1)}x\right) + B\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{-(\lambda+1)}x\right), \\
X'(x) &= \sqrt{-(\lambda+1)}\left[A\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{-(\lambda+1)}x\right) + B\cosh\left(\sqrt{-(\lambda+1)}x\right)\right]. \\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0; \\
X'(1) = 0 &\Rightarrow \sqrt{-(\lambda+1)}B\cosh(\sqrt{-(\lambda+1)}) = 0;\ B = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $X(x) \equiv 0$, e como não se pode ter autovetores nulos, este caso não nos serve.

$\lambda + 1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= 0, \\
X(x) &= Ax + B; \\
X'(x) &= A. \\
X(0) = 0 &\Rightarrow B = 0; \\
X'(1) = 0 &\Rightarrow A = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $X(x) \equiv 0$, e como não se pode ter autovetores nulos, este caso também não nos serve.

$\lambda + 1 > 0$:

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + (\lambda+1)X &= 0,\\
r^2 + (\lambda+1) &= 0,\\
r &= \pm\sqrt{(\lambda+1)}\mathrm{i},\\
X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda+1}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda+1}x\right),\\
X'(x) &= \sqrt{\lambda+1}\left[-A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda+1}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda+1}x\right)\right].\\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0;\\
X'(1) = 0 &\Rightarrow \sqrt{\lambda+1}B\cos(\sqrt{\lambda+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Desejamos evitar $B = 0$, portanto, devemos ter

$$
\begin{aligned}
\cos(\sqrt{\lambda_n+1}) &= 0,\\
\sqrt{\lambda_n+1} &= \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots,\\
\lambda_n &= \left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right]^2 - 1,\ n = 0,1,2,\ldots\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right),\ n = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

Para a obtenção de $T_n(t)$, fazemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= -\left\{\left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right]^2 - 1\right\}T;\\
T_n(t) &= T_0\exp\left[-\left(\left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right]^2 - 1\right)t\right]
\end{aligned}
$$

A solução geral do problema deverá portanto ser procurada na forma

$$
u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\exp\left[-\left(\left[\frac{\pi}{2} + n\pi\right]^2 - 1\right)t\right]
$$

Para a obtenção dos valores de C_n, utilizamos a condição inicial $u(x,0) = x$:

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right),\\
x\,\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right),\\
\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\int_0^1 \mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\,\mathrm{d}x,\\
\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\,\mathrm{d}x &= C_m\int_0^1\left[\mathrm{sen}\left(\frac{2m+1}{2}\pi x\right)\right]^2\,\mathrm{d}x,\\
\frac{4(-1)^m}{(2\pi m+\pi)^2} &= \frac{C_m}{2};\\
C_m &= \frac{8(-1)^m}{(2\pi m+\pi)^2)}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 25 Nov 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Discretize a equação diferencial parcial

$$
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{T}u,
$$

(onde u, D e T são constantes) com um método **completamente implícito**, utilizando **obrigatoriamente**:

- um esquema progressivo $O(\Delta t)$ para a derivada temporal;
- um esquema *upwind* para a derivada no termo advectivo;
- um esquema de derivadas centradas $O(\Delta x^2)$ para a derivada no termo difusivo.

Use $t_n = n\Delta t$; $x_i = i\Delta x$ e discretize u em termos de

$$
u_i^n = u(x_i, t_n).
$$

Prossiga na discretização até obter uma linha do sistema de equações resultante, em termos das icógnitas u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1} e u_{i+1}^{n+1}, deixando no lado direito, claramente, o termo forçante que só pode depender do passo de tempo n. **Não se preocupe com condições de contorno.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação é não-linear. Uma forma de linearizá-la é utilizar a velocidade de advecção u igual a u_i^n (a velocidade calculada no passo anterior). Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} &= D\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{T}u_i^{n+1}\\
u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left[u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left[u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right] + \frac{\Delta t}{T}u_i^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Faça

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Co} &\equiv \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x},\\
\mathrm{Fo} &\equiv \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},\\
\mathrm{Na} &\equiv \frac{\Delta t}{T}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
u_i^{n+1} - u_i^n + \mathrm{Co}\left[u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= \mathrm{Fo}\left[u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right] + \mathrm{Na}\,u_i^{n+1};\\
u_i^{n+1} - u_i^n + \mathrm{Co}\left[u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{Fo}\left[u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{Na}\,u_i^{n+1} &= 0;\\
-[\mathrm{Co} + \mathrm{Fo}]u_{i-1}^{n+1} + [1 + \mathrm{Co} + 2\mathrm{Fo} - \mathrm{Na}]u_i^{n+1} - [\mathrm{Fo}]u_{i+1}^{n+1} &= u_i^n \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] O conjunto dos polinômios de Legendre,

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1,\\
P_1(x) &= x,\\
P_2(x) &= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

forma uma base ortogonal para as funções reais contínuas no intervalo $[-1, 1]$. Obtenha os coeficientes de Fourier c_n de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

para $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Observação: o produto interno desta questão é

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Felizmente, nós só precisamos de P_0, P_1 e P_2. Portanto:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x),\\
f(x) P_m(x) &= \sum_{n=0}^{2} c_n P_n(x) P_m(x),\\
\int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x &= c_m \int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Precisamos calcular cada um dos 3:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1]\,\mathrm{d}x &= c_0 \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x;\\
\frac{8}{3} &= c_0 \times 2;\\
c_0 &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1] x\,\mathrm{d}x &= c_1 \int_{-1}^{+1} x^2\,\mathrm{d}x;\\
-\frac{4}{3} &= c_1 \frac{2}{3}\\
c_1 &= -2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} [x^2 - 2x + 1][3x^2/2 - 1/2]\,\mathrm{d}x &= c_2 \int_{-1}^{+1} [3x^2 - 1/2]^2\,\mathrm{d}x;\\
\frac{4}{15} &= c_2 \frac{2}{5}\\
c_2 &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de $f(x)$ é

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{4}{3} P_0(x) - 2 P_1(x) + \frac{2}{3} P_2(x) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20]

a) Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

b) Usando o resultado de a); sabendo que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\,\mathrm{d}k = \frac{\pi}{2};$$

e escrevendo $f(x)$ e depois $f(0)$ em função de $\widehat{f}(k)$, calcule

$$\int_0^\infty \frac{\cos(k) - 1}{k^2}\,\mathrm{d}k.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x| \left[\cos(kx) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(kx)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |x| \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{1} x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi k^2}\left[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1\right].
\end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\left[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k \\
f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\left[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1\right]\,\mathrm{d}k \\
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\left[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1\right]\,\mathrm{d}k \\
0 &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\pi k^2}\left[k\operatorname{sen}(k) + \cos(k) - 1\right]\,\mathrm{d}k \qquad \text{(pois o integrando é uma função par)} \\
0 &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\,\mathrm{d}k + \int_0^\infty \frac{\cos(k) - 1}{\pi k^2}\,\mathrm{d}k.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(k)}{k} = \frac{\pi}{2};$$

portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(k) - 1}{k^2}\,\mathrm{d}k = -\frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Dada a equação diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} - \mathrm{e}^{\tau} G &= \delta(\tau - t),\\
G(t,\infty) &= 0,
\end{aligned}
$$

obtenha $G(t,\tau)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau);\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} - \mathrm{e}^{\tau} uv &= \delta(\tau - t);\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} - \mathrm{e}^{\tau} v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t).
\end{aligned}
$$

A equação para v é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} &= \mathrm{e}^{\tau} v;\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\xi=0}^{\tau} \mathrm{e}^{\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
\ln\left(\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)}\right) &= \mathrm{e}^{\tau} - 1\\
v(t,\tau) &= v(t,0)\exp\left[\mathrm{e}^{\tau} - 1\right].
\end{aligned}
$$

A equação para u é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{1}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{\tau}\right]\delta(\tau - t),\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{\tau}\right]\delta(\tau - t)\mathrm{d}\tau,\\
u(t,\tau) - u(t,0) &= \int_{\xi=0}^{\tau} \frac{1}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{\xi}\right]\delta(\xi - t)\mathrm{d}\xi,\\
u(t,\tau) - u(t,0) &= \frac{H(\tau - t)}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right],\\
u(t,\tau) &= u(t,0) + \frac{H(\tau - t)}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau)\\
&= \left\{u(t,0) + \frac{H(\tau - t)}{v(t,0)}\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right]\right\} v(t,0)\exp\left[\mathrm{e}^{\tau} - 1\right]\\
&= \left\{G(t,0) + H(\tau - t)\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right]\right\}\exp\left[\mathrm{e}^{\tau} - 1\right]
\end{aligned}
$$

Para garantir $\lim_{\tau\to\infty} G(t,\tau) = 0$, obviamente precisamos ter

$$
G(t,0) = -\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right].
$$

Finalmente,

$$
G(t,\tau) = \left[H(\tau - t) - 1\right]\exp\left[1 - \mathrm{e}^{t}\right]\exp\left[\mathrm{e}^{\tau} - 1\right] \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Classifique (hiperbólica, parabólica ou elítica?) a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação é da forma

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} = D,$$

Com $A = 1$, $B = C = 0$. Então,

$$B^2 - AC = 0 - 0 = 0,$$

e a equação é parabólica.

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 21 Dez 2016
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a seguinte discretização de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

onde c é constante, $u_i^n = u(x_i, t_n)$, $t_n = n\Delta t$ e $x_i = i\Delta x$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}.$$

Faça uma análise completa de estabilidade de von Neumann do esquema em função do número de Courant $\mathrm{Co} = (c\Delta t)/\Delta x$. Descubra se o esquema é incondicionalmente instável, condicionalmente estável, ou incondicionalmente estável. Se o esquema for condicionalmente estável, para que valores de Co ele é estável?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação é linear. O esquema é explícito, e temos

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} - u_i^n &= -\mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right],\\
u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right],\\
u_i^{n+1} &= \left[1 + \mathrm{Co}\right] u_i^n - \mathrm{Co}\, u_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

Substituindo um modo do erro de truncamento

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

no esquema de diferenças, encontramos

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \left[1 + \mathrm{Co}\right]\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\,\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x},\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left[1 + \mathrm{Co}\right] - \mathrm{Co}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x}.
\end{aligned}$$

Faça

$$\theta = k_l\Delta x.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left[1 + \mathrm{Co}\right] - \mathrm{Co}[\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)]\\
&= \left[1 + \mathrm{Co}(1 - \cos(\theta))\right] - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(\theta);\\
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &= \left[1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - \cos(\theta))^2\right] + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\\
&= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) - 2\cos(\theta)\mathrm{Co}^2 + 2\mathrm{Co}^2\\
&= 1 + 2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2 - \cos(\theta)\left[2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2\right]\\
&= 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]\left[1 - \cos(\theta)\right].
\end{aligned}$$

Desejamos

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]\left[1 - \cos(\theta)\right] &< 1;\\
2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]\left[1 - \cos(\theta)\right] &< 0.
\end{aligned}$$

Isso é impossível: $[1 - \cos(\theta)] \geq 0$ sempre, assim como $\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]$. O esquema é, portanto, incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a série trigonométrica de Fourier de

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x), \qquad -1 \le x \le 1.$$

Será necessário saber que

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

e que

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;\\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, note que

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

O produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar. A função $\operatorname{sen}(2x)$, portanto, é ímpar no domínio em questão, e sua série conterá apenas senos. Trata-se agora apenas de aplicação de fórmula. Com $L = 2$, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{2}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\pi n x);\\
B_n &= \int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lembro-me de

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;\\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{+1} \cos((2-\pi n)x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{+1} \cos((2+\pi n)x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2-\pi n}\int_{-1}^{+1} \cos((2-\pi n)x)\,(2-\pi n)\mathrm{d}x - \frac{1}{2+\pi n}\int_{-1}^{+1} \cos((2+\pi n)x)\,(2+\pi n)\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2-\pi n}\operatorname{sen}(2-\pi n) - \frac{2}{2+\pi n}\operatorname{sen}(2+\pi n)\right]\\
&= \left[\frac{1}{2-\pi n}\operatorname{sen}(2-\pi n) - \frac{1}{2+\pi n}\operatorname{sen}(2+\pi n)\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule a transformada de Fourier de

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi k} \int_{-1}^{+1} \cos(kx)\, k\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi k} \operatorname{sen}(kx)\Big|_{-1}^{+1} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Se $\boldsymbol{L}^{\#}$ é o operador adjunto de $\boldsymbol{L}$, prove que, se $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$(\alpha \boldsymbol{L})^{\#} = \alpha^* \boldsymbol{L}^{\#}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\left\langle (\alpha \boldsymbol{L})^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \left\langle \boldsymbol{L}^{\#} \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \\
&= \left\langle (\alpha^* \boldsymbol{L}^{\#}) \cdot \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \right\rangle \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Usando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen}(x),\ 0 \le x \le \pi; t > 0;\\
u(x,0) &= \operatorname{sen}(x),\\
u(0,t) &= 0,\\
u(\pi,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sugestão: $u(x,t) = X(x)T(t)$ vai fracassar; tente $u(x,t) = X(x)T(t) + f(x)$, e escolha ("chute") um $f(x)$ adequado. Quem você acha que é um candidato óbvio para $f(x)$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Um ataque direto, $u = X(x)T(t)$, fracassa. Tentemos

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t) + \operatorname{sen}(x);\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= XT';\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= X'T + \cos(x);\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= X''T - \operatorname{sen}(x).
\end{aligned}
$$

Além disso, as condições inicial e de contorno produzem:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= X(x)T(0) + \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow T(0) = 0;\\
u(0,t) &= X(0)T(t) + \operatorname{sen}(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0;\\
u(\pi,t) &= X(\pi)T(t) + \operatorname{sen}(\pi) \Rightarrow X(\pi) = 0.
\end{aligned}
$$

Substituindo agora a solução proposta na equação diferencial, nós encontramos

$$
\begin{aligned}
XT' &= X''T,\\
\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda.
\end{aligned}
$$

O problema de Sturm-Liouville em X é

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Antecipamos que $\lambda < 0$ não vai nos servir. Tentemos: $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
X(x) &= Ax + B;\\
X(0) &= 0 \Rightarrow B = 0;\\
X(\pi) &= 0 \Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Em princípio, $X(x) = 0$ não nos interessa. Continuamos.
$\lambda = k^2 > 0$:

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx);\\
X(0) &= A = 0;\\
X(\pi) &= B\operatorname{sen}(k\pi) = 0; \qquad k = n > 0.
\end{aligned}
$$

Para esses λ_n's, teremos

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-n^2 t}.$$

Encontramos portanto as autofunções $X_n = \operatorname{sen}(nx)$. Nossa solução é do tipo

$$u(x,t) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)\mathrm{e}^{-n^2 t}\right] + \operatorname{sen}(x).$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)\right] + \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x),\\
A_n &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

e a solução final é

$$u(x,t) = \operatorname{sen}(x) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹