TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 29 Abr 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [15] Classifique a equacao diferencial

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} &= F, \\ A &= 1, \\ B &= 1, \\ C &= 1, \\ \Delta &= B^2 - AC = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação é parabólica ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le L, \qquad t \ge 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\phi(L,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Note que as condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser remediado fazendo

$$
\phi(x,t) = u(x,t) + \phi_0(1 - x/L),
$$

e encontrando uma equação e condições de contorno e iniciais equivalentes para u.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t};\\
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \phi_0/L;\\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na EDP, encontramos

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
$$

Substituindo as condições iniciais e de contorno, encontramos:

$$
\begin{aligned}
&\phi(x,0) = u(x,0) + \phi_0(1 - x/L) = 0;\\
&u(x,0) = -\phi_0(1 - x/L).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi(0,t) = u(0,t) + \phi_0 = \phi_0;\\
&u(0,t) = 0;\\
&\phi(L,t) = u(L,t) = 0;\\
&u(L,t) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, agora as condições de contorno em u são homogênas. Resolvemos agora um problema bem conhecido para $u(x,t)$ (ver seção 17.3 do livro-texto):

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
&\vdots,\\
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2},\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
T_n(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\
&= -\phi_0(1-x/L);\\
&\vdots\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L -\phi_0(1-x/L)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2\phi_0}{\pi n};\\
\phi(x,t) &= \phi_0(1-x/L) - \phi_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [15] Seja $f(x)$ uma função **univariada** em $[0,1]$. Resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= 0,\\
f(0) &= 0,\\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Obviamente,

$$\nabla^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 0,\\
&f(x) = ax + b,\\
&f(0) = 0 \ \Rightarrow b = 0,\\
&f(1) = 1 \ \Rightarrow a = 1,\\
&f(x) = x \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [35] Para um domínio retangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, resolva

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= 0,\\
\phi(0,y) &= 0,\\
\phi(a,y) &= 0,\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\phi(x,b) &= \phi_0 x.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= X(x)Y(y),\\
Y\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + X\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= 0,\\
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Claramente, o candidato a um problema de Sturm-Liouville é a equação em x:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= \lambda X,\\
X(0) &= 0,\\
X(a) &= 0,\\
\lambda_n &= -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,\\
X_n &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).
\end{aligned}
$$

A equação em y é

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} &= -\lambda Y_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n,\\
\frac{\mathrm{d}^2Y_n}{\mathrm{d}y^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n &= 0,\\
Y_n &= A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right).
\end{aligned}
$$

A solução geral é do tipo

$$
\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
$$

Continue a solução no verso ⟹

Agora,

$$
\begin{aligned}
\phi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cosh\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) + B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi 0}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,\\
\phi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,\\
A_n &= 0;\\
\phi(x,b) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \phi_0 x,\\
\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) &= \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right),\\
\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x,\\
B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{a}{2} &= \int_0^a \phi_0 x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x,\\
B_m \operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)\frac{a}{2} &= -\phi_0 \frac{a^2(-1)^m}{m\pi},\\
B_m &= -\phi_0 \frac{2a(-1)^m}{\operatorname{senh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right) m\pi} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$