TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 28 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Como vimos em aula, o método de Runge-Kutta permite resolver (em princípio) qualquer sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

simplesmente programando $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ e passando a função como argumento para `rk4(x,y,h,f)`. Se o sistema de EDOs é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 + y_3 \\ y_3 - y_1 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix},$$

programe a `f(x,y)` correspondente em Python.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
from numpy import array
def f(x,y):
   return array([y[1]+y[2],y[2]-y[0],y[0]+y[1]])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $E = ((1,1),(-1,1))$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (3,4)$ na base E.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2,\\
(3,4) &= a(1,1) + b(-1,1)\\
(3,4) &= (a-b, a+b),\\
a - b &= 3,\\
a + b &= 4,\\
2a &= 7,\\
a &= 7/2,\\
7/2 - b &= 3,\\
b &= 7/2 - 3 = 7/2 - 6/2 = 1/2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Determine a projeção do vetor $\boldsymbol{v} = (3, 3, 1)$ na direção do vetor $\boldsymbol{p} = (1/2, 1/2, 1/2)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}| &= \sqrt{1/4 + 1/4 + 1/4} = \sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2};\\
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1/2, 1/2, 1/2);\\
\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{m} &= (3, 3, 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(1/2, 1/2, 1/2)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[3/2 + 3/2 + 1/2\right]\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{7}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{p}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, calcule

$$([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{p}$$

em função dos produtos escalares $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})$, $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p})$, $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p})$ e $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$. **Sugestão:** você vai precisar da identidade polar.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_k &= \epsilon_{ijk} u_i v_j, \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{klm} [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_k w_l \boldsymbol{e}_m, \\
&= \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_l \boldsymbol{e}_m; \\
([\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{p} &= \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_l \boldsymbol{e}_m \cdot p_n \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_i v_j w_l p_n \delta_{mn} \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_i v_j w_l p_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} u_i v_j w_l p_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_i v_j w_l p_m \\
&= u_i v_j w_i p_j - u_i v_j w_j p_i \\
&= (u_i w_i)(v_j p_j) - (u_i p_i)(v_j w_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$