

**Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova**

NOME: GABARITO

Assinatura: \_\_\_\_\_

**1** [20] Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k\phi,$$

onde  $D > 0$  e  $k > 0$ , a sua discretização com um esquema de diferenças finitas totalmente implícito, progressivo no tempo e centrado no espaço, produz uma equação geral do tipo

$$A\phi_{i-1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n,$$

onde como sempre  $\phi_i^n$  é a aproximação em grade de  $\phi(i\Delta x, n\Delta t)$ . Obtenha  $A$ ,  $B$  e  $C$  em função dos parâmetros adimensionais

$$\text{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},$$

$$\text{Kt} = k\Delta t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} &= D \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - k\phi_i^n \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}) - (k\Delta t)\phi_i^n \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \text{Fo} (\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}) - \text{Kt}\phi_i^n \\ \phi_i^{n+1} - \text{Fo} (\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}) + \text{Kt}\phi_i^{n+1} &= \phi_i^n \\ -\text{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\text{Fo} + \text{Kt})\phi_i^{n+1} - \text{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} &= \phi_i^n \Rightarrow \\ A &= -\text{Fo}, \\ B &= (1 + 2\text{Fo} + \text{Kt}), \\ C &= -\text{Fo} \blacksquare \end{aligned}$$

2 [20] Dada a matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix},$$

- [5] Sem fazer nenhum cálculo, o que você pode dizer sobre seus autovalores e autovetores?
- [5] Calcule os autovalores. Confirme sua resposta sobre (a).
- [10] Calcule os autovetores. Confirme, com cálculos, sua resposta sobre (b).

#### SOLUÇÃO DA QUESTÃO

- [A] é auto-adjunta; logo, os autovalores são reais, e os autovetores são ortogonais.

b) e c) Com Maxima,

```
(%i1) A : matrix([2,1+%i],[1-%i,2]);
(%o1)
[ 2      %i + 1 ]
[      ]
[ 1 - %i    2    ]

(%i2) eigenvectors(A);
(%o2) [[ [2 - sqrt(2), sqrt(2) + 2], [1, 1]],
        [ [1, - (sqrt(2) %i - sqrt(2))/2], [1, - (sqrt(2) %i - sqrt(2))/2] ] ]]
```

- Os autovalores são

$$\lambda_i = 2 - \sqrt{2},$$

$$\lambda_{ii} = 2 + \sqrt{2}.$$

- Os autovetores são

$$\mathbf{v}^i = \left( 1, \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\mathbf{v}^{ii} = \left( 1, \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right).$$

Os autovalores são reais, de fato. Os autovetores são ortogonais:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{v}^{ii} \rangle &= [\mathbf{v}_1^i]^* \mathbf{v}_1^{ii} + [\mathbf{v}_2^i]^* \mathbf{v}_2^{ii} \\ &= 1 \times 1 + \left( \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right)^* \times \left( \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 1 + \left( \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 1 + \frac{-2 + 2i - 2i + 2i^2}{4} \\ &= 1 - \frac{4}{4} = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

**3** [20] Encontre a função de Green da equação diferencial ordinária

$$\frac{d\phi}{dx} + \operatorname{sen}(x)\phi(x) = f(x); \quad \phi(0) = \phi_0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi} + \operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) &= f(\xi) \\ G(x, \xi) \frac{d\phi}{d\xi} + G(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) &= G(x, \xi)f(\xi) \\ \int_0^\infty G(x, \xi) \frac{d\phi}{d\xi} d\xi + \int_0^\infty G(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) d\xi &= \int_0^\infty G(x, \xi)f(\xi) d\xi \\ G(x, \xi)\phi(\xi) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi(\xi) \frac{dG}{d\xi} d\xi + \int_0^\infty G(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi)\phi(\xi) d\xi &= \int_0^\infty G(x, \xi)f(\xi) d\xi \\ \underbrace{G(x, \infty)\phi(\infty)}_{=0} - G(x, 0)\phi_0 + \int_0^\infty \phi(\xi) \underbrace{\left[ -\frac{dG}{d\xi} + G(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi) \right]}_{=\delta(\xi-x)} d\xi &= \int_0^\infty G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Resolvamos, portanto

$$-\frac{dG}{d\xi} + G(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi) = \delta(\xi - x); \quad G(x, \infty) = 0 :$$

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= u(x, \xi)v(x, \xi); \\ -\left[ u \frac{dv}{d\xi} + v \frac{du}{d\xi} \right] + uv \operatorname{sen}(\xi) &= \delta(\xi - x); \\ u \left[ -\frac{dv}{d\xi} + v \operatorname{sen}(\xi) \right] - v \frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x); \\ -\frac{dv}{d\xi} + v \operatorname{sen}(\xi) &= 0; \\ \frac{dv}{d\xi} &= v(x, \xi) \operatorname{sen}(\xi); \\ \frac{dv}{v(x, \xi)} &= \operatorname{sen}(\xi) d\xi \\ \int_0^\xi \frac{dv}{v} &= \int_0^\xi \operatorname{sen}(\eta) d\eta \\ \ln \frac{v(x, \xi)}{v(x, 0)} &= -\cos(\eta) \Big|_0^\xi = 1 - \cos(\xi) \\ \frac{v(x, \xi)}{v(x, 0)} &= \exp [1 - \cos(\xi)] \\ v(x, \xi) &= v(x, 0) \exp [1 - \cos(\xi)] . \end{aligned}$$

Obtemos agora  $u$ :

$$\begin{aligned} -v \frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x); \\ -v(x, 0) \exp [1 - \cos(\xi)] \frac{du}{d\xi} &= \delta(\xi - x) \\ \frac{du}{d\xi} &= -\frac{1}{v(x, 0)} \exp [-(1 - \cos(\xi))] \delta(\xi - x) \\ u(x, \xi) &= u(x, 0) - \frac{1}{v(x, 0)} \int_{\eta=0}^\xi \exp [-(1 - \cos(\eta))] \delta(\eta - x) d\eta \\ &= u(x, 0) - \frac{H(\xi - x)}{v(x, 0)} \exp [-(1 - \cos(x))]; \end{aligned}$$

Continue a solução no verso  $\Rightarrow$

A função de Green, portanto, é

$$\begin{aligned}
 G(x, \xi) &= u(x, \xi)v(x, \xi) \\
 &= \left\{ u(x, 0) - \frac{H(\xi - x)}{v(x, 0)} \exp[-(1 - \cos(x))] \right\} v(x, 0) \exp[1 - \cos(\xi)] \\
 &= u(x, 0)v(x, 0) - H(\xi - x) \exp[-1 + \cos(x) + 1 - \cos(\xi)] \\
 &= G(x, 0) \exp[1 - \cos(\xi)] - H(\xi - x) \exp[-1 + \cos(x) + (1 - \cos(\xi))] ; \\
 &= \{G(x, 0) - H(\xi - x) \exp[-(1 - \cos(x))]\} \exp[1 - \cos(\xi)]
 \end{aligned}$$

aplicando a condição de contorno no infinito,

$$\begin{aligned}
 G(x, \infty) &= 0 \Rightarrow \\
 0 &= [G(x, 0) - \exp[-(1 - \cos(x))]] \exp[1 - \cos(\infty)] \Rightarrow G(x, 0) = \exp[-(1 - \cos(x))].
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 G(x, \xi) &= [1 - H(\xi - x)] \exp[-(1 - \cos(x))] \exp[1 - \cos(\xi)] \\
 &= [1 - H(\xi - x)] \exp[\cos(x) - \cos(\xi)] \blacksquare
 \end{aligned}$$

4 [20] Usando obrigatoriamente o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = x^{1/2}, \quad u(x, 0) = f(x).$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Sejam

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ T &= T(s), \\ u(x, t) &= u(X(s), T(s)) = U(s); \\ \frac{dU}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dT}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{ds}; \Rightarrow \\ \frac{dT}{ds} &= 1 \Rightarrow T(s) = \cancel{T(0)}^0 + s; \\ \frac{dX}{ds} &= X(s) \Rightarrow X(s) = X(0)e^s. \end{aligned}$$

A EDO em  $U(s)$  será

$$\begin{aligned} \frac{dU}{ds} &= X^{1/2}(s) \\ &= [X(0)e^s]^{1/2} \\ &= (X(0))^{1/2} e^{s/2} \Rightarrow \\ U(s) - U(0) &= 2(X(0))^{1/2} [e^{s/2} - 1]. \end{aligned}$$

Mas  $s = t$ , e:

$$\begin{aligned} X &= X(0)e^s; \\ X(0) &= Xe^{-s} = xe^{-t}; \\ u(x, 0) &= u(X(0), 0) = U(0) = f(X(0)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} U(s) &= f(X(0)) + 2(X(0))^{1/2} [e^{s/2} - 1]; \\ u(x, t) &= f(xe^{-t}) + 2(xe^{-t})^{1/2} [e^{t/2} - 1] \blacksquare \end{aligned}$$

5 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$
$$y(0) = y'(1) = 0.$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Discuta os valores de  $\lambda$ :

$\lambda = -k^2 < 0$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - k^2 y = 0;$$
$$r^2 - k^2 = 0;$$
$$r = \pm k;$$
$$y(x) = A \cosh(kx) + B \sinh(kx);$$
$$y'(x) = A \sinh(kx) + B \cosh(kx).$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow A \cosh(0) + B \sinh(0) = 0,$$
$$A = 0.$$
$$y'(1) = 0 \Rightarrow B \cosh(1) = 0,$$
$$B = 0.$$

Portanto não há autovalores para esse caso.

$\lambda = 0$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0;$$
$$y(x) = Ax + B.$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$$
$$y'(1) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Portanto não há autovalores para esse caso.

$\lambda = k^2 > 0$ :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0;$$
$$r^2 + k^2 = 0;$$
$$r = \pm i\sqrt{k};$$
$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$
$$y'(x) = -A \sin(kx) + B \cos(kx)$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$
$$y'(1) = B \cos(k) = 0 \Rightarrow$$
$$\cos(k) = 0 \Rightarrow$$
$$k_n = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n = 0, 1, \dots$$

Portanto os autovalores e as autofunções são

$$\lambda_n = \left[ \frac{2n+1}{2}\pi \right]^2, \quad n = 0, 1, \dots$$
$$y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots \blacksquare$$