TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
Trabalho Computacional. Data de entrega: 24 de Abril de 2020.
Prof. Nelson Luís Dias

1 Instruções para a entrega do trabalho

Atenção: O grupo entregará apenas 2 arquivos digitais, que devem ser enviados para

`nldias@ufpr.br`,

com o assunto: `TEA010-tc-2-resson`. Os nomes dos arquivos serão

1. `tc-2-resson.py`,
2. `tc-2-resson.pdf` .

O seu programa deve estar escrito em Python $\geq 3.x$. O programa `tc-2-resson.py` deve gerar obrigatoriamente apenas um arquivo de saída, cujo nome será

`tc-2-resson.out`

O arquivo `tc-2-resson.pdf` deve conter suas respostas ao enunciado mais abaixo, figuras, equações utilizadas, referências bibliográficas, etc.. Não há regras muito fixas, mas você deve obedecer ao seguinte:

- 2,5 cm de margem (direita, esquerda, acima e abaixo)
- espaçamento simples
- Tipo romano com serifa (por exemplo, Times Roman ou Times New Roman; **não use tipos sem serifa, tais como Arial ou Calibri**)

O arquivo `tc-2-resson.out` deve ser um arquivo texto; ele deve ser organizado em 3 colunas de 12 caracteres cada, impressas com o formato `%12.6f`, sem brancos adicionais entre as colunas. A primeira coluna deve conter os valores de τ, a partir de 0, em incrementos $\Delta\tau = 0{,}01$ até $\tau = 1000$; a segunda coluna deve conter os valores de $\theta_l(\tau)$, e a terceira coluna os valores de $\theta_n(\tau)$ (vide seção 3), **nessa ordem**.

2 Correção do trabalho

Os critérios de correção são os seguintes

- Se o programa não rodar, por qualquer motivo, a nota do trabalho é zero.
- Se o programa não gerar os arquivos de saída com os nomes e o formato especificados, a nota é zero.
- Eu vou comparar graficamente o arquivo de saída contendo a sua solução com a solução numérica correta. As duas soluções devem concordar visualmente.
- O Português da apresentação deve ser correto. **Cuidado com erros de pontuação, concordância e ortografia**.
- A qualidade da apresentação deve ser boa. O texto deve ser claro, as referências a figuras e tabelas (se houver) devem seguir as regras acadêmicas usuais (figuras e tabelas numeradas, gráficos bem feitos, etc.).
- Pesquisa sobre o tema; referências adicionais; explorações adicionais do tema do trabalho; profundidade; etc., serão considerados na nota do trabalho.

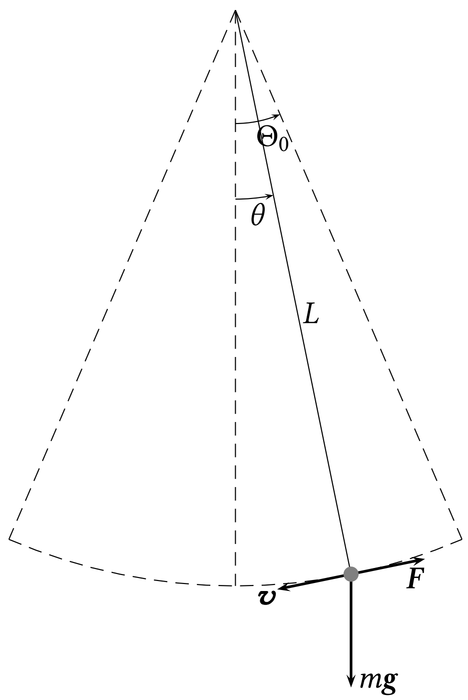

Figura 1: Um pêndulo forçado não-linear.

3 Trabalho computacional: Ressonância e pêndulos não-lineares

A figura 1 mostra um pêndulo de massa m forçado por uma força $\boldsymbol{F}$ que é sempre tangente à trajetória circular, cujo cabo tem comprimento L. O pêndulo sempre parte de uma posição angular inicial $\theta = \Theta_0$, com velocidade inicial nula. O comprimento de arco descrito pelo pêndulo a partir do ponto inicial; sua velocidade escalar; e sua aceleração escalar, são

$$
\begin{aligned}
s &= L(\Theta_0 - \theta),\\
v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\\
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.
\end{aligned}
$$

Faça $|\boldsymbol{F}| = F(t) \equiv mg\phi(t)$. A 2ª lei de Newton nos dá

$$
\begin{aligned}
-mL\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= mg\,\mathrm{sen}\,\theta + F(t),\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{F(t)}{mL},\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{mg}{mL}\phi(t). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

A dimensão da equação (1) é

$$
\frac{1}{\mathsf{T}^2},
$$

mas ela pode ser adimensionalizada via

$$
\begin{aligned}
\tau &= t\sqrt{\frac{g}{L}},\\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{\frac{g}{L}},\\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}[\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t]}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{g}{L}.
\end{aligned}
$$

Substituindo agora na equação (1), obtém-se

$$
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \operatorname{sen}\theta = \phi(\tau), \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0 \tag{2}
$$

(note que nós agora incluímos as condições inciais).

Essa equação diferencial não pode ser resolvida por métodos analíticos em termos apenas de funções algébricas e funções transcedentais elementares (funções baseadas nas funções trigonométricas e na função exponencial (incluindo as inversas)). Se a posição angular inicial Θ_0 for “pequena”, podemos aproximar o seno por uma série de Taylor apenas até o primeiro termo, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, e transformar a equação diferencial em

$$
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + \theta = \phi(\tau), \qquad \theta(0) = \Theta_0, \qquad \theta'(0) = 0. \tag{3}
$$

Se

$$
\phi(\tau) = \operatorname{sen}(\tau), \tag{4}
$$

aparecerá ressonância em (3). Nossa questão é: aparecerá também ressonância em (2)?

Para resolver o problema não-linear, escrevemos, a partir de (2):

$$
\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}\tau} = \omega_n, \qquad\qquad \theta_n(0) = \Theta_0, \tag{5}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\omega_n}{\mathrm{d}\tau} = -\operatorname{sen}\theta_n + \operatorname{sen}(\tau), \qquad\qquad \omega_n(0) = 0. \tag{6}
$$

O problema linear tem solução numérica muito parecida:

$$
\frac{\mathrm{d}\theta_l}{\mathrm{d}\tau} = \omega_l, \qquad\qquad \theta_l(0) = \Theta_0, \tag{7}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\omega_l}{\mathrm{d}\tau} = -\theta_l + \operatorname{sen}(\tau), \qquad\qquad \omega_l(0) = 0, \tag{8}
$$

Em (5)–(8) nós adicionamos os subscritos n e l para distinguir a solução *linear* da solução *não-linear*.

Seu objetivo é comparar as duas soluções: resolva os sistemas (5)–(6) e (7)–(8) utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $\Theta_0 = 1{,}5$. Você deve utilizar um passo $\Delta\tau = 0{,}01$ em τ, e marchar de $\tau = 0$ até $\tau = 1000$.

Plote no mesmo gráfico $\tau \times \theta_l(\tau)$ e $\tau \times \theta_n(\tau)$, e mostre graficamente que o sistema linear exibe ressonância. O que você pode dizer sobre o sistema não-linear? O resultado deve ser o mostrado na figura 2

Além disso, considere, e responda tão bem quanto possível, as seguintes questões:

- O que acontece com a solução linear quando você reduz $\Delta\tau$ para 0,001? E para 0,0001? **(Não inclua esses experimentos no programa Python que você vai enviar para mim!)**

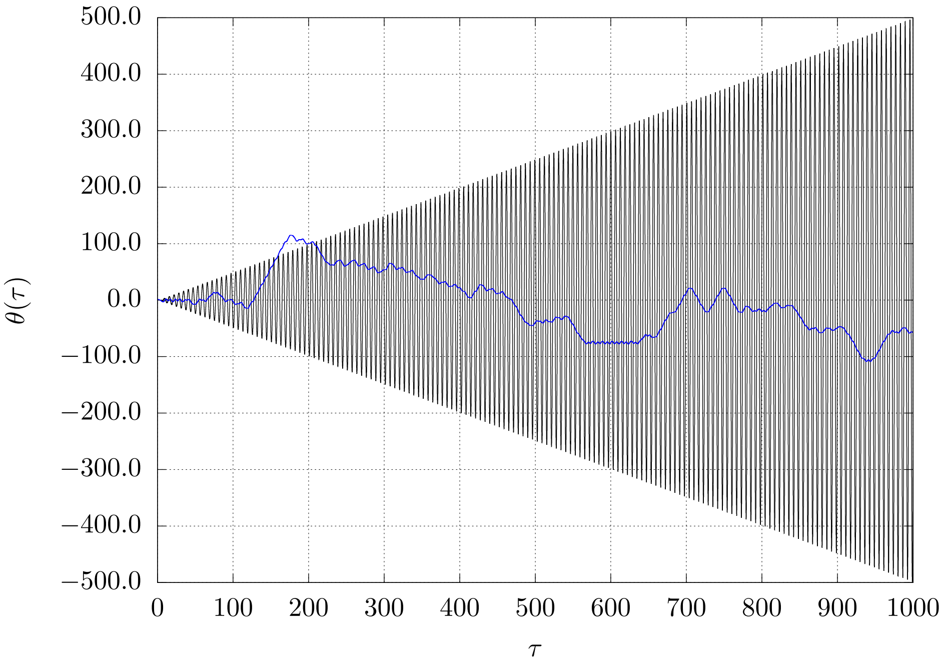

Figura 2: Pêndulo linear (em preto) *versus* não-linear (em azul).

- O que acontece com a solução não-linear quando você reduz $\Delta\tau$ para 0,001? E para 0,0001? **(Não inclua esses experimentos no programa Python que você vai enviar para mim!)**
- O que está acontecendo? É possível tirar alguma conclusão sobre a solução do sistema não-linear?

Atenção: os valores de $\theta(\tau)$ crescem muito além de 2π (uma volta completa), e portanto é difícil interpretar fisicamente a solução numérica após valores de τ da ordem de 2π. Não se preocupe com isso, concentrando-se nas propriedades matemáticas da solução.