TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 29 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva a EDO não-homogênea

$$x^2y'' + 7xy' + 6y = x.$$

a) [10] Encontre a solução da equação homogênea associada,

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

ou seja: encontre $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

b) [15] Faça

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x);$$

derive; force o termo envolvendo A' e B' a ser nulo; derive novamente e substitua. Produza um sistema de duas EDOs de ordem 1 em A e B. Resolva para $A(x)$ e $B(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A equação homogênea associada é uma equação de Euler:

$$\begin{aligned}
x^2y_h'' + 7xy_h' + 6y_h &= 0,\\
y_h &= x^m,\\
y_h' &= mx^{m-1},\\
y_h'' &= (m-1)mx^{m-2},\\
[(m-1)m + 7m + 6]\,x^m &= 0,\\
m^2 + 6m + 6 &= 0,\\
m_1 &= +\sqrt{3} - 3,\\
m_2 &= -\sqrt{3} - 3,\\
y_h(x) &= c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}
\end{aligned}$$

b) Agora,

$$\begin{aligned}
y(x) &= A(x)x^{m_1} + B(x)x^{m_2},\\
y'(x) &= m_1Ax^{m_1} + m_2Bx^{m_2} + \underbrace{A'x^{m_1} + B'x^{m_2}}_{=0},\\
y''(x) &= (m_1-1)m_1Ax^{m_1-2} + (m_2-1)m_2Bx^{m_2-2} + m1A'x^{m_1-1} + m_2B'x^{m_2-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo na EDO,

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 7xy' + 6y &= x,\\
\underbrace{[(m_1-1)m_1 + 7m_1 + 6]}_{=0}A + \underbrace{[(m_2-1)m_2 + 7m_2 + 6]}_{=0}B + m_1A'x^{m_1+1} + m_2B'x^{m_2+1} &= x
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Ficamos com o sistema de EDO*s*

$$
\begin{aligned}
A'x^{m_1} + B'x^{m_2} &= 0,\\
m_1 A'x^{m_1+1} + m_2 B'x^{m_2+1} &= 0,
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{(m_1 - m_2)(1 - m_1)} x^{1-m_1} + A_0,\\
B(x) &= \frac{1}{(m_2 - m_1)(1 - m_1)} x^{1-m_2} + B_0.
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left[\frac{1}{(m_1 - m_2)(1 - m_1)} + \frac{1}{(m_2 - m_1)(1 - m_1)}\right] x + A_0 x^{m_1} + B_0 x^{m_2}\\
&= \frac{x}{13} + A_0 x^{-3+\sqrt{3}} + B_0 x^{-3-\sqrt{3}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dada a função

$$f(z) = \ln(z - 1),$$

a) [10] Encontre o(s) ponto(s) de ramificação de f.

b) [15] **Desenhe** no plano complexo um corte que torne a função unívoca.

Sugestão: faça $z - 1 = re^{i\theta}$ e analise o que acontece.

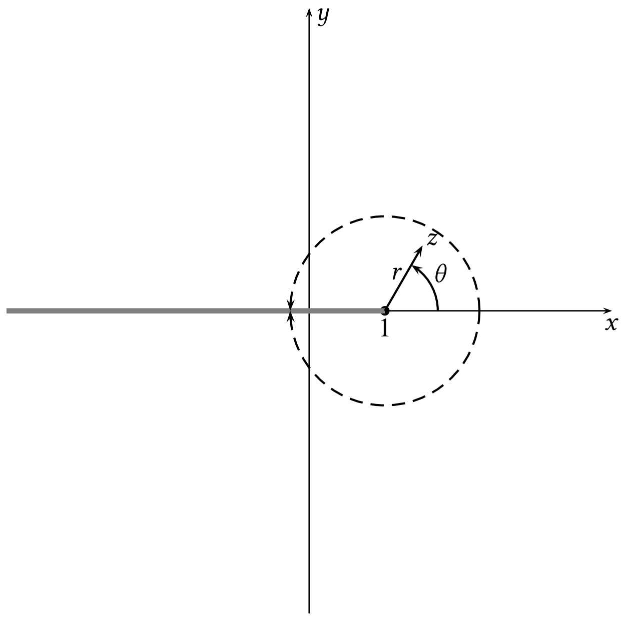
SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Se $z - 1 = re^{i\theta}$,

$$\ln(z - 1) = \ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta.$$

Claramente, se z der uma volta completa em torno de 1, $f(z)$ muda de valor; logo, $z = 1$ é o único ponto de ramificação.

b) Um corte possível é mostrado (linha cinza grossa) na figura abaixo, que limita θ a $-\pi < \theta \leq \pi$ ■



Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série de Laurent de

$$f(x) = f(z) = \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} - \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)}$$

no disco $|z-2| < 2\sqrt{2}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se

$$f(z) = \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} - \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)},$$

o 2º termo já está no formato de um termo da série de Laurent desejada, e nós o deixamos como está. O 1º termo precisa ser reescrito:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2\mathrm{i})} &= \frac{1}{(2\mathrm{i}-2)}\left[\frac{1}{(z-2)+(2-2\mathrm{i})}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}+1}\right] \\
&= -\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}}\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right| &= \frac{|z-2|}{|2-2\mathrm{i}|} \\
&= \frac{|z-2|}{2\sqrt{2}} < 1,
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{1+\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}} = 1 - \frac{z-2}{2-2\mathrm{i}} + \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2-2\mathrm{i}}\right)^4 + \ldots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(z) = &-\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)(z-2)} \\
&-\frac{1}{(2\mathrm{i}-2)^2}\left[1 - \frac{z-2}{2\mathrm{i}-2} + \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^3 - \left(\frac{z-2}{2\mathrm{i}-2}\right)^4 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Dada a equação diferencial ordinária

$$xy'' + xy' + y = 0 :$$

a) [05] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [20] Obtenha **uma** solução de Frobenius do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo escrevendo a equação na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = y'' + y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

As funções

$$[xp(x)] = x, \qquad \text{e} \qquad [x^2 q(x)] = x$$

são analíticas em $x = 0$, e $x = 0$ é um ponto singuar regular, em torno do qual é possível obter uma solução de Frobenius,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial, encontro

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

Faço agora no primeiro somatório:

$$\begin{aligned} m + r &= n + r - 1, \\ m &= n - 1, \\ n &= m + 1, \end{aligned}$$

e obtenho

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r)(m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r) a_n + a_n \right] x^{n+r} &= 0, \\ (r-1) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) a_{n+1} + (n+r+1) a_n \right] x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

É evidente que, com $a_0 \neq 0$, a equação indicial é

$$r(r-1) = 0 \ \Rightarrow \ r_2 = 0 \text{ ou } r_1 = 1.$$

As raízes diferem por um inteiro; ou a menor raiz leva a 2 soluções, ou não leva a nenhuma. Tentemos com a menor raiz ($r_2 = 0$):

$$\begin{aligned} n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_n &= 0, \\ a_{n+1} &= -\frac{1}{n} a_n. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Note que é impossível obter a_1 a partir de a_0: a recursão falha, e a menor raiz não leva a nenhuma solução. Uma única solução ainda é possível com a maior raiz $r_1 = 1$:

$$
\begin{aligned}
(n+1)(n+2)a_{n+1} + (n+2)a_n &= 0,\\
a_{n+1} &= -\frac{1}{n+1}a_n.
\end{aligned}
$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, não é difícil encontrar o termo geral:

$$
a_n = \frac{(-1)^n}{n!}
$$

e uma solução

$$
y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$