TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 03 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Resolva o sistema de EDOs

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A matriz é simétrica. Existem dois autovalores reais e dois autovetores mutuamente ortogonais. Os autovalores e autovetores associados são

$$\lambda = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = (1, 1),$$
$$\lambda = 2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = (1, -1).$$

Na base $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ dos autovetores o sistema fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_A.$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}u_{1A}}{\mathrm{d}t} = 0u_{1A} \Rightarrow u_{1A}(t) = C_1,$$
$$\frac{\mathrm{d}u_{2A}}{\mathrm{d}t} = 2u_{2A} \Rightarrow u_{2A}(t) = C_2\mathrm{e}^{2t}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_{1A}\boldsymbol{v}_1 + u_{2A}\boldsymbol{v}_2 = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Sabendo que

$$\int \frac{a}{x^2 + a^2}\, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

Calcule a integral

$$I = \iint_{R_{xy}} \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

onde R_{xy} é a região $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

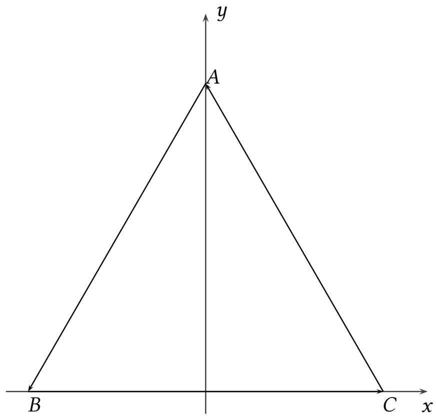
$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{x} \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{y=0}^{x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{\pi}{4}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $F(x, y) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, **sem utilizar os teoremas de Stokes ou de Green**, calcule o valor da integral de linha

$$I = \oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

ao longo do caminho fechado formado pelos lados do triângulo equilátero da figura (o tamanho dos lados é 1). **Sugestão:** parametrize cada um dos 3 segmentos de reta que formam os lados do triângulo e some as integrais de linha sobre cada trecho.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As coordenadas dos pontos são

$$\begin{aligned} A &= \left(0, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ B &= \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \\ C &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right). \end{aligned}$$

Os segmentos de reta podem ser parametrizados como se segue:

CA:

$$\begin{aligned} x &= at + b, \\ y &= ct + d; \\ x(0) &= 1/2 \Rightarrow b = 1/2, \\ x(1) &= 0 \Rightarrow a = -1/2, \\ y(0) &= 0 \Rightarrow d = 0, \\ y(1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ x(t) &= (-1/2)t + 1/2, \\ y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}t. \end{aligned}$$

AB:

$$\begin{aligned} x &= at + b, \\ y &= ct + d; \\ x(0) &= 0 \Rightarrow b = 0, \\ x(1) &= -1/2 \Rightarrow a = -1/2, \\ y(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y(1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ x(t) &= (-1/2)t, \\ y(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - t\right]. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

BC:

$$
\begin{aligned}
x &= at + b,\\
y &= ct + d;\\
x(0) = -1/2 &\Rightarrow b = -1/2,\\
x(1) = +1/2 &\Rightarrow a = +1,\\
y(0) = 0 &\Rightarrow d = 0,\\
y(1) = 0 &\Rightarrow c = 0;\\
x(t) &= t - 1/2,\\
y(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sobre CA:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, (-1/2)t + 1/2\right),\\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-t)\right] \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}t,\\
\int_{CA} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

Sobre AB:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t), (-1/2)t\right),\\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4}(1-t) + \frac{\sqrt{3}}{4}t\right] \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t\\
\int_{AB} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}
$$

Sobre BC:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= (1, 0)\,\mathrm{d}t,\\
\boldsymbol{F} = (-y, x) &= (0, t - 1/2),\\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 0,\\
\int_{BC} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Encontre a solução geral da EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x+1} = \cos(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{uv}{x+1} &= \cos(x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x+1}\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \cos(x),\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v}{x+1} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}x}{x+1} &= 0,\\
\ln|v| + \ln|x+1| &= k_1,\\
\ln|v(x+1)| &= k_1,\\
|v(x+1)| &= \mathrm{e}^{k_1} = k_2,\\
v(x+1) &= \pm k_2 = k_3,\\
v &= \frac{k_3}{x+1};\\
\frac{k_3}{x+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \cos(x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{k_3}(x+1)\cos(x),\\
u &= \frac{1}{k_3}\left[(x+1)\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + k_4\right],\\
y = uv &= \frac{1}{k_3}\left[(x+1)\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + k_4\right]\frac{k_3}{x+1}\\
&= \operatorname{sen}(x) + \frac{\cos(x)}{x+1} + \frac{k_4}{x+1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$