

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 14 Mai 2021
Entrega em 22 mai 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: _____

Assinatura: _____

1 [25] Em Python, o comando ‘a % b’ devolve a operação matemática $a \bmod b$, cuja definição é.

$$a \bmod b \equiv a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a x . Sem rodar nenhum programa, e explicando seus cálculos: qual é a saída do comando ‘print(-1 % 10)’?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

2 [25] Langhaar [1951]: Em um gás real, existem forças de repulsão entre as suas moléculas que atuam quando elas estão muito próximas, que podem ser aproximadas por

$$F = Kr^{-n},$$

onde r é a distância entre duas moléculas e K é uma constante (experimentalmente, observa-se que n está entre 7 e 12 para gases comuns). Suponha que a viscosidade dinâmica de um gás real μ ($[\mu] = \text{M L}^{-1} \text{T}^{-1}$) dependa da massa molecular m , da velocidade média quadrática das moléculas v e da constante K . Obtenha o grupo adimensional envolvido, forçando o expoente de μ a ser unitário.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

3 [25] Considere a integração numérica de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, e $2n$ pontos igualmente espaçados, $a \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} \equiv b$, com $h = x_{i+1} - x_i$. A regra de Simpson para $\int_a^b f(x) dx$ é

$$S_{2n} = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}],$$

onde $f_i = f(x_i)$.

a) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando apenas os pontos pares é

$$T_n = h [f_0 + 2f_2 + \dots + 2f_{2n-2} + f_{2n}].$$

b) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando todos os pontos é

$$T_{2n} = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{2n-2} + 2f_{2n-1} + f_{2n}]$$

c) [15] Mostre que

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

4 [25] Utilizando a função trapezio

```
1 def trapezio(n,a,b,f):
2     '''
3     trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
4     '''
5     deltax = (b-a)/n
6     Se = f(a) + f(b)           # define Se
7     Si = 0.0                   # inicializa Si
8     for k in range(1,n):      # calcula Si
9         xk = a + k*deltax
10        Si += f(xk)
11    I = Se + 2*Si               # cálculo de I
12    I *= deltax
13    I /= 2
14    return I
```

escreva uma segunda função `simpson(epsilon,a,b,f)` que utilize a relação de recorrência

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

para obter S_{2n} com um erro ϵ especificado, e que chame `trapezio` **uma única vez** para cada $n = 1, 2, 4, \dots$. Em seguida, teste sua rotina calculando e imprimindo (o valor aproximado de)

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

por meio de `simpson`, com $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$. Qual o valor de n necessário para atingir essa acurácia?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Referências

Langhaar, H. L. (1951). *Dimensional analysis and theory of models*. John Wiley & Sons, New York.