TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 14 Mai 2021
Entrega em 15 mai 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Considere o programa a seguir

```
fib = [0,1]
n = 1
while n < 10 :
   n += 1
   newf = fib[n-1] + fib[n-2]
   fib.append(newf)
print(fib)
```

Sem rodar o programa, explique quais são os cálculos que o programa faz, e escreva a sua saída.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
`[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]` ■

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Langhaar [1951]: Uma estrela de densidade ρ e diâmetro D vibra com frequência n: a vibração consiste em uma mudança cíclica de forma, mudando de elipsóide alongado em uma direção para esfera para elipsóide alongado em outra direção, e assim sucessivamente. Supõe-se que as variáveis que regem o fenômeno são essas três mais a constante universal de gravitação G (lembre-se: a lei da gravitação universal de Newton é $|F| = GMm/r^2$). Obtenha todos os grupos adimensionais que regem o problema. Escolha **obrigatoriamente** D, n e ρ como variáveis que participam de todos os grupos.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
G tem dimensões

$$\begin{aligned}
[\![G]\!] &= \left[\!\!\left[\frac{Fr^2}{Mm}\right]\!\!\right] \\
&= \frac{\mathsf{M}\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^2}{\mathsf{M}^2} \\
&= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}.
\end{aligned}$$

A lista de variáveis e suas dimensões é

$$\begin{aligned}
[\![\rho]\!] &= \mathsf{M}\mathsf{L}^{-3}, \\
[\![D]\!] &= \mathsf{L}, \\
[\![n]\!] &= \mathsf{T}^{-1}, \\
[\![G]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}.
\end{aligned}$$

Com 4 variáveis e 3 dimensões fundamentais, esperamos que haja um único grupo:

$$\begin{aligned}
\Pi &= GD^a n^b \rho^c, \\
[\![\Pi]\!] &= \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^3\mathsf{T}^{-2}\,[\mathsf{L}]^a\left[\mathsf{T}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{M}\mathsf{L}^{-3}\right]^c \\
1 &= \mathsf{M}^{-1+c}\mathsf{L}^{3+a-3c}\mathsf{T}^{-2-b}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
c &= 1, \\
a + 0b - 3c &= -3 \;\Rightarrow a = 0, \\
0a - b + 0c &= 2 \;\Rightarrow b = -2
\end{aligned}$$

e

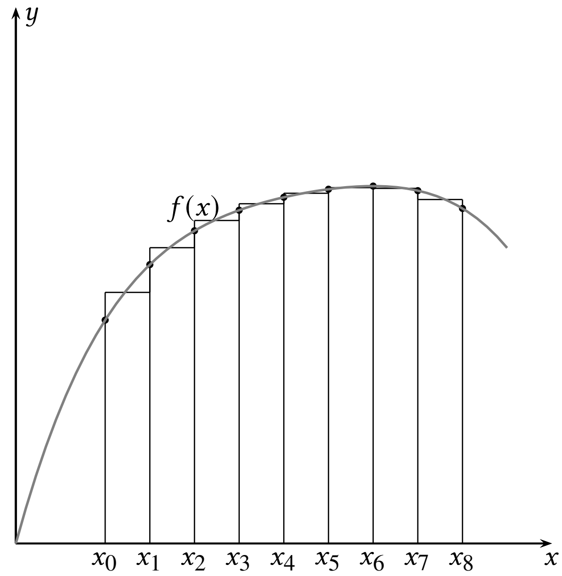
$$\Pi = \frac{G\rho}{n^2} \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A figura ao lado ilustra a “regra do ponto do meio”, em que a integral

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

é aproximada pela soma das áreas dos retângulos com as alturas dadas pelo valor da função no centro de cada intervalo $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ onde, como sempre, $a \equiv x_0$ e $x_n \equiv b$. Considere $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ constante. Obtenha a fórmula geral para I utilizando a “fórmula do ponto do meio”, para um número genérico de pontos n.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} I &\approx f((x_0 + x_1)/2)\Delta x + f((x_1 + x_2)/2)\Delta x + \ldots + f((x_{n-1} + x_n)/2)\Delta x \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} f((x_{i-1} + x_i)/2) \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Escreva, rode, e entregue a listagem (em um arquivo em separado) de um programa em Python que calcula

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$$

utilizando a regra do ponto do meio e 100 intervalos de integração.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
def midint(a,b,n,f):
   deltax = (b-a)/n
   isum = 0.0
   xleft = a
   for k in range(1,n+1):
      xright = a+k*deltax
      fmid = f((xleft+xright)/2)
      isum += fmid
      xleft = xright
   pass
   return deltax*isum
pass
from math import pi,sin
print("I = ",midint(0,pi,100,sin))
```

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Referências

Langhaar, H. L. (1951). *Dimensional analysis and theory of models*. John Wiley & Sons, New York.

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 14 Mai 2021
Entrega em 22 mai 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________________

---

1 [25] Em Python, o comando '`a % b`' devolve a operação matemática $a \bmod b$, cuja definição é.

$$a \bmod b \equiv a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a x. Sem rodar nenhum programa, e explicando seus cálculos: qual é a saída do comando '`print(-1 % 10)`'?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
-1 \bmod 10 &= -1 - 10 \left\lfloor \frac{-1}{10} \right\rfloor \\
&= -1 - 10 \lfloor -0.1 \rfloor \\
&= -1 - 10 \times (-1) \\
&= 9 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **?**: Em um gás real, existem forças de repulsão entre as suas moléculas que atuam quando elas estão muito próximas, que podem ser aproximadas por

$$F = Kr^{-n},$$

onde r é a distância entre duas moléculas e K é uma constante (experimentalmente, observa-se que n está entre 7 e 12 para gases comuns). Suponha que a viscosidade dinâmica de um gás real μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$) dependa da massa molecular m, da velocidade média quadrática das moléculas v e da constante K. Obtenha o grupo adimensional envolvido, forçando o expoente de μ a ser unitário.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, precisamos encontrar as dimensões de K:

$$\begin{aligned}
[\![K]\!] &= [\![Fr^n]\!] \\
&= \mathsf{M\,L\,T^{-2}L}^n \\
&= \mathsf{M\,L^{n+1}\,T^{-2}}.
\end{aligned}$$

Com 4 variáveis e 3 dimensões fundamentais, esperamos que haja um único grupo:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \mu K^a m^b v^c, \\
[\![\Pi]\!] &= \mathsf{M\,L^{-1}T^{-1}}\left[\mathsf{M\,L^{n+1}\,T^{-2}}\right]^a \left[\mathsf{M}\right]^b \left[\mathsf{L\,T^{-1}}\right]^c \\
1 &= \mathsf{M^{1+a+b}\,L^{-1+a(n+1)+c}\,T^{-1-2a-c}}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
a + b + 0c &= -11, \\
(n+1)a + 0b + c &= 1, \\
-2a + 0b - c &= 1
\end{aligned}$$

e

$$\Pi = \mu K^{\frac{2}{n-1}} m^{-\frac{n+1}{n-1}} v^{-\frac{n+3}{n-1}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Considere a integração numérica de uma função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, e $2n$ pontos igualmente espaçados, $a \equiv x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} \equiv b$, com $h = x_{i+1} - x_i$. A regra de Simpson para $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é

$$S_{2n} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right],$$

onde $f_i = f(x_i)$.

a) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando apenas os pontos pares é

$$T_n = h\left[f_0 + 2f_2 + + \ldots + 2f_{2n-2} + f_{2n}\right].$$

b) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando todos os pontos é

$$T_{2n} = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-2} + 2f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

c) [15] Mostre que

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Da fórmula geral,

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + k\Delta x) + f(b)\right],$$

temos

$$\Delta x = 2h, \tag{1}$$
$$a + k\Delta x = a + 2khx, \tag{2}$$
$$f(a + k\Delta x) = f(a + 2khx) = f_{2k}, \tag{3}$$

e o resultado se segue imediatamente.
b) Da mesma forma, e ainda mais diretamente,

$$\Delta x = h, \tag{4}$$
$$a + k\Delta x = a + khx, \tag{5}$$
$$f(a + k\Delta x) = f(a + khx) = f_k. \tag{6}$$

c) Reunindo tudo, para os extremos f_0 e f_{2n}, temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}f_0 - \frac{1}{3}hf_0 = \left(\frac{4h}{6} - \frac{2h}{6}\right)f_0 = \frac{h}{3}f_0$$

(e o mesmo para f_{2n}). Para os pontos ímpares f_I temos apenas

$$\frac{h}{2} \times 2f_I \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{h}{2} \times 2f_I = \frac{h}{3}4f_I,$$

vindos de T_{2n}. Para os pontos pares f_P temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}(2f_P) - \frac{1}{3}h(2f_P) = \left(\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\right)h(2f_P) = \frac{h}{3}(2f_P)$$

Reunindo tudo,

$$\frac{4}{3}T_{2_n} - \frac{1}{3}T_n = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right] = S_{2n} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Utilizando a função `trapezio`

```python
def trapezio(n,a,b,f):
   '''
   trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
   '''
   deltax = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)           # define Se
   Si = 0.0                   # inicializa Si
   for k in range(1,n):       # calcula Si
      xk = a + k*deltax
      Si += f(xk)
   I = Se + 2*Si              # cálculo de I
   I *= deltax
   I /= 2
   return I
```

escreva uma segunda função `simpson(epsilon,a,b,f)` que utilize a relação de recorrência

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

para obter S_{2n} com um erro ϵ especificado, e que chame `trapezio` **uma única vez** para cada $n = 1, 2, 4, \ldots$. Em seguida, teste sua rotina calculando e imprimindo (o valor aproximado de)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$$

por meio de `simpson`, com $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$. Qual o valor de n necessário para atingir essa acurácia?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
def trapezio(n,a,b,f):
   '''
   trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
   '''
   deltax = (b-a)/n
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   for k in range(1,n):
      xk = a + k*deltax
      Si += f(xk)
   I = Se + 2*Si
   I *= deltax
   I /= 2
   return I
pass;
def simpson(epsilon,a,b,f):
   n = 2;
   IT0 = trapezio(1,a,b,f);
   IT1 = trapezio(2,a,b,f);
   IS0 = (4.0/3.0)*IT1 - (1.0/3.0)*IT0;
   IT0 = IT1;
   eps = 2*epsilon;
   while eps > epsilon:
      n *= 2;
      IT1 = trapezio(n,a,b,f);
      IS1 = (4.0/3.0)*IT1 - (1.0/3.0)*IT0;
      eps = abs(IS1 - IS0);
      IT0 = IT1;
      IS0 = IS1;
   pass;
   return (n,eps,IS1);
pass;
from math import sin, pi;
(n,eps,IS) = simpson(1.0e-6,0,pi,sin);
print("n = ",n);
print("eps = ",eps);
print("IS = ",IS);
```

Rodando o programa, $n = 64$.

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 11 Jun 2021
Entrega em 12 Jun 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Utilizando sempre a base canônica, **notação indicial** (obrigatoriamente), e explicitando **todos os passos**, obtenha

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$$

em função de $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot \epsilon_{lmn} a_l b_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n) \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \delta_{kn} \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \\
&= u_i v_j a_l b_m (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \\
&= u_i v_j a_l b_m \delta_{il} \delta_{jm} - u_i v_j a_l b_m \delta_{im} \delta_{jl} \\
&= u_i v_j a_i b_j - u_i v_j a_j b_i \\
&= (u_i a_i)(v_j b_j) - (u_i b_i)(v_j a_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Zorg é um estudante de Engenharia Ambiental do Planeta Z4, um planeta quadridimensional de outro universo. Enquanto calcula o hipervolume de um reservatório de q-água (uma molécula quadridimensional com propriedades semelhantes às da água), Zorg precisa obter o hipervolume do hiperprisma formado pelos vetores $(2, 4, 1, 0)$, $(1, 3, 0, 2)$, $(0, 2, 3, 1)$ e $(0, 4, 2, 3)$. Qual é o valor obtido por Zorg?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Basta calcular o módulo do determinante da matriz cujas colunas são os elementos dos 4 vetores:

$$
\begin{aligned}
V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \quad 2\left[3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&\quad - 1\left[4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] \\
&= \quad 2\,[3(9-2) - 2(0-4) + 4(0-6)] \\
&\quad - 1\,[4(9-2) - 2(3-0) + 4(1-0)] \\
&= 2\,[21 + 8 - 24] - 1\,[28 - 6 + 4] \\
&= 10 - 26 \\
&= -16.
\end{aligned}
$$

O hipervolume, portanto, é igual a 16 ∎

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] [White, 2016, Exemplo 5.5] Uma viga engastada de comprimento L (L) tem uma carga P ($\mathsf{MLT^{-2}}$) aplicada à sua extremidade, sofrendo uma deflexão δ (L). A viga tem seção transversal cujo momento de inércia é I ($\mathsf{L^4}$), e seu material possui módulo de elasticidade E ($\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}$). É sabido que

$$\text{posto}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2.$$

Obtenha os parâmetros adimensionais do problema, usando **obrigatoriamente** L e E como variáveis comuns em todos eles.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Obviamente, as dimensões fundamentais são, novamente, M, L e T. Começamos montando a matriz dimensional:

	L	P	δ	I	E
M	0	1	0	0	1
L	1	1	1	4	−1
T	0	−2	0	0	−2

Pelo enunciado, o posto da matriz é 2. Existem portanto $s = 5 - 2 = 3$ grupos adimensionais independentes. Note que se tivéssemos aplicado a “regra” simplificada $s = 5 - 3$, onde 3 é o número de dimensões fundamentais do problema, teríamos encontrado apenas 2 grupos independentes, o que está errado. Imporemos agora $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$ (que são os expoentes de P, δ e I), sucessivamente.
Para P,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= PL^aE^b, \\ [\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{MLT^{-2}}\right] [\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{1+b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -2$, $b = -1$, e

$$\Pi_1 = \frac{P}{EL^2}.$$

Note que há 3 equações e apenas 2 incógnitas, mas que as equações em M *e* T *são linearmente dependentes.*
Para δ,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \delta L^aE^b, \\ [\![\Pi_2]\!] &= [\mathsf{L}]\,[\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -1$, $b = 0$, e

$$\Pi_2 = \frac{\delta}{L}.$$

Para I,

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= IL^aE^b, \\ [\![\Pi_3]\!] &= \left[\mathsf{L^4}\right] [\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{b}\mathsf{L}^{4+a-b}\mathsf{T}^{-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -4$, $b = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{I}{L^4} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Considere

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

e sua aproximação numérica I_n dada por

$$I_n = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y,$$

onde

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy, \\ x_i &= (i - 1/2)\Delta x, \\ y_j &= (j - 1/2)\Delta y, \\ \Delta x &= \Delta y = 1/10. \end{aligned}$$

a) [05] Calcule analiticamente I.

b) [20] Escreva, rode, e entregue a listagem (em um arquivo em separado) de um programa em Python que calcula I_n

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \left[\int_0^1 y \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

O programa é

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
def f(x,y):
   return x*y;
pass
dx = 0.1;
dy = 0.1;
s = 0.0;
for i in range(1,11):
   xi = (i - 0.5)*dx;
   for j in range(1,11):
      yj = (j-0.5)*dy;
      fij = f(xi,yj);
      s += fij*dx*dy;
   pass
pass
print("In = ",s);
```

que imprime 0.25 (um resultado exato).

Continue a solução no verso ⟹

Referências

White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Education, New York.

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 09 Jul 2021
Entrega em 10 Jul 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

ATENÇÃO: PROVA SEM CONSULTA, E SEM USO DE CALCULADORAS, ETC..
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Obtenha a série de Taylor bivariada de

$$f(x,y) = x^2 \exp(x+y) + y \,\mathrm{sen}(x)$$

até ordem 2, em torno de $(1,1)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Desejamos calcular

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0).$$

Trata-se portanto de um exercício de derivação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + y\cos(x) \\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + y\cos(x), \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^2\exp(x+y) + \mathrm{sen}(x), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) - y\,\mathrm{sen}(x) \\
&= [2 + 4x + x^2]\exp(x+y) - y\,\mathrm{sen}(x), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\exp(x+y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x\exp(x+y) + x^2\exp(x+y) + \cos(x) \\
&= [2x + x^2]\exp(x+y) + \cos(x).
\end{aligned}$$

Os valores da função e de suas derivadas em (x_0,y_0) são

$$\begin{aligned}
(x_0,y_0) &= (1,1), \\
f(x_0,y_0) &= \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1), \\
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} &= \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} &= 7\mathrm{e}^2 - \mathrm{sen}(1), \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} &= \mathrm{e}^2, \\
\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} &= 3\mathrm{e}^2 + \cos(1).
\end{aligned}$$

Substituindo na expansão em série de Taylor,

$$f(x,y) \approx \mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1) + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1) + [\mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(1)](y-1) + \\ \frac{1}{2}[7\mathrm{e}^2 - \mathrm{sen}(1)](x-1)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2(y-1)^2 + [3\mathrm{e}^2 + \cos(1)](x-1)(y-1) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Encontre a equação do plano no $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -2)$, e que passa pela origem.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação geral do plano é $ax + by + cz = d$, onde (a, b, c) são os elementos de um vetor perpendicular ao plano. No nosso caso, como o plano contém a origem, $a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = d = 0$. Além disso, um vetor perpendicular aos dois vetores pode ser obtido por meio do produto vetorial:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

Logo, $(a, b, c) = (1, 2, 1)$ (a menos de uma constante multiplicativa) e a equação do plano é $x + 2y + z = 0$ ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule

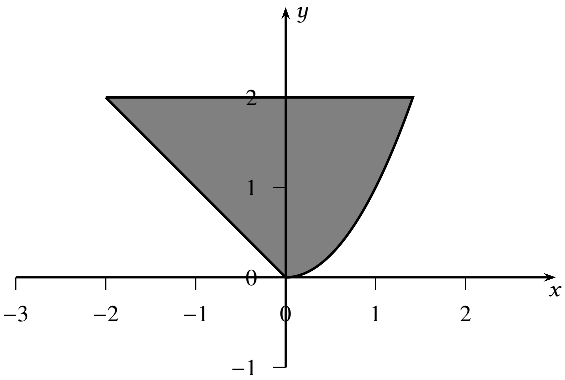
$$I = \iint_{R_{xy}} (1 + x + y)\,\mathrm{d}A,$$

onde R_{xy} é a região do $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$\begin{aligned}
&x = -y, \qquad 0 \le y \le 2,\\
&x = \sqrt{y}, \qquad 0 \le y \le 2,\\
&y = 2.
\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A região precisa ser mapeada, e está mostrada ao lado:



$$\begin{aligned}
I &= \int_{y=0}^{2} \int_{x=-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^{2} \left[x + xy + \frac{x^2}{2} \right]_{-y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y\\
&= \int_{0}^{2} \left\{ \left[\sqrt{y} + y\sqrt{y} + \frac{y}{2} \right] - \left[-y - y^2 + \frac{y^2}{2} \right] \right\} \mathrm{d}y\\
&= \int_{0}^{2} \left[\sqrt{y} + \frac{3y}{2} + y\sqrt{y} + \frac{y^2}{2} \right] \mathrm{d}y = \frac{11 \times 2^{7/2} + 130}{30} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule

$$I = \iint_{R_{xy}} (y - x)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

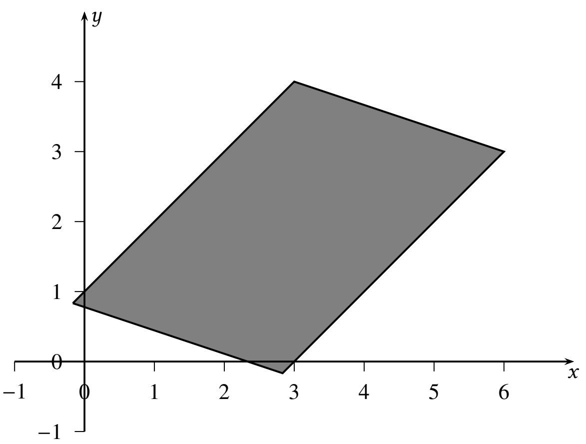
onde R_{xy} é a região do plano xy situada entre as retas

$$y = x+1, \qquad y = x-3, \qquad y = -\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}, \qquad y = -\frac{1}{3}x+5,$$

mostrada na figura ao lado, utilizando, **obrigatoriamente**, a mudança de variáveis

$$u = y - x,$$
$$v = y + \frac{1}{3}x,$$

e integrando na região R_{uv} correspondente.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro nós invertemos a relação entre u, v e x, y:

$$\begin{aligned} u - v &= -x - \frac{1}{3}x = -\frac{4}{3}x, \\ u + 3v &= y + 3y = 4y; \\ x &= \frac{3}{4}(v - u), \\ y &= \frac{1}{4}(3v + u). \end{aligned}$$

As 4 retas no plano xy tornam-se

$$\begin{aligned} y &= x + 1, \\ \frac{1}{4}(3v + u) &= \frac{3}{4}(v - u) + 1, \\ \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u + 1, \\ u &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x - 3, \\ \frac{1}{4}(3v + u) &= \frac{3}{4}(v - u) - 3, \\ \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= \frac{3}{4}v - \frac{3}{4}u - 3, \\ u &= -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, \\ \frac{1}{4}(3v + u) &= -\frac{1}{3}\frac{3}{4}(v - u) + \frac{7}{9}, \\ \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= -\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}u + \frac{7}{9}, \\ v &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3}x + 5, \\ \frac{1}{4}(3v + u) &= -\frac{1}{3}\frac{3}{4}(v - u) + 5, \\ \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}u &= -\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}u + 5, \\ v &= 5. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Portanto, no plano uv a região de integração é $u \in [-3, 1]$, $v \in [7/9, 5]$; agora,

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

e nos resta calcular o jacobiano,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{vmatrix} = -9/16 - 3/16 = -12/16 = -3/4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{u=-3}^{1} \int_{v=7/9}^{5} \left[\frac{1}{4}(3v+u) - \frac{3}{4}(v-u)\right] |-3/4|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=-3}^{1} \int_{v=7/9}^{5} u|-3/4|\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{4}\int_{u=-3}^{1} u \left[\int_{v=7/9}^{5} \mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{3}{4}\int_{u=-3}^{1} u \left[5 - \frac{7}{9}\right] \mathrm{d}u \\
&= \frac{19}{6}\int_{u=-3}^{1} u\,\mathrm{d}u = -\frac{38}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 16 Jul 2021
Entrega em 17 Jul 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

ATENÇÃO: PROVA SEM CONSULTA, E SEM USO DE CALCULADORAS, ETC..
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Seja

$$f(x,y,z) = z^2 + \mathrm{e}^{-y}\cos(x).$$

Calcule a derivada direcional $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ ao longo da curva

$$\begin{aligned} x &= s, \\ y &= 2s+1, \\ z &= \operatorname{sen}(s), \end{aligned}$$

no ponto $(1, 3, \operatorname{sen}(1))$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \\ &= \boldsymbol{\nabla} f \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}, \qquad \boldsymbol{r} = (x,y,z), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f &= (-\mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen}(x), -\mathrm{e}^{-y}\cos(x), 2z); \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} &= (1, 2, \cos(s)). \end{aligned}$$

Em $P = (1, 3, \operatorname{sen}(1))$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f &= (-\mathrm{e}^{-3}\operatorname{sen}(1), -\mathrm{e}^{-3}\cos(1), 2\operatorname{sen}(1)); \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} &= (1, 2, \cos(1)); \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= -\mathrm{e}^{-3}\operatorname{sen}(1) - 2\mathrm{e}^{-3}\cos(1) + 2\operatorname{sen}(1)\cos(1) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Em coordenadas cartesianas, se $u(x,y)$ é uma função no $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Obtenha $\nabla^2 u$ em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Este é um exercício de aplicação sistemática (e cuidadosa) da regra da cadeia. Primeiro, obtemos r, θ em função de x, y:

$$\begin{aligned} r &= (x^2+y^2)^{1/2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Em seguida, todas as derivadas possíveis são (omitindo os detalhes):

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos(\theta), \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \mathrm{sen}(\theta), \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= +\frac{\cos(\theta)}{r}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right]\cos(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r}\right]\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{r} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2(\theta) + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\mathrm{sen}^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos(\theta)}{r}\right]\frac{\cos(\theta)}{r} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\mathrm{sen}^2(\theta) - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Somando,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Calcule $\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]$. Use notação indicial e a base canônica para os cálculos, **mas exprima o resultado final vetorialmente**, utilizando o operador $\boldsymbol{\nabla}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}] &= \boldsymbol{e}_l\frac{\partial}{\partial x_l}\cdot\epsilon_{ijk}u_iv_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial(u_iv_j)}{\partial x_l}(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_k)\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial(u_iv_j)}{\partial x_l}\delta_{lk}\\
&= \epsilon_{ijk}\frac{\partial(u_iv_j)}{\partial x_k}\\
&= \epsilon_{ijk}u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\epsilon_{ijk}v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\
&= \epsilon_{kij}u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\epsilon_{kij}v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\
&= -\epsilon_{kji}u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+\epsilon_{kij}v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\
&= -u_i\epsilon_{kji}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}+v_j\epsilon_{kij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\\
&= -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Calcule a área da superfície

$$g(x,y) = \sqrt{3}x + y^2$$

no domínio $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, sabendo que

$$\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\operatorname{arcsenh}(1) + \sqrt{2}}{2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \sqrt{3},\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2y,\\
A &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \sqrt{1+3+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^1 \sqrt{1+3+4y^2}\left[\int_{x=0}^1 \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^1 \sqrt{1+3+4y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{y=0}^1 \sqrt{4+4y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= 2\int_{y=0}^1 \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \operatorname{arcsenh}(1) + \sqrt{2}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 06 Ago 2021
Entrega em 07 Ago 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

ATENÇÃO: PROVA SEM CONSULTA, E SEM USO DE CALCULADORAS, ETC..
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Calcule o volume do corpo limitado inferiormente pela superfície

$$z = x^2 + y^2,$$

e superiormente pela superfíce

$$z = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, precisamos encontrar o domínio de integração no plano xy. Pela simetria do problema, fazemos $x^2+y^2 = r^2$, e calculamos o valor de r em que as duas superfície se interceptam (onde possuem a mesma cota):

$$\begin{aligned}
r^2 &= 1 + \frac{r^2}{4},\\
\frac{3r^2}{4} &= 1,\\
r^2 &= \frac{4}{3},\\
r &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

O domínio de integração em xy portanto é $r \le 2\sqrt{3}/3$.
Claramente, é preferível integrar em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[\left(1 + \frac{r^2}{4} \right) - r^2 \right] r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[1 - \frac{3r^2}{4} \right] r \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Resolva a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uv &= \mathrm{e}^{-x},\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_1,\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{-x},\\
|v| &= k_2\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_2\mathrm{e}^{-x} = v_0\mathrm{e}^{-x};\\
v_0\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
v_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0},\\
u &= u_0 + \frac{x}{v_0};\\
y = uv &= \left[u_0 + \frac{x}{v_0}\right]v_0\mathrm{e}^{-x}\\
&= u_0v_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},\\
&= y_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x};\\
y(0) = 1 &\Rightarrow\; y_0 = 1;\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(1+x) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Resolva

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação original,

$$\begin{aligned}
(r-1)r + 3r + 1 &= 0,\\
r^2 + 2r + 1 &= 0,\\
(r+1)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

$r = -1$ é uma raiz dupla. Uma das duas soluções LI é

$$y = \frac{k_2}{x}.$$

Precisamos encontrar uma segunda solução LI pelo método de variação de constantes:

$$\begin{aligned}
y &= x^{-1}u,\\
y' &= x^{-1}u' - x^{-2}u,\\
y'' &= x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
x^2\left[x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u\right] + 3x\left[x^{-1}u' - x^{-2}u\right] + x^{-1}u &= 0,\\
xu'' - 2u' + 2x^{-1}u + 3u' - 3x^{-1}u + x^{-1}u &= 0,\\
xu'' + u' &= 0.
\end{aligned}$$

Agora reduzimos a ordem da equação diferencial em u:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\
x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x &= 0,\\
\mathrm{d}(xv) &= 0,\\
xv &= k_1,\\
v &= \frac{k_1}{x};\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{k_1}{x},\\
\mathrm{d}u &= k_1\frac{\mathrm{d}x}{x},\\
u &= k_1 \ln|x| + k_2;\\
y &= \frac{u}{x} = \frac{k_1 \ln|x|}{x} + \frac{k_2}{x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Se $\theta \in \mathbb{R}$, sabemos que $|e^{i\theta}| = 1$. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, onde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, calcule $|e^{iz}|$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
|e^{iz}| &= |e^{i(x+iy)}| \\
&= |e^{ix}||e^{i^2 y}| \\
&= |e^{-y}| = e^{-y} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹