TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 24 Mai 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Dado o algoritmo abaixo,

```
der[0] ← 0 ;
der[1] ← 1 ;
for n = 2 to 15 do
|   r = n mod 4 ;
|   switch r do
|   |   case r = 0 do
|   |   |   der[n] ← 0
|   |   end
|   |   case r = 1 do
|   |   |   der[n] = - 2*der[n-2] ;
|   |   end
|   |   case r = 2 do
|   |   |   der[n] = -2*der[n-1]
|   |   end
|   |   case r = 3 do
|   |   |   der[n] = -der[n-1]
|   |   end
|   end
end
```

traduza-o para Python. **Atenção: ao contrário de Python, o *for* do algoritmo varre *n* de 2 a 15 inclusive. MAIS ATENÇÃO: DEIXE CLARA SUA INDENTAÇÃO COM LINHAS VERTICAIS COMO NO ALGORITMO ACIMA.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
der = [0.0]*16
der[1] = 1.0
for n in range(2,16):
   r = n % 4
   if r == 0 :
      der[n] = 0.0
   elif r == 1 :
      der[n] = -2*der[n-2]
   elif r == 2 :
      der[n] = -2*der[n-1]
   else :
      der[n] = -der[n-1]
   pass
pass
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Resolva o sistema de equações diferenciais lineares acoplado

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};
$$

expanda a sua solução com o auxílio da fórmula de Euler até garantir que $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sejam reais. **Lembre-se de que, na base dos autovetores, o sistema fica desacoplado.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre, supomos inicialmente que o problema está na base canônica. Buscamos a solução $\boldsymbol{u}(t) = u_1(t)\boldsymbol{e}_1 + u_2(t)\boldsymbol{e}_2$. Os autovalores e autovetores do problema são

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_1 &= (1, \mathrm{i}), \\
\lambda_2 &= 1 + \mathrm{i}; \qquad & \boldsymbol{f}_2 &= (1, -\mathrm{i}).
\end{aligned}
$$

Na base dos autovetores o problema é

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},
$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
v_1 &= k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}, \\
v_2 &= k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}.
\end{aligned}
$$

Note que k_1 e k_2, em princípio, são números complexos. A solução do problema, portanto, é

$$
\boldsymbol{u}(t) = v_1(t)\boldsymbol{f}_1 + v_2(t)\boldsymbol{f}_2.
$$

O retorno à base canônica é imediato:

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = k_1 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} + k_2 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}
$$

Vamos escolher k_1 e k_2 de tal forma que $u_1(t)$ seja real, na esperança (razoável) de que os mesmos k_1 e k_2 também produzam $u_2(t)$ real. Sejam, por brevidade, $C = \cos(t)$ e $S = \operatorname{sen}(t)$, e

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (A + \mathrm{i}B)/2, \\
k_2 &= (A - \mathrm{i}B)/2;
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
u_1(t) &= k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t}, \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{(A + \mathrm{i}B)(C - \mathrm{i}S) + (A - \mathrm{i}B)(C + \mathrm{i}S)\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC + AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right\} \\
&= \mathrm{e}^t\left[AC + BS\right] = \mathrm{e}^t\left[A\cos t + B\operatorname{sen} t\right].
\end{aligned}
$$

Repetimos para u_2:

$$
\begin{aligned}
u_2(t) &= \mathrm{i}k_1 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{i}k_2 \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{+\mathrm{i}t}, \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}(A + \mathrm{i}B)(C - \mathrm{i}S) - \mathrm{i}(A - \mathrm{i}B)(C + \mathrm{i}S)\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left\{\mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}AS + \mathrm{i}BC\right] - \mathrm{i}\left[AC - \mathrm{i}^2 BS - \mathrm{i}BC + \mathrm{i}AS\right]\right\} \\
&= \mathrm{e}^t\left[-\mathrm{i}^2 AS + \mathrm{i}^2 BC\right] = \mathrm{e}^t\left[A\operatorname{sen} t - B\cos t\right] \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule a divergência de

$$\boldsymbol{v} = (3x^3 + 2y^2 + z, 3y^3 + 2z^2 + x, 3z^3 + 2x^2 + y)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 + 2y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^3 + 2z^2 + x) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2 + 2x^2 + y) \\
&= 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Classifique **completamente** cada uma das equações diferenciais a seguir.

a) [5]

$$y''' + xy = 1$$

b) [5]

$$(y')^2 + y = 0$$

c) [5]

$$x^2y'' + xy' + y = 1$$

d) [5]

$$y'' - 2y' + y = \operatorname{sen}(x)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Ordem 3, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

b) Ordem 1, não-linear, coeficientes constantes, homogênea.

c) Ordem 2, linear, coeficientes não-constantes, não-homogênea.

d) Ordem 2, linear, coeficientes constantes, não-homogênea.

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x)$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Procuramos uma solução homogênea:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}(x)y_h &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} &= -\operatorname{sen}(x)y_h,\\
\frac{\mathrm{d}y_h}{y_h} &= -\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x,\\
\ln|y_h| &= \cos(x) + k_1,\\
|y_h| &= \exp(k_1)\exp(\cos(x)) = k_2\exp(\cos(x)) \;\Rightarrow\\
y_h &= k\exp(\cos(x)).
\end{aligned}$$

Agora buscamos uma solução da equação completa na forma

$$\begin{aligned}
y(x) &= u(x)y_h(x); \;\Rightarrow\\
u(x)\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + y_h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}(x)u(x)y_h &= \operatorname{sen}(x);\\
u(x)\left[\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + \operatorname{sen}(x)y_h\right] + y_h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \operatorname{sen}(x)\\
k\exp(\cos(x))\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \operatorname{sen}(x);\\
\mathrm{d}u &= \frac{\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x}{k\exp(\cos(x))} = -\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}w}{\exp(w)}
\end{aligned}$$

$(w = \cos(x))$

$$= \frac{1}{k}\exp(-w)\mathrm{d}(-w).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{k}\exp(-w) + k_3 = \frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3;\\
y(x) &= u(x)y_h(x) = \left[\frac{1}{k}\exp(-\cos(x)) + k_3\right][k\exp(\cos(x))]\\
&= 1 + (k_3k)\exp(\cos(x)) = 1 + C\exp(\cos(x)) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹