TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 19 ago 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

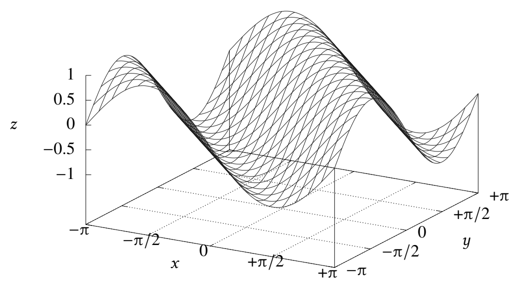
ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

NÃO ESCREVA NA CARTEIRA.

---

1 [25] A área da superfície mostrada na figura ao lado e parametrizada por

$$
\begin{aligned}
x &= u, \qquad -\pi \le u \le +\pi,\\
y &= v, \qquad -\pi \le v \le +\pi,\\
z &= \operatorname{sen}(u+v),
\end{aligned}
$$



é dada pela integral dupla

$$
A = \int_{u=-\pi}^{+\pi} \int_{v=-\pi}^{+\pi} F(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u.
$$

Obtenha $F(u,v)$. **Não tente calcular a integral**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v));\\
A_{\mathscr{S}} &= \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v;\\
\boldsymbol{r} &= (u, v, \operatorname{sen}(u+v));\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 0, \cos(u+v))\,,\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 1, \cos(u+v))\,,\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-\cos(u+v), -\cos(u+v), +1)\,;\\
\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| &= \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)};\\
A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=-\pi}^{+\pi} \int_{v=-\pi}^{+\pi} \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u;\\
F(u,v) &= \sqrt{1 + 2\cos^2(u+v)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $\boldsymbol{F} = \left(y, -x, \operatorname{senh}(x^2 + y^2)\right)$, calcule

$$I_{\mathscr{S}} = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}])\, \mathrm{d}A$$

sobre a superfície $\mathscr{S}$ da semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Considere que o vetor unitário $\boldsymbol{n}$ normal a $\mathscr{S}$ aponta para "fora" da semiesfera.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se de uma aplicação evidente do Teorema de Stokes:

$$\int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}])\, \mathrm{d}A = \oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

onde $\mathscr{L}$ é o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$. Mas

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \oint_{\mathscr{L}} (-y, x, \operatorname{senh}(x^2 + y^2)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, 0) \\
&= \oint_{\mathscr{L}} (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)\,.
\end{aligned}$$

A integral de linha precisa ser parametrizada:

$$\begin{aligned}
x &= \cos(\theta), \\
\mathrm{d}x &= -\operatorname{sen}(\theta)\, \mathrm{d}\theta, \\
y &= \operatorname{sen}(\theta), \\
\mathrm{d}y &= \cos(\theta)\, \mathrm{d}\theta; \qquad \Rightarrow \\
I_{\mathscr{S}} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right] \mathrm{d}\theta = 2\pi \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = (1+2x)\mathrm{e}^x.$$

As integrais

$$\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C_1,$$
$$\int x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{(2x-1)\mathrm{e}^{2x}}{4} + C_2$$

são úteis para resolver este problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uv &= (1+2x)\mathrm{e}^x,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= (1+2x)\mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

Para v temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_v',\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_v'}\mathrm{e}^{-x},\\
&= k_v\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_v\mathrm{e}^{-x} = C_v\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Para u temos:

$$\begin{aligned}
C_v\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= (1+2x)\mathrm{e}^x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{C_v}(1+2x)\mathrm{e}^{2x},\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{C_v}(1+2x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,\\
u &= \frac{1}{C_v}\left[\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x + 2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right] + C_u\\
&= \frac{1}{C_v}\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 2\frac{(2x-1)\mathrm{e}^{2x}}{4}\right] + C_u\\
&= \frac{1}{2C_v}\left[\mathrm{e}^{2x} + (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\right] + C_u\\
&= \frac{1}{C_v}x\mathrm{e}^{2x} + C_u.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
y = uv &= \left[\frac{1}{C_v}x\mathrm{e}^{2x} + C_u\right]C_v\mathrm{e}^{-x}\\
&= x\mathrm{e}^x + (C_uC_v)\mathrm{e}^{-x}\\
&= x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{-x} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação característica é

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4,$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = 1,$$
$$\lambda_2 = 4;$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{4x} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹