TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 03 jul jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [20] Considere a seguinte equação diferencial ordinária não linear:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \cos(y^2) = x^2; \qquad y(0) = 0.$$

Em princípio, ela não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser resolvida numericamente com facilidade com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve a equação acima. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def ff(x,y):
    return (x**2 - cos(y**2))**(0.5)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Sabendo o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12,$$

obtenha

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

-36, pois o determinante é linear em cada linha ou coluna ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi=0}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

resolva a EDO

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $y = uv$ e substitua:

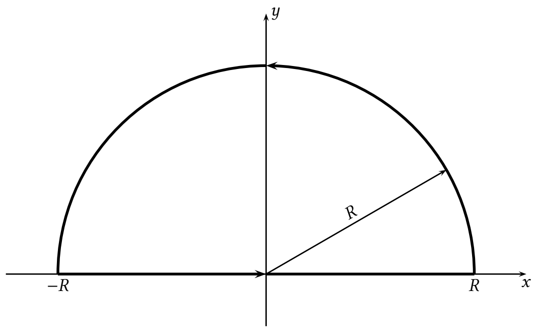
$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv &= 1 \\
\underbrace{u\left[\frac{dv}{dx} - 2xv\right]}_{=0} + v\frac{du}{dx} &= 1 \\
\frac{dv}{dx} - 2xv &= 0 \\
\frac{dv}{v} &= 2x dx \\
\int_{v_0}^{v} \frac{d\eta}{\eta} &= 2\int_0^x \xi d\xi = x^2 \\
\ln\frac{v}{v_0} &= x^2 \\
v &= v_0 e^{x^2} \Rightarrow \\
v_0 e^{x^2}\frac{du}{dx} &= 1 \\
u &= \frac{1}{v_0}\int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi + u_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0 \Rightarrow \\
y = uv &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2v_0}\operatorname{erf}(x) + u_0\right] v_0 e^{x^2} \\
y &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}\operatorname{erf}(x) + K e^{x^2}; \qquad y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Utilizando obrigatoriamente integração de contorno com variáveis complexas, calcule

$$I = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2 + \mathrm{i}} \, \mathrm{d}x.$$

onde x é o eixo dos reais e $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Utilize o contorno mostrado na figura ao lado.

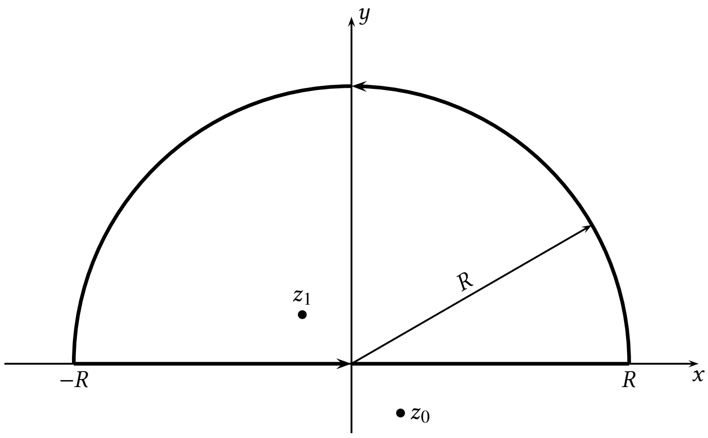


SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Considere a função $f(z) = 1/(z^2 + \mathrm{i})$. Esta função possui singularidades em

$$\begin{aligned} z^2 + \mathrm{i} &= 0, \\ z^2 &= -\mathrm{i} = \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\pi/2 + 2k\pi)}; \\ z &= \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\pi/4 + k\pi)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, apenas a singularidade em z_1 mostrada abaixo precisa ser considerada no teorema dos resíduos.



Para verificar a integral sobre o semi-círculo $\mathscr{L}_S$ quando $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\mathscr{L}_S} \frac{1}{z^2 + \mathrm{i}} \, \mathrm{d}z \right| &\le \lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_S} \left| \frac{1}{z^2 + \mathrm{i}} \, \mathrm{d}z \right| \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}} \right| \mathrm{d}\theta \\ &\le \lim_{R\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left| \frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}} \right| \mathrm{d}\theta = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos, devemos ter

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{x^2 + \mathrm{i}} \, \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}c_{-1},$$

onde o resíduo c_{-1} em z_1 é calculado como se segue:

$$\frac{1}{z^2 + \mathrm{i}} = \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)};$$

logo, nas proximidades de z_1,

$$f(z) \sim \frac{1}{(z_1 - z_0)(z - z_1)},$$

Continue a solução no verso ⟹

donde z_1 é claramente um polo de primeira ordem, e

$$
\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{1}{(z_1 - z_0)} \\
&= \frac{1}{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} \\
&= \frac{1}{-\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(-1+\mathrm{i})} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} &= (2\pi\mathrm{i}) \times \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right] \\
&= 2\pi\mathrm{i}c_{-1} = (\pi\mathrm{i}) \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right] \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,(-1+\mathrm{i}) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,(1-\mathrm{i}) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Resolva a equação de Airy

$$y'' - xy = 0$$

em série de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (note que $x = 0$ é um ponto regular, e que portanto isto não é o método de Frobenius); em particular mostre que se deve ter necessariamente $a_2 = 0$, e obtenha os 3 primeiros termos das séries que multiplicam, respectivamente, a_0 e a_1 (isto é: as duas soluções LI).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}.$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Fazendo $n - 2 = m + 1$, isto é: fazendo $m = n - 3$,

$$0 = \sum_{m=-3}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$
$$0 = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+2)(m+3) a_{m+3} x^{m+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$
$$0 = 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3) a_{n+3} - a_n \right] x^{n+1}.$$

A relação de recorrência é

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+2)(n+3)}.$$

Claramente, $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = 0$; partindo de $a_0 = 1$: $a_3 = 1/6, a_6 = 1/180, a_9 = 1/12960$; partindo de $a_1 = 1$: $a_4 = 1/12, a_7 = 1/504, a_{10} = 1/45360$, e as duas soluções LI são:

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \frac{x^9}{12960} + \ldots,$$
$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \frac{x^{10}}{45360} + \ldots \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹