TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 04 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Para resolver o segundo trabalho computacional, você precisou modificar levemente a rotina `triad`, que resolve um sistema de equações lineares cuja matriz é tridiagonal. A rotina original, disponibilizada no livro-texto, é mostrada abaixo. Indique a lápis quais foram as modificações necessárias.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO (CORRIJA A LÁPIS O CÓDIGO ABAIXO):

A solução é trocar `float` por `complex` em `zeros`:

```
def triad(a,b,c,d):
   n = len(a);
   cc = zeros(n,complex)
   dd = zeros(n,complex)
   cc[0] = c[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n-1):
      cc[i] = (c[i])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   dd[0] = d[0]/b[0] ;
   for i in range(1,n):
      dd[i] = (d[i] - a[i]*dd[i-1])/(b[i] - a[i]*cc[i-1])
   x = zeros(n,complex)
   x[n-1] = dd[n-1] ;
   for i in range (n-2,-1,-1):
      x[i] = dd[i] - cc[i]*x[i+1]
   return x
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Os polinômios de Laguerre de grau n são definidos em $[0, +\infty)$ pela fórmula

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)^n x^n.$$

VOCÊ NÃO VAI PRECISAR USAR A RELAÇÃO DE RECURSÃO NESTA QUESTÃO. Os polinômios de Laguerre formam uma base **ortonormal** das funções reais em $[0, +\infty)$ para o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Os 3 primeiros polinômios são $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$. Para $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$, obtenha α_0, α_1 e α_2 tais que $\left\|h(x) - \widehat{h}(x)\right\|$ seja mínima (**a norma é definida em relação ao produto interno dado acima!**), com $\widehat{h}(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A base é ortogonal; então os valores de α_0, α_1 e α_2 que minimizam a norma são simplesmente coeficientes de Fourier de $h(x)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \langle L_0(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty 1 \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(2\mathrm{d}x) = 1/2; \\
\alpha_1 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty (1 - x) \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (1 - x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/4; \\
\alpha_2 &= \langle L_1(x), h(x)\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = 1/8 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Sabendo que

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{1-k^2}$$

calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\left[\cos(kx) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(kx)\right]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\pi(1-k^2)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Calcule $\widehat{f}(k)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O cálculo de $\widehat{f}(k)$ é quase imediato:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{x=-1}^{x=+1} \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}[2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k)] \\
&= \frac{\mathrm{sen}(k)}{\pi k} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Se

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

calcule a transformada de Fourier da EDO

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T^2}y = \frac{1}{T^2}x,$$

(onde T é constante) e obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em função de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T^2}y\right\} &= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{T^2}x\right\}\\
(\mathrm{i}\omega)^2\widehat{y}(\omega) + \frac{\mathrm{i}\omega}{T}\widehat{y}(\omega) + \frac{1}{T^2}\widehat{y}(\omega) &= \frac{1}{T^2}\widehat{x}(\omega)\\
\left[-\omega^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{T} + \frac{1}{T^2}\right]\widehat{y}(\omega) &= \frac{1}{T^2}\widehat{x}(\omega)\\
\left[-\omega^2T^2 + \mathrm{i}\omega T + 1\right]\widehat{y}(\omega) &= \widehat{x}(\omega)\\
\widehat{y}(\omega) &= \frac{\widehat{x}(\omega)}{-\omega^2T^2 + \mathrm{i}\omega T + 1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹