Calculo o produto vetorial $\boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{f}_1 \times \boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{18}} \left[0\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{9 \times 2}} \left[0\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3\right] \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[0\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_3\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Para encontrar a matriz de rotação $[\boldsymbol{C}]$, tenho que calcular elemento a elemento. Segundo exemplo:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\operatorname{sen}\alpha_2 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}\alpha_2 \operatorname{sen}\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações lineares:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}.$$

$$[\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}].$$

$$\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= y_1, \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= y_2, \\
A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 &= y_3.
\end{aligned}$$

O caso geral de uma transformação que projeta um vetor do $\mathbb{R}^3$ em um plano cujo normal é $\boldsymbol{k}$ é o seguinte: construo

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Atenção: $k^2 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}$.

Para verificar a veracidade dessa afirmativa, faça:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a} \\
b_i &= \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right] a_j \\
&= \delta_{ij} a_j - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j \\
&= a_i - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j.
\end{aligned}$$

Escolha $i = 2$: quanto é $\delta_{2j} a_j$?

$$\begin{aligned}
\delta_{2j} a_j &= \sum_{j=1}^{3} \delta_{2j} a_j \\
&= \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a 3 \\
&= a_2 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

A questão agora é: $\boldsymbol{b}$ está num plano cujo normal é $\boldsymbol{k}$? Sim, caso $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k} = 0$. Verifique:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{k} &= b_i k_i \\
&= \left[a_i - \frac{k_i k_j}{k^2} a_j\right] k_i \\
&= a_i k_i - k_i \frac{k_i k_j}{k^2} a_j \\
&= a_i k_i - (k_i k_i) \frac{k_j}{k^2} a_j \\
&= a_i k_i - a_j k_j \\
&= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k}) = 0.
\end{aligned}$$