TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 10 Dez 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] O problema difusivo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x),
\end{aligned}
$$

possui discretização

$$
-\mathrm{Fo}\phi_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_i^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{i+1}^{n+1} = \phi_i^n, \tag{$\star$}
$$

onde

$$
\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}
$$

e $i = 1, \ldots, N-1$ (i é o índice do eixo x). Modifique ($\star$) para levar em conta as condições de contorno, e mostre como ficam as 1ª e última linhas da matriz do sistema de equações que deve ser resolvido a cada passo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
1º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}\phi_0 + (1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n,\\
(1+2\mathrm{Fo})\phi_1^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_2^{n+1} &= \phi_1^n + \mathrm{Fo}\phi_0.
\end{aligned}
$$

2º caso:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_N^{n+1} &= \phi_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n,\\
-\mathrm{Fo}\phi_{N-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})\phi_{N-1}^{n+1} &= \phi_{N-1}^n \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere a série **complexa** de Fourier de $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$. Os seus coeficientes de Fourier são

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3};\\
c_n &= \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-(2\pi \mathrm{i} n x)} \, \mathrm{d}x = \frac{1 + \mathrm{i}\pi n}{2\pi^2 n^2}, \; n \neq 0.
\end{aligned}
$$

Usando a igualdade de Parseval,

$$
\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,
$$

calcule

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \pi^2 n^2}{4\pi^4 n^4}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \;\Rightarrow\\
\int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} &= \frac{1}{9} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2;\\
\frac{2}{45} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \pi^2 n^2}{4\pi^4 n^4} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Se $x(t)$ e $y(t)$ são duas funções relacionadas por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y = \frac{1}{T}x,$$

com $T > 0$, e

$$\widehat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

obtenha $\widehat{y}(\omega)$ em funcão de $\widehat{x}(\omega)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\omega\widehat{y} + \frac{1}{T}\widehat{y} &= \frac{1}{T}\widehat{x},\\
(1+\mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= \widehat{x},\\
\widehat{y} &= \frac{\widehat{x}}{1+\mathrm{i}\omega T}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Um problema difusivo envolve o cálculo da concentração $c(x,t)$ de uma espécie química regida pela equação

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= v_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial c}{\partial x}\right],\\
c(x,0) &= 0,\\
c(0,t) &= c_0,\\
c(\infty,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sabendo que as dimensões físicas do problema são tais que $[\![c]\!] = [\![c_0]\!]$; $[\![x]\!] = \mathsf{L}$; $[\![t]\!] = \mathsf{T}$ e $[\![v_0]\!] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1}$, e que as variáveis envolvidas são x, t, v_0, $c(x,t)$ e c_0,

a) [10] Encontre as duas variáveis adimensionais ϕ e ξ que governam o problema, de tal maneira que $\phi = \phi(\xi)$.

b) [10] Agora, utilizando o método de transformação de similaridade, encontre a equação diferencial ordinária de ϕ em ξ, e suas condições de contorno. **NÃO É PRECISO RESOLVER A EQUAÇÃO.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\phi = \frac{c(x,t)}{c_0};\ \xi = \frac{x}{v_0 t}.
$$

b) As derivadas que aparecem na equação diferencial parcial são

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\left[-\frac{x}{v_0 t^2}\right];\\
\frac{\partial c}{\partial x} &= c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = c_0 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t};\\
\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\frac{1}{v_0 t}\right] = c_0 \frac{1}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}\frac{1}{v_0 t} = \frac{c_0}{(v_0 t)^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}.
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação orignal, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= c_0\left[x\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial c}{\partial x}\right],\\
-c_0\left[-\frac{x}{v_0 t^2}\right]\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0 c_0\left[x\frac{1}{(v_0 t)^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]\\
-\frac{x}{t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= v_0\left[\frac{x}{v_0 t}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right].
\end{aligned}
$$

A EDO, portanto, será

$$
\begin{aligned}
\xi\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + (1+\xi)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= 0,\\
\phi(0) &= 1,\\
\phi(\infty) &= 0\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= \phi_0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\phi(x,0) &= f(x).
\end{aligned}
$$

Observação: você pode usar o fato de que

$$
\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

As condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser resolvido com a transformação

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \phi(x,t) - \phi_0 \ \Rightarrow\\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t},\\
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\\
\psi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\
\psi(x,0) &= f(x) - \phi_0.
\end{aligned}
$$

Fazemos agora $\psi(x,t) = X(x)T(t)$; a equação fica

$$
\begin{aligned}
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.
\end{aligned}
$$

O problema de Sturm-Liouville é

$$
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0,\ X'(L) = 0.
$$

O problema é difusivo. É razoável proibir $\lambda > 0$. Sempre vale a pena, entretanto, testar $\lambda = 0$: a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A + Bx;\\
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow B = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor. Para $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$, a solução é do tipo

$$
\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx),\\
X'(x) &= k\left[-A\operatorname{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]
\end{aligned}
$$

Impondo as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\
X'(L) = 0 &\Rightarrow kB\cos(kL) = 0;\\
\cos(kL) = 0 &\Rightarrow\\
kL &= \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2L};\\
\lambda_n &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A equação em $T_n(t)$ é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2 T_n}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2};\\
\frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} &= -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}\,\mathrm{d}t;\\
T_n(t) &= T_0 \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t\right].
\end{aligned}$$

A solução geral é da forma

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).$$

Em $t = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) - \phi_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right),\\
[f(x)-\phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right),\\
\int_0^L [f(x)-\phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x,\\
B_m &= \frac{2}{L}\int_0^L [f(x)-\phi_0]\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹