TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01B, 14 Mai 2021
Entrega em 22 mai 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em Python, o comando '`a % b`' devolve a operação matemática $a \bmod b$, cuja definição é.

$$a \bmod b \equiv a - b\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a x. Sem rodar nenhum programa, e explicando seus cálculos: qual é a saída do comando '`print(-1 % 10)`'?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} -1 \bmod 10 &= -1 - 10\left\lfloor \frac{-1}{10} \right\rfloor \\ &= -1 - 10\lfloor -0.1 \rfloor \\ &= -1 - 10 \times (-1) \\ &= 9 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **?**: Em um gás real, existem forças de repulsão entre as suas moléculas que atuam quando elas estão muito próximas, que podem ser aproximadas por

$$F = Kr^{-n},$$

onde r é a distância entre duas moléculas e K é uma constante (experimentalmente, observa-se que n está entre 7 e 12 para gases comuns). Suponha que a viscosidade dinâmica de um gás real μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}\,T^{-1}}$) dependa da massa molecular m, da velocidade média quadrática das moléculas v e da constante K. Obtenha o grupo adimensional envolvido, forçando o expoente de μ a ser unitário.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, precisamos encontrar as dimensões de K:

$$\begin{aligned}[\![K]\!] &= [\![Fr^n]\!] \\ &= \mathsf{M\,L\,T^{-2}L}^n \\ &= \mathsf{M\,L^{n+1}\,T^{-2}}.\end{aligned}$$

Com 4 variáveis e 3 dimensões fundamentais, esperamos que haja um único grupo:

$$\begin{aligned}\Pi &= \mu K^a m^b v^c, \\ [\![\Pi]\!] &= \mathsf{M\,L^{-1}T^{-1}}\left[\mathsf{M\,L^{n+1}\,T^{-2}}\right]^a [\mathsf{M}]^b \left[\mathsf{L\,T^{-1}}\right]^c \\ 1 &= \mathsf{M^{1+a+b}\,L^{-1+a(n+1)+c}\,T^{-1-2a-c}}\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}a + b + 0c &= -11, \\ (n+1)a + 0b + c &= 1, \\ -2a + 0b - c &= 1\end{aligned}$$

e

$$\Pi = \mu K^{\frac{2}{n-1}} m^{-\frac{n+1}{n-1}} v^{-\frac{n+3}{n-1}} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Considere a integração numérica de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, e $2n$ pontos igualmente espaçados, $a \equiv x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} \equiv b$, com $h = x_{i+1} - x_i$. A regra de Simpson para $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é

$$S_{2n} = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right],$$

onde $f_i = f(x_i)$.

a) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando apenas os pontos pares é

$$T_n = h\left[f_0 + 2f_2 + + \ldots + 2f_{2n-2} + f_{2n}\right].$$

b) [05] Mostre que a regra do trapézio utilizando todos os pontos é

$$T_{2n} = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-2} + 2f_{2n-1} + f_{2n}\right]$$

c) [15] Mostre que

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Da fórmula geral,

$$I = \frac{\Delta x}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a + k\Delta x) + f(b)\right],$$

temos

$$\Delta x = 2h, \tag{1}$$
$$a + k\Delta x = a + 2khx, \tag{2}$$
$$f(a + k\Delta x) = f(a + 2khx) = f_{2k}, \tag{3}$$

e o resultado se segue imediatamente.

b) Da mesma forma, e ainda mais diretamente,

$$\Delta x = h, \tag{4}$$
$$a + k\Delta x = a + khx, \tag{5}$$
$$f(a + k\Delta x) = f(a + khx) = f_k. \tag{6}$$

c) Reunindo tudo, para os extremos f_0 e f_{2n}, temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}f_0 - \frac{1}{3}hf_0 = \left(\frac{4h}{6} - \frac{2h}{6}\right)f_0 = \frac{h}{3}f_0$$

(e o mesmo para f_{2n}). Para os pontos ímpares f_I temos apenas

$$\frac{h}{2} \times 2f_I \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{h}{2} \times 2f_I = \frac{h}{3}4f_I,$$

vindos de T_{2n}. Para os pontos pares f_P temos

$$\frac{4}{3}\frac{h}{2}(2f_P) - \frac{1}{3}h(2f_P) = \left(\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\right)h(2f_P) = \frac{h}{3}(2f_P)$$

Reunindo tudo,

$$\frac{4}{3}T_{2_n} - \frac{1}{3}T_n = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{2n-1} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right] = S_{2n} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando a função `trapezio`

```python
def trapezio(n,a,b,f):
    '''
    trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
    '''
    deltax = (b-a)/n
    Se = f(a) + f(b)            # define Se
    Si = 0.0                    # inicializa Si
    for k in range(1,n):        # calcula Si
        xk = a + k*deltax
        Si += f(xk)
    I = Se + 2*Si               # cálculo de I
    I *= deltax
    I /= 2
    return I
```

escreva uma segunda função `simpson(epsilon,a,b,f)` que utilize a relação de recorrência

$$S_{2n} = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

para obter S_{2n} com um erro ϵ especificado, e que chame `trapezio` **uma única vez** para cada $n = 1, 2, 4, \ldots$. Em seguida, teste sua rotina calculando e imprimindo (o valor aproximado de)

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$$

por meio de `simpson`, com $\epsilon = 1 \times 10^{-6}$. Qual o valor de n necessário para atingir essa acurácia?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
def trapezio(n,a,b,f):
    '''
    trapezio(n,a,b,f): integra f entre a e b com n trapézios
    '''
    deltax = (b-a)/n
    Se = f(a) + f(b)
    Si = 0.0
    for k in range(1,n):
        xk = a + k*deltax
        Si += f(xk)
    I = Se + 2*Si
    I *= deltax
    I /= 2
    return I
pass;
def simpson(epsilon,a,b,f):
    n = 2;
    IT0 = trapezio(1,a,b,f);
    IT1 = trapezio(2,a,b,f);
    IS0 = (4.0/3.0)*IT1 - (1.0/3.0)*IT0;
    IT0 = IT1;
    eps = 2*epsilon;
    while eps > epsilon:
        n *= 2;
        IT1 = trapezio(n,a,b,f);
        IS1 = (4.0/3.0)*IT1 - (1.0/3.0)*IT0;
        eps = abs(IS1 - IS0);
        IT0 = IT1;
        IS0 = IS1;
    pass;
    return (n,eps,IS1);
pass;
from math import sin, pi;
(n,eps,IS) = simpson(1.0e-6,0,pi,sin);
print("n = ",n);
print("eps = ",eps);
print("IS = ",IS);
```

Rodando o programa, $n = 64$.

Continue a solução no verso ⟹