TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 29 out 2021
Entrega em 30 out 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ______________________

---

1 [25] Das aulas, sabemos que

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

onde $k = |\boldsymbol{k}|$, são os elementos da matriz da transformação $\boldsymbol{P}$, na base canônica, que projeta qualquer vetor $\boldsymbol{a}$ do $\mathbb{R}^3$ no plano que passa pela origem e é normal ao vetor $\boldsymbol{k}$. Para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k}$ não nulos e não colineares, calcule, **utilizando obrigatoriamente notação indicial**,

$$[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{k}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} &= P_{ij}a_j\boldsymbol{e}_i = P_{il}a_l\boldsymbol{e}_i;\\
[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{k} &= \epsilon_{ijk}P_{il}a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}\left[\delta_{il} - \frac{k_ik_l}{k^2}\right]a_lk_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \epsilon_{ijk}a_ik_j\boldsymbol{e}_k - \frac{(a_lk_l)}{k^2}\epsilon_{ijk}k_ik_j\boldsymbol{e}_k\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k} - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})}{k^2}\underbrace{[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}]}_{\equiv\boldsymbol{0}}\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O produto escalar de dois vetores pode ser estendido para vetores no $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3),\ z_i \in \mathbb{C}\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos, via

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3; \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \equiv u_i^* v_i,$$

onde u_i^* significa o complexo conjugado de u_i. Neste caso, podemos definir o ângulo entre dois vetores do $\mathbb{C}^3$ por

$$\cos(\alpha) \equiv \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

A matriz

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa uma rotação de θ radianos no sentido positivo do eixo Ox_3 *real*. Os seus pares de autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) & \boldsymbol{v}_i &= (1, \mathrm{i}, 0), \\ \lambda_{ii} &= \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) & \boldsymbol{v}_{ii} &= (1, -\mathrm{i}, 0), \\ \lambda_{iii} &= 1 & \boldsymbol{v}_{iii} &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

a) [10] Calcule os ângulos entre $\boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{v}_{ii}$, $\boldsymbol{v}_i$ e $\boldsymbol{v}_{iii}$ e $\boldsymbol{v}_{ii}$ e $\boldsymbol{v}_{iii}$.

b) [15] Verifique que $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ **para cada um dos pares** $(\lambda, \boldsymbol{v})$ **acima**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1) &= \frac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_{ii}}{|\boldsymbol{v}_i||\boldsymbol{v}_{ii}|} \\ &= \frac{(1, \mathrm{i}, 0) \cdot (1, -\mathrm{i}, 0)}{\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times i}\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times -\mathrm{i}}{\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times i}\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 - 1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \pi/2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_2) &= \frac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_{iii}}{|\boldsymbol{v}_i||\boldsymbol{v}_{iii}|} \\ &= \frac{(1, \mathrm{i}, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 \times 1}\sqrt{1 \times 1 + -\mathrm{i} \times \mathrm{i}}} \\ &= \frac{1 \times 0 - \mathrm{i} \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \pi/2;; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_3) &= \frac{(1, -\mathrm{i}, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}\sqrt{1 \times 1}} \\ &= \frac{1 \times 0 + \mathrm{i} \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1 \times 1 + \mathrm{i} \times -\mathrm{i}}\sqrt{1 \times 1}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \pi/2. \end{aligned}$$

b)

$$[C][\boldsymbol{v}_i] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) + \mathrm{i}\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = (\cos(\theta) - \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i [\boldsymbol{v}_i];$$

Continue a solução no verso ⟹

$$[C][\boldsymbol{v}_{ii}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) - \mathrm{i}\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta)) \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_{ii}[\boldsymbol{v}_{ii}];$$

$$[C][\boldsymbol{v}_{iii}] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_{iii}[\boldsymbol{v}_{iii}] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] A força produzida pela hélice de um navio, F, depende da frequência n de rotação, do diâmetro D da hélice, da velocidade V do navio, da aceleração da gravidade g, da massa específica da água ρ e da viscosidade cinemática da água ν. As dimensões fundamentais deste problema são M, L e T.

a) [10] *Utilizando-as nesta ordem*: 1ª linha para M, 2ª linha para L e 3ª linha para T; ordem das colunas F, n, D, V, g, ρ, ν, obtenha a matriz dimensional do problema. Nota: $[\![\nu]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$.

b) [15] Escreva de forma matricial explícita (com todos os elementos de cada matriz a seguir) a condição

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{b}]$$

que deve ser atendida pela matriz-coluna $[\boldsymbol{x}] = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_7]^\top$ dos expoentes dos grupos adimensionais $\Pi = F^{x_1} n^{x_2} D^{x_3} \ldots \nu^{x_7}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A matriz dimensional é

	F	n	D	V	g	ρ	ν
M	1	0	0	0	0	1	0
L	1	0	1	1	1	−3	2
T	−2	−1	0	−1	−2	0	−1

b) A equação dos expoentes $x_1, \ldots, x_7$ dos grupos adimensionais do problema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Seja $[A_{ij}]_{n\times n}$ uma matriz antissimétrica,

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

e o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = A_{ij}u_j, \qquad i,j = 1,\ldots,n.$$

Calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_iu_i}{2}\right) = u_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} &= u_iA_{ij}u_j\\
&= A_{ij}u_iu_j\\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij}u_iu_j + A_{ji}u_ju_i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right)u_iu_j = 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹