TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04B, 16 set 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

NÃO ESCREVA NA CARTEIRA.

---

1 [25] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \mathrm{e}^t.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
x = uv \;\Rightarrow\; u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3uv &= \mathrm{e}^t;\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 3v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^t;\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -3v\\
\frac{dv}{v} &= -3dt\\
\ln|v| &= -3t + k_1\\
|v| &= d_1\mathrm{e}^{-3t}\\
v &= c_1\mathrm{e}^{-3t};\\
c_1\mathrm{e}^{-3t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^t,\\
c_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{e}^{4t},\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{c_1}\mathrm{e}^{4t},\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{4c_1}\mathrm{e}^{4t}\,4\mathrm{d}t,\\
u &= \frac{1}{4c_1}\mathrm{e}^{4t} + c_2;\\
x = uv &= \left[\frac{1}{4c_1}\mathrm{e}^{4t} + c_2\right]c_1\mathrm{e}^{-3t}\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{-3t} \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Encontre a solução geral de
$$x^2y'' + 3xy' + 1 = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + 3xy' &= -1,\\
w &= y',\\
x^2w' + 3xw &= -1,\\
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{x}w &= -\frac{1}{x^2},\\
w &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{x}uv &= -\frac{1}{x^2},\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{x}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{x^2}.\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{3}{x}v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{3\mathrm{d}x}{x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{3\mathrm{d}x}{x} &= 0,\\
\ln|v| + 3\ln|x| &= c_1,\\
\ln\left(|v||x|^3\right) &= c_1,\\
|v||x|^3 &= \exp(c_1) = c_2,\\
vx^3 &= \pm c_2 = v_0,\\
v(x) &= v_0x^{-3};\\
v_0x^{-3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{x^2},\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{v_0}x,\\
\mathrm{d}u &= -\frac{1}{v_0}[x\mathrm{d}x],\\
u &= -\frac{1}{v_0}\left[\frac{x^2}{2} + u_0\right];\\
w = uv &= -\frac{1}{v_0}\left[\frac{x^2}{2} + u_0\right]v_0x^{-3}\\
&= -\frac{1}{2x} - w_0x^{-3};\\
y &= \int w(x)\,\mathrm{d}x + w_1\\
&= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{w_0}{2}x^{-2} + w_1 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-\operatorname{sen}\theta}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Este é o problema 9.28 do livro-texto

Fazendo a substituição sugerida, se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} &= \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= 2\mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-\operatorname{sen}\theta} &= \oint_C \frac{1}{2-\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\ &= \oint_C \frac{-2\mathrm{d}z}{z^2-4\mathrm{i}z-1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = (2-\sqrt{3})\mathrm{i}$ e $z_2 = (2+\sqrt{3})\mathrm{i}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}c_{-1} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\frac{-2}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\frac{-2}{z_1-z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Encontre a solução geral de

$$5x^2y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

com o método de Frobenius.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}.
\end{aligned}$$

Os 4 termos da EDO são

$$\begin{aligned}
5x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r},\\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r},\\
x^2y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1},\\
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}.
\end{aligned}$$

Combinando todos os termos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[5(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Faça

$$\begin{aligned}
m &= n+1,\\
n &= m-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[5(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+r-1) a_{m-1} x^{m+r} &= 0,\\
5(r-1)r + r - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[5(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r} &= 0,\\
5r^2 - 4r - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[5(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n + (n+r-1) a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

Obviamente, a equação indicial é

$$\begin{aligned}
5r^2 - 4r - 1 &= 0,\\
r_1 &= 1,\\
r_2 &= -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

As raízes são distintas e sua diferença *não* é um número inteiro. Estamos no caso 1 do Teorema de Frobenius.
$r = 1$:

$$\begin{aligned}
\left[5(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1\right] a_n + (n+r-1) a_{n-1} &= 0,\\
\left[5(n)(n+1) + (n+1) - 1\right] a_n + (n) a_{n-1} &= 0,\\
\left[5n(n+1) + n\right] a_n + n a_{n-1} &= 0,\\
\left[5n^2 + 6n\right] a_n + n a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{n}{5n^2+6n} a_{n-1}\\
&= -\frac{1}{5n+6} a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

A 1ª solução é

$$y_1(x) = x - \frac{1}{11}x^2 + \frac{1}{176}x^3 - \frac{1}{3696}x^4 + \frac{1}{96096}x^5 - \dots$$

$r = -1/5$:

$$\begin{aligned}
[5(n-1/5-1)(n-1/5) + (n-1/5) - 1]\,a_n + (n-1/5-1)a_{n-1} &= 0, \\
\left[5n^2 - 6n\right] a_n + [n - 6/5]\,a_{n-1} &= 0, \\
a_n &= -\frac{n-6/5}{5n^2-6n}a_{n-1} \\
&= -\frac{1}{5}\frac{5n-6}{n(5n-6)}a_{n-1} \\
&= -\frac{1}{5n}a_{n-1}; \;\Rightarrow \\
a_n &= \frac{a_0}{5^n n!},
\end{aligned}$$

A 2ª solução é

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{-1/5}\left[1 - \frac{x}{5} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{5}\right)^3 + \dots\right] \\
&= x^{-1/5}\mathrm{e}^{-x/5}.
\end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$