TT009 Matemática Aplicada I
P11, 25 Jul 2003
Prof. Nelson Luís Dias
NOME: ALUNO(A) PERFEITO(A) Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

1 [10,0] Obedecendo às definições,

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx,\\
f(x) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}\,dk,
\end{aligned}
$$

se $f(x) = e^{-|x|}$, calcule $\widehat{f}(k)$. Sugestão: ao calcular $\widehat{f}(k)$, use o fato de que $f(x)$ é par, e use a fórmula de Euler para separar a parte real da parte imaginária de e^{ikx}; uma das integrais resultantes, então, se anulará; **prossiga**, calculando a integral restante.

SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\left(\cos kx - ik\operatorname{sen} kx\right)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos kx\,dx - i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\operatorname{sen} kx\,dx}_{=0} = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos kx\,dx.
\end{aligned}
$$

Para calcular esta última integral, uso *novamente* a fórmula de Euler: note que

$$
\Re\left\{\int_0^{\infty} e^{-x}e^{ikx}\,dx\right\} = \int_0^{\infty} e^{-x}\cos kx\,dx
$$

($\Re$ significa a parte real). A integral complexa é mais fácil!

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-x}e^{ikx}\,dx &= \int_0^{\infty} e^{(ik-1)x}\,dx\\
&= \frac{1}{(ik-1)}\int_0^{\infty} e^{(ik-1)x}(ik-1)\,dx\\
&= \frac{1}{(ik-1)}e^{(ik-1)x}\Big|_0^{\infty}\\
&= -\frac{1}{(ik-1)} = \frac{1+ik}{1+k^2}.
\end{aligned}
$$

Como desejamos duas vezes a parte real,

$$
\widehat{f}(k) = \frac{2}{1+k^2}.
$$

ATENÇÃO: Muitos de vocês tentaram integrar

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cos kx\,dx
$$

por partes. Mas isto é **impossível**, pois a função $e^{-|x|}$ não é diferenciável em $x = 0$ (desenhe seu gráfico para confirmar isto). Portato, era imprescindível usar a simetria do integrando, passar para $2\int_0^{\infty}$, e, *para* $0 \le x \le \infty$, usar $e^{-|x|} = e^{-x}$.