TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

7

NOME: ALUNO GENÉRICO Assinatura: ______________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m}U\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
1 - n = 3, \tag{1}
$$

$$
2 - 2m = 3, \tag{2}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
v = \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, \tag{3}
$$

$$
\xi = \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. \tag{4}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2\nu\widehat{u}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\ &= \widehat{u} * \widehat{v}\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\}\mathrm{d}\kappa\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

6

NOME: GEOVANA THAIS COLOMBO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m} U \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
1 - n = 3, \tag{5}
$$

$$
2 - 2m = 3, \tag{6}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
v = \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, \tag{7}
$$

$$
\xi = \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. \tag{8}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2\nu\widehat{u}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\ &= \widehat{u} * \widehat{v}\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\} \mathrm{d}\kappa\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\, \mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\, \mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\, \mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

5

NOME: KELLY KATHLEEN ALMEIDA HEYLMANN Assinatura: ____________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m} U \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
\begin{aligned}
1 - n &= 3, && (9)\\
2 - 2m &= 3, && (10)
\end{aligned}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, && (11)\\
\xi &= \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. && (12)
\end{aligned}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\
\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2 \nu \widehat{u}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\
&= \widehat{u} * \widehat{v}\\
&= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\}\mathrm{d}\kappa\\
&= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa\\
&= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

4

NOME: LARISSA CARRÉRA BAGINSKI Assinatura: ____________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m}U\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
1 - n = 3, \tag{13}
$$

$$
2 - 2m = 3, \tag{14}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
v = \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, \tag{15}
$$

$$
\xi = \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. \tag{16}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \mathrm{i}^2k^2\nu\widehat{u};$$

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} = -k^2\nu\widehat{u}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right] \\
&= \widehat{u} * \widehat{v} \\
&= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\} \mathrm{d}\kappa \\
&= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa \\
&= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

3

NOME: PAOLA CRISTINE HUNGERBUHLER Assinatura: ______________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.$$

Aplicando as transformações acima,

$$\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m}U\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$1 - n = 3, \tag{17}$$

$$2 - 2m = 3, \tag{18}$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$v = \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, \tag{19}$$

$$\xi = \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. \tag{20}$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2 \nu \widehat{u}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\ &= \widehat{u} * \widehat{v}\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\}\mathrm{d}\kappa\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

2

NOME: RODRIGO BRANCO RODAKOVISKI Assinatura: ______________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m}U\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
\begin{aligned}
1 - n &= 3, && (21)\\
2 - 2m &= 3, && (22)
\end{aligned}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, && (23)\\
\xi &= \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. && (24)
\end{aligned}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2\nu\widehat{u}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\ &= \widehat{u} * \widehat{v}\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\}\,\mathrm{d}\kappa\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 05 abr 2017
Prof. Nelson Luís Dias

1

NOME: MAUREN MARQUES Assinatura: ____________________

---

1 [50] Considere a seguinte abordagem relativamente geral para o método da transformação de similaridade. Dada uma equação diferencial cuja incógnita é $u(x,t)$, tentamos as seguintes transformações

$$
\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
x &= \lambda^m X,\\
t &= \lambda^n T.
\end{aligned}
$$

A substituição deve levar a uma equação diferencial cuja incógnita é $U(X,T)$ "similar" à equação original. Por exemplo, considere a equação diferencial parcial não-linear

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3.
$$

Aplicando as transformações acima,

$$
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} = \lambda^{2-2m} U \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} - \lambda^3 U^3.
$$

Para que essa equação seja similar à original, devemos ter

$$
1 - n = 3, \tag{25}
$$

$$
2 - 2m = 3, \tag{26}
$$

e portanto $m = -1/2$, $n = -2$, e $n = 4m$. Em termos de λ, temos

$$
\lambda = \frac{u}{U} = \left[\frac{x}{X}\right]^{1/m} = \left[\frac{t}{T}\right]^{1/n}.
$$

Podemos escolher duas variáveis de similaridade:

$$
v = \frac{u}{t^{1/n}} = \frac{U}{T^{1/2n}}, \tag{27}
$$

$$
\xi = \frac{x}{t^{m/n}} = \frac{X}{T^{m/n}}. \tag{28}
$$

Prevemos portanto que a solução de similaridade será do tipo

$$
\frac{u}{t^{-1/2}} = f\left(\frac{x}{t^{1/4}}\right).
$$

Agora obtenha a EDO, cuja incógnita é $f(\xi)$, correspondente à EDP original (em $u(x,t)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
-\frac{1}{2}f - \frac{\xi}{4}f' = ff'' - f^3.
$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Calcule a transformada de Fourier da equação de Burger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Para o cálculo da transformada do termo não-linear $u\frac{\partial u}{\partial x}$, utilize o Teorema da convolução da transformada inversa de Fourier:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u}(k) * \widehat{v}(k)\right\} = u(x)v(x).$$

com $v = \frac{\partial u}{\partial x}$. **OBSERVE QUE A TRANSFORMADA É NO PAR** $u(x,t) \leftrightarrow \widehat{u}(k,t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}^2 k^2 \nu \widehat{u};\\ \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathscr{F}\left\{uv\right\} &= -k^2 \nu \widehat{u}.\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{uv\right\} &= \mathscr{F}\left[\mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{u} * \widehat{v}\right\}\right]\\ &= \widehat{u} * \widehat{v}\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u(\kappa,t)}{\partial x}\right\} \mathrm{d}\kappa\\ &= \int_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \widehat{u}(k-\kappa,t) \times \mathrm{i}\kappa\widehat{u}\,\mathrm{d}\kappa\\ &= \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \mathrm{i}\int_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \kappa\widehat{u}(k-\kappa,t)\widehat{u}(\kappa,t)\,\mathrm{d}\kappa + k^2\nu\widehat{u} = 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹