

# TEA018 Hidrologia Ambiental – Notas de aula

Nelson Luís Dias

Prof. Titular, Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR

22 de julho de 2020

# Capítulo 1

## Introdução e Processos Hidrológicos

### 1.1 Introdução e aplicações

A água é a substância mais abundante na Terra.

A Hidrologia trata da água nos estados sólido, líquido e gasoso.

Aplicações de Hidrologia:

- Projeto e operação de estruturas hidráulicas.
- Abastecimento de Água.
- Tratamento e destino de esgotos.
- Irrigação.
- Drenagem.
- Geração de energia hidrelétrica.
- Controle de cheias.
- Navegação fluvial.
- Controle de erosão.
- Estabilidade de encostas.
- Controle de salinização de solos.
- Controle de poluição hídrica.
- Usos recreativos.
- Proteção da fauna e da flora.

### Uma definição mais precisa

Hidrologia é o estudo do ciclo hidrológico nas áreas continentais.

Tanto a variabilidade natural quanto as atividades humanas afetam os diversos fluxos do ciclo hidrológico e a qualidade da água.

Praticamente *todas* as atividades humanas impactam o ambiente, e o ciclo hidrológico, direta ou indiretamente. Exemplos:

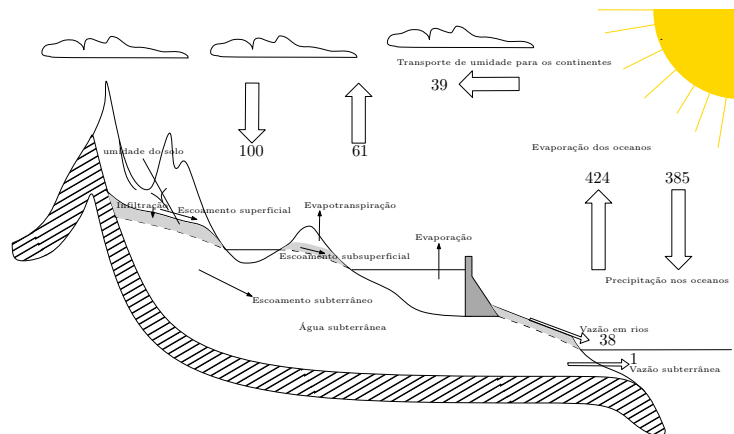


Figura 1.1: O ciclo hidrológico (adaptado de [Chow et al. \(1988\)](#)).

- Agricultura em geral:
  - Aragem do solo.
  - Irrigação.
  - Adubação.
- Desmatamento.
- Exploração de águas superficiais.
- Exploração de águas subterrâneas.
- Construção de represas.
- Lançamento de esgoto *in natura* ou tratado em rios, lagos e no oceano.
- Urbanização.
- ...

O ciclo hidrológico merece a figura 1.1 de [Chow et al. \(1988\)](#).

Aqui aparece pela primeira vez o termo *Runoff* que às vezes é sinônimo de *overland flow* (escoamento superficial) e às vezes é sinônimo de *streamflow* (vazão em uma seção de rio).

Meu conselho: evite *runoff*; diga com outras palavras e use outros símbolos. De todo modo, *runoff* significa o escoamento para fora de algum compartimento (uma gleba de solo no caso de uma visão mais local e “agronômica”, ou a bacia como um todo no caso de uma visão “hidrológica”).

Note também, na figura 1.2, a distinção entre leçol (e poço) freático e artesianos.

Como podemos ver na figura 1.1, são elementos do ciclo hidrológico nos continentes:

- Precipitação (chuva + neve + granizo)

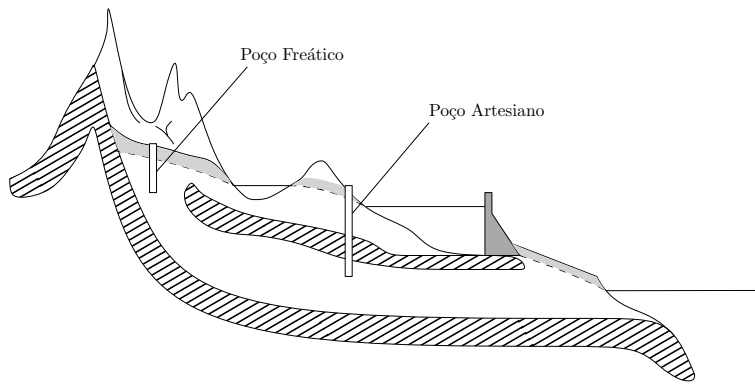


Figura 1.2: Poços freático e artesianos.

Tabela 1.1: Distribuição da água no planeta.

Região	Quantidade (%)
Oceanos	96.5
Água subterrânea	0.73 (doce)
Água subterrânea	0.96 (salgada)
Umidade do solo	0.0012
Calotas polares	1.7
Lagos	0.007 (doce)
Lagos	0.006 (salgada)
Pântanos	0.0008
Rios	0.0002
Seres vivos	0.0001
Atmosfera	0.001

- Evapotranspiração:
  - Evaporação
  - Evapotranspiração
- Infiltração
- Escoamento superficial (*overland flow*)
- Escoamento subsuperficial
- Escoamento subterrâneo Os três elementos podem contribuir para a formação da *vazão* na seção exutória de uma bacia hidrográfica.

As quantidades de água nas diversas regiões do planeta estão mostradas na tabela 1.1

## 1.2 Estimativas de $P$ , $Q$ e $E$

Algumas vezes,  $P$ ,  $E$  e  $Q$  são denominados *fases* do ciclo hidrológico.

Considere o balanço hídrico de uma bacia hidrográfica,

$$\frac{dS}{dt} = P - E - Q,$$

e integre:

$$\begin{aligned}\int_{t_i}^{t_f} \frac{dS}{dt} dt &= \int_{t_i}^{t_f} P dt - \int_{t_i}^{t_f} E dt - \int_{t_i}^{t_f} Q dt; \\ \langle P \rangle &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} P dt; \\ S_f - S_i &= [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t, \\ \frac{S_f - S_i}{\Delta t} &= [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t.\end{aligned}$$

Agora, se  $\Delta t$  é *muito grande*, e se  $S(t)$  é *estacionário*,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{S_f - S_i}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \langle P \rangle = \langle E \rangle + \langle Q \rangle.$$

Muitas vezes encontra-se isso escrito simplesmente como

$$P = E + Q.$$

Portanto, cuidado com a notação: o significado das variáveis vai depender do contexto, e você deve ser capaz de compreender esse significado justamente *pelo contexto*.

Além disso, existem várias *dimensões* possíveis para  $P$ ,  $E$ , e  $Q$ . Em princípio, devemos ter

$$[P] = [E] = [Q] = \text{M L}^{-2} \text{T}^{-1}$$

(um fluxo de massa por unidade de área em um ponto específico da bacia hidrográfica) ou

$$[P] = [E] = [Q] = \text{M T}^{-1}$$

(um fluxo de massa sobre toda a superfície horizontal da bacia).

Por exemplo, no SI suponha  $P$  inicialmente em  $\text{kg s}^{-1}$  (indicando um fluxo de massa sobre toda a área da bacia). Se  $\rho$  é a densidade da água e se a supusermos constante,

$$\frac{\text{kg s}^{-1}}{\text{kg m}^{-3}} \Rightarrow P \text{ em } \text{m}^3 \text{s}^{-1}.$$

Se dividirmos agora pela área superficial sobre a qual o fluxo ocorre,

$$\frac{\text{m}^3 \text{s}^{-1}}{\text{m}^2} \Rightarrow P \text{ em } \text{m s}^{-1}.$$

Alternativamente, encontra-se  $P$  em  $\text{mm dia}^{-1}$ ,  $\text{mm mês}^{-1}$ ,  $\text{mm ano}^{-1}$ .

Algumas vezes, reporta-se a integral

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{P(t)}{\rho A} dt$$

em m ou em mm.

Em resumo, as dimensões e as unidades e o *significado* dos símbolos dependem do *contexto*, e você deve estar atento a elas.

Finalmente,  $P$ ,  $E$  e  $Q$  são fluxos entre “compartimentos” (volumes de controle). Por exemplo,  $P$  e  $E$  são fluxos entre a atmosfera e as superfícies continentais,  $Q$  é um fluxo através de uma seção de rio, etc..

Para entender a relação entre os fluxos e o armazenamento entre e em diversos compartimentos, é preciso ter uma sólida base em Mecânica dos Fluidos e em Matemática (Análise, Métodos Numéricos, Estatística, ...).

Em resumo, a Hidrologia é uma ciência multidisciplinar e que engloba desde aspectos muito teóricos até outros muito aplicados.

**Tempo de residência** Considere um balanço de massa simples e em seguida regime permanente:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= F_i - F_o, \\ \frac{dM}{dt} &= 0 \Rightarrow F_i = F_o = F.\end{aligned}$$

O tempo de residência do compartimento cuja massa é  $M$  é

$$T_r = \frac{M}{F}.$$

Quais são as dimensões de  $F$ ?

### 1.3 O conceito de sistemas — ou escalas!

**Classificação de modelos** O problema de “classificar” um modelo é enorme, porque em geral a classificação “não fecha”, e um mesmo modelo acaba recebendo duas ou mais classificações. De todo modo, as categorias mais comuns são:

- Modelos físicos  $\times$  empíricos.
- Modelos concentrados  $\times$  distribuídos.
- Modelos determinísticos  $\times$  estocásticos.

Algumas vezes é fácil “classificar” um modelo, e outras não. Considere

$$Q = ciA \quad \text{ou} \quad Q = cP,$$

que é a “fórmula racional”. Ela é racional porque  $Q$  e  $iA$ , ou  $Q$  e  $P$ , têm as mesmas dimensões físicas ( $i$ , em  $\text{mm h}^{-1}$  ou  $\text{mm dia}^{-1}$  é a intensidade de precipitação. A distinção entre  $i$  e  $P$  é cinzenta. Historicamente,  $P$  era reservado para “altura acumulada de chuva”, em mm).

A fórmula racional é “empírica”, e  $c$  tem que ser descoberto, adivinhado, ou calibrado, para cada bacia. Por outro lado, a Equação de Saint-Venant,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f,$$

é um model “físico” porque se baseia no princípio de conservação de quantidade de movimento. Ainda assim,  $S_f$  depende de uma relação empírica ou semi-empírica (em geral, a fórmula de Manning).

Modelos concentrados em geral fazem um balanço sobre todo um volume de controle. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= I(t) - O(t), \\ O(t) &= aS^b, \\ \frac{dS}{dt} + aS^b &= I(t).\end{aligned}$$

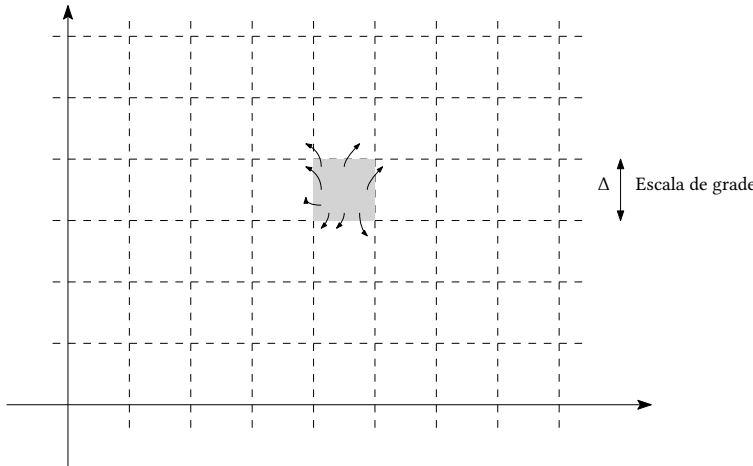
*Classifique a equação diferencial acima.*

Muitas vezes, o modelo concentrado é alimentado por uma equação empírica ou semi-empírica do tipo  $O = aS^b$ , etc..

Modelos distribuídos são muitas vezes implementados em grades 1D, 2D ou 3D. A *resolução* do modelo é o tamanho da grade.

Mesmo em um modelo distribuído com base fortemente física, entretanto, o que acontece em escalas abaixo da escala da grade [digamos,  $\Delta x$ ] precisa ainda ser *parametrizado*. A parametrização:

- Em geral depende da escala da grade  $\Delta x$ .
- Envolve algum nível de empirismo.



Por exemplo, a equação constitutiva para um fluido Newtoniano,

$$\begin{aligned}T_{ij} &= -P\delta_{ij} + \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}, \\ s_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),\end{aligned}$$

expressa as tensões  $T_{ij}$  em um *continuum* em termos da pressão termodinâmica  $p$ , da taxa de deformação  $s$ , e de dois coeficientes de viscosidade,  $\mu$  e  $\lambda$ , que parametrizam o efeito das interações moleculares na escala do contínuo (a microescala de Kolmogorov).

Um modelo estocástico abre mão da física e de parametrizações físicas para estimar probabilidades de ocorrência. Um exemplo extremo é o modelo de Gumbel para a vazão  $x_T$  com período de retorno  $T$ :

$$\begin{aligned}y_T &= -\ln \left[ \ln \left( \frac{T}{T-1} \right) \right], \\ x_T &= u + \alpha y_T,\end{aligned}$$

onde  $u$  e  $\alpha$  são os parâmetros da distribuição Gumbel.

O argumento altamente sensato de Brutsaert (1986, 1998) é que faz mais sentido identificar as escalas que estão sendo resolvidas explicitamente e aquelas cujo resultado agregado precisa ser parametrizado. A partir daí, nós procuramos identificar quais são as parametrizações de subgrade necessárias (ou explicitar sua utilização).

## 1.4 História

Chow et al. (1988) fazem um bom resumo do desenvolvimento histórico da hidrologia. O conceito de ciclo hidrológico começou a ser compreendido qualitativamente já na antiguidade. No entanto, somente na Idade Moderna *medições* começaram o difícil processo de quantificar seus componentes e demonstrar experimentalmente a sua validade.

Outro ponto importante é que a Mecânica dos Fluidos só começou a produzir resultados úteis em Engenharia a partir de meados do século XIX (Darrigol, 2005). Com isso, a Hidrologia tem se desenvolvido a reboque dos avanços científicos em Mecânica dos Fluidos.

Até hoje, Hidráulica e Hidrologia carregam a tradição em empirismo (na acepção de tentativas não-informadas, ou mal-informadas, pela ciência) e soluções *ad-hoc* e só lentamente têm evoluído na direção de soluções de Engenharia com fundamentos racionais nas ciências exatas e da natureza.



## Capítulo 2

# As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia

### 2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds

Propriedades extensivas  $\Rightarrow$  valem para um corpo como um todo (*in bulk*).

Propriedades intensivas  $\Rightarrow$  valem cada ponto do contínuo.

Elas vêm aos pares, sendo definidas por

$$N = \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV,$$

onde

$N$  É a propriedade extensiva, válida para o corpo que ocupa a região  $\mathcal{C}$  (às vezes diremos: para o corpo  $\mathcal{C}$ , ou para a região material  $\mathcal{C}$ ).

$\rho$  É a massa específica ou densidade do fluido.

$\eta$  É a propriedade intensiva (por unidade de massa) associada.

O Teorema do Transporte de Reynolds talvez seja mais importante do que sua dedução; portanto, vamos enunciá-lo primeiro:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA.$$

A utilidade do Teorema do Transporte de Reynolds vem do fato de que:

a)  $\frac{D}{Dt}$  é a derivada material.

b)  $\frac{DN}{Dt}$  é a taxa de variação da grandeza  $N$  pertinente ao corpo  $\mathcal{C}$ .

#### Leis da física

Massa

$$\frac{DM}{Dt} = 0.$$

Momentum

$$\frac{DP}{Dt} = F \quad (2^{\text{a}} \text{ lei de Newton})$$

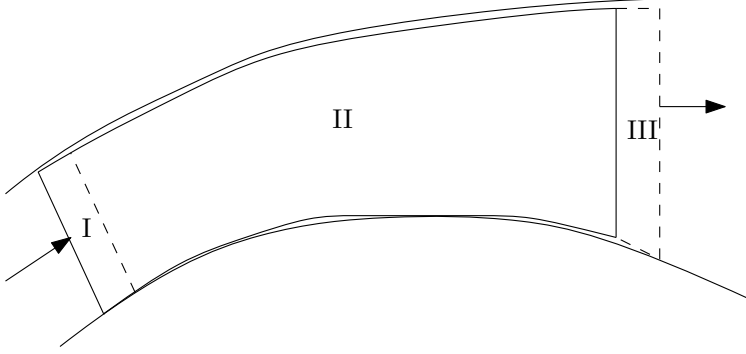
## Energia

$$\frac{D(\mathcal{U} + \mathcal{E}_c)}{Dt} = \dot{W} + \dot{Q},$$

onde  $\mathcal{U}$  é a energia interna do corpo, e  $\mathcal{E}_c$  é a sua energia cinética.

Isso permite *matematizar* as leis de conservação para um meio contínuo.

Uma dedução muito básica do teorema é a seguinte:



$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \\ N(t) &= \int_{I+II} \eta \rho \, dV, \\ N(t + \Delta t) &= \int_{II+III} \eta \rho \, dV. \end{aligned}$$

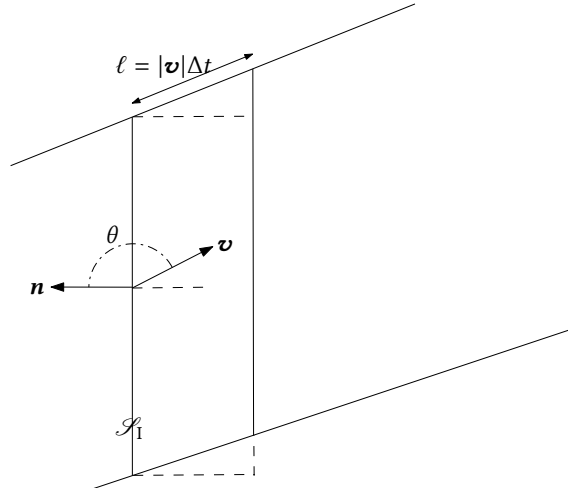
Portanto temos

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[ \int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t) + \left[ \int_{III} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[ \int_I \eta \rho \, dV \right] (t) \right\}.$$

As integrais sobre  $II(t + \Delta t)$  e  $II(t)$  formam uma derivada parcial em relação ao tempo usual:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \int_{II} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[ \int_{II} \eta \rho \, dV \right]}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV.$$

Vamos olhar agora para a região I:



Em toda a fronteira de I com o exterior,  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) < 0$ . Além disso, para  $\Delta t$  “pequeno”,  $\ell = |\mathbf{v}|\Delta t$  é pequeno. O volume de I é aproximadamente dado por

$$V_I = - \int_{\mathcal{S}_I} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \Delta t \, dA \quad \Rightarrow$$

$$- \left[ \int_I \eta \rho \, dV \right] (t) = \left[ \int_{\mathcal{S}_I} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t,$$

e portanto

$$N_I = \left[ \int_{\mathcal{S}_I} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t,$$

ou

$$- \left[ \int_I \eta \rho \, dV \right] (t) = + \left[ \int_{\mathcal{S}_I} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t.$$

Analogamente,

$$+ \left[ \int_{\text{III}} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) = + \left[ \int_{\mathcal{S}_{\text{III}}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \right] \Delta t.$$

Note que a superfície  $\mathcal{S}$  é formada por

$\mathcal{S}_I$  onde  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) < 0$ ;

$\mathcal{S}_{\text{III}}$  onde  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) > 0$ ;

$\mathcal{S}_0$  onde  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0$ .

Logo,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[ \int_{\text{III}} \eta \rho \, dV \right] (t + \Delta t) - \left[ \int_I \eta \rho \, dV \right] (t) \right\} = \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA,$$

e isso conclui o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{DN}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \eta \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \eta \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \quad \blacksquare$$

## 2.2 A equação da continuidade

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA.$$

A equação da continuidade é a melhor forma de introduzir o Teorema da Divergência para a obtenção das equações diferenciais de Mecânica dos Fluidos:

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}) \, dA = \int_{\mathcal{C}} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \, dV,$$

onde

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

para o *campo vetorial*  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ . Logo

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV + \int_{\mathcal{C}} \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] \, dV;$$

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] \right] \, dV.$$

A equação acima tem que ser válida para uma região material  $\mathcal{C}$  *arbitrária*; logo,

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]$$

## 2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos

Nas microescalas de Kolmogorov

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \rho \mathbf{g} + \nabla (-p + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \mathbf{v})) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u \right) = \rho c_p v \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissip visc}}$$

### As equações promediadas de Reynolds

(Para uma densidade  $\rho_0$  de referência, e escoamento solenoidal ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ))

Médias “de conjunto” (ou sobre um grande número de realizações  $k$  do escoamento):

$$\bar{a} \equiv \sum_{k=1}^N a(k).$$

Essa ideia vai voltar muitas vezes neste curso, quando nós discutirmos métodos estatísticos e Hidrologia Estocástica.

A decomposição de Reynolds:

$$a(\mathbf{x}, t; k) = \bar{a}(\mathbf{x}, t) + a'(\mathbf{x}, t; k).$$

As médias de Reynolds são determinísticas; as flutuações são (modeladas como) aleatórias.

As equações promediadas de Reynolds:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \underbrace{\nabla \cdot [\bar{\mathbf{v}}' c']}_{\text{Vet Reynolds}} = D \nabla^2 \bar{c},$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \underbrace{\nabla \cdot [\bar{\mathbf{v}}' \mathbf{v}']}_{\text{Tensor Reynolds}} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}$$

Para a temperatura, o termo  $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$  em geral não pode ser desprezado!!! Em muitos casos, usamos (com muitas aproximações) uma equação análoga à de difusão-advecção:

$$\rho_0 c_p \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{T} + \nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'T'}] \right) \approx \rho c_p \alpha \nabla^2 \bar{T} + \bar{\Phi}$$

A maioria (mas não todos) dos escoamentos de nosso interesse em Hidrologia são turbulentos. Uma exceção são alguns escoamentos no solo. Uma característica importante das equações “de ordem 1” de Reynolds, que listamos acima, é que os termos difusivos e de dissipação são pequenos em relação aos demais em cada equação, respectivamente:

$$D \nabla^2 \bar{c}, \quad \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}, \quad \rho c_p \alpha \nabla^2 \bar{T}, \quad \bar{\Phi}.$$

Por exemplo,

$$D \nabla^2 \bar{c} \ll \nabla \cdot [\overline{\mathbf{v}'c'}].$$

Isso *não significa* que os efeitos moleculares podem ser simplesmente esquecidos, porque eles se revelam importantes nas equações de Reynolds *de ordem 2*. A equação para a energia cinética da turbulência (ECT, ou TKE em Inglês) foi obtida originalmente pelo próprio Reynolds ([Reynolds, 1895](#)):

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{v'_i v'_i}; \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \bar{v}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j} &= \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \overline{v'_3 p'}}_B - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \overline{v'_i v'_j}}_P \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho_0} \overline{v'_j p'} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{v'_i v'_i v'_j} - 2\nu \sum_{i=1}^3 \overline{u'_i s'_{ij}} \right) - \underbrace{2\nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{s'_{ij} s'_{ij}}}_{\epsilon \equiv \Phi / \rho_0}. \end{aligned}$$

Em condições de “equilíbrio”,

$$\frac{D \bar{e}}{Dt} \approx 0 \approx P + B - \epsilon.$$

A “difusividade turbulenta” é uma analogia ruim:

$$\begin{aligned} q_z &= -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial z}; \\ \overline{w'T'} &= -K_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Aqui,  $\llbracket K_T \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket = \text{L}^2 \text{T}^{-1}$ . Ao contrário da *difusividade molecular* para o calor,  $\alpha$ , a *difusividade turbulenta*  $K_T$  *depende do escoamento*. Modelos universais para a previsão de difusividades turbulentas são muito mais

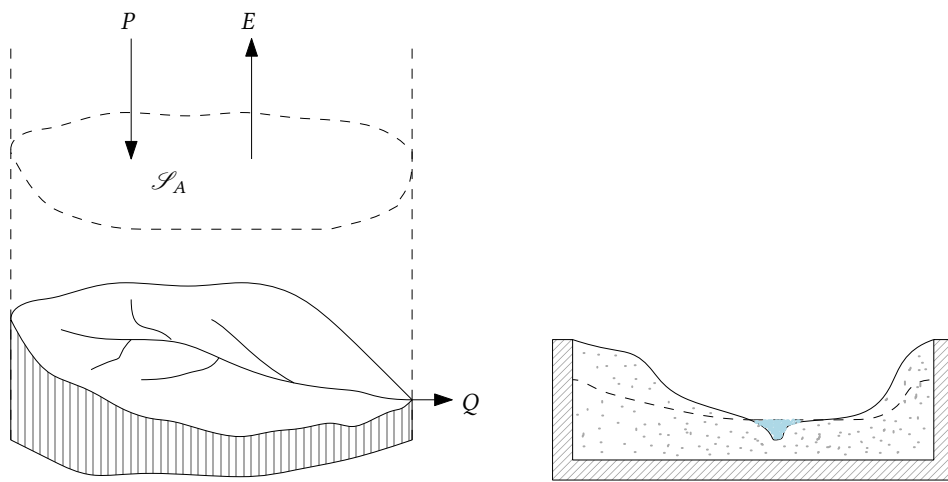
a exceção do que a regra. Não há consenso de que essa abordagem um dia possa “resolver” o problema da turbulência (mesmo indo para ordens superiores a 2); na verdade, provavelmente a maioria dos pesquisadores hoje em dia pensa que isso não é possível.

No entanto, na falta de coisa melhor, a abordagem é muitas vezes útil em Engenharia, e nós a encontraremos (ou variações sobre o tema) muitas vezes neste curso.

## 2.4 Aplicações em Hidrologia

### O balanço hídrico de uma bacia hidrográfica

Faça  $\mathcal{C}$  = bacia hidrográfica até a camada impermeável e até os divisores de água, e um pouco acima da superfície da bacia.



Nossa hipótese será de que só existe fluxo de massa:

- através da superfície superior,
- na seção exutória da bacia.

Note que isso nem sempre será verdade!

O fluxo de água líquida através da superfície superior é

$$\dot{M}_P = \int_{\mathcal{S}_A} \rho_w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = \rho_w \int_{\mathcal{S}_A} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA < 0.$$

As unidades de  $\dot{M}_P$  são

$$\{\dot{M}_P\} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \text{kg s}^{-1}.$$

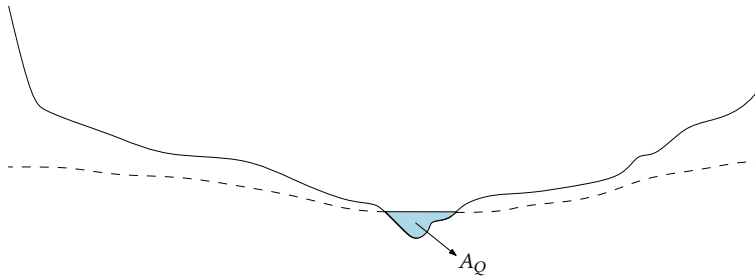
Nesta seção vamos definir tudo em termos de *fluxos específicos* (por unidade de área horizontal):

$$\dot{M}_P = \int_{\mathcal{S}_A} \rho_w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA \equiv -PA < 0,$$

$$\dot{M}_E = \int_{\mathcal{S}_A} \rho_v (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA \equiv EA > 0,$$

$$\dot{M}_Q = \int_{\mathcal{S}_Q} \rho_w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA \equiv QA > 0.$$

Estritamente falando, estamos desprezando a difusão molecular e “fazendo as contas” alguns metros acima da superfície da bacia hidrográfica sobre uma superfície horizontal plana  $\mathcal{S}_A$  cuja área é  $A$ . Acima,  $\rho_w$  é a massa específica da água líquida. Na integral de  $\dot{M}_E$ ,  $\rho_v$  é a massa específica do *vapor d’água*. Note também que a última integral acima é sobre a seção do rio  $\mathcal{S}_Q$ , cuja área  $A_Q$  é muito menor do que a área horizontal  $A$  da bacia. Mesmo assim, nós estamos definindo (*nesta seção*)  $Q$  como uma vazão mássica *específica*, por unidade de área horizontal da bacia.



Dentro de  $\mathcal{C}$  ( $\equiv$  bacia hidrográfica) a água é armazenada dentro de plantas e animais, na região vadosa (zona não-saturada do solo) e na região saturada do solo (água subterrânea). Nós vamos desprezar o armazenamento em plantas e animais.

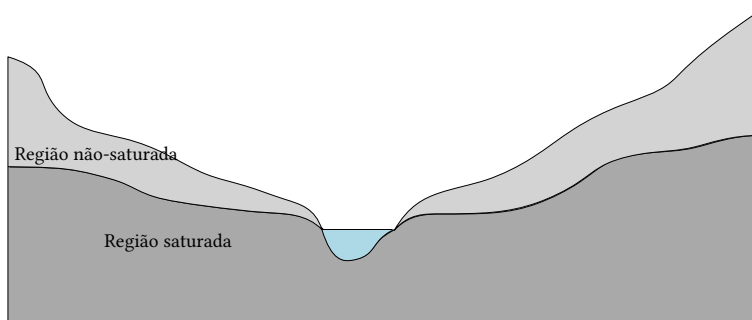
Até agora,

$$\oint_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = [-P + E + Q] A,$$

restando o termo transiente

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho dV$$

que contabiliza a água no solo.



Agora,

$$M = M_s + M_n = \int_{\mathcal{C}} \rho dV.$$

Defina

$$M \equiv SA,$$

$$M_s \equiv S_s A,$$

$$M_n \equiv S_n A;$$

então,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV &= \frac{\partial}{\partial t} [M_s + M_n] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [(S_s + S_n)A] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} [AS] \\
 &= A \frac{dS}{dt}.
 \end{aligned}$$

A equação de balanço é

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA \\
 0 &= A \frac{dS}{dt} + A[-P + E + Q]; \\
 \frac{dS}{dt} &= P - E - Q,
 \end{aligned}$$

como já vimos anteriormente. Lembre-se:

$$\begin{aligned}
 \{P\} &= \{E\} = \{Q\} = \text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}; \\
 \{S\} &= \text{kg m}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Na prática, quando chove  $P \gg E$ , e quando não chove  $E \gg P$  (pelo menos enquanto a bacia não fica muito seca), mas a equação de balanço hídrico em geral envolve uma *média temporal*, de forma que *na média* ambos os termos são importantes. De fato, se  $P$ ,  $E$  e  $Q$  são valores *instantâneos* para a bacia como um todo,

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= P - E - Q, \\
 \int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} \, d\tau &= \int_t^{t+\Delta t} [P - E - Q] \, d\tau.
 \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P(\tau) \, d\tau \Rightarrow \\
 \int_t^{t+\Delta t} P(\tau) \, d\tau &= \langle P \rangle \Delta t,
 \end{aligned}$$

de tal maneira que  $\langle P \rangle$  significa a *média temporal* de  $P$  ao longo de  $\Delta t$ . Fazendo o mesmo para  $E$  e  $Q$ ,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} \, d\tau = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle] \Delta t.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

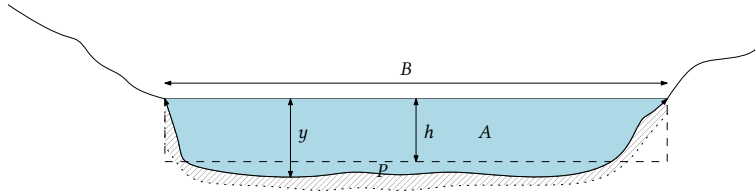
$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{d\tau} \, d\tau &= \int_t^{t+\Delta t} dS = S(t + \Delta t) - S(t); \Rightarrow \\
 \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} &= \langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle.
 \end{aligned}$$

Note que  $\langle P \rangle$  e  $\langle Q \rangle$  são medidos(estimados) com *razoável* facilidade e *acurácia*. Porém, a medição(estimação) de  $S_n$ ,  $S_s$  e  $E$  é *muito* difícil.



## 2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente

Algumas definições:



$B$	Largura
$A$	Área molhada
$P$	Perímetro molhado
$y$	Profundidade do escoamento
$h$	Profundidade média do escoamento
$R$	Raio hidráulico

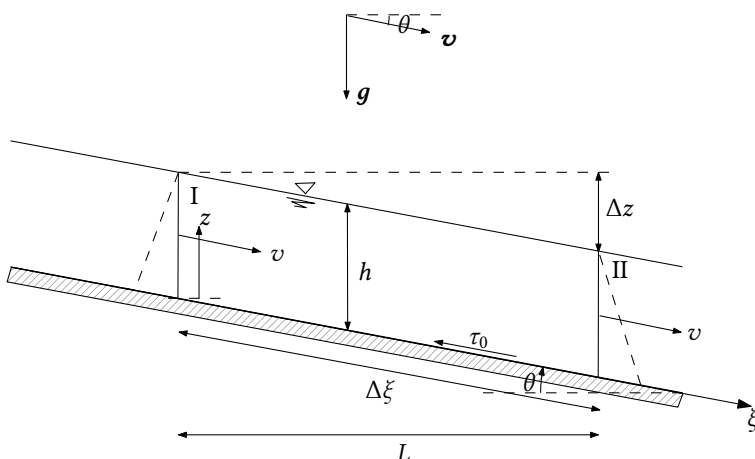
Temos:

$$h = \frac{A}{B},$$

$$R = \frac{A}{P}.$$

Muitas vezes  $B \gg h$ , e a seção é assimilada a um retângulo de dimensões  $B \times h$ .

Em escoamento uniforme, a linha d'água é paralela à linha do fundo.



A equação de balanço de massa agora resume-se a

$$Q = v \cos \theta A$$

**Atenção!**  $Q$  mudou de significado, e agora é uma vazão volumétrica!

Parta do Teor. Transp. Reynolds e chegue em  $Q = v \cos \theta A$

A equação de balanço de quantidade de movimento é

$$F_{b\xi} + F_{c\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} v_{\xi} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

O escoamento é permanente:

$$F_{b\xi} + F_{c\xi} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} v_{\xi} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

O escoamento é uniforme e as velocidades são iguais nas seções de entrada e saída do trecho (o que muda?)

$$F_{b\xi} + F_{c\xi} = \oint_{\mathcal{S}} v_{\xi} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA$$

$$(\rho g A L) \sin \theta - \tau_0 P \Delta \xi = 0.$$

Existe portanto um equilíbrio entre o peso e o atrito do fundo sobre a água no trecho.

$$L = \Delta \xi \cos \theta;$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos \theta \approx 1; \sin \theta \approx \tan \theta;$$

$$\rho g A \Delta \xi \cos \theta \sin \theta = \tau_0 P \Delta \xi,$$

$$\rho g A \Delta \xi \tan \theta = \tau_0 P \Delta \xi,$$

$$g \frac{A}{P} \tan \theta = \frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\tan \theta = S_0$$

$$\tau_0 = \rho g A S_0$$

$$\tau_0 / \rho \equiv v_*^2:$$

$$g R S_0 = v_*^2$$

$$v^2 = \left( \frac{v}{v_*} \right)^2 g R S_0$$

$$v = \frac{v}{v_*} \sqrt{g R S_0},$$

$$v = C \sqrt{g R S_0} \quad (\text{Equação de Chézy})$$

Atenção para as simplificações! Isso foi obtido para uma velocidade  $v$  relativamente mal especificada (nós multiplicamos os dois lados da equação por  $v^2$ !), e supostamente igual à velocidade média na seção.

Note que se a área da seção for medida na vertical, a afirmativa de [Chow et al. \(1988, p. 33\)](#),

The weight of fluid in the control volume is  $\gamma AL$  ( $L$  é o nosso  $\delta \xi$ )

está estritamente errada, mas para ângulos pequenos, como vimos acima, o resultado final é na prática o mesmo.

A equação de balanço de energia é

$$\dot{\mathcal{W}} + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA,$$

$$e = u + \frac{v^2}{2}.$$

Passo a passo:

$$\dot{\mathcal{W}} = \int_{\mathcal{C}} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \, dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) \, dA;$$

Primeiramente, a integral de volume:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \, dV &= \int_{\mathcal{C}} \rho g v \sin \theta \, dV \\ &= \rho g v \sin \theta \int_{\mathcal{C}} dV \\ &= \rho g v \sin \theta L B h. \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \tan \theta = S_0, \\ L \tan \theta &= \Delta z, \\ B h &= A, \\ v A &= Q, \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) \, dV = \rho g Q \Delta z.$$

Em seguida, a integral de superfície:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &\approx -p \mathbf{n} \Rightarrow \\ \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) \, dA &= \oint_{\mathcal{S}} (-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA. \end{aligned}$$

Mas  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \neq 0$  apenas ao longo das superfícies I e II:

$$\oint_{\mathcal{S}} (-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA = \int_I (-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA + \int_{II} (-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \, dA.$$

Ao longo da superfície I (fazendo  $z = 0$  no fundo),

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) &= -v \cos \theta; \\ p(z) &= p_{\text{atm}} + \rho g (h - z). \end{aligned}$$

Ao longo da superfície II (fazendo  $z = 0$  no fundo),

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) &= +v \cos \theta; \\ p(z) &= p_{\text{atm}} + \rho g (h - z). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_I (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_{z=0}^h +v \cos \theta [p_{\text{atm}} + \rho g(h-z)] B dz \\ &= +v \cos \theta \left[ p_{\text{atm}} B h + \frac{1}{2} \rho g B h^2 \right]; \\ \int_{II} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_{z=0}^h -v \cos \theta [p_{\text{atm}} + \rho g(h-z)] B dz \\ &= -v \cos \theta \left[ p_{\text{atm}} B h + \frac{1}{2} \rho g B h^2 \right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA = 0.$$

Juntando tudo até agora,

$$\dot{\mathcal{W}} = \rho g Q \Delta z.$$

A equação de balanço de energia fica:

$$\rho g Q \Delta z + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA.$$

Suponha agora, por simplicidade, que as energias internas específicas são uniformes em cada uma das seções I e II. Temos

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dA &= \int_I \left( u_1 + \frac{v^2}{2} \right) \rho (-v \cos \theta) dA \\ &\quad + \int_{II} \left( u_2 + \frac{v^2}{2} \right) \rho (+v \cos \theta) dA \\ &= -\rho v \cos \theta \left( u_1 + \frac{v^2}{2} \right) B h + \rho v \cos \theta \left( u_2 + \frac{v^2}{2} \right) B h \\ &= \rho v \cos \theta B h (u_2 - u_1) \\ &= \rho Q (u_2 - u_1).\end{aligned}$$

É importante explicar fisicamente que  $\dot{Q} < 0$ . Para explicitar isso, façamos

$$\rho g Q \Delta z - |\dot{Q}| = \rho Q (u_2 - u_1).$$

Mas a perda de carga é *por definição* a energia mecânica (em unidades de comprimento) convertida em interna e (também) exportada para fora de  $\mathcal{C}$  como fluxo de calor:

$$\rho g Q h_f \equiv |\dot{Q}| + \rho Q (u_2 - u_1)$$

Portanto,

$$h_f = \Delta z.$$

Em resumo, quando o escoamento é permanente, a variação do nível d'água é igual à perda de carga.

## 2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga

### O perfil log

Um dos maiores desafios em Mecânica dos Fluidos foi o desenvolvimento de métodos *racionais* para o cálculo da perda de carga em escoamentos turbulentos. A história da Mecânica dos Fluidos vale um ou mais livros à parte: veja por exemplo [Darrigol \(2005\)](#). No caso de escoamentos laminares, relações entre velocidade média na seção e perda de carga podem ser obtidas diretamente a partir de soluções das equações de Navier-Stokes.

Por exemplo, para um escoamento sob pressão em um duto retangular de largura infinita e altura  $2\delta$ , o perfil de velocidade é parabólico, e dado por

$$u(z) = \frac{gS_f}{2\nu} z(2\delta - z),$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\nu$  é a viscosidade cinemática, e  $z = 0$  na parede inferior, e

$$S_f = -\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx}$$

é a perda de carga unitária, calculada em função do gradiente de pressão na tubulação. A integração da equação acima entre  $z = 0$  e  $z = 2\delta$  produz a relação para a perda de carga:

$$\begin{aligned} v &= \int_{z=0}^{2\delta} u(z) dz \\ &= \frac{gS_f \delta^2}{3\nu}; \Rightarrow \\ q &= 2\delta v = \frac{2gS_f \delta^3}{3\nu}. \end{aligned}$$

A importância dessa equação é enorme: se quisermos projetar uma tubulação para a vazão  $q$  (por unidade de largura), podemos resolver a equação para  $S_f$ , e consequentemente calcular a pressão necessária na tubulação para produzir a vazão desejada.

Em escoamentos turbulentos, não é possível deduzir analiticamente uma equação para o perfil de velocidade na seção, mas uma série de argumentos relativamente sofisticados e parcialmente baseados nas equações de conservação leva ao perfil log de velocidade de von Kármán ([Tennekes e Lumley, 1972](#); [Pope, 2000](#)):

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right),$$

onde  $z_0$  é a rugosidade para a quantidade de movimento, e  $\kappa = 0.4$  é a constante de von Kármán. Note que nós já encontramos a velocidade de atrito  $v_*$  antes; em um canal,

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

onde  $S_f$  é a perda de carga. Em escoamento permanente e uniforme, nós sabemos que  $S_f = h_f/L = S_0$ , onde  $S_0$  é a declividade do fundo.

Uma abordagem racional agora pode ser obtida, facilmente, para relacionar a vazão média no canal com a perda de carga. A velocidade média na seção é

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{h} \int_{z=0}^h \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) dz \\ v &\approx \frac{1}{h} \int_{z=z_0}^h \frac{v_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) dz \\ &= \frac{v_*}{\kappa} \left[ \frac{z_0}{h} + \left( \ln \left( \frac{h}{z_0} \right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Essa equação já basta, mas para vermos as coisas com mais clareza, considere o seguinte: em uma seção retangular bem larga, o raio hidráulico é praticamente igual à altura do escoamento:

$$\begin{aligned} R &= \frac{A}{P} \\ &= \frac{Bh}{2h + B} \\ &= \frac{h}{2\frac{h}{B} + 1} \\ &\approx h, \quad h \ll B. \end{aligned}$$

Façamos agora

$$\begin{aligned} v_* &= \sqrt{ghS_f}, \\ v &= \frac{\sqrt{ghS_f}}{\kappa} \left[ \frac{z_0}{h} + \left( \ln \left( \frac{h}{z_0} \right) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

como  $h \approx R$ , isso pode ser escrito também em termos de  $R$ :

$$v = \frac{\sqrt{gRS_f}}{\kappa} \left[ \frac{z_0}{R} + \left( \ln \left( \frac{R}{z_0} \right) - 1 \right) \right].$$

Incidentalmente, isso mostra que o coeficiente de Chézy não é constante, mas sim

$$C = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{z_0}{R} + \left( \ln \left( \frac{R}{z_0} \right) - 1 \right) \right].$$

Agora, dada a geometria da seção e a perda de carga unitária  $S_f$  (igual a  $S_0$  para escoamento permanente e uniforme), podemos calcular a velocidade média, e vice-versa: dada uma certa geometria e uma velocidade média *desejada* (no caso de projeto de canais artificiais, ou de intervenções de Engenharia em canais naturais), podemos determinar a declividade  $S_0$  necessária.

Note que a equação obtida é *dimensionalmente consistente*:

$$\begin{aligned} \llbracket v \rrbracket &= \text{LT}^{-1}, \\ \llbracket \sqrt{gRS_f} \rrbracket &= \llbracket [\text{LT}^{-2} \text{L } 1]^{1/2} \rrbracket = \text{LT}^{-1}, \\ \llbracket \kappa \rrbracket &= 1, \\ \llbracket \frac{z_0}{R} \rrbracket &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, a função log possui argumento adimensional, como dita o Teorema de Buckingham (Buckingham, 1914).

Observe que para que o cálculo seja realizado, é preciso conhecer a rugosidade  $z_0$  do “fundo”. Além disso, se a incógnita do problema for  $R$  (ou  $h$ ), ou  $S_f$ , a solução precisará ser numérica. Métodos para a obtenção de raízes de equações que não possuem solução algébrica são bem conhecidos (método da bissecção, método de Newton-Raphson, etc.) e podem ser facilmente implementados.

### 2.6.1 A fórmula de Manning

Por motivos históricos, as equações da sub-seção acima não são normalmente utilizadas para o cálculo de perdas de carga em canais e rios. Historicamente, o perfil log só surgiu no século XX, com os estudos de Ludwig Prandtl e Theodor von Kármán sobre camadas-limite turbulentas. Esses estudos foram em seguida sistematizados para o cálculo de perdas de carga em tubulações por Colebrook (1939) e Moody (1944).

Antes disso, entretanto, o engenheiro irlandês R. Manning propôs uma fórmula empírica para relacionar  $v$  e  $S_f$  em canais (Manning, 1891):

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2},$$

que em geral é denominada “Equação de Manning”. A fórmula entretanto já tinha sido obtida anteriormente por Gauckler (1867). Na fórmula acima,  $n$  é um coeficiente que deve ser obtido experimentalmente para canais com diversos tipos de revestimento. Por exemplo, Chow (1959) apresenta extensas tabelas para  $n$  em seu capítulo 5.

Um problema imediato com a equação de Gauckler-Manning é que ela aparenta ser dimensionalmente inconsistente. Do lado esquerdo,

$$[v] = \text{L T}^{-1},$$

enquanto que do lado direito,

$$\left[ R^{2/3} \right] = \text{L}^{2/3}.$$

Para que a equação seja dimensionalmente consistente, é necessário que

$$[n] = \text{L}^{-1/3} \text{T},$$

mas o significado físico que deve ser atribuído a um  $n$  com tais dimensões físicas está longe de ser óbvio.

Provavelmente, o primeiro pesquisador que propôs uma abordagem racional, ou uma “dedução”, da equação de Manning, foi Keulegan (1938). O assunto continuou a atrair interesse, entretanto, como por exemplo no trabalho de Chen (1991), e mais recentemente de Gioia e Bombardelli (2002). Aqui, nós vamos seguir mais de perto a dedução (se é que esse é um bom termo) de Chen.

A dedução baseia-se em substituir (ou *aproximar*) o perfil log por um perfil potência,

$$\frac{u(z)}{v_*} = a \left( \frac{z}{z_0} \right)^m,$$

e em seguida calcular a velocidade média na seção:

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_*}{h} \int_0^h u(z) dz \\ &= \frac{v_*}{h} \int_0^h a \left( \frac{z}{z_0} \right)^m dz \\ &= \frac{av_*}{m+1} \left( \frac{h}{z_0} \right)^m \end{aligned}$$

É importante observar que esse resultado pressupõe que a distribuição de velocidades é uniforme na direção *transversal*. Isso não é estritamente verdadeiro, e estamos fazendo uma simplificação apenas para captar a essência da relação da equação de Gauckler-Manning com o perfil log e a rugosidade  $z_0$  do fundo do canal. Note que agora tudo ficou muito simples:

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

e

$$h \approx R,$$

(para uma seção em que  $B \gg h$ ), de forma que, substituindo  $h$  por  $R$ , obtemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{a}{m+1} \left( \frac{R}{z_0} \right)^m [gRS_f]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{ag^{1/2}}{(m+1)z_0^m} \right] R^{m+1/2} S_f^{1/2}. \end{aligned}$$

Se nós compararmos essa equação com a equação de Glauckler-Manning, devemos ter  $m = 1/6$ , donde

$$v = \underbrace{\left[ \frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}} \right]}_{1/n} R^{2/3} S_f^{1/2}.$$

Note que o coeficiente de Manning agora pode ser expresso em termos de grandezas físicas e números adimensionais:

$$\frac{1}{n} = \frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}},$$

de forma que

$$\begin{aligned} \llbracket n \rrbracket &= \left[ (\text{L T}^{-2})^{1/2} \text{L}^{-1/6} \right]^{-1} \\ &= \left[ \text{L}^{1/2-1/6} \text{T}^{-1} \right]^{-1} \\ &= \text{L}^{-1/3} \text{T}^1, \end{aligned}$$

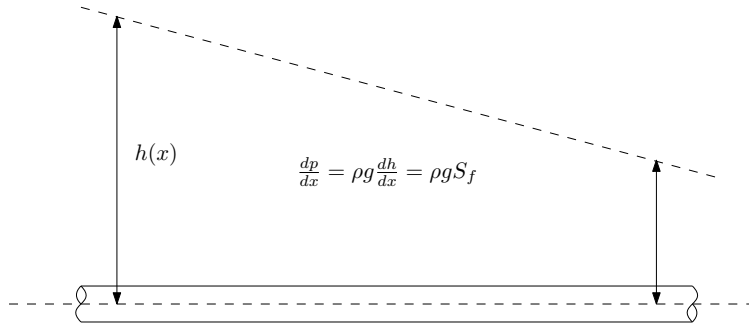
o que concorda com as dimensões de  $n$  extraídas diretamente da equação de Gauckler-Manning.



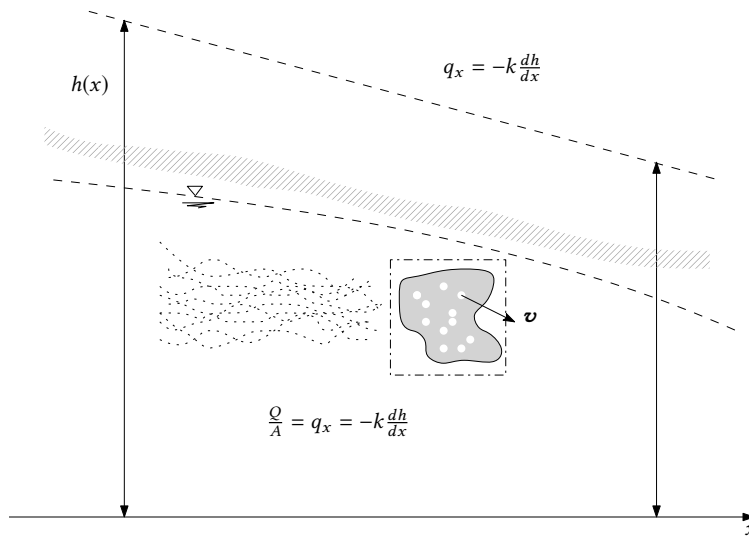
## 2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy

Em um tubo circular horizontal em escoamento laminar, a velocidade é proporcional à perda de carga:

$$v = \left( \frac{gD^2}{32\nu} \right) S_f.$$



Uma relação semelhante existe para o escoamento através dos microcanais que existem na matriz do solo; ela é a lei de Darcy:



$$q_x = \frac{Q}{A} = -k \frac{dh}{dx},$$

onde

$$h(x) = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{q_x^2}{2g}$$

é a carga hidráulica total. O último termo acima em geral é considerado desprezível.

Nota: cuidado com a “termodinâmica” de [Chow et al. \(1988\)](#), porque ela não é muito boa: há muitas imprecisões. Por exemplo, a equação (2.7.5),

$$du = c_p dT$$

está errada!

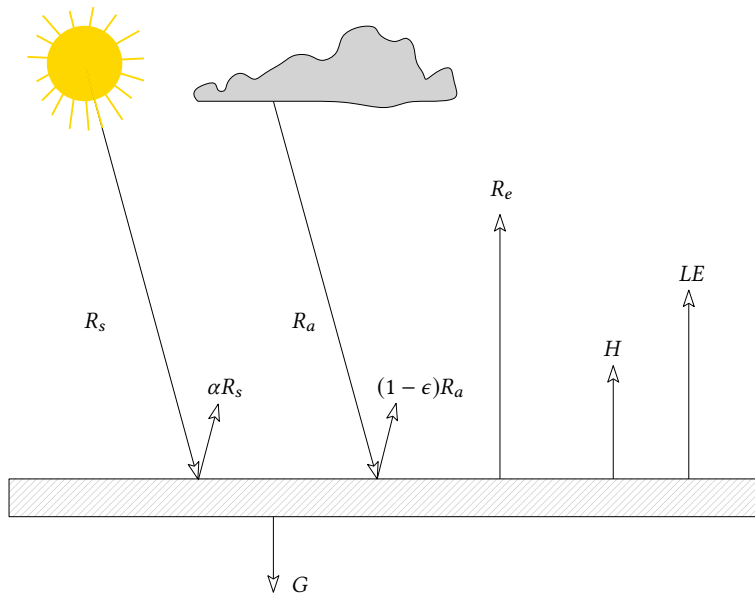
## 2.8 O balanço de radiação na superfície

A superfície da Terra recebe dois tipos de radiação:

Radiação de onda curta , na faixa  $0.2\text{--}3.0\,\mu\text{m}$ , emitida pelo sol, e transmitida através da atmosfera. Uma parte chega diretamente da direção aparente do sol (radiação solar direta) e outra chega após múltiplas revlexões (radiação solar difusa).

Radiação de onda longa , emitida pela própria atmosfera (gotas de água, vapor d'água, gases de efeito estufa, etc.) na faixa  $3.0\text{--}100.0\,\mu\text{m}$ .

O balanço de energia na superfície pode ser melhor entendido a partir da figura a seguir:



$$R_l = R_s(1 - \alpha) + \epsilon R_a - R_e,$$

$$R_e = \epsilon \sigma T_0^4,$$

$$R_l = H + LE + G.$$

Os significados dos símbolos acima são os seguintes:

$R_l$  Irradiância líquida ( $\text{W m}^{-2}$ )

$R_s$  Irradiância solar incidente ( $\text{W m}^{-2}$ )

$R_a$  Irradiância atmosférica incidente ( $\text{W m}^{-2}$ )

$R_e$  Irradiância emitida ( $\text{W m}^{-2}$ )

$H$  Fluxo de calor sensível ( $\text{W m}^{-2}$ )

$LE$  Fluxo de calor latente ( $\text{W m}^{-2}$ )

$E$	Fluxo de massa de vapor d'água ( $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ )
$L$	Calor latente de evaporação (ou vaporização) ( $\text{J kg}^{-1}$ )
$G$	Fluxo de calor no solo ( $\text{W m}^{-2}$ )
$T_0$	Temperatura da superfície (K)
$\alpha$	Albedo da superfície (1)
$\epsilon$	Emissividade/absortividade da superfície (1)
$\sigma$	é a constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

Note que nas equações acima  $\{E\} = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ;  $\{L\} = \text{J kg}^{-1}$  e que portanto

$$\begin{aligned}\{LE\} &= \text{J kg}^{-1} \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1} \\ &= \text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} = \text{W m}^{-2}.\end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Água na atmosfera

### 3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa

A lei de Stefan-Boltzmann é

$$R = \epsilon \sigma T^4,$$

onde  $R$  é a radiação *emitida* pelo corpo, e  $T$  é a sua temperatura. Para um “corpo negro”<sup>1</sup>, a emissividade  $\epsilon = 1$ . Cada superfície real possui uma emissividade  $\epsilon < 1$  diferente.

Nesta seção, vamos considerar o equilíbrio termodinâmico global planetário para dois cenários de atmosfera e cobertura de superfície do planeta. O conceito mais simples com o qual podemos trabalhar é o de *temperatura de equilíbrio*  $T_e$ : esta é a temperatura em que um planeta está em equilíbrio termodinâmico com a radiação solar incidente. Agora, se  $a$  é o albedo planetário ( $a \approx 0,30$ ), em média a radiação solar absorvida pela terra é  $R_{s0}(1-a)\pi r_T^2$ , onde  $R_{s0} = 1361.5 \text{ W m}^{-2}$  é a *constante solar*, e  $r_T$  é o raio da terra. Por outro lado, o fluxo de energia radiante em ondas longas emitida pela Terra é em média (admitindo-se uma emissividade planetária igual a 1)  $\sigma T_e^4 4\pi r_T^2$ . Igualando-se os dois:

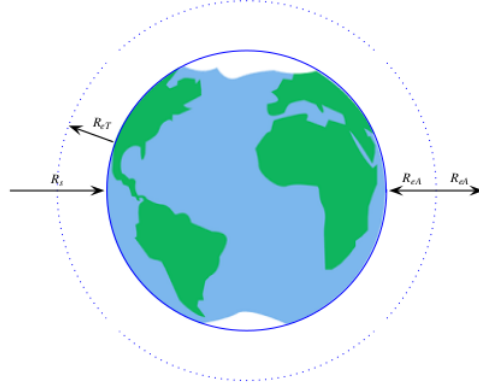
$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 &= \sigma T_e^4 4\pi r_T^2 \\ T_e &= \left[ \frac{R_{s0}(1-a)}{4\sigma} \right]^{1/4} \\ &= \left[ \frac{1361.5 \times 0.7}{4 \times 5.670374419 \times 10^{-8}} \right]^{1/4} = 254,60 \text{ K} = -18,55^\circ \text{ C}. \end{aligned}$$

Essa temperatura  $T_e$  é a temperatura que o planeta teria *se não houvesse atmosfera*.

Nós agora vamos construir 2 modelos simples para o efeito estufa. No primeiro, vamos colocar uma “campânula” de vidro em volta da Terra, como mostra a figura a seguir, onde ela é indicada pelo círculo pontilhado.

---

<sup>1</sup>Isso é um nome técnico, e não significa que o corpo precise ter coloração preta; na verdade, para as temperaturas observadas na atmosfera terrestre, a radiação é emitida em uma faixa de comprimentos de onda invisíveis para os seres humanos.



Nesta figura, a radiação solar atravessa a campânula e incide diretamente sobre a superfície da terra, a qual por sua vez emite radiação de onda longa  $R_{eT}$ . Por outro lado, a campânula (= atmosfera) absorve esta última, reemitindo um fluxo  $R_{eA}$  de radiação de onda longa tanto de volta à terra quanto em direção ao espaço. Desta forma, o balanço radiativo de ambos os corpos é

$$\begin{aligned} R_s + R_{eA} &= R_{eT}, \\ R_{eT} &= 2R_{eA}. \end{aligned}$$

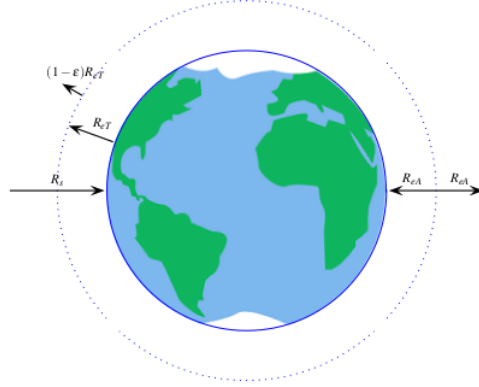
Usando-se as equações de radiação, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 + \sigma T_A^4 4\pi r_T^2 &= \sigma T_s^4 4\pi r_T^2, \\ \sigma T_s^4 4\pi r_T^2 &= 2\sigma T_A^4 4\pi r_T^2, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 4\sigma T_s^4, \\ \sigma T_s^4 &= 2\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 8\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) &= 4\sigma T_A^4 \Rightarrow T_A = T_e; \\ T_s &= 2^{1/4} T_A = 2^{1/4} \times 254.60 = 302.77 \text{ K}. \end{aligned}$$

Nota-se portanto que a temperatura da campânula, que representa a atmosfera<sup>2</sup>, é a mesma temperatura de equilíbrio anterior, enquanto que a superfície ficou bem mais quente.

Este modelo pode ser sofisticado com a abertura de uma “janela” atmosférica, ou seja: com a utilização de uma emissividade atmosférica  $\epsilon_a$  menor que 1. A figura a seguir ilustra este segundo modelo.

<sup>2</sup>Nestes caso simplificado, ela representa o *topo* da atmosfera, na “fronteira” com o espaço sideral; numa atmosfera real, obviamente, a atmosfera se torna progressivamente mais rarefeita na direção do espaço.



Agora, a atmosfera deixa escapar uma parcela  $(1 - \epsilon_a)$  da radiação emitida pela superfície da Terra. Na construção do balanço termodinâmico, é conveniente usar  $T_e$  no lugar de  $R_{s0}$ :

$$\begin{aligned} 4\pi r_T^2 [T_e^4 + \epsilon_a \sigma T_A^2] &= \sigma T_s^4 \\ 4\pi r_T^2 [\epsilon_a \sigma T_s^4] &= 2\epsilon_a \sigma T_A^4. \end{aligned}$$

Usando-se agora  $\epsilon_a = 0,9$ , a solução do sistema acima é

$$\begin{aligned} T_s^4 &= \frac{2T_e^4}{2 - \epsilon_a} \Rightarrow T_s = 295,64K \\ T_A^4 &= \frac{T_e^4}{2 - \epsilon_a} \Rightarrow T_A = 248,60K \end{aligned}$$

Isso mostra claramente que a existência de “janelas” na atmosfera terrestre produz uma temperatura de superfície *menor*. A implicação disto é que se uma “janela” for fechada pela presença de um novo gás de efeito estufa que absorve radiação de onda longa nesta janela, a superfície ficará mais quente.

[Chow et al. \(1988\)](#) citam um valor médio de  $210 \text{ W m}^{-2}$  para a radiação solar atingindo a superfície da Terra. De onde vem esse número? Provavelmente ele é igual à incidência média de radiação solar dividida pela área da superfície da terra:

$$\frac{R_{s0}(1 - a)\pi r_T^2}{4\pi r_T^2} = \frac{R_{s0}(1 - a)}{4} = 238,26 \text{ W m}^{-2}.$$

(A diferença deve ser porque [Chow et al. \(1988\)](#) provavelmente usaram valores um pouco diferentes para  $R_{s0}$  e  $a$ .)

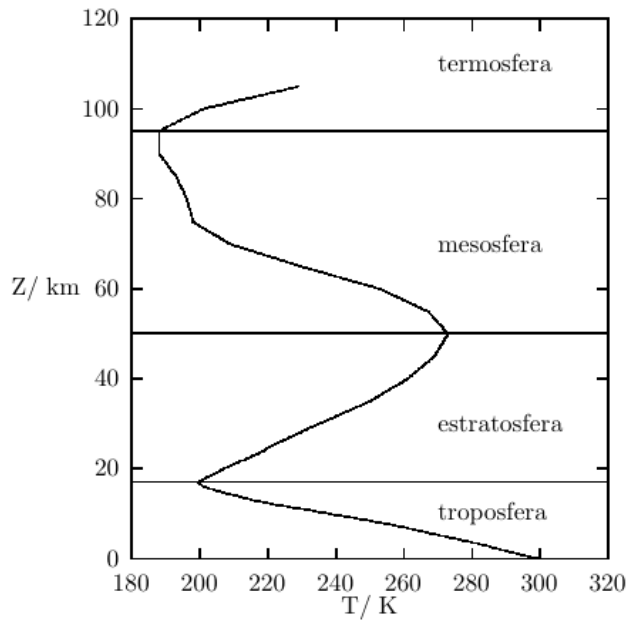
### 3.2 Circulação atmosférica

A circulação na atmosfera é forçada

1. pelo balanço radiativo do planeta;

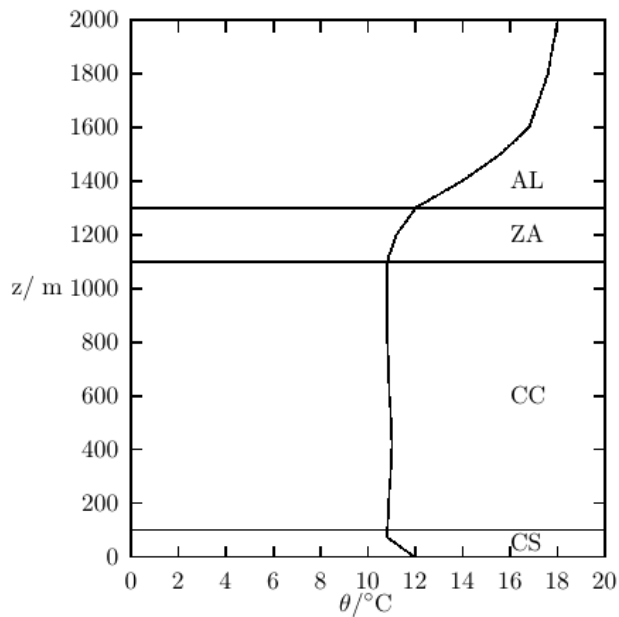
2. pela rotação da Terra;
3. pela trajetória da Terra no espaço.

As camadas da atmosfera:

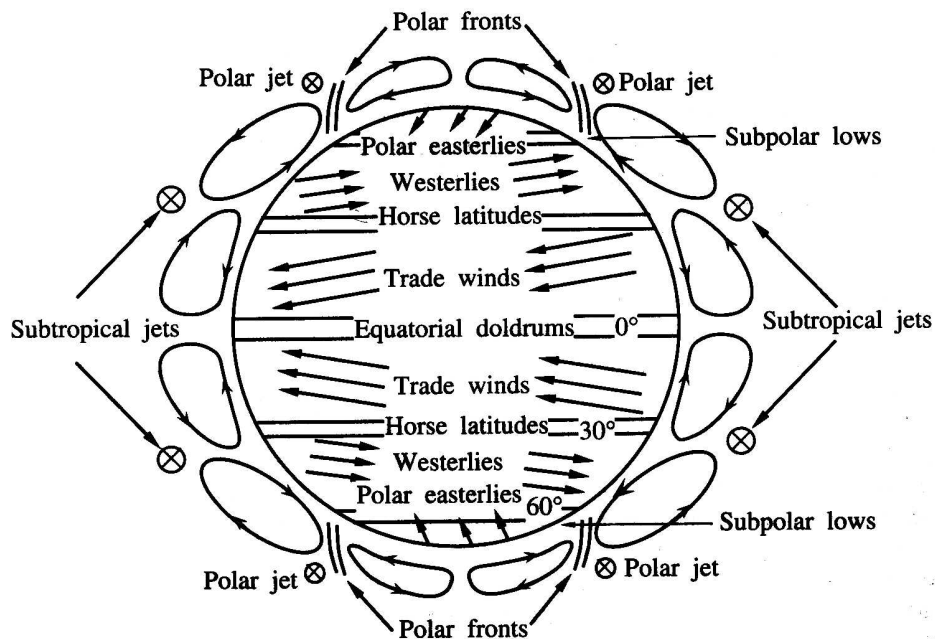


A troposfera é a camada mais densa, mais próxima da superfície, e onde ocorrem episódios significativos de convecção.

Apesar da diminuição de temperatura com a altitude, a troposfera é em sua maior parte *estável*. Uma pequena região, a camada-limite atmosférica, é instável ou neutra.



A combinação da existência de células de convecção e da rotação da terra produz os padrões globais de circulação vertical e horizontal.

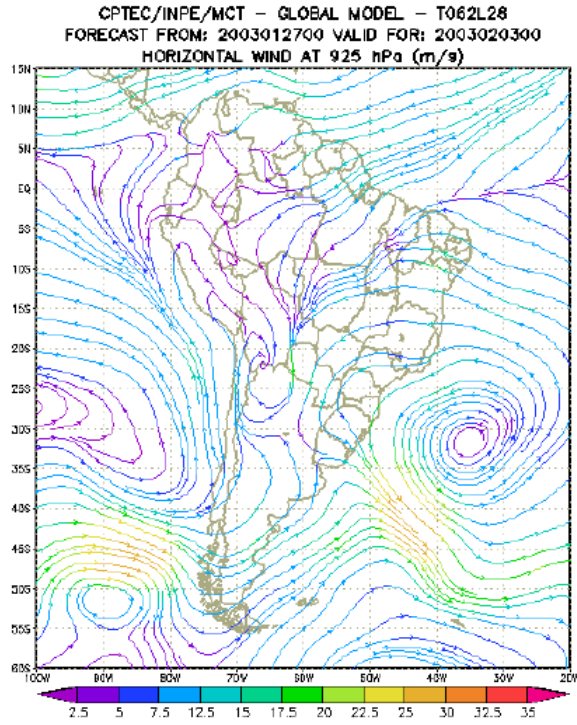


Fonte: [Seinfeld e Pandis \(1998\)](#), Figura 1.2 (sem permissão, com objetivos estritamente didáticos)

As células verticais que vemos na figura acima são: a célula tropical, a célula de latitudes médias, e a célula polar. Massas de ar frio que se originam nas regiões polares movem-se em direção às zonas temperadas e tropicais, e seu encontro com massas de ar mais quente dão origem às frentes frias.

Em tempo bom, padrões persistentes de circulação se forma em torno de anti-ciclons extratropicais, como o anti-ciclone do Atlântico Sul:





### 3.3 A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura

A lei dos gases ideais se aplica bem para condições típicas da troposfera. Para uma *substância pura*, ela é dada por

$$pV = nR^{\#}T, \quad (3.1)$$

onde  $p$  é a pressão,  $V$  é o volume ocupado pelo gás,  $n$  é o número de moles,  $R^{\#} = 8,314\,462\,618\,15\,\text{J mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}$  (no SI) é a constante universal dos gases e  $T$  é temperatura termodinâmica. Ainda para uma pura substância, (3.1) também pode ser escrita como

$$p = n \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m}{M} \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m}{V} \frac{R^{\#}}{M} T \Rightarrow$$

$$p = \rho R T. \quad (3.2)$$

Acima,  $M$  é a massa molar;  $m$  é a massa do gás, o qual está relacionado com o número de moles por

$$m = nM; \quad (3.3)$$

a constante de gás é

$$R = \frac{R^{\#}}{M}, \quad (3.4)$$

a qual depende do gás específico via  $M$  em 3.4; e

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.5)$$

é a densidade; seu inverso,

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (3.6)$$

é o *emph* volume específico  $v$ . Note-se que (3.2) é mais útil do que (??) na prática:  $V$  não aparece nele, e só envolve quantidades intensivas (pressão, densidade e temperatura), de modo que se aplica a todos os pontos na atmosfera.

$$p = p(v, T) \quad \text{or} \quad v = v(p, T) \quad \text{or} \quad T = T(p, v).$$

No caso dos gases atmosféricos, as letras minúsculas indicam específico quantidades (por unidade de massa ou unidade de volume), e são mais conveniente desde que não costumam tratar indivíduo “ sistemas ” ou “ parcelas ” de ar.

Duas funções termodinâmicas importantes são a energia interna específica  $u$  eo específica entalpia  $h$  definida por

$$h = u + pv. \quad (3.7)$$

Para uma substância pura, são funções de duas variáveis, escolhidos entre  $u, v$  e  $T$ . Nós geralmente escrever

$$u = u(v, T), \quad (3.8)$$

$$h = h(p, T), \quad (3.9)$$

uma vez que estes pares levam a definições úteis de quantidades mensuráveis, tais como calores específicos. As equações (3.8) e (3.9) levam a diferenciais perfeitos

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv + \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT, \quad (3.10)$$

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT. \quad (3.11)$$

Os calores específicos a volume constante e pressão constante são definidos por

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \quad (3.12)$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p. \quad (3.13)$$

Os subscritos  $v$  e  $p$  no lado direito das equações acima são usados em termodinâmica como lembretes de que  $u$  está sendo tomadas em função da  $v, T$ , e que  $h$  está sendo tomado como uma função de  $p, T$ .

Para um gás perfeito, a partir de (3.2) e (??), o equação de estado toma a forma

$$pv = RT, \quad (3.14)$$

onde  $R$  é uma constante de gás específica para a substância pura e é possível mostrar que, neste caso  $u$  e  $h$  são funções de  $T$  somente (Adkins, 1983). Então, (3.12)–(3.13) se tornam derivadas ordinárias. Além disso,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial T} [u + pv]\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ &= \frac{du}{dT} + p \frac{R}{p} \Rightarrow \\ c_p &= c_v + R.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Fisicamente,  $c_p > c_v$  devido à energia extra necessária para a expansão da o ar contra a pressão constante  $p$ .

### 3.4 The atmosphere as a mixture of ideal gases

A atmosfera no entanto não é uma substância pura, mas uma mistura de gases. A questão então é como (3.1) pode ser razoavelmente alargado a conta para as misturas. Na verdade, a partir de agora, muitas vezes quando nós uso uma das (3.1)–(??), estaremos nos referindo a total pressão atmosférica  $P$  (de uma mistura de gases), o densidade total de  $\rho$ , etc ..

Portanto, vamos começar, exigindo que (3.1) *valha para a mistura*; em seguida, o número total de moles,  $n$ , é a soma de o número de moles de cada componente individual. Seja  $i$  o índice para cada um dos gases em uma mistura; temos

$$n = \sum_i n_i,\tag{3.16}$$

onde  $n_i$  é o número de moles do gás  $i$ .

Queremos que a lei dos gases perfeitos para aplicar para cada constituinte, bem como, e se substituirmos (3.16) para (3.1), a questão é o que fazer com o lado esquerdo de (3.1). tem duas possibilidades: o modelo de pressões parciais, e o modelo de volumes parciais. No primeiro caso, especificamos para cada gás

$$p_i V = n_i R^\# T.\tag{3.17}$$

Neste modelo de todos os gases ocupam um volume comum  $V$ , cada um exercendo a sua própria pressão parcial  $p_i$ , de tal modo que a pressão total é

$$p = \sum_i p_i.\tag{3.18}$$

No segundo caso,

$$p V_i = n_i R^\# T,\tag{3.19}$$

e agora todos os gases são sujeitos à mesma pressão  $p$ , cada um occupying, nominalmente, um volume parcial  $V_i$ , com

$$V = \sum_i V_i.\tag{3.20}$$

Em ambos os casos, somando as equações individuais de Estado recupera a lei dos gases perfeitos para a mistura. Por exemplo, a partir de (3.17),

$$\begin{aligned}\sum_i (p_i V) &= \sum_i (n_i R^\# T), \\ \left( \sum_i p_i \right) V &= \left( \sum_i n_i \right) R^\# T, \\ pV &= nR^\# T\end{aligned}$$

(recuperando (3.1)), e de forma análoga para (3.19).

De (3.1), (3.17) e (3.19), segue-se que

$$x_i = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} \quad (3.21)$$

define uma concentração (expressa em tradicionalmente %, partes por milhão (ppm), partes por bilhão (ppb), etc.) quer em fracção de pressão parcial, fracção de volume parcial, ou *molar fracção*. A lei de gás para cada constituinte também pode ser escrita

$$\begin{aligned}p_i &= n_i \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{M_i} \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{V} \frac{R^\#}{M_i} T \Rightarrow \\ p_i &= \rho_i R_i T,\end{aligned} \quad (3.22)$$

onde (como antes para uma substância pura)

$$m_i = n_i M_i \quad (3.23)$$

e

$$\rho_i = m_i / V, \quad (3.24)$$

$$v_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad (3.25)$$

são a densidade ou a massa específica (com massa  $m_i$  ocupando o volume  $V$ ) e o volume específico, respectivamente, do gás  $i$ , e  $M_i$  é a massa molar do gás  $i$ . Em (3.22),

$$R_i = \frac{R^\#}{M_i} \quad (3.26)$$

é a constante do gás  $i$ .

Mais uma vez, (3.2) é válida para o mistura. Para ver como, note que a massa total da mistura é

$$m = \sum_i m_i; \quad (3.27)$$

e da mesma forma para a densidade total:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_i m_i}{V} = \sum_i \frac{m_i}{V} = \sum_i \rho_i. \quad (3.28)$$

Também será necessário definir a *concentração mássica* ou *fração mássica* constituinte,

$$c_i \equiv \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}. \quad (3.29)$$

Usando (3.27)–(3.28) nós somamos (3.22) para obter

$$\begin{aligned} \sum_i p_i &= \sum_i \rho_i R_i T, \\ p &= \left( \sum_i \rho_i R_i \right) T \equiv \rho R T. \end{aligned}$$

Isso *define* a constante de gás  $R$  da mistura; agora, temos

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sum_i \rho_i R_i}{\rho} \\ &= \frac{\sum_i \frac{m_i}{V} R_i}{\frac{m}{V}} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{m} R_i = \sum_i c_i R_i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto, dadas as concentrações mássicas, nós podemos calcular a constante de gás equivalente.

A massa molar média da mistura é

$$M = \sum_i x_i M_i = \frac{\sum_i n_i M_i}{n} = \frac{m}{n}, \quad (3.31)$$

o que recupera (3.3). Isso finalmente permite fechar o circuito e recuperar (3.4) para a mistura. Partindo de (3.30),

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{m} \left( \sum_i m_i R_i \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( \sum_i n_i M_i R_i \right) \\ &= \frac{1}{m} \left( \sum_i n_i R^\# \right) = \frac{1}{m} \left( \sum_i n_i \right) R^\# \\ &= \frac{n}{m} R^\# = \frac{R^\#}{M}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

devido a (3.31), o que recupera (3.4).

### Exercises

**3.1** Mostre que a soma de (3.19) sobre todos os gases de uma mistura recupera (3.1).

$$\begin{aligned} pV_i &= n_i R^\# T; \\ p \left( \sum_i V_i \right) &= \left( \sum_i n_i \right) R^\# T; \\ pV &= n R^\# T \blacksquare \end{aligned}$$

3.2 Mostre que

$$\sum_i c_i = 1.$$

### 3.5 Concentrations

Uma relação entre  $x_i$  e  $c_i$  pode agora ser facilmente obtida:

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\frac{m}{M}} = \frac{m_i}{m} \frac{M}{M_i},$$

ou

$$x_i M_i = c_i M. \quad (3.33)$$

Outras medidas de concentração também estão em uso em meteorologia, e precisam ser definidas. A razão de mistura pode ser expressa quer como uma *razão molar*,

$$\eta_i = \frac{n_i}{n - n_i}, \quad (3.34)$$

ou como uma *razão mássica*

$$r_i = \frac{m_i}{m - m_i}. \quad (3.35)$$

É simples converter frações mássicas  $c_i$  em razões (mássicas) de mistura  $r_i$  e vice-versa:

$$r_i = \frac{\rho_i}{\rho - \rho_i} = \frac{\frac{\rho_i}{\rho}}{1 - \frac{\rho_i}{\rho}};$$

$$r_i = \frac{c_i}{1 - c_i} \Rightarrow \quad (3.36)$$

$$c_i = \frac{r_i}{1 + r_i}. \quad (3.37)$$

The mixing ratio, therefore, is the ratio of the amount (either in moles or in mass) of substance  $i$  to the amount of all *other* substances. It follows that for any substance *other than* water vapor, the denominator includes the amount of water vapor present in the air at the time of measurement. For this reason, *when  $i$  is not water vapor*, (3.34)–(3.35) are often called *wet mixing ratios*.

A razão da mistura, por conseguinte, é a razão entre a quantidade (quer em moles ou em massa) da substância  $i$  para a quantidade de todas as *outras* substâncias. Segue-se que para qualquer substância *diferente* de vapor d'água, o denominador inclui a quantidade de vapor de água presente no ar no momento da medição. Por esta razão, *quando  $i$  não é vapor de água*, (??)–(ref eq: def-mass-ratio) são muitas vezes chamadas de *razões de mistura úmidas*.

We list on table 3.1 the molar fractions of several atmospheric gases in  $\text{g m}^{-3}$  in a *dry* atmosphere (a fictitious atmosphere without water vapor). The  $M_i$  values were obtained from NIST (2020). The  $x_i$  values are given in Dias (2020), and they are *approximations*, based on several existing references (Iribarne e Godson, 1981; COESA, 1976; Wallace e Hobbs, 2006;

Tabela 3.1: Constituição de uma atmosfera “seca” (não incluindo vapor d’água. Os valores são aproximados, e ajustados para assegurar que as frações molares somem 1.

Gas	$M_i$ (g mol <sup>-1</sup> )	$x_i$ (mol mol <sup>-1</sup> )
N <sub>2</sub>	28.0134	0.78078700
O <sub>2</sub>	31.9988	0.20943200
Ar	39.948	0.00934000
CO <sub>2</sub>	44.0095	0.00041390
Ne	20.1797	0.00001818
He	4.002602	0.00000524
CH <sub>4</sub>	16.0425	0.00000170
Kr	83.798	0.00000110
H <sub>2</sub>	2.01588	0.00000055
N <sub>2</sub> O	44.0128	0.00000033
sum		1.00000000

Wikipedia, 2020); the values of  $x_i$ , particularly for CO<sub>2</sub>, are updated to the most recent (as of 2020) available data. Moreover, the values have been manually adjusted to ensure that

Nós listamos na tabela 3.1 as frações molares de vários gases atmosféricos em g m<sup>-3</sup> em uma atmosfera *seca* (uma atmosfera fictícia sem vapor de água). Os valores de  $M_i$  foram obtidos a partir de NIST (2020). Os valores de  $x_i$  são de Dias (2020), e eles são *aproximações*, com base em várias referências existentes (Iribarne e Godson, 1981; COESA, 1976; Wallace e Hobbs, 2006; Wikipedia, 2020); os valores de  $x_i$ , particularmente para CO<sub>2</sub>, são atualizados com os dados disponíveis mais recentes (a partir de 2020). Além disso, os valores foram ajustados manualmente para garantir que

$$\sum_i x_i = 1. \quad (3.38)$$

Estamos agora em condições de calcular a constante do gás para *ar seco*,  $R_d$ , por meio de (3.31)–(3.32), utilizando os valores da tabela 3.1, e obtendo

$$R_d = 287.0429 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (3.39)$$

Este valor é ligeiramente menor do que o que foi adotado para a atmosfera padrão de 1976 ( $R_d = 287,0569$ ), que é compatível com a tabela I-4 de Iribarne e Godson (1981). Note entretanto que tem havido um aumento constante no CO<sub>2</sub> atmosférico desde a publicação da Atmosfera Padrão de 1976, e portanto, além de não ser muito diferente do de COESA (1976), o valor adotado aqui é provavelmente mais próximo do estado atual (2020) da atmosfera.

### Exercises

3.3 Obtenha as equações equivalentes a (3.36)–(3.37) para frações molares  $x_i$  e razões molares  $\eta_i$ .

3.4 Mostre que

$$\sum_i r_{di} = 1.$$

### 3.6 Ar úmido

Note que as equações de seção 3.3 não são estritamente válidas para o ar atmosférico, o que não é uma substância *pura*; ao contrário, é uma mistura de muitos gases. Cada nova constituinte faz com que as equações termodinâmicas fiquem mais complexas; em particular, funções de estado, tais como  $u$  e  $h$  tornam-se então também funções das concentrações de cada novo constituinte.

We will not follow the rigorous path of treating the atmosphere as a mixture of several gases and writing down the full thermodynamical equations for that mixture; instead, we will consider “dry air”, discussed in sections

Nós não vamos seguir o caminho rigoroso de tratar a atmosfera como uma mistura de vários gases e de dar o tratamento termodinâmico completo para a mistura; em vez disso, vamos considerar “ar seco”, discutido nas seções 3.4–3.5 e vamos introduzir diversos índices de umidade para a concentração de vapor d’água (que é o componente variável mais importante da atmosfera).

Consider now a certain volume  $V$ , composed of initially dry air with mass  $m_d$ , total number of moles  $n_d$ , pressure  $p_d$ , and density  $\rho_d$ , to which is added water vapor with mass  $m_v$  and  $n_v$  moles. The equations developed in section 3.4 apply for moist air. Following (3.17), each gas component exerts its own partial pressure as a function of temperature  $T$  and number of moles  $n_i$ . If water vapor is added isothermally, the total pressure after its addition will increase by *the partial pressure of water vapor*, which, from (3.17), is

Considere então um certo volume  $V$ , composto inicialmente de ar seco com massa  $m_d$ , número total de moles  $n_d$ , pressão  $p_d$ , e densidade  $\rho_d$ , ao qual se adiciona vapor d’água com massa  $m_v$  e  $n_v$  moles. As equações desenvolvidas na seção 3.4 aplicam-se para o ar úmido. De acordo com (3.17), cada componente gasoso exerce sua própria pressão parcial em função da temperatura  $T$  e do número de moles  $n_i$ . Se vapor d’água for adicionado isotermicamente, a pressão total após sua adição aumentará em um valor igual à *pressão parcial de vapor d’água* a qual, devido a (3.17), é dada por

$$e = \frac{1}{V} n_v R^\# T. \quad (3.40)$$

Estritamente falando, deveríamos ter usado  $p_v$  em lugar de  $e$  acima, mas é padrão em Meteorologia denominar a pressão parcial de vapor  $e$ , e vamos seguir essa prática.

The water vapor content of the air, however, is highly variable in the atmosphere; also, in scalar turbulent flux measurements it is often better to employ concentrations measured in (an equivalent) dry atmosphere

O conteúdo de vapor d’água no ar, entretanto, é altamente variável na atmosfera; além disso, em medições de fluxos turbulentos de escalares é frequentemente preferível utilizar concentrações medidas em uma atmosfera seca equivalente (veja, por exemplo, [Butenhoff e Khalil, 2002](#)). Portanto, nós revisitaremos diversas definições de concentração em relação aos componentes de uma atmosfera seca. Para a fração molar, nós



agora temos a pressão do ar seco, a razão volumétrica e a razão molar

$$x_{di} = \frac{p_i}{p_d} = \frac{V_i}{V_d} = \frac{n_i}{n_d} \quad (i \neq v) \quad (3.41)$$

e a fração mássica (ou concentração mássica) de ar seco,

$$c_{di} = \frac{\rho_i}{\rho_d} \quad (i \neq v). \quad (3.42)$$

Acima, observe que após a adição de vapor d'água, o volume dos constituintes do ar seco será  $V_d < V$ . Também podemos considerar as razões de mistura *secas*

$$\eta_{di} = \frac{n_i}{n_d - n_i}, \quad (i \neq v) \quad (3.43)$$

e

$$r_{di} = \frac{m_i}{m_d - m_i} \quad (i \neq v). \quad (3.44)$$

Desde que as concentrações relativas dos componentes do ar seco permaneçam as mesmas, os cálculos anteriores das propriedades do ar seco  $M_d$  e  $R_d$  (a massa molecular média e a constante de gás do ar seco, respectivamente) também permanecem inalteradas. Verifiquemos:

$$p = p_d + e, \quad (3.45)$$

onde  $p_d$  é dado por

$$p_d = \sum_{i \neq v} p_i = \sum_{i \neq v} \rho_i R_i T \equiv \rho_d R_d T. \quad (3.46)$$

Como antes, (3.46) define  $R_d$ . Portanto, o valor da constante de gás de ar seco em uma atmosfera úmida é

$$R_d = \frac{\sum_{i \neq v} \rho_i R_i}{\rho_d} = \sum_{i \neq v} \frac{\rho_i}{\rho_d} R_i = \sum_{i \neq v} c_{di} R_i, \quad (3.47)$$

onde os pesos das constantes específicas de gás  $R_i$  são agora as concentrações mássicas “secas”  $c_{di}$ . Prosseguindo,

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} m_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i M_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i R^\# = \frac{1}{m_d} \left( \sum_{i \neq v} n_i \right) R^\# \\ &= \frac{n_d}{m_d} R^\# \end{aligned} \quad (3.48)$$

Mas a massa molar média do ar seco em uma atmosfera úmida é, por definição,

$$M_d = \sum_{i \neq v} x_{di} M_i = \frac{\sum_{i \neq v} n_i M_i}{n_d} = \frac{m_d}{n_d} \quad (3.49)$$

de forma que, como antes,

$$R_d = \frac{R^\#}{M_d}. \quad (3.50)$$

Note também que se as concentrações relativas dos componentes do ar seco não mudam, então os  $x_{di}$ 's em (3.49) são os mesmos que os  $x_i$ 's na tabela 3.1, o que aprova a afirmação de que neste caso os valores de  $M_d$  e  $R_d$  não mudam.

With these results in hand, we can simplify calculations substantially by dividing air occupying  $V$  with total mass  $m$  into a dry component and water vapor, *viz.*

$$\begin{aligned} m &= m_d + m_v, \\ \frac{m}{V} &= \frac{m_d}{V} + \frac{m_v}{V}, \\ \rho &= \rho_d + \rho_v, \end{aligned} \quad (3.51)$$

where  $\rho_v$  is the water vapor density. In itself,  $\rho_v$  is an index of water vapor concentration; in meteorology, it is called *the absolute humidity*. Using (3.26) with  $M_v = 18.0153 \text{ g mol}^{-1}$ , we find that

$$R_v = 461.5230 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (3.52)$$

is the gas constant for water vapor. From (3.22), the partial pressure of water vapor is

$$e = \rho_v R_v T. \quad (3.53)$$

The *specific humidity*  $q$  is the same as the mass fraction for water vapor,  $c_v$  (see (3.29)) and is defined as

$$q = \frac{\rho_v}{\rho}. \quad (3.54)$$

Again, in meteorology it is standard to use  $q$  and not  $c_v$  (the latter is also easy to confuse with the specific heat at constant volume,  $c_v$ , and will be avoided). Summing (3.46) and (3.53), one obtains

$$\begin{aligned} p &= (\rho_d R_d + \rho_v R_v) T \\ &= \rho \left( \frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) T \\ &= \rho R_d \left( \frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T \\ &= \rho R_d \left( (1 - q) + \frac{R_v}{R_d} q \right) T. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Replacing

$$\begin{aligned} \frac{R_v}{R_d} &= 1.608 \approx 1.61 \quad \Rightarrow \\ p &= \rho R_d \underbrace{(1 + 0.61q)}_{T_v} T. \end{aligned} \quad (3.56)$$

The *virtual temperature*  $T_v$  defined above is the temperature of a dry atmosphere with the same density  $\rho$ ; it is slightly greater than  $T$ . A further index atmospheric moisture is the mixing ratio (more specifically, the mass ratio for water vapor). The mixing ratio was introduced in section 3.5; see (3.34)–(3.35). For water vapor, the (mass) mixing ratio is

$$r_v = \frac{\rho_v}{\rho_d}. \quad (3.57)$$

Useful relations for the mixing ratio and specific humidity can be derived as follows:

$$\begin{aligned} r_v &= \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{(p-e)}{R_d T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p-e} = 0.622 \frac{e}{p-e}; \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p-e}{R_d T} + \frac{e}{R_v T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p + \left(\frac{R_d}{R_v} - 1\right) e} \\ &= 0.622 \frac{e}{p - 0.378e} \approx 0.622 \frac{e}{p}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

The latent heat of evaporation of water,  $L_w$ , is the amount of energy used to change the phase of a unit of mass from liquid to vapor, in a pure mixture of the two phases. A good approximation for obtaining an expression for  $L_w$  as a function of temperature is the assumption that the heat capacities of the two phases are equal. This leads to (Adkins, 1983, Chap. 10, eq. 10.16)

$$dL_w = [c_{pv} - c_{pw}]dT \quad (3.60)$$

where  $c_{pv}$  and  $c_{pw}$  are the specific heats at constant pressure of water vapor and liquid water, respectively. If the specific heats, in turn, are assumed to be constant, we obtain

$$L_w = a_L + b_L T \quad (3.61)$$

with  $b_L = [c_{pv} - c_{pw}]$ . In the SI, with  $T$  in Kelvins, Dake (1972) gives

$$L_w = 3.142689 \times 10^6 - 2.365601 \times 10^3 T \quad (3.62)$$

in  $\text{J kg}^{-1}$ . Henderson-Sellers (1984) argues that a more accurate expression is

$$L_w = 1.91846 \times 10^6 [T/(T - 33.91)]^2. \quad (3.63)$$

A reasonable alternative is to use a constant value, given the very small variation of  $L_w$  with  $T$ . At  $T = 288.15 \text{ K}$ , (3.62) gives  $L_w = 2.464 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ .

For a system composed of water vapor and liquid water in equilibrium, an equation can be derived relating the derivative with respect to temperature of the *saturation vapor pressure*  $e^*$  (the vapor pressure of the gas in equilibrium with the liquid water) to the change in specific volume  $v$  between the two phases and the latent heat, *viz.*

$$\frac{de^*}{dT} = \frac{L_w}{T\Delta v}; \quad (3.64)$$

it is the *Clausius-Clapeyron* equation (Adkins, 1983, Chap. 10, eq. (10.11)). Assuming the validity of the perfect-gas law, and that the specific volume of the liquid phase is negligible in comparison with that of the vapor phase, the Clausius-Clapeyron equation takes the form (Adkins, 1983, Chap. 10, eq. (10.12))

$$\frac{de^*}{dT} = \frac{L_w e^*}{R_v T^2}. \quad (3.65)$$

Note that Eqs. (3.61)–(3.62) can be used to integrate (3.65), yielding

$$e^*(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{b_L}{R_v}} e^*(T_0) \exp \left[ \frac{a_L}{R_v} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right], \quad (3.66)$$

where  $T_0$  is a reference temperature. With  $b_L = 0$ , (3.66) bears a strong resemblance to (but is not the same as) Teten's empirical formula (Murray, 1966; Dilley, 1968; Stull, 1995; Alduchov e Eskridge, 1996):

$$e^*(T) = e_0 \exp \left[ \frac{b(T - T_1)}{T - T_2} \right], \quad (3.67)$$

with  $e_0 = 610.78$  Pa,  $b = 17.2693882$  K<sup>-1</sup>,  $T_1 = 273.16$  K and  $T_2 = 35.86$  K. For ice, the constants change to  $b = 21.8745584$  and  $T_2 = 7.66$ .

For most meteorological applications, Teten's formula is more than enough. Note however that the constants change for saturation vapor pressure over *ice*; also, note that the presence of salts in the water alters  $e^*$  significantly. Finally, Richards' equation (Brutsaert, 1982) is

$$e^*(T) = 101\,325 \exp \left[ 13.3185t_r - 1.9760t_r^2 - 0.6445t_r^3 - 0.1299t_r^4 \right] \quad (3.68)$$

$$\frac{de^*}{dT} = \frac{373.15}{T^2} e^*(T) \left[ 13.3185 - 3.9520t_r - 1.9335t_r^2 - 0.5996t_r^3 \right], \quad (3.69)$$

$$t_r = 1 - \frac{373.15}{T}. \quad (3.70)$$

The concept of saturation now allows for the definition of several humidity indices based on it. The *relative humidity*  $y$  is the ratio of the actual mixing ratio and the mixing ratio in water vapor saturated air at the same temperature and pressure:

$$y = \frac{r}{r^*}. \quad (3.71)$$

Note that, because it is specified at the same temperature and pressure, the density of dry air in the saturated atmosphere ( $\rho_{d*}$ ) is actually smaller

than the density of dry air in the non-saturated atmosphere ( $\rho_d$ ). The gas law equations are

$$p - e = \rho_d R_d T, \quad e = \rho_v R_v T, \quad (3.72)$$

$$p - e^* = \rho_{d*} R_d T, \quad e^* = \rho_v^* R_v T. \quad (3.73)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{r^*} = \frac{\frac{\rho_v}{\rho_d}}{\frac{\rho_v^*}{\rho_{d*}}} = \frac{\rho_{d*}}{\rho_d} \times \frac{\rho_v}{\rho_v^*} \\ &= \frac{\frac{p-e^*}{R_d T}}{\frac{p-e}{R_d T}} \times \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e^*}{R_v T}} \\ &= \frac{p-e^*}{p-e} \times \frac{e}{e^*} \\ &= \frac{p(1-e^*/p)}{p(1-e/p)} \times \frac{e}{e^*} \\ &\approx (1-e^*/p)(1+e/p) \frac{e}{e^*} \\ &\approx \frac{e}{e^*}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

The last form, (3.74), is the one commonly used in calculations, but see Problem 3.6.

The *dewpoint temperature*  $T_d$  is the temperature at which the water vapor pressure becomes the saturated vapor pressure:

$$e^*(T_d) = e. \quad (3.75)$$

Usually, temperature varies with height in the atmospheric boundary layer. A subscript like  $T_x$  or  $e_x$  will often be used to specify temperature, water vapor pressure, etc., at some specified level. Also, we will often use the simplified notation

$$e_x^* = e^*(T_x), \quad (3.76)$$

$$d_x = \frac{de^*(T_x)}{dT}, \quad (3.77)$$

$$\rho_{vx}^* = \rho_v^*(T_x). \quad (3.78)$$

In figure 3.1, we show in frame A the prevailing conditions in the atmosphere. In frame B, saturation is reached, from A, through an increase in water vapor content. In frame C, saturation conditions are also reached, but this time through a continuous drop in temperature down to the dew point temperature  $T_d$ .

### Exercises

3.5 Show that after the isothermal addition of water vapor, the partial volume of the dry constituents will be  $V_d < V$ .

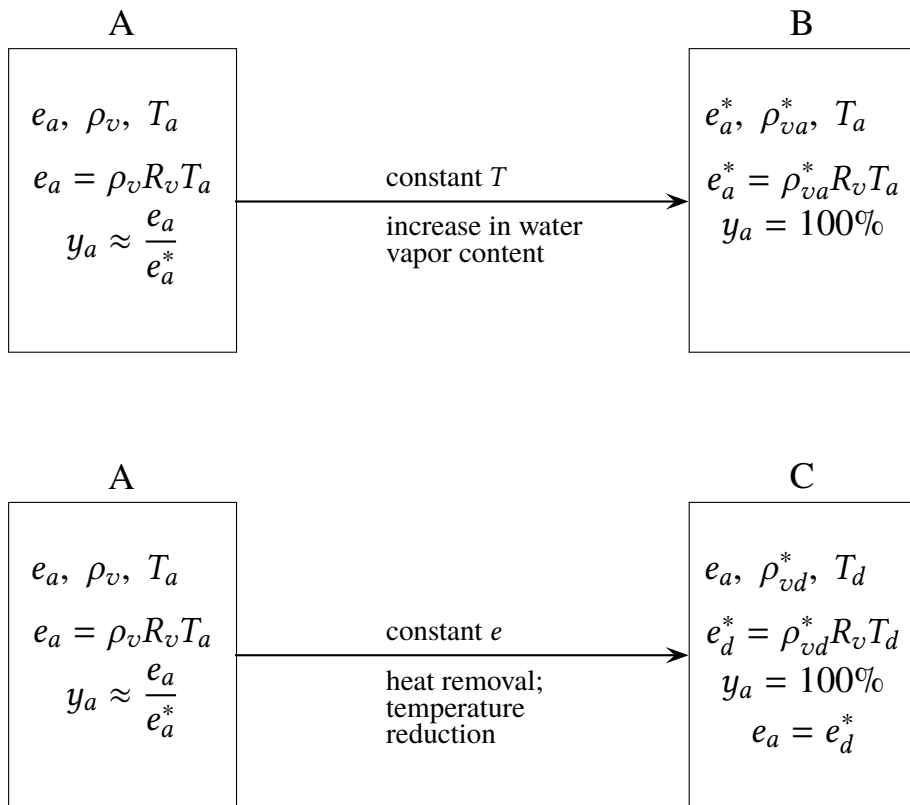


Figura 3.1: The concepts of atmospheric saturation, relative humidity and dewpoint. Adapted from [Dias \(1986\)](#).

**3.6** Show that the *exact* expression for  $e$  as a function of  $y$  also depends on  $p$  and is

$$e = \frac{ye^*}{1 + (y - 1)\frac{e^*}{p}}.$$

Of course,  $e^*$  itself is a function of temperature.

Let us now build an example moist atmosphere. We follow from section 3.6, where we assumed an initially dry atmosphere with molar fractions given by table 3.1 and total pressure  $p_d$ , to which water vapor is added isothermally, raising the total pressure by  $e$  to  $p$ , while the partial pressures of the dry components remain unaltered. We will assume a total pressure  $p = 100\,000$  Pa, an air temperature  $T = 20^\circ\text{C} = 293.15$  K, and a relative humidity  $y = 0.70$ . The exact vapor pressure (Problem 3.6) is then  $e = 1647.6712$  Pa, and  $p_d = p - e = 98\,352.3288$  Pa.

The molar fractions of the *dry components* for the moist atmosphere are now

$$x_i = \frac{p_i}{p} = \frac{p_i}{p_d} \times \frac{p_d}{p} = x_{di} \frac{p_d}{p}, \quad i \neq v, \quad (3.79)$$

where the  $x_{di}$  are the same as the  $x_i$  in a dry atmosphere from table 3.1. The molar fraction of water vapor is

$$x_v = \frac{e}{p}. \quad (3.80)$$

The densities are obtained from (3.21) and (3.22). From there, mass concentrations (or mass fractions)  $c_i$ , mixing ratios  $r_i$  and dry mixing ratios  $r_{di}$  are obtained from (3.29), (3.36) and (3.44).

The results are given in table 3.2. The table is ordered by  $x_i$ . We can see that  $\text{H}_2\text{O}$  is the third most abundant element, followed by Ar. Note the drastic progressive density reduction of the greenhouse gases  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$  and  $\text{N}_2\text{O}$ . All gases after the first four in the table are referred to as *trace gases*. Note how the molar fractions and the mass concentrations add up to 1, but not the mixing ratio and the dry mixing ratio. Also note that, except for  $\text{N}_2$  and  $\text{O}_2$ , the difference between  $c_i$ ,  $r_i$  and  $r_{di}$  is very small.

What table 3.2 reveals is that the measurement of  $\text{CO}_2$  is much more difficult than the measurement of  $\text{H}_2\text{O}$ ; similarly,  $\text{CH}_4$  measurement is harder than  $\text{CO}_2$ 's, and so on, by the simple fact that it is necessary to measure increasingly smaller concentrations. Although this is possible in controlled laboratory conditions with various types of chemical analyzers, *in situ* measurements, necessary to obtain continuous data series, are substantially more difficult. Thus, the task of measuring fluxes and performing greenhouse gas material balances is also extraordinarily hard, and one of its greatest scientific challenges is still the obtention of accurate error estimates.

### 3.7 Potential temperature

Consider the adiabatic expansion of a parcel of air, from a level (higher up) where the ambient pressure is  $p$  down to a level where the ambient

Tabela 3.2: Constitution of an example moist atmosphere.

Gas	$M_i$ (g mol <sup>-1</sup> )	$x_i$ (mol mol <sup>-1</sup> )	$\rho_i$ (kg m <sup>-3</sup> )	$c_i$ (kg kg <sup>-1</sup> )	$r_i$ (kg kg <sup>-1</sup> )	$r_{di}$ (kg kg <sup>-1</sup> )
N <sub>2</sub>	28.0134	0.76792220	0.88258991	0.74732474	2.95764908	3.08348888
O <sub>2</sub>	31.9988	0.20598125	0.27041906	0.22897480	0.29697448	0.30100013
H <sub>2</sub> O	18.0153	0.01647671	0.01217834	0.01031189	0.01041934	—
AR	39.948	0.00918611	0.01505575	0.01274832	0.01291294	0.01304924
CO <sub>2</sub>	44.0095	0.00040708	0.00073503	0.00062238	0.00062276	0.00062926
NE	20.1797	0.00001788	0.00001480	0.00001253	0.00001254	0.00001267
HE	4.002602	0.00000515	0.00000085	0.00000072	0.00000072	0.00000072
CH <sub>4</sub>	16.0425	0.00000167	0.00000110	0.00000093	0.00000093	0.00000094
Kr	83.798	0.00000108	0.00000372	0.00000315	0.00000315	0.00000318
H <sub>2</sub>	2.01588	0.00000054	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004
N <sub>2</sub> O	44.0128	0.00000032	0.00000059	0.00000050	0.00000050	0.00000050
Air	28.785494	1.00000000	1.18099919	1.00000000	—	—

pressure is  $p_0$ . The first law of thermodynamics is ( $q$  is heat per unit mass added to the system;  $w$  is work per unit mass performed on the system)

$$du = dq + dw;$$

For an adiabatic ( $dq = 0$ ) and reversible process,

$$du = -pdv \quad (3.81)$$

Differentiation of (3.14) and use of (3.12) (keeping in mind that  $u = u(T)$  for a perfect gas) produce

$$\begin{aligned} pdv + vdp &= RdT \\ c_v dT &= vdp - RdT \\ (c_v + R)dT &= vdp = \frac{RT}{p} dp \\ c_p dT &= vdp = \frac{RT}{p} dp \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p}. \quad (3.83)$$

E agora José?

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \quad (3.84)$$

The potential temperature  $\theta$ , defined above, is therefore the temperature of a parcel of air brought adiabatically and reversibly from state  $p, T$  to a reference pressure  $p_0$ .

Equation (3.84) needs to be used with the correct value of  $R/c_p$  in the case of moist air. This is because in this case the effective gas constant and the effective specific heat at constant pressure for moist air depend on the specific humidity  $q$ . To see this, suppose that the total enthalpy (not the *specific enthalpy*) for a parcel of air with total mass  $m$  can be calculated by adding the enthalpies of dry and moist air:

$$m\hat{h} = m_d\hat{h}_d + m_v\hat{h}_v.$$



This produces

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{\rho_d}{\rho} \bar{h}_d + \frac{\rho_v}{\rho} \bar{h}_v, \\ \bar{h} &= (1 - q) \bar{h}_d + q \bar{h}_v, \\ c_p &= \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial T} \right)_p = (1 - q) c_{pd} + q c_{pv} = (1 + 0.84q) c_{pd} \end{aligned} \quad (3.85)$$

(using tabulated values for  $c_{pd}$  and  $c_{pv}$ ).

On the basis of (3.56), the effective gas constant for moist air can be written as

$$R = R_d(1 + 0.61q) \quad (3.86)$$

(note that this is an alternative interpretation to (3.56): we are now changing the gas constant  $R$ , and keeping the absolute temperature  $T$ , so that 3.14 still applies.) Therefore,

$$\frac{R}{c_p} = \frac{R_d}{c_{pd}} \frac{1 + 0.61q}{1 + 0.84q}. \quad (3.87)$$

Using the identity

$$\frac{1 + ax}{1 + bx} \equiv 1 - (b - a)x + \frac{(b - a)bx^2}{1 + bx} \approx 1 - (b - a)x, \quad (3.88)$$

we find (for small  $x = q$ )

$$\frac{R}{c_p} \approx (1 - 0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}} \quad (3.89)$$

for moist air. Therefore,

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{(1-0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}}} \quad (3.90)$$

It is also straightforward to obtain the specific heat at constant volume for moist air:

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = (1 - q) c_{vd} + q c_{vv} \quad (3.91)$$

Finally, these definitions extend to virtual temperature, *but not uniquely*, as discussed by Brutsaert (1982, section 3.2b). The *virtual potential temperature* is the virtual temperature that a parcel of moist air would have if changed adiabatically from its actual state to the standard pressure  $p_0$ :

$$\theta_{vp} = T_v \left( \frac{p_0}{p} \right)^{(1-0.23q) \frac{R_d}{c_{pd}}}. \quad (3.92)$$

This is slightly different from *potential virtual temperature*, which is the potential temperature of dry air at the same initial pressure and density, and which is given by

$$\theta_{pv} = T_v \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}}. \quad (3.93)$$

The two quantities defined by (3.92) and (3.93) are, evidently, numerically very similar. From here on, we will always use the virtual potential temperature (3.92). Also, for simplicity, we will refer to it simply as  $\theta_v$ .

## Referências Bibliográficas

- Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, New York.
- Alduchov, O. A. e Eskridge, R. E. (1996). Improved Magnus form approximation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 35:601–609.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.
- Brutsaert, W. (1986). Catchment-scale evaporation and the atmospheric boundary layer. *Water Resour Res*, 22(9):39S–45S.
- Brutsaert, W. (1998). Land-surface water vapor and sensible heat flux: Spatial variability, homogeneity, and measurement scales. *Water Resour Res*, 34(10):2433–2442.
- Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.
- Butenhoff, C. L. e Khalil, M. A. K. (2002). Correction for water vapor in the measurement of atmospheric trace gases. *Chemosphere*, 47(8):823–836.
- Chen, C.-I. (1991). Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. Hydraul. Eng.*, 117(3):371–389.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- Chow, V. T., Maidment, D. R., e Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- COESA (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. Relatório técnico, U.S. Government Printing Office.
- Colebrook, C. F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws.(includes plates). *Journal of the Institution of Civil engineers*, 12(8):393–422.
- Dake, J. M. (1972). Evaporative cooling of a body of water. *Water Resources Research*, 8(4):1087–1091.
- Darrigol, O. (2005). *Worlds of Flow*. Oxford University Press, Oxford, U.K.
- Dias, N. L. (1986). Estimativas climatológicas de evaporação em lagos. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.

- Dias, N. L. (2020). O efeito do aumento de CO<sub>2</sub> atmosférico sobre a constante de gás do ar seco. *Revista Brasileira de Meteorologia* (submitted).
- Dilley, A. C. (1968). On the computer calculation of vapor pressure and specific humidity gradients from psychrometric data. *J Appl Meteorol*, 7:717–719.
- Gauckler, P. (1867). Etudes Théoriques et Pratiques sur l'Ecoulement et le Mouvement des Eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 64:818–822. This is the first occurrence of Manning's Formula.
- Gioia, G. e Bombardelli, F. A. (2002). Scaling and similarity in rough channel flows. *Physical Review Letters*, 88:DOI:10.1103/PhysRevLett.88.014501.
- Henderson-Sellers, B. (1984). A new formula for latent heat of vaporization of water as a function of temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 110(466):1186–1190.
- Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1981). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht, 2<sup>nd</sup> a edição.
- Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *J Res NBS*, 21:707–741.
- Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 20,:161–207.
- Moody, L. F. (1944). Friction factors for pipe flow. *Trans. Asme*, 66:671–684.
- Murray, F. W. (1966). On the computation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 6:203–204.
- NIST (2020). NIST Chemistry Web Book, SRD69. Available at <https://webbook.nist.gov/chemistry/mw-ser/>. Retrieved in 2020-04-10T09:05:36.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics*. John Wiley & Sons, New York.
- Stull, R. B. (1995). *Meteorology today for scientists and engineers*. West Publishing Company, Minneapolis / St. Paul.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Wallace, J. M. e Hobbs, P. V. (2006). *Atmospheric Science: an introductory survey*. Elsevier, Amsterdam, 2<sup>nd</sup> a edição.

Wikipedia (2020). Atmosphere of Earth. Available at [https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere\\_of\\_Earth](https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth). Retrieved in 2020-04-08T11:25:15.