TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 17 dez 2021
Entrega em 18 nov 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

Prova com consulta exclusivamente ao livro-texto da disciplina
Simplifique ao máximo suas soluções e inclua todos os passos relevantes.
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [30] Utilizando **obrigatoriamente** a fórmula de Euler, calcule

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$$

para $a > 0$, $b > 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\left[\cos(bx) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(bx)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left\{\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v}\\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\left\{x\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty - \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}(-a+\mathrm{i}b)\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^\infty\\
&= \frac{1}{(-a+\mathrm{i}b)^2}\\
&= \frac{1}{a^2-2\mathrm{i}ab-b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{[a^2-b^2-2\mathrm{i}ab][a^2-b^2+2\mathrm{i}ab]}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2-b^2)^2-4\mathrm{i}^2a^2b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4-2a^2b^2+b^4-4\mathrm{i}^2a^2b^2}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{a^4+2a^2b^2+b^4}\\
&= \frac{a^2-b^2+2\mathrm{i}ab}{(a^2+b^2)^2},
\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30]

a) [10] Para $|z| < 1$, encontre a série de Taylor de

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

em torno de $z = 0$.

b) [20] Utilizando o resultado de (a), encontre a série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

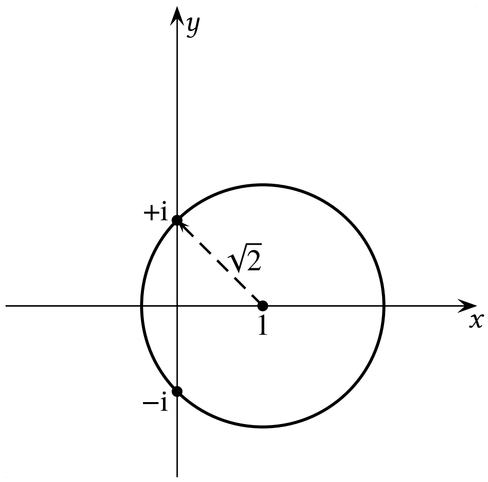
em torno de $z = 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+z)^2} &= \left[\frac{1}{1+z}\right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{(1+z)}\right]\left[\frac{1}{(1+z)}\right] \\
&= \left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right]\left[1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots\right] \\
&= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\quad + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\qquad - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&\qquad\qquad\quad + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots \\
&= 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - 6z^5 + 7z^6 - 8z^7 + \ldots
\end{aligned}$$

b) A figura a seguir mostra a região de convergência da série de Laurent desejada, centrada em $z = 1$:



Desejamos uma série em potências de $z - 1$; portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{(z - 1 + 1 - \mathrm{i})^2} \\
&= \frac{1}{\left[(1-\mathrm{i})\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}} + 1\right)\right]^2} \\
&= \frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}\left[1 - 2\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right) + 3\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^2 - 4\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^3 + 5\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^4 - 6\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^5 + 7\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^6 - 8\left(\frac{z-1}{1-\mathrm{i}}\right)^7 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Dada a EDO

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0,$$

a) [05] Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

b) [35] Utilizando o método de Frobenius, encontre duas soluções linearmente independentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) A forma normal é

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0;$$

Então

$$\begin{aligned} xp(x) &= 1 - x, \\ x^2 q(x) &= x, \end{aligned}$$

são ambas analíticas, e o ponto é singular regular.
b) Faça

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}. \end{aligned}$$

e substitua:

$$\begin{aligned} x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

Faça

$$\begin{aligned} m + r &= n + r - 1, \\ m &= n - 1, \\ n &= m + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r)(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} + \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r)(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0, \\ \sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)^2 a_{n+1}x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}[1-(n+r)]a_n x^{n+r} &= 0, \\ r^2 a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+r+1)^2 a_{n+1} + [1-(n+r)]a_n\right\} x^{n+r} &= 0. \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Faça $a_0 \neq 0$; então $r = 0$ é raiz dupla, e estamos no caso ii do Teorema 10.1 do livro-texto. A primeira solução pode ser obtida a partir de

$$
\begin{aligned}
(n + r + 1)^2 a_{n+1} + [1 - (n + r)]a_n &= 0, \\
r &= 0, \\
a_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2} a_n,
\end{aligned}
$$

Fazendo $a_0 = 1$ sem perda de generalidade, encontramos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= -1, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 0, \\
&\vdots \\
a_n &= 0, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Portanto, a 1ª solução é

$$
y_1(x) = 1 - x.
$$

A 2ª solução é da forma

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad \Rightarrow \\
y_2'(x) &= \frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\
y_2''(x) &= -\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2}
\end{aligned}
$$

Substituindo na equação diferencial ordinária,

$$
x\left[-\frac{y_1}{x^2} + \frac{y_1'}{x} + \frac{y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2}\right] + (1-x)\left[\frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}\right] + y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,
$$

$$
\ln(x)\left[x y_1'' + (1-x) y_1' + y_1\right] - \frac{y_1}{x} + 2y_1' + \frac{1-x}{x} y_1 + x\left[\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-2}\right] + (1-x)\left[+\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0.
$$

Substituindo $y_1 = 1 - x$,

$$
x - 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n c_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0,
$$

Faça

$$
\begin{aligned}
m &= n - 1, \\
n &= m + 1.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Então,

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)c_{m+1}x^m + \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m - \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n &= 3-x, \\
\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n &= 3-x, \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(1-n)c_nx^n &= 3-x, \\
c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n\right]x^n &= 3-x.
\end{aligned}
$$

Claramente, os expoentes 0 e 1 de x são especiais. Para esses casos,

$$
\begin{aligned}
n = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad c_1 = 3, \\
n = 1 \qquad &\Rightarrow \qquad 4c_2 = -1, \\
c_2 = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

A partir de $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2c_{n+1} + (1-n)c_n &= 0, \\
c_{n+1} &= \frac{n-1}{(n+1)^2}c_n, \\
c_3 &= \frac{1}{3^2}c_2 = -\frac{1}{3^2} \times \frac{-1}{4}, \\
c_4 &= \frac{2}{4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{288}, \\
c_5 &= \frac{3 \times 2}{5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{2400}, \\
c_6 &= \frac{4 \times 3 \times 2}{6^2 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2} \times \frac{-1}{4} = -\frac{1}{21600}, \\
&\vdots \\
c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 4} \\
c_n &= -\frac{(n-2) \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{n^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2} \\
c_n &= -\frac{(n-2)!}{(n!)^2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Note que a fórmula geral para c_n também vale para $n = 2$. Portanto a 2ª solução é

$$
y_2(x) = (1-x)\ln(x) + 3x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!}{(n!)^2}x^n \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$