TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 06 Ago 2021
Entrega em 07 Ago 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

ATENÇÃO: PROVA SEM CONSULTA, E SEM USO DE CALCULADORAS, ETC..
Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: Assinatura: ____________________

---

1 [25] Calcule o volume do corpo limitado inferiormente pela superfície

$$z = x^2 + y^2,$$

e superiormente pela superfíce

$$z = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiramente, precisamos encontrar o domínio de integração no plano xy. Pela simetria do problema, fazemos $x^2+y^2 = r^2$, e calculamos o valor de r em que as duas superfície se interceptam (onde possuem a mesma cota):

$$\begin{aligned}
r^2 &= 1 + \frac{r^2}{4},\\
\frac{3r^2}{4} &= 1,\\
r^2 &= \frac{4}{3},\\
r &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

O domínio de integração em xy portanto é $r \le 2\sqrt{3}/3$.
Claramente, é preferível integrar em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[\left(1 + \frac{r^2}{4}\right) - r^2 \right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\
&= 2\pi \int_{r=0}^{2\sqrt{3}/3} \left[1 - \frac{3r^2}{4} \right] r\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{2\pi}{3} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Resolva a EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + uv &= \mathrm{e}^{-x},\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\mathrm{d}x,\\
\ln|v| &= -x + k_1,\\
|v| &= \mathrm{e}^{k_1}\mathrm{e}^{-x},\\
|v| &= k_2\mathrm{e}^{-x},\\
v &= \pm k_2\mathrm{e}^{-x} = v_0\mathrm{e}^{-x};\\
v_0\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^{-x},\\
v_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1,\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{v_0},\\
u &= u_0 + \frac{x}{v_0};\\
y = uv &= \left[u_0 + \frac{x}{v_0}\right]v_0\mathrm{e}^{-x}\\
&= u_0v_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},\\
&= y_0\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x};\\
y(0) = 1 &\Rightarrow y_0 = 1;\\
y &= \mathrm{e}^{-x}(1+x) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Resolva

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y &= x^r, \\ y' &= rx^{r-1}, \\ y'' &= (r-1)rx^{r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação original,

$$\begin{aligned} (r-1)r + 3r + 1 &= 0, \\ r^2 + 2r + 1 &= 0, \\ (r+1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

$r = -1$ é uma raiz dupla. Uma das duas soluções LI é

$$y = \frac{k_2}{x}.$$

Precisamos encontrar uma segunda solução LI pelo método de variação de constantes:

$$\begin{aligned} y &= x^{-1}u, \\ y' &= x^{-1}u' - x^{-2}u, \\ y'' &= x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} x^2\left[x^{-1}u'' - 2x^{-2}u' + 2x^{-3}u\right] + 3x\left[x^{-1}u' - x^{-2}u\right] + x^{-1}u &= 0, \\ xu'' - 2u' + 2x^{-1}u + 3u' - 3x^{-1}u + x^{-1}u &= 0, \\ xu'' + u' &= 0. \end{aligned}$$

Agora reduzimos a ordem da equação diferencial em u:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \\ x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v &= 0, \\ x\mathrm{d}v + v\mathrm{d}x &= 0, \\ \mathrm{d}(xv) &= 0, \\ xv &= k_1, \\ v &= \frac{k_1}{x}; \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \frac{k_1}{x}, \\ \mathrm{d}u &= k_1\frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ u &= k_1 \ln|x| + k_2; \\ y &= \frac{u}{x} = \frac{k_1 \ln|x|}{x} + \frac{k_2}{x} \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se $\theta \in \mathbb{R}$, sabemos que $|e^{i\theta}| = 1$. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, onde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, calcule $|e^{iz}|$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} |e^{iz}| &= |e^{i(x+iy)}| \\ &= |e^{ix}||e^{i^2 y}| \\ &= |e^{-y}| = e^{-y} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹