TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 31 Out 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1),$$

com $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, onde τ e ζ são quantidades adimensionais *reais* e ϕ é complexo. Discretize a equação utilizando um esquema totalmene implícito para $\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}$ e ϕ, e obtenha uma equação na forma

$$A\phi_{i+1}^{n+1} + B\phi_i^{n+1} + C\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + D.$$

Obtenha cada um dos A, B, C e D em função de $\mathrm{Fo} = \Delta\tau/\Delta\zeta^2$ e/ou $\mathrm{Cr} = \Delta\tau$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discretiza-se em ζ: $i = 0, 1, \ldots, M$.

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta\zeta^2} - \mathrm{i}(\phi_i^{n+1} - 1)$$

$$\phi_i^{n+1} - \phi_i^n = \frac{\mathrm{Fo}}{2}\left[\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right] - \mathrm{iCr}(\phi_i^{n+1} - 1).$$

Passando todos os termos em $(n+1)$ para o lado esquerdo, e todos os termos em n para o lado direito, tem-se

$$-\frac{\mathrm{Fo}}{2}\phi_{i+1}^{n+1} + (1 + \mathrm{iCr} + \mathrm{Fo})\,\phi_i^{n+1} - \frac{\mathrm{Fo}}{2}\phi_{i-1}^{n+1} = \phi_i^n + \mathrm{iCr} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Obtenha a função de Green de

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{x}{L}\right) y = f(x), \quad y(1) = y_1,$$

onde L é uma constante, e $f(x)$ é o forçante do sistema. **Atenção: esse problema tem condição inicial em $x = 1$: todas as integrais devem ser entre 1 e ∞.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre,

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y &= G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi},\\
\int_1^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=1}^{\xi=\infty} - {}&\\
\int_1^\infty y\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,1)y_1 + {}&\\
\int_1^\infty \left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right]y(\xi)\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi
\end{aligned}$$

Agora escolhemos

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right] &= \delta(\xi - x),
\end{aligned}$$

e re-escrevemos

$$y(x) = G(x,1)y_1 + \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Para resolver a equação diferencial em G, fazemos

$$\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi),\\
-U\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)UV &= \delta(\xi - x),\\
U\left[-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V\right] - V\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Como sempre, anulamos o colchete:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)V,\\
\frac{dV}{V} &= \frac{1}{\xi}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Como queremos $V(x,\xi)$, mudamos a variável de integração para *qualquer coisa* (por exemplo, z), e integramos a partir de $z = 1$ até $z = \xi$:

$$\begin{aligned}
\int_{V(x,1)}^{V(x,\xi)} \frac{dV}{V} &= \int_1^\xi \left[\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{\mathrm{d}z}{L}\right],\\
\ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,1)} &= \ln\frac{\xi}{1} - \frac{\xi - 1}{L},\\
\ln V(x,\xi) &= \ln\xi - \frac{\xi-1}{L} + \ln V(x,1),\\
V(x,\xi) &= V(x,1)\xi\mathrm{e}^{-(\xi-1)/L}.
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Ficamos agora com

$$
\begin{aligned}
-V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L}\frac{dU}{d\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{dU}{d\xi} &= -\frac{1}{V(x,1)\xi}e^{(\xi-1)/L}\delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Novamente, mudo de ξ para z e integro de 1 a ξ:

$$
\begin{aligned}
U(x,\xi) &= U(x,1) - \frac{1}{V(x,1)}\int_1^\xi \frac{e^{(z-1)/L}}{z}\delta(z-x)\,dz,\\
&= U(x,1) - \frac{H(\xi-x)}{V(x,1)}\frac{e^{(x-1)/L}}{x}.
\end{aligned}
$$

Isso agora nos dá a função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi)\\
&= \left[U(x,1) - \frac{H(\xi-x)}{V(x,1)}\frac{e^{(x-1)/L}}{x}\right]V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L}\\
&= U(x,1)V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L} - H(\xi-x)\frac{\xi}{x}e^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\
&= G(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L} - H(\xi-x)\frac{\xi}{x}e^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}}\\
&= \xi e^{-(\xi-1)/L}\left[G(x,1) - H(\xi-x)\frac{e^{(x-1)/L}}{x}\right].
\end{aligned}
$$

Fazemos agora

$$
G(x,1) = \frac{e^{(x-1)/L}}{x},
$$

e retornamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \xi e^{-(\xi-1)/L}\left[1 - H(\xi-x)\right]\frac{e^{(x-1)/L}}{x},\\
&= \frac{\xi}{x}e^{-\frac{\xi-x}{L}}\left[1 - H(\xi-x)\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o problema de Sturm-Liouville,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y = 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

a) [05] Mostre que a solução geral é da forma

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x}\left[A \operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}x) + B\cosh(\sqrt{1-\lambda}x)\right], & \lambda \neq 1, \\ \mathrm{e}^{x}(C + Dx), & \lambda = 1. \end{cases}$$

b) [05] Para $\lambda \neq 1$, mostre que $B = 0$, e que $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,\pi) = 0$.

c) [10] Agora use $\operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda}\,x) = \mathrm{i}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\,x)$, e mostre que os autovalores são $\lambda_n = 1 + n^2$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) Expandindo as derivadas,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y =$$
$$\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \lambda \mathrm{e}^{-2x} y =$$
$$\mathrm{e}^{-2x}\left[y''(x) - 2y'(x) + \lambda y\right].$$

A equação característica do termo entre colchetes é

$$r^2 - 2r + \lambda = 0,$$

com soluções $r = (1 \pm \sqrt{1-\lambda})$. O caso $\lambda = 1$ produz uma raiz dupla, e deve ser tratado separadamente. Neste caso, além da solução e^x, encontra-se uma segunda solução LI $x\mathrm{e}^x$. Portanto, para $\lambda = 1$, a solução geral é do tipo $\mathrm{e}^x(C + Dx)$. Para $\lambda \neq 1$, as raízes sao distintas, e

$$y = k_1 \mathrm{e}^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + k_2 \mathrm{e}^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}$$

Faça $k_1 = (B + A)/2$, $k_2 = (B - A)/2$, e obtenha

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^x\left[k_1 \mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + k_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}\right] \\ &= \mathrm{e}^x\left[B\frac{\mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2} + A\frac{\mathrm{e}^{+\sqrt{1-\lambda}\,x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x}}{2}\right] \\ &= \mathrm{e}^x\left[B\cosh\sqrt{1-\lambda}\,x + A\operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,x\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

b) Como $\cosh(0) = 1$, impondo-se $y(0) = 0$ encontra-se $B = 0$. Agora, $\operatorname{senh}(0) = 0$, de modo que resta impor

$$y(\pi) = 0 \ \Rightarrow \ A\operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,\pi = 0,$$

pois A deve ser diferente de zero para fugir da solução trivial $\blacksquare$

c)

$$\operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\pi = 0$$
$$\mathrm{i}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda-1}\pi = 0$$
$$\sqrt{\lambda-1} = n$$
$$\lambda = 1 + n^2 \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy, \qquad u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O método das características se impõe. Se

$$\begin{aligned} x &= X(s), \\ y &= Y(s), \end{aligned}$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x,y) = u(X(s),Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$\begin{aligned} xy &= 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= 3X(s), & X(0) &= \xi, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} &= 3, & Y(0) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= X(s)Y(s), & U(0) &= u(\xi,0) = \mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{aligned}$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= 3ds, \\ \ln\frac{X}{\xi} &= 3s, \\ X &= \xi\mathrm{e}^{3s}; \\ Y &= 3s; \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= \xi\mathrm{e}^{3s}3s, \\ U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s z\mathrm{e}^{3z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3}. \end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned} s &= y/3, \\ \xi &= x/\mathrm{e}^{3s} = x/\mathrm{e}^{y}; \\ u(x,y) = U(s) &= U(0) + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)\mathrm{e}^{3s}+1)\xi}{3} \\ &= \mathrm{e}^{-(x/\mathrm{e}^y)^2} + \frac{((y-1)\mathrm{e}^y+1)\,\frac{x}{\mathrm{e}^y}}{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Utilizando obrigatoriamente o método de separação de variáveis, $\phi(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}; \qquad \phi(0,t) = 0, \qquad \phi(1,0) = 1.$$

Sugestão: a solução é muito parecida com a solução da equação de Boussinesq, só que mais fácil.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Separando-se as variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= XT\left[T\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right], \\ \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = c_1. \end{aligned}$$

Resolvendo primeiro em T:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= c_1, \\ \frac{dT}{T^2} &= c_1 dt, \\ -\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2, \\ T &= \frac{-1}{c_1 t + c_2}. \end{aligned}$$

Resolvendo X:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= c_1, \\ X &= c_1 x + c_3. \end{aligned}$$

A solução será do tipo

$$\begin{aligned} \phi = XT &= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2} \\ &= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1} \\ &= -\frac{x+a}{t+b}. \end{aligned}$$

Neste ponto, note que há apenas 2 graus de liberdade, representados pelas constantes a e b, e que correspondem à única condição de contorno e à única condição inicial dadas. Impondo cada uma delas:

$$\begin{aligned} \phi(0,t) = 0 &\Rightarrow -\frac{a}{t+b} = 0 \Rightarrow a = 0; \\ \phi(1,0) = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Donde

$$\phi(x,t) = -\frac{x}{t-1} = \frac{x}{1-t} \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹