TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Mai 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Para os valores de n entre 0 e 15, o programa ao lado *tenta* calcular (div significa divisão inteira)

$$
\begin{aligned}
p &= n \operatorname{div} 4,\\
q &= n \operatorname{div} 2,
\end{aligned}
$$

e

$$
f^n(0) = \begin{cases}
n \mod 4 = 0 & f^n(0) = 0,\\
n \mod 4 = 1 & f^n(0) = (-4)^p,\\
n \mod 4 = 2 & f^n(0) = (-1)^{p+1}2^q,\\
n \mod 4 = 3 & f^n(0) = (-1)^p 2^q,
\end{cases}
$$

mas há um erro. QUE ERRO É ESSE? EM QUE LINHA ELE OCORRE?

```
1  #!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
2  # -*- coding: iso-8859-1 -*-
3  for n in range(16):
4     p = n // 4
5     q = n / 2
6     r = n % 4
7     if r == 0 :
8        der = 0
9     elif r == 1 :
10       der = (-4)**p
11    elif r == 2 :
12       der = (-1)**(p+1) * 2**q
13    else :
14       der = (-1)**p * 2**q
15    pass
16    print('%4d␣%4d' % (n,der))
17 pass
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Na linha 5 deveríamos ter `q = n // 2`, porque o operador `//` produz divisão inteira.

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Em um aquífero, a superfície freática é bem representada por

$$h(x,y) = h_0 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{y}{2L} \right)^2 \right] \right\},$$

onde h_0 e L são constantes com dimensão de comprimento. A condutividade hidráulica saturada é k, e a vazão específica $\boldsymbol{v}$ é dada pela lei de Darcy:

$$\boldsymbol{v} = -k\boldsymbol{\nabla} h.$$

Calcule a derivada de $f(x,y) = |\boldsymbol{v}|$ na direção $\boldsymbol{t} = (1/\sqrt{2})(1,1)$ e no ponto $(x,y) = (L,L)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} h &= \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}, \\
&= -h_0 \left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j} \right]; \\
\boldsymbol{v} &= kh_0 \left[\frac{2x}{L^2}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^2}\boldsymbol{j} \right]; \\
|\boldsymbol{v}|^2 &= k^2h_0^2 \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]; \\
|\boldsymbol{v}| = f(x,y) &= kh_0 \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dada $f(x,y)$, a derivada direcional na direção do vetor unitário $\boldsymbol{t}$ é

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla} f.$$

Precisamos portanto do gradiente de f:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4x^2}{L^4} + \frac{y^2}{4L^4} \right]^{-1/2} \left[\frac{8x}{L^4}\boldsymbol{i} + \frac{y}{2L^4}\boldsymbol{j} \right].$$

Em $(x,y) = (L,L)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} &= \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4}{L^2} + \frac{1}{4L^2} \right]^{-1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{17}{4L^2} \right]^{-1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot \frac{kh_0}{2} \left[\frac{4L^2}{17} \right]^{1/2} \left(\frac{8}{L^3}, \frac{1}{2L^3} \right) \\
&= \frac{2kh_0L}{2\sqrt{2}\sqrt{17}} \frac{1}{L^3} (8 + 1/2) \\
&= \frac{kh_0}{\sqrt{2}\sqrt{17}L^2} \frac{17}{2} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}} \frac{kh_0}{L^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Sabendo que

$$A_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

e que

$$\int \left[1 + u^2\right]^{1/2} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcsenh}(u) + u(1+u^2)^{1/2}\right],$$

calcule a área da superfície

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u, \\ y(u,v) &= v^2/\sqrt{3}, \\ z(u,v) &= u^2 + v^2, \end{aligned}$$

para $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (u, v^2/\sqrt{3}, u^2 + v^2); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, 0, 2u); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 2v/\sqrt{3}, 2v); \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (1,0,2u) \times (0, 2v/\sqrt{3}, 2v) \\ &= (-4uv/\sqrt{3}, -2v, 2v/\sqrt{3}); \\ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| &= \frac{4v}{\sqrt{3}}\left[1 + u^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Na verdade, na última linha acima deve ser $|v|$, mas $0 \le v \le 1$! Prosseguindo:

$$\begin{aligned} A_{\mathscr{S}} &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} \frac{4v}{\sqrt{3}} \left[1 + u^2\right]^{1/2} \,\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= \int_{u=0}^{1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[1 + u^2\right]^{1/2} \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arcsenh}(1) + \sqrt{2}\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Resolva

$$\frac{dy}{dx} + ay = -by^2, \qquad y(0) = y_0,$$

$a > 0$, $b > 0$. Sugestão: faça $y = uv$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $y = uv$:

$$\begin{aligned}
u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + auv &= -bu^2v^2,\\
\left[\frac{dv}{dx} + av\right]u + v\frac{du}{dx} &= -bu^2v^2.
\end{aligned}$$

Obrigue o termo dentro dos colchetes a ser nulo, e resolva:

$$v = v_0 e^{-ax}.$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= -bu^2 v,\\
\frac{du}{u^2} &= -bv_0 e^{-ax}\, dx,\\
\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u} &= -\frac{bv_0}{a}\left[1 - e^{-ax}\right],\\
\frac{u - u_0}{uu_0} &= -\frac{b}{a}v_0\left[1 - e^{-ax}\right],\\
u - u_0 &= -\frac{b}{a}u_0 v_0\left[1 - e^{-ax}\right]u,
\end{aligned}$$

(note que $y_0 = u_0 v_0$)

$$u\left[1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - e^{-ax}\right)\right] = u_0,$$

donde

$$y = uv = \frac{y_0 e^{-ax}}{1 + \frac{b}{a}y_0\left(1 - e^{-ax}\right)} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Obtenha a solução geral de

$$y'' - 2y' + y = \text{sen}(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^x \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹