TEA018 Hidrologia Ambiental – Notas de aula

Nelson Luís Dias

Prof. Titular, Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR

16 de agosto de 2020

Sumário

1 Introdução e Processos Hidrológicos **3**
1.1 Introdução e aplicações 3
1.2 Estimativas de P, Q e E 5
1.3 O conceito de sistemas — ou escalas! 7
1.4 História 9

2 As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia **10**
2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds 10
2.2 A equação da continuidade 12
2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos 13
2.4 Aplicações em Hidrologia 15
2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente 18
2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga 22
2.6.1 A fórmula de Manning 25
2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy 27
2.8 O balanço de radiação na superfície 28
2.9 Hidrologia computacional 29

3 Água na atmosfera **36**
3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa 36
3.2 Circulação atmosférica 38
3.3 A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura 41
3.4 A atmosfera como uma mistura de gases ideais 43
3.5 Saturação e grandezas associadas 50
3.6 Temperatura potencial 54
3.7 Precipitação 60
3.8 Evaporação: escalas e conceitos gerais 68
3.9 O movimento da Terra no espaço 75
3.10 Os fundamentos físicos dos métodos de medição de evaporação 90
3.11 Os métodos e modelos clássicos de evaporação evapotranspiração 101
3.12 Linhas de ação para aplicações 106
3.13 Dedução das equações de Penman e Penman-Monteith . . 108

4 Água no solo **112**

Capítulo 1

Introdução e Processos Hidrológicos

1.1 Introdução e aplicações

A água é a substância mais abundante na Terra.

A Hidrologia trata da água nos estados sólido, líquido e gasoso.

Aplicações de Hidrologia:

- Projeto e operação de estruturas hidráulicas.
- Abastecimento de Água.
- Tratamento e destino de esgotos.
- Irrigação.
- Drenagem.
- Geração de energia hidrelétrica.
- Controle de cheias.
- Navegação fluvial.
- Controle de erosão.
- Estabilidade de encostas.
- Controle de salinização de solos.
- Controle de poluição hídrica.
- Usos recreativos.
- Proteção da fauna e da flora.

Uma definição mais precisa

> Hidrologia é o estudo do ciclo hidrológico nas áreas continentais.

Tanto a variabilidade natural quanto as atividades humanas afetam os diversos fluxos do ciclo hidrológico e a qualidade da água.

Praticamente *todas* as atividades humanas impactam o ambiente, e o ciclo hidrológico, direta ou indiretamente. Exemplos:

Figura 1.1: O ciclo hidrológico (adaptado de Chow et al. (1988)).

- Agricultura em geral:
  - Aragem do solo.
  - Irrigação.
  - Adubação.
- Desmatamento.
- Exploração de águas superficiais.
- Exploração de águas subterrâneas.
- Construção de represas.
- Lançamento de esgoto *in natura* ou tratado em rios, lagos e no oceano.
- Urbanização.
- ...

O ciclo hidrológico merece a figura 1.1 de Chow et al. (1988).

Aqui aparece pela primeira vez o termo *Runoff* que às vezes é sinônimo de *overland flow* (escoamento superficial) e às vezes é sinônimo de *streamflow* (vazão em uma seção de rio).

Meu conselho: evite *runoff*; diga com outras palavras e use outros símbolos. De todo modo, *runoff* significa o escoamento para fora de algum compartimento (uma gleba de solo no caso de uma visão mais local e "agronômica", ou a bacia como um todo no caso de uma visão "hidrológica").

Note também, na figura 1.2, a distinção entre leçol (e poço) freático e artesiano.

Como podemos ver na figura 1.1, são elementos do ciclo hidrológico nos continentes:

- Precipitação (chuva + neve + granizo)

Figura 1.2: Poços freático e artesiano.

Tabela 1.1: Distribuição da água no planeta.

Região	Quantidade (%)
Oceanos	96.5
Água subterrânea	0.73 (doce)
Água subterrânea	0.96 (salgada)
Umidade do solo	0.0012
Calotas polares	1.7
Lagos	0.007 (doce)
Lagos	0.006 (salgada)
Pântanos	0.0008
Rios	0.0002
Seres vivos	0.0001
Atmosfera	0.001

- Evapotranspiração:
  - Evaporação
  - Evapotranspiração
- Infiltração
- Escoamento superficial (*overland flow*)
- Escoamento subsuperficial
- Escoamento subterrâneo Os três elementos podem contribuir para a formação da *vazão* na seção exutória de uma bacia hidrográfica.

As quantidades de água nas diversas regiões do planeta estão mostradas na tabela 1.1

1.2 Estimativas de P, Q e E

Algumas vezes, P, E e Q são denominados *fases* do ciclo hidrológico.

Considere o balanço hídrico de uma bacia hidrográfica,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = P - E - Q,$$

e integre:

$$\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= \int_{t_i}^{t_f} P\,\mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t_f} E\,\mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t_f} Q\,\mathrm{d}t;\\
\langle P\rangle &\equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} P\,\mathrm{d}t;\\
S_f - S_i &= [\langle P\rangle - \langle E\rangle - \langle Q\rangle]\,\Delta t,\\
\frac{S_f - S_i}{\Delta t} &= [\langle P\rangle - \langle E\rangle - \langle Q\rangle]\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Agora, se Δt é *muito grande*, e se $S(t)$ é *estacionário*,

$$\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{S_f - S_i}{\Delta t} = 0 \;\Rightarrow\; \langle P\rangle = \langle E\rangle + \langle Q\rangle\,.$$

Muitas vezes encontra-se isso escrito simplesmente como

$$P = E + Q.$$

Portanto, cuidado com a notação: o significado das variáveis vai depender do contexto, e você deve ser capaz de compreender esse significado justamente *pelo contexto*.

Além disso, existem várias *dimensões* possíveis para P, E, e Q. Em princípio, devemos ter

$$[\![P]\!] = [\![E]\!] = [\![Q]\!] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-2}\,\mathsf{T}^{-1}$$

(um fluxo de massa por unidade de área em um ponto específico da bacia hidrográfica) ou

$$[\![P]\!] = [\![E]\!] = [\![Q]\!] = \mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-1}$$

(um fluxo de massa sobre toda a superfície horizontal da bacia).

Por exemplo, no SI suponha P inicialmente em $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ (indicando um fluxo de massa sobre toda a área da bacia). Se ρ é a densidade da água e se a supusermos constante,

$$\frac{\mathrm{kg\,s^{-1}}}{\mathrm{kg\,m^{-3}}} \;\Rightarrow\; P \text{ em } \mathrm{m^3\,s^{-1}}.$$

Se dividirmos agora pela área superficial sobre a qual o fluxo ocorre,

$$\frac{\mathrm{m^3\,s^{-1}}}{\mathrm{m^2}} \;\Rightarrow\; P \text{ em } \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Alternativamente, encontra-se P em $\mathrm{mm\,dia^{-1}}$, $\mathrm{mm\,mês^{-1}}$, $\mathrm{mm\,ano^{-1}}$.

Algumas vezes, reporta-se a integral

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{P(t)}{\rho A}\,\mathrm{d}t$$

em m ou em mm.

Em resumo, as dimensões e as unidades e o *significado* dos símbolos dependem do *contexto*, e você deve estar atento a elas.

Finalmente, P, E e Q são fluxos entre "compartimentos" (volumes de controle). Por exemplo, P e E são fluxos entre a atmosfera e as superfícies continentais, Q é um fluxo através de uma seção de rio, etc..

Para entender a relação entre os fluxos e o armazenamento entre e em diversos compartimentos, é preciso ter uma sólida base em Mecânica dos Fluidos e em Matemática (Análise, Métodos Numéricos, Estatística, ...).

Em resumo, a Hidrologia é uma ciência multidisciplinar e que engloba desde aspectos muito teóricos até outros muito aplicados.

Tempo de residência Considere um balanço de massa simples e em seguida regime permanente:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = F_i - F_o,$$
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; F_i = F_o = F.$$

O tempo de residência do compartimento cuja massa é M é

$$T_r = \frac{M}{F}.$$

Quais são as dimensões de F?

1.3 O conceito de sistemas — ou escalas!

Classificação de modelos O problema de "classificar" um modelo é enorme, porque em geral a classificação "não fecha", e um mesmo modelo acaba recebendo duas ou mais classificações. De todo modo, as categorias mais comuns são:

- Modelos físicos × empíricos.
- Modelos concentrados × distribuídos.
- Modelos determinísticos × estocásticos.

Algumas vezes é fácil "classificar" um modelo, e outras não. Considere

$$Q = ciA \qquad \text{ou} \qquad Q = cP,$$

que é a "fórmula racional". Ela é racional porque Q e iA, ou Q e P, têm as mesmas dimensões físicas (i, em $\mathrm{mm\,h^{-1}}$ ou $\mathrm{mm\,dia^{-1}}$ é a intensidade de precipitação. A distinção entre i e P é cinzenta. Historicamente, P era reservado para "altura acumulada de chuva", em mm).

A fórmula racional é "empírica", e c tem que ser descoberto, adivinhado, ou calibrado, para cada bacia. Por outro lado, a Equação de Saint-Vennant,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f,$$

é um model "físico" porque se baseia no princípio de conservação de quantidade de movimento. Ainda assim, S_f depende de uma relação empírica ou semi-empírica (em geral, a fórmula de Manning).

Modelos concentrados em geral fazem um balanço sobre todo um volume de controle. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= I(t) - O(t),\\ O(t) &= aS^b,\\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + aS^b &= I(t).\end{aligned}$$

Classifique a equação diferencial acima.

Muitas vezes, o modelo concentrado é alimentado por uma equação empírica ou semi-empírica do tipo $O = aS^b$, etc..

Modelos distribuídos são muitas vezes implementados em grades 1D, 2D ou 3D. A *resolução* do modelo é o tamanho da grade.

Mesmo em um modelo distribuído com base fortemente física, entretanto, o que acontece em escalas abaixo da escala da grade [digamos, Δx] precisa ainda ser *parametrizado*. A parametrização:

- Em geral depende da escala da grade Δx.
- Envolve algum nível de empirismo.

Por exemplo, a equação constitutiva para um fluido Newtoniano,

$$\begin{aligned}T_{ij} &= -P\delta_{ij} + \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij},\\ s_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\end{aligned}$$

expressa as tensões T_{ij} em um *continuum* em termos da pressão termodinâmica p, da taxa de deformação $\boldsymbol{s}$, e de dois coeficientes de viscosidade, μ e λ, que parametrizam o efeito das interações moleculares na escala do contínuo (a microescala de Kolmogorov).

Um modelo estocástico abre mão da física e de parametrizações físicas para estimar probabilidades de ocorrência. Um exemplo extremo é o modelo de Gumbel para a vazão x_T com período de retorno T:

$$\begin{aligned}y_T &= -\ln\left[\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right],\\ x_T &= u + \alpha y_T,\end{aligned}$$

onde u e α são os parâmetros da distribuição Gumbel.

O argumento altamente sensato de Brutsaert (1986, 1998) é que faz mais sentido identificar as escalas que estão sendo resolvidas explicitamente e aquelas cujo resulado agregado precisa ser parametrizado. A partir daí, nós procuramos identificar quais são as parametrizações de subgrade necessárias (ou explicitar sua utilização).

1.4 História

Chow et al. (1988) fazem um bom resumo do desenvolvimento histórico da hidrologia. O conceito de ciclo hidrológico começou a ser compreendido qualitativamente já na antiguidade. No entanto, somente na Idade Moderna *medições* começaram o difícil processo de quantificar seus componentes e demonstrar experimentalmente a sua validade.

Outro ponto importante é que a Mecânica dos Fluidos só começou a produzir resultados úteis em Engenharia a partir de meados do século XIX (Darrigol, 2005). Com isso, a Hidrologia tem se desenvolvido a reboque dos avanços científicos em Mecânica dos Fluidos.

Até hoje, Hidráulica e Hidrologia carregam a tradição em empirismo (na acepção de tentativas não-informadas, ou mal-informadas, pela ciência) e soluções *ad-hoc* e só lentamente têm evoluído na direção de soluções de Engenharia com fundamentos racionais nas ciências exatas e da natureza.

Capítulo 2

As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia

2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds

Propriedades extensivas $\Rightarrow$ valem para um corpo como um todo (*in bulk*).

Propriedades intensivas $\Rightarrow$ valem cada ponto do contínuo.

Elas vêm aos pares, sendo definidas por

$$N = \int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V,$$

onde

N É a propriedade extensiva, válida para o corpo que ocupa a região $\mathscr{C}$ (às vezes diremos: para o corpo $\mathscr{C}$, ou para a região material $\mathscr{C}$.

ρ É a massa específica ou densidade do fluido.

η É a propriedade intensiva (por unidade de massa) associada.

O Teorema do Transporte de Reynolds talvez seja mais importante do que sua dedução; portanto, vamos enunciá-lo primeiro:

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A.$$

A utilidade do Teorema do Transporte de Reynolds vem do fato de que:

a) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ é a derivada material.

b) $\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}$ é a taxa de variação da grandeza N pertinente ao corpo $\mathscr{C}$.

Leis da física

Massa

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0, \qquad \eta = 1.$$

Momentum

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{P}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F}, \qquad \eta = \boldsymbol{v}, \qquad (2^{\underline{a}} \text{ lei de Newton}).$$

Energia

$$\frac{\mathrm{D}(\mathscr{U} + \mathscr{E}_c)}{\mathrm{D}t} = \dot{W} + \dot{Q}, \qquad \eta = \frac{v^2}{2} + u.$$

onde $\mathscr{U}$ é a energia interna do corpo, e $\mathscr{E}_c$ é a sua energia cinética.

Isso permite *matematizar* as leis de conservação para um meio contínuo.

Uma dedução muito básica do teorema é a seguinte:

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

$$N(t) = \int_{\mathrm{I+II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V,$$

$$N(t + \Delta t) = \int_{\mathrm{II+III}} \eta\rho \, \mathrm{d}V.$$

Portanto temos

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V \right] (t + \Delta t) - \left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V \right] (t) + \left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho \, \mathrm{d}V \right] (t + \Delta t) - \left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \, \mathrm{d}V \right] (t) \right\}.$$

As integrais sobre $\mathrm{II}(t+\Delta t)$ e $\mathrm{II}(t)$ formam uma derivada parcial em relação ao tempo usual:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t + \Delta t) - \left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right]}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V.$$

Vamos olhar agora para a região I:

Em toda a fronteira de I com o exterior, $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) < 0$. Além disso, para Δt "pequeno", $\ell = |\boldsymbol{v}|\Delta t$ é pequeno. O volume de I é aproximadamente dado por

$$V_I = -\int_{\mathscr{S}_I} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\Delta t \, \mathrm{d}A \qquad \Rightarrow$$
$$-\left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t) = \left[\int_{\mathscr{S}_{\mathrm{I}}} \eta(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A\right] \Delta t,$$

e portanto

$$N_I = \left[\int_{\mathscr{S}_{\mathrm{I}}} \eta(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A\right] \Delta t,$$

ou

$$-\left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t) = +\left[\int_{\mathscr{S}_{\mathrm{I}}} \eta(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A\right] \Delta t.$$

Analogamente,

$$+\left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t + \Delta t) = +\left[\int_{\mathscr{S}_{\mathrm{III}}} \eta(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A\right] \Delta t.$$

Note que a superfície $\mathscr{S}$ é formada por

$\mathscr{S}_{\mathrm{I}}$ onde $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) < 0$;

$\mathscr{S}_{\mathrm{III}}$ onde $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) > 0$;

$\mathscr{S}_0$ onde $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) = 0$.

Logo,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{\left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t + \Delta t) - \left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \, \mathrm{d}V\right](t)\right\} = \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A,$$

e isso conclui o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A \blacksquare$$

2.2 A equação da continuidade

Para a massa M de um corpo,

$$\eta = 1,$$
$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0;$$

logo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A,$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot [\rho\boldsymbol{v}]) \, \mathrm{d}A.$$

A equação da continuidade é a melhor forma de introduzir o Teorema da Divergência para a obtenção das equações diferenciais de Mecânica dos Fluidos:

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f})\, \mathrm{d}A = \int_{\mathscr{C}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f})\, \mathrm{d}V,$$

onde

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

para o *campo vetorial* $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z)$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho\, \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}]\, \mathrm{d}V; \\ 0 &= \int_{\mathscr{C}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}] \right] \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

A equação acima tem que ser válida para uma região material $\mathscr{C}$ *arbitrária*; logo,

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}]$$

2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos

Nas microescalas de Kolmogorov

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}] &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} c &= D \nabla^2 c \\ \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right] &= \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla} \left(-p + (\lambda + \mu)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \right) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \right) &= \rho c_p \alpha \nabla^2 T - p(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissip visc}} \end{aligned}$$

As equações promediadas de Reynolds

(Para uma densidade ρ_0 de referência, e escoamento solenoidal ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.))

Médias "de conjunto" (ou sobre um grande número de realizações k do escoamento):

$$\overline{a} \equiv \sum_{k=1}^{N} a(k).$$

Essa ideia vai voltar muitas vezes neste curso, quando nós discutirmos métodos estatísticos e Hidrologia Estocástica.

A decomposição de Reynolds:

$$a(\boldsymbol{x}, t; k) = \overline{a}(\boldsymbol{x}, t) + a'(\boldsymbol{x}, t; k).$$

As médias de Reynolds são determinísticas; as flutuações são (modeladas como) aleatórias.

As equações promediadas de Reynolds (RANS: *Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\boldsymbol{v}} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{c} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot [\overline{\boldsymbol{v}' c'}]}_{\text{Vet Reynolds}} = D \nabla^2 \overline{c},$$

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \overline{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{\boldsymbol{v}} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot [\overline{\boldsymbol{v}' \boldsymbol{v}'}]}_{\text{Tensor Reynolds}} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} \overline{p} + \nu \nabla^2 \overline{\boldsymbol{v}}$$

Para a temperatura, o termo $p(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})$ em geral não pode ser desprezado!!! Em muitos casos, usamos (com muitas aproximações) uma equação análoga à de difusão-advecção:

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \overline{T} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\overline{\boldsymbol{v}' T'}] \right) \approx \rho c_p \alpha \nabla^2 \overline{T} + \overline{\Phi}$$

A maioria (mas não todos) dos escoamentos de nosso interesse em Hidrologia são turbulentos. Uma exceção são alguns escoamentos no solo. Uma característica importante das equações "de ordem 1" de Reynolds, que listamos acima, é que os termos difusivos e de dissipação são pequenos em relação aos demais em cada equação, respectivamente:

$$D \nabla^2 \overline{c}, \ \nu \nabla^2 \overline{\boldsymbol{v}}, \ \rho c_p \alpha \nabla^2 \overline{T}, \ \overline{\Phi}.$$

Por exemplo,

$$D \nabla^2 \overline{c} \ll \boldsymbol{\nabla} \cdot [\overline{\boldsymbol{v}' c'}].$$

Isso *não significa* que os efeitos moleculares podem ser simplesmente esquecidos, porque eles se revelam importantes nas equações de Reynolds *de ordem 2.* A equação para a energia cinética da turbulência (ECT, ou TKE em Inglês) foi obtida originalmente pelo próprio Reynolds (Reynolds, 1895):

$$\overline{e} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \overline{v_i' v_i'};$$

$$\frac{\partial \overline{e}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \overline{v}_j \frac{\partial \overline{e}}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{g}{\rho_0} \overline{v_3' \rho'}}_{B} \underbrace{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \overline{v_i' v_j'}}_{P}$$

$$- \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho_0} \overline{v_j' p'} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \overline{v_i' v_i' v_j'} - 2\nu \sum_{i=1}^{3} \overline{u_i' s_{ij}'} \right) - \underbrace{2\nu \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \overline{s_{ij}' s_{ij}'}}_{\epsilon \equiv \Phi / \rho_0}.$$

Em condições de "equilíbrio",

$$\frac{\overline{De}}{Dt} \approx 0 \approx P + B - \epsilon.$$

A "difusividade turbulenta" é uma analogia ruim:

$$q_z = -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial z};$$
$$\overline{w'T'} = -K_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}.$$

Aqui, $[\![K_T]\!] = [\![\alpha]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$. Ao contrário da *difusividade molecular* para o calor, α, a *difusividade turbulenta K_T depende do escoamento.* Modelos universais para a previsão de divusividades turbulentas são muito mais a exceção do que a regra. Não há consenso de que essa abordagem um dia possa "resolver" o problema da turbulência (mesmo indo para ordens superiores a 2); na verdade, provavelmente a maioria dos pesquisadores hoje em dia pensa que isso não é possível.

No entanto, na falta de coisa melhor, a abordagem é muitas vezes útil em Engenharia, e nós a encontraremos (ou variações sobre o tema) muitas vezes neste curso.

2.4 Aplicações em Hidrologia

O balanço hídrico de uma bacia hidrográfica

Faça $\mathscr{C}$ = bacia hidrográfica até a camada impermeável e até os divisores de água, e um pouco acima da superfície da bacia.

Nossa hipótese será de que só existe fluxo de massa:

- através da superfície superior,
- na seção exutória da bacia.

Note que isso nem sempre será verdade!

O fluxo de água líquida através da superfície superior é

$$\dot{M}_P = \int_{\mathscr{S}_A} \rho_w (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A = \rho_w \int_{\mathscr{S}_A} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A < 0.$$

As unidades de $\dot{M}_P$ são

$$\{\!\{\dot{M}_P\}\!\} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \times \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}.$$

Nesta seção vamos definir tudo em termos de *fluxos específicos* (por unidade de área horizontal):

$$\dot{M}_P = \int_{\mathscr{S}_A} \rho_w(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A \equiv -PA < 0,$$
$$\dot{M}_E = \int_{\mathscr{S}_A} \rho_v(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A \equiv EA > 0,$$
$$\dot{M}_Q = \int_{\mathscr{S}_Q} \rho_w(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A \equiv QA > 0.$$

Estritamente falando, estamos desprezando a difusão molecular e "fazendo as contas" alguns metros acima da superfície da bacia hidrográfica sobre uma superfície horizontal plana $\mathscr{S}_A$ cuja área é A. Acima, ρ_w é a massa específica da água líguida. Na integral de $\dot{M}_E$, ρ_v é a massa específica do *vapor d'água*. Note também que a última integral acima é sobre a seção do rio $\mathscr{S}_Q$, cuja área A_Q é muito menor do que a área horizontal A da bacia. Mesmo assim, nós estamos definindo (*nesta seção*) Q como uma vazão mássica *específica*, por unidade de área horizontal da bacia.

Dentro de $\mathscr{C}$ ($\equiv$ bacia hidrográfica) a água é armazenada dentro de plantas e animais, na região vadosa (zona não-saturada do solo) e na região saturada do solo (água subterrânea). Nós vamos desprezar o armazenamento em plantas e animais.

Até agora,

$$\oint_{\mathscr{S}} \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = [-P + E + Q]\,A,$$

restando o termo transiente

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho\,\mathrm{d}V$$

que contabiliza a água no solo.

Agora,

$$M = M_s + M_n = \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V.$$

Defina

$$\begin{aligned} M &\equiv SA, \\ M_s &\equiv S_s A, \\ M_n &\equiv S_n A; \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V &= \frac{\partial}{\partial t} \left[M_s + M_n \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(S_s + S_n) A \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[AS \right] \\ &= A \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

A equação de balanço é

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A \\ 0 &= A \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + A \left[-P + E + Q \right]; \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= P - E - Q, \end{aligned}$$

como já vimos anteriormente. Lembre-se:

$$\begin{aligned} \{\!|P|\!\} &= \{\!|E|\!\} = \{\!|Q|\!\} = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}; \\ \{\!|S|\!\} &= \mathrm{kg\,m^{-2}}. \end{aligned}$$

Na prática, quando chove $P \gg E$, e quando não chove $E \gg P$ (pelo menos enquanto a bacia não fica muito seca), mas a equação de balanço hídrico em geral envolve uma *média temporal*, de forma que *na média* ambos os termos são importantes. De fato, se P, E e Q são valores *instantâneos* para a bacia como um todo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= P - E - Q, \\ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}\tau &= \int_t^{t+\Delta t} \left[P - E - Q \right] \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Defina

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\Rightarrow$$

$$\int_t^{t+\Delta t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle P \rangle\,\Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} E(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle E \rangle\,\Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle Q \rangle\,\Delta t,$$

de tal maneira que $\langle P \rangle$ significa a *média temporal* de P ao longo de Δt. Fazendo o mesmo para E e Q,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle]\,\Delta t.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{d}S = S(t+\Delta t) - S(t);\;\Rightarrow$$

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle\,.$$

Note que $\langle P \rangle$ e $\langle Q \rangle$ são medidos(estimados) com *razoável* facilidade e acurácia. Porém, a medição(estimação) de S_n, S_s e E é *muito* difícil.

2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente

Algumas definições:

B	Largura
A	Área molhada
P	Perímetro molhado
y	Profundidade do escoamento
h	Profundidade média do escoamento
R	Raio hidráulico

Temos:

$$h = \frac{A}{B},$$
$$R = \frac{A}{P}.$$

Muitas vezes $B \gg h$, e a seção é assimilada a um retângulo de dimensões $B \times h$.

Em escoamento uniforme, a linha d'água é paralela à linha do fundo.

A equação de balanço de massa agora resume-se a (para ρ_w = constante)

$$Q = v \cos\theta A$$

Atenção! Q mudou de significado, e agora é uma vazão volumétrica!
Parta do Teor. Transp. Reynolds e chegue em $Q = v\cos\theta A$

A equação de balanço de quantidade de movimento é

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} v_\xi \rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A$$

O escoamento é permanente:

$$F_{s\xi} + F_{c\xi} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} v_\xi \rho \,\mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A$$

O escoamento é uniforme e as velocidades são iguais nas seções de entrada e saída do trecho (o que muda?)

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \cancelto{0}{\oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A}$$

$$(\rho g A L)\operatorname{sen}\theta - \tau_0 P \Delta\xi + \int_{\mathscr{S}_I} p\cos(\theta)\,\mathrm{d}A - \int_{\mathscr{S}_{II}} p\cos(\theta)\mathrm{d}A = 0,$$
$$(\rho g A L)\operatorname{sen}\theta - \tau_0 P \Delta\xi = 0,$$

Existe portanto um equilíbrio entre o peso e o atrito do fundo sobre a água no trecho.

$$
\begin{aligned}
L &= \Delta\xi \cos\theta; \\
\theta \approx 0 &\Rightarrow \cos\theta \approx 1;\ \operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta; \\
\rho g A \Delta\xi \cos\theta \operatorname{sen}\theta &= \tau_0 P \Delta\xi, \\
\rho g A \Delta\xi \operatorname{tg}\theta &= \tau_0 P \Delta\xi, \\
g\frac{A}{P}\operatorname{tg}\theta &= \frac{\tau_0}{\rho}
\end{aligned}
$$

$\operatorname{tg}\theta = S_0$

$$
\tau_0 = \rho g R S_0
$$

$\tau_0/\rho \equiv v_*^2$:

$$
\begin{aligned}
gRS_0 &= v_*^2 \\
1 &= \frac{gRS_0}{v_*^2}, \\
v^2 &= \left(\frac{v}{v_*}\right)^2 gRS_0 \\
v &= \frac{v}{v_*}\sqrt{gRS_0}, \\
v &= C\sqrt{gRS_0} \qquad \text{(Equação de Chézy)}
\end{aligned}
$$

Atenção para as simplificações! Isso foi obtido para uma velocidade v relativamente mal especificada (nós multiplicamos os dois lados da equação por v^2!), e supostamente igual à velocidade média na seção.

Note que se a área da seção for medida na vertical, a afirmativa de Chow et al. (1988, p. 33),

> The weight of fluid in the control volume is γAL (L é o nosso $\delta\xi$)

está estritamente errada, mas para ângulos pequenos, como vimos acima, o resultado final é na prática o mesmo.

A equação de balanço de energia é

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{W}} + \dot{Q} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} e\rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A, \\
e &= u + \frac{v^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Passo a passo:

$$
\dot{\mathcal{W}} = \int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A;
$$

Primeiramente, a integral de volume:

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V &= \int_{\mathscr{C}} \rho g v \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}V \\ &= \rho g v \operatorname{sen}\theta \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}V \\ &= \rho g v \operatorname{sen}\theta L B h.\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta &= S_0, \\ L\tan\theta &= \Delta z, \\ Bh &= A, \\ vA &= Q, \Rightarrow \\ \int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V &= \rho g Q \Delta z.\end{aligned}$$

Em seguida, a integral de superfície:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &\approx -p\boldsymbol{n} \Rightarrow \\ \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Mas $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \neq 0$ apenas ao longo das superfícies I e II:

$$\oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = \int_{\mathrm{I}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A + \int_{\mathrm{II}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.$$

Ao longo da superfície I (fazendo $z = 0$ no fundo),

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= -v\cos\theta; \\ p(z) &= p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h - z).\end{aligned}$$

Ao longo da superfície II (fazendo $z = 0$ no fundo),

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= +v\cos\theta; \\ p(z) &= p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h - z).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \int_{z=0}^{h} +v\cos\theta\,[p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h - z)]\,B\,\mathrm{d}z \\ &= +v\cos\theta\left[p_{\mathrm{atm}}Bh + \frac{1}{2}\rho g B h^2\right]; \\ \int_{\mathrm{II}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \int_{z=0}^{h} -v\cos\theta\,[p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h - z)]\,B\,\mathrm{d}z \\ &= -v\cos\theta\left[p_{\mathrm{atm}}Bh + \frac{1}{2}\rho g B h^2\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = 0.$$

Juntando tudo até agora,

$$\dot{\mathcal{W}} = \rho g Q \Delta z.$$

A equação de balanço de energia fica:

$$\rho g Q \Delta z + \dot{Q} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} e\rho\,\mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.$$

Suponha agora, por simplicidade, que as energias internas específicas são uniformes em cada uma das seções I e II. Temos

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \int_{\mathrm{I}}\left(u_1 + \frac{v^2}{2}\right)\rho(-v\cos\theta)\,\mathrm{d}A \\
&\quad + \int_{\mathrm{II}}\left(u_2 + \frac{v^2}{2}\right)\rho(+v\cos\theta)\,\mathrm{d}A \\
&= -\rho v\cos\theta\left(u_1 + \frac{v^2}{2}\right)Bh + \rho v\cos\theta\left(u_2 + \frac{v^2}{2}\right)Bh \\
&= \rho v\cos\theta Bh(u_2 - u_1) \\
&= \rho Q(u_2 - u_1).
\end{aligned}$$

É importante explicar fisicamente que $\dot{Q} < 0$. Para explicitar isso, façamos

$$\rho g Q \Delta z - \left|\dot{Q}\right| = \rho Q(u_2 - u_1).$$

Mas a perda de carga é *por definição* a energia mecânica (em unidades de comprimento) convertida em interna e (também) exportada para fora de $\mathscr{C}$ como fluxo de calor:

$$\rho g Q h_f \equiv \left|\dot{Q}\right| + \rho Q(u_2 - u_1)$$

Portanto,

$$h_f = \Delta z.$$

Em resumo, quando o escoamento é permanente, a variação do nível d'água é igual à perda de carga.

2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga

O perfil log

Um dos maiores desafios em Mecânica dos Fluidos foi o desenvolvimento de métodos *racionais* para o cálculo da perda de carga em escoamentos turbulentos. A história da Mecânica dos Fluidos vale um ou mais livros à parte: veja por exemplo Darrigol (2005). No caso de escoamentos laminares, relações entre velocidade média na seção e perda de carga podem ser obtidas diretamente a partir de soluções das equações de Navier-Stokes.

Por exemplo, para um escoamento sob pressão em um duto retangular de largura infinita e altura 2δ, o perfil de velocidade é parabólico, e dado por

$$u(z) = \frac{gS_f}{2\nu} z\,(2\delta - z)\,,$$

onde g é a aceleração da gravidade, ν é a viscosidade cinemática, e $z = 0$ na parede inferior, e

$$S_f = -\frac{1}{\rho g}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

é a perda de carga unitária, calculada em função do gradiente de pressão na tubulação. A integração da equação acima entre $z = 0$ e $z = 2\delta$ produz a relação para a perda de carga:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2h}\int_{z=0}^{2h} u(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{gS_f\delta^2}{3\nu};\ \Rightarrow \\ &= \frac{\mathrm{m\,s^{-2}m^2}}{\mathrm{m^2\,s^{-1}}} = \mathrm{m\,s^{-1}} \\ q &= 2\delta v = \frac{2gS_f\delta^3}{3\nu}. \end{aligned}$$

A importância dessa equação é enorme: se quisermos projetar uma tubulação para a vazão q (por unidade de largura), podemos resolver a equação para S_f, e consequentemente calcular a pressão necessária na tubulação para produzir a vazão desejada.

Em escoamentos turbulentos, não é possível deduzir analticamente uma equação para o perfil de velocidade na seção, mas uma série de argumentos relativamente sofisticados e parcialmente baseados nas equações de conservação leva ao perfil log de velocidade de vón Kármán (Tennekes e Lumley, 1972; Pope, 2000):

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right),$$

onde z_0 é a rugosidade para a quantidade de movimento, e $\kappa = 0.4$ é a constante de vón Kármán. Note que nós já encontramos a velocidade de atrito v_* antes; em um canal,

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

onde S_f é a perda de carga. Em escoamento permanente e uniforme, nós sabemos que $S_f = h_f/L = S_0$, onde S_0 é a declividade do fundo.

Uma abordagem racional agora pode ser obtida, facilmente, para relacionar a vazão média no canal com a perda de carga. A velocidade média

na seção é

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{h}\int_{z=0}^{h} \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\,\mathrm{d}z \\
v &\approx \frac{1}{h}\int_{z=z_0}^{h} \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{v_*}{\kappa}\left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Essa equação já basta, mas para vermos as coisas com mais clareza, considere o seguinte: em uma seção retangular bem larga, o raio hidráulico é praticamente igual à altura do escoamento:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{A}{P} \\
&= \frac{Bh}{2h + B} \\
&= \frac{h}{2\frac{h}{B} + 1} \\
&\approx h,\ h \ll B.
\end{aligned}
$$

Façamos agora

$$
\begin{aligned}
v_* &= \sqrt{ghS_f}, \\
v &= \frac{\sqrt{ghS_f}}{\kappa}\left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

como $h \approx R$, isso pode ser escrito também em termos de R:

$$
v = \frac{\sqrt{gRS_f}}{\kappa}\left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1\right)\right].
$$

Incidentalmente, isso mostra que o coeficiente de Chézy não é constante, mas sim

$$
C = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1\right)\right].
$$

Agora, dada a geometria da seção e a perda de carga unitária S_f (igual a S_0 para escoamento permanente e uniforme), podemos calcular a velocidade média, e vice-versa: dada uma certa geometria e uma velocidade média *desejada* (no caso de projeto de canais artificiais, ou de intervenções de Engenharia em canais naturais), podemos determinar a declividade S_0 necessária.

Note que a equação obtida é *dimensionalmente consistente*:

$$
\begin{aligned}
[\![v]\!] &= \mathsf{LT}^{-1}, \\
\left[\!\!\left[\sqrt{gRS_f}\right]\!\!\right] &= \left[\!\!\left[\left[\mathsf{LT}^{-2}\,\mathsf{L}\,1\right]^{1/2}\right]\!\!\right] = \mathsf{LT}^{-1}, \\
[\![\kappa]\!] &= 1, \\
\left[\!\!\left[\frac{z_0}{R}\right]\!\!\right] &= 1.
\end{aligned}
$$

Além disso, a função log possui argumento adimensional, como dita o Teorema de Buckingham (Buckingham, 1914).

Observe que para que o cálculo seja realizado, é preciso conhecer a rugosidade z_0 do "fundo". Além disso, se a incógnita do problema for R (ou h), ou S_f, a solução precisará ser numérica. Métodos para a obtenção de raízes de equações que não possuem solução algébrica são bem conhecidos (método da bissecção, método de Newton-Raphson, etc.) e podem ser facilmente implementados.

2.6.1 A fórmula de Manning

Por motivos históricos, as equações da sub-seção acima não são normalmente utilizadas para o cálculo de perdas de carga em canais e rios. Historicamente, o perfil log só surgiu no século XX, com os estudos de Ludwig Prandtl e Theodor vón Kárman sobre camadas-limite turbulentas. Esses estudos foram em seguida sistematizados para o cálculo de perdas de carga em tubulações por Colebrook (1939) e Moody (1944).

Antes disso, entretanto, o engenheiro irlandês R. Manning propôs uma fórmula empírica para relacionar v e S_f em canais (Manning, 1891):

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2},$$

que em geral é denominada "Equação de Manning". A fórmula entretanto já tinha sido obtida anteriormente por Gauckler (1867). Na fórmula acima, n é um coeficiente que deve ser obtido experimentalmente para canais com diversos tipos de revestimento. Por exemplo, Chow (1959) apresenta extensas tabelas para n em seu capítulo 5.

Um problema imediato com a equação de Gauckler-Manning é que ela aparenta ser dimensionalmente inconsistente. Do lado esquerdo,

$$[\![v]\!] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1},$$

enquanto que do lado direito,

$$\left[\!\!\left[R^{2/3}\right]\!\!\right] = \mathsf{L}^{2/3}.$$

Para que a equação seja dimensionalmente consistente, é necessário que

$$[\![n]\!] = \mathsf{L}^{-1/3}\,\mathsf{T},$$

mas o significado físico que deve ser atribuído a um n com tais dimensões físicas está longe de ser óbvio.

Provavelmente, o primeiro pesquisador que propôs uma abordagem racional, ou uma "dedução", da equação de Manning, foi Keulegan (1938). O assunto continou a atrair interesse, entretanto, como por exemplo no trabalho de Chen (1991), e mais recentemente de Gioia e Bombardelli (2002). Aqui, nós vamos seguir mais de perto a dedução (se é que esse é um bom termo) de Chen.

A dedução baseia-se em substituir (ou *aproximar*) o perfil log por um perfil potência,

$$\frac{u(z)}{v_*} = a \left(\frac{z}{z_0}\right)^m,$$

e em seguida calcular a velocidade média na seção:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{v_*}{h}\int_0^h u(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{v_*}{h}\int_0^h a\left(\frac{z}{z_0}\right)^m \mathrm{d}z \\
&= \frac{av_*}{m+1}\left(\frac{h}{z_0}\right)^m
\end{aligned}
$$

É importante observar que esse resultado pressupõe que a distribuição de velocidades é uniforme na direção *transversal*. Isso não é estritamente verdadeiro, e estamos fazendo uma simplificação apenas para captar a essência da relação da equação de Gauckler-Manning com o perfil log e a rugosidade z_0 do fundo do canal. Note que agora tudo ficou muito simples:

$$
v_* = \sqrt{gRS_f},
$$

e

$$
h \approx R,
$$

(para uma seção em que $B \gg h$), de forma que, substituindo h por R, obtemos

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{a}{m+1}\left(\frac{R}{z_0}\right)^m \left[gRS_f\right]^{1/2} \\
&= \left[\frac{ag^{1/2}}{(m+1)z_0^m}\right] R^{m+1/2} S_f^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Se nós compararmos essa equação com a equação de Gauckler-Manning, devemos ter $m = 1/6$, donde

$$
v = \underbrace{\left[\frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}}\right]}_{1/n} R^{2/3} S_f^{1/2}.
$$

Note que o coeficiente de Manning agora pode ser expresso em termos de grandezas físicas e números adimensionais:

$$
\frac{1}{n} = \frac{6ag^{1/2}}{7z_0^{1/6}},
$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
[\![n]\!] &= \left[\left(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}\right)^{1/2}\mathsf{L}^{-1/6}\right]^{-1} \\
&= \left[\mathsf{L}^{1/2-1/6}\mathsf{T}^{-1}\right]^{-1} \\
&= \mathsf{L}^{-1/3}\mathsf{T}^{1},
\end{aligned}
$$

o que concorda com as dimensões de n extraídas diretamente da equação de Gauckler-Manning.

2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy

Em um tubo circular horizontal em escoamento laminar, a velocidade é proporcional à perda de carga:

$$v = \left(\frac{gD^2}{32\nu}\right) S_f.$$

Uma relação semelhante existe para o escoamento através dos microcanais que existem na matriz do solo; ela é a lei de Darcy:

$$q_x = \frac{Q}{A} = -k\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x},$$

onde

$$h(x) = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{q_x^2}{2g}$$

é a carga hidráulica total. O último termo acima em geral é considerado desprezível.

Nota: cuidado com a "termodinâmica" de Chow et al. (1988), porque ela não é muito boa: há muitas imprecisões. Por exemplo, a equação (2.7.5),

$$\mathrm{d}u = c_p \mathrm{d}T$$

está *errada*!

2.8 O balanço de radiação na superfície

A superfície da Terra recebe dois tipos de radiação:

Radiação de onda curta , na faixa 0.2–3.0 µm, emitida pelo sol, e transmitida através da atmosfera. Uma parte chega diretamente da direção aparente do sol (radiação solar direta) e outra chega após múltiplas revlexões (radiação solar difusa).

Radiação de onda longa , emitida pela própria atmosfera (gotas de água, vapor d'água, gases de efeito estufa, etc.) na faixa 3.0–100.0 µm.

O balanço de energia na superfície pode ser melhor entendido a partir da figura a seguir:

$$
\begin{aligned}
R_n &= R_s(1-\alpha) + \epsilon R_a - R_e, \\
R_e &= \epsilon \sigma T_0^4, \\
R_n &= H + LE + G.
\end{aligned}
$$

Os significados dos símbolos acima são os seguintes:

R_n Irradiância líquida (W m^{-2})

R_s Irradiância solar incidente (W m^{-2})

R_a Irradiância atmosférica incidente (W m^{-2})

R_e Irradiância emitida (W m^{-2})

H Fluxo de calor sensível (W m^{-2})

LE Fluxo de calor latente (W m^{-2})

E Fluxo de massa de vapor d'água ($\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$)

L Calor latente de evaporação (ou vaporização) ($\mathrm{J\,kg^{-1}}$)

G Fluxo de calor no solo ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

T_0 Temperatura da superfície (K)

α Albedo da superfície (1)

ϵ Emissividade/absortividade da superfície (1)

σ é a constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670374419\times10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.

Note que nas equações acima $\{\!|E|\!\} = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$; $\{\!|L|\!\} = \mathrm{J\,kg^{-1}}$ e que portanto

$$\begin{aligned}\{\!|LE|\!\} &= \mathrm{J\,kg^{-1}kg\,m^{-2}\,s^{-1}}\\ &= \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} = \mathrm{W\,m^{-2}}.\end{aligned}$$

2.9 Hidrologia computacional

Atualmente, muitos dos "métodos" desenvolvidos historicamente para hidrologia estão se tornando, ou se tornaram, obsoletos, com o advento de amplos recursos computacionais, com a expansão das redes de monitoramento, com o surgimento de sistemas de informação geográfica, e com o advento do grandes bases de dados de reanálise e de sensoriamento remoto.

Algumas bases globais são extremamente úteis, e devem ser citadas explicitamente:

SRTM (Shuttle Radar Topograpphy Mission) Veja https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/. Dados de topografia com resolução de 30 m, para todo o planeta.

MODIS Um grande número de produtos de sensoriamento remoto (satélite) (Ver tabelas a seguir)

CSFV2 (Dados de reanálise). Ver https://rda.ucar.edu/. Dados em format NETCDF.

Endereços de obtenção de produtos MODIS úteis para estimativas espacializadas de evaporação

Variável	Endereço
r_0	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod09.php
T_0, ϵ_0	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod11.php
NDVI	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod13.php
E	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod16.php

Frequência e resolução de produtos disponíveis

Variável	Frequência	Resolução espacial
r_0	8 dias	250 m
r_0	8 dias	500 m
r_0	1 dia	1 km
r_0	1 dia	250 m
T_{0r}, ϵ_0	8 dias	1 km
T_{0r}, ϵ_0	1 dia	1 km
NDVI	16 dias	250 m
NDVI	16 dias	500 m
NDVI	16 dias	1 km
E	8 dias	500 m

Nós precisamos, portanto, de capacidade para acessar as bases de dados, recuperar a informação relevante, entender e traduzir formatos, e realizar os processamentos necessários.

Nesta aula, nós vamos aprender alguns conceitos básicos que podem ser úteis para nós, embora a maior parte do processamento no curso vá ser feito com ferramentas e com formatos relativamente simples.

A escolha de uma linguagem de programação

No fundo, qualquer uma serve. Use a que você dominar melhor. Minha preferência pessoal, principalmente para um curso como o nosso, definitivamente é Python. Todos os meus exemplos neste curso serão em Python. Minha sugestão de instalação é miniconda: https://docs.conda.io/en/latest/miniconda.html.

Formatos binários, e formatos texto

Num formato binário, os dados são gravados como estavam na memória. Em geral isso significa que cada 8 bytes = 64 bits (tipicamente) codificam um número de ponto flutuante. Em computadores com processadores Intel, isso em geral significa o esquema abaixo:

A faixa de números que podem ser representados em 64 bits com essa organização é a seguinte:

$$\pm 2^{51} \times 2^{\pm 2^{10}}$$

A *mantissa* é um número inteiro de 52 bits. O *expoente* é outro número inteiro de 10 bits (mais um bit de sinal). O maior número representável em módulo dessa forma é

$$\pm 2^{51} \times 2^{1023} = \pm 2.024022533073106 \times 10^{323},$$

mas na prática o menor e o maior valor representáveis são

$$\pm 1.79769 \times 10^{308}.$$

Além disso (no sentido de $\pm\infty$) ocorre *overflow*.

Os números mais próximos de 0 representáveis são

$$\pm 2.22507 \times 10^{-308}.$$

Além disso (no sentido de 0) ocorre *underflow*.

O comportamento do programa quando ocorre *overflow*, *underflow* ou quando ocorrem operações ilícitas (por exemplo, $\sqrt{-1.0}$ para números "reais") é indefinido, e depende da linguagem e muitas vezes das opções com que o programa é rodado.

Um ponto importante a ser levado em consideração é que o fato de a representação interna ser toda na base 2 leva a erros de arredondamento. Considere o programa em Python

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
x = 0.1
print('%40.38f' % x)
```

sua saída é

```
0.10000000000000000555111512312578270212
```

Devido aos erros de arredondamento a se passar da base 10 para a base 2, o programa

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
x = 0.0
while True :
   x = x + 0.1
   print(x)
   if (x == 1.0) :
      break
   pass
pass
```

não para nunca!

Dito isso, vamos fazer alguns exemplos de arquivos binários. Nosso primeiro exemplo vai escrever 10 números de ponto flutuante em formato binário no disco, e depois nós vamos ver o seu "conteúdo". O programa é

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fou = open('bbin.dat','wb')     # abre um arquivo. wb == write/binary
from numpy import arange        # arange devolve um array com incrementos fixos
aa = arange(0.0,10.0,0.1,float) # cria o array
aa.tofile(fou)                  # escreve o array no arquivo fou
fou.close()                     # fecha o arquivo
print('%6.4f' % aa[0])
```

A saída agora, se visualizada, é

```
^@^@^@^@^@^@^@<9A><99><99><99><99><99><B9>?<9A><99><99><99><99><99>
<C9>?433333<D3>?<9A><99><99><99><99><99><D9>?^@^@^@^@^@^@<E0>?433333
<E3>?gfffff<E6>?<9A><99><99><99><99><99><E9>?<CD><CC><CC><CC><CC><CC>
<EC>?^@^@^@^@^@^@<F0>?<9A><99><99><99><99><99><F1>?433333<F3>?<CD><CC>
<CC><CC><CC><CC><F4>?gfffff<F6>?^@^@^@^@^@^@<F8>?<9A><99><99><99><99>
```

```
<99><F9>?433333<FB>?<CD><CC><CC><CC><CC><CC><FC>?gfffff<FE>?^@^@^@^@^@
^@^@@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^@@<9A><99><99><99><99><99>^A@gfffff^B@43
3333^C@^@^@^@^@^@^@^D@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^D@<9A><99><99><99><99>
<99>^E@gfffff^F@433333^G@^@^@^@^@^@^@^H@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^H@<9A>
<99><99><99><99><99>@gfffff@433333^K@^@^@^@^@^@^@^L@<CD><CC><CC><CC>
<CC><CC>^L@<9A><99><99><99><99><99>^M@gfffff^N@433333^O@^@^@^@^@^@^@^P@
gfffff^P@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^P@333333^Q@<9A><99><99><99><99><99>^Q
@^@^@^@^@^@^@^@^R@gfffff^R@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^R@433333^S@<9A><99><99>
<99><99><99>^S@^@^@^@^@^@^@^@^T@gfffff^T@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^T@433333^
U@<9A><99><99><99><99><99>^U@^@^@^@^@^@^@^@^V@gfffff^V@<CD><CC><CC><CC><CC>
<CC>^V@433333^W@<9A><99><99><99><99><99>^W@^@^@^@^@^@^@^@^X@gfffff^X@<CD>
<CC><CC><CC><CC><CC>^X@433333^Y@<9A><99><99><99><99><99>^Y@^@^@^@^@^@^@
^Z@gfffff^Z@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^Z@433333ESC@<9A><99><99><99><99><99>
ESC@^@^@^@^@^@^@^\@gfffff^\@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^\@433333^]@<9A><99>
<99><99><99><99>^]@^@^@^@^@^@^@^@gfffff^^@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^^@
433333^_@<9A><99><99><99><99><99>^_@^@^@^@^@^@^@@333333@gfffff@<9A><99>
<99><99><99><99>@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>@^@^@^@^@^@^@^@!@333333!@gfffff!
@<9A><99><99><99><99><99>!@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>!@^@^@^@^@^@^@"@3333
33"@gfffff"@<9A><99><99><99><99><99>"@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>"@^@^@^@^@
^@^@#@433333#@gfffff#@<9A><99><99><99><99><99>#@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>#@
```

Note que o tamanho do arquivo `bbin.dat` é 800 bytes. Faz sentido, certo?

Por outro lado, nós podemos imprimir os 10 elementos do array `aa`, depois que ele foi criado, em um arquivo texto, com o seguinte programa

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fou = open('ttxt.dat','wt')     # abre um arquivo. wt == write/text
from numpy import arange        # arange devolve um array com incrementos fixos
aa = arange(0.0,10.0,0.1,float) # cria o array
for i in range(0,10):          # loop sobre todos os elementos do array
   fou.write('%02d␣%4.1f\n' % (i,aa[i]))   # escreve cada elemento, pulando linha
pass
fou.close()                     # fecha o arquivo
```

cuja saída é

```
00  0.0
01  0.1
02  0.2
03  0.3
04  0.4
05  0.5
06  0.6
07  0.7
08  0.8
09  0.9
```

Finalmente, vamos ler o arquivo texto de volta:

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fin = open('ttxt.dat','rt')     # abre um arquivo. wt == read/text
from numpy import zeros         # zeros devolve um array com zeros
aa = zeros(10,float)            # cria o array
for line in fin:                # loop sobre as *linhas*
   field = line.split()         # separa os campos
   i = int(field[0])            # o primeiro campo
   aa[i] = float(field[1])      # o segundo campo
   print(field,i,aa[i])         # o que lemos?
pass
fin.close()                     # fecha o arquivo
```

A saída é

```
['00', '0.0'] 0 0.0
['01', '0.1'] 1 0.1
['02', '0.2'] 2 0.2
['03', '0.3'] 3 0.3
['04', '0.4'] 4 0.4
['05', '0.5'] 5 0.5
['06', '0.6'] 6 0.6
['07', '0.7'] 7 0.7
['08', '0.8'] 8 0.8
['09', '0.9'] 9 0.9
```

Tendo feito uma rápida "introdução" a Python (veja também os capítulos sobre Python em meu livro, em: https://nldias.github.io/pdf/matappa-2ed.pdf), vamos agora fazer um problema do livro-texto.

(Ex. 2.3.2 de Chow et al. (1988))

The precipitation and streamflow for the storm of May 12, 1980, on Shoal Creek at Northwest Park in Austin, Texas, are shown below. Calculate the time distribution of storage on the watershed assuming that the initial storage is 0. Compute the total depth of precipitation and the equivalent depth of streamflow which occurred during the 8-hour period. How much storage remained in the watershed at the end of the period? What percent of the precipitation appeared as streamflow during this period? What was the maximum storage? Plot the time distribution of incremental precipitation, streamflow, change in storage, and cumulative storage. The watershed area is 7.03 mi^2.

Time (h)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	
Incremental Precipitation (in)		0.18	0.42	0.21	0.16				
Instantaneous Streamflow (cfs)	25	27	38	109	310	655	949	1060	
Time (h)	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
Instantaneous Streamflow (cfs)	968	1030	826	655	466	321	227	175	160

Primeiro, nós preparamos um arquivo texto com os dados:

```
# Time (h) Precip (in)  Streamflow (cfs)
0.0        0.00         25.0
0.5        0.18         27.0
1.0        0.42         38.0
1.5        0.21         109.0
2.0        0.16         310.0
2.5        0.00         655.0
3.0        0.00         949.0
3.5        0.00         1060.0
4.0        0.00         968.0
4.5        0.00         1030.0
5.0        0.00         826.0
5.5        0.00         655.0
6.0        0.00         466.0
6.5        0.00         321.0
7.0        0.00         227.0
7.5        0.00         175.0
8.0        0.00         160.0
```

Em seguida nós plotamos os dados com Gnuplot

Os dados de entrada são plotados por

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
set output 'shoaldata.tex'
set xrange [0:8]
```

```
set yrange [0:36]
set ytics 0,3
set y2range [48:0]
set xtics 0,1
set y2tics 0,4,24
set xlabel 'Time␣(h)'
set y2label '$P\,(\mathrm{mm\,h^{-1}})$'
set ylabel '$Q\,␣(\mathrm{m^3\,s^{-1}})$'
set boxwidth 1.0 relative
set grid
plot 'shoal.dat' using (column(1)-0.25):(column(2)*25.4*2) axes x1y2 \
      notitle with boxes fs solid lc rgb 'gray75',\
      'shoal.dat' using 1:(column(3)*0.3048**3) axes x1y1 \
      notitle with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue'
```

e o gráfico resultante é este aqui:

O programa de processamento de dados está aqui:

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fin = open('shoal.dat','rt')        # abre um arquivo. wt == read/text
tt = []                             # lista vazia de tempos
pp = []                             # lista vazia de precipitações
qq = []                             # lista vazia de vazões
for line in fin:                    # loop sobre as *linhas*
   if line[0] == '#' :              # pula o cabeçalho
      continue
   pass
   field = line.split()             # separa os campos
   inst = float(field[0])           # o instante
   prec = float(field[1])*25.4      # precip em mm durante o intervalo
   vaz = float(field[2])*0.3048**3  # vazão em m3/s no instante
   tt.append(inst)                  # adiciona à lista de tempos
   pp.append(prec)                  # adiciona à lista de precips
   qq.append(vaz)                   # adiciona à lista de vazões
pass
fin.close()                         # fecha o arquivo de entrada
n = len(tt)                         # tamanho das listas
from numpy import array
tt = array(tt)                      # as listas se tornam arrays
pp = array(pp)
qq = array(qq)
# ------------------------------------------------------------------
# área da bacia, em m^2
# ------------------------------------------------------------------
Area = 7.03 * (1609.34)**2
print('Area␣=␣%8.2f␣km2' % (Area/1.0e6))
qe = (qq/Area)*1000*3600.0          # vazão específica, mm/h
print(pp)
print(qe)
# ------------------------------------------------------------------
# calculo o volume total precipitado
# ------------------------------------------------------------------
Vp = pp.sum()
```

```
print('Vp␣=␣', Vp, '␣mm')
# ---------------------------------------------------------------------
# calculo o volume total escoado com a regra do trapézio
# ---------------------------------------------------------------------
deltah = 0.5                        # dados de 0.5 em 0.5 hora
Se = qe[0] + qe[n-1]
Si = 0.0
for k in range(1,n-1):
   Si += qe[k]
Vq = Se + 2*Si
Vq *= deltah
Vq /= 2.0
print('Vq␣=␣', Vq, '␣mm')
# ---------------------------------------------------------------------
# cálculo do volume armazenado na bacia em função do tempo
# ---------------------------------------------------------------------
fou = open('shoal.out','wt')
Vp = 0.0
Vq = 0.0
Vs = 0.0
fou.write('%4.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f\n' % (0.0,0.0,0.0,0.0,0.0))
for k in range(1,n):
   dp = pp[k]
   dq = (qe[k-1]+qe[k])*deltah/2.0
   Vp += dp
   Vq += dq
   deltas = dp - dq
   Vs += deltas
   fou.write('%4.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f\n' % (tt[k],Vp,Vq,Vs,deltas))
pass
fou.close()
```

O *script* de Gnuplot para os totais acumulados na bacia é

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
set output 'shoalacum.tex'
set xrange [0:8]
set xtics 0,1
set xlabel 'Time␣(h)'
set ylabel '$S,\sum␣P,Q\,(\mathrm{mm})$'
set key at 6.75,20 left
plot 'shoal.out' using 1:2 title '$\sum␣P$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'red',\
     'shoal.out' using 1:3 title '$\sum␣Q$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue',\
     'shoal.out' using 1:4 title '$S$'      with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'brown'
```

e o gráfico resultante é

Capítulo 3

Água na atmosfera

3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa

A lei de Stefan-Boltzmann é

$$R = \epsilon \sigma T^4,$$

onde R é a radiação *emitida* pelo corpo, e T é a sua temperatura. Para um "corpo negro"[1], a emissividade $\epsilon = 1$. Cada superfície real possui uma emissividade $\epsilon < 1$ diferente.

Nesta seção, vamos considerar o equilíbrio termodinâmico global planetário para dois cenários de atmosfera e cobertura de superfície do planeta. O conceito mais simples com o qual podemos trabalhar é o de *temperatura de equilíbrio* T_e: esta é a temperatura em que um planeta está em equilíbrio termodinâmico com a radiação solar incidente. Agora, se a é o albedo planetário ($a \approx 0{,}30$), em média a radiação solar absorvida pela terra é $R_{s0}(1-a)\pi r_T^2$, onde $R_{s0} = 1361.5\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ é a *constante solar* (Wikipedia, 2020d), e r_T é o raio da terra. Por outro lado, o fluxo de energia radiante em ondas longas emitida pela Terra é em média (admitindo-se uma emissividade planetária igual a 1) $\sigma T_e^4 4\pi r_T^2$. Igualando-se os dois:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 &= \sigma T_e^4 4\pi r_T^2 \\ T_e &= \left[\frac{R_{s0}(1-a)}{4\sigma}\right]^{1/4} \\ &= \left[\frac{1361.5 \times 0.7}{4 \times 5.670374419 \times 10^{-8}}\right]^{1/4} = 254{,}60\,\mathrm{K} = -18{,}55^\circ\,\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Essa temperatura T_e é a temperatura que o planeta teria *se não houvesse atmosfera.*

Nós agora vamos construir 2 modelos simples para o efeito estufa. No primeiro, vamos colocar uma "campânula" de vidro em volta da Terra, como mostra a figura a seguir, onde ela é indicada pelo círculo pontilhado.

[1] Isso é um nome técnico, e não significa que o corpo precise ter coloração preta; na verdade, para as temperaturas observadas na atmosfera terrestre, a radiação é emitida em uma faixa de comprimentos de onda invisíveis para os seres humanos.

Nesta figura, a radiação solar atravessa a campânula e incide diretamente sobre a superfície da terra, a qual por sua vez emite radiação de onda longa R_{eT}. Por outro lado, a campânula (= atmosfera) absorve esta última, reemitindo um fluxo R_{eA} de radiação de onda longa tanto de volta à terra quanto em direção ao espaço. Desta forma, o balanço radiativo de ambos os corpos é

$$\begin{aligned} R_s + R_{eA} &= R_{eT}, \\ R_{eT} &= 2R_{eA}. \end{aligned}$$

Usando-se as equações de radiação, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 + \sigma T_A^4 4\pi r_T^2 &= \sigma T_s^4 4\pi r_T^2, \\ \sigma T_s^4 4\pi r_T^2 &= 2\sigma T_A^4 4\pi r_T^2, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 4\sigma T_s^4, \\ \sigma T_s^4 &= 2\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 8\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) &= 4\sigma T_A^4 \;\Rightarrow T_A = T_e; \\ T_s &= 2^{1/4} T_A = 2^{1/4} \times 254.60 = 302.77\,\mathrm{K}. \end{aligned}$$

Nota-se portanto que a temperatura da campânula, que representa a atmosfera[2], é a mesma temperatura de equilíbrio anterior, enquanto que a superfície ficou bem mais quente.

Este modelo pode ser sofisticado com a abertura de uma "janela" atmosférica, ou seja: com a utilização de uma emissividade atmosférica ϵ_a menor que 1. A figura a seguir ilustra este segundo modelo.

[2]Nestes caso simplificado, ela representa o *topo* da atmosfera, na "fronteira" com o espaço sideral; numa atmosfera real, obviamente, a atmosfera se torna progressivamente mais rarefeita na direção do espaço.

Agora, a atmosfera deixa escapar uma parcela $(1-\epsilon_a)$ da radiação emitida pela superfície da Terra. Na construção do balanço termodinâmico, é conveniente usar T_e no lugar de R_{s0}:

$$\begin{aligned} 4\pi r_T^2 \left[T_e^4 + \epsilon_a \sigma T_A^2 \right. &= \sigma T_s^4 \\ 4\pi r_T^2 \left[\epsilon_a \sigma T_s^4 \right. &= 2\epsilon_a \sigma T_A^4 \end{aligned} .$$

Usando-se agora $\epsilon_a = 0{,}9$, a solução do sistema acima é

$$\begin{aligned} T_s^4 &= \frac{2T_e^4}{2-\epsilon_a} \Rightarrow T_s = 295{,}64K \\ T_A^4 &= \frac{T_e^4}{2-\epsilon_a} \Rightarrow T_A = 248{,}60K \end{aligned}$$

Isso mostra claramente que a existência de "janelas" na atmosfera terrestre produz uma temperatura de superfície *menor*. A implicação disto é que se uma "janela" for fechada pela presença de um novo gás de efeito estufa que absorve radiação de onda longa nesta janela, a superfície ficará mais quente.

Chow et al. (1988) citam um valor médio de 210 W m^{-2} para a radiação solar atingindo a superfície da Terra. De onde vem esse número? Provavelmente ele é igual à incidência média de radiação solar dividade pela área da superfície da terra:

$$\frac{R_{s0}(1-a)\pi r_T^2}{4\pi r_T^2} = \frac{R_{s0}(1-a)}{4} = 238.26\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

(A diferença deve ser porque Chow et al. (1988) provavelmente usaram valores um pouco diferentes para R_{s0} e a.)

3.2 Circulação atmosférica

A circulação na atmosfera é forçada

1. pelo balanço radiativo do planeta;

2. pela rotação da Terra;

3. pela trajetória da Terra no espaço.

As camadas da atmosfera:

A troposfera é a camada mais densa, mais próxima da superfície, e onde ocorrem episódios significativos de convecção.

Apesar da diminuição de temperatura com a altitude, a troposfera é em sua maior parte *estável*. Uma pequena região, a camada-limite atmosférica, é instável ou neutra.

A combinação da existência de células de convecção e da rotação da terra produz os padrões globais de circulação vertical e horizontal.

Fonte: Seinfeld e Pandis (1998), Figura 1.2 (sem permissão, com objetivos estritamente didáticos)

As células verticais que vemos na figura acima são: a célula tropical, a célula de latitudes médias, e a célula polar. Massas de ar frio que se originam nas regiões polares movem-se em direção às zonas temperadas e tropicais, e seu encontro com massas de ar mais quente dão origem às frentes frias.

Em tempo bom, padrões persistentes de circulação se forma em torno de anti-ciclons extratropicais, como o anti-ciclone do Atlântico Sul:

3.3 A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura

A lei dos gases ideais se aplica bem para condições típicas da troposfera. Para uma *substância pura*, ela é dada por

$$pV = nR^{\#}T,$$

onde p é a pressão, V é o volume ocupado pelo gás, n é o número de moles, $R^{\#} = 8{,}314\,462\,618\,15\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ (no SI) é a constante universal dos gases e T é temperatura termodinâmica. Ainda para uma pura substância, ela também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p &= n\frac{R^{\#}}{V}T = \frac{m}{M}\frac{R^{\#}}{V}T = \frac{m}{V}\frac{R^{\#}}{M}T \quad \Rightarrow \\ p &= \rho RT. \end{aligned}$$

Acima, M é a massa molar; m é a massa do gás, o qual está relacionado com o número de moles por

$$m = nM;$$

a constante de gás é

$$R = \frac{R^{\#}}{M},$$

a qual depende do gás específico via M; e

$$\rho = \frac{m}{V}$$

é a densidade; seu inverso,

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{3.1}$$

é o *volume específico* v. Note que $p = \rho RT$ é mais útil do que $pV = nRT$ na prática: V não aparece na primeira, e ela só envolve quantidades intensivas (pressão, densidade e temperatura), de modo que se aplica a todos os pontos na atmosfera.

A lei dos gases é um caso específico de *equação de estado* em Termodinâmica; a equação de estado para uma substância pura toma uma das formas

$$p = p(v, T) \qquad \text{or} \qquad v = v(p, T) \qquad \text{or} \qquad T = T(p, v).$$

No caso dos gases atmosféricos, as letras minúsculas indicam quantidades específicas (por unidade de massa ou unidade de volume), e são mais convenientes já que nós não costumamos tratar indivídalmente "sistemas" ou "parcelas" de ar.

Duas funções termodinâmicas importantes são a energia interna específica u e a entalpia específica h definida por

$$h = u + pv.$$

Para uma substância pura, u e h são funções de duas variáveis, escolhidas entre p, v e T. Nós geralmente escrevemos

$$\begin{aligned} u &= u(v, T), \\ h &= h(p, T), \end{aligned}$$

uma vez que estes pares levam a definições úteis de quantidades mensuráveis, tais como calores específicos. As equações acima levam a diferenciais perfeitos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T, \\ \mathrm{d}h &= \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T. \end{aligned}$$

Os calores específicos a volume constante e pressão constante são definidos por

$$\begin{aligned} c_v &= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \\ c_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p. \end{aligned}$$

Os subscritos v e p no lado direito das equações acima são usados em termodinâmica como lembretes de que u está sendo tomada em função da v, T, e que h está sendo tomada como uma função de p, T.

Para um gás perfeito, a equação de estado toma a forma

$$pv = RT,$$

onde R é uma constante de gás específica para a substância pura e é possível mostrar que, neste caso u e $\hbar$ são funções de T somente (Adkins, 1983). Então, as derivadas parciais que definem c_v e c_p se tornam derivadas ordinárias. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \hbar}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial T}[u + pv]\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} + p\frac{R}{p} \quad \Rightarrow \\
c_p &= c_v + R.
\end{aligned}$$

Fisicamente, $c_p > c_v$ devido à energia extra necessária para a expansão da o ar contra a pressão constante p.

3.4 A atmosfera como uma mistura de gases ideais

A atmosfera no entanto não é uma substância pura, mas uma mistura de gases. A questão então é como $pV = nR^{\#}T$ pode ser razoavelmente generalizado para uma mistura de gases. Na verdade, a partir de agora, muitas vezes quando nós usarmos $p = \rho RT$, etc, estaremos nos referindo à pressão atmosférica total p (de uma mistura de gases), à densidade total ρ da atmosfera, etc ..

Portanto, vamos começar, exigindo que $pV = nRT$ *valha para a mistura*; em seguida, o número total de moles, n, é a soma de o número de moles de cada componente individual. Seja i o índice para cada um dos gases em uma mistura; temos

$$n = \sum_i n_i,$$

onde n_i é o número de moles do gás i.

Queremos que a lei dos gases perfeitos seja aplicável também para cada constituinte. Existem duas possibilidades para fazermos isso: o modelo de pressões parciais, e o modelo de volumes parciais. No primeiro caso, especificamos para cada gás

$$p_i V = n_i R^{\#} T.$$

Neste modelo de todos os gases ocumpam um volume comum V, cada um exercendo a sua própria pressão parcial p_i, de tal modo que a pressão total é

$$p = \sum_i p_i.$$

No segundo caso,

$$pV_i = n_i R^{\#} T,$$

e agora todos os gases são sujeitos à mesma pressão p, cada um ocupando, nominalmente, um volume parcial V_i, com

$$V = \sum_i V_i.$$

Em ambos os casos, somando as equações de estado individuais recupera-se a lei dos gases perfeitos para a mistura. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\sum_i (p_i V) &= \sum_i \left(n_i R^{\#} T\right), \\
\left(\sum_i p_i\right) V &= \left(\sum_i n_i\right) R^{\#} T, \\
pV &= nR^{\#} T.
\end{aligned}$$

Os modelos de volumes parciais e pressões parciais levam a

$$x_i = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n}$$

que define uma concentração (expressa em tradicionalmente %, partes por milhão (ppm), partes por bilião (ppb), etc.) quer em fração de pressão parcial, fração de volume parcial, ou *fração molar*. A lei de gás para cada constituinte também pode ser escrita

$$\begin{aligned}
p_i &= n_i \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m_i}{M_i} \frac{R^{\#}}{V} T = \frac{m_i}{V} \frac{R^{\#}}{M_i} T \quad \Rightarrow \\
p_i &= \rho_i R_i T,
\end{aligned}$$

onde (como antes para uma substância pura)

$$m_i = n_i M_i$$

e

$$\begin{aligned}
\rho_i &= m_i / V, \\
v_i &= \frac{1}{\rho_i},
\end{aligned}$$

são a densidade ou a massa específica (com massa m_i ocupando o volume V) e o volume específico, respectivamente, do gás i, e M_i é a massa molar do gás i.

$$R_i = \frac{R^{\#}}{M_i}$$

é a constante do gás i.

Note que ρ_i é ela mesma uma concentração, dada por massa da substância i por volume ($\mathrm{kg_i\,m^{-3}}$).

Mais uma vez, $p = \rho RT$ é válida para o mistura. Para ver como, note que a massa total da mistura é

$$m = \sum_i m_i;$$

e da mesma forma para a densidade total:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_i m_i}{V} = \sum_i \frac{m_i}{V} = \sum_i \rho_i.$$

Também será necessário definir a *concentração mássica* ou *fração mássica* de cada constituinte,

$$c_i \equiv \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}.$$

Agora nós somamos as equações dos constituintes para obter

$$\begin{aligned}
\sum_i p_i &= \sum_i \rho_i R_i T, \\
p &= \left(\sum_i \rho_i R_i \right) T \equiv \rho R T.
\end{aligned}$$

Isso *define* a constante de gás R da mistura; agora, temos

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\sum_i \rho_i R_i}{\rho} \\
&= \frac{\sum_i \frac{m_i}{V} R_i}{\frac{m}{V}} \\
&= \sum_i \frac{m_i}{m} R_i = \sum_i c_i R_i.
\end{aligned}$$

Portanto, dadas as concentrações mássicas, nós podemos calcular a constante de gás equivalente.

A massa molar média da mistura é

$$M = \sum_i x_i M_i = \frac{\sum_i n_i M_i}{n} = \frac{m}{n},$$

Isso finalmente permite fechar o circuito e recuperar a constante de gás para a mistura:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{m} \left(\sum_i m_i R_i \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i M_i R_i \right) \\
&= \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i R^{\#} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_i n_i \right) R^{\#} \\
&= \frac{n}{m} R^{\#} = \frac{R^{\#}}{M}.
\end{aligned}$$

Concentrações

Uma relação entre x_i e c_i pode agora ser facilmente obtida:

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\frac{m}{M}} = \frac{m_i}{m} \frac{M}{M_i},$$

ou

$$x_i M_i = c_i M.$$

Outras medidas de concentração também estão em uso em meteorologia, e precisam ser definidas. A razão de mistura pode ser expressa quer como uma *razão de mistura molar*,

$$\eta_i = \frac{n_i}{n - n_i},$$

ou como uma *razão de mistura mássica*

$$r_i = \frac{m_i}{m - m_i}.$$

É simples converter frações mássicas c_i em razões (mássicas) de mistura r_i e vice-versa:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\rho_i}{\rho - \rho_i} = \frac{\frac{\rho_i}{\rho}}{1 - \frac{\rho_i}{\rho}}; \\ r_i &= \frac{c_i}{1 - c_i} \quad \Rightarrow \\ c_i &= \frac{r_i}{1 + r_i}. \end{aligned}$$

A razão de mistura, por conseguinte, é a razão entre a quantidade (quer em moles ou em massa) da substância i e a quantidade de todos as *outras* substâncias. Segue-se que para qualquer substância *diferente* do vapor de água , o denominador inclui a quantidade de vapor d'água presente no ar no momento da medição. Por esta razão, *quando i não é vapor d'água*, η_i e r_i são chamadas de *razões de mistura úmidas*.

Nós listamos na tabela a seguir as fracções molares de vários gases atmosféricos em $\mathrm{g\,m^{-3}}$ em uma atmosfera *seca* (uma atmosfera fictícia sem vapor de água). Os valores de M_i foram obtidos a partir de NIST (2020). Os valores de x_i são de Dias (2020), e eles são *aproximações*, com base em várias referências existentes (Iribarne e Godson, 1981; COESA, 1976; Wallace e Hobbs, 2006; Wikipedia, 2020a); os valores de x_i, particularmente para CO_2, são atualizados com os dados disponíveis mais recentes (a partir de 2020). Além disso, os valores foram ajustados manualmente para garantir que

$$\sum_i x_i = 1.$$

Constituição de uma atmosfera "seca" (não incluindo vapor d'água. Os valores são aproximados, e ajustados para assegurar que as fracções molares somem 1.

Gas	M_i ($\mathrm{g\,mol^{-1}}$)	x_i ($\mathrm{mol\,mol^{-1}}$)
N_2	28.0134	0.78078700
O_2	31.9988	0.20943200
Ar	39.948	0.00934000
CO_2	44.0095	0.00041390
Ne	20.1797	0.00001818
He	4.002602	0.00000524
CH_4	16.0425	0.00000170
Kr	83.798	0.00000110
H_2	2.01588	0.00000055
N_2O	44.0128	0.00000033
soma		1.00000000

Estamos agora em condições de calcular a constante do gás para *ar seco*, R_d, por meio de $M = \sum_i x_i M_i$ e $R = R^\#/M$, utilizando os valores da tabela acima, e obtendo

$$R_d = 287.0429\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}.$$

Este valor é ligeiramente menor do que o que foi adotado para a atmosfera padrão de 1976 ($R_d = 287.0569$), que é compatível com a tabela I-4 de Iribarne e Godson (1981). Note entretanto que tem havido um aumento constante no CO_2 atmosférico desde a publicação da Atmosfera Padrão de 1976, e portanto, além de não ser muito diferente do de COESA (1976), o valor adotado aqui é provavelmente mais próximo do estado atual (2020) da atmosfera.

Ar úmido

Note que as equações de seção 3.3 não são estritamente válidas para o ar atmosférico, o que não é um substância *pura*; ao contrário, é uma mistura de muitos gases. Cada nova constituinte faz com que as equações termodinâmicas fiquem mais complexas; em particular, funções de estado, tais como u e h tornam-se então também funções das concentrações de cada novo constituinte.

Nós não vamos seguir o caminho rigoroso de tratar a atmosfera como uma mistura de vários gases e de dar o tratamento termodinâmico completo para a mistura; em vez disso, vamos considerar "ar seco", discutido acima e vamos introduzir diversos índices de umidade para a concentração de vapor d'água (que é o componente variável mais importante da atmosfera).

Considere então um certo volume V, composto inicialmente de ar seco com massa m_d, número total de moles n_d, pressão p_d, e densidade ρ_d, ao qual se adiciona vapor d'água com massa m_v e n_v moles. As equações desenvolvidas na seção 3.4 aplicam-se para o ar úmido. De acordo com o modelo de pressões parciais, cada componente gasoso exerce sua própria pressão parcial em função da temperatura T e do número de moles n_i. Se vapor d'água for adicionado isotermicamente, a pressão total após sua adição aumentará em um valor igual à *pressão parcial de vapor d'água* a qual é dada por

$$e = \frac{1}{V} n_v R^\# T.$$

Estritamente falando, deveríamos ter usado p_v em lugar de e acima, mas é padrão em Meteorologia denominar a pressão parcial de vapor e, e vamos seguir essa prática.

O conteúdo de vapor d'água no ar, entretanto, é altamente variável na atmosfera; além disso, em medições de fluxos turbulentos de escalares é frequentemente preferível utilizar concentrações medidas em uma atmosfera seca equivalente (veja, por exemplo, Butenhoff e Khalil, 2002). Portanto, nós revisitaremos diversas definições de concentração em relação aos componentes de uma atmosfera seca. Para a fração molar, nós agora temos a pressão do ar seco, a razão volumétrica e a razão molar

$$x_{di} = \frac{p_i}{p_d} = \frac{V_i}{V_d} = \frac{n_i}{n_d} \qquad (i \neq v)$$

e a fração mássica (ou concentração mássica) de ar seco,

$$c_{di} = \frac{\rho_i}{\rho_d} \qquad (i \neq v).$$

Acima, observe que após a adição de vapor d'água, o volume dos constituintes do ar seco será $V_d < V$. Também podemos considerar as razões de mistura *secas*

$$\eta_{di} = \frac{n_i}{n_d - n_i}, \qquad (i \neq v)$$

e

$$r_{di} = \frac{m_i}{m_d - m_i} \qquad (i \neq v).$$

Desde que as concentrações relativas dos componentes do ar seco permaneçam as mesmas, os cálculos anteriores das propriedades do ar seco M_d e R_d (a massa molecular média e a constante de gás do ar seco, respectivamente) também permanecem inalteradas. Verifiquemos:

$$p = p_d + e,$$

onde p_d é dado por

$$p_d = \sum_{i \neq v} p_i = \sum_{i \neq v} \rho_i R_i T \equiv \rho_d R_d T.$$

Como antes, a equação acima define R_d. Portanto, o valor da constante de gás de ar seco em uma atmosfera úmida é

$$R_d = \frac{\sum_{i \neq v} \rho_i R_i}{\rho_d} = \sum_{i \neq v} \frac{\rho_i}{\rho_d} R_i = \sum_{i \neq v} c_{di} R_i,$$

onde os pesos das constantes específicas de gás R_i são agora as concentrações mássicas "secas" c_{di}. Prosseguindo,

$$\begin{aligned} R_d &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} m_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i M_i R_i \\ &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i R^{\#} = \frac{1}{m_d} \left(\sum_{i \neq v} n_i \right) R^{\#} \\ &= \frac{n_d}{m_d} R^{\#} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Mas a massa molar média do ar seco em uma atmosfera úmida é, por definição,

$$M_d = \sum_{i \neq v} x_{di} M_i = \frac{\sum_{i \neq v} n_i M_i}{n_d} = \frac{m_d}{n_d}$$

de forma que, como antes,

$$R_d = \frac{R^{\#}}{M_d}.$$

Note também que se as concentrações relativas dos componentes do ar seco não mudam, então os x_{di}'s de agora são os mesmos que os x_i's na tabela acima, o que prova a afirmação de que neste caso os valores de M_d e R_d não mudam.

Com estes resultados em mão, podemos simplificar os cálculos substancialmente dividindo ar ocupando V com massa total de m em um componente seco e vapor de água:

$$\begin{aligned} m &= m_d + m_v, \\ \frac{m}{V} &= \frac{m_d}{V} + \frac{m_v}{V}, \\ \rho &= \rho_d + \rho_v, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde ρ_v é a densidade de vapor de água. Em si mesmo, ρ_v é um índice de concentração de vapor de água; em meteorologia, é chamado *umidade absoluta*. Usando $M_v = 18.0153\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, descobrimos que

$$R_v = 461.5230\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$$

é a constante de gás para o vapor d'água. A pressão parcial de vapor d'água é

$$e = \rho_v R_v T.$$

A *umidade específica* q é o mesmo que a fração mássica de vapor d'água c_v, sendo definida como

$$q = \frac{\rho_v}{\rho}.$$

Em meteorologia, é normal usar q e não c_v (este último também é fácil confundir com o calor específico a volue constante, c_v, *e será evitado*. De novo: compare $c_v \times c_v$). Somando as pressões parciais de ar seco e de ar úmido,

$$\begin{aligned} p &= p_d + e \\ &= \rho_d R_d T + \rho_v R_v T \\ &= (\rho_d R_d + \rho_v R_v)\, T \\ &= \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) T \\ &= \rho R_d \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T \\ &= \rho R_d \left((1-q) + \frac{R_v}{R_d} q \right) T. \end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned} \frac{R_v}{R_d} &= 1.608 \approx 1.61 \qquad \Rightarrow \\ p &= \rho R_d \underbrace{(1 + 0.61q)T}_{T_v}, \qquad \text{ou} \\ p &= \rho \underbrace{R_d(1 + 0.61q)}_{R} T \end{aligned}$$

A *temperatura virtual* T_v definida acima é a temperatura de uma atmosfera seca com a mesma densidade ρ; T_v é ligeiramente maior do que T. Um outro índice de umidade atmosférica é a razão de mistura (mais especificamente, a razão de mistura mássica para o vapor d'água). A razão de mistura foi definida anteriormente. Para o vapor d'água, a razão de mistura mássica é

$$r_v = \frac{\rho_v}{\rho - \rho_v} = \frac{\rho_v}{\rho_d}.$$

Na sequência nós vamos usar sistematicamente a lei dos gases

$$p_i = \rho_i R_i T \;\Rightarrow\; \rho_i = \frac{p_i}{R_i T}.$$

Relações úteis entre a razão de mistura e a umidade específica são

$$\begin{aligned} r_v &= \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{(p-e)}{R_d T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v}\frac{e}{p-e} = 0.622\,\frac{e}{p-e}; \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\rho_d + \rho_v} \\ &= \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p-e}{R_d T} + \frac{e}{R_v T}} \\ &= \frac{R_d}{R_v}\frac{e}{p + \left(\frac{R_d}{R_v} - 1\right) e} \\ &= 0.622\frac{e}{p - 0.378e} \approx 0.622\frac{e}{p}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.5 Saturação e grandezas associadas

O calor latente de evaporação da água, L_w, é a quantidade de a energia usada para mudar a fase de uma unidade de massa de líquido para vapor, em uma mistura pura das duas fases. Uma boa aproximação para a obtenção de uma expressão para L_w como uma função da temperatura é o pressuposto de que as capacidades térmicas das duas fases são iguais. Isso leva a (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. 10.16)

$$\mathrm{d}L_w = [c_{pv} - c_{pw}]\mathrm{d}T$$

onde c_{pv} e c_{pw} são os calores específicos a pressão constante do vapor de água e da água no estado líquido, respectivamente. Se os calores específicos, por sua vez, forem supostos constantes, obtém-se

$$L_w = a_L + b_L T$$

onde $b_L = [c_{pv} - c_{pw}]$. No SI, com T in Kelvins, Dake (1972) fornece

$$L_w = 3.142689 \times 10^6 - 2.365601 \times 10^3 T$$

in $\mathrm{J\,kg^{-1}}$. Henderson-Sellers (1984) argumenta que uma expressão mais acurada é

$$L_w = 1.91846 \times 10^6 \left[T/(T - 33.91)\right]^2 .$$

Uma alternativa razoável é usar um valor constante, dado que L_w varia pouco com T na faixa de temperaturas normalmente observadas no ambiente. A $T = 288.15\,\mathrm{K}$, $L_w = 2.464 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.

Para um sistema constituído por vapor d'água e água no estado líquido em equilíbrio, uma equação pode ser obtida para a derivada em relação à temperatura da *pressão de saturação do vapor d'água* e^* (a pressão do vapor de água em equilíbrio com a água em estado líquido) para a mudança em volume específico v entre as duas fases e o calor latente, a saber

$$\frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} = \frac{L_w}{T\Delta v};$$

esta é a equação de *Clausius-Clapeyron* equation (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. (10.11)). Acima,

$$\Delta v = v_v - v_w.$$

Supondo a validade da lei dos gases ideais, e que o volume específico da fase líquida é insignificante em comparação com o volume específico do vapor d'água, a equação de Clausius-Clapeyron leva a (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. (10.12))

$$\frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} = \frac{L_w e^*}{R_v T^2}.$$

Observe que a dependência do calor latente L_w com a temperatura termodinâmica pode ser usada para integrar a equação acima,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^*}{e^*} &= \frac{L_w}{R_v}\frac{\mathrm{d}T}{T^2}, \\
\frac{\mathrm{d}e^*}{e^*} &= \frac{1}{R_v}\frac{(a_L + b_L T)}{T^2}\,\mathrm{d}T, \\
\ln\left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)}\right) &= \int_{T_0}^{T} \frac{1}{R_v}\frac{(a_L + b_L \tau)}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau, \\
\ln\left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)}\right) &= \frac{1}{R_v}\left\{-b_L \ln(T_0) + b_L \ln(T) + a_L\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\},
\end{aligned}$$

resultando em

$$e^*(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{b_L}{R_v}} e^*(T_0) \exp\left[\frac{a_L}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right],$$

onde T_0 é uma temperatura de referência. Com $b_L = 0$, a equação acima se parece muito (mas não é igual) à equação empirica de Teten (Murray, 1966; Dilley, 1968; Stull, 1995; Alduchov e Eskridge, 1996):

$$e^*(T) = e_0 \exp\left[\frac{b(T - T_1)}{T - T_2}\right],$$

com $e_0 = 610.78\,\mathrm{Pa}$, $b = 17.2693882\,\mathrm{K^{-1}}$, $T_1 = 273.16\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 35.86\,\mathrm{K}$. Para a pressão de vapor em equilíbrio com o gelo, as constantes mudam para $b = 21.8745584$ e $T_2 = 7.66$.

Para a maioria das aplicações meteorológicas, a fórmula de Teten é mais do que suficiente. Note entretanto que as constantes mudam para a pressão do vapor de saturação sobre o *gelo*; Note também que a presença de sais na água altera e^* significativamente. Finalmente, a equação de Richards (Brutsaert, 1982) é

$$\begin{aligned} e^*(T) &= 101\,325 \exp\left[13.3185 t_r - 1.9760 t_r^2 - 0.6445 t_r^3 - 0.1299 t_r^4\right], \\ \frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} &= \frac{373.15}{T^2} e^*(T) \left[13.3185 - 3.9520 t_r - 1.9335 t_r^2 - 0.5996 t_r^3\right], \\ t_r &= 1 - \frac{373.15}{T}. \end{aligned}$$

Muitas dessas fórmulas foram obtidas para padrões antigos de temperatura (ITS-27, ITS-48, IPTS-68, IPTS-68(75), EPT-76), que foram revistos significativamente em 1990 (ITS-90); ver Consultative Committee for Thermometry (2015); em particular, o ponto de ebulição da água pura (VSMOW; Wikipedia (2020e)) a uma pressão atmosférica (101 325 Pa) é 99.974°C, e não mais 100 °C! (Wikipedia, 2020b).

O conceito de saturação agora permite a definição de vários índices de umidade nele baseados. A *umidade relativa* y é a razão entre a razão de mistura real e a razão de mistura em uma atmosfera saturada, à mesma temperatura e à mesma pressão:

$$y = \frac{r}{r^*}.$$

Note que, por ser especificada à mesma temperatura e pressão, a densidade do ar seco na atmosfera saturada (ρ_{d*}) é na verdade menor do que a densidade do ar seco na atmosfera não-saturada (ρ_d). As equações de estado são

$$\begin{aligned} p - e &= \rho_d R_d T, & e &= \rho_v R_v T, \\ p - e^* &= \rho_{d*} R_d T, & e^* &= \rho_v^* R_v T. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y = \frac{r}{r^*} &= \frac{\frac{\rho_v}{\rho_d}}{\frac{\rho_v^*}{\rho_{d*}}} = \frac{\rho_{d*}}{\rho_d} \times \frac{\rho_v}{\rho_v^*} \\ &= \frac{\frac{p-e^*}{R_d T}}{\frac{p-e}{R_d T}} \times \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e^*}{R_v T}} \\ &= \frac{p - e^*}{p - e} \times \frac{e}{e^*} \\ &= \frac{p(1 - e^*/p)}{p(1 - e/p)} \times \frac{e}{e^*} \\ \text{mas } \frac{1}{1 - e/p} &\approx 1 + e/p; \\ &\approx (1 - e^*/p)(1 + e/p)\frac{e}{e^*} \\ &\approx \frac{e}{e^*}. \end{aligned}$$

A última equação acima é a comumente utilizada em cálculos.

A *temperatura de ponto de orvalho* T_d é a temperatura à qual a pressão reinante de vapor d'água se torna a pressão de saturação:

$$e^*(T_d) = e.$$

Geralmente, a temperatura varia com a altura na camada limite atmosférica . Subscritos como T_x ou e_x, muitas vezes serão usados para especificar temperatura, pressão de vapor de água, etc, em algum nível específico. Além disso, muitas vezes, vamos usar a notação simplificada

$$\begin{aligned} e_x^* &= e^*(T_x), \\ \Delta_x &= \frac{\mathrm{d}e^*(T_x)}{\mathrm{d}T}, \\ \rho_{vx}^* &= \rho_v^*(T_x). \end{aligned}$$

Na figura a seguir, mostramos no quadro A, as condições prevalecentes no atmosfera. No quadro B, a saturação é atingida, a partir de A, através do aumento teor de vapor de água. No quadro C, condições de saturação também são atingidas, mas desta vez através de uma queda contínua na temperatura até a temperatura de ponto de orvalho T_d.

Exercises

3.1 Show that the *exact* expression for e as a function of y also depends on p and is

$$e = \frac{ye^*}{1 + (y-1)\frac{e^*}{p}}.$$

Of course, e^* itself is a function of temperature.

3.6 Temperatura potencial

Análise para uma atmosfera sem condensação

Considere a expansão adiabática de uma parcela de ar, a partir de um nível (mais acima) em que a pressão ambiente é p para um nível mais baixo em que a pressão ambiente é p_0. A primeira lei da termodinâmica é (q é o calor por unidade de massa adicionado ao sistema; w é o trabalho por unidade de massa realizado sobre o sistema)

$$\mathrm{d}u = đq + đw;$$

Para um processo adiabático ($đq = 0$) e reversível,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= -p\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}u &= c_v \mathrm{d}T. \end{aligned}$$

A diferenciação da lei dos gases ($pv = RT$) e o uso das definições dos calores específicos a volume constante e pressão constante leva a

$$\begin{aligned} p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p &= R\mathrm{d}T \\ c_v\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p - R\mathrm{d}T \\ (c_v + R)\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p = \frac{RT}{p}\mathrm{d}p \\ c_p\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p = \frac{RT}{p}\mathrm{d}p \\ \frac{\mathrm{d}T}{T} &= \frac{R}{c_p}\frac{\mathrm{d}p}{p}. \end{aligned}$$

Nós agora integramos entre os pares (T, p) e (θ, p_0):

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

A temperatura potencial θ definida acima é a temperatura de uma parcela de ar trazida adiabatica e reversivelmente do estado p, T para um estado de referência cuja pressão é p_0.

O cálculo da temperatura potencial deve ser feito com o valor correto de R/c_p no caso de ar úmido. Isso ocorre porque neste caso a constante de gás e o calor específico a pressão constante de ar úmido dependem da umidade específica q. Para ver isso, suponha que a entalpia total (não a *entalpia específica*) para uma parcela de ar com massa total m possa ser calculada adicionando as entalpias de seco e o ar úmido:

$$mh = m_d h_d + m_v h_v.$$

Isso produz

$$\begin{aligned} h &= \frac{\rho_d}{\rho}h_d + \frac{\rho_v}{\rho}h_v, \\ h &= (1-q)h_d + qh_v, \\ c_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{p,q} = (1-q)c_{pd} + qc_{pv} = (1 + 0.84q)c_{pd} \end{aligned}$$

(usando valores tabelados para c_{pd} e c_{pv}: ver (Brutsaert, 1982, Tabela 3.1): $c_{pd} = 1005\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, e $c_{pv} = 1846\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$).

Com base na definição da temperatura virtual, a constante de gás para ar úmido é

$$R = R_d(1 + 0.61q)$$

(Note que se trata de uma interpretação alternativa de temperatura virtual: nós agora estamos mudando a constante de gás, enquanto mantemos a temperatura absoluta T, de tal forma que $pv = RT$ ainda se aplica.) Portanto,

$$\frac{R}{c_p} = \frac{R_d}{c_{pd}} \frac{1 + 0.61q}{1 + 0.84q}.$$

Usando a identidade

$$\frac{1 + ax}{1 + bx} \equiv 1 - (b - a)x + \frac{(b - a)bx^2}{1 + bx} \approx 1 - (b - a)x,$$

nós encontramos (para $x = q \ll 1$)

$$\frac{R}{c_p} \approx (1 - 0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}$$

para ar úmido. Portanto,

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(1-0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}}$$

Também é imediato obter o calor específico a volume constante para o ar úmido:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{v,q} = (1 - q)c_{vd} + qc_{vv} = (1 + 0.94q)c_{vd},$$

fazendo novamente uso da Tabela 3.1 de Brutsaert (1982), com $c_{vd} = 716\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, $c_{vv} = 1386\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Finalmente, essas definições se estendem para a temperatura virtual, *mas não de forma unívoca*, como discutido em Brutsaert (1982, seção 3.2b). A *temperatura potencial virtual* é a temperatura virtual que uma parcela de ar úmido teria se trazida adiabaticamente de seu estado real até a pressão de referência p_0:

$$\theta_{vp} = T_v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(1-0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

Isso é ligeiramente diferente (numericamente) da *temperatura virtual potencial*, que é a temperatura potencial de ar seco com a mesma pressão e a mesma densidade iniciais, e que é dada por

$$\theta_{pv} = T_v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

As duas quantidades são obviamente muito próximas numericamente. Daqui para frente, sempre utilizaremos a temperatura potencial virtual. Além disso, nós a denotaremos simplesmente por θ_v.

A taxa de variação da temperatura em uma atmosfera com condensação (taxa pseudo-adiabática)

Considere a equação de estado de um gás ideal, e um estado hidrostático da atmosfera:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{v},\\ pv &= RT \quad \Rightarrow\\ p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p &= R\mathrm{d}T\end{aligned}$$

Considere também a 1ª lei da Termodinâmica *para um gás ideal, em um processo adiabático*:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= đw + \cancelto{0}{đq},\\ c_v\mathrm{d}T &= -p\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior,

$$-c_v\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p = R\mathrm{d}T$$

Mas

$$v\mathrm{d}p = -g\mathrm{d}z; \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}-c_v\mathrm{d}T - g\mathrm{d}z &= R\mathrm{d}T,\\ -g\mathrm{d}z &= (R + c_v)\mathrm{d}T,\\ -g\mathrm{d}z &= c_p\mathrm{d}T,\\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{c_p} = -0.00976\,\mathrm{K\,m^{-1}},\end{aligned}$$

que é a *taxa adiabática seca.* Em uma atmosfera úmida, a coisa é mais complicada: à medida que parcelas são levantadas e atingem níveis mais altos e frios, uma parte do vapor d'água condensa, e o calor latente liberado *diminui* a queda de temperatura. Isso produz taxas *pseudo-adiabáticas úmidas.* Um valor representativo, frequentemente citado é

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -0.00650\,\mathrm{K\,m^{-1}}.$$

Nós podemos retomar os cálculos da temperatura potencial para uma atmosfera em que ocorre condensação, de forma aproximada. Seja portanto

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\alpha$$

a taxa pseudo-adiabática prevalecente na atmosfera. As equações agora são

$$\begin{aligned}v\mathrm{d}p &= -g\mathrm{d}z, && \text{(eq. hidrostática)}\\ \mathrm{d}T &= -\alpha\mathrm{d}z. && \text{(“substituindo a 1ª Lei”)}\end{aligned}$$

Com a lei dos gases,

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{RT}{p}, \\
\frac{RT}{p}\mathrm{d}p &= -g\mathrm{d}z, \\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= \left(-\frac{g}{RT}\right)\mathrm{d}z, \\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= \left(-\frac{g}{\alpha R}\right)\frac{\mathrm{d}T}{T}, \\
p_2 &= p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{g/(\alpha R)},
\end{aligned}
$$

juntamente com

$$T_2 = T_1 - \alpha(z_2 - z_1).$$

Água precipitável

É a massa de água em uma coluna da atmosfera entre dois níveis *por unidade de área* (minha definição).

$$m_P(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} q\rho\mathrm{d}z.$$

Exemplo 3.2.2 de Chow et al. (1988): Calcule a água precipitável em uma coluna de ar saturado de 10 km de altura a partir da superfície ($p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, $T = 30°\mathrm{C}$, $\alpha = 6.5°\mathrm{C}\,(100\,\mathrm{m})^{-1}$).

Para resolver o problema, nós vamos precisar de um computador, e de uma linguagem de programação. Usarei Python. Precisaremos de uma rotina para calcular a pressão de saturação de vapor d'água, de uma rotina de integração numérica, e das constantes de gás para fazermos todos os cálculos.

O programa `agprec.py` é (espero!) auto-explicativo.

Um ponto importante é o cálculo iterativo do estado da atmosfera no nível "2" a partir do estado (conhecido) no nível "1". Para isso, nós resolvemos:

$$
\begin{aligned}
\Delta p &= -\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} g\Delta z, \\
p_2 &= p_1 + \Delta p, \\
q_2 &= 0.622\frac{e^*(T_2)}{p_2}, \\
\rho_2 &= \frac{p_2}{R_d T_2(1 + 0.61 q_2)},
\end{aligned}
$$

partindo de

$$
\begin{aligned}
q_2 &= 0.622\frac{e^*(T_2)}{p_1}, \\
\rho_2 &= \frac{p_1}{R_d T_2(1 + 0.61 q_2)},
\end{aligned}
$$

iterativamente, até a convergência de p_2.

Listing 3.1: agprec.py — Cálculo de água precipitável.

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ------------------------------------------------------------------
# Exemplo 3.2.2 de Chow, Maidment & Mays. Por simplicidade, partimos
# de z = 0 com p0 = 101325 Pa, T0 = 303.15 K
#
# Nelson Luís Dias
# criado     em 2020-07-28T18:35:04
# modificado em 2020-07-28T19:20:16
# ------------------------------------------------------------------
def Ta(z):
    '''
    Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
    '''
    alfa = 0.0065
    return 273.15 + 30.0 - alfa*z
# ------------------------------------------------------------------
from math import exp
def es(T):
    '''
    Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
    temperatura T (K) (Eq de Tetens)
    '''
    b = 17.2693882
    T1 = 273.16
    T2 = 35.86
    e0 = 610.78
    return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
# ------------------------------------------------------------------
def newstate(p1,rho1,T1,z2,delz):
    '''
    Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
    estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
    da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
    '''
    g = 9.81              # aceleração da gravidade
    epsp = 0.001          # erro no cálculo de p2, em Pa
    p20 = p1 + 2*epsp     # força o while a começar
    p2 = p1               # primeira estimativa de p2
    T2 = Ta(z2)           # temperatura do ar em z2: não muda mais
    e2 = es(T2)           # press vapor em z2; não muda mais
# ------------------------------------------------------------------
# Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
# ------------------------------------------------------------------
    q2 = 0.622*e2/p2                # umidade esp em z2
    rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))   # densidade em z2
    while (abs(p2 - p20) > epsp) :
        p20 = p2                    # guarda o valor anterior
        rhobar = (rho1 + rho2)/2    # dens média da camada
        delp = -rhobar*g*delz       # eq da hidrostática
        p2 = p1 + delp              # novo p2
        q2 = 0.622*e2/p2            # nova umid esp em z2
        rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))# nova densidade em z2
        print('.')
    pass
    print(p2,rho2,T2,q2)
# ------------------------------------------------------------------
# retorna o estado da atmosfera no nível z2
# ------------------------------------------------------------------
    return (p2, rho2, T2, q2)
# ------------------------------------------------------------------
# aqui começa o programa principal: as condições na superfície estão
# completamente determinadas.
# ------------------------------------------------------------------
Rd = 287.03805                      # cte de gás do ar seco
p0 = 101325.0                       # pressão na superfície
T0 = 303.15                         # temperatura na superfície
e0 = es(T0)                         # press vapor na superfície
q0 = 0.622*e0/p0                    # umid esp na superfície
rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0))     # densidade do ar na superfície
print(q0,rho0)
# ------------------------------------------------------------------
```

```
# discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
# ------------------------------------------------------------------
n = 1000                            # 1000 intervalos
zmax = 10000.0                      # altura máxima (m)
delz = 10.0                         # intervalo de integração (m)
# ------------------------------------------------------------------
# crio vetores de estado com n+1 pontos
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import arange, zeros
p = zeros(n+1,float)                # pressão em todos os pontos
T = zeros(n+1,float)                # temperatura em todos os pontos
q = zeros(n+1,float)                # umid esp em todos os pontos
rho = zeros(n+1,float)              # densidade em todos os pontos
z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float)    # níveis de cálculo
# ------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ------------------------------------------------------------------
(p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
for i in range(n) :
   (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
      newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
pass
# ------------------------------------------------------------------
# A integração numérica com a regra do trapézio deve ser relativamente
# simples
# ------------------------------------------------------------------
ff = rho*q          # função a ser integrada, já calculada pto a pto
Se = ff[0] + ff[n]  # soma, ptos externos
Si = 0.0            # soma, ptos internos
for k in range(1,n):
   Si += ff[k]
pass
I = Se + 2*Si       # agora basta aplicar a fórmula
I *= delz
I /= 2.0
print('Água precipitável = %8.2f kg/m2' % I)
```

3.7 Precipitação

A formação de nuvens requer o levantamento de ar úmido até a condensação. Esse levantamento pode ser produzido:

1. Por frentes (chuvas frontais).
2. Pela orografia (chuvas orográficas).
3. Pela atividade convectiva (chuvas convectivas, chuvas "de verão").

A formação de gotas de chuva requer *núcleos de condensação* (aerossóis). Vários tipos de aerossol podem funcionar como núcleos de condensação.

Dependendo das condições de temperatura, presença/ausência de núcleos de condensação, etc., neve e granizo podem se formar.

Gotas de chuva possuem uma velocidade terminal,

$$V_t = \left[\frac{4gD}{3C_d}\left(\frac{\rho_w}{\rho_a} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Um modelo de tempestade

O modelo a seguir é muito simples, mas mesmo assim é muito útil em aplicações. Em particular, no método da precipitação máxima provável, que veremos mais à frente.

Para uma "célula de tempestade" cilíndrica, de diâmetro D, considere as equações de balanço de massa de ar seco, e de massa de vapor d'água.

Para o ar seco,

$$
\begin{aligned}
0 &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho_d \,\mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} \rho_d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V; \\
0 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_2\,\pi D - [\rho(1-q)v\Delta z]_1\,\pi D \\
[\rho(1-q)v\Delta z]_2 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_1 \\
[\rho v\Delta z]_2 &= [\rho v\Delta z]_1\,\frac{1-q_1}{1-q_2}
\end{aligned}
$$

e para o vapor d'água,

$$
\begin{aligned}
0 &= \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} q\rho \,\mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} q\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V; \\
0 &= \dot{P}\frac{\pi D^2}{4} + [q\rho v\Delta z]_2\,\pi D - [q\rho v\Delta z]_1\,\pi D \\
\dot{P}\frac{\pi D^2}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1\,\pi D - [q\rho v\Delta z]_2\,\pi D \\
\dot{P}\frac{D}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1 - [q\rho v\Delta z]_2 \\
\dot{P}\frac{D}{4} &= q_1\,[\rho v\Delta z]_1 - q_2\,[\rho v\Delta z]_2 \\
\dot{P}\frac{D}{4} &= q_1\,[\rho v\Delta z]_1 - q_2\,[\rho v\Delta z]_1\,\frac{1-q_1}{1-q_2} \\
\dot{P}\frac{D}{4} &= \left(q_1 - q_2\frac{1-q_1}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1 \\
\dot{P}\frac{D}{4} &= \left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1\,, \\
\dot{P} &= \frac{4}{D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1\,.
\end{aligned}
$$

Note que $\{\!\{\dot{P}\}\!\} = \mathrm{kg}_{\mathrm{H_2O}}\,\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$. A intensidade de precipitação em $\mathrm{m\,s^{-1}}$ é

$$
i = \frac{4}{\rho_w D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1
$$

e a intensidade de precipitação em $\mathrm{mm\,h^{-1}}$ é

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m\,s^{-1}} &= \frac{1000\mathrm{mm}}{\mathrm{m}} \times \frac{1}{\mathrm{s}} \times \frac{3600\mathrm{s}}{\mathrm{h}} \\
i &= \frac{4}{\rho_w D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1 \times 1000 \times 3600.
\end{aligned}
$$

Façamos portanto o Exemplo 3.3.2 de Chow et al. (1988):

A thunderstorm cell 5 km in diameter has a cloud base of 1.5 km, and surface conditions recorded nearby indicate saturated air conditions with air temperature 30° C, pressure 101325 Pa and wind speed $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Assuming a lapse rate of $7.5\,^\circ\mathrm{C\,km^{-1}}$ and an average outflow elevation of 10 km, calculate the precipitation intensity from this storm. Also determine

what proportion of the incoming moisture is precipitated as air passes through the storm cell and calculate the rate of release of latent heat through moisture condensation in the column.

A solução será calculada pelo programa `stcell.py`.

Listing 3.2: `stcell.py` — Modelo de tempestade.

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------------------
# Exemplo 3.3.2, Chow, Maidment e Mays
#
# Nelson Luís Dias
# 2020-08-04T17:19:27
# ----------------------------------------------------------------------
# ----------------------------------------------------------------------
# vou precisar da fórmula para a pressão de saturação de vapor d'água
# ----------------------------------------------------------------------
from math import exp
def es(T):
    '''
    Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
    temperatura T (K) (Eq de Tetens)
    '''
    b = 17.2693882
    T1 = 273.16
    T2 = 35.86
    e0 = 610.78
    return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
def Ta(z):
    '''
    Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
    '''
    alfa = 0.0075    # esta mudança é muito importante!!!!
    return 273.15 + 30.0 - alfa*z
# ----------------------------------------------------------------------
# vou precisar de uma fórmula para o calor latente de evaporação
# ----------------------------------------------------------------------
def latente(T) :
    '''
    latent: Latent heat of evaporation (in J kg^{-1}) as a function
    of
    thermodynamic temperature (in K)

    From Dake 1972 "Evaporative Cooling of a body of water", Water
    Resour Res, (8)1087--1091.
    '''
    return (3142689.0 - 2356.01 * T)
# ----------------------------------------------------------------------
# todas as variáveis no SI!!!!
# ----------------------------------------------------------------------
Diam = 5000.0            # diâmetro da célula (m)
delz1 = 1500.0           # $\Delta z_1$ (m)
p0 = 101325.0            # pressão atmosférica em Pa
T0 = 30+273.15           # temperatura do ar na "entrada", em K
v1 = 1.0                 # velocidade do vento na "entrada", em m/s
rhow = 1000.0            # densidade da água líquida kg/m^3
es0 = es(T0)             # press vap na entrada (Pa)
q0 = 0.622*es0/p0        # umidade específica na superfície (kg/kg)
Rd = 287.03805                     # cte de gás do ar seco
rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0))    # densidade do ar na superfície
# ----------------------------------------------------------------------
# nós vamos precisar da pressão atmosférica a 10 km de altura!!!!
# para isso, temos que calcular a mesma integral de antes :-(
# copio e colo o programa que fiz antes para ir até p2
# ----------------------------------------------------------------------
def newstate(p1,rho1,T1,z2,delz):
    '''
    Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
    estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
    da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
    '''
```

```
    g = 9.81              # aceleração da gravidade
    epsp = 0.001          # erro no cálculo de p2, em Pa
    p20 = p1 + 2*epsp     # força o while a começar
    p2 = p1               # primeira estimativa de p2
    T2 = Ta(z2)           # temperatura do ar em z2: não muda mais
    e2 = es(T2)           # press vapor em z2; não muda mais
# ------------------------------------------------------------------
# Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
# ------------------------------------------------------------------
    q2 = 0.622*e2/p2                # umidade esp em z2
    rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))   # densidade em z2
    while (abs(p2 - p20) > epsp) :
       p20 = p2                     # guarda o valor anterior
       rhobar = (rho1 + rho2)/2     # dens média da camada
       delp = -rhobar*g*delz        # eq da hidrostática
       p2 = p1 + delp               # novo p2
       q2 = 0.622*e2/p2             # nova umid esp em z2
       rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))# nova densidade em z2
#       print('.')
    pass
#   print(p2,rho2,T2,q2)
# ------------------------------------------------------------------
# retorna o estado da atmosfera no nível z2
# ------------------------------------------------------------------
    return (p2, rho2, T2, q2)
# ------------------------------------------------------------------
# discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
# ------------------------------------------------------------------
n = 1000                           # 1000 intervalos
zmax = 10000.0                     # altura máxima (m)
delz = 10.0                        # intervalo de integração (m)
# ------------------------------------------------------------------
# crio vetores de estado com n+1 pontos
# ------------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ------------------------------------------------------------------
print("Condições␣aqui␣em␣baixo:")
print("␣␣␣␣␣␣␣␣p␣␣␣rho␣␣␣␣␣␣T␣␣␣␣␣␣q␣␣␣␣␣␣␣z")
print("%9.2f␣%5.2f␣%5.2f␣%6.4f␣%7.1f" % (p0,rho0,T0,q0,0.0))
from numpy import arange, zeros
p = zeros(n+1,float)               # pressão em todos os pontos
T = zeros(n+1,float)               # temperatura em todos os pontos
q = zeros(n+1,float)               # umid esp em todos os pontos
rho = zeros(n+1,float)             # densidade em todos os pontos
z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float)    # níveis de cálculo
# ------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ------------------------------------------------------------------
(p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
for i in range(n) :
   (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
      newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
pass
(p2,rho2,T2,q2,z2) = (p[n],rho[n],T[n],q[n],z[n])
print("Condições␣lá␣em␣cima:")
print("%9.2f␣%5.2f␣%5.2f␣%6.4f␣%7.1f" % (p2,rho2,T2,q2,z2))
# ------------------------------------------------------------------
# As variáveis q1 e rho1 agora referem-se à média sobre delz1: note
# que z[150] = 1500 m. Portanto, vamos fazer a média de q e a média de
# rho de 0 a 150 inclusive
# ------------------------------------------------------------------
from numpy import average
rho1 = average(rho[0:151])
print(rho1)
q1 = average(q[0:151])
print(q1)
# ------------------------------------------------------------------
# agora temos condições de continuar a fazer as contas. O resultado
# mais importante é a taxa de precip, em kg/m2/s
# ------------------------------------------------------------------
Pdot = (4.0/(Diam))*((q1 - q2)/(1-q2))*rho1*v1*delz1 # kg/m2/s
print("Pdot␣=␣",Pdot)
```

```
Pdms = Pdot/rhow                                    # m/s
print("Pdms = ",Pdms)
Pmmh = Pdms*1000*3600                               # mm/h
print("Pmmh = ",Pmmh)
```

Agora, faça as contas restantes e termine o exemplo! Verifique sempre contra os resultados numéricos do livro.

Hietógrafas

A precipitação pode ser altamente variável, no espaço e no tempo. Um exemplo gritante para a precipitação anual (média de muitos anos; tipicamente, 30 anos define uma "normal" climatológica): Arica, Chile: 0.5 mm; Mt Waialeale, Havaí: 11680 mm.

Um gráfico de precipitação em função do tempo é chamado de uma *hietógrafa*.

Vamos reproduzir a Tabela 3.4.1 de Chow et al. (1988), que se refere à chuva observada em *um pluviômetro*, 1-Bee, 24–25 Maio de 1981, Austin, Texas; a *hietógrafa* equivalente é produzida por

Listing 3.3: `a1bee.plt` — Hietógrafa de 1Bee.

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
set output 'a1bee.tex'
set xrange [0:150]
set yrange [0:25]
set ytics 0,5
set xtics 0,15
set xlabel 'Tempo (min)'
set ylabel '$\Delta P\,(\mathrm{mm})$'
set boxwidth 1.0 relative
set grid
#set style fill solid lc rgb 'gray75' border lt 1
#set style line 1 lt 1 lw 4 lc rgb 'black'
set linetype 1 lw 2 lc rgb 'black'
set style fill solid 1.0 border lt 1
plot 'a1bee.dat' using (column(1)-2.5):(column(2)*25.4) notitle \
     with boxes fs solid fc rgb 'gray75'
```

e é mostrada a seguir:

A hietógrafa acumulada é produzida por

Listing 3.4: `stcell.py` — Hietógrafa de 1Bee.

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
```

```
set output 'a1bee-cum.tex'
set xrange [0:150]
set yrange [0:250]
set ytics 0,25
set xtics 0,15
set xlabel 'Tempo␣(min)'
set ylabel '$\sum␣P\,(\mathrm{mm})$'
set grid
#set style fill solid lc rgb 'gray75' border lt 1
#set style line 1 lt 1 lw 4 lc rgb 'black'
set linetype 1 lw 2 lc rgb 'black'
set style fill solid 1.0 border lt 1
plot 'a1bee.dat' using (column(1)-5):(column(2)*25.4) notitle \
     smooth cumulative with lines lt 1 lw 4 lc rgb 'black'
```

e é mostrada a seguir:

Precipitação espacial

Isoietas são simplesmente curvas de nível traçadas entre dados observados de chuva (geralmente na superfície, com medição em *pluviômetros*. Antigamente, nós desenhávamos "à mão". Hoje em dia, existem procedimentos automáticos para o cálculo de isoietas a partir de dados observacionais.

Para cada intervalo de tempo de observação da chuva (digamos: a cada 10 minutos em uma bacia "pequena" (10 a 100 km^2), a cada dia em uma bacia "grande" (10 000 a 100 000 km^2), nós "traçamos" as isoietas como na figura abaixo,

e em seguida calculamos a chuva média sobre a região de interesse (tipicamente, a própria bacia hidrográfica) a cada intervalo de tempo. Muitas vezes (principalmente em modelos "concentrados", é essa série temporal de precipitação média sobre a bacia que é utilizada em modelos e estudos.

O cálculo da chuva média na bacia sempre envolve alguma aproximação. O método mais simples, *que sempre deve ser usado como uma verificação*, é o da média aritmética. Se P_k é a precipitação acumulada ao longo de Δt na k-ésima estação pluviométrica, a precipitação média é estimada por

$$\overline{P} = \sum_{k=1}^{n_p} P_k,$$

onde n_p é o número de estações pluviométricas.

O método de Thiessen é originalmente um método gráfico. A bacia hidrográfica é dividida em sub-áreas de influência: cada estação pluviométrica tem uma área de influência A_k (eventualmente, pode acontecer que uma dada estação esteja tão longe da bacia em relação às suas vizinhas que $A_k = 0$. A precipitação média na bacia é então calculada por

$$\overline{P} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n_p} A_k P_k.$$

O método das isoeitas mostrado acima também era originalmente um método gráfico. Traçava-se "a sentimento" as curvas de nível "olhando" para os valores de P_k no papel. Em seguida, as curvas de nível eram integradas graficamente com um instrumento denominado "planímetro" Wikipedia (2020c), cuja fotografia mostramos abaixo:

Atualmente, esses métodos foram substituídos por métodos digitais. Considere um reticulado de $m \times n$ células (m linhas, n colunas), e considere

a função indicador

$$I_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{a célula } (i,j) \text{ não pertence à bacia hidrográfica,} \\ 1, & \text{a célula } (i,j) \text{ pertence à bacia hidrográfica.} \end{cases}$$

Todos os métodos digitais (implementados como um algoritmo de computador) correspondem a calcular pesos $\omega_{i,j}$ para cada célula dentro da bacia (veja exemplos de células dentro da bacia na figura a seguir)

No método de Thiessen, por exemplo, os pesos de Thiessen correspondem a

$$\omega_k = \frac{A_k}{A}.$$

Porém agora nós vamos calcular os pesos percorrendo cada célula individualmente. Para o método de Thiessen, o algoritmo é o seguinte:

$n = 0$;
Para $k = 1, \ldots, n_p$:
    $n_k = 0$;
Para $i = 1, \ldots, m$;
    Para $j = 1, \ldots, m$;
        Se $I_{i,j} \neq 0$:
            $n = n + 1$;
            $d_{min} = +\infty$;
            Para $k = 1, \ldots, n_p$:
                Se $d_{i,j \leftrightarrow k} < d_{min}$:
                $k_{min} = k$;
            $n_{k_{min}} = n_{k_{min}} + 1$
Para $k = 1, \ldots, n_p$:
    $\omega_k = n_k / n$ ■

No método do inverso do quadrado das distâncias, os pesos são calculados de forma diferente:

$n = 0$;
Para $k = 1, \ldots, n_p$:
    Para $i = 1, \ldots, m$:
        Para $j = 1, \ldots, m$:
            $\omega_{i,j,k} = 0$;
Para $i = 1, \ldots, m$:
    Para $j = 1, \ldots, m$:
        Se $I_{i,j} \neq 0$:
            Para $k = 1, \ldots, n_p$:
                $\omega_{i,j,k} = 1/d^2_{i,j\leftrightarrow k}$:
Para $i = 1, \ldots, m$;
    Para $j = 1, \ldots, m$;
        Se $I_{i,j} \neq 0$:
            $s_0 = 0$;
            $s_1 = 0$;
            Para $k = 1, \ldots, n_p$:
                $s_0 = s_0 + \omega_{i,j,k}$;
                $s_1 = s_1 + \omega_{i,j,k} \times P_k$;
            $p_{i,j} = s1/s0$

E agora para calcular a precipitação média basta integrar numericametne a função (definida ponto a ponto dentro da bacia) $p_{i,j}$. Note que estou usando P_k para a precipitação em cada pluviômetro, e $p_{i,j}$ para a função interpolada ponto a ponto.

3.8 Evaporação: escalas e conceitos gerais

Vou utilizar o termo "evaporação" no mesmo sentido usado por Brutsaert (1982): como o fluxo de massa médio por unidade de área E de vapor d'água sobre uma certa área horizontal (a área de um tanque evaporimétrico; a área de um lago; a área de uma bacia hidrográfica; etc.). Ficam aí incluídas portanto tanto a evaporação de água líquida em contato com o ar, a partir de folhas, do solo úmido, de corpos d'água, etc., como a transpiração através dos estômatos das plantas.

Confrontado com a necessidade de "fechar" o ciclo hidrológico, o hidrólogo freqüentemente tem que calcular estimativas de evapotranspiração e de evaporação em lago. Os métodos disponíveis estão espalhados na literatura, indo de equações totalmente empíricas e algumas vezes obsoletas, até resultados de pesquisa micrometeorológica que não são aplicáveis às escalas hidrológicas. Nesta seção vamos procurar resumir o conhecimento básico necessário à boa prática de estimativas de evaporação/evapotranspiração. Como tal, minimiza-se os aspectos teóricos e as demonstrações, em favor de uma compilação organizada de fórmulas e métodos. As linhas gerais de ação para diversos casos comuns em hidrologia (aplicações em modelos chuva-vazão, cálculo de evapotranspiração e evaporação em lagos) são discutidas brevemente.

Introdução

Nosso objetivo é apresentar um resumo dos modelos e métodos atualmente disponíveis para estimar evaporação e evapotranspiração, na medida do conhecimento do autor, que seja ao mesmo tempo compreensível e não entre em detalhes matemáticos. Nós denominamos um procedimento de "método" quando o valor de evaporação/evapotranspiração obtido pode ser considerado uma "medição"; incluem-se nesta categoria os métodos do Balanço de Massa (em lisímetros, possivelmente em reservatórios, em bacias hidrográficas), Balanço de Energia, Medição de Covariâncias Turbulentas, e Medição de Perfis Médios na atmosfera. O procedimento é denominado "modelo" quando envolve simplificações ou coeficientes cuja incerteza é grande; aqui se incluem várias equações de transferência de massa, a equação de Penman (1948), a equação de Penman-Monteith (Monteith, 1973), a equação de Priestley-Taylor (Priestley e Taylor, 1972) e os modelos CRAE/CRLE de Morton (Morton, 1983a,b; Morton et al., 1985; Morton, 1986). As principais idéias e fórmulas são apresentadas, porém não suas deduções: o espírito deste trabalho é mais o de um guia prático do que um texto teórico sobre evaporação. Além disso, não são apresentados métodos ou modelos que sejam muito sofisticados seja do ponto de vista computacional, seja em termos de requerimento de dados. A ênfase é em procedimentos cuja aplicação é relativamente simples, e que se baseiam principalmente em dados médios diários convencionalmente medidos em estações meteorológicas. Este é o sentido do adjetivo "climatológicos" no título. Os leitores interessados poderão encontrar as bases teóricas e alguns modelos mais sofisticados na lista de referências bibliográficas.

Escalas e modelos em meteorologia e hidrologia

No método científico, sempre que procuramos analisar um problema, este é divido em diversos elementos, de acordo com a nossa capacidade de "enxergá-los" com a lente de nossas escalas. Os elementos diretamente relevantes são aqueles que podem ser "resolvidos" ou "enxergados" explicitamente. Os elementos indiretamente relevantes são aqueles que não podem ser "resolvidos" ou "enxergados" diretamente pela menor escala que estivermos utilizando: estes elementos precisam ser parametrizados. Finalmente, há elementos irrelevantes, que podem ser totalmente desprezados, pelo menos em uma análise inicial (Brutsaert, 1986).

Por exemplo, considere a questão de modelar uma bacia hidrográfica da ordem de 20000km^2. Os dados disponíveis muitas vezes são informações pluviométricas e fluviométricas, e mapas do IBGE e do Ministério do Exército nas escalas 1:50000 e/ou 1:100000. Suponha a existência de 10 postos pluviométricos e 10 postos fluviométricos dentro de nossa bacia, mais ou menos uniformemente distribuídos. O modelador deverá ser capaz de identificar cerca de 10 sub-bacias hidrográficas, cada uma das quais com cerca de 2000km^2, e possivelmente ajustar um modelo chuva-vazão a cada uma destas unidades. Porém, na falta de informações de topografia, precipitação e vazão mais detalhadas, provavelmente será infrutífero descer à escala de bacias de 100 ou 10km^2. Neste caso, dizemos que a es-

Tabela 3.1: Escalas em meteorologia Orlanski (1975)

Nome	Fenômenos	Dimensão Horizontal
Macro α	Ondas planetárias muito longas	$> 10000\,\mathrm{km}$
	Ondas de gravidade	
Macro β	Ondas baroclínicas	2000 – 10000 km
Meso α	Frentes e Furacões	200 – 2000 km
Meso β	Jato noturno	20 – 200 km
	Linhas de instabilidade	
	Aglomerados de Nuvens	
	Efeitos topográficos	
	Efeitos de Lago	
Meso γ	Chuvas convectivas	2 – 20 km
	Turbulência de Céu Claro	
	Efeitos Urbanos	
Micro α	Tornados	200 m – 2 km
	Convecção Profunda	
	Ondas de gravidade curtas	
Micro β	Térmicas	20 m – 200 m
	Esteiras	
	Turbilhões	
Micro γ	Plumas	$< 20\,\mathrm{m}$
	Turbulência	
	Rugosidade	

cala espacial "resolvida" do problema é da ordem de $\sqrt{2000\text{km}^2} \approx 45\text{km}$. Tudo o que ocorre abaixo desta escala precisa ser "parametrizado", e jamais será conhecido explicitamente. Os modelos chuva-vazão em cada sub-bacia de 2000km^2 parametrizam os processos hidrológicos, inclusive o escoamento em calha, "levando-os" até as escalas (definidas individualmente pelas seções de rio onde há medição de vazão) em que há dados confiáveis disponíveis. Este tipo de raciocínio não se aplica somente à hidrologia. De fato, a ferramenta por excelência de identificação de fenômenos relevantes em geociências é a mesma análise de escalas que exemplificamos no parágrafo anterior. Por causa da importância de classificar fenômenos meteorológicos, Orlanski (1975) propôs uma classificação racional (macro, meso, micro) com subdivisões (α, β, γ), mostrada na Tabela 3.1.

A partir da Tabela 3.1, já podemos classificar as escalas relevantes para evaporação e evapotranspiração. Esses fenômenos dependem de:

- radiação solar,
- temperatura e umidade do ar,
- pressão atmosférica,
- velocidade do vento,
- tipo de superfície,
- tipo do solo,
- umidade do solo.

Todas estas grandezas exibem variabilidade na escala meso-β ou menor, conforme exemplificado na Figura 3.1, que mostra a variação da temperatura do ar no Estado do Paraná. Isso significa que evaporação e evapotranspiração são fenômenos de escala espacial igual ou inferior a meso-β.

Nos modelos de evaporação e evapotranspiração, a influência dos campos de radiação, temperatura, umidade, vento, bem como tipo de solo e uso do solo, são incluídos explicitamente (diretamente resolvidos). Os efeitos das escalas micro-β e micro-γ são em geral parametrizados nos modelos; eles são diretamente medidos no método de medição de covariâncias turbulentas (Stull, 1988; Brutsaert, 1982).

É importante observar que o modelo de evaporação/evapotranspiração a ser utilizado vai depender da escala do problema. Assim sendo, é de se esperar que o modelo para um campo de milho de $500 \times 500\text{m}^2$ seja diferente do modelo para uma bacia hidrográfica de 2000km^2. Infelizmente para a hidrologia, é muito mais difícil coletar informação sobre evapotranspiração regional (de uma bacia hidrográfica) nas escalas de tempo desejáveis (de dias até meses) do que sobre evapotranspiração de culturas. Por este motivo, muitos modelos desenvolvidos para escalas espaciais relativamente pequenas ($< 1\,\text{km}$) acabam sendo utilizados para estimativas de evaporação/evapotranspiração em escalas muito maiores. Esta é uma limitação que deve estar em mente na hora de aplicarmos os modelos.

Figura 3.1: Variação da temperatura média horária no Estado do Paraná

Finalmente, note que registros contínuos de medição de evapotranspiração ou evaporação em lagos ainda são muito raros, e não há séries longas confiáveis que possam ser usadas em aplicações hidrológicas. Por este motivo, é preciso usar modelos de evaporação e evapotranspiração. Existem bons modelos para lagos baseados no método do balanço de energia que podem ser aplicados com sucesso quando há dados de perfis de temperatura da água (Reis, 1996; Reis e Dias, 1998; Dias e Kan, 2008); além disso, medições relativamente longas de evaporação em lagos, e de evapotranspiração, com o método de covariâncias turbulentas têm se tornado cada vez mais frequentes Blanken et al. (2000); Rouse et al. (2003); Dias e Malheiros (2003); Armani et al. (2020). A questão de estimativas de evapotranspiração é bem mais complexa, porque envolve a variação da umidade do solo durante o período de secamento após as chuvas. Consequentemente, a qualidade das estimativas de evapotranspiração não é tão boa. Uma forma de levar em conta o armazenamento gravitacional de água subterrânea, da região *saturada*, foi proposta por Dias e Kan (1999); a estimativa do armazenamento na região *vadosa*, entretanto, permanece (tanto quanto eu saiba) uma questão em aberto.

Fundamentos físicos

Unidades O fluxo vertical de uma grandeza qualquer a através de uma superfície plana S é por definição a quantidade de a que atravessa S por unidade de tempo. A evapo(transpi)ração entre a superfície da Terra e a atmosfera é um fluxo de massa; suas unidades SI são dadas por $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$. Expressa nestas unidades, o valor numérico de E é extraordinariamente

Figura 3.2: Fluxo de massa de vapor d'água através de uma superfície unitária.

Figura 3.3: Conversão de evaporação de $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$ para mm.

pequeno. Em hidrologia, é usual expressar a evaporação em milímetros de altura de água acumulada equivalente h_E. A conversão é simples. Na Figura 3.3, M é a massa total de água evaporada ao longo de um intervalo de tempo Δt através de uma área unitária. Utilizando a densidade ρ_w da água líquida:

$$M = E\Delta t = \rho_w 1 h_E \Rightarrow h_E = \frac{E\Delta t}{\rho_w} \times 1000.$$

O fator 1000 em (**??**) corresponde à conversão de metros para milímetros. Como $\rho_w = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, para obter h_E em mm basta multiplicar E pelo número de segundos do intervalo de tempo considerado.

Umidade atmosférica

Para calcular a pressão atmosférica média (em Pa) em uma estação em função da sua altitude Z (em m), use

$$p = 101325 \left(\frac{288{,}0 - 0{,}0065Z}{288{,}0} \right)^{5{,}256}.$$

Além dos índices de umidade que nós já vimos, às vezes é conveniente também definir a *temperatura de bulbo úmido* T_w, via:

$$e_a = e^*(T_w) - \gamma(T_a - T_w)$$

(Estou tentando ser consistente e usar símbolos "em Inglês"), onde $\gamma = (c_p p)/(0.622 L_w)$ é a *constante psicrométrica.*

Figura 3.4: Umidade relativa, e umidade específica em Cambará (02350017), PR.

A umidade relativa não permite avaliar o conteúdo absoluto de umidade da atmosfera; ela serve mais como um indicador da sensação que temos da umidade do ar. Veja o exemplo da umidade relativa e da umidade específica em Cambará (PR) durante 1990, mostrados na Figura 3.4. A umidade relativa média diária praticamente não revela nenhuma sazonalidade, que no entanto fica clara no caso da umidade específica.

3.9 O movimento da Terra no espaço

A Terra gira em torno do Sol em uma trajetória aproximadamente elíptica. O plano da trajetória é chamado o plano da eclíptica. Na figura abaixo, a distância OA $= r_a$ é o semi-eixo maior do elipse. Ela é uma unidade de comprimento em astronomia: a Unidade Astronômica (AU).

A trajetória da Terra em torno do Sol.

Os pontos A, B, C, D, A′, B′, C′ e D′ são pontos notáveis do movimento anual do planeta Terra em torno do Sol. O ponto A marca o periélio, o ponto onde o planeta está mais próximo do Sol. De maneira similar, C marca o afélio, o ponto onde o planeta está mais distante do Sol. As datas para esses pontos variam ligeiramente de ano para ano. A Tabela a seguir, válida para 2020, foi obtida de United States Naval Observatory (2019).

Dias notáveis da órbita da Terra para 2020.

Ponto	data/hora (UTC)	Nome
A	Janeiro 5, 2020, 07:48	Periélio
B	Abril 5, 2020, 19:48	$r/r_a = 1$
C	Julho 4, 2020, 11:35	Afélio
D	Outubro 5, 2020,19:48	$r/r_a = 1$
A′	Dezembro 21, 2020, 10:02	Solstício de Inverno
B′	Março 20, 2020, 03:50	Equinócio de Primavera
C′	Junho 20, 2020, 21:44	Solstício de Verão
D′	Setembro 22, 2020	Equinócio de Outono

O material descrito aqui foi obtido a partir de várias fontes. Talvez a fonte mais importante seja van Flandern e Pulkkinen (1979) e um guia muito detalhado para o cálculo da declinação do Sol e da distância Sol-Terra pode ser encontrado em Schlyter (2019)

Na figura acima, o semi-eixo maior da elipse é r_a, e o semi-eixo menor é r_b. A distância entre o Sol e a Terra em qualquer ponto na trajetória é r. O valor de r_a é definido em astronomia como a *Unidade Astronômica*,

UA. A *declinação* do Sol em relação à Terra é o ângulo δ entre o plano do equador e do plano da Eclíptica, medido perpendicularmente a este último.

A principal causa para a mudança das estações não é a variação da distância Sol-Terra r, mas a inclinação do eixo de rotação do planeta em relação ao plano da eclíptica, e a consequente mudança na declinação do Sol.

Por exemplo, figura a seguir mostra a situação do planeta no que diz respeito à incidência de raios solares na época do Solstício de inverno (no hemisfério norte). Neste ponto da trajetória do planeta, a maior parte da a incidência de raios solares é sobre o Hemisfério Sul, onde é início de Verão. A situação oposta acontecerá no solstício de verão (do hemisfério norte).

The position of the planet Earth with respect to the incidence of the Sun's rays around the Northern Hemisphere Winter Solstice.

A situação ao longo do ano é mostrada na próxima figura. Note que a figura não está desenhada com precisão; no entanto ela mostra os elementos essenciais em termos de como a incidência dos raios de sol muda ao longo do ano. Os 4 pontos em destaque são os solstícios e os equinócios. Durante os solstícios, os raios do sol têm incidência máxima em um dos hemisférios, e isso determina a início do verão e do inverno. Por outro lado, nos equinócios, os raios solares incidem perpendicularmente ao equador (daí seus nomes).

The incidence of the rays of the Sun on the Earth around the year. The

sign of the Sun's declination δ is indicated between the points A′, B′, C′ and D′, as well as the sign of its rate of change, indicated as positive (↑) or negative (↓).

Fórmulas de precisão relativamente baixa para os valores de δ e r/r_a em determinada data são dadas por van Flandern e Pulkkinen (1979). Essas fórmulas estão convertidos em uma função em Python (`ddse`) na listagem 3.5.

Listing 3.5: `sunearth.py` — Calculation of distance and declination of Sun as a function of date.

```
from math import pi, modf, sin, cos, asin, sqrt, atan2
TwoPi = 2*pi
# ------------------------------------------------------------------
# ddse
#
# version: 2019-05-04T13:46:15
#
# ------------------------------------------------------------------
def ddse(yea,mon,day):
    '''
    ddse: declination and distance sun-earth a funcion of
    (year, month, day)

    based on

    Van Flandern, T. C. and Pulkkinen, K. F. (1979) "Low Precision
    Formulae for Planetary Positions" - The Astronomical Journal
    Supplement Series, 41,391:411.
    '''
# ------------------------------------------------------------------
    assert(isinstance(yea,int))
    assert(isinstance(mon,int))
    assert(isinstance(day,int))
# ------------------------------------------------------------------
# At GMT noon: this is done with purely integer arithmetic
# ------------------------------------------------------------------
    JD = 367 * yea - ( 7 * (yea + (mon + 9) // 12 ) // 4 ) \
       + ( 275 * mon // 9 + day ) + 1721014
    # JD = + 367 * yea \
    #      - 7*(yea + (mon + 9)//12)/4 \
    #      - 3*((yea + (mon - 9)//7)//100 + 1)//4 \
    #      + 275*mon//9 + day + 1721029
# ------------------------------------------------------------------
# Obtains tee,
# TT == thousands of Julian years from 2000
# TC == hundreds of Julian years from 1900
# ------------------------------------------------------------------
    tee = float(JD - 2451545.0 + 0.5) ;
#    TT = tee/365250.0
    TC = tee/36525.0 + 1.0 ;
#    TC = 10.0*TM + 1.0
# ------------------------------------------------------------------
# other variables
# ------------------------------------------------------------------
    LS = 0.779072 + 0.00273790931 * tee  # mean longitude, Sun
    GS = 0.993126 + 0.00273777850 * tee  # mean anomaly, Sun
    G5 = 0.056531 + 0.00023080893 * tee  # mean anomaly, Jupiter
    OM = 0.347343 - 0.00014709391 * tee  # longitude of lunar ascending mode
# ------------------------------------------------------------------
# the eccentricity of the Earth comes from a different source:
# http://www.jgiesen.de/kepler/eccentricity.html
# ------------------------------------------------------------------
# ec = +0.0167086342 - 0.0004203654*TT - 0.0000126734*TT**2 \
#      +0.0000001444*TT**3 -0.0000000002*TT**4 + 0.0000000003*TT**5
# ------------------------------------------------------------------
# extracts fractional part
# ------------------------------------------------------------------
```

```
    (LS,ipart) = modf(LS)
    (GS,ipart) = modf(GS)
    (G5,ipart) = modf(G5)
    (OM,ipart) = modf(OM)
# ---------------------------------------------------------------------
# converts to radians
# ---------------------------------------------------------------------
    LS = LS * TwoPi
    GS = GS * TwoPi
    G5 = G5 * TwoPi
    OM = OM * TwoPi
# ---------------------------------------------------------------------
# obtains VS
# ---------------------------------------------------------------------
    VS = + 0.39785 * sin( LS ) \
         - 0.01000 * sin( LS - GS ) \
         + 0.00333 * sin( LS + GS ) \
         - 0.00021 * TC * sin( LS ) \
         + 0.00004 * sin( LS + 2.0 * GS ) \
         - 0.00004 * cos( LS ) \
         - 0.00004 * sin( OM - LS ) \
         + 0.00003 * TC * sin( LS - GS )
# ---------------------------------------------------------------------
# obtains US
# ---------------------------------------------------------------------
    US = + 1.0 \
         - 0.03349 * cos( GS ) \
         - 0.00014 * cos( 2.0 * GS ) \
         + 0.00008 * TC * cos( GS ) \
         - 0.00003 * sin( GS - G5 )
# ---------------------------------------------------------------------
# Sun's declination
# ---------------------------------------------------------------------
    delta = asin( VS / sqrt(US) ) ;
# ---------------------------------------------------------------------
# distance Sun-Earth in the form (r/a) where a is the length
# of the largest semi-axis of the Earth's orbit, i.e.: the equivalent
# to one astronomical unit, and r is the Sun-Earth distance
# ---------------------------------------------------------------------
    rr = 1.00021 * sqrt( US )
    return (delta,rr)

# ---------------------------------------------------------------------
# sunman
#
# version of 2019-04-23T09:58:05
# ---------------------------------------------------------------------
def sunman(yea,mon,day,sec=0.0):
    '''
    sunman: only the sun mean anomaly a funcion of (year, month,day)

    based on

    Van Flandern, T. C. and Pulkkinen, K. F. (1979) "Low Precision
    Formulae for Planetary Positions" - The Astronomical Journal
    Supplement Series, 41,391:411.
    '''
# ---------------------------------------------------------------------
    assert(isinstance(yea,int))
    assert(isinstance(mon,int))
    assert(isinstance(day,int))
# ---------------------------------------------------------------------
# At GMT noon: this is done with purely integer arithmetic
# ---------------------------------------------------------------------
    JD = + 367 * yea \
         - 7*(yea + (mon + 9)/12)/4 \
         - 3*((yea + (mon - 9)/7)/100 + 1)/4 \
         + 275*mon/9 + day + 1721029
# ---------------------------------------------------------------------
# trying to get more accuracy by calculating seconds
# ---------------------------------------------------------------------
    JD = float(JD + sec/86400.0)
# ---------------------------------------------------------------------
```

```
# Obtains tee,
# ------------------------------------------------------------------
   tee = float(JD - 2451545.0) ;
# ------------------------------------------------------------------
# other variables
# ------------------------------------------------------------------
   GS = 0.993126 + 0.00273777850 * tee  # mean anomaly, Sun
   (GS,ipart) = modf(GS)
# ------------------------------------------------------------------
# converts to radians
# ------------------------------------------------------------------
   GS = GS * TwoPi
   return(GS)
```

Alternativamente, fórmulas ainda mais simples são dadas por Stull (1995). A declinação do sol é

$$\delta = 0{,}409 \cos\left(2\pi \frac{d - d_r}{d_a}\right),$$

onde $d_a = 365$ ou 366 é o número de dias do ano, $d_r = 173$ ou 174 é o dia corrido do ano correspondente a 22 junho (solstício de inverno) e d é o dia corrido do ano entre 1 e 365 ou 366 dependendo de o ano ser ou não bissexto. Todos os ângulos estão em radianos. A distância sol-terra em unidades astronômicas é

$$\frac{r}{r_a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos\left(2\pi \frac{d - d_p}{d_a}\right)}$$

onde $e = 0{,}0167$ é a excentricidade da órbita terrestre, e $d_p = 3$ é o dia corrido do ano correspondente ao perihélio.

A declinação do Sol vista da Terra

A figura a seguir mostra a incidência dos raios do sol vistos da Terra. O plano do equador é Oxy, e Oyz é perpendicular ao plano da eclíptica, o que não é mostrado, mas contém a linha OS ligando o centro da Terra ao centro do Sol: a declinação do Sol δ é o ângulo entre os planos da eclíptica e do Equador, e está indicada na figura. O Sol está muito longe, e podemos supor que seus raios incidem paralelamente sobre a Terra. No ponto P na superfície do Terra, um raio vem ao longo de PS′, e o Sol é efetivamente visto como na posição S′. A posição de P é dada pelo *ângulo horário h*, que é a distância angular até o meio-dia solar, e a latitude φ.

The declination of the Sun.

A vertical através P é dada pelo vetor unitário $\boldsymbol{n}$, e a direção para o Sol em P é dada pelo vetor unitário $\boldsymbol{m}$. Por definição, o ângulo zenital Z é o ângulo entre $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$. A partir da figura acima, obtém-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m} &= (0, \cos\delta, \operatorname{sen}\delta),\\ \boldsymbol{n} &= (\cos\varphi \operatorname{sen} h, \cos\varphi\cos h, \operatorname{sen}\varphi),\end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} = \cos Z = \cos\delta\cos\varphi\cos h + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi.$$

Várias relações úteis podem ser deduzidas a partir da equação acima:

a) O ângulo H varrido entre o nascer do sol, quando $\boldsymbol{n} \parallel Oxz$ e $\cos Z = 0$, e o meio-dia solar é dado por

$$\begin{aligned}0 &= \cos\delta\cos\varphi\cos H + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi \;\Rightarrow\\ \cos H &= -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta.\end{aligned}$$

A partir da equação acima, obtém-se o comprimento do dia em horas, N:

$$\frac{H}{\pi/2} = \frac{N}{12} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{24H}{\pi}.$$

b) A latitude φ_p da noite polar é o ponto em que $H = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi_p = -\operatorname{cotg}\delta \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_p = \frac{\pi}{2} - \delta.$$

c) Nos polos,

$$\cos Z = \operatorname{sen}\delta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} - Z = \delta,$$

de forma que a elevação do Sol é praticamente constante durante o dia.

d) Ao meio-dia solar,

$$\begin{aligned}
\cos h &= 1, \\
\cos Z &= \cos\delta\cos\varphi + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi \\
&= \cos(\varphi - \delta) \;\Rightarrow \\
Z &= \varphi - \delta.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Radiação

O fluxo de energia por unidade de área associado com diferentes comprimentos de onda é chamado *irradiância*, e dado em unidades de $\mathrm{W\,m^{-2}}$ no SI. O comprimento de onda da radiação depende da temperatura do corpo emissor; à temperatura T, um corpo negro emite um espectro de radiação cujo pico é dada pela lei de Wien,

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{T}, \tag{3.7}$$

onde $\alpha = 2897.0\,\mu\mathrm{m\,K}$ (Fleagle e Businger, 1980, p. 217).

A radiação solar, emmitida pelo sol a uma temperatura de cerca de 6 000 K, abrange uma gama de comprimentos de onda $\lambda \sim 0.3\text{–}3\,\mu\mathrm{m}$, e atinge o topo da atmosfera da Terra. A *constante solar* $R_{s0} \approx 1361.5\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ é a irradiância na direção dos raios do sol a uma distância de $1\,\mathrm{UA} = r_a$ do Sol. A irradiância numa direcção perpendicular ao topo da atmosfera em um determinado dia e latitude é a *irradiância solar extra-atmosférica*, e é dada por

$$R_{sea} = R_{s0}\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \cos Z.$$

O valor médio de R_{sea} ao longo de 24 horas é uma quantidade útil, que pode mais tarde ser usada para estimar a irradiação solar R_s média diária que atinge a superfície da Terra.

$$\begin{aligned}
R_{sea}(t) &= R_{s0}\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \left[\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos h(t)\right]; \\
\langle R_{sea}\rangle &= \frac{1}{D}\int_0^T R_{sea}(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

onde $D = 86400\,\mathrm{s}$ é a duração do dia, e T é a duração do brilho solar, com o tempo t medido do nascer até o por do sol. Mas

$$\begin{aligned}
D &= \frac{2\pi}{\omega}, \\
\omega\mathrm{d}t &= \mathrm{d}h,
\end{aligned}$$

onde ω é a velocidade angular da Terra, donde

$$\begin{aligned}
\langle R_{sea}\rangle &= \int_{-H}^{+H} \frac{\omega}{2\pi} R_{s0}\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \left[\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos h(t)\right] \frac{\mathrm{d}h}{\omega} \\
&= \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 \frac{R_{s0}}{\pi}\left[H\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\operatorname{sen}H\right].
\end{aligned}$$

A irradiância solar ou irradiância de *ondas curtas* R_s atingindo a superfície do Terra é na maior parte do tempo menor que R_{sea}. Idealmente, ela deveria ser medida diretamente com *piranômetros*, mas historicamente tem sido estimada por medições de *duração do brilho intenso do sol n* (geralmente em horas), através da equação de Prescott (Brutsaert, 1982):

$$\langle R_s \rangle = \langle R_{sea} \rangle \left[a + b \frac{n}{N} \right],$$

com $a \sim 0.25$ e $b \sim 0.50$, e onde N é a duração do brilho do sol (o fotoperíodo): o tempo decorrido entre o nascer e o por do sol. Note que a equação de Prescott não é capaz de prever valores de R_s em uma escala de ~ 1 h, mas apenas a média de 24 horas, porque a duração do brilho intenso do sol é uma medição integral (diária).

Além de radiação solar, a superfície da Terra também recebe radiação emmitida pela atmosfera, em de comprimentos de onda $\lambda \sim 3\text{–}100\,\mu m$, devido ao fato de que as fontes emissoras estão a temperaturas da ordem de 300 K. Esta irradiância de *ondas longas* ou *atmosférica* que atinge a superfície é R_a. Finalmente, a própria superfície re-emite radiação de volta para a atmosfera; esta é a irradiância emitida R_e.

A Figura a seguir mostra (de novo) esquematicamente o balanço de energia na superfície da terra.

A razão entre a irradiância solar refletida e a irradiância radiação solar incidente é o *albedo* α da superfície; e a razão entre a irradiância atmosférica absorvida e a irradiância atmosférica incidente é a *absortividade / emissividade* ϵ da superfície. A irradiância *líquida* é o fluxo total de energia absorvida por unidade de área da superfície:

$$R_n = R_s(1-\alpha) + \epsilon R_a - R_e.$$

Radiação atmosférica

A estimativa da irradiância atmosférica (de onda longa) incidente é um assunto complicado. Ele geralmente é dividido em duas partes: a estimativa da irradiância atmosférica céu claro, R_{ac}, e a estimativa do aumento

de irradiância atmosférica devido 1a presença de nuvens. irradiância atmosférica de céu claro é geralmente obtida a partir de equações com o forma

$$R_{ac} = \epsilon_{ac}\sigma T_a^4,$$

que é obviamente inspirada pela lei de Stefan-Boltzmann para um corpo cinza. Ela parece ter tido uma origem estritamente empírica no trabalho de Brunt (1932), na forma

$$\epsilon_{ac} = 0.52 + 0.0065\sqrt{e_a}.$$

(Em unidades SI), mas pode ser obtida a partir das equações para a transfência radiativa na atmosfera sob certas premissas simplificadoras. Talvez a maneira mais clara, e um das mais simples, de deduzi-la seja a de Brutsaert (1975a). Em princípio, a radiação de onda longa que atinge a superfície pode ser encontrada integrando-se a equação de Schwarzchild

$$\mathrm{d}I_\lambda = -k_\lambda(I_\lambda - B_\lambda(T)),$$

onde I_λ é a irradiância no comprimento de onda λ atravessando a atmosfera. Mas uma alternativa que produz um resultado analítico mais direto é uma integral sobre o caminho ótico u,

$$R_{ac} = \int_0^\infty \sigma T^4 \frac{\mathrm{d}\epsilon_f}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u.$$

Considere agora uma distribuição exponencial de temperatura na atmosfera,

$$T(z) = T_0 \exp\left(-\frac{\gamma z}{T_0}\right)$$

com $\gamma = 6.5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ e $T_0 = 288.15\,\mathrm{K}$. Em primeira aproximação,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\gamma,$$

de forma que

$$\begin{aligned}
p &= \rho R_d T, \\
\mathrm{d}p &= -\rho g \mathrm{d}z, \\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= \frac{g}{R_d T}\mathrm{d}z = \frac{g}{\gamma R_d}\frac{\mathrm{d}T}{T}, \\
\frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R_d}}.
\end{aligned}$$

Para o vapor d'água,

$$\begin{aligned}
e_0 &= \rho_{v0} R_v T, \\
\rho_{v0} &= \frac{e_0}{R_v T_0}, \\
\rho_v(z) &= \rho_{v0}\exp(-k_w z),
\end{aligned}$$

com $k_w = 4.4 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1}$. Em Brutsaert (1975a), A emissividade efetiva ϵ_f é dada em função do caminho ótico

$$u = \int_0^z \rho_v(\zeta) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2} \mathrm{d}\zeta$$

por

$$\epsilon_f = Aa^m,$$

com $A = 0.75$, $m = 1/7$ e

$$a = \frac{u}{\rho_w}$$

em centímetros equivalentes de água (com $\rho_w = 1\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$). Parece preferível, entretanto, usar uma versão em que fatores adimensionais aparecem mais claramente. Façamos portanto

$$\epsilon_f(u) = \left(\frac{u}{u_0}\right)^m.$$

Então, obtemos a partir das equações acima

$$u_0 = (0.75)^{-1/7} = 7.491541\,\mathrm{g\,cm}^{-2} = 74.91541\,\mathrm{kg\,m}^{-2}.$$

Diferenciando $\epsilon_f(u)$,

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_f}{\mathrm{d}u} = \frac{m}{u_0}\left(\frac{u}{u_0}\right)^{m-1},$$

e substituindo na integral para R_{ac},

$$\begin{aligned} R_{ac} &= \int_{u=0}^{\infty} \sigma \left(T_0 \mathrm{e}^{-\gamma z/T_0}\right)^4 \frac{m}{u_0}\left(\frac{u}{u_0}\right)^{m-1} \mathrm{d}u \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 \mathrm{e}^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0}\left(\frac{1}{u_0}\int_{\zeta=0}^{z} \rho_{v0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2} \mathrm{d}\zeta\right)^{m-1} \rho_v \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} R_{ac} &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 \mathrm{e}^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0}\left(\frac{1}{u_0}\int_{\zeta=0}^{z} \rho_{v0}\mathrm{e}^{-k_w\zeta}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/(2\gamma R_d)} \mathrm{d}\zeta\right)^{m-1} \rho_{v0}\mathrm{e}^{-k_w z}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{g/(2\gamma R_d)} \mathrm{d}z \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \sigma T_0^4 \mathrm{e}^{-4\gamma z/T_0} \frac{m}{u_0}\left(\frac{1}{u_0}\int_{\zeta=0}^{z} \rho_{v0}\mathrm{e}^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)\zeta} \mathrm{d}\zeta\right)^{m-1} \rho_{v0}\mathrm{e}^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)z} \mathrm{d}z \\ &= m\left(\frac{\rho_{v0}}{u_0}\right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\frac{4\gamma}{T_0} + k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)z} \left(\int_{\zeta=0}^{z} \mathrm{e}^{-\left(k_w + \frac{g}{2R_d T_0}\right)\zeta} \mathrm{d}\zeta\right)^{m-1} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação um pouco, façamos

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{4\gamma}{T_0} + k_2, \\ k_2 &= k_w + \frac{g}{2R_d T_0}; \end{aligned}$$

então,

$$
\begin{aligned}
R_{ac} &= m\left(\frac{\rho_{v0}}{u_0}\right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k_1 z}\left(\int_{\zeta=0}^{z} \mathrm{e}^{-k_2\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\right)^{m-1} \mathrm{d}z \\
&= m\left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2}\right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k_1 z}\left(1-\mathrm{e}^{-k_2 z}\right)^{m-1} k_2\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Agora nós fazemos a mudança de variáveis

$$
\begin{aligned}
t &= \mathrm{e}^{-k_2 z}, \\
\mathrm{d}t &= -k_2 \mathrm{e}^{-k_2 z}\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

e obtemos

$$
\begin{aligned}
R_{ac} &= m\left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2}\right)^m \sigma T_0^4 \int_{z=\infty}^{0} \left(\mathrm{e}^{-k_2 z}\right)^{\frac{k_1}{k_2}-1}\left(1-\mathrm{e}^{-k_2 z}\right)^{m-1} k_2\left(-\mathrm{e}^{-k_2 z}\right)\,\mathrm{d}z \\
&= m\left(\frac{\rho_{v0}}{u_0 k_2}\right)^m \sigma T_0^4 \int_{t=0}^{1} t^{\frac{k_1}{k_2}-1}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\left[m\left(\frac{e_0}{u_0 k_2 R_v T_0}\right)^m B\left(\frac{k_1}{k_2}, m\right)\right]}_{\epsilon_{ac}} \sigma T_0^4.
\end{aligned}
$$

No SI, a equação de Brutsaert é

$$
\epsilon_{ac} = 0.64\left(\frac{e_a}{T_a}\right)^{1/7}.
$$

Efeito da nebulosidade sobrea a irradiância atmosférica.

A irradiância atmosférica aumenta na presença de nuvens. Uma forma de considerar esse efeito é propor

$$
R_a = \phi R_{ac},
$$

onde ϕ é alguma função de um índice de nebulosidade. A equação de Bolz, em termos da cobertura de nuvens c, é

$$
\phi = 1 + 0.22c^2 \tag{3.8}
$$

A nebulosidade é reportada em estações meteorológicas operadas manualmente em *oktas*, ou oitavos de céu coberto por nuvens Wikipedia (2019). Quando c não está disponível, um substituto é

$$
c = 1 - n/N, \tag{3.9}
$$

onde n e N foram definidos acima. Da mesma forma que a equação de Prescott, o par de equações acima só pode ser usado para produzir estimativas médias diárias.

Equações mais recentes têm sido desenvolvidas para estimar ϕ em escala horária, e podem ser encontradas, por exemplo, em Duarte et al. (2006).

Radiação emitida

Finalmente, a irradiância emitida pela superfície (quando esta está à temperatura T_0) é

$$R_e = \epsilon \sigma T_0^4.$$

A tabela a seguir dá as propriedades radiativas de diversos tipos de superfície:

Propriedades radiativas de diversas superfícies Fonte: Brutsaert (1982), Garratt (1994), Oke (1987) e Stull (1995)

Superfície	Tipo	Albedo	Emissividade
1. Solos	Escuro e saturado	0,05 – 0,15	0,98
	Areia, saturado	0,15 – 0,25	0,98
	Argila, saturado	0,15 – 0,20	0,97
	Areia, seco	0,20 – 0,40	0,95
	Argila, seco	0,20 – 0,35	0,95
	Deserto	0,20 – 0,45	0,84 – 0,91
2. Vegetação			
2.1 Florestas	Tropicais	0,07 – 0,15	0,97 – 0,99
	Coníferas	0,10 – 0,19	0,97 – 0,99
	Decíduas, caducas	0,14 – 0,20	0,96 – 0,98
	Cobertas de neve	0,20 – 0,30	0,97 – 0,99
2.2 Agricultura	Pomares	0,15 – 0,20	0,96 – 0,97
	Soja, batata, alfafa...	0,15 – 0,25	0,97 – 0,98
2.3 Rasteira	Tundras, gramíneas	0,18 – 0,25	0,90
2.4 Cerrado	Campinas, padrarias	0,20 – 0,30	0,90 – 0,95
2.5 Grama e capim	Alto e médio	0,15 – 0,30	0,90 – 0,95
	Baixo	0,15 – 0,25	0,90 – 0,95
3. Oceano e lagos	Pequeno ângulo zenital	0,03 – 0,10	0,92 – 0,97
	Grande ângulo zenital	0,10 – 1,00	0,92 – 0,97
4. Neve	Recente	0,65 – 0,95	0,95
	Velha	0,45 – 0,65	0,90
5. Gelo	Calotas polares	0,30 – 0,45	0,92 – 0,97
	Geleiras	0,20 – 0,40	0,96
6. Construções	Área urbana	0,15	0,85 – 0,95
	Asfalto	0,05 – 0,15	0,95
	Concreto	0,15 – 0,37	0,71 – 0,90

A tabela a seguir mostra alguns valores anuais de a, b que têm sido utilizados em diversos estudos no Brasil.

Valores dos parâmetros a, b da equação de Prescott para várias localidades do Brasil. Fontes: Vianello e Alves (1991), Tubelis e Nascimento (1984), Laperuta *et al.*(1997), Silva *et al.*(1997), Reis (1996).

Localidade	Lat.	Long.	a	b
Bagé RS	31° 20′ S	54° 06′ O	0,250	0,380
Botucatu SP	22° 52′ S	48° 26′ O	0,244	0,471
Brasília DF	15° 47′ S	47° 56′ O	0,279	0,459
Campinas SP	22° 53′ S	47° 04′ 0	0,230	0,560
Cananéia SP	25° 00′ S	47° 55′ O	0,214	0,852
Caxias do Sul RS	29° 11′ S	51° 12′ O	0,250	0,530
Encruzilhada do Sul RS	30° 31′ S	52° 30′ O	0,230	0,540
Estado de São Paulo			0,240	0,580
Estado do Rio Grande do Sul			0,230	0,460
Fortaleza CE	03° 43′ S	38° 32′ O	0,270	0,360
Irecê BA	11° 19′ S	41° 52′ O	0,330	0,330
João Pessoa PB	07° 07′ S	34° 52′ O	0,280	0,360
Mococa SP	21° 28′ S	47° 00′ O	0,400	0,410
Monte Alegre do Sul SP	22° 40′ S	46° 40′ O	0,190	0,610
Paulo Afonso BA	09° 21′ S	38° 15′ O	0,310	0,330
Passo Fundo RS	28° 15′ S	52° 24′ O	0,180	0,400
Pelotas RS	31° 45′ S	52° 19′ O	0,350	0,460
Petrolina PE	09° 23′ S	40° 29′ O	0,330	0,410
Pindamonhangaba SP	22° 53′ S	45° 27′ O	0,280	0,560
Piracicaba SP	22° 42′ S	47° 38′ O	0,180	0,620
Presidente Prudente SP	22° 07′ S	51° 22′ O	0,190	0,390
Propriá SE	10° 12′ S	36° 52′ O	0,320	0,370
Rio Grande RS	32° 31′ S	52° 05′ O	0,160	0,690
Salvador BA	12° 58′ S	38° 31′ O	0,290	0,390
São Luiz MA	02° 32′ S	44° 18′ O	0,260	0,330
São Luiz Gonzaga RS	28° 24′ S	54° 57′ O	0,300	0,290
Serra Azul MG	19° 58′ S	44° 21′ O	0,234	0,377
Teresina PI	05° 05′ S	42° 48′ O	0,310	0,370
Viçosa MG	20° 45′ S	42° 53′ O	0,230	0,376

Agora, o balanço de energia na superfície é dado por

$$R_{n0} = H + LE + G + D.$$

O índice 0 de R_{n0} é uma novidade e indica que a superfície encontra-se à temperatura real T_0. Esta equação define os processos fundamentais de troca de energia na superfície. A radiação líquida é repartida entre o fluxo de calor sensível (H) que vai aquecer o ar; o fluxo de calor latente (LE) responsável pela mudança de fase da água líquida em vapor na superfície; o fluxo de calor pelo fundo do volume de controle subsuperficial (G); e o termo D de aquecimento/resfriamento do volume de controle. Em terra,

podemos considerar um volume de controle subsuperficial de espessura infinitesimal, e desprezar D; em lagos, D representa o aquecimento/resfriamento das águas do lago, e G é o fluxo de calor através do fundo do lago, sendo muitas vezes desprezado. Quando G não é medido em terra, é comum adotar-se as seguintes simplificações (Brutsaert, 1982; Stull, 1995): a nível horário,

$$G \approx 0.3 R_{n0};$$

a nível diário ou sobre escalas temporais maiores, G tende a ser uma ou mais ordens de grandeza menor que os demais termos da equação de balanço de energia, e consequentemente pode ser desprezado (Brutsaert, 1982). Finalmente, para calcular D em lagos, é preciso levar em conta os seguintes fatores (Dias e Reis, 1996):

1. é preciso usar o teorema do transporte de Reynolds para calcular o balanço de entalpia armazenada na água a partir de perfis de temperatura da água sucessivos no tempo;

2. a sua importância é tanto maior quanto mais fundo for o lago — para lagos muito rasos, D pode ser desprezado;

3. a profundidade também afeta o intervalo mínimo de tempo necessário entre medições sucessivas para que a estimativa de D seja acurada.

Para o caso simples em que a advecção de entalpia não é importante, e os níveis do lago no início e no fim de um período Δt entre duas medições sucessivas de perfis de temperatura da água não são muito diferentes, Dias e Reis obtiveram

$$\langle D \rangle \approx \frac{1}{A_s \Delta t} \int_{z_f}^{\underline{z}} \rho_w c_w \left[T(z, t + \Delta t) - T(z, t) \right] A(z)\, dz,$$

onde $\langle \cdot \rangle$ indica uma média de D sobre Δt, c_w é o calor específico da água ($\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$), $A(z)$ é a curva cota-área, $\underline{z}$ é o mínimo entre os níveis inicial e final do reservatório, z_f é a cota do fundo e $T(z, t)$, $T(z, t + \Delta t)$ são os perfis de temperatura da água.

A temperatura da superfície T_0 pode ser medida quando a superfície for líquida. Sobre superfícies terrestres, a temperatura da superfície é um parâmetro cuja definição é problemática, já que a "superfície" é formada por folhas, galhos, solo nu, etc., entremeados pelo ar. Algumas alternativas para eliminar a temperatura da superfície das equações serão mencionadas na sequência, principalmente em relação à equação de Penman. Com os termos do balanço de energia estimados (de alguma forma), duas grandezas adimensionais importantes são a Razão de Bowen

$$Bo = \frac{H}{LE}$$

e a Fração Evaporativa

$$Fe = \frac{LE}{R_{l0} - G - D}.$$

Repartição de energia e importância da evaporação e evapotranspiração

A razão de Bowen e a fração evaporativa dependem fortemente do tipo de superfície e do estado de umidade do solo. Quando há umidade disponível na superfície, a radiação líquida tende a ser utilizada para evapo(transpi)ração, e LE torna-se bem maior que H. Quando a umidade fica restrita, a proporção de H no balanço de energia aumenta (Brubaker e Entekhabi, 1995, 1996). Desta forma a razão de Bowen é pequena para superfícies líquidas, florestas úmidas, etc., e bem maior para campos ou solo nu com pouca umidade. Um outro aspecto que merece nota é a importância da evaporação/evapotranspiração no ciclo hidrológico como um todo: note na tabela a seguir que mais de 50% do que chove sobre os continentes retorna à atmosfera por evapo(transpi)ração. Note também dois outros fatos significativos: a América do Sul é extraordinariamente mais bem provida de chuva do que os outros continentes, o que certamente tem a ver com a Amazônia; e em continentes com vastas áreas de deserto (África e Oceania), a relação E/P tende a ser maior (o que é intuitivo).

Precipitação e evaporação continentais Fonte: Brutsaert (1982)

	Europa	Ásia	África	Am. N.	Am. S.	Oceania
P(mm)	734	726	686	670	1648	736
E(mm)	415	433	547	383	1065	510
E/P	0.57	0.60	0.80	0.57	0.65	0.69

A tabela acima deve ser encarada com circunspecção, por se tratar de uma média sobre cada continente. Os valores individuais de E e P podem variar significativamente no espaço, mesmo sobre uma região do tamanho do estado do Paraná. Segundo Dias e Kan (1998), E/P é da ordem de 0,5 na bacia do rio Jangada, tributário do rio Iguaçu, ao Sul do Estado do Paraná, onde a precipitação é bem distribuída ao longo do ano, e a umidade e nebulosidade são altas; na bacia do rio das Cinzas, no norte do estado, $E/P \sim 0{,}25$ (embora não se possa eliminar totalmente a hipótese de que haja perdas subterrâneas, que distorçam a estimativa de E por balanço hídrico).

3.10 Os fundamentos físicos dos métodos de medição de evaporação

Balanço de massa

Considere um volume de controle dentro do qual a massa de água armazenada é S. Se Q_e é a vazão líquida efluente, P é a precipitação e E a evaporação/evapotranspiração através da superfície superior de área horizontal A,

$$\frac{dS}{dt} = (P - E) - Q.$$

O balanço de massa é rotineiramente aplicado, embora não sem alguns problemas, em lisímetros e tanques evaporimétricos. Ele também é utilizado em agrometeorologia para determinar a necessidade de irrigação dos solos a partir de estimativas da evapotranspiração, e é a base para

estimativas climatológicas de longo curso da evapotranspiração de bacias hidrográficas (chegando à escala continental) a partir de registros de precipitação e vazão. De fato, integrando-se a equação de balanço de massa (ou hídrico) ao longo de um tempo suficientemente longo, o termo de armazenamento torna-se desprezível, e é possível explicitar E em função de P e Q.

Medição de covariâncias turbulentas (*Eddy covariance*)

O método só pode ser aplicado, como diz o nome, se levarmos em conta a presença da turbulência no ar. Para uma grandeza qualquer a (a velocidade u horizontal, a velocidade w vertical, a densidade de vapor d'água ρ_v, etc.) nós utilizaremos a decomposição de Reynolds,

$$a = \overline{a} + a',$$

E precisaremos utilizar (em geral implicitamente neste curso, para não irmos a fundo demais nas questões) os *postulados de Reynolds*. Esses postulados estão ligados ao cálculo de médias. Tipicamente, utilizaremos

$$\begin{aligned} \overline{a'} &= 0, \\ \overline{a'b'} &\neq 0 \qquad \text{(em geral)}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\overline{a} &= \overline{\frac{\partial a}{\partial t}}, \end{aligned}$$

etc. Note que no restante do texto quando nos referimos a uma grandeza meteorológica *nós não usamos as barras*! Por exemplo, a equação de Penman se aplica (estritamente) em nível horário ou sub-horário. No entanto, nela o símbolo u signfica a velocidade média do vento durante (digamos) uma hora, enquanto que aqui estamos *explicitando essa média*, e escrevendo $\overline{u}$.

A figura a seguir mostra a essência do método de medição de covariâncias turbulentas. Nós vamos ilustrá-la para diversos pares de grandeza intensiva ↔ grandeza extensiva (Fox e McDonald, 1981) (identificadas pela grandeza extensiva na lista a seguir), a saber: a massa de ar seco, a massa de vapor d'água, a massa de CO_2.

Mass balance to a virtual "box" (a control volume) of a height z_a over a homogeneous surface of length L throughout in the wind direction.

Para o volume de controle $\mathscr{C}$ mostrado, limitado pela superfície fechada $\mathscr{S}$, a equação de balanço de massa de um gás atmosférico cuja concentração é c é

$$\int_{\mathscr{C}} s_c \, dV - \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}_c) \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho_c \, dV + \oint_{\mathscr{S}} \rho_c (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) \, dS. \qquad (3.10)$$

Em (3.10), $\boldsymbol{j}_c$ é vetor o fluxo difusivo de massa do gás c na superfície de $\mathscr{C}$ e s_c são as fontes de produção do gás c no interior de $\mathscr{C}$ (por exemplo, produção de CO_2 pela respiração noturna das plantas). Estes termos formam o *fluxo total* do gás c para dentro do volume $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{F}_c \equiv \int_{\mathscr{C}} s_c \, dV - \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j}_c) \, dS. \tag{3.11}$$

Para prosseguir, é preciso levar em consideração a composição gasosa da atmosfera, e a importância das contribuições para as fontes e os fluxos difusivos na fronteira de $\mathscr{C}$. Considere a atmosfera constituída essencialmente por 3 componentes. A parte "seca" é formada principalmente por O_2 e N_2, sendo considerada como se fosse um gás com constante $R_d = 287{,}05 \ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ (a constante de gás para ar seco). A componente úmida é vapor d'água H_2O, cuja constante de gás é $R_v = 461{,}52\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$. Considere agora uma terceira componente, formada por um gás de efeito estufa. Para fixar idéias, suponha CO_2, cuja constante de gás é $R_c = 188{,}92\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$. A densidade do ar é a soma das densidades de cada componente:

$$\rho = \rho_d + \rho_v + \rho_c, \tag{3.12}$$

onde ρ_d é a densidade do ar seco, ρ_v é a densidade do vapor d'água, e ρ_c é a densidade do CO_2. Da mesma forma, os fluxos difusivos e as fontes se somam:

$$s = s_d + s_v + s_c, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_d + \boldsymbol{j}_v + \boldsymbol{j}_c. \tag{3.14}$$

Para o ar seco, $s_d = 0$, $\boldsymbol{j}_d = 0$ (Finnigan, 2009). Segundo Lee e Massman (2011), esta hipótese é uma novidade fundamental da teoria proposta por Webb et al. (1980). Expandindo a derivada em relação ao tempo em (3.10),

$$\mathscr{F}_c = \int_V \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \, dV + \oint_S \rho_c (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) \, dS. \tag{3.15}$$

O termo envolvendo a advecção de massa através da superfície de controle deve ser contabilizado para cada uma das superfícies ①, ② e ③:

$$\int_{①} \rho_c (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) \, dS = - \int_{y=0}^{b} \int_{z=0}^{z_a} \rho_c u(x = 0, y, z, t) \, dz \, dy, \tag{3.16}$$

$$\int_{②} \rho_c (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) \, dS = + \int_{y=0}^{b} \int_{z=0}^{z_a} \rho_c u(x = L, y, z, t) \, dz \, dy, \tag{3.17}$$

$$\int_{③} \rho_c (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}) \, dS = + \int_{x=0}^{L} \int_{y=0}^{b} \rho_c w(x, y, z = z_a, t) \, dy \, dx. \tag{3.18}$$

Considere agora a média de (3.15), indicada por uma barra. Utilizando as propriedades de comutação da média com a derivada,

$$\overline{\mathscr{F}_c} = \int_V \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} \, dV + \oint_S \overline{\rho (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})} \, dS. \tag{3.19}$$

Note que $\overline{\mathscr{F}_c}$ é uma taxa de transferência de massa para dentro de $\mathscr{C}$, em $\mathrm{kg_c\ s^{-1}}$ no SI. Se o escoamento for *homogêneo* em x e em y, então

$$\overline{[\rho_c u]}(x = 0, y, z) = \overline{[\rho_c u]}(x = L, y, z), \ \forall y, z \tag{3.20}$$

Observe que *isso é válido apenas na média*; prosseguindo,

$$\int_{①} \overline{\rho_c(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})}\, dS + \int_{②} \overline{\rho_c(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u})}\, dS = 0. \tag{3.21}$$

A hipótese de homogeneidade horizontal também implica que $\overline{[\rho_c w]}(x, y, z = z_a)$ é independente tanto de x quanto de y, de forma que

$$\int_{x=0}^{L} \int_{y=0}^{b} \overline{[\rho_c w]}(x, y, z = z_a)\, dy\, dx = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a) bL. \tag{3.22}$$

Para a densidade média $\overline{\rho_c}$ a hipótese de homogeneidade horizontal leva a

$$\overline{\rho_c} = \overline{\rho_c}(z, t), \tag{3.23}$$

onde (3.15), com o uso de (3.21) e (3.22), reduz-se a

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{F}_c} &= bL \int_0^{z_a} \frac{\partial \overline{\rho_c}}{\partial t}\, dz + bL\overline{[\rho_c w]}(z = z_a), \\ \frac{\overline{\mathscr{F}_c}}{bL} \equiv F_c &= \int_0^{z_a} \frac{\partial \overline{\rho_c}}{\partial t}\, dz + \overline{[\rho_c w]}(z = z_a), \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde F_c é o fluxo específico (fluxo por unidade de área da superfície) de massa do gás. O termo transiente é mantido em (3.24) para permitir uma análise de sua importância, que se segue agora.

Pelo Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial e Integral, se $0 \leq z^* \leq z_a$:

$$F_c = \frac{\partial}{\partial t} \{z_a \overline{\rho_c}(z^*)\} + \overline{[\rho_c w]}(z = z_a). \tag{3.25}$$

O termo transiente pode ser desprezado se

$$z_a \frac{\partial}{\partial t} \{\overline{\rho_c}(z^*)\} \ll \overline{[\rho_c w]}(z = z_a); \tag{3.26}$$

neste caso, obtém-se a equação padrão do método de covariâncias turbulentas para o fluxo superficial do gás c:

$$F_c = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a). \tag{3.27}$$

Observe como a escolha de z_a é crucial: quanto maior o seu valor, mais importante se torna o efeito de $\partial\overline{\rho_c}/\partial t$; como é de se esperar que o valor de $\overline{\rho_c}$ evolua ao longo do tempo em função inclusive do próprio fluxo superficial F_c, não é realista admitir que o termo transiente seja identicamente nulo em uma atmosfera real; a rigor, é uma combinação de um valor pequeno para a derivada temporal com uma altura de medição "baixa" (além é claro da hipótese de homogeneidade horizontal) que garante que (3.27) nos dá um valor acurado de F_c na superfície.

Como vimos acima, para o ar seco $\mathscr{F}_s \equiv 0$, donde (3.27) com $c = s$ leva a

$$\frac{\overline{\mathscr{F}_d}}{bL} = 0 = \overline{[\rho_d w]}(z = z_a). \tag{3.28}$$

Esta é uma hipótese fundamental na dedução da correção WPL (Webb et al., 1980), que no entanto é mencionada de passagem naquele artigo. Neste texto, (3.28) é deduzida rigorosamente a partir das hipóteses de homogeneidade horizontal e de estacionariedade e do balanço de ar seco para um volume de controle, da mesma forma que em Finnigan (2009), e Lee e Massman (2011).

Debaixo das mesmas hipóteses de homogeneidade e estacionariedade, os fluxos específicos (*i.e.*, por unidade de área) de massa de vapor d'água e massa de CO_2 são

$$E \equiv \frac{\overline{\mathscr{F}_v}}{bL} = \overline{[\rho_v w]}(z = z_a),$$
$$F \equiv \frac{\overline{\mathscr{F}_c}}{bL} = \overline{[\rho_c w]}(z = z_a).$$

Além dos fluxos de massa descritos acima, são também imprescindíveis em medições micrometeorológicas os fluxos de quantidade de movimento,

$$\tau \equiv \frac{\overline{\mathscr{F}_u}}{bL} = \overline{[\rho u w]}(z = z_a), \tag{3.29}$$

e o fluxo de calor sensível

$$H \equiv \frac{\overline{\mathscr{F}_\theta}}{bL} = \overline{[\rho c_p w \theta]}(z = z_a), \tag{3.30}$$

onde θ é a temperatura potencial.

Em nome da simplicidade, daqui por diante omitiremos o nível de medição; assim, por exemplo, escreveremos $\overline{\rho_v w}$ em lugar de $\overline{[\rho_v w]}(z = z_a)$.

Teoria de Similaridade de Monin-Obukhov

Hipóteses básicas:

- O escoamento médio é estacionário:

$$\frac{\partial \overline{(\cdot)}}{\partial t} = 0. \tag{3.31}$$

- O escoamento é unidirecional:

$$\overline{\boldsymbol{u}} = (\overline{u}, 0, 0), \quad \overline{v} = \overline{w} = 0. \tag{3.32}$$

- O escoamento médio é homogêneo em x e y:

$$\frac{\partial \overline{(\cdot)}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{(\cdot)}}{\partial y} = 0. \tag{3.33}$$

Nestas condições, a *advecção local* de qualquer grandeza na direção x é nula (homogeneidade horizontal)

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{(\cdot)}}{\partial x} = 0. \tag{3.34}$$

Do ponto de vista de Teoria de Turbulência, os fluxos superficiais são covariâncias turbulentas, próximo à superfície, em que uma das variáveis é a flutuação da velocidade vertical w:

$$\begin{aligned}
\tau &= \overline{\rho}u_*^2 = -\overline{\rho w u} \\
H &= \overline{\rho}c_p u_* \theta_* = \overline{\rho c_p w \theta} \\
E &= \overline{\rho}u_* q_* = \overline{\rho_v w} \\
H_v &= \overline{\rho}c_p u_* \theta_{v*} = \overline{\rho c_p w \theta_v} \\
F &= \overline{\rho}u_* c_* = \overline{\rho_c w}
\end{aligned}$$

Surgem diversas *escalas turbulentas*: a velocidade de atrito u_*, a escala de temperatura θ_*, a escala de umidade específica q_*, a escala do gás c c_* e a escala de temperatura virtual θ_{v*}, associada ao fluxo de calor sensível virtual H_v.

A TSMO postula que as variáveis na camada superficial devidamente adimensionalizadas pelas escalas acima, e pela distância ao plano de deslocamento zero $z-d$, são funções da variável de estabilidade de Obukhov,

$$\zeta = \frac{z-d}{L_O} = -\frac{\kappa g(z-d)\theta_{v*}}{\overline{\theta_v}{u_*}^2}.$$

ζ é uma medida da importância da produção térmica de turbulência em relação à produção mecânica.

A camada superficial (CS) é a região dentro da camada-limite atmosférica onde, *grosso modo*, os fluxos superficiais τ, H, H_v, etc., são aproximadamente constantes em z. Em outras palavras, *em princípio*, medições de covariâncias turbulentas dentro da CS produzem os fluxos superficiais. A CS possui várias sub-camadas: a sub-camada interfacial, a sub-camada de rugosidade, a sub-camada dinâmica e a sub-camada dinâmico-convectiva e a sub-camada de convecção livre local. Esta última, dependendo do autor, pode ser ou não considerada parte da CS. A nomenclatura também varia de acordo com o autor. As 3 primeiras classificações são razoavelmente universais (Brutsaert, 1982; Garratt, 1994); o termo sub-camada dinâmico-convectiva deve-se a Kader e Yaglom (1990); o termo sub-camada de convecção livre (ou camada, dependendo de ela ser ou não considerada parte da CS) deve-se a Wyngaard et al. (1971). Remetemos o leitor a estas referências para os detalhes das diversas sub-camadas da CS.

A CS é instável quando $\zeta < 0$, e o termo de empuxo contribui para produzir turbulência. A CS é estável quando $\zeta > 0$, e este termo ajuda a destruir turbulência. Ela é neutra quando $\zeta = 0$.

Isto serve de ilustração (mas não como demonstração) do seguinte fato: a Teoria SMO prevê que todos os momentos de flutuações turbulentas quaisquer, devidamente adimensionalizados pela combinação adequada de z, u_*, θ_*, q_*, θ_{v*} e c_*, são funções da variável (aqui tomada como

independente) ζ. Para os gradientes das grandezas médias, (momentos de ordem 1) essas funções são

$$\frac{\kappa z}{u_*}\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z} = \phi_\tau(\zeta), \qquad \frac{\kappa z}{\theta_*}\frac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}z} = \phi_H(\zeta), \qquad \frac{\kappa z}{q_*}\frac{\mathrm{d}\overline{q}}{\mathrm{d}z} = \phi_E(\zeta), \qquad \frac{\kappa z}{q_*}\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}z} = \phi_F(\zeta).$$

O uso da derivada ordinária $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ nas equações acima, em lugar da derivada parcial, simplesmente indica que consideramos que o escoamento é estacionário e homogêneo na horizontal, de forma que a única variável independente (do ponto de vista estatístico da turbulência) é z.

Integração dos gradientes adimensionais As equações acima, que definem os gradientes adimensionais ϕ de Monin-Obukhov, são equivalente a postular difusividades turbulentas. Considere por exemplo um escoamento turbulento numa camada-limite com estratificação de densidade. A difusividade turbulenta da quantidade de movimento, K_τ, é definida por analogia com a difusividade molecular como

$$\tau \equiv \overline{\rho} K_\tau \frac{d\overline{u}}{dz}.$$

Segue-se que a difusividade turbulenta é

$$K_\tau = \kappa(z-d)u_*/\phi_\tau(\zeta).$$

Considere agora o caso para o perfil de velocidade média horizontal $\overline{u}$ e $\zeta = 0$ ($L_O = +\infty$):

$$\frac{\kappa z}{u_*}\frac{d\overline{u}}{dz} = \phi_\tau(0) = 1$$

onde o valor $\phi_\tau(0) = 1$ é o obtido classicamente em escoamentos turbulentos não-estratificados (Brutsaert, 1982). Integrando,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z-d} &= \kappa\frac{d\overline{u}}{u_*} \\ \int_{x=d+z_{0\tau}}^{z-d} \frac{dx}{x-d} &= \kappa\frac{\overline{u}}{u_*} \\ \frac{\overline{u}}{u_*} &= \frac{1}{\kappa}\ln\frac{z-d}{z_{0\tau}} \end{aligned}$$

Note que a integral sobre z tem limite inferior $d + z_{0\tau}$, e não d, porque a relação fluxo-gradiente vale apenas na região "inercial" CS, deixando de valer na sub-camada rugosa imediatamente acima da superfície. A constante de integração $z_{0\tau}$ é chamada de comprimento de rugosidade para a quantidade de movimento. Já vimos o análogo disso em hidráulica de canais!!!

A equação (**??**) é o bem conhecido perfil logaritmico de velocidade que aparece em camadas-limite turbulentas sem estratificação de densidade. Claramente, $\phi_\tau(\zeta)$ "corrige" este perfil para estratificação não-nula ($\zeta \neq 0$).

O procedimento geral de integração para o caso $\zeta \neq 0$ é o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa z}{u_*}\frac{d\overline{u}}{dz} &= \phi_\tau(\zeta), \\
\frac{\kappa \zeta}{u_*}\frac{d\overline{u}}{d\zeta} &= \phi_\tau(\zeta), \\
\phi_\tau(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} &= \kappa\frac{d\overline{u}}{u_*}, \\
\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\phi_\tau(x)\,dx}{x} &= \kappa\frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{u_*},
\end{aligned}$$

para $\zeta_1 < \zeta_2$. Se

$$\begin{aligned}
\Phi_\tau(\zeta) &\equiv \int \frac{\phi_\tau(x)\,\mathrm{d}x}{x}, \\
u_* &= \kappa\frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{\Phi_\tau(\zeta_2) - \Phi_\tau(\zeta_1)}
\end{aligned}$$

Analogamente, integrando-se os gradientes adimensionais de temperatura, umidade específica e de um gás qualquer,

$$\begin{aligned}
\theta_* &= \kappa\frac{\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2}{\Phi_H(\zeta_2) - \Phi_H(\zeta_1)}, \\
q_* &= \kappa\frac{\overline{q}_1 - \overline{q}_2}{\Phi_E(\zeta_2) - \Phi_E(\zeta_1)}, \\
c_* &= \kappa\frac{\overline{c}_1 - \overline{c}_2}{\Phi_F(\zeta_2) - \Phi_F(\zeta_1)}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma que no caso de uma atmosfera neutra ($\zeta = 0$), as relações logo acima não valem para $z - d = 0$. Assim, quando o nível "1" for a superfície, usa-se $z_1 - d = z_{0\tau}$, $z_1 - d = z_{0H}$, $z_1 - d = z_{0E}$ e $z_1 - d = z_{0F}$, respectivamente.

É costumeiro supor $\phi_H = \phi_E = \phi_F$ na Camada Inercial. A igualdade das difusividades turbulentas de calor e vapor de água foi suposta explicitamente pela primeira vez no contexto micrometeorológico por Bowen em 1926 (Bowen, 1926; Brutsaert, 1982), e constantemente usada desde então, mas esta hipótese só veio a ser provada por Hill (1989) por meio de análise dimensional, e Dias (1994) e Dias e Brutsaert (1996) a partir das equações de balanço de covariâncias turbulentas para o caso de turbulência homogênea na vertical.

No que se segue, vamos supor que as funções de similaridade ϕ para calor e vapor de água são sempre idênticas, *i.e.*: $\phi_H = \phi_E = \phi_F$. Estritamente falando, z_{0H}, z_{0E} e z_{0F} não são iguais (Brutsaert, 1975b,c) no entanto, vamos supor neste texto que eles são suficientemente próximos ($z_{0H} \approx z_{0E} \approx z_{0F}$) para efeitos práticos.

Fórmulas clássicas da TSMO Os perfis clássicos para a velocidade $\overline{u}$ e escalares ($\overline{\theta}$, $\overline{q}$, $\overline{c}$) mais utilizados talvez sejam os de Businger-Dyer (Brutsaert, 1982). Para condições instáveis ($\zeta < 0$):

$$\phi_\tau^2 = \phi_H = \phi_E = \phi_F(1 - 16\zeta)^{-1/2}$$

e para condições estáveis ($\zeta > 0$):

$$\phi_\tau = \phi_H = \phi_E = \phi_F = 1 + 5\zeta.$$

Embora haja alguma discussão sobre os valores das constantes e mesmo a forma destas funções, elas ainda representam um consenso razoável; uma revisão recente dos perfis ϕ em moldes mais clássicos similares aos deste texto pode ser encontrada ainda em (Högström, 1988). Estimulado pelos achados de Kader e Yaglom (1990), Brutsaert (1992) sugeriu, por exemplo, novas formulações para condições instáveis. Em condições estáveis, Cheng e Brutsaert (2005) também reavaliaram as funções de similaridade utilizando dados do experimento CASES-99.

Note que numa atmosfera neutra $\zeta = 0$, donde $\Phi_\tau(0) = \Phi_H(0) = \Phi_E(0) = \Phi_F(0) = -\infty$. Isso dificulta a utilização das equações envolvendo os Φ's, por causa da singularidade no denominador. É preferível então trabalhar com funções Ψ que definem o *desvio* de $\overline{u}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{q}$ em relação aos perfis logaritmicos devido à estabilidade $\zeta \neq 0$:

$$\Psi(\zeta) \equiv \int \frac{1-\phi}{\zeta}\, d\zeta = \ln|\zeta| - \Phi(\zeta).$$

Começando com Ψ_τ,

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(\zeta) &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \frac{1-(1-16u)^{-1/4}}{u}\, du \\ &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1-16u)^{1/4}}\right] du\end{aligned}$$

Para calcular a integral, faça

$$x = (1-16u)^{1/4}; \qquad x^4 = (1-16u); \qquad \frac{1-x^4}{16} = u; \qquad du = -\frac{u^3}{4}\, dx; \tag{3.35}$$

$$a = (1-16\zeta_{0\tau})^{1/4}; \qquad b = (1-16\zeta)^{1/4}. \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(\zeta) &= \int_a^b \left[\frac{16}{1-x^4} - \frac{16}{x(1-x^4)}\right]\left(-\frac{x^3}{4}\right) dx \\ &= 4\int_a^b \left[\frac{x}{x(x^4-1)} - \frac{1}{x(x^4-1)}\right] x^3\, dx \\ &= \int_a^b \frac{4(x-1)x^2}{x^4-1}\, dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{2}{x+1}\right] dx \\ &= \ln(x^2+1) + 2\ln(x+1) - 2\operatorname{arctg} x\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Fazendo $a \approx 1$:

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(b(\zeta)) &= \ln(b^2+1) + 2\ln(b+1) - 2\operatorname{arctg} b - [\ln(2) + 2\ln(2) - 2\operatorname{arctg}(1)] \\ &= \ln\frac{b^2+1}{2} + 2\ln\frac{b+1}{2} - 2\operatorname{arctg} b + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Note que $\Psi_\tau(b = 1) \equiv 0$.

Para Ψ_H:

$$\begin{aligned}\Psi_H(\zeta) &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \frac{1-(1-16u)^{-1/2}}{u}\,du \\ &= \int_{\zeta_{0\tau}}^{\zeta} \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1-16u)^{1/2}}\right] du\end{aligned}$$

Utilizando a mesma mudança de variáveis,

$$\begin{aligned}\Psi_H(\zeta) &= \int_a^b \left[\frac{16}{1-x^4} - \frac{16}{x^2(1-x^4)}\right]\left(-\frac{x^3}{4}\right) dx \\ &= 4\int_a^b \left[\frac{x^2}{x^2(x^4-1)} - \frac{1}{x^2(x^4-1)}\right] x^3\,dx \\ &= \int_a^b \frac{4(x^2-1)x}{x^4-1}\,dx \\ &= 2\ln(x^2+1)\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Fazendo $a \approx 1$:

$$\Psi_H(b(\zeta)) = 2\ln\frac{b^2+1}{2}.$$

Note que, novamente, temos $\Psi_H(b = 1) \equiv 0$.

Finalmente, em condições estáveis,

$$\begin{aligned}\Psi_{\tau,H,E,F} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1-(1+5\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \\ &= -5(\zeta - \zeta_{0\tau,0H,0E,0F}) \approx -5\zeta.\end{aligned}$$

Desta forma, as equações que prognosticam as escalas turbulentas passam a ser escritas como

$$\begin{aligned}u_* &= \kappa\frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1}{\ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_\tau(\zeta_2) - \Psi_\tau(\zeta_1)]}, \\ \theta_* &= \kappa\frac{\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2}{\ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_H(\zeta_2) - \Psi_H(\zeta_1)]}, \\ q_* &= \kappa\frac{\overline{q}_1 - \overline{q}_2}{\ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_E(\zeta_2) - \Psi_E(\zeta_1)]}, \\ c_* &= \kappa\frac{\overline{c}_1 - \overline{c}_2}{\ln\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - [\Psi_F(\zeta_2) - \Psi_F(\zeta_1)]}.\end{aligned}$$

Junto com a variável de Obukhov, que define L_O em termos de u_*, θ_*, q_* e c_*, as equações acima fornecem um sistema não-linear nas variáveis u_*, θ_*, q_*, c_* e L_O, que pode ser resolvido iterativamente a partir da medição dos perfis médios $\overline{u}(z)$, $\overline{\theta}(z)$, $\overline{q}(z)$ e $\overline{c}(z)$. Em geral, isto é feito postulando-se $|L_O| = +\infty$ inicialmente, donde $\Psi_{\tau,H,E,F} = 0$; com os valores de u_*, θ_* e q_* obtidos dos perfis logaritmicos iniciais, recalcula-se L_O e então ζ_1, ζ_2, que podem ser utilizados numa nova estimativa das escalas turbulentas, e assim sucessivamente até que o processo convirja.

O método fluxo-gradiente As equações de transferência obtidas acima quantificam os fluxos em função de diferenças de velocidade do vento, temperatura, umidade específica e concentração mássica de um gás entre a superfície e um ou mais níveis de medição. Nós vamos supor que a temperatura $\overline{\theta}_a$, a umidade específica $\overline{q}_a$, e a concentração mássica $\overline{c}_a$ são medidas no nível z_a, enquanto que a velocidade do vento $\overline{u}_b$ é medida no nível z_b. O índice 0 (como sempre) indica a superfície. Nesse caso, as equações de transferência ficam

$$\begin{aligned}
\tau &= \overline{\rho} C_\tau \, \overline{u}_b^2, \\
H &= \overline{\rho} c_p C_H \, \overline{u}_b \left(\overline{\theta}_0 - \overline{\theta}_a\right), \\
E &= \overline{\rho} C_E \, \overline{u}_b \left(\overline{q}_0 - \overline{q}_a\right), \\
F &= \overline{\rho} C_F \, \overline{u}_b \left(\overline{c}_0 - \overline{c}_a\right),
\end{aligned}$$

onde C_τ, C_H, C_E e C_F são *coeficientes adimensionais de transferência* (respectivamente, de quantidade de movimento, calor, massa de H_2O e massa de um gás qualquer. O uso das equações de transferência acima para a estimativa de fluxos superficiais também é chamado muitas vezes de *método fluxo-gradiente.*

As equações de transferência não são diretamente aplicáveis em $z = 0$, pois $\ln 0 = -\infty$; assim, é preciso supor que os valores $\overline{u}_0 = 0$, $\overline{\theta}_0$, $\overline{q}_0$ e $\overline{c}_0$ na superfície ocorrem nos níveis dos comprimentos de rugosidade $z_{0\tau}$, z_{0H}, z_{0E} e z_{0F}. Para cada grandeza, tomamos então o nível 1 como sendo igual ao seu comprimento de rugosidade, e o nível 2 como sendo igual ao seu nível de medição. No nível 1, os comprimentos de rugosidade são muito pequenos, de forma que é razoável escrever

$$\frac{z_{0\tau}}{L_O} \approx 0, \qquad \frac{z_{0H}}{L_O} \approx 0, \qquad \frac{z_{0E}}{L_O} \approx 0, \qquad \frac{z_{0F}}{L_O} \approx 0,$$

donde

$$\Psi\left(\frac{z_{0\tau}}{L_O}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0H}}{L_O}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0E}}{L_O}\right) \approx 0, \quad \Psi\left(\frac{z_{0F}}{L_O}\right) \approx 0.$$

Manipulando as equações, obtemos então

$$\begin{aligned}
\tau &= \overline{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b - d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b - d}{L_O}\right)\right]^2} \, \overline{u}_b^2, \\
H &= \overline{\rho} c_p \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b - d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b - d}{L_O}\right)\right]\left[\ln \frac{z_a - d}{z_{0H}} - \Psi_H\left(\frac{z_a - d}{L_O}\right)\right]} \, \overline{u}_b \left(\overline{\theta}_0 - \overline{\theta}_a\right), \\
E &= \overline{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b - d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b - d}{L_O}\right)\right]\left[\ln \frac{z_a - d}{z_{0E}} - \Psi_E\left(\frac{z_a - d}{L_O}\right)\right]} \overline{u}_b \left(\overline{q}_0 - \overline{q}_a\right), \\
F &= \overline{\rho} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b - d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau\left(\frac{z_b - d}{L_O}\right)\right]\left[\ln \frac{z_a - d}{z_{0F}} - \Psi_E\left(\frac{z_a - d}{L_O}\right)\right]} \overline{u}_b \left(\overline{c}_0 - \overline{c}_a\right).
\end{aligned}$$

A penúltima equação acima é a "Lei de Dalton" Ela é mais comumente escrita em hidrologia em termos da pressão de vapor e em lugar da umidade específica q,

$$E = \frac{0{,}622\overline{\rho}}{\overline{p}} \frac{\kappa^2}{\left[\ln \frac{z_b - d}{z_{0\tau}} - \Psi_\tau \left(\frac{z_b - d}{L_O}\right)\right] \left[\ln \frac{z_a - d}{z_{0E}} - \Psi_E \left(\frac{z_a - d}{L_O}\right)\right]} \overline{u}_b \left(\overline{e}_0 - \overline{e}_a\right).$$

Esta equação deve ser comparada com as muitas fórmulas empíricas de evaporação do século XIX e da primeira metade do século XX, do tipo

$$E = (a + b\overline{u})(\overline{e}_0 - \overline{e}_a).$$

Do ponto de vista micrometeorológico, a não possui significado físico (*i.e.*: não devia estar presente na equação) se a equação for usada em escalas de tempo compatíveis com a turbulência atmosférica, entre 30 minutos e 1 hora. Historicamente, entretanto, nota-se o uso indiscriminado de equações do tipo acima para escalas diárias e mensais. Finalmente note que, estritamente falando, b não é constante; para alturas de medição z_a e z_b fixas, e comprimentos de rugosidade idem (note que a rugosidade da superfície pode variar sobre uma cultura agrícola, ou com a direção do vento), b ainda assim depende do comprimento de estabilidade de Monin-Obukhov, que varia numa escala (semi-) horária ao longo do dia.

3.11 Os métodos e modelos clássicos de evaporação evapotranspiração

Nesta seção nós abandonamos as barras sobre os símbolos que indicam médias de Reynolds para as variáveis meteorológicas, e retornamos a uma visão mais "hidrológica".

Modelos

Transferência de massa A primeira tentativa de quantificar a evaporação a partir de superfícies líquidas deve-se a Dalton, no que ficou conhecido como "lei de Dalton", e é modernamente denominado de equações de transferência de massa e calor:

$$E = f(u)(e_0 - e_a),$$
$$H = \gamma L f(u)(T_0 - T_a).$$

Acima,

$$\gamma = \frac{c_p p}{0{,}622L}$$

é denominada "constante psicrométrica" (ao nível do mar, $\gamma = 66{,}5\,\mathrm{Pa\,K^{-1}}$); $c_p = 1005\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ é o calor específico a pressão constante do ar. Note que há duas equações "irmãs", para o calor sensível e o calor latente. A equação de *transferência de massa* para E está apresentada na forma "clássica" em que ela aparece em hidrologia. Note que, em unidades SI, $[f(u)] = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}Pa^{-1}}$. É conveniente escrever $f(u)$ numa forma que permita comparações entre diversas formulações possíveis:

$$f(u) = \frac{0{,}622\rho}{p}(u_0 + C_E u) = a + bu,$$

onde ρ é a massa específica do ar. As constantes a, b são a forma tradicional de escrever a equação de transferência de massa em hidrologia; u_0 é uma constante com dimensão de velocidade, enquanto que C_E é um coeficiente de transferência de massa de vapor d'água adimensional.

Em micrometeorologia, constata-se que C_E não é uma "constante", mas sim função das rugosidades da superfície para quantidade de movimento e escalares (temperatura e umidade), e da estabilidade atmosférica: isto dá origem ao método de cálculo de fluxos médios sobre cerca de 30 min. a 1 hora (H e E) por meio de medição de perfis de temperatura e umidade específica, e do uso da teoria e das funções de similaridade de Monin-Obukhov.

Em nível diário, não se tem uma idéia clara dos efeitos da estabilidade atmosférica sobre os coeficientes a e b. Nas deduções das equações acima baseadas em análise dimensional, $a = 0$ (Brutsaert, 1982). Como estas deduções são válidas apenas para a escala horária, é possível que b apareça nas regressões de valores diários ou mensais dos parâmetros devido a correlações entre u e $e_0 - e_a$ na escala horária (Sellers, 1965).

Neste texto, nós nos limitaremos a fórmulas em que (u_0, C) (ou a, b) são constantes, por simplicidade. As maiores dificuldades para usar o método de transferência de massa em aplicações práticas são o desconhecimento de e_0 em terra, e a incerteza dos parâmetros a, b. A Tabela a seguir mostra alguns pares de valores representativos, que podem ser tomados como base em aplicações. Os coeficientes foram concebidos para uso sobre superfícies líquidas; existem também questões sobre os pontos de medição de u e e_a (Dias, 1986), que tornam a comparação entre os valores mais difícil. Quando se leva em conta velocidades médias diárias do vento não muito superiores a $5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, os valores encontrados pelos diversos autores não são muito diferentes, ou pelo menos estão dentro da mesma ordem de grandeza.

Parâmetros do coeficiente de transferência $f(u)$ (Dias, 1986)

Autor(es)	Ano	a (10^{-8})	b (10^{-8})	Observação
Penman	1948	3.01	1.62	
Harbeck	1962	0.00	$0.002909[A^{1/2}]^{-0.1}$	a área do lago em m^2
Sellers	1966	0.506	1.44	
Kohler e Parmele	1967	1.57	1.35	
De Bruin	1978	1.18	0.853	
Morton	1983	10.0	0.00	

A nível diário, é válido calcular o coeficiente de transferência de massa da lei de Dalton por meio de (Dias, 1996, eq. 103)

$$C_E = \frac{\kappa^2}{\ln(z_b/z_{0\tau})\ln(z_a/z_{0E})},$$

onde $\kappa = 0{,}4$ é a constante de von Kármán; z_b é o nível de medição da velocidade u; $z_{0\tau}$ é o comprimento de rugosidade para quantidade de movimento; z_a é o nível de medição de e_a e z_{0E} é o comprimento de rugosidade para vapor d'água; este último é bastante difícil de ser estimado, embora a

hipótese (errônea) $z_{0E} = z_{0\tau}$ não seja incomum, principalmente nos textos mais antigos. Para uma descrição de métodos de estimativa de $z_{0\tau}$ e z_{0E}, veja Brutsaert (1975b,c, 1982).

Do par de equações de transferência de massa e calor obtém-se

$$\mathrm{Bo} = \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0 - e_a}.$$

A equação para a razão de Bowen apareceu na década de 20; medindo-se temperatura e umidade médias em dois níveis acima da superfície, radiação líquida, variação da entalpia armazenada e fluxo de calor no solo, pode-se estimar LE pelo método do balanço de energia:

$$LE = \frac{1}{Bo + 1} \left[R_{n0} - G - D \right].$$

Modelos

Penman (1948) combinou as equações de transferência de massa e de balanço de energia em um sistema em que as incógnitas são a temperatura da superfície T_0 e a evaporação E, supondo que a superfície esteja saturada: $e_0 = e^*(T_0)$, obtendo

$$LE_p = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma} \left[R_{n0} - G - D \right] + \frac{\gamma}{\Delta_a + \gamma} L f(u) \left(e_a^* - e_a \right).$$

A equação de Penman foi concebida para eliminar a dependência da temperatura da superfície, que é um parâmetro difícil de medir sobre superfícies cobertas com vegetação. Por isto, Penman usou

$$R_{na} = R_s(1 - \alpha) + \epsilon R_a - \epsilon \sigma T_a^4$$

em lugar de R_{n0}, o que pode introduzir um erro considerável devido à diferença entre a temperatura da superfície e a temperatura do ar. Quando medições de R_{n0} estiverem disponíveis (o que é raro em registros históricos), deve-se usá-las na equação de Penman. Embora seja incomum, pode-se explicitar T_0 analiticamente no modelo de Penman, obtendo-se

$$T_p = T_a + \frac{\left[R_{l0} - G - D \right] - L f(u)(e_a^* - e_a)}{L f(u)(\Delta_a + \gamma)}. \tag{3.37}$$

Para tentar contornar o problema de calcular a radiação líquida sem conhecer a temperatura da superfície, Kohler e Parmele (1967) modificaram a solução de Penman por meio de uma expansão em série de Taylor de R_{n0} em torno de T_a:

$$R_{n0} \approx R_{na} - 4\epsilon\sigma T_a^3,$$

obtendo

$$LE_k = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \lambda} \left[R_{na} - G - D \right] + \frac{\lambda}{\Delta_a + \lambda} L f(u)(e_a^* - e_a)$$

com

$$\lambda = \gamma + \frac{4\epsilon\sigma T_a^3}{0{,}622 L f(u)}.$$

Da mesma forma que no modelo original de Penman, o modelo de Kohler e Parmele admite uma solução analítica para a temperatura da superfície:

$$T_k = T_a + \frac{[R_{na} - G - D] - Lf(u)(e_a^* - e_a)}{Lf(u)(\Delta_a + \lambda)}.$$

Priestley e Taylor (1972) obtiveram uma relação empírica admiravelmente bem sucedida para a evaporação a partir de superfícies saturadas; ao contrário do método do balanço de energia, que requer a medida de T_0, e_a, T_a, ou do modelo de Penman, que requer u, e_a, T_a, a equação de Priestley e Taylor utiliza apenas T_0 (ou T_a):

$$LE_s = \alpha_s \frac{\Delta_x}{\Delta_x + \gamma} [R_{n0} - G - D], \quad \alpha_s = 1{,}26.$$

A derivada da pressão de saturação de vapor d'água deve ser avaliada à temperatura da superfície: $T_x = T_0$; na ausência de dados de temperatura da superfície, é possível utilizar T_a.

A equação de Priestley e Taylor pode ser reconciliada com o método do balanço de energia: Dias (1988,1992) mostrou que o método do balanço de energia pode ser escrito na forma da equação de Priestley-Taylor, e que na verdade α_s é uma função da temperatura da superfície, da temperatura do ar, e da temperatura de bulbo úmido T_w:

$$\alpha_s = 1 + \frac{\gamma}{\Delta_0} \frac{T_a - T_w}{T_0 - T_w}.$$

A equação de Priestley-Taylor foi concebida para ser usada apenas quando $H > 0$; nestas condições, pode-se mostrar que a equação acima produz valores em torno da constante empírica 1,26 de Priestley e Taylor.

Monteith (1973) tentou generalizar a aplicabilidade do método de Penman introduzindo o conceito de resistência estomática r_s, em linha com a resistência aerodinâmica r_a, definidas por

$$E = \frac{1}{r_s}(e_0^* - e_0), \quad \frac{1}{r_a} = f(u).$$

Note que para uma superfície saturada $r_s = 0$, e a 1ª equação acima produz uma singularidade: $E = 0/0$. A equação resultante, de Penman-Monteith, é

$$LE_m = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma^*} [R_{na} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_a + \gamma^*} \frac{L}{r_a + r_s}(e_a^* - e_a),$$

com

$$\gamma^* = \gamma \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right).$$

Em tese, conhecendo-se o valor correto de r_c e r_a, a equação de Monteith produz o valor correto da evapotranspiração *real* que ocorre sobre a superfície onde R_{n0}, u, T_a e e_a são medidos. Modernamente, tem-se relacionado r_c com a umidade do solo s, grandezas atmosféricas e o índice de área foliar IAF por meio de equações do tipo (Jarvis, 1976; Wright et al., 1996; Noilhan e Planton, 1989)

$$r_c = \frac{r_{cmin}}{\text{IAF}} F_1(R_s) F_2(s) F_3(e_a^* - e_a) F_4(T_a),$$

onde r_{cmin} é uma resistência estomática ou de cobertura mínima. A forma específica de r_c acima é a utilizada por Noilhan e Planton (1989). A maior dificuldade de aplicar esta equação é a falta de informações sobre umidade do solo.

Evapo(transpi)ração potencial

A rigor, a equação de Penman só se aplica sobre superfícies saturadas; no entanto, R_s, e_a, T_a e u podem ser medidos ou estimados rotineiramente. Este fato popularizou o costume de calcular as séries de E_p com dados medidos em estações meteorológicas. É muito comum na prática da hidrologia considerar que estas séries representam o limite superior para a evaporação/evapotranspiração de uma região. Assim, a evaporação/evapotranspiração prevista pela fórmula de Penman é muitas vezes denominada de evapo(transpi)ração potencial. Antes mesmo de Penman, o conceito de evapotranspiração potencial havia sido definido por Thornthwaite (Thornthwaite, 1948; Brutsaert, 1982):

> Evapotranspiração potencial é o fluxo de vapor d'água a partir de uma região com ampla disponibilidade de água no solo, que não limite a transpiração.

Isto é ligeiramente diferente do conceito de evaporação potencial (Brutsaert, 1982):

> Evaporação potencial é o fluxo de vapor d'água a partir de uma região cuja cobertura vegetal tenha a superfície saturada.

No entanto, a equação de Penman não corresponde às definições originais de evapo(trans)piração potencial. De fato, quanto mais árida e quente for a atmosfera de uma região, maior tende a ser $(e_a^* - e_a)$ e consequentemente E_p. Com isto, não é raro que E_p seja maior que a radiação líquida supondo a superfície à temperatura do ar, R_{na}. A implicação na equação de balanço de energia é que o fluxo de calor sensível (potencial) associado, H_p, deve ser negativo. Esta situação é fisicamente irrealista: exceto talvez nos meses de inverno em regiões subtropicais, a média diária do fluxo de calor sensível é sempre positiva (exceções são lagos ou oásis cercados por uma região quente). A condição $H > 0$ é justamente a utilizada na equação de Priestley-Taylor, que parece ser um limite superior mais coerente para a máxima evapo(transpi)ração possível a partir de uma região com ampla disponibilidade de água. Não obstante, a equação de Penman continua a ser um instrumento importante de trabalho de agrônomos, agrometeorologistas, meteorologistas e hidrólogos. Ela é fortemente correlacionada com a evaporação que ocorre em tanques classe A, E_A, sendo propostas relações do tipo

$$E_p = a + bE_A.$$

E_p certamente tem grande utilidade para determinar a evapotranspiração de cultivos específicos, para os quais coeficientes entre evapotranspiração do cultivo e E_p podem ser determinados por meio de medições *in situ* para cada tipo de solo, cultura e época do ano. Por outro lado, a hipótese

simplificada de que a evapotranspiração real é proporcional à evaporação de Penman pode levar a resultados claramente errôneos.

Uma outra utilidade da equação de Penman está na relação complementar, proposta por Bouchet (1963), entre a evapotranspiração real regional, a evapotranspiração potencial (calculada pela equação de Penman) e evapotranspiração de uma superfície com ampla disponibilidade de água (calculada pela equação de Priestley-Taylor) utilizada por Brutsaert e Stricker (1979) em seu modelo de advecção-aridez e por Morton (1983a) em seu modelo CRAE:

$$E_r + E_p = 2E_s. \tag{3.38}$$

A complexidade do pacote radiativo e do cálculo de evapotranspiração do CRAE é muito grande para descrevê-lo aqui; por outro lado, a aplicação do modelo de Brutsaert-Stricker é imediata: E_r é calculada com a equação acima, E_p com a equação de Penman, e E_s com a equação de Priestley-Taylor; as estimativas de radiação líquida podem ser feitas com as equações de cálculo de R_s e R_a apresentadas mais acima.

3.12 Linhas de ação para aplicações

Esta seção destina-se a definir linhas gerais de ação para os casos mais comuns da prática hidrológica.

Evapo(transpi)ração potencial em modelos chuva-vazão

Este é o caso mais simples. Modelos chuva vazão sempre requerem algum tipo de dado de entrada climatológico para auxiliar no cálculo da evapotranspiração. Tipicamente, utiliza-se evaporação em tanque classe A, temperatura do ar, ou a evaporação de Penman ou Priestley-Taylor. Dados de evaporação em tanque ou de temperatura são obtidos diretamente dos registros de estações meteorológicas. A evaporação ("potencial") de Penman, ou a evaporação de Priestley-Taylor, foram descritas na seção 3.11.

As séries de evapotranspiração real e umidade do solo produzidas por modelos chuva-vazão têm um potencial de uso em hidrologia; naturalmente, deve-se sempre ter em mente que muitas vezes estes são valores gerados pelo modelo sem calibração direta contra dados observacionais, de resto muito raros.

Evapotranspiração em parcelas

Por sua própria natureza, de áreas bem delimitadas e culturas uniformes, a evapotranspiração de parcelas plantadas é mais facilmente mensurável. Pode-se medir E diretamente, seja com medição de perfis, com o método do balanço de energia-razão de Bowen ou o método de medição de covariâncias turbulentas. Estas medidas diretas são então relacionadas com alguma forma de "evapotranspiração potencial" ou "limite superior de evapotranspiração" E_{sup}, entre as quais pode-se citar:

- evaporação em tanque classe A,
- evaporação potencial de Penman,

- evaporaçao potencial de Thornthwaite (Vianello e Alves, 1991).

As relações entre evapotranspiração real E_r e os diferentes índices E_{sup} são do tipo

$$E_r = K_c E_{sup} \tag{3.39}$$

onde K_c é um "coeficiente de cultura". A descrição detalhada deste tipo de metodologia está fora do escopo do presente trabalho; o leitor interessado pode procurar Withers e Vipond (1983).

Ao contrário de regiões maiores, como bacias hidrográficas de 10km^2 ou mais, ou grades de modelos de mesoescala (atualmente, cerca de 10×10km^2 ou um pouco mais), parcelas (assim como lagos) podem estar sujeitas a efeitos de "advecção local". O caso mais notório é o de uma região com boa disponibilidade de umidade na superfície cercada por um ambiente mais seco: o fluxo de calor sensível sobre a parcela pode se tornar negativo, aumentando a evapotranspiração (ou a evaporação do lago) até mesmo acima da radiação líquida. Parlange e Katual (1992) propõem um modelo derivado do modelo de advecção-aridez de Brutsaert-Stricker para esta situação.

Evapotranspiração em bacias hidrográficas

Uma alternativa, naturalmente, é usar um modelo chuva-vazão. Uma vantagem desta abordagem é que um modelo bem calibrado deve conservar massa quase perfeitamente; neste caso, as estimativas de E produzidas pelo modelo em escala anual ou plurianual deverão ser muito próximas das estimativas por balanço hídrico.

Opções totalmente independentes do balanço hídrico são o modelo de advecção-aridez de Brutsaert-Stricker, que pode ser integralmente reproduzido com as equações deste trabalho, e o modelo CRAE de Morton.

Modelos numéricos de previsão do tempo e modelos climáticos, nas escalas macro-α, macro-β e meso-α, têm calculado H e LE com esquemas de transferência solo-vegetação-atmosfera (SVATs) que procuram reproduzir com mais detalhe do que os modelos chuva-vazão tradicionais as interações (e a componente biológica) do sistema solo-planta-atmosfera; por exemplo, o SVAT utilizado pelo ARPS (Xue et al., 1995) é o proposto por Noilhan e Planton (1989). O problema de utilizar SVATs para o cálculo de evapotranspiração em bacias hidrográficas é a sua grande demanda por informação fisiográfica, tal como o índice de área foliar ou o índice normalizado de diferença vegetativa (NDVI, em inglês), e a necessidade de se conhecer a umidade do solo.

Em resumo, as opções para cálculo de evapotranspiração na escala da bacia hidrográfica (algumas dezenas de quilômetros quadrados ou mais) ainda são muito restritas. Sempre que possível, deve-se comparar os resultados obtidos com o balanço hídrico anual ou plurianual, para se ter pelo menos uma idéia da tendenciosidade das estimativas.

Evaporação em lagos

As duas dificuldades básicas para a obtenção de boas estimativas de evaporação em lago são:

1. estimar corretamente D;

2. estimar corretamente a razão de Bowen *Bo*.

Valores médios de D podem ser calculados com (**??**) a partir de perfis de temperatura da água. Na ausência destes, há apenas dois modelos na literatura, segundo o conhecimento do autor, que produzem estimativas de D: o CRLE (Morton, 1983b) e o modelo de Hostetler e Bartlein (1990).

Quanto mais fundo for um lago, mais importante será o termo D no seu balanço de energia. A escala mínima razoável para o cálculo de D em lagos com profundidade média de 10 m ou mais excede 15 dias. Para estimativas de E baseadas no balanço de energia, valores mensais de evaporação em lago são obteníveis, mas não valores diários.

A razão de Bowen pode ser calculada explicitamente no método do balanço de energia quando há dados de temperatura da superfície da água e temperatura do ar e umidade do ar representativos dos primeiros metros da atmosfera acima da água. Os dados meteorológicos devem ser medidos no meio do lago, o que representa dificuldades logísticas consideráveis (ou um alto custo com a instalação de bóias de medição automáticas), ou então corrente abaixo (a "jusante", a *sotavento*) do lago. É bom lembrar que em geral as estações meteorológicas existentes não estão bem localizadas em relação aos lagos para permitir a aplicação do método do balanço de energia. Existem também questões de compatibilização das escalas temporais das medições meteorológicas *vis-a-vis* o intervalo entre medições sucessivas de perfis de temperatura da água (Reis e Dias, 1998).

Mesmo que não haja medições adequadas de temperatura e umidade do ar para a aplicação do método do balanço de energia-razão de Bowen, ainda assim é possível obter estimativas razoáveis de evaporação em lago com a equação de Priestley-Taylor, desde que se tenha confiança de que os valores médios mensais de H sejam positivos. Portanto, a equação de Priestley-Taylor é uma boa alternativa em regiões úmidas. Em regiões áridas ou onde a temperatura do ar permaneça maior que a temperatura da água durante uma parte considerável do ano, é preciso medir diretamente a razão de Bowen e aplicar o método do balanço de energia.

3.13 Dedução das equações de Penman e Penman-Monteith

Penman

Considere uma *superfície saturada* de modo que

$$e_0 = e_0^*.$$

Isso é essencial na dedução da equação de Penman. Em seguida reescreva a equação de balanço de energia

$$\begin{aligned} LE &= \frac{1}{1+\mathrm{Bo}}[R_{n0} - G], \\ LE(1+\mathrm{Bo}) &= R_{n0} - G, \end{aligned}$$

e substitua

$$\begin{aligned} \mathrm{Bo} &= \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a}, \\ LE + LE\gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a} &= R_{n0} - G, \end{aligned}$$

e agora use a equação de transferência de massa no segundo termo:

$$
\begin{aligned}
E &= f(u)\left(e_0^* - e_a\right), \\
LE + \gamma L f(u)\left(e_0^* - e_a\right)\frac{T_0 - T_a}{e_0^* - e_a} &= [R_{n0} - G], \\
LE + \gamma L f(u)(T_0 - T_a) &= [R_{n0} - G].
\end{aligned}
$$

Defina agora a *diferença finita*

$$
\Delta_{0a} \equiv \frac{e_0^* - e_a^*}{T_0 - T_a}
$$

e substitua:

$$
\begin{aligned}
LE + \gamma L f(u)\frac{e_0^* - e_a^*}{\Delta_{0a}} &= [R_{n0} - G], \\
LE + L f(u)\frac{\gamma}{\Delta_{0a}}\left[(e_0^* - e_a) - (e_a^* - e_a)\right] &= R_{n0} - G, \\
LE + LE\frac{\gamma}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} L f(u)(e_a^* - e_a) &= [R_{n0} - G], \\
LE\frac{\Delta_{0a} + \gamma}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} L f(u)(e_a^* - e_a) &= [R_{n0} - G].
\end{aligned}
$$

Rearrume:

$$
\begin{aligned}
LE\frac{\Delta_{0a} + \gamma}{\Delta_{0a}} &= [R_{n0} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} L f(u)(e_a^* - e_a), \\
LE &= \frac{\Delta_{0a}}{\Delta_{0a} + \gamma}[R_{n0} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_{0a} + \gamma} L f(u)(e_a^* - e_a).
\end{aligned}
$$

As aproximações clássicas da forma final da equação de Penman são

$$
\begin{aligned}
\Delta_{0a} \approx \Delta_a &\equiv \frac{\mathrm{d}e^*(T_a)}{\mathrm{d}T}, \\
R_{n0} &\approx R_{na}.
\end{aligned}
$$

Agora T_0 não entra mais na equação; somente T_a, e

$$
LE_p = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma}[R_{na} - G] + \frac{\gamma}{\Delta_a + \gamma} L f(u)(e_a^* - e_a).
$$

Penman-Monteith

"Dentro" da vegetação, defina uma resistência estomática r_s e uma resistência aerodinâmica r_a via

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{(e_0^* - e_0)}{r_s}, \\
E &= \frac{(e_0 - e_a)}{r_a}.
\end{aligned}
$$

Rearrumando,

$$
\begin{aligned}
E r_s &= e_0^* - e_0, \\
E r_a &= e_0 - e_a,
\end{aligned}
$$

Somando as duas equações acima,

$$E(r_s + r_a) = e_0^* - e_a,$$
$$E = \frac{(e_0^* - e_a)}{(r_{st} + r_a)}.$$

Voltemos à dedução da equação de Penman, para modificá-la. A superfície não está mais saturada, de maneira que

$$\text{Bo} = \gamma \frac{T_0 - T_a}{e_0 - e_a}.$$

A equação de transferência de massa tem a forma

$$E = \frac{e_0 - e_a}{r_a},$$

e a combinação do método de transferência de massa com o método do balanço de energia agora produz

$$LE + L\gamma \frac{T_0 - T_a}{r_a} = [R_{n0} - G].$$

Note que ainda podemos substituir $(T_0 - T_a)$ por $(e_0^* - e_a^*)/\Delta_{0a}$, obtendo

$$\begin{aligned}
LE + L\gamma \frac{e_0^* - e_a^*}{r_a \Delta_{0a}} &= [R_{n0} - G], \\
LE + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} \left[(e_0^* - e_a) - (e_a^* - e_a)\right] &= [R_{n0} - G], \\
LE + \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} \left[E(r_s + r_a) - (e_a^* - e_a)\right] &= [R_{n0} - G], \\
LE + LE \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \frac{L}{r_a} (e_a^* - e_a) &= [R_{n0} - G].
\end{aligned}$$

Agora façamos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_a} &= \frac{1}{r_a} \frac{r_s + r_a}{r_s + r_a} \\
&= \frac{r_s + r_a}{r_a} \frac{1}{r_s + r - a} \\
&= \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) \frac{1}{r_s + r - a}.
\end{aligned}$$

Substituindo,

$$LE + LE \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) - \frac{\gamma}{\Delta_{0a}} \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right) \frac{L}{r_s + r_a} (e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Para tornar a notação mais compacta, defina

$$\gamma^* \equiv \gamma \left(1 + \frac{r_s}{r_a}\right)$$

e substitua:

$$LE + LE\frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}} - \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}}\frac{L}{r_s + r_a}(e_a^* - e_a) = [R_{n0} - G].$$

Agora,

$$\begin{aligned} LE\frac{\Delta_{0a} + \gamma^*}{\Delta_{0a}} &= [R_{n0} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a}}\frac{L}{r_s + r_a}(e_a^* - e_a), \\ LE &= \frac{\Delta_{0a}}{\Delta_{0a} + \gamma^*}[R_{n0} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_{0a} + \gamma^*}\frac{L}{r_s + r_a}(e_a^* - e_a). \end{aligned}$$

Com as mesmas aproximações finais da equação de Penman nós encontraremos

$$LE = \frac{\Delta_a}{\Delta_a + \gamma^*}[R_{na} - G] + \frac{\gamma^*}{\Delta_a + \gamma^*}\frac{L}{r_s + r_a}(e_a^* - e_a).$$

Capítulo 4

Água no solo

Os elementos importantes do ciclo hidrológico no solo incluem:

Infiltração — O processo por meio do qual a água entra no solo)

A superfície freática — Uma ficção: a região abaixo do qual a saturação é 100%, e que fica "visível" quando cavamos um poço, e encontramos água.

A franja capilar — Segundo Chow et al. (1988), a região *saturada acima* da superfície freático, devido a efeitos de capilaridade.

O escoamento subsuperficial — Escoamento com componente horizontal no solo na região acima da superfície freática.

O escoamento subterrâneo — Escoamento com componente horizontal abaixo da superfície freática.

A *porosidade* do solo é definida pr

$$\eta \equiv \frac{\text{volume de vazios}}{\text{volume total}}.$$

A *umidade volumétrica* do solo é definida por

$$\theta \equiv \frac{\text{volume de água}}{\text{volume total}}.$$

Portanto,

$$0 \leq \theta \leq \eta.$$

Note como é difícil uniformizar a notação em Hidrologia! No capítulo 3, θ era a temperatura potencial.

A equação da continuidade para a água no solo é

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho_w(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho_w(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A$$

Note que $\rho_w(x)$ é uma *função indicador*:

$$\rho_w(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \rho_{0w} & \text{existe água no ponto } \boldsymbol{x}, \\ 0 & \text{não existe água no ponto } \boldsymbol{x}. \end{cases}$$

Acima, $\rho_{0w} = 1000 \, \mathrm{kg \, m^{-3}}$ é simplesmente a densidade, suposta constante, da água líquida.

Além disso, por causa da geometria complicada do solo, $\rho_w(\boldsymbol{x})$ não é uma função suficientemente suave. Por outro lado, o campo $\theta(\boldsymbol{x})$ é sempre uma média do que acontece nas redondezas de $\boldsymbol{x}$, de tal modo que podemos substituir a integral de uma função não-suave por uma de uma função suave, obrigando que ambas sejam iguais. Seja portanto

$$\int_{\mathscr{C}} \rho_{0w} \theta(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V \equiv \int_{\mathscr{C}} \rho_w(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}V,$$

onde $\theta(\boldsymbol{x})$ foi obtida por promediação espacial de tal maneira que ela é obrigatoriamente uma função "suave", ou "bem-comportada".

Da mesma forma, a integral de superfície envolve a função altamente irregular $\rho_w(\boldsymbol{x})$. Da mesma forma que fizemos antes, nós podemos definir o *fluxo darciniano* $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$, que é uma função suave, via

$$\oint_{\mathscr{S}} \rho_w(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A \equiv \oint_{\mathscr{S}} \rho_{0w}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}) \, \mathrm{d}A$$

Isso *não* significa que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{v}$! Por quê? Porque em vários pontos da superfície $\mathscr{S}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (os pontos onde a matriz do solo impede que haja velocidade da água). O fluxo darciniano $\boldsymbol{q}$ por outro lado é definido localmente como uma *média espacial* de $\boldsymbol{v}$; ele é definido *em todos os pontos da matriz do solo* e, desde que haja movimento de água no solo nas vizinhanças, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$ sempre. Isso faz com que $\boldsymbol{q}$ seja uma função suave e bem definida da posição. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho_w \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho_w(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A \\
0 &= \int_{\mathscr{C}} \rho_{0w} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho_{0w}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}) \, \mathrm{d}A \\
0 &= \int_{\mathscr{C}} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q}.
\end{aligned}$$

À medida que um solo é secado, a pressão da água no solo cai *abaixo* da pressão atmosférica:

A pressão da água no solo, p_w, pode ser relacionada com a umidade volumétrica do solo θ, via curvas de calibração. Ela é facilmente medida com *tensiômetros*

Uma medida comum de umidade do solo é a *saturação efetiva*

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_0 - \theta_r} = \frac{\theta - \theta_r}{\eta - \theta_r},$$

onde θ_0 é a umidade à pressão atmosférica, e θ_r é uma umidade residual de água que não pode, por meios naturais, ser drenada. Acima, nós supusemos (razoavelmente) $\theta_0 = \eta$.

A *succção*, ou potencial mátrico, do solo é relacionada à pressão da água no solo via

$$\psi_w = \frac{p_w - p_{\text{atm}}}{\rho_w g}.$$

Naturalmente, se nós desprezarmos a energia cinética do escoamento, que é bem baixa em solos (isso é intuitivo), a carga hidráulica é

$$h = z + \psi_w.$$

Agora, a lei de Darcy (que já encontramos rapidamente no início do curso) é dada por

$$\boldsymbol{q} = -K\boldsymbol{\nabla} h,$$

onde $\boldsymbol{\nabla}$ é o *gradiente* de h.

Para o caso unidimensional, suponha agora que $\psi = \psi(\theta)$:

$$\begin{aligned} q &= -K\frac{\partial h}{\partial z}, \\ &= -K\frac{\partial \psi + z}{\partial z} \\ &= -K\left[\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + 1\right] \\ &\equiv -D\frac{\partial \theta}{\partial z} + K, \end{aligned}$$

onde

$$D \equiv K\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}$$

é a difusividade da água no solo. Se substituirmos agora q na equação da continuidade unidimensional, encontraremos a *equação de Richards* unidimensional:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial \theta}{\partial z} + K\right).$$

Existem toneladas de aplicações para a sua solução com métodos analíticos, numéricos, etc..

Veja o exemplo de Chow et al. (1988), página 102: Computation of soil moisture flux!!!

Infiltração

De Linsley et al. (1975):

> *Infiltration* is the movement of water through the soil surface into the soil as distinguished from *percolation*, the movement of water through the soil.

A taxa de infiltração em geral é representada por $f(t)$. A taxa de infiltração potencial é aquela que ocorre quando alimentada por água empoçada na superfície. A *equação de Horton* para a taxa de infiltração é

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt},$$

onde f_0 é a taxa inicial de infiltração, e f_c é a assíntota para a qual f tende após algum tempo.

A *equação de Phillips* é uma solução analítica da equação de Richards. A equação é resolvida *sem o termo de gravidade*. Portanto, ela é

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial \theta}{\partial z}\right).$$

Claramente, na ausência do termo de gravidade, a aplicação direta para infiltração vertical é um pouco questionável (e eu não sei o suficiente para discutir isso). Vamos permanecer rasos, e desprezar isso, mantendo o símbolo z (mas feita a ressalva). As condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned} \theta(x,0) &= \theta_i, & x &> 0, \\ \theta(0,t) &= \theta_0, & t &> 0, \\ \theta(\infty,t) &= \theta_i, & t &> 0. \end{aligned}$$

A solução de Richards envolve o método de transformação de similaridade:

$$\phi = zt^{-1/2}.$$

Sem mostrar os detalhes, agora a ideia é que passamos de $\theta(z,t)$ para $theta(\phi)$ (são duas funções diferentes, apesar do mesmo símbolo!),e para esta última a equação se torna uma EDO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(D\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right) + \frac{\phi 2}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}.$$

O resultado de Phillips é

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = St^{1/2} + Kt, \\ f(t) &= \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}St^{-1/2} + K, \end{aligned}$$

onde a *sorptividade* $S = S(\psi)$ é

$$S = \int_{\theta_i}^{\theta_0} \phi(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

O método de Green-Ampt

Continuidade:

$$F(t) = L(\eta - \theta_i) = L\Delta\theta.$$

A lei de Darcy é

$$q = -K\frac{\partial h}{\partial z}$$

E o esquema geral das coisas é

Agora escolha dois pontos, um na superfície $\psi_1 = 0$ e outro do lado seco da frente de molhamento:

$$\begin{aligned} f = -q &= K\frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} \\ &= K\frac{h_0 - (-\psi - L)}{L} \\ &\approx K\frac{\psi + L}{L}, \end{aligned}$$

se h_0 (a altura da poça) for bem pequena. Uso agora a equação da continuidade, $F = L\Delta\theta$, e elimino L:

$$f = K\frac{\psi\Delta\theta + F}{F},$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = K\frac{\psi\Delta\theta + F}{F}.$$

A equação tem solução analítica,

$$\begin{aligned} \frac{F}{F + \psi\Delta\theta}\mathrm{d}F &= K\mathrm{d}t, \\ \frac{F + \psi\Delta\theta - \psi\Delta\theta}{F + \psi\Delta\theta}\mathrm{d}F &= K\mathrm{d}t, \\ \left[1 - \frac{\psi\Delta\theta}{F + \psi\Delta\theta}\right]\mathrm{d}F &= K\mathrm{d}t, \\ \int_0^{F(t)} \left[1 - \frac{\psi\Delta\theta}{F + \psi\Delta\theta}\right]\mathrm{d}F &= K\int_0^t \mathrm{d}\tau = Kt, \\ F + \psi\Delta\theta\ln(\Psi\Delta\theta) - \psi\Delta\theta\ln(F + \psi\Delta\theta) &= Kt \\ F - \psi\Delta\theta\left[\ln\left(F(t) + \psi\Delta\theta\right) - \ln(\psi\Delta\theta)\right] &= Kt, \\ F(t) - \psi\Delta\theta\ln\left(1 + \frac{F(t)}{\psi\Delta\theta}\right) &= Kt. \end{aligned}$$

Se retornarmos a $f(t)$ e manipularmos algebricamene,

$$f(t) = K\left(\frac{\psi\Delta\theta}{F(t)} + 1\right).$$

Para a aplicação do método de Green-Ampt nós precisamos de estimativas de $K(\theta)$, η, e ψ. **?**:

$$S_e = S_e(\psi) = \left[\frac{\psi_b}{\psi}\right]^\lambda$$

A *porosidade efetiva* é

$$\eta_e = \eta - \theta_r$$

(Chow et al. (1988) a chamam de θ_e!); a variação de umidade $\Delta\theta$ no método de Green-Ampt portanto é calculada com um pouco de cuidado!

$$\begin{aligned}
S_{e,i} &= \frac{\theta_i - \theta_r}{\eta - \theta_r}, \\
\Delta\theta &= \theta - \theta_i = \eta - \theta_i, \\
\theta_i - \theta_r &= S_{e,i}(\eta - \theta_r) = S_{e,i}\eta_e, \\
\theta_i &= \theta_r + S_{e,i}\eta_e. \\
\Delta\theta &= \theta - \theta_i = \eta - \theta_i \qquad \text{(na saturação)}, \\
\Delta\theta &= \eta - \left[\theta_r + S_{e,i}\eta_e\right] \\
&= \eta - \left[(\eta - \eta_e) + S_{e,i}\eta_e\right] \\
&= \eta_e(1 - S_{e,i}).
\end{aligned}$$

Para o caso de duas camadas (dois tipos diferentes de solo), em que a frente de molhamento já chegou à segunda camada (mais profunda e menos impermeável), ver figura 4.3.4 de Chow et al. (1988)

$$\begin{aligned}
f &= \frac{K_1K_2}{H_1K_1 + H_2K_2}\left(\psi_2 + H_1 + L_2\right), \\
F &= H_1\Delta\theta_1 + H_2\Delta\theta_2, \\
t &= L_2\frac{\Delta\theta_2}{K_2} + \frac{1}{K_1K_2}\left[\Delta\theta_2H_1K_2 - \Delta\theta_2K_1(\psi_2 + H_1)\right]\ln\left(1 + \frac{L_2}{\psi_2 + H_1}\right).
\end{aligned}$$

Tempo para o empoçamento

O empoçamento se inicia quando a capacidade de infiltração do solo se torna inferior à intensidade da chuva. No método de Green-Ampt,

$$f = K\left(\frac{\psi\Delta\theta}{F} + 1\right).$$

Enquanto a capacidade de infiltração é maior do que a intensidade da chuva, $f = i$, $F = it$. No tempo de empoçamento t_p,

$$\begin{aligned}
i &= K\left(\frac{\psi\Delta\theta}{it_p} + 1\right), \\
t_p &= \frac{K\psi\Delta\theta}{i(i - K)}.
\end{aligned}$$

Exemplo: Compute the ponding time and depth of water infiltrated at ponding time for a silt loam soil of 30 percent initial effective saturation, subject to $i = 1\,\mathrm{cm\,h^{-1}}$.

Solução: na Tabela 4.3.1 de Chow et al. (1988)

$$
\begin{aligned}
\eta_e &= \theta - \theta_r = 0.486, \\
\psi &= 16.7\,\mathrm{cm}, \\
K &= 0.65\,\mathrm{cm\,h^{-1}}, \\
S_e &= 0.3, \\
\Delta\theta &= 0.486 \times (1 - 0.3) = 0.486 \times 0.7 = 0.3402. \\
\Psi\Delta\theta &= 16.7 \times 0.3402 = 5.68134, \\
t_p &= \frac{0.65 \times 5.68134}{1(1 - 0.65)} = 10.55106\,\mathrm{h}.
\end{aligned}
$$

Referências Bibliográficas

Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics.* Cambridge University Press, New York.

Alduchov, O. A. e Eskridge, R. E. (1996). Improved Magnus form approximation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 35:601–609.

Armani, F. A. S., Dias, N. L., e Damázio, J. M. (2020). Eddy-covariance CO2 fluxes over Itaipu Lake, Southern Brazil. *Rev Bras Rec Hídr.* aceito para publicação.

Blanken, P. D., Rouse, W. R., Culf, A. D., Spence, C., Boudreau, L. D., Jasper, J. N., Kochtubajda, B., Schertzer, W. M., Marsh, P., e Verseghy, D. (2000). Eddy covariance measurements of evaporation from Great Slave Lake, Northwest Territories, Canada. *Water Resour Res*, 36(4):1069–1077.

Bouchet, R. (1963). Evapotranspiration reelle et potentielle, signification climatique. *Int. Assoc. Sci. Hydrol. Pub.*, 62,:134–142.

Bowen, I. S. (1926). The ratio of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface. *Phys Rev*, 27:779–787.

Brubaker, K. L. e Entekhabi, D. (1995). An Analytic Approach to Modeling Land-Atmosphere Interaction 1. Construct and Equilibrium Behavior. *Water Resour Res*, 31(3):619–632.

Brubaker, K. L. e Entekhabi, D. (1996). Asymmetric recovery from wet-vs.-dry soil moisture anomalies. *J Appl Meteorol*, 35:94–109.

Brunt, D. (1932). Notes on radiation in the atmosphere, 1. *Q J Roy Meteorol Soc*, 58:389–420.

Brutsaert, W. (1975a). On a derivable formula for long-wave radiation from clear skies. *Water Resour Res*, 11:742–744.

Brutsaert, W. (1975b). A Theory for Local Evaporation (or Heat Transfer) From Rough and Smooth Surfaces at Ground Level. *Water Resour Res*, 11:543–550.

Brutsaert, W. (1975c). The roughness length for water vapor, sensible heat and other scalars. *J Atmos Sci*, 32:2028–2031.

Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere.* D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.

Brutsaert, W. (1986). Catchment-scale evaporation and the atmospheric boundary layer. *Water Resour Res*, 22(9):39S–45S.

Brutsaert, W. (1992). Stability correction functions for the mean wind speed and temperature in the unstable surface layer. *Geophys Res Lett*, 19(5):469–472.

Brutsaert, W. (1998). Land-surface water vapor and sensible heat flux: Spatial variability, homogeneity, and measurement scales. *Water Resour Res*, 34(10):2433–2442.

Brutsaert, W. e Stricker, H. (1979). An Advection-Aridity Approach to Estimate Actual Regional Evapotranspiration. *Water Resour Res*, 15(2):443–450.

Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.

Butenhoff, C. L. e Khalil, M. A. K. (2002). Correction for water vapor in the measurement of atmospheric trace gases. *Chemosphere*, 47(8):823–836.

Chen, C.-l. (1991). Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. Hydraul. Eng.*, 117(3):371–389.

Cheng, Y. e Brutsaert, W. (2005). Flux-profile relationships for wind speed and temperature in the stable atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol*, 114:519–538.

Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics.* McGraw-Hill, New York.

Chow, V. T., Maidment, D. R., e Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology.* McGraw-Hill, New York.

COESA (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. Relatório técnico, U.S. Government Printing Office.

Colebrook, C. F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws.(includes plates). *Journal of the Institution of Civil engineers*, 12(8):393–422.

Consultative Committee for Thermometry (2015). Guide to the Realization of the ITS-90. Relatório técnico, Bureau International des Poids et Mesures.

da Silva, F. M., Assad, E. D., Gomes, A. C., e Evangelista, B. A. (1997). Estudo da radia??o solar na regi?o do Distrito Federal. Em *X Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, páginas 425–427. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia.

Dake, J. M. (1972). Evaporative cooling of a body of water. *Water Resources Research*, 8(4):1087–1091.

Darrigol, O. (2005). *Worlds of Flow.* Oxford University Press, Oxford, U.K.

Dias, N. (1988). Uma justificativa analítica para uma equação empírica de evaporação. Em *V Congresso Brasileiro de Meteorologia, Rio de Janeiro*, volume 1, páginas X.6–X.11, Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Meteorologia.

Dias, N. L. (1986). Estimativas climatológicas de evaporação em lagos. Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ.

Dias, N. L. (1992). Unificação formal de metodologias para cálculo de evaporação em lagos. *Revista Brasileira de Engenharia*, 10(2):61–84.

Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer.* Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.

Dias, N. L. (1996). Perfis m?dios e teoria de similaridade de Monin-Obukhov na camada-limite atmosf?rica. Relat?rio T?cnico 003/96, SIMEPAR, Curitiba, PR.

Dias, N. L. (2020). O efeito do aumento de CO_2 atmosférico sobre a constante de gás do ar seco. *Revista Brasileira de Meteorologia (submitted).*

Dias, N. L. e Brutsaert, W. (1996). Similarity of scalars under stable conditions. *Boundary-Layer Meteorol*, 80:355–373.

Dias, N. L. e Kan, A. (1998). Um modelo hidrol?gico-meteorol?gico para a estimativa de evapotranspira??o em bacias hidrogr?ficas. Relat?rio T?cnico 004/98, SIMEPAR.

Dias, N. L. e Kan, A. (1999). A hydrometeorological model for basin-wide seasonal evapotranspiration. *Water Resour Res*, 35(11):3409–3418.

Dias, N. L. e Kan, A. (2008). Evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia, PR: Estimativas dos modelos de relação complementar *versus* balanço hídrico sazonal e balanço de energia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 13:31–43.

Dias, N. L. e Malheiros, A. L. (2003). Resultados de 2 anos de medição de evaporação no lago de Itaipu com o método de covariâncias turbulentas atenuadas: comparação com o balanço de energia, sazonalidade e episódios de evaporação intensa. Em *CD-ROM, XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Curitiba. Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

Dias, N. L. e Reis, R. J. (1996). Os fundamentos f?sicos do balan?o de entalpia em lagos. Relat?rio T?cnico 004/96, SIMEPAR, Curitiba, Brasil.

Dilley, A. C. (1968). On the computer calculation of vapor pressure and specific humidity gradients from psychrometric data. *J Appl Meteorol*, 7:717–719.

Duarte, H. F., Dias, N. L., e Maggiotto, S. R. (2006). Assessing daytime downward longwave radiation estimates for clear and cloudy skies in Southern Brazil. *Agric For Meteorol*, 139:171–181.

Filho, J. L., Lunardi, D. M. C., e de Jesus, W. R. (1997). Modelos para estimativa da radiação solar global diária e horária por estação do ano em Botucatu – SP. Em *X Congresso Brasileiro de Agrometeorologia*, páginas 194–195. Sociedade Brasileira de Agrometeorologia.

Finnigan, J. J. (2009). Response to comment by Dr. A.S. Kowalski on "The storage term in eddy flux calculations". *Agric For Meteorol*, 149:725 – 729.

Fleagle, R. G. e Businger, J. A. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Orlando.

Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.

Garratt, J. (1994). *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, U.K. 316 pp.

Gauckler, P. (1867). Etudes Théoriques et Pratiques sur l'Ecoulement et le Mouvement des Eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 64:818–822. This is the first occurence of Manning's Formula.

Gioia, G. e Bombardelli, F. A. (2002). Scaling and similarity in rough channel flows. *Physical Review Letters*, 88:DOI:10.1103/PhysRevLett.88.014501.

Henderson-Sellers, B. (1984). A new formula for latent heat of vaporization of water as a function of temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 110(466):1186–1190.

Hill, R. J. (1989). Implications of Monin-Obukhov similarity theory for scalar quantities. *J Atmos Sci*, 46:2236–2244.

Hostetler, S. W. e Bartlein, P. J. (1990). Simulation of lake evaporation with application to modeling lake level variations of Harney-Malheur Lake, Oregon. *Water Resour Res*, 26(10):2603–2612.

Högström, U. (1988). Non-dimensional wind and temperature profiles in the atmospheric surface layer: a re-evaluation. *Boundary-Layer Meteorol*, 42:55–78.

Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1981). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht, 2$^{\underline{nd}}$ $^{\underline{a}}$ edição.

Jarvis, P. G. (1976). The interpretation of the variations in leaf water potential and stomatal conductances found in canopies in the field. *Phil. Trans. Roy Soc, London, Ser. B*, 273:593–610.

Kader, B. A. e Yaglom, A. M. (1990). Mean Fields and Fluctuation Moments in Unstably Stratified Turbulent Boundary Layers. *J Fluid Mech*, 212:637–662.

Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *J Res NBS*, 21:707–741.

Kohler, M. e Parmele, L. (1967). Generalized estimates of free-water evaporation. *Water Resour Res*, 3:997–1005.

Lee, X. e Massman, W. J. (2011). A perspective on thirty years of the Webb, Pearman and Leuning density corrections. *Boundary-Layer Meteorol*, 139:37 – 59.

Linsley, R. K., Kohler, M. A., e Paulhus, J. L. H. (1975). *Hydrology for Engineers*. McGraw-Hill, New York.

Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland,*, 20,:161–207.

Monteith, J. L. (1973). *Principles of environmental physics*. Edward Arnold, London.

Moody, L. F. (1944). Friction factors for pipe flow. *Trans. Asme*, 66:671–684.

Morton, F. I. (1983a). Operational estimates of areal evapotranspiration and their significance to the science and practice of hydrology. *J of Hydrol*, 66:1–76.

Morton, F. I. (1983b). Operational Estimates of Lake Evaporation. *J of Hydrol*, 66:77–100.

Morton, F. I. (1986). Practical Estimates of Lake Evaporation. *J Appl Meteorol*, 25:371–387.

Morton, F. I., Ricard, F., e Fogarasi, S. (1985). Operational estimates of areal evapotranspiration and lake evaporation – program WREVAP. NHRI paper 24, National Hydrology Research Institute, Ottawa, Canada.

Murray, F. W. (1966). On the computation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 6:203–204.

NIST (2020). NIST Chemistry Web Book, SRD69. Available at https://webbook.nist.gov/chemistry/mw-ser/. Retrieved in 2020-04-10T09:05:36.

Noilhan, J. e Planton, S. (1989). A simple parameterization of land surface processes for meteorological models. *Monthly Weather Review*, 117:536–549.

Oke, T. R. (1987). *Boundary Layer Climates*. Methuen, London.

Orlanski, I. (1975). A rational subdivision of scales for atmospheric processes. *Bull Amer Meteorol Soc*, 56.

Parlange, M. B. e Katul, G. G. (1992). An advection-aridity evaporation model. *Water Resour Res*, 28(1):127–132.

Penman, H. (1948). Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *Proceedings of the Royal Society, London*, A(193):120–146.

Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.

Priestley, C. H. B. e Taylor, R. J. (1972). On the Assessment of Surface Heat Flux and Evaporation Using Large Scale Parameters. *Monthly Weather Review*, 100(2):80–92.

Reis, R. J. (1996). Estudo comparativo de modelos climatol?gicos de estimativa de evapora??o no lago Serra Azul, MG. Tese de mestrado, UFMG, Belo Horizonte, MG.

Reis, R. J. e Dias, N. L. (1998). Multi-season lake evaporation: energy-budget estimates and CRLE model assessment. *J of Hydrol*, 208:135–147.

Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.

Rouse, W. R., Oswald, C. M., Binyamin, J., Blanken, P. D., Schertzer, W. M., e Spence, C. (2003). Interannual and seasonal variability of the surface energy balance and temperature of Central Great Slave Lake. *Journal of Hydrometeorology*, 4:720–730.

Schlyter, P. (2019). How to compute planetary positions. Internet: http://www.stjarnhimlen.se/comp/ppcomp.html. Retrieved in 2019-04-22T16:45:34.

Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics*. John Wiley & Sons, New York.

Sellers, W. D. (1965). *Physical climatology*. The University of Chicago Press, Chicago.

Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.

Stull, R. B. (1995). *Meteorology today for scientists and engineers*. West Publishing Company, Minneapolis / St. Paul.

Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Thornthwaite, C. W. (1948). An approach toward a rational classification of climate. *The Geographical Review*, 38:55–94.

Tubelis, A. e do Nascimento, F. J. L. (1984). *Meteorologia descritiva — fundamentos e aplica??es brasileiras*. Livraria Nobel.

United States Naval Observatory (2019). Earth's Seasons and Apsides: Equinoxes, Solstices, Perihelion, and Aphelion. https://aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.php. Retrieved 2019-04-24T09:58:08.

van Flandern, T. C. e Pulkkinen, K. F. (1979). Low-precision formulae for planetary positions. *Astrophys J SupplS*, 41:391–411.

Vianello, R. L. e Alves, A. R. (1991). *Meteorologia b?sica e aplica??es*. Universidade Federal de Vi?osa, Imprensa Universit?ria, Vi?osa, MG.

Wallace, J. M. e Hobbs, P. V. (2006). *Atmospheric Science: an introductory survey*. Elsevier, Amsterdam, 2nd a edição.

Webb, E. K., Pearman, G. I., e Leuning, R. (1980). Correction of flux measurements for density effects due to heat and water vapor transfer. *Q J Roy Meteorol Soc*, 106:85–100.

Wikipedia (2019). Okta. https://en.wikipedia.org/wiki/Okta. Retrived in 2019-05-22T10:40:15.

Wikipedia (2020a). Atmosphere of Earth. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth. Retrieved in 2020-04-08T11:25:15.

Wikipedia (2020b). International Temperature Scale of 1990. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/International_Temperature_Scale_of_1990. Retrieved in 2020-07-27T10:47:48.

Wikipedia (2020c). Planimeter. https://https://en.wikipedia.org/wiki/Planimeter. Retrived in 2020-08-06T16:56:55.

Wikipedia (2020d). Solar constant. https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_constant. Retrieved in 2020-08-12T14:29:27.

Wikipedia (2020e). Vienna Standard Mean Ocean Water. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Standard_Mean_Ocean_Water. Retrieved in 2020-07-27T10:52:34.

Withers, B. e Vipond, S. (1983). *Irriga??o Projeto e Pr?tica*. Nobel, S?o Paulo.

Wright, I. R., Gash, J. H. C., da Rocha, H. R., e Roberts, J. M. (1996). Modelling surface conductance for Amazonian pasture and forest. Em Gash, J. H. C., Nobre, C. A., Roberts, J. M., e Victoria, R. L., editores, *Amazonian deforestation and climate*. Wiley, Chichester.

Wyngaard, J. C., Coté, O. R., e Izumi, Y. (1971). Local Free Convection, Similarity, and the Budgets of Shear Stress and Heat Flux. *J Atmos Sci*, 28:1171–1182.

Xue, M., Droegemeier, K. K., Wong, V., Shapiro, A., e Brewster, K. (1995). Advanced Regional Prediction System ARPS version 4.0 user's guide. Relatório técnico, Center for Analysis and Prediction of Storms (CAPS).