0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [24] Sejam $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$ um campo escalar, e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ um campo vetorial. Escreva em **notação indicial** (usando os vetores da base canônica $\boldsymbol{e}_i$ se necessário):

- O gradiente de ϕ
- O laplaciano de ϕ
- A divergência de $\boldsymbol{u}$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i,\\
\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [26] Considere a equação de advecção-difusão de um escalar c:

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_i}\right).$$

Supondo que vale a equação de conservação de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0,$$

e sabendo que em um problema específico o coeficiente de difusão tem a forma

$$\rho D = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_k x_k,$$

(onde os a_k's são constantes) simplifique ao máximo a equação diferencial parcial em c. **Observação:** $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial c}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \rho u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho D\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)\\
\rho\left[\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\right] &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_k x_k \frac{\partial c}{\partial x_i}\right)\\
\rho\left[\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\right] &= a_k\left[\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_i} + x_k\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i}\right]\\
\rho\left[\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\right] &= a_k\left[\delta_{ki}\frac{\partial c}{\partial x_i} + x_k\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i}\right]\\
\rho\left[\frac{\partial c}{\partial t} + u_i\frac{\partial c}{\partial x_i}\right] &= a_k\left[\frac{\partial c}{\partial x_k} + x_k\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a solução geral (em termos de duas constantes de integração c_1 e c_2) da equação diferencial não-linear

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} \Rightarrow \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} + f^2 &= 0, \\
\mathrm{d}f &= -f^2\mathrm{d}\xi \\
-f^{-2}\mathrm{d}f &= \mathrm{d}\xi \\
f^{-1} &= \xi + c_1 \\
f = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\xi + c_1} \\
\phi(\xi) &= \ln\left|\xi + c_1\right| + c_2 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] A equação diferencial ordinária a coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

tem equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Suponha que há duas raízes reais

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm \beta.$$

Mostre que (neste caso) é sempre possível escrever a solução geral na forma

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[D_1 \cosh(\beta x) + D_2 \operatorname{senh}(\beta x)\right],$$

onde D_1 e D_2 são constantes arbitrárias.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução é geralmente dada em termos de $e^{(\alpha\pm\beta)x}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{(\alpha+\beta)x} + Be^{(\alpha-\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}\left[Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}\right]. \end{aligned}$$

Façamos

$$A = \frac{D_1 + D_2}{2}, \tag{1}$$

$$B = \frac{D_1 - D_2}{2}. \tag{2}$$

Note que é sempre possível achar D_1, D_2 reais que atendem às duas equações acima. Então,

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}\left[\frac{D_1 + D_2}{2}e^{\beta x} + \frac{D_1 - D_2}{2}e^{-\beta x}\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[D_1\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} + D_2\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[D_1 \cosh(x) + D_2 \operatorname{senh}(x)\right] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹