TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 25 Out 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Seja

$$\tilde{\phi}_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

a estimativa usual de diferenças finitas para a derivada de ordem 2. Uma estimativa possível para a derivada de ordem 3 é

$$\tilde{\phi}_i''' = \frac{\tilde{\phi}_{i+1}'' - \tilde{\phi}_{i-1}''}{2\Delta x}.$$

Obtenha $\tilde{\phi}_i'''$ em função de $\phi_{i-2}, \ldots \phi_{i+2}$ e Δx.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_i''' &= \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{\Delta x^2} - \frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2\Delta x^3}\left[\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i - (\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2})\right] \\
&= \frac{1}{2\Delta x^3}\left[\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + 2\phi_{i-1} - \phi_{i-2}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere o produto interno canônico no espaço das funções reais e quadrado-integráveis no intervalo $[0, +\infty)$,

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Seja $f(x)$ contínua neste espaço, e tal que $f(0)$ existe e é finito; para $k > 0$, calcule

$$\lim_{k\to\infty} \langle f(x), k\exp(-kx) \rangle \,.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO

$$\begin{aligned}
\langle f(x), k\cos(kx) \rangle &= \int_{x=0}^\infty f(x) k \exp(-kx)\,\mathrm{d}x \\
u = kx; &\qquad \mathrm{d}u = k\mathrm{d}x; \qquad \Rightarrow \\
\lim_{k\to\infty} \langle f(x), k\cos(kx) \rangle &= \lim_{k\to\infty} \int_{u=0}^\infty f\left(\frac{u}{k}\right) k \exp(-u)\,\frac{\mathrm{d}u}{k} \\
&= f(0) \int_0^\infty \exp(-u)\,\mathrm{d}u = f(0)\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Um sensor mede uma variável física x. A resposta y do sensor é modelada pela EDO de ordem 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{T}y = \frac{1}{T}\left[x(t) + \epsilon(t)\right],$$

onde T é o *tempo de resposta* do sensor e $\epsilon(t)$ é um erro aleatório cometido pelo sensor a cada instante de tempo. Considerando a definição da transformada de Fourier,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

onde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ e ω é a frequência angular, obtenha uma expressão para $\widehat{y}^*\widehat{y}$ (onde * indica conjugação) em função de ω, T, $\widehat{x}$ e $\widehat{\epsilon}$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\omega\widehat{y} + \frac{1}{T}\widehat{y} &= \frac{1}{T}[\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 + \mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= [\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 + \mathrm{i}\omega T)^*\widehat{y}^*(1 + \mathrm{i}\omega T)\widehat{y} &= [\widehat{x} + \widehat{\epsilon}]^*[\widehat{x} + \widehat{\epsilon}],\\
(1 - \mathrm{i}\omega T)(1 + \mathrm{i}\omega T)[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right],\\
(1 + \omega^2T^2)[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right],\\
[\widehat{y}^*\widehat{y}] &= \frac{1}{1 + \omega^2T^2}\left[\widehat{x}^*\widehat{x} + \widehat{x}^*\widehat{\epsilon} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{x} + \widehat{\epsilon}^*\widehat{\epsilon}\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Encontre os autovalores e as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \lambda y &= 0,\\ y'(0) = y(1) &= 0.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discuta os valores de λ:
$\lambda = -k^2 < 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - k^2y &= 0;\\ r^2 - k^2 &= 0;\\ r &= \pm k;\\ y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx);\\ y'(x) &= A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cosh(kx).\\ y'(0) = 0 &\Rightarrow\ A\,\mathrm{senh}(0) + B\cosh(0) = 0,\\ B &= 0.\\ y(1) = 0 &\Rightarrow A\cosh(1) = 0,\\ A &= 0.\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= 0;\\ y(x) &= Ax + B,\\ y'(x) &= A.\\ y'(0) = 0 &\Rightarrow A = 0.\\ y(1) = 0 &\Rightarrow B = 0.\end{aligned}$$

Portanto não há autovalores para esse caso.
$\lambda = k^2 > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + k^2y &= 0;\\ r^2 + k^2 &= 0;\\ r &= \pm\mathrm{i}\sqrt{k};\\ y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\ y'(x) &= -A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx),\\ y'(0) = 0 &\Rightarrow B = 0.\\ y(1) = A\cos(k) = 0 &\Rightarrow\\ \cos(k) = 0 &\Rightarrow\\ k_n = \frac{\pi}{2} + n\pi &= \frac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 0, 1, \ldots\end{aligned}$$

Portanto os autovalores e as autofunções são

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \left[\frac{2n+1}{2}\pi\right]^2, \qquad n = 0, 1, \ldots\\ y_n(x) &= \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Usando o método de separação de variáveis, resolva o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + bx\cos(t),\\
\phi(x,0) &= 0,\\
\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) &= 0,\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\phi(L,t) &= 0,
\end{aligned}
$$

onde a e b são constantes positivas. **SUGESTÃO:** $\{X_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ é um conjunto completo de autofunções que atendem às condições de contorno. Faça $bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(t)\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ e $\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As condições de contorno são compatíveis com as autofunções

$$
X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1,2,\ldots
$$

que teriam aparecido se não fosse o termo não-homogêneo $bx\cos(t)$ da EDP.
Inicialmente, decompomos a função na base:

$$
bx\cos(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
$$

Claramente,

$$
f_n(t) = \cos(t), \qquad \forall n.
$$

Prosseguindo,

$$
\begin{aligned}
bx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\\
bx\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\\
b\int_{x=0}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_{x=0}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x\\
b\int_{x=0}^{L} x\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x &= \frac{L}{2}A_m\\
b\frac{(-1)^{m+1}L^2}{m\pi} &= \frac{L}{2}A_m,\\
A_m &= \frac{2b(-1)^{m+1}L}{m\pi}.
\end{aligned}
$$

Fazemos agora

$$
\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)
$$

e substituímos na equação diferencial parcial:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2}X_n(x) &= a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\frac{\mathrm{d}^2X_n}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(t)\frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi}X_n(x); \qquad \Rightarrow\\
\frac{\mathrm{d}^2X_n}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{n^2\pi^2}{L^2}X_n(x);\\
\frac{\mathrm{d}^2T_n}{\mathrm{d}t^2} + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n &= \frac{2b(-1)^{n+1}L}{n\pi}\cos(t)
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Resolvemos a equação diferencial não-homogênea:

```
(%i1) edo : 'diff(Tn,t,2) + alpha^2*Tn = beta*cos(t) ;
                             2
                            d Tn          2
(%o1)                       ---- + alpha   Tn = beta cos(t)
                              2
                            dt
(%i2) ode2(edo,Tn,t);
Is alpha zero or nonzero?

nonzero;
                    beta cos(t)           %i alpha t            - %i alpha t
(%o2)        Tn = ----------- + %k1 %e             + %k2 %e
                          2
                    alpha   - 1
```

Logo,

$$T_n(t) = \underbrace{\frac{2b(-1)^{n+1}L^3}{(n^2\pi^2a^2 - L^2)n\pi}}_{B_n}\cos(t) + C_n\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Neste ponto,

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\cos(t) + C_n\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-B_n\,\mathrm{sen}(t) + \frac{n\pi a}{L}\left(-C_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + D_n\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

As condições iniciais são

$$\begin{aligned}
\phi(x,0) &= 0 \qquad \Rightarrow\\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(B_n + C_n)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow\\
C_n &= -B_n;\\
\frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} &= 0 \qquad \Rightarrow\\
0 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi a}{L}D_n\cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \Rightarrow\\
D_n &= 0 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹