TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 11 Jun 2021
Entrega em 12 Jun 2021, 09:30.
Prof. Nelson Luís Dias

**Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova**

NOME: Assinatura: ____________________

---

**1** [25] Utilizando sempre a base canônica, **notação indicial** (obrigatoriamente), e explicitando **todos os passos**, obtenha

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$$

em função de $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k \cdot \epsilon_{lmn} a_l b_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n) \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \delta_{kn} \\
&= u_i v_j a_l b_m \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \\
&= u_i v_j a_l b_m (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \\
&= u_i v_j a_l b_m \delta_{il}\delta_{jm} - u_i v_j a_l b_m \delta_{im}\delta_{jl} \\
&= u_i v_j a_i b_j - u_i v_j a_j b_i \\
&= (u_i a_i)(v_j b_j) - (u_i b_i)(v_j a_j) \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Zorg é um estudante de Engenharia Ambiental do Planeta Z4, um planeta quadridimensional de outro universo. Enquanto calcula o hipervolume de um reservatório de q-água (uma molécula quadridimensional com propriedades semelhantes às da água), Zorg precisa obter o hipervolume do hiperprisma formado pelos vetores $(2, 4, 1, 0)$, $(1, 3, 0, 2)$, $(0, 2, 3, 1)$ e $(0, 4, 2, 3)$. Qual é o valor obtido por Zorg?

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Basta calcular o módulo do determinante da matriz cujas colunas são os elementos dos 4 vetores:

$$
\begin{aligned}
V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \quad 2 \left[ 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&\quad - 1 \left[ 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right] \\
&= \quad 2\,[3(9-2) - 2(0-4) + 4(0-6)] \\
&\quad - 1\,[4(9-2) - 2(3-0) + 4(1-0)] \\
&= 2\,[21 + 8 - 24] - 1\,[28 - 6 + 4] \\
&= 10 - 26 \\
&= -16.
\end{aligned}
$$

O hipervolume, portanto, é igual a 16 ■

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] [White, 2016, Exemplo 5.5] Uma viga engastada de comprimento $L$ ($\mathsf{L}$) tem uma carga $P$ ($\mathsf{MLT^{-2}}$) aplicada à sua extremidade, sofrendo uma deflexão $\delta$ ($\mathsf{L}$). A viga tem seção transversal cujo momento de inércia é $I$ ($\mathsf{L^4}$), e seu material possui módulo de elasticidade $E$ ($\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}$). É sabido que

$$\text{posto}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2.$$

Obtenha os parâmetros adimensionais do problema, usando **obrigatoriamente** $L$ e $E$ como variáveis comuns em todos eles.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Obviamente, as dimensões fundamentais são, novamente, $\mathsf{M}$, $\mathsf{L}$ e $\mathsf{T}$. Começamos montando a matriz dimensional:

| | $L$ | $P$ | $\delta$ | $I$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathsf{M}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathsf{L}$ | 1 | 1 | 1 | 4 | −1 |
| $\mathsf{T}$ | 0 | −2 | 0 | 0 | −2 |

Pelo enunciado, o posto da matriz é 2. Existem portanto $s = 5 - 2 = 3$ grupos adimensionais independentes. Note que se tivéssemos aplicado a "regra" simplificada $s = 5 - 3$, onde 3 é o número de dimensões fundamentais do problema, teríamos encontrado apenas 2 grupos independentes, o que está errado. Imporemos agora $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$ (que são os expoentes de $P$, $\delta$ e $I$), sucessivamente.
Para $P$,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= PL^aE^b, \\ [\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{MLT^{-2}}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{1+b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -2$, $b = -1$, e

$$\Pi_1 = \frac{P}{EL^2}.$$

*Note que há 3 equações e apenas 2 incógnitas, mas que as equações em $\mathsf{M}$ e $\mathsf{T}$ são linearmente dependentes.*
Para $\delta$,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \delta L^aE^b, \\ [\![\Pi_2]\!] &= \left[\mathsf{L}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{b}\mathsf{L}^{1+a-b}\mathsf{T}^{-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -1$, $b = 0$, e

$$\Pi_2 = \frac{\delta}{L}.$$

Para $I$,

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= IL^aE^b, \\ [\![\Pi_3]\!] &= \left[\mathsf{L^4}\right]\left[\mathsf{L}\right]^a\left[\mathsf{ML^{-1}T^{-2}}\right]^b, \\ 1 &= \mathsf{M}^{b}\mathsf{L}^{4+a-b}\mathsf{T}^{-2b} \end{aligned}$$

Donde $a = -4$, $b = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{I}{L^4} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Considere

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x,$$

e sua aproximação numérica $I_n$ dada por

$$I_n = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y,$$

onde

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy, \\ x_i &= (i - 1/2)\Delta x, \\ y_j &= (j - 1/2)\Delta y, \\ \Delta x &= \Delta y = 1/10. \end{aligned}$$

a) [05] Calcule analiticamente $I$.

b) [20] Escreva, rode, e entregue a listagem (em um arquivo em separado) de um programa em Python que calcula $I_n$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x \left[ \int_0^1 y \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

O programa é

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
def f(x,y):
   return x*y;
pass
dx = 0.1;
dy = 0.1;
s = 0.0;
for i in range(1,11):
   xi = (i - 0.5)*dx;
   for j in range(1,11):
      yj = (j-0.5)*dy;
      fij = f(xi,yj);
      s += fij*dx*dy;
   pass
pass
print("In = ",s);
```

que imprime 0.25 (um resultado exato).

Continue a solução no verso ⟹

# Referências

White, F. M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill Education, New York.

Continue a solução no verso ⟹