TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 22 Mar 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] As primeiras linhas do arquivo de dados `bhdados.txt`, que contém dados de precipitação acumulada mensal em Belo Horizonte, são mostradas a seguir:

```
# ----------
# BDMEP - INMET
# ----------
# Estação :  BELO HORIZONTE - MG (OMM: 83587)
# Latitude (graus) :  -19.93
# Longitude (graus) :  -43.93
# Altitude (metros):  915.00
# Estação Operante
# Inicio de operação:  03/03/1910
# Periodo solicitado dos dados:  31/12/1980 a 31/12/2011
# Os dados listados abaixo são os que encontram-se digitados no BDMEP
# Hora em UTC
# ----------
# Obs.:  Os dados aparecem separados por ; (ponto e vírgula) no formato txt.
# Para o formato planilha XLS, siga as instruções
# ----------
# Estacao;Data;Hora;PrecipitacaoTotal;
83587;28/02/1981;0000;7.5;
83587;31/03/1981;0000;195;
83587;30/04/1981;0000;83.3;
83587;31/05/1981;0000;7;
83587;30/06/1981;0000;17.5;
83587;31/07/1981;0000;0;
83587;31/08/1981;0000;0;
83587;30/09/1981;0000;0.8;
83587;31/10/1981;0000;120.9;
83587;30/11/1981;0000;404;
83587;31/12/1981;0000;248.2;
83587;31/01/1982;0000;330.5;
83587;28/02/1982;0000;52;
83587;31/03/1982;0000;374.4;
```

O programa `bhclima.py` a seguir lê o arquivo `bhdados.txt`; escreva ao lado de cada linha da listagem abaixo o que a linha faz. **Não exceda o limite de cada linha !!!**

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3   # localização do interpretador de python
# -*- coding: iso-8859-1 -*-            # a codificação deste arquivo é iso-8859-1
from numpy import zeros                 # importa função 'zeros' do módulo numpy
pp = zeros((12,31),float)               # aloca um array pp de floats, 12 linhas, 31 colunas
pp[:,:] = -9999                         # inicializa todos os elementos de pp com -9999
fin = open('bhdados.txt','rt',encoding='iso-8859-1')       # abre bhdados.txt para leitura
for line in fin:                # loop nas linhas do arquivo
   line = line.rstrip()         # remove caracteres não-imprimíveis do fim da linha
   if line[0] == '#':           # se o primeiro caracter da linha for '#' :
      continue                  # passa para a próxima linha
   campo = line.split(';')      # separa a linha em campos: o separador é ';'
   prec = float(campo[3])       # atribui campo[3] a prec, como float
   data = campo[1].split('/')   # separa campo[1] em dia/mes/ano; o separador é '/'
   imes = int(data[1]) - 1      # imes é o índice do mês (0 a 11)
   iano = int(data[2]) - 1981   # iano é o índice do ano (0 a 30)
   pp[imes,iano] = prec         # atribui prec à posição [imes,iano] de pp
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Um tanque de diâmetro D com fluido de massa específica ρ e viscosidade dinâmica μ ($[\![\mu]\!] = \mathsf{M\,L^{-1}T^{-1}}$) possui um agitador mecânico que opera com potência P e velocidade angular ω. Utilizando **obrigatoriamente** como variáveis comuns ρ, D e ω, obtenha os grupos adimensionais que regem o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A matriz dimensional é

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & P & \mu & \rho & D & \omega \\
\hline
\mathsf{M} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\mathsf{L} & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 \\
\mathsf{T} & -3 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{array},
$$

cujo posto é 3. Portanto, há $n = 5 - 3 = 2$ grupos adimensionais. Esses grupos são:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= P\rho^a D^b \omega^c, \\
\mathsf{M^0L^0T^0} &= (\mathsf{ML^2T^{-3}})(\mathsf{ML^{-3}})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T^{-1}})^c,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
a &= -1, \\
-3a + b &= -2, \\
-c &= 3
\end{aligned}
$$

donde

$$
a = -1,\ b = -5,\ c = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_1 = \frac{P}{\rho D^5 \omega^3}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \mu\rho^a D^b \omega^c, \\
\mathsf{M^0L^0T^0} &= (\mathsf{ML^{-1}T^{-1}})(\mathsf{ML^{-3}})^a(\mathsf{L})^b(\mathsf{T^{-1}})^c,
\end{aligned}
$$

ou

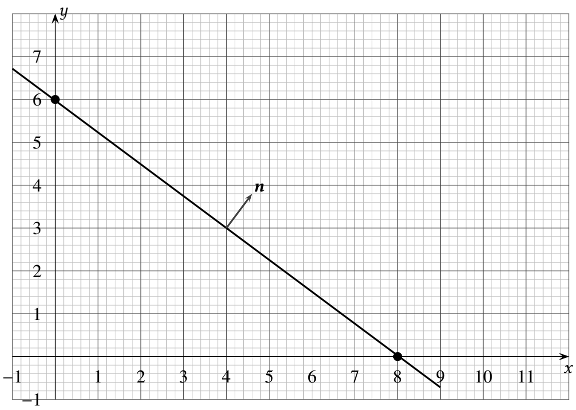
$$
\begin{aligned}
a &= -1, \\
-3a + b &= +1, \\
-c &= 1
\end{aligned}
$$

donde

$$
a = -1,\ b = -4,\ c = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho D^2 \omega} \ \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha a equação $ax + by = c$ da reta que passa pelos pontos $(0,6)$ e $(8,0)$; escolha a, b e c de tal maneira que $|\boldsymbol{n}| = 1$, onde $n = (a,b)$ é o vetor normal à reta.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
0a + 6b &= c,\\
8a + 0b &= c,\\
a^2 + b^2 &= 1 \;\Rightarrow
\end{aligned}
$$

(com Maxima)

```
(%i1) solve( [6*b = c, 8*a = c, a**2 + b**2 = 1], [a,b,c]);
                  3      4      24           3        4        24
(%o1)       [[a = -, b = -, c = --], [a = - -, b = - -, c = - --]]
                  5      5      5            5        5        5
```

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Você já sabe, de provas passadas, que *em geral*

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w};$$

qual é a relação necessária entre os vetores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ para que

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}?$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \\
&= \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \\
&= \epsilon_{nkm} u_n a_k \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{nkm} u_n \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= u_j v_i w_j \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= u_j w_j v_i \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k; \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{kmn} b_k w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{kmn} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j w_i \boldsymbol{e}_j - u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

Portanto, em geral,

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \neq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}.
\end{gathered}$$

Agora, para que a igualdade valha,

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u} \;\Rightarrow \\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \;\blacksquare
\end{gathered}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Prove que, para $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, o determinante $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \epsilon_{ijk} u_i v_j (u_k + v_k) \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j v_k \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j u_k) + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j v_k + \epsilon_{ijk} u_i v_j v_k) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j u_k + \epsilon_{kji} u_i v_j u_k) + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} u_i v_j v_k + \epsilon_{ikj} u_i v_j v_k) \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{kji}) u_i v_j u_k + \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}) u_i v_j v_k \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj})}_{\equiv 0} u_i v_j u_k + \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj})}_{\equiv 0} u_i v_j v_k \\
&= 0 \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$