TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 08 Nov 2017
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: GABARITO Assinatura: ________________

---

1 [25] [Greenberg, 1998, Ex. 17.7-8] Dado o problema de autovalor-autovetor

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy' + \lambda y &= 0, \qquad (1 < x < a),\\
y(1) &= 0, \qquad y(a) = 0,
\end{aligned}
$$

ache seus autovalores e suas autofunções. **PARA ACELERAR A SOLUÇÃO, VOCÊ PODE USAR OS SEGUINTES FATOS SEM PRECISAR DEDUZI-LOS:**

- Os autovalores são positivos, e do tipo $\lambda = k^2$, onde k é um número positivo a determinar.
- As soluções correspondentes são do tipo

$$
y(x) = C\cos(k\ln(x)) + D\,\mathrm{sen}(k\ln(x)).
$$

Cabe a você agora determinar os k's (e portanto os λ's) possíveis, e os C's e D's correspondentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Esta é uma equação de Euler. Tente

$$
\begin{aligned}
y &= x^r,\\
y' &= rx^{r-1},\\
y'' &= (r-1)rx^{r-2}
\end{aligned}
$$

e substitua:

$$
\begin{aligned}
(r-1)rx^r + rx^r + \lambda x^r &= 0,\\
r^2 - r + r + \lambda &= 0,\\
r^2 &= -\lambda.
\end{aligned}
$$

Os 3 casos possíveis são: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.
Se $\lambda = -k^2 < 0$,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= k^2,\\
y(x) &= Ax^k + Bx^{-k}.
\end{aligned}
$$

O sistema de equações que impõe as condições de contorno é

$$
\begin{aligned}
A + B &= 0,\\
Aa^k + Ba^{-k} &= 0,\\
B &= -A;\\
A(a^k + a^{-k}) &= 0;\\
y &= a^k;\\
y + 1/y &= 0;\\
y^2 + 1 &= 0;\\
y &= \pm\mathrm{i};\\
a^k &= \pm\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Claramente, o caso $\lambda < 0$ leva a valores complexos de a, o que não é possível (a é um valor previamente definido, e real). Portanto, este caso não nos serve.
Se $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
r &= 0,\\
y(x) &= C.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Para que $y(1) = y(a) = 0$, devemos ter $C = 0$, o que torna a função identicamente nula, e impede que ela seja uma autofunção.
Se $\lambda = k^2 > 0$,

$$
\begin{aligned}
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm k\mathrm{i},\\
y(x) &= Ax^{k\mathrm{i}} + Bx^{-k\mathrm{i}}\\
&= A\exp(k\mathrm{i}\ln(x)) + B\exp(-k\mathrm{i}\ln(x))\\
&= A\left[\cos(k\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right] + B\left[\cos(k\ln(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right].
\end{aligned}
$$

O truque padrão para encontrar $y(x)$ puramente real é fazer com que A e B sejam constantes complexas conjugadas. Façamos

$$
\begin{aligned}
A &= (C - \mathrm{i}D)/2,\\
B &= (C + \mathrm{i}D)/2,
\end{aligned}
$$

e substituamos:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (C - \mathrm{i}D)\left[\cos(k\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right]/2 + (C + \mathrm{i}D)\left[\cos(k\ln(x)) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\ln(x))\right]/2\\
&= C\cos(k\ln(x)) + D\,\mathrm{sen}(k\ln(x)).
\end{aligned}
$$

Mas

$$
y(1) = 0 \Rightarrow C\cos(0) = 0 \Rightarrow C = 0.
$$

Portanto, as funções possíveis são do tipo

$$
Y = \mathrm{sen}(k\ln(x)),
$$

e ainda precisamos atender à condição de contorno

$$
y(a) = 0.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(k\ln(a)) &= 0,\\
k_n\ln(a) &= n\pi, \qquad n = 1, 2, \ldots\\
k_n &= \frac{n\pi}{\ln(a)},\\
\lambda_n &= \frac{n^2\pi^2}{(\ln(a))^2},\\
y_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(a)}\ln(x)\right)\\
&= \mathrm{sen}\left(n\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Utilizando o método das características, resolva

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Sejam

$$\begin{aligned} x &= X(s),\\ t &= T(s); \Rightarrow\\ u(x,t) &= u(X(s),T(s)) = U(s). \end{aligned}$$

mas

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\frac{\partial u}{\partial x};$$

compare com

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1,\\ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= X,\\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} &= 0. \end{aligned}$$

As soluções para T e X são

$$\begin{aligned} T(s) &= T(0) + s,\\ X(s) &= X(0)\mathrm{e}^{s}. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, faça $T(s) = s$; então a solução para $u(x,t)$ é

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(X(s),T(s))\\ &= U(s) = U(0) = f(X(0))\\ &= f(X(s)\mathrm{e}^{-s}) = f(x\mathrm{e}^{-t}) \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] O aluno de Engenharia Ambiental Guido Ambi tentou aplicar o método de separação de variáveis à equação de Boussinesq em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rh\frac{\partial h}{\partial r}\right], \qquad 0 \le r \le b.$$

Guido foi bem-sucedido? Por quê?

NÃO SE PREOCUPE COM CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO. NÃO SE PREOCUPE EM RESOLVER AS EQUAÇÕES ORDINÁRIAS, SE VOCÊ AS ENCONTRAR. JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA TENTANDO, APENAS, SEPARAR A EQUAÇÃO.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
h(r,t) &= R(r)T(t),\\
\frac{\partial(RT)}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(RT)\frac{\partial(RT)}{\partial r}\right],\\
R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{T^2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rR\frac{\mathrm{d}(R)}{\mathrm{d}r}\right]\\
\frac{1}{\alpha^2 T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[rR\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] = c_1.
\end{aligned}$$

Guido foi, sim, bem-sucedido ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 \le x \le L,\\
\phi(x,0) &= f(x),\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = X(x)T(t)$;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial (XT)}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2};\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2};\\
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda;\\
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X &= 0.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno são

$$
\begin{aligned}
X(0)T(t) &= 0,\\
X'(L)T(t) &= 0; \Rightarrow\\
X(0) &= 0,\\
X'(L) &= 0.
\end{aligned}
$$

Este é um problema de Sturm-Liouville com $w(x) = 1$.
As tentativas $\lambda > 0$ e $\lambda = 0$ falham. Faça $\lambda = -k^2 < 0$, onde k é uma constante positiva e real. A equação em $X(x)$ fica

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k^2 X &= 0,\\
X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx).\\
X(0) &= 0 \Rightarrow A = 0.\\
X(x) &= B\,\mathrm{sen}(kx),\\
X'(x) &= kB\cos(kx).\\
X'(L) &= kB\cos(kL) = 0 \Rightarrow\\
kL &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} + n\pi, & n = 0,1,2,\ldots\\ \frac{\pi}{2} - n\pi, & n = 1,2,3,\ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Temos que escolher entre as duas expressões acima para kL. Temos que começar a segunda em $n = 1$; caso contrário, teremos dois autovalores iguais ($[+\pi/2]^2$ e $[-\pi/2]^2$) para duas autofunções linearmente dependentes: $\mathrm{sen}(\pi x/(2L))$ e $\mathrm{sen}(-\pi x/(2L))$. Escolhemos portanto k_n's exclusivamente positivos, e temos

$$
\begin{aligned}
k_n &= \frac{\pi}{2L}(2n+1), \qquad n = 0,1,2,\ldots;\\
X_n(x) &= \mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right).
\end{aligned}
$$

A equação em $T(t)$ e sua solução são

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -\left[\frac{\pi(2n+1)}{2L}\right]^2,\\
T(t) &= T_0 \mathrm{e}^{-\left[\frac{\pi(2n+1)\alpha}{2L}\right]^2 t}.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução portanto é do tipo

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-\left[\frac{\pi(2n+1)\alpha}{2L}\right]^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right);\\
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

O único termo que sobrevive do lado direito é quando $n = m$; neste caso, a integral correspondente vale $L/2$ e temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x &= A_m \frac{L}{2}\\
A_m &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right)\,\mathrm{d}x \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹