TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 06 Set 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

**Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova**

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

**1** [20] Considere o esquema de diferenças finitas *upwind* explícito e condicionalmente estável para a equação da onda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathrm{Co}[u_i^n - u_{i-1}^n].$$

Considere que a matriz `u` foi alocada com `u = zeros((2,nx+1),float)`, onde `zeros` foi importada de `numpy`, com `nx=1000`, e que você está calculando `u[new]` a partir de `u[old]`, sendo que `old` refere-se ao passo de tempo $n$, e `new` ao passo de tempo $n+1$. Mostre como, utilizando a técnica de *slicing*, você pode calcular `u[new,1:nx]` **em apenas uma linha de código em Python (usando numpy)**; suponha que a variável `Cou`, com o número de Courant, já foi calculada e que ela garante a estabilidade do esquema.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
u[new,1:nx] = u[old,1:nx] - Cou*(u[old,1:nx] - u[old,0:nx-1])
```

Continue a solução no verso ⟹

**2** [20] Considere um esquema de diferenças finitas implícito "clássico" para a equação da difusão:

$$-\mathrm{Fo}u_{i-1}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_i^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{i+1}^{n+1} = u_i^n, \qquad i = 1, \ldots, N_x - 1.$$

onde $\mathrm{Fo} = D\Delta t/\Delta x^2$, e $D$ é a difusividade. Sabemos que a equação acima em geral não vale para a primeira ($i = 1$) e última ($i = N_x - 1$) linhas. Obtenha essas linhas para as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \alpha, \\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} &= \beta, \end{aligned}$$

sendo $\alpha$ e $\beta$ constantes, onde $x = 0$ corresponde ao ponto de grade $i = 0$, e $x = L$ corresponde ao ponto de grade $i = N_x$.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: A primeira linha fica

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}\alpha + (1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n+1} &= u_1^n, \\ (1+2\mathrm{Fo})u_1^{n+1} - \mathrm{Fo}u_2^{n} &= u_1^n + \mathrm{Fo}\alpha. \end{aligned}$$

A aproximação da derivada em $x = L$ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} \approx \frac{u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1}}{\Delta x} &= \beta \;\Rightarrow \\ u_{N_x}^{n+1} - u_{N_x-1}^{n+1} &= \beta\Delta x, \\ u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x, \end{aligned}$$

de forma que a última linha fica

$$\begin{aligned} -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}u_{N_x}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+2\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\left[u_{N_x-1}^{n+1} + \beta\Delta x\right] &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} - \mathrm{Fo}\beta\Delta x &= u_{N_x-1}^n, \\ -\mathrm{Fo}u_{N_x-2}^{n+1} + (1+\mathrm{Fo})u_{N_x-1}^{n+1} &= u_{N_x-1}^n + \mathrm{Fo}\beta\Delta x \;\blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

**3** [20] Considere o espaço vetorial das funções complexas de uma variável real $x$ e quadrado-integráveis em $[0,1]$, e a operação

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x,$$

onde $^*$ indica o conjugado complexo. Verifique se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno legítimo.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 [f(x) g^*(x)]^*\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\int_0^1 x^2 g^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right]^* = \langle g, f\rangle^* \ \checkmark \\
\langle f, g+h\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x)[g(x)+h(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f^*(x) h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle \ \checkmark \\
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x)[\alpha g(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_0^1 x^2 f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \alpha \langle f, g\rangle \ \checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x > 0,\ \text{se } f(x) \neq 0 \text{ em algum sub-intervalo finito de } [0,1] \ \checkmark \\
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 x^2 f^*(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,\ \text{se } f(x) \neq 0 \text{ apenas em conjunto enumerável de pontos de } [0,1] \ \checkmark
\end{aligned}$$

Trata-se, portanto, de um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

**4** [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[a, b] = [0, 1]$, sabendo que

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-x} \cos(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\,[a\,\mathrm{sen}(ax) - \cos(ax)]}{1 + a^2} + C,\\
\int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{sen}(ax)\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-x}\,[-\,\mathrm{sen}(ax) - a\cos(ax)]}{1 + a^2} + C.
\end{aligned}
$$

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
$a = 0$, $b = 1$, $L = 1$.

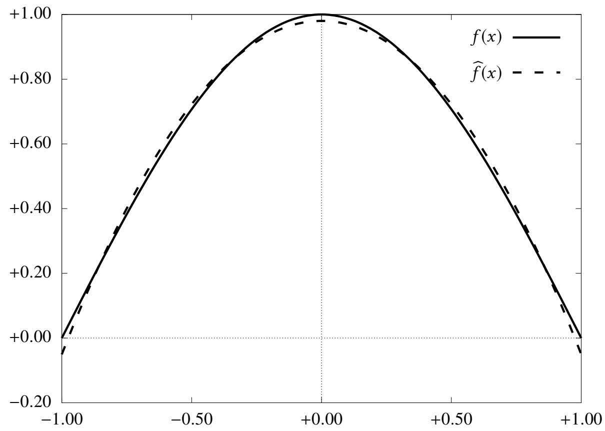
$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \cos\left(\frac{2n\pi x}{1}\right) \mathrm{d}x\\
&= 2\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2 n^2 + 1}\\
B_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi x}{1}\right) \mathrm{d}x\\
&= 4\pi n\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2 n^2 + 1}
\end{aligned}
$$

Finalmente, para $x \in [0, 1]$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2 n^2 + 1}\cos\left(2n\pi x\right) + 2\pi n\frac{\mathrm{e}^{-1}[\mathrm{e} - 1]}{4\pi^2 n^2 + 1}\,\mathrm{sen}\left(2n\pi x\right)\right]\\
&= (1 - \mathrm{e}^{-1})\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4\pi^2 n^2 + 1}\cos\left(2n\pi x\right) + \frac{2\pi n}{4\pi^2 n^2 + 1}\,\mathrm{sen}\left(2n\pi x\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

**5** [20] Desejamos aproximar a função $f(x) = \cos(\pi x/2)$ em $x \in [-1, 1]$ usando uma base de funções **ortonormais**




$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}},\\
p_1(x) &= \sqrt{\frac{3}{2}}x,\\
p_2(x) &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{3x^2-1}{2}\right],\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sabendo que

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} p_0(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2^{3/2}}{\pi},\\
\int_{-1}^{+1} p_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2-48}{\pi^3}\right],
\end{aligned}
$$

obtenha $\alpha_1$, $\alpha_2$, e $\alpha_3$ tais que $\left\|f(x)-\widehat{f}(x)\right\|$ seja mínima, com $\widehat{f}(x) = \alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)$. A $\widehat{f}(x)$ resultante, com os $\alpha$'s corretos, é mostrada na figura. **Justifique sua resposta.**

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As funções $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $p_2(x)$ já são ortonormais (sabemos disso, porque o enunciado nos disse). Por tanto, os $\alpha$'s são

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \langle p_0(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_0(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{3/2}}{\pi},\\
\alpha_1 &= \langle p_1(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_1(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\\
\alpha_2 &= \langle p_2(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{+1} p_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{4\pi^2-48}{\pi^3}\right].
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\alpha_1 = 0$ porque o integrando correspondente, $p_1(x)f(x)$, é o produto de uma função ímpar ($p_1(x)$) por uma par ($f(x)$), que é ímpar, e cuja integral é zero ■

Continue a solução no verso ⟹