$$[\boldsymbol{A}] = [A_{ij}]$$

$$[\boldsymbol{\delta}][\boldsymbol{x}] = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} x_j = x_i$$

$$[\boldsymbol{\delta}][\boldsymbol{x}] = \quad \delta_{ij} x_j = x_i = [\boldsymbol{x}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{y}]^\top [\boldsymbol{\delta}] = y_i \delta_{ij} = y_j = [\boldsymbol{y}]^\top = [y_1, y_2, y_3]$$

O que é uma base ortonormal?

Uma base ortogonal $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base em que

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = |\boldsymbol{v}_i|^2 \delta_{ij}$$

(lembre-se de que)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Se obrigarmos todos os $|\boldsymbol{v}_i| = 1$, ou seja, se nós fizermos

$$\boldsymbol{e}_i \equiv \frac{1}{|\boldsymbol{v}_i|} \boldsymbol{v}_i,$$

teremos uma base ortonormal $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, e agora

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}.$$

Lembre-se de que um vetor "absoluto" é uma criatura do tipo

$$\boldsymbol{v} = (4, 5, 6).$$

Faça agora uma base $F = \Big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\Big)$. Quanto é $\boldsymbol{v}$ na base F? Em outras palavras, devemos ter

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_{F1} \boldsymbol{f}_1 + v_{F2} \boldsymbol{f}_2 + v_{F3} \boldsymbol{f}_3, \\ \boldsymbol{f}_1 &= (1,0,0), \\ \boldsymbol{f}_2 &= (1,1,0), \\ \boldsymbol{f}_3 &= (1,1,1). \end{aligned}$$

Para encontrar as coordenadas v_{Fi}, fazemos

$$\begin{aligned} (4,5,6) &= v_{F1}(1,0,0) + v_{F2}(1,1,0) + v_{F3}(1,1,1); \\ &= (v_{F1} + v_{F2} + v_{F3}, v_{F2} + v_{F3}, v_{F3}) \\ 4 &= v_{F1} + v_{F2} + v_{F3}, \\ 5 &= v_{F2} + v_{F3}, \\ 6 &= v_{F3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_{F3} &= 6, \\ v_{F2} &= -1, \\ v_{F1} &= -1. \end{aligned}$$

Ou seja: na base F, o vetor $\boldsymbol{v} = (4, 5, 6)$ é representado como

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}_F$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= -1\boldsymbol{f}_1 - 1\boldsymbol{f}_2 + 6\boldsymbol{f}_3, \\ &= \sum_{i=1}^{3} v_{Fi}\boldsymbol{f}_i \\ &= v_{Fi}\boldsymbol{f}_i \end{aligned}$$

Se não houver absolutamente qualquer dúvida sobre o contexto, muitas vezes nós vamos abreviar:

$$\boldsymbol{v} = v_i\boldsymbol{f}_i.$$

Atenção! Existe mais de uma base ortonormal no $\mathbb{R}^n$!!!

The hard way,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= [u_{E1}\boldsymbol{e}_1 + u_{E2}\boldsymbol{e}_2 + u_{E3}\boldsymbol{e}_3] \cdot [v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + v_{E3}\boldsymbol{e}_3] \\ &= u_{E1}\boldsymbol{e}_1 \cdot [v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + v_{E3}\boldsymbol{e}_3] + \\ &\quad u_{E2}\boldsymbol{e}_2 \cdot [v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + v_{E3}\boldsymbol{e}_3] + \\ &\quad u_{E3}\boldsymbol{e}_3 \cdot [v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + v_{E3}\boldsymbol{e}_3] \\ &= u_{E1}\boldsymbol{e}_1 \cdot v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + u_{E1}\boldsymbol{e}_1 \cdot v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + u_{E1}\boldsymbol{e}_1 \cdot v_{E3}\boldsymbol{e}_3 + \\ &\quad u_{E2}\boldsymbol{e}_2 \cdot v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + u_{E2}\boldsymbol{e}_2 \cdot v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + u_{E2}\boldsymbol{e}_2 \cdot v_{E3}\boldsymbol{e}_3 + \\ &\quad u_{E3}\boldsymbol{e}_3 \cdot v_{E1}\boldsymbol{e}_1 + u_{E3}\boldsymbol{e}_3 \cdot v_{E2}\boldsymbol{e}_2 + u_{E3}\boldsymbol{e}_3 \cdot v_{E3}\boldsymbol{e}_3 \\ &= u_{E1}v_{E1}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + u_{E1}v_{E2}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + u_{E1}v_{E3}\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 + \\ &\quad u_{E2}v_{E1}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + u_{E2}v_{E2}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + u_{E2}v_{E3}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 + \\ &\quad u_{E3}v_{E1}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 + u_{E3}v_{E2}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 + u_{E3}v_{E3}\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &= u_{E1}v_{E1} + u_{E2}v_{E2} + u_{E3}v_{E3} \\ &= \sum_{i=1}^{3} u_{Ei}v_{Ei} = u_{Ei}v_{Ei}. \end{aligned}$$

Permutações

$$\begin{gathered} (3, 1, 2) \\ (1, 3, 2) \\ (1, 2, 3) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (1, 3, 2) \\ (1, 2, 3) \end{gathered}$$