TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Mar 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [25] Em um trecho de canal ou rio, verifica-se que a velocidade média na seção, V (LT^{-1}), depende das seguintes variáveis: um comprimento de rugosidade z_0 (L) das paredes e do fundo; a componente da aceleração da gravidade na direção do escoamento, $\approx gS_0$ (LT^{-2}); e o raio hidráulico R (L). S_0 é a declividade do canal, **e fica junto da aceleração da gravidade** $\boldsymbol{g}$**.** Conforme indicado, elas devem ser consideradas **como uma única variável** gS_0. Há 4 variáveis e 2 dimensões, e portanto há 2 parâmetros adimensionais. Escolha gS_0 e R para comparecerem (possivelmente) em ambos, e obtenha Π_1 (envolvendo V) e Π_2 (envolvendo z_0).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As duas dimensões fundamentais deste problema são L e T. Teremos 2 parâmetros adimensionais:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= R^a (gS_0)^b V, \\
\Pi_2 &= R^a (gS_0)^b z_0.
\end{aligned}
$$

A primeira equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{LT}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{LT}^{-1} \Rightarrow \\
a + b + 1 &= 0, \\
-2b - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = -1/2, \qquad a = -1/2.
$$

donde

$$
\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{RgS_0}}.
$$

A segunda equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L}^0\mathsf{T}^0 &= \mathsf{L}^{\mathsf{a}}(\mathsf{LT}^{-2})^{\mathsf{b}}\mathsf{L} \Rightarrow \\
a + b + 1 &= 0, \\
-2b &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = 0; \qquad a = -1.
$$

donde

$$
\Pi_2 = \frac{z_0}{R}.
$$

Temos agora a previsão de análise dimensional para a velocidade na seção

$$
\frac{V}{\sqrt{RgS_0}} = f\left(\frac{z_0}{R}\right),
$$

onde f é uma função empírica a determinar.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O programa a seguir,

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
a = 1
for k in range(2,100):
   a *= k
print(a)
```

imprime o seguinte resultado na tela:
9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759
9999322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400000
000000000000000000
Entenda o que o programa faz: que operação matemática o programa está calculando? Reescreva a resposta do programa **utilizando apenas 3 caracteres**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O programa calcula o fatorial de 99, 99! ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Mostre que os vetores

$$(1,0,0), \qquad (1,2,0), \qquad (1,2,3)$$

formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Precisamos mostrar que qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores acima, e que esses vetores são LI.
Primeiramente, se (x, y, z) é um vetor *qualquer* do $\mathbb{R}^3$, tente

$$\begin{aligned} \alpha(1,0,0) + \beta(1,2,0) + \gamma(1,2,3) = (x,y,z) \Rightarrow \\ \alpha + \beta + \gamma &= x, \\ 2\beta + 2\gamma &= y, \\ 3\gamma &= z. \end{aligned}$$

O sistema é possível para *quaisquer* x, y, z: todo vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser decomposto nos vetores da base. Além disso, considere o caso particular $x = y = z = 0$: então, a única solução possível (e vice-versa) é $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e portanto os 3 vetores são LI ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Considere os objetos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_i \boldsymbol{e}_i,\\
\boldsymbol{M} &= M_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k,\\
\boldsymbol{b} &= b_l \boldsymbol{e}_l.
\end{aligned}
$$

Calcule

$$
\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b}] \,.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b} &= M_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot b_l \boldsymbol{e}_l\\
&= M_{jk} b_l \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l)\\
&= M_{jk} b_l \boldsymbol{e}_j \delta_{kl}\\
&= M_{jk} b_k \boldsymbol{e}_j;\\
\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk} a_i M_{jl} b_l \boldsymbol{e}_k \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Note a necessidade de mudar o índice k para l entre a penúltima e a última linhas.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 3 Mai 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Dada a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenha:

a) [10] todos os seus autovalores;

b) [15] todos os seus autovetores.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) a : matrix([1,1,1],[1,2,3],[2,2,1]) ;
                                   [ 1  1  1 ]
                                   [         ]
(%o1)                              [ 1  2  3 ]
                                   [         ]
                                   [ 2  2  1 ]
(%i2) [vals, vecs] : eigenvectors(a);
           sqrt(21) - 5  5 + sqrt(21)
(%o2) [[[- ------------, ------------, - 1], [1, 1, 1]],
                2             2
        5 sqrt(21) - 7    sqrt(3) sqrt(7) - 7
[[[1, - --------------, - -------------------]],
              14                   7
     7 + 5 sqrt(21)  7 + sqrt(3) sqrt(7)
[[1, --------------, -------------------]], [[0, 1, - 1]]]]
           14                 7
(%i3)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] As coordenadas elípticas (μ, ν) no $\mathbb{R}^2$ são definidas por meio de

$$x = a\cosh(\mu)\cos(\nu),$$
$$y = a\,\mathrm{senh}(\mu)\,\mathrm{sen}(\nu).$$

Calcule o jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mu,\nu)}\ .$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
(%i1) x : a*cosh(mu)*cos(nu) ;
(%o1)                         a cosh(mu) cos(nu)
(%i2) y : a * sinh(mu)*sin(nu);
(%o2)                         a sinh(mu) sin(nu)
(%i3) jacob : matrix([diff(x,mu),diff(x,nu)],[diff(y,mu),diff(y,nu)]);
                 [ a sinh(mu) cos(nu)  - a cosh(mu) sin(nu) ]
(%o3)            [                                          ]
                 [ a cosh(mu) sin(nu)   a sinh(mu) cos(nu)  ]
(%i4) determinant(jacob);
                  2     2        2        2     2        2
(%o4)            a  cosh (mu) sin (nu) + a  sinh (mu) cos (nu)
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule o perímetro da elipse

$$x = a\cos(\theta),$$
$$y = b\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad\qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

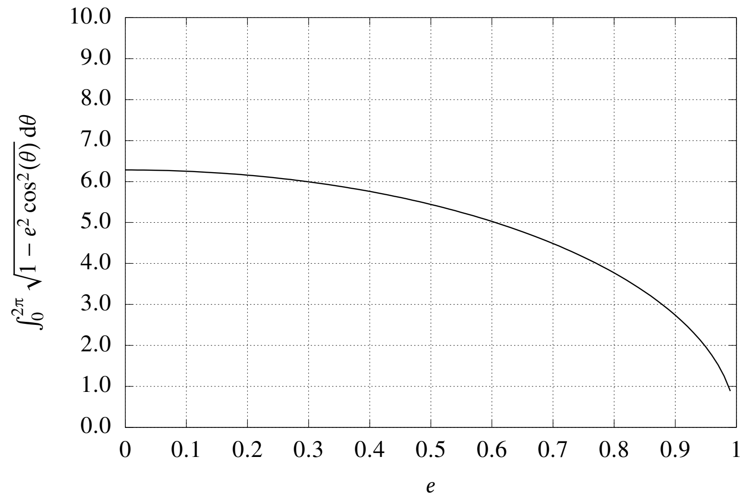
cuja excentricidade é $e = 0{,}3$, na forma

$$p = \gamma a,$$

onde γ é um número puro. Suponha $0 < b < a$ (a é o semi-eixo maior, e b é o semi-eixo menor). A excentricidade da elipse é dada por

$$e = \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right]^{1/2}.$$

Este problema leva a uma integral que não pode ser obtida analiticamente por meio de técnicas de integração aprendidas em Cálculo. A figura a seguir foi feita para que você seja capaz de obter o valor de γ graficamente.
Atenção: você precisa apresentar o desenvolvimento completo do cálculo do perímetro em termos de uma integral de linha. Apenas "adivinhar" o valor de γ, etc., NÃO É SUFICIENTE.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$p(e) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta;$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta} = (-a\,\mathrm{sen}(\theta), b\cos(\theta));$$
$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\right| = \left(a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right)^{1/2};$$
$$p(e) = \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta.$$

Dado que

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$
$$e^2a^2 = a^2 - b^2,$$
$$b^2 = a^2(1 - e^2),$$

temos que

$$\begin{aligned} p(e) &= \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + a^2(1 - e^2)\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[a^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) + a^2\cos^2(\theta) - a^2e^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \left[1 - e^2\cos^2(\theta)\right]^{1/2} \mathrm{d}\theta \Rightarrow \gamma \approx 6 \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Usando notação indicial e a definição de $\boldsymbol{\nabla}$ em coordenadas cartesianas, prove que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\epsilon_{ijk} u_i v_j \right] \\
&= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{ijk} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{ijk} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j + \epsilon_{jki} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} u_i \\
&= \epsilon_{kij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} v_j - \epsilon_{kji} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} u_i \\
&= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 2 Jun 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Um pouco de *background*: é fácil mostrar que

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad u^2 + v^2 \le h^2,$$

são equações paramétricas de um cone invertido cuja ponta se encontra na origem de um sistema de eixos cartesianos O_{xyz}. Se você adicionar a restrição $v \le 0$, isso representa a metade do cone, que fica sobre a região onde $y \le 0$. Suponha que esse meio-cone seja uma barragem, sobre a qual age, em cada ponto, um vetor-tensão $\boldsymbol{t} = -p\boldsymbol{n}$, onde $\boldsymbol{n}$ é um vetor normal unitário apontando para *fora* do cone, e $p = p_0 + \rho g(h - z)$ é a pressão hidrostática. Calcule a componente vertical da força resultante $F_z = \int_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{k})\, \mathrm{d}A$ da água sobre a barragem ($\boldsymbol{k}$ é o vetor unitário ao longo do eixo z; p_0 é a pressão atmosférica, ρ é a massa específica da água, g é a aceleração da gravidade, e $\mathscr{S}$ é a superfície da barragem).
Para facilitar sua vida, você pode usar o fato de que

$$\boldsymbol{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1 \right),$$

e que a integral de superfície de uma função escalar $f(\boldsymbol{r}(u,v))$ sobre $\mathscr{S}$ é

$$I_{\mathscr{S}} = \iint_{R_{uv}} f(\boldsymbol{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Primeiro o vetor normal. Dada a superfície $F(x,y,z) = 0$, o normal é

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} F|} \boldsymbol{\nabla} F$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \left[x^2 + y^2\right]^{1/2} - z = 0;\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= x \left[x^2 + y^2\right]^{-1/2};\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= y \left[x^2 + y^2\right]^{-1/2};\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -1;\\
|\boldsymbol{\nabla} F| &= \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right]^{1/2} = \sqrt{2};\\
\boldsymbol{n}(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, v \left[u^2 + v^2\right]^{-1/2}, -1 \right).
\end{aligned}$$

Agora, a integral de superfície F_z é dada por

$$F_z = \iint_{R_{uv}} -p(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

O produto vetorial é formado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right),\\
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right);
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

em seguida,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right);
$$

$$
\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{2}.
$$

A integral simplifica-se para

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} &= -1/\sqrt{2}; \\
F_z &= \iint_{R_{uv}} -[p_0 + \rho g(h - z)] \times (-1/\sqrt{2}) \times \sqrt{2}\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
&= \iint_{R_{uv}} [p_0 + \rho g(h - \sqrt{u^2 + v^2})] \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\
&= \int_{\theta=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{h} [p_0 + \rho g(h - r)] r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi h^2}{6} (3p_0 + \rho g h) \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv \Rightarrow \\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - xuv &= x; \\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - xv\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x; \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= xv; \\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= x\mathrm{d}x; \\
\int_{v_0}^{v(x)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_0^x y\,\mathrm{d}y; \\
\ln\left(\frac{v(x)}{v_0}\right) &= \frac{1}{2}x^2; \\
v(x) &= v_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right); \\
v_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x, \\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v_0} x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right); \\
u(x) - u_0 &= \frac{1}{v_0}\int_0^x y \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{v_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \Rightarrow \\
u(x) &= u_0 + \frac{1}{v_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]; \\
y(x) &= u(x)v(x) = (u_0v_0)\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) \\
&= (u_0v_0)\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 1 \\
&= C\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a solução geral de

$$y'' + 3y' + 2y = x^2$$

Sugestão: procure uma solução particular $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A solução homogênea é fácil:

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

A busca da solução particular é bem simples:

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c; \\ y_p' &= 2ax + b; \\ y_p'' &= 2a. \end{aligned}$$

Substitua:

$$\begin{aligned} 2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) &= x^2; \\ 2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c &= x^2; \\ 2a = 1 &\Rightarrow a = 1/2; \\ (6a + 2b) = 0 &\Rightarrow (3 + 2b) = 0;\ b = -3/2; \\ (2a + 3b + 2c) = 0 &\Rightarrow (1 - 9/2 + 2c) = 0;\ c = 7/4 \Rightarrow \\ y(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + x^2/2 - 3x/2 + 7/4\ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Se $|x| < 1$, $x \in \mathbb{R}$, calcule em forma fechada

$$S(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} y = x^3 &\Rightarrow |y| < 1; \\ S(x) &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 23 Jun 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Encontre a **solução geral** de

$$x^2y'' + (x + x^2)y' - y = 0$$

pelo método de Frobenius.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Veja o Exemplo 10.4 do livro-texto.

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Calcule a transformada de Laplace da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x^2.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} s\overline{y} - y(0) - \overline{y} &= \mathscr{L}\{x^2\}, \\ s\overline{y} - y(0) - \overline{y} &= \frac{2}{s^3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$\left[\frac{1}{s-a}\right] \times \left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\overline{f}(s)\overline{g}(s)\right] &= f(t) * g(t) \\
&= \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)} \operatorname{sen}(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{at} \int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau} \operatorname{sen}(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\omega^2+a^2}\left[\omega \mathrm{e}^{at} - (\omega\cos(\omega t) + a\operatorname{sen}(\omega t))\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Calcule

$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Dê o resultado em uma única linha (é **proibido** dar o resultado final com casos separados envolvendo o sinal de x).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
x < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} H(\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= 0;\\
x > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} H(\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{0}^{x} H(\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{0}^{x} \cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(0); \Rightarrow\\
\int_{-\infty}^{x} H(\xi)\cos(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= H(x)\operatorname{sen}(x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 03 Jul 2017, **sala PA-02**
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO | Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: EM TODAS AS QUESTÕES, EXCETO QUANDO O ENUNCIADO DETERMINAR QUE VOCÊ DEIXE ALGUNS RESULTADOS INDICADOS, JUSTIFIQUE OS SEUS RESULTADOS. RESULTADOS SEM DESENVOLVIMENTO E DEDUÇÃO RAZOÁVEIS NÃO SERÃO CONSIDERADOS.

---

1 [20] Uma função real $f(x)$ é discretizada em $2n+1$ pontos **igualmente espaçados** de uma distância $h = (b-a)/(2n)$ no intervalo $[a,b]$ de tal forma que $x_0 \equiv a$, $x_k = a + kh$, e $x_{2n} \equiv b$. Seja $f_k = f(x_k)$. O código em Python ao lado calcula uma integral numérica do tipo

$$
I = \alpha\,[f(a) + f(b)] + \beta \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + \gamma \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k}.
$$

Inspecionando o código,

a) [5,0] determine α;

b) [7,5] determine β;

c) [7,5] determine γ.

```python
def simp(n,a,b,f):
   h = (b-a)/(2*n)
   Se = f(a) + f(b)
   Si = 0.0
   Sp = 0.0
   for k in range(1,n+1):
      xi = a + (2*k - 1)*h
      Si +=  f(xi)
   pass
   for k in range(1,n):
      xp = a + 2*k*h
      Sp += f(xp)
   pass
   Si *= 4
   Sp *= 2
   return h*(Se + Si + Sp)/3
```

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\alpha = h/3,
$$
$$
\beta = 4h/3,
$$
$$
\gamma = 2h/3 \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Considere a transformação linear C definida pelas relações

$$
\begin{aligned}
C \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1, \\
C \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_2, \\
C \cdot \boldsymbol{e}_3 &= -\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
$$

onde $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

a) [5,0] Qual é a matriz $[C]$ dessa transformação na base canônica?

b) [7,5] Qual é o significado **geométrico** de C? O que é que C faz com cada vetor do $\mathbb{R}^3$?

c) [7,5] Portanto, qual é a matriz inversa $[C]^{-1}$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$
[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

b) C é uma reflexão em torno do plano x_1x_2.
c) Para sair de um vetor $\boldsymbol{v}$ e voltar para ele mesmo, basta refleti-lo novamente em torno do plano x_1x_2; portanto,

$$
[C]^{-1} = [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Utilizando **obrigatoriamente** a regra de Leibnitz, calcule

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

ATENÇÃO: NÃO CALCULE NENHUMA INTEGRAL! DEIXE TODAS AS INTEGRAIS QUE APARECEREM INDICADAS.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\tau,t)\,\mathrm{d}\tau = f(b,t)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} - f(a,t)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \int_{a(t)}^{b(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\mathrm{d}\tau;$$ 10 pontos se souber a fórmula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{sen}(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{sen}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\blacksquare$$ mais 10 pontos se acertar a questão.

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' + 3y = 0$$

em termos de **funções reais** da variável real x.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) [5,0] Esta é uma equação de Euler (se o aluno não identificou a equação, ele já perdeu a questão)

b) [5,0] Portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= x^r, \\ y'(x) &= rx^{r-1}, \\ y''(x) &= (r-1)rx^{r-2}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação,

$$\begin{aligned} (r-1)rx^r + rx^r + 3x^r &= 0, \\ \left[r^2 - r + r + 3\right] x^r &= 0, \\ r^2 + 3 &= 0, \\ r &= \pm\sqrt{3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

A solução geral é

$$y(x) = K_1x^{r_1} + K_2x^{r_2} = K_1x^{\sqrt{3}\mathrm{i}} + K_2x^{-\sqrt{3}\mathrm{i}}.$$

No entanto, o enunciado orienta que o aluno procure uma solução **puramente real**; essa solução ainda está em termos de funções complexas. **O aluno tem que prosseguir!**

c) [5,0]

$$\begin{aligned} x^r &= \exp(\ln(x^r)) = \exp(r\ln(x)); \\ x^{\mathrm{i}\beta} &= \exp(\mathrm{i}\beta\ln(x)) = \cos(\beta\ln(x)) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\beta\ln(x)) \end{aligned}$$

Até aqui, o aluno já ganhou 15 pontos. Mas ele precisa completar a questão:

d) [5,0] Sejam

$$\begin{aligned} C &\equiv \cos(\sqrt{3}\ln(x)), \\ S &\equiv \mathrm{sen}(\sqrt{3}\ln(x)). \end{aligned}$$

Então,

$$y(x) = K_1[C + \mathrm{i}S] + K_2[C - \mathrm{i}S].$$

Para $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$, faça

$$\begin{aligned} K_1 &= (A - \mathrm{i}B)/2, \\ K_2 &= (A + \mathrm{i}B)/2 \ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= [A - \mathrm{i}B][C + \mathrm{i}S]/2 + [A + \mathrm{i}B][C - \mathrm{i}S]/2 \\ &= (AC - \mathrm{i}^2BS)/2 + \mathrm{i}(AS - BC)/2 + (AC - \mathrm{i}^2BS)/2 - \mathrm{i}(AS - BC)/2 \\ &= AC + BS \\ &= A\cos(\sqrt{3}\ln(x)) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\ln(x)) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

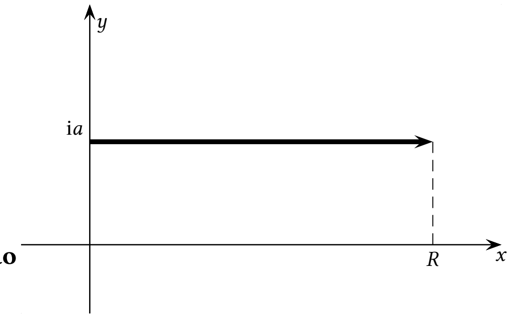
5 [20] Seja a função complexa $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}az}$ com $a > 0$. Calcule

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{z=\mathrm{i}a}^{z=R+\mathrm{i}a} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

sabendo que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

O caminho de integração é indicado pela seta grossa na figura ao lado.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Este problema na verdade é uma parte do problema 9.6 do livro-texto.
a) [5,0] Claramente, a integral pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_{z=\mathrm{i}a}^{z=R+\mathrm{i}a} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{x=0}^{R} f(x+\mathrm{i}a)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

b)[10,0] Mas

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+\mathrm{i}a) \\ &= \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}a(x+\mathrm{i}a)} \\ &= \mathrm{e}^{-(x^2+2\mathrm{i}ax+\mathrm{i}^2a^2)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax+2\mathrm{i}^2a^2} \\ &= \mathrm{e}^{-x^2-2\mathrm{i}ax+a^2+2\mathrm{i}ax-2a^2} \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{e}^{-x^2}. \end{aligned}$$

c) [5,0] Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-a^2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹