TEA752 Métodos Matemáticos em Eng. Ambiental
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 24 mai 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO

Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em um universo paralelo, a equação de transporte de uma substância com concentração c depende de uma grandeza *vetorial* denominada *felocidade* $\boldsymbol{f}$ (nesse universo, os voguetes são muito feloces). Em uma dimensão, a equação é

$$\frac{\partial c}{\partial t} + f_x \frac{\partial f_x}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

(onde f_x é a única componente de $\boldsymbol{f}$, segundo x). Em 3 dimensões, a equação é

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{Op} \cdot \boldsymbol{\nabla} c = D \nabla^2 c.$$

Na expressão acima, Op é um operador construído em função do vetor $\boldsymbol{f}$ e que deve ser um análogo 3D de $f_x \partial f_x / \partial x$. Obtenha Op em notação tensorial/vetorial **e** em notação indicial. **Sugestão: note que, dimensionalmente, Op tem que ter dimensão F^2/L, onde F é a dimensão de $\boldsymbol{f}$, e L é a dimensão "comprimento".**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Há 3 possibilidades (pelo menos …)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_i}{\partial x_k} f_k \frac{\partial c}{\partial x_i} &= [\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f}] \cdot \boldsymbol{\nabla} c;\\
f_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} &= [\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f}] \cdot \boldsymbol{\nabla} c;\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_k} f_i \frac{\partial c}{\partial x_i} &= [\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f}] \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\nabla} c \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}\right),$$

mostre que ela admite uma solução de similaridade

$$\frac{u}{t^{1/2}} = f\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right).$$

ATENÇÃO: BASTA ENCONTRAR AS VARIÁVEIS DE SIMILARIDADE ACIMA. NÃO É NECESSÁRIO REDUZIR A EDP A UMA EDO!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
u &= \lambda U,\\
r &= \lambda^m R,\\
t &= \lambda^n T;\\
\frac{\partial \lambda U}{\partial \lambda^n T} &= \frac{\partial}{\partial(\lambda^m R)}\left(\frac{1}{(\lambda^m R)}\frac{\partial(\lambda^m R \lambda U)}{\partial(\lambda^m R)}\right),\\
\lambda^{1-n}\frac{\partial U}{\partial T} &= \lambda^{1-2m}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial(RU)}{\partial R}\right);\ \Rightarrow\\
1-n &= 1-2m;\\
n &= 2m.
\end{aligned}$$

Qualquer escolha de m, n que obedeça à relação acima é válida. Para obter o que foi pedido no enunciado, faça $m = 1$, $n = 2$:

$$\lambda = \frac{u}{U} = \frac{r}{R} = \left(\frac{t}{T}\right)^{1/2},$$

de onde podemos obter duas variáveis de similaridade independentes:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{u}{t^{1/2}} = \frac{U}{T^{1/2}},\\
\eta &= \frac{r}{t^{1/2}} = \frac{R}{T^{1/2}}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Dada a equação diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u,\\
u(x,0) &= 1,\\
u(0,t) &= 0,\\
\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= 0,
\end{aligned}
$$

formule a sua solução por separação de variáveis até encontrar duas equações diferenciais ordinárias em duas funções a determinar, $X(t)$ e $T(t)$, cada uma das quais dependendo de um parâmetro arbitrário λ a determinar, **assim como as condições inciais e/ou de contorno correspondentes**. **PARE POR AÍ.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - XT,\\
\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - 1; \Rightarrow\\
\frac{X''}{X} &= -\lambda,\\
\frac{T'}{T} &= -(\lambda+1).
\end{aligned}
$$

As condições de contorno em $X(x)$ são

$$
\begin{aligned}
X(0) &= 0,\\
X'(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

A condição inicial em $T(t)$ é arbitrária, e a condição inicial $u(x,0) = 1$ é depois usada para achar os coeficientes de Fourier da solução em série.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Sabendo que o teorema da convolução é

$$\mathscr{F}\{f * g\} = 2\pi \widehat{f}(k)\widehat{g}(k),$$

utilize-o para provar (usando exclusivamente transformadas de Fourier: não vale a dedução que eu dei em sala) que

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} = \widetilde{\frac{\partial \phi}{\partial x}},$$

onde

$$\widetilde{\phi(x)} \equiv G * \phi,$$

e G é um *filtro*.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO (VOU DAR UMA AJUDA):

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x}\right\} &= \mathrm{i}k\mathscr{F}\{G * \phi\} \\
&= \mathrm{i}k2\pi\widehat{G}(k)\widehat{\phi}(k) \\
&= 2\pi\widehat{G}(k)\left[\mathrm{i}k\widehat{\phi}(k)\right] \\
&= 2\pi\widehat{G}(k)\mathscr{F}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\} \\
&= \mathscr{F}\left\{G * \frac{\partial \phi}{\partial x}\right\} \\
&= \mathscr{F}\left\{\widetilde{\frac{\partial \phi}{\partial x}}\right\} \Rightarrow \\
\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} &= \widetilde{\frac{\partial \phi}{\partial x}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$