TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02A, 28 abr 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Dado o programa a seguir escrito em Python,

```python
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
h = 0.1                         # passo em x
x = [0.0]                       # x inicial
y = [array([1.0,0.0])]          # y inicial
n = int(10/h)                   # número de passos
def ff(x,y):
    return array([y[0]+y[1],y[0]-y[1]])
def rk4(x,y,h,ff):
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
for i in range(0,n):           # loop da solução numérica
   xn = (i+1)*h
   yn = rk4(x[i],y[i],h,ff)
   x.append(xn)
   y.append(yn)
fou = open('ruk.out','wt')
for i in range(0,n+1):         # imprime o arquivo de saída
   fou.write( '%12.6f %12.6f %12.6f\n' % (x[i],y[i][0],y[i][1]) )
fou.close()
```

qual é o problema que ele resolve? Escreva **todas** as equações que especificam completamente o problema.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 0 \;\blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Se $E = ((1,1,0),(1,-1,0),(0,2,1))$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, obtenha as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$ na base E.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,\\
(1,1,1) &= x(1,1,0) + y(1,-1,0) + z(0,2,1),\\
(1,1,1) &= (x+y, x-y+2z, z),\\
z &= 1,\\
x+y &= 1,\\
x-y &= 1-2 = -1,\\
x &= 0,\\
y &= 1 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e $F = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ uma outra base, onde

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \\
\boldsymbol{f}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1), \\
\boldsymbol{f}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).
\end{aligned}
$$

a) [10] Mostre que F é uma base ortonormal.

b) [15] Calcule a matriz de rotação de E para F.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_1 &= 1, \\
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_2 &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{f}_1 = 0, \\
\boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{f}_3 &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{f}_1 = 0, \\
f_2 \cdot f_2 &= 1, \\
f_2 \cdot f_3 &= 0, \\
f_3 \cdot f_3 &= 1.
\end{aligned}
$$

b)

$$
C_{ij} = \boldsymbol{f}_j \cdot \boldsymbol{e}_i :
$$

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
C_{12} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \\
C_{13} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
C_{21} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
C_{22} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}; \\
C_{23} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0; \\
C_{31} &= \boldsymbol{f}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
C_{32} &= \boldsymbol{f}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}; \\
C_{33} &= \boldsymbol{f}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se

$$\boldsymbol{A} = A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m, \qquad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k,$$

onde $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ é a base canônica, obtenha uma expressão em notação indicial para

$$\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}].$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}] &= A_{lm}\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_m\cdot\epsilon_{ijk}x_iy_j\boldsymbol{e}_k\\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_k)\\
&= A_{lm}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l\delta_{mk}\\
&= A_{lk}x_iy_j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_l \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹