TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 23 Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ________________________

---

1 [20] O arquivo texto `mississipi.dat` possui os dados de vazão média mensal do rio Mississipi em pés cúbicos por segundo entre 1933 e 2016. As 3 primeiras linhas do arquivo são

```
USGS 07010000 00060 75971 1933 1 123300
USGS 07010000 00060 75971 1933 2 93540
USGS 07010000 00060 75971 1933 3 133500
```

e a última linha é

```
USGS 07010000 00060 75971 2016 12 156400
```

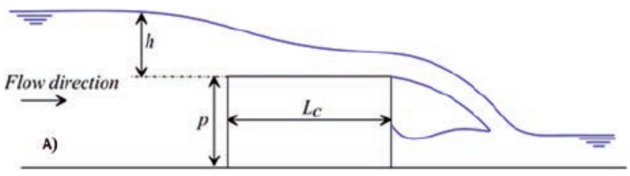
Obviamente, os campos de interesse são os 3 últimos (ano, mês, e vazão média mensal). Escreva um programa em Python **completo** que leia o arquivo e calcule a média de cada mês (sobre todos os anos), e depois imprima no **novo** arquivo texto `mississipi.out` 12 linhas com a vazão média de cada mês para o período 1933–2016. **INDIQUE COM CLAREZA ABSOLUTA A INDENTAÇÃO!!!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
from numpy import array,zeros       # numpy não é essencial, mas é útil
fin = open('mississipi.dat','rt')  # abre o arq de entrada
dmes = zeros(12,float)              # 12 vazões mensais
qq = []                             # lista vazia de vazões ano/mês
for line in fin:                    # loop em todos os dados
   campo = line.split()             # separa os campos
   ano = int(campo[4])              # o ano
   mes = int(campo[5])              # o mês
   vaz  = float(campo[6])           # a vazão média mensal do ano
   print(ano,mes,vaz)               # para ver algo na tela
   dmes[mes-1] = vaz                # guarda a vazão mensal
   if mes == 12:                    # no fim do ano,
      qq.append(dmes)               # inclui na lista qq
   pass
pass
fin.close()                         # fecha o arquivo de saída
qq = array(qq)                      # transf. lista em array
qmed = zeros(12,float)              # vazões médias de longo período
nanos = qq.shape[0]                 # número de anos disponíveis
print(nanos)                        # imprime o número de anos
for m in range(12):                 # loop nos meses
   for i in range(nanos):           # loop nos anos
      qmed[m] += qq[i,m]            # acumula a média mensal
   pass
   qmed[m] /= nanos                 # média sobre o no de anos
pass
fou = open('mississipi.out','wt')  # arquivo de saída
for m in range(12):                 # para cada mês...
   fou.write('%02d %12.4f\n' % (m+1,qmed[m]))     # imprime a média
pass
fou.close()                         # fecha o arquivo de saída
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Uma soleira é um "degrau" em um canal que pode ser usado, entre outras coisas, para medir a vazão. As variáveis de interesse são a vazão volumétrica Q ($\mathsf{L}^3\,\mathsf{T}^{-1}$), a altura p da soleira (L), o seu comprimento L_c (L) , a largura B (do canal **e** da soleira) (L), e a aceleração da gravidade g ($\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}$). Obtenha os parâmetros adimensionais que você espera que descrevam a física do fenômeno.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
No enunciado faltou listar a altura do escoamento acima da soleira, h, como uma das variáveis, mas isso não impede que os outros 3 parâmetros adimensionais sejam encontrados.
A matriz dimensional é

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & Q & g & p & L_c & h & B \\
\hline
\mathsf{L} & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathsf{T} & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array},
$$

cujo posto é 2.
Com 6 variáveis e 2 dimensões fundamentais (L e T), nós esperamos 4 grupos adimensionais. Esses grupos podem ser obtidos sistematicamente fazendo-se:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= Q^{a_1} g^{b_1} p = \frac{g^{1/5} p}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_2 &= Q^{a_2} g^{b_2} L_c = \frac{g^{1/5} L_c}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_3 &= Q^{a_4} g^{b_4} B = \frac{g^{1/5} B}{Q^{2/5}}, \\
\Pi_4 &= Q^{a_3} g^{b_3} h = \frac{g^{1/5} h}{Q^{2/5}} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Obtenha as coordenadas do vetor $(3,4,5)$ na base $((1,0,0),(1,2,0),(1,2,3))$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\alpha(1,0,0)+\beta(1,2,0)+\gamma(1,2,3) &= (3,4,5),\\
(\alpha+\beta+\gamma, 2\beta+2\gamma, 3\gamma) &= (3,4,5),\\
\alpha+\beta+\gamma &= 3,\\
2\beta+2\gamma &= 4,\\
3\gamma &= 5,\\
\alpha &= 1,\\
\beta &= 1/3,\\
\gamma &= 5/3 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] O duplo produto vetorial entre 3 vetores do $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, pode ser definido de duas maneiras:

$$\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \qquad \text{ou} \qquad [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w}.$$

Verifique se elas **são ou não são** equivalentes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \\
&= \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_k; \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a} \\
&= \epsilon_{nkm} u_n a_k \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{nkm} u_n \epsilon_{ijk} v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_n v_i w_j \boldsymbol{e}_m \\
&= u_j v_i w_j \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= u_j w_j v_i \boldsymbol{e}_i - u_i v_i w_j \boldsymbol{e}_j \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \\
&= \epsilon_{ijk} u_i v_j \boldsymbol{e}_k; \\
[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} &= \epsilon_{kmn} b_k w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{kmn} \epsilon_{ijk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) u_i v_j w_m \boldsymbol{e}_n \\
&= u_i v_j w_i \boldsymbol{e}_j - u_i v_j w_j \boldsymbol{e}_i \\
&= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

Portanto, em geral,

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \neq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}, \\
\boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}] \neq [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{w} \; \blacksquare
\end{gathered}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Já sabemos que é possível escrever uma transformação linear na base canônica $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ na forma

$$\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j.$$

Se $\boldsymbol{u} = u_k\boldsymbol{e}_k$ é um vetor do $\mathbb{R}^3$, obtenha

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A}$$

em notação indicial.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{A} &= u_k\boldsymbol{e}_k \cdot A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \\
&= u_k A_{ij}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j \\
&= u_k A_{ij}\delta_{ki}\boldsymbol{e}_j \\
&= u_i A_{ij}\boldsymbol{e}_j \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$