TEA013 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 29 out 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Sabendo que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} &= \frac{1}{s-a},\\
\mathscr{L}\left\{t\right\} &= \frac{1}{s^2},\\
\mathscr{L}\left\{f'(t)\right\} &= s\overline{f}(s) - f(0),
\end{aligned}
$$

e utilizando **obrigatoriamente** a transformada de Laplace, resolva a equação diferencial

$$
\frac{dx}{dt} + \frac{x}{T} = \frac{x_0 t}{T^2}, \qquad x(0) = x_0.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} + \frac{x}{T} &= \frac{x_0 t}{T^2}\\
\overline{x} - x_0 + \frac{\overline{x}}{T} &= \frac{x_0}{(sT)^2}\\
\overline{x}\left(\frac{sT+1}{T}\right) &= x_0\left[\frac{(sT)^2+1}{(sT)^2}\right]\\
\overline{x} &= x_0\frac{1+(sT)^2}{Ts^2(sT+1)} = x_0\left[\frac{2T}{sT+1} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right]\\
&= x_0\left[\frac{2}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{s}\right] \Rightarrow\\
x(t) &= x_0\left[2e^{-\frac{t}{T}} + \frac{t}{T} - 1\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o Teorema da Convolução, calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{f(t)*g(t)\right\} &= \overline{f}(s)\overline{g}(s),\\
\overline{f}(s) &= \frac{1}{s+a} \Rightarrow f(t) = \mathrm{e}^{-at},\\
\overline{g}(s) &= \frac{a}{(s^2+a^2)} \Rightarrow g(t) = \operatorname{sen}(at),\\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right\} &= f(t)*g(t)\\
&= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\operatorname{sen}(a\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \mathrm{e}^{-at}\int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{a\tau}\operatorname{sen}(a\tau)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \frac{1}{2a}\left[\operatorname{sen}(at)-\cos(at)+\mathrm{e}^{-at}\right] \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] O *loop* principal de um método explícito de solução da equação da onda cinemática

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

é

```
old = 0
new = 1
c = 2.0                        # celeridade da onda
cou = c*dt/(dx)                # número de Courant
for n in range(nt):            # loop no tempo
   for i in range(1,nx):       # loop no espaço
      u[new,i] = u[old,i] - cou*(u[old,i] - u[old,i-1])
   u[new,0] = 0.0
   u[new,nx] = 0.0
   u[new].tofile(fou)          # imprime uma linha com os novos dados
```

Preencha as aproximações de derivadas utilizadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \ldots,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \ldots,$$

onde o lado direito deve conter (no máximo) u_i^n, u_{i-1}^n, u_{i+1}^n, u_i^{n+1}, Δt, e Δx.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Considere a seguinte discretização de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(onde $c > 0$ é constante) ($t_n = n\Delta t$; $x_i = i\Delta x$):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}.$$

Faça uma análise completa de estabilidade de von Neumann do esquema em função do número de Courant $\mathrm{Co} = (c\Delta t)/\Delta x$. Descubra se o esquema é incondicionalmente instável, condicionalmente estável, ou incondicionalmente estável. Se o esquema for condicionalmente estável, para que valores de Co ele é estável?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A equação é linear. O esquema é explícito, e temos

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_{i+1}^n - u_i^n\right], \\ u_i^{n+1} &= [1 + \mathrm{Co}]\, u_i^n - \mathrm{Co}u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

Substituindo um modo do erro de arredondamento

$$\epsilon_i^n = \sum_l \xi_l \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l x_i}$$

no esquema de diferenças,

$$\begin{aligned} \xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= [1 + \mathrm{Co}]\, \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x}, \\ \mathrm{e}^{a\Delta t} &= [1 + \mathrm{Co}] - \mathrm{Co}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x}. \end{aligned}$$

Faça

$$\theta = k_l \Delta x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{a\Delta t} &= [1 + \mathrm{Co}] - \mathrm{Co}[\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)] \\ &= [1 + \mathrm{Co}(1 - \cos(\theta))] - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(\theta); \\ \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &= \left[1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - \cos(\theta))^2\right] + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) + \mathrm{Co}^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) + \mathrm{Co}^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \\ &= 1 + 2\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta)) - 2\cos(\theta)\mathrm{Co}^2 + 2\mathrm{Co}^2 \\ &= 1 + 2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2 - \cos(\theta)\left[2\mathrm{Co} + 2\mathrm{Co}^2\right] \\ &= 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)]. \end{aligned}$$

Desejamos

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = 1 + 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)] &\le 1; \\ 2\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right][1 - \cos(\theta)] &\le 0. \end{aligned}$$

Isso é impossível: $[1 - \cos(\theta)] \ge 0$ sempre, assim como $\left[\mathrm{Co} + \mathrm{Co}^2\right]$. O esquema é, portanto, incondicionalmente instável
■

Continue a solução no verso ⟹