TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
FA, 09 Mai 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova.

NOME: GABARITO Assinatura: ______________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

---

1 [25] Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -ku,$$

onde $[\![c]\!] = \mathsf{LT}^{-1}$ e $[\![k]\!] = \mathsf{T}^{-1}$. Discretize-a, com um esquema **totalmente implícito**, **progressivo** no tempo e **centrado** no espaço, obtendo

$$Au_{i-1}^{n+1} + Bu_i^{n+1} + Cu_{i-1}^{n+1} = Du_i^n.$$

Encontre A, B, C e D em função de c, k, Δx e Δt.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} &= -ku_i^{n+1},\\
u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= -k\Delta t u_i^{n+1},\\
(1 + k\Delta t)\, u_i^{n+1} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left[u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\right] &= u_i^n,\\
\frac{c\Delta t}{2\Delta x}u_{i+1}^{n+1} + (1 + k\Delta t)\, u_i^{n+1} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}u_{i-1}^{n+1} &= u_i^n; \Rightarrow\\
A &= \frac{c\Delta t}{2\Delta x},\\
B &= (1 + k\Delta t)\,,\\
C &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x},\\
D &= 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Verifique se

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x,$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções complexas em $[0,1]$, e $w(x) = x - 1$ é uma função real e **não-positiva** em $[0,1]$, é um produto interno legítimo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Para que a operação definida acima seja um produto interno legítmo, ela precisa atender às propriedades definidoras

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle^*,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle,\\
\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle &= \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle,\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle &> 0, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},\\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle &= 0, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 [f(x)g^*(x)w(x)]^*\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\int_0^1 g^*(x)f(x)w(x)\right]^*\\
&= \langle g, f\rangle^*;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, g + h\rangle &= \int_0^1 f^*(x)[g(x) + h(x)]w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f^*(x)h(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha g\rangle &= \int_0^1 f^*(x)[\alpha g(x)]w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \alpha\int_0^1 f^*(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \alpha\langle f, g\rangle;
\end{aligned}$$

Se $f \not\equiv 0$ em $[0,1]$,

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \int_0^1 f^*(x)f(x)w(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \underbrace{|f(x)|^2}_{>0}\,\underbrace{w(x)}_{\leq 0}\,\mathrm{d}x < 0,
\end{aligned}$$

e portanto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ **não** é um produto interno legítimo ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Obtenha a série **trigonométrica** de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le +1. \end{cases}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right];\\
L &= b - a = 1 - (-1) = 2;\\
A_0 &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_0^1 \xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2};\\
A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\cos\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\cos\left(\frac{2\pi n\xi}{2}\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_0^1 \xi\cos\left(\pi n\xi\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2};\\
B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \frac{2}{2}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n\xi}{2}\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_0^1 \xi\operatorname{sen}\left(\pi n\xi\right)\,\mathrm{d}\xi\\
&= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\
\phi(0,t) &= 0,\\
\phi(1,t) &= 1,\\
\phi(x,0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sugestão: As condições de contorno não levam a um problema de Sturm-Liouville em ϕ. Faça $\phi(x,t) = u(x,t) + x$. Substitua $u(x) + x$ na equação diferencial parcial. Agora, você vai obter um problema de Sturm-Liouville a partir de $u(x)$. Prossiga.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\phi(x,t) &= u(x,t) + x,\\
\frac{\partial [u+x]}{\partial t} &= \frac{\partial^2 [u+x]}{\partial x^2},\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\\
u(0,t) &= \phi(0,t) - 0 = 0,\\
u(1,t) &= \phi(1,t) - 1 = 1 - 1 = 0;\\
u(x,t) &= X(x)T(t),\\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= T\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2},\\
\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda;\\
\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \lambda X &= 0,\\
X(0) &= X(1) = 0;\\
\lambda_n &= n^2\pi^2,\\
X_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x);\\
T_n(x) &= \mathrm{e}^{-n\pi t};\\
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t);\\
u(x,0) &= \phi(x,0) - x;\\
-x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x);\\
-x \operatorname{sen}(m\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x);\\
-\int_0^1 x \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x;\\
-\int_0^1 x \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x &= A_m \int_0^1 \operatorname{sen}^2(m\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{A_m}{2};\\
A_m &= -2\int_0^1 x \operatorname{sen}(m\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi};\\
\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\mathrm{e}^{-n\pi t} + x \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO:

Continue a solução no verso ⟹