TT009 Modelos Matemáticos em Engenharia Ambiental I
P4, 23 Mai 2003
Prof. Nelson Luís Dias

NOME: ______________________________ Assinatura: ____________________

IMPORTANTE: Leia atentamente *todas* as questões, e comece pelas mais fáceis para você. Resolva as questões de forma *limpa e organizada*, *nos espaços designados*: o texto fora destes espaços não será considerado na correção. Boa prova.

---

1 [10,0] Encontre a solução geral da equação diferencial

$$2x^2y'' + 2xy' + y = 0$$

na forma $y = Ay_1 + By_2$, onde y_1 e y_2 são duas soluções *reais* e linearmente independentes, e A e B são constantes *reais*.
SOLUÇÃO DA 1ª Questão:

Esta é uma equação de Euler. Tente

$$y = x^m, \tag{1}$$
$$y' = mx^{m-1}, \tag{2}$$
$$y'' = m(m-1)x^{m-2}. \tag{3}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$(2m^2+1)x^m = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i. \tag{4}$$

As soluções portanto são do tipo

$$y = x^{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i} = \exp(\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x), \tag{5}$$

ou seja: há duas soluções LI complexas do tipo

$$y_I = K_1\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right)\right], \tag{6}$$
$$y_{II} = K_2\left[\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right)\right]. \tag{7}$$

Agora, escolha duas constantes complexas

$$K_1 = \frac{A-iB}{2}, \tag{8}$$
$$K_2 = \frac{A+iB}{2} \tag{9}$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ e some y_I e y_{II} para obter, finalmente

$$y = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x\right). \tag{10}$$

Continue a solução no verso ⟹