TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03A, 21 jan dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Obtenha a função de Green de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (\mathrm{tgh}(x))y = f(x), \qquad y(0) = y_0.$$

Atenção! $\mathrm{tgh}(x) = \mathrm{senh}(x)/\cosh(x)$ é a tangente **hiperbólica**. Lembre-se de que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{senh}(x)}{\mathrm{d}x} &= \cosh(x);\\ \frac{\mathrm{d}\cosh(x)}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{senh}(x).\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)(\mathrm{tgh}(\xi))y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\mathrm{tgh}(\xi))y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)(\mathrm{tgh}(\xi))y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\mathrm{tgh}(\xi))G\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Nesse ponto, nós desejamos:

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + (\mathrm{tgh}(\xi))G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Não é uma boa idéia usar transformada de Laplace, por causa da $\operatorname{tgh}(\xi)$; façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$, e prossigamos.

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + (\operatorname{tgh}(\xi))v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -v\operatorname{tgh}(\xi)\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\operatorname{tgh}(\xi)\mathrm{d}\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_0^\xi \operatorname{tgh}(\xi')\,\mathrm{d}\xi'\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\ln(\cosh(\xi))\\
v(x,\xi) &= \frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)};
\end{aligned}
$$

Seguimos para u:

$$
\begin{aligned}
\frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
v(x,0)\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} \mathrm{d}u &= \int_0^\xi \cosh(\eta)\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta\\
v(x,0)\left[u(x,\xi) - u(x,0)\right] &= \cosh(x)H(\xi - x)\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{\cosh(x)}{v(x,0)}H(\xi - x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) &= u(x,0)\frac{v(x,0)}{\cosh(\xi)} + \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}H(\xi - x)\\
&= \frac{G(x,0)}{\cosh(\xi)} + \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}H(\xi - x)\\
&= \frac{1}{\cosh(\xi)}\left[G(x,0) + \cosh(x)H(\xi - x)\right].
\end{aligned}
$$

Isso já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= \frac{1}{\cosh(\infty)}\left[G(x,0) + \cosh(x)\right],\\
G(x,0) &= -\cosh(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \frac{1}{\cosh(\xi)}\left[-\cosh(x) + \cosh(x)H(\xi - x)\right]\\
&= \frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)}\left[-1 + H(\xi - x)\right]\\
&= -\left[1 - H(\xi - x)\right]\frac{\cosh(x)}{\cosh(\xi)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Mostre que

$$x > \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0,$$

ou seja: que não é possível encontrar nenhum $x > 0$ tal que

$$x = \operatorname{tgh}(x).$$

Sugestão: mostre que

$$\begin{aligned} E(x) &= x - \operatorname{tgh}(x) \\ &= \frac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as séries de Taylor

$$\begin{aligned} x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

encontre a expressão para a_{2n+1} em

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

(atenção para o início do somatório em $n = 1$: por quê?) Qual é o sinal de a_{2n+1} na expressão acima? Qual é o sinal de $E(x)$? Por que isso prova que $x > \operatorname{tgh}(x)$ para $x > 0$?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}; \\ \operatorname{senh}(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}; \\ \cosh(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}; \\ E(x) &= x - \operatorname{tgh}(x) \\ &= x - \frac{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}} \\ &= x - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2n+1)-2}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}; \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_{2n+1} = \frac{4n}{(2n+1)!}.$$

Mas $a_1 = 0$, donde

$$E(x) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Para $n \geq 1$, $a_{2n+1} > 0$, assim como x^{2n+1} (pois $x > 0$), de maneira que o numerador da expressão acima é positivo; o denominador também é, e consequentemente $E(x) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} x - \operatorname{tgh}(x) &> 0; \\ x &> \operatorname{tgh}(x), \qquad \forall x > 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [25] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) + y'(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

Discuta os sinais de λ, e obtenha as equações transcedentais (ou os valores) para **todos** os autovalores (uma equação transcedental é uma equação que não pode ser resolvida algebricamente). Você pode usar o resultado da questão **2**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discutimos os sinais:
$\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x),\\ y'(x) &= \sqrt{-\lambda}\left[B\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + A\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x)\right].\end{aligned}$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$\begin{aligned} A + \sqrt{-\lambda}B &= 0,\\ \cosh(\sqrt{-\lambda})A + \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda})B &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & +\sqrt{-\lambda} \\ \cosh(\sqrt{-\lambda}) & \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para termos $(A, B) \neq (0, 0)$, é necessário que

$$\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) - \sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Para economizar lápis: $\xi = \sqrt{-\lambda} > 0$, e

$$\begin{aligned} \mathrm{senh}(\xi) - \xi\cosh(\xi) &= 0,\\ \mathrm{tgh}(\xi) &= \xi,\end{aligned}$$

que não possui soluçao para $\xi > 0$, conforme vimos na questão **2**; logo $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.
$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} y &= Ax + B,\\ y' &= A\end{aligned}$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$\begin{aligned} A + B &= 0,\\ A + B &= 0,\end{aligned}$$

donde

$$A = -B,$$

de forma que $\lambda = 0$ é um autovalor, e uma autofunção associada é

$$y_0(x) = x - 1.$$

$\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\ y'(x) &= \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]\end{aligned}$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$\begin{aligned} A + \sqrt{\lambda}B &= 0,\\ \cos(\sqrt{\lambda})A + \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda})B &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & +\sqrt{\lambda} \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, impondo que o determinante seja nulo para permitir $A \neq 0$ e/ou $B \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda_n}) - \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}) &= 0\\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}) &= \sqrt{\lambda_n}\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Encontre $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \qquad \phi(x,0) = f(x).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$
\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(s),\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \operatorname{senh}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= \cosh(s) - 1 \Rightarrow X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1.
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= 0,\\
F(s) &= F(0)\\
\phi(x,t) &= F(0) = f(X(0)) = f(x - \cosh(t) + 1) \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$