

# MECÂNICA DA TURBULÊNCIA

Nelson Luís Dias

Versão: 2023-04-26T13:06:31

©Nelson Luís da Costa Dias, 2021. Todos os direitos deste documento estão reservados. Este documento não está em domínio público. Cópias para uso acadêmico podem ser feitas e usadas livremente, e podem ser obtidas em <https://nldias.github.io> — Ensino. Este documento é distribuído sem nenhuma garantia, de qualquer espécie, contra eventuais erros aqui contidos.

# Sumário

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Notação</b>   | <b>8</b>  |
| <b>1 Introdução</b>  | <b>10</b> |
| 1.1 Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados . . . . .                    | 12        |
| 1.2 Processos estocásticos . . . . .   | 16        |
| 1.3 A decomposição em média e flutuação, e os “postulados” (lemas) de Reynolds . . . . . | 19        |
| 1.4 Dependência estocástica e correlação . . . . .                                       | 20        |
| 1.5 Uma primeira lição sobre isotropia . . . . .   | 22        |
| <b>2 Termodinâmica de uma mistura diluída</b>  | <b>23</b> |
| 2.1 Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell . . . . .                               | 23        |
| 2.2 Mistura diluída de 2 gases ideais . . . . .  | 25        |
| 2.2.1 Equações de estado . . . . .   | 25        |
| 2.2.2 Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal . . . . .                         | 26        |
| 2.2.3 A afinidade de uma mistura de gases ideais . . . . .                               | 28        |
| <b>3 As equações diferenciais de transporte</b>  | <b>30</b> |
| 3.1 Notação indicial . . . . .   | 30        |
| 3.2 Continuidade . . . . .   | 30        |
| 3.3 Misturas . . . . .   | 31        |
| 3.4 Quantidade de movimento . . . . .  | 33        |
| 3.5 Vorticidade . . . . .  | 35        |
| 3.6 Energia . . . . .  | 39        |
| 3.7 Dissipação viscosa . . . . .   | 43        |
| 3.8 Momento angular . . . . .  | 44        |
| 3.9 A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas . . . . .                      | 46        |
| 3.10 O balanço do semiquadrado da temperatura . . . . .                                  | 48        |
| <b>4 As macro e micro escalas da turbulência</b>   | <b>51</b> |
| 4.1 Macro e micro escalas: uma apresentação informal . . . . .                           | 51        |
| 4.2 Uma definição formal das escalas macroscópicas . . . . .                             | 56        |
| 4.3 Uma definição formal das escalas microscópicas . . . . .                             | 58        |
| 4.4 A cascata de energia . . . . .   | 59        |
| 4.5 A função de autocovariância e a microescala de Taylor . . . . .                      | 61        |
| 4.6 Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos . . . . .                      | 62        |
| 4.7 Macro e microescalas de temperatura . . . . .  | 64        |
| 4.8 Escalas macro e microscópicas de temperatura . . . . .                               | 68        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>5</b>  | <b>As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq</b>   | <b>70</b>  |
| 5.1       | O estado hidrostático de referência . . . . .   | 70         |
| 5.2       | O estado de referência na atmosfera . . . . .   | 73         |
| 5.3       | Magnitude das flutuações de densidade . . . . .   | 75         |
| 5.4       | Conservação de massa . . . . .  | 76         |
| 5.5       | Quantidade de movimento . . . . .   | 77         |
| 5.6       | Incompressibilidade: efeitos de pressão e temperatura sobre as flutuações de velocidade . . . . .                 | 82         |
| 5.7       | A correlação pressão-temperatura . . . . .  | 83         |
| 5.8       | As ordens de grandeza da equação para a temperatura . . . . .   | 85         |
| 5.9       | A equação para a temperatura potencial . . . . .  | 91         |
| 5.10      | Os gradientes microscópicos de densidade . . . . .  | 93         |
| <b>6</b>  | <b>As equações de ordem 2</b>   | <b>95</b>  |
| 6.1       | As equações locais de conservação de massa e de quantidade de movimento com a aproximação de Boussinesq . . . . . | 95         |
| 6.2       | As equações para as flutuações e para as covariâncias $\overline{u'_i u'_j}$ . . . . .                            | 96         |
| 6.3       | Energia cinética da turbulência . . . . .   | 99         |
| 6.4       | A semivariância de um escalar . . . . .   | 102        |
| 6.5       | As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2 . . . . .  | 103        |
| 6.6       | Considerações adicionais sobre modelos de fechamento . . . . .  | 105        |
| <b>7</b>  | <b>Soluções laminares das equações de Navier-Stokes</b>   | <b>106</b> |
| 7.1       | Algumas soluções laminares . . . . .  | 106        |
| 7.2       | A Solução de Blasius . . . . .  | 109        |
| 7.2.1     | Espessura de deslocamento . . . . .   | 111        |
| 7.2.2     | A solução de Blasius . . . . .  | 113        |
| 7.2.3     | Blasius: solução numérica . . . . .   | 116        |
| 7.2.4     | Uma alternativa . . . . .   | 119        |
| <b>8</b>  | <b>Camadas-limite turbulentas</b>   | <b>121</b> |
| 8.1       | Escoamento turbulento em um duto . . . . .  | 121        |
| 8.2       | Escoamentos turbulentos com parede rugosa . . . . .   | 127        |
| 8.3       | O regime de transição . . . . .   | 129        |
| 8.4       | A fórmula de Gauckler-Manning . . . . .   | 130        |
| 8.5       | Conclusões . . . . .  | 135        |
| <b>9</b>  | <b>Isotropia no domínio físico</b>  | <b>136</b> |
| 9.1       | Transformações ortogonais . . . . .   | 136        |
| 9.2       | Tensores isotrópicos . . . . .  | 139        |
| 9.3       | Isotropia das equações de Navier-Stokes . . . . .   | 145        |
| <b>10</b> | <b>Turbulence spectra</b>   | <b>149</b> |
| 10.1      | Cross spectra of 4-dimensional stochastic processes . . . . .   | 149        |
| 10.2      | Shell averages . . . . .  | 152        |
| 10.3      | One-dimensional cross-spectra . . . . .   | 153        |
| 10.4      | Taylor's hypothesis and the connection between space and time spectra . . . . .                                   | 153        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>11 A Teoria de Kolmogorov</b>   | <b>156</b> |
| 11.1 Alternativas de descrição da estrutura estocástica da turbulência . . . | 156        |
| 11.2 Isotropia das funções $R_{ij}$ e $D_{ij}$ . . . . .                     | 159        |
| 11.3 Isotropia das funções $\Phi_{ij}$ e $E_e(k)$ . . . . .                  | 163        |
| 11.4 As hipóteses de similaridade de Kolmogorov . . . . .                    | 163        |
| <b>12 Dinâmica espectral</b>   | <b>166</b> |
| 12.1 Equações básicas sem forças de flutuação . . . . .                      | 166        |
| 12.2 Equações espectrais de turbulência . . . . .                            | 167        |
| 12.2.1 Transformadas de Fourier . . . . .                                    | 167        |
| 12.2.2 A transformada de Fourier do termo de cisalhamento . . . . .          | 168        |
| 12.2.3 A eliminação do termo de pressão . . . . .                            | 168        |
| 12.2.4 Médias em $ \mathbf{k} $ ( <i>shell averages</i> ) . . . . .          | 170        |
| 12.2.5 Interpretação física . . . . .  | 171        |
| 12.2.6 Produção e dissipação de energia cinética turbulenta . . . . .        | 173        |
| <b>A Grandezas padrão do ar e da água</b>                                    | <b>174</b> |
| <b>B Constantes físico-químicas</b>  | <b>175</b> |
| <b>C Equação de estado para a água</b>                                       | <b>176</b> |
| <b>Índice Remissivo</b>  | <b>177</b> |

# Lista de Tabelas

---

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa <sup>†</sup> . . . . .           | 26  |
| 8.1 | Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1) . . . . . | 128 |

# Lista de Figuras

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.1  | O experimento de Reynolds (figuras do autor: Reynolds (1883), figuras 3, 4 e 5, pág. 942, e lâmina 73.) . . . . .   | 11  |
| 1.2  | Efeito de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52. Fonte: Wikipedia ( <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg</a> ) . . .                                  | 12  |
| 1.3  | A rua de vórtices de von Kármán, causada pelo vento soprando ao redor das ilhas Juan Fernández, ao largo da costa do Chile (Por Bob Cahalan, NASA GSFC, em domínio público: <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336</a> ) . . . . . | 13  |
| 1.4  | 10 minutos de medições de concentração de CO <sub>2</sub> sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40. . . . .   | 14  |
| 1.5  | Ilustração de um processo estocástico univariado $u(t; \omega)$ : as unidades de $u$ e $t$ são arbitrárias. . . . .   | 17  |
| 4.1  | Expansão súbita em uma tubulação. . . . .   | 52  |
| 4.2  | Escoamento clássico em um tubo com perda de carga. . . . .  | 54  |
| 5.1  | Dependência da pressão de referência $p_r$ e da densidade de referência $\rho_r$ em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude $z$ . . . . .  | 74  |
| 5.2  | Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida . . . . .  | 86  |
| 5.3  | Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C. . . . .   | 86  |
| 7.1  | Escoamento laminar sobre uma placa porosa . . . . .   | 108 |
| 7.2  | A camada-limite laminar . . . . .   | 109 |
| 7.3  | Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento $\theta^*$ . . . . .  | 111 |
| 7.4  | Perfil de velocidade adimensional de Blasius. . . . .   | 119 |
| 8.1  | A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto. . . . .   | 123 |
| 8.2  | Fator de atrito $f$ em função de Re e da rugosidade relativa $z_0/\delta$ em um escoamento turbulento em um duto . . . . .  | 131 |
| 8.3  | Características geométricas de um canal. . . . .  | 132 |
| 9.1  | funções de correlação longitudinal e transversal . . . . .  | 141 |
| 11.1 | Invariantes geométricos em turbulência isotrópica . . . . .   | 159 |
| 11.2 | funções de correlação longitudinal e transversal . . . . .  | 161 |

# Notação

---

Uma grande dificuldade ao escrever este texto foi a enorme quantidade de grandezas diferentes com as quais é necessário tratar. Nós utilizamos ao mesmo tempo grandezas extensivas (em geral escritas com letras maiúsculas) e intensivas (*idem*); variáveis aleatórias e valores observados (realizações) das mesmas, médias turbulentas e flutuações. Diferentes autores encontraram diferentes soluções para denotar com um número limitado de símbolos romanos e gregos um número muito maior de grandezas físicas e suas interpretações e abordagens matemáticas. As soluções que eu encontrei são, como sempre, um compromisso. A notação que utilizo é em parte original, e segue a idéia de ser tão simples quanto possível e ao mesmo razoavelmente clara. No entanto, alguns conflitos de símbolos são inevitáveis, conflitos os quais só podem ser parcialmente aliviados pela notação utilizada. A seguir, são dadas as principais explicações sobre a notação adotada no texto e sobre como lidar com as suas eventuais ambiguidades.

## Variáveis extensivas e intensivas

Variáveis extensivas dizem respeito a um corpo como um todo. *Em geral*, mas não sempre, elas são denotadas por letras maiúsculas em itálico ou caligráficas. Adicionalmente, quantidades vetoriais ou tensoriais são escritas também em negrito. Exemplos são

$\dot{W}$ : a taxa de trabalho realizada sobre um corpo: maiúscula em itálico,

$\mathcal{U}$ : a energia interna total de um corpo: maiúscula caligráfica,

$\mathbf{P}$ : a quantidade de movimento total de um corpo: maiúscula em itálico e negrito.

Variáveis intensivas (definidas em um ponto) e instantâneas *em geral* são indicadas em minúsculas em itálico ou minúsculas caligráficas (com algumas exceções, como no caso da temperatura) ou então em letras gregas minúsculas. Adicionalmente, quantidades vetoriais ou tensoriais são escritas também em negrito. Exemplos:

$u$ : a energia interna específica (por unidade de massa): minúscula caligráfica,

$\mathbf{u}$ : a velocidade vetorial do fluido: minúscula em itálico e negrito,

$T$ : a temperatura: *maiúscula* em itálico (exceção),

$t$ : o vetor de tensões: minúscula em itálico,

$\mathbf{T}$ : o tensor de tensões: maiúscula em itálico e negrito (exceção),

$\rho$ : a densidade: minúscula grega,

$\theta$ : a temperatura potencial: minúscula grega.



## Médias e flutuações turbulentas

A *decomposição de Reynolds* (Reynolds, 1895) é o procedimento padrão para distinguir grandezas às quais preferimos dar um tratamento determinístico (as “médias” de Reynolds) daquelas que necessitam ser modeladas como variáveis aleatórias ou como processos estocásticos (as “flutuações turbulentas”). Talvez a maneira mais antiga (mas ainda extremamente usada em engenharia) seja

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i,$$

onde a barra indica a média, e a linha indica a flutuação, da grandeza  $u_i$ . A honrosa lista de autores que a utilizam inclui Monin e Yaglom (1971, equações 3.3–3.7, p. 207), Richardson (1920), e Stull (1988, equações 2.4.2k, 2.4.3a–c, p. 40–41). Durante muito tempo ela foi minha preferida, mas o seu efeito quando se trabalha com a transformada de Fourier da flutuação,

$$\widehat{u'_i} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x},$$

é feio e particularmente trabalhoso sempre que se escreve as equações espectrais de turbulência à mão. Por isso, vamos omitir a linha do lado direito, e definir (quando necessário)

$$\widehat{u_i} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}.$$

## Variáveis aleatórias e suas realizações

Em teoria de probabilidades, é usual separar uma variável aleatória  $X$  de uma particular realização ou valor de quantil  $x$ ; isto facilita muito escrever coisas do tipo:

$$“P(X \leq x)”$$

é a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  seja menor ou igual que o valor  $x$ ”. Neste texto, entretanto, as letras maiúsculas em geral representam grandezas extensivas. Em particular, as flutuações de velocidade  $u'_i$ , variáveis aleatórias extremamente importantes, são denotadas em letras minúsculas. Infelizmente, não parece possível separar de forma “limpa” o símbolo de uma variável aleatória do símbolo de uma particular realização ou de um quantil. O melhor que pode ser feito é utilizar os argumentos da variável para explicitar a diferença. Assim, voltando à decomposição de Reynolds, em geral teremos

$$u(\mathbf{x}, t; \omega) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) + u'(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Aqui, as variáveis aleatórias são função do elemento  $\omega$  do espaço amostral  $\Omega$ , além de o serem da posição e do tempo. É conveniente imaginar  $\Omega$  como uma urna de sorteio, e  $\omega$  como o particular valor sorteado, que neste caso vai definir uma realização da função aleatória  $u(\mathbf{x}, t; \omega)$ . Para fazer afirmações de probabilidade, nós vamos recorrer a um sobrescrito quando quisermos indicar um valor específico. Desta forma, em lugar do par maiúscula (a variável aleatória) – minúscula (um particular valor), escreveremos

$$“P(x \leq x^\#).”$$

é a probabilidade de que a variável aleatória  $x$  seja menor ou igual que o valor  $x^\#$ ”

# 1

## Introdução

---

Todo autor e todo curso se sente na obrigação de fornecer uma introdução de “largo espectro” ao assunto que vai ser estudado. Este é, efetivamente, o espírito deste primeiro capítulo. O objetivo geral deste curso é proporcionar uma introdução às ferramentas e técnicas de teoria de turbulência úteis em Engenharia. Em um grande número de aplicações, isso acontece em camadas-limite turbulentas.

Para se entender turbulência, é preciso antes de mais nada “vê-la”. Richardson a via como turbilhões, de diversos tamanhos, os maiores “alimentando” os menores num processo “contínuo” até que as flutuações do escoamento fossem amortecidas pela viscosidade. Isso é a essência do processo de *transferência inercial, não-linear, de covariâncias*, conforme veremos neste curso (bem mais à frente).

Portanto os pioneiros, Richardson, Taylor e Kolmogorov, tinham uma clara noção de que existem “estruturas”, “pedaços” ou “entes” num escoamento turbulento em um *continuum* de escalas, e que o próprio conceito de “escala” é essencial para a compreensão da turbulência.

No entanto, *escala* é um conceito “físico” ou “fenomenológico”, cuja exata definição matemática em termos dos campos de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  ou de escalares tais como a temperatura  $T(\mathbf{x}, t)$  é consideravelmente difícil, senão impossível. Mesmo assim, é possível identificar diferentes escalas com diversas ferramentas matemáticas, tais como:

- Análise espectral (provavelmente a mais antiga).
- Funções empíricas ortogonais.
- Diferentes algoritmos para a identificação de estruturas e sua decomposição.
- Ondeletas (*Wavelets*).

Essas “estruturas” de diversos tamanhos realmente existem em um escoamento turbulento, mas nós devemos ser cuidadosos em não equacioná-las demais (nem de menos!) com uma particular técnica matemática de identificá-las: veja [Robinson \(1991\)](#).

Várias fotografias e figuras coloridas interessantes existem no livro sobre turbulência de Lesieur ([1990](#)), e também no de Frisch ([1995](#)): dê uma olhada nelas.

Existem algumas estruturas e alguns problemas clássicos relacionados um pouco à instabilização de escoamentos, que estão relacionados com a questão de turbulência:

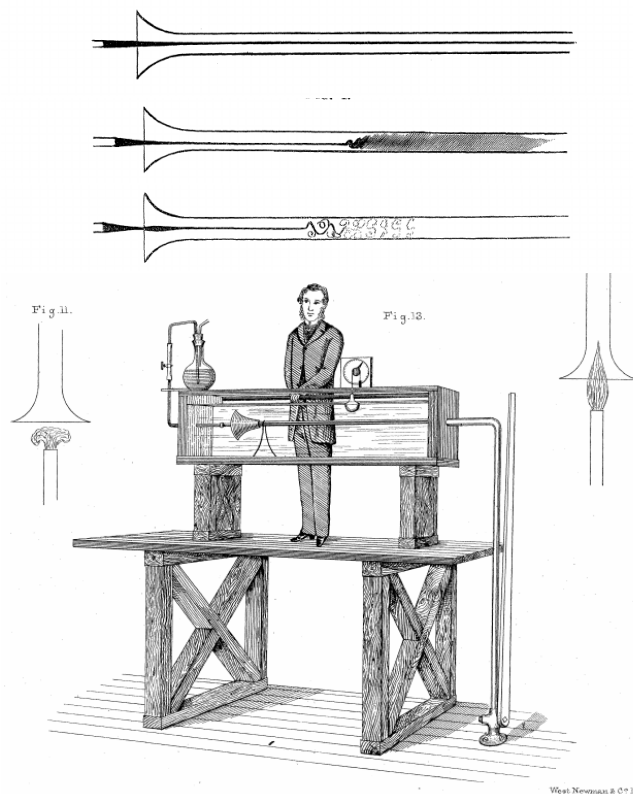


Figura 1.1: O experimento de Reynolds (figuras do autor: [Reynolds \(1883\)](#), figuras 3, 4 e 5, pág. 942, e lâmina 73.)

- O experimento de Reynolds: a forma “clássica” de apresentar a turbulência em cursos de graduação, ele ainda conserva um considerável charme e didatismo: aumentado-se gradualmente a velocidade média em um tubo em que se injeta, no centro, um corante, atinge-se um ponto, em torno do número de Reynolds

$$Re_D = \frac{\rho V D}{\mu} \sim 2000,$$

( $\rho$  é a massa específica do fluido,  $V$  é a velocidade média,  $D$  é o diâmetro do tubo e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica) em que o escoamento se desestabiliza e se torna turbulento. A figura 1.1 mostra ilustrações do próprio Reynolds sobre o seu experimento.

- A “Rua de vórtices de von Kármán” (*Kármán vortex street*) (ver figura 1.3).
- Jatos e esteiras
- Turbulência atrás de uma grade em um túnel de vento (*grid turbulence*).

A turbulência é ao mesmo tempo um fenômeno de grande interesse teórico e grande importância prática. A figura 1.2, por exemplo, mostra o efeito de um episódio de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52 (um avião consideravelmente grande e resistente).



Figura 1.2: Efeito de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52. Fonte: Wikipedia ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing\\_B-52\\_with\\_no\\_vertical\\_stabilizer.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg))

## 1.1 – Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados

Nós estamos acostumados a identificar diversos fenômenos à nossa volta como “aleatórios”: jogos de azar, envolvendo dados e cartas, e loterias, são talvez os mais comuns. Nós percebemos aleatoriedade também, entretanto, em fenômenos que envolvem *física*: por exemplo, a velocidade de uma molécula em um gás, as condições do tempo, e também em numerosos fenômenos de escoamento de fluidos, tais com a superfície de um mar revolto e, é claro, escoamentos turbulentos.

A figura 1.4 é um exemplo disso: ela mostra a medição da densidade  $\rho_c$  de  $\text{CO}_2$  a cerca de 2 m acima do solo, durante 10 minutos, sobre um gramado. A natureza errática de  $\rho_c$  é inegável, e sugere que existe um componente aleatório na turbulência.

Tratar um fenômeno como aleatório em geral é mais simples do que tentar descrevê-lo em todos os seus detalhes, o que pode levar a uma complexidade analítica ou computacional insuperável. Por exemplo, em princípio nós poderíamos usar as equações da dinâmica de corpos rígidos para tentar prever o resultado do lançamento de um dado. Isso entretanto envolve conhecer em detalhes como o lançamento é feito; a resistência do ar durante a sua queda; a natureza da superfície em que ele cai, etc.. Na prática, o esforço para modelar *cada* lançamento individual é injustificável, e é preferível descrever o processo como probabilístico, com 1/6 de probabilidade de ocorrência do número de cada face.

A situação com turbulência é parecida: nós acreditamos que a turbulência é uma manifestação (ou uma *realização*) das equações de Navier-Stokes, as equações diferenciais *determinísticas* que regem o escoamento de um fluido. No entanto, os detalhes associados com a definição das condições iniciais e de contorno, assim como com a solução propriamente dita dessas equações não-lineares, são tão formidáveis que alternativas a um ataque direto, e (até o momento) infrutífero, são necessárias. A teoria sobre probabilidades e processos estocásticos é um elemento essencial de qualquer abordagem minimamente bem-sucedida ao problema de turbulência.

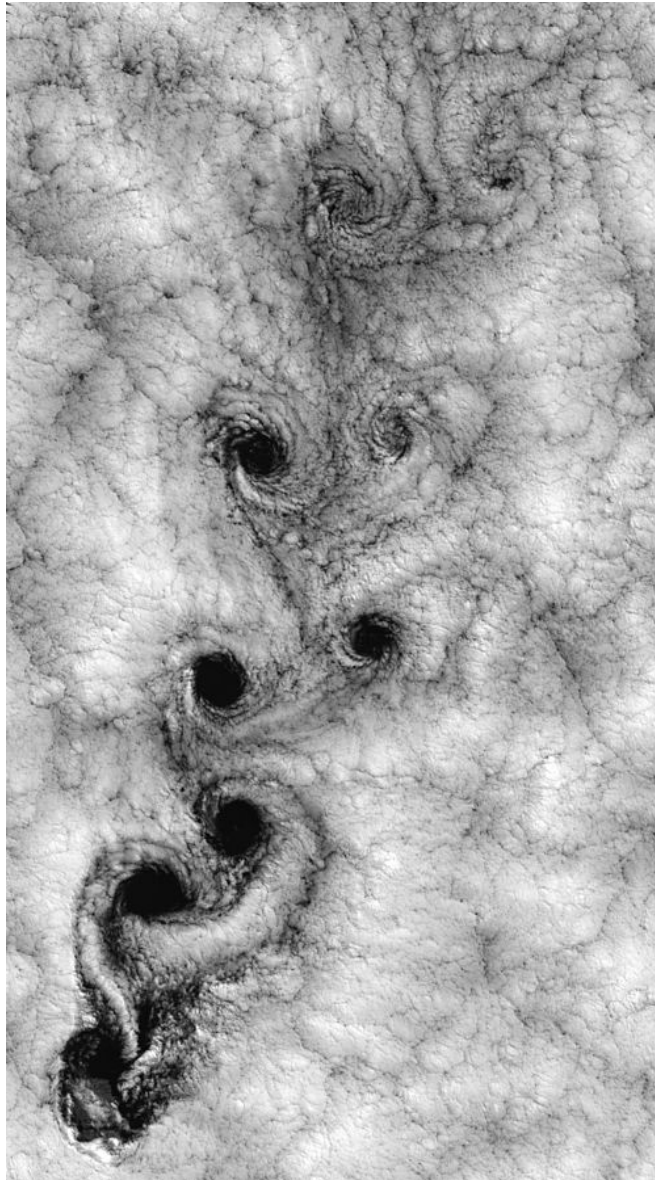


Figura 1.3: A rua de vórtices de von Kármán, causada pelo vento soprando ao redor das ilhas Juan Fernández, ao largo da costa do Chile (Por Bob Cahalan, NASA GSFC, em domínio público: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336>)

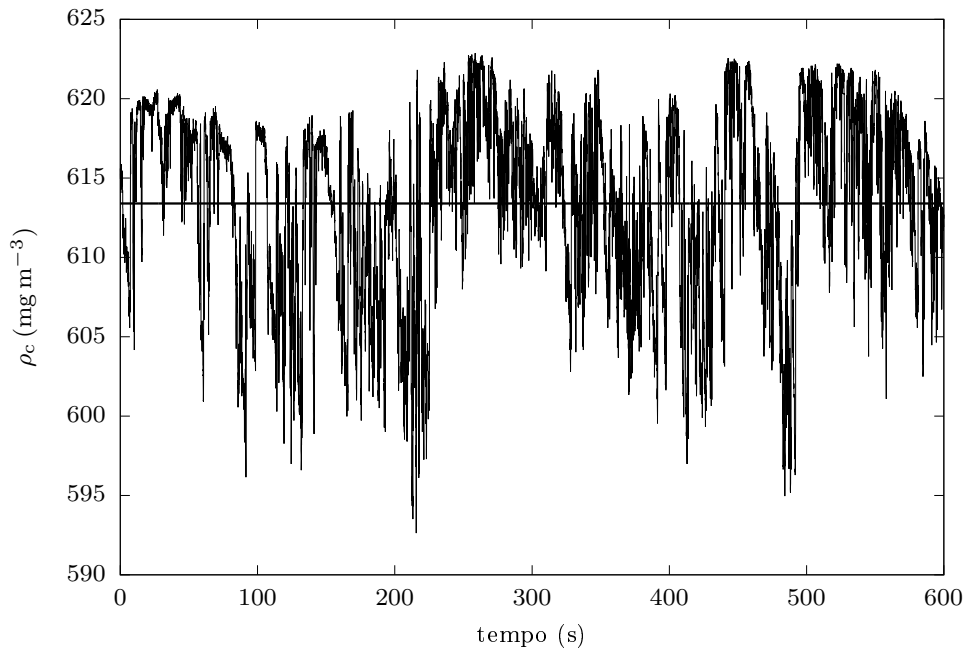


Figura 1.4: 10 minutos de medições de concentração de  $\text{CO}_2$  sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40.

A melhor abordagem, que todos adotamos modernamente, para a teoria de probabilidade é devida a A. N. Kolmogorov, sendo chamada de “abordagem axiomática”. Ela é consideravelmente mais elegante do que a alternativa anterior, histórica, de definir probabilidade como um limite da frequência empírica com que um resultado (um “evento”) é observado. Uma abordagem elementar mas muito clara pode ser encontrada em [Papoulis \(1991, capítulo 2\)](#); em ordem crescente de rigor (mas inevitavelmente, também de dificuldade), outras abordagens podem ser encontradas em [James \(1981\)](#), [Rosenthal \(2008\)](#) e [Billingsley \(1986\)](#).

A essência da abordagem axiomática de Kolmogorov é postular a existência de uma *tripla de probabilidade*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ([Rosenthal, 2008, capítulo 2](#)):

- $\Omega$  é um conjunto, denominado *espaço amostral*.
- $\mathcal{F}$  é um campo, um conjunto formado por sub-conjuntos de  $\Omega$ . Mas não *todos* os subconjuntos! (Mais sobre isso em um instante). Em linguagem matemática muito técnica,  $\mathcal{F}$  é uma álgebra  $\sigma$ , ou um campo  $\sigma$ .
- $P$  é a medida de probabilidade, que dá, para cada  $A \in \mathcal{F}$ , a probabilidade do ocorrência do conjunto — ou melhor, do *evento* —  $A$ . Mais especificamente,  $P$  é uma função do tipo

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A) \in [0, 1].$$

O segredo (e o enorme problema) da coisa é que  $\mathcal{F}$  *não* é, em geral, igual ao conjunto de todos os sub-conjuntos de  $\Omega$ . Ele é formado apenas pelos conjuntos  $A \subseteq \Omega$  para os quais é possível definir  $P(A)$  (para mais detalhes, veja a excelente exposição de [Rosenthal \(2008, capítulo 1\)](#)).



Dentro dessa abordagem, uma *variável aleatória* VA é agora, a função *mensurável*  $u(\omega)$ :

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\mapsto u = u(\omega). \end{aligned}$$

Por definição, uma função  $u(\omega)$  é mensurável se

$$\{\omega \in \Omega \mid u(\omega) \leq u^\# \} \in \mathcal{F}, \quad u^\# \in \mathbb{R}$$

(Rosenthal, 2008, capítulo 3).

A pergunta mais importante do ponto de vista prático é: qual é a probabilidade de ocorrência de um certo intervalo de *valores* de  $u(\omega)$ ? A resposta é dada com a definição da *função de distribuição* de  $u$ ,  $F(u^\#)$ :

$$F(u^\#) \equiv P\left(\{\omega \mid u(\omega) \leq u^\#\}\right). \quad (1.1)$$

Em particular, fica então evidente que é necessário que  $u(\omega)$  seja mensurável para que  $F(u^\#)$  possa ser definida em termos da medida de probabilidade  $P$ .

Talvez o descriptor mais comum de uma VA seja a sua média probabilística, ou valor esperado. Ela é dada por uma integral de  $u(\omega)$  sobre  $\Omega$ , a saber

$$\bar{u} \equiv \int_{\Omega} u(\omega) dP(\omega). \quad (1.2)$$

A definição das integrais do tipo (1.2) é tecnicamente muito elaborada, e passa por um assunto denominado *teoria da medida*; talvez um tratado definitivo sobre o tema, em conexão com a teoria de probabilidade, seja Billingsley (1986). Em Engenharia, nós estamos normalmente acostumados com o cálculo de integrais sobre intervalos de números reais, e não em conjuntos mais genéricos e abstratos tais como  $\Omega$  (cuja natureza sequer foi definida acima!). Felizmente, vem em nosso auxílio o seguinte teorema, que nós citamos sem prova (Rosenthal, 2008, Teorema 6.1.1):

**Teorema de mudança de variáveis:** Dada uma tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , seja  $u$  uma variável aleatória com medida de probabilidade  $P$  e distribuição  $F$ . Então, para qualquer função mensurável  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\Omega} g(u(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF(t). \quad (1.3)$$

Observações:

1. O teorema (1.3) é também a definição do valor esperado de uma função  $g(U)$ :

$$\overline{g(u)} \equiv \int_{\Omega} g(u(\omega)) dP(\omega). \quad (1.4)$$

2. Em particular, quando  $g(t) = t$  (a identidade), nós obtemos a expressão para o valor esperado, ou média probabilística, de  $u$ :

$$\bar{u} = \int_{\mathbb{R}} u dF(u). \quad (1.5)$$

3. Analogamente, a variância de  $u$  é

$$\text{Var}\{u\} \equiv \overline{(u - \bar{u})^2} = \int_{\mathbb{R}} (u - \bar{u})^2 dF(u). \quad (1.6)$$

4. Finalmente, se  $F(u)$  for diferenciável, e se existir a *função densidade de probabilidade*

$$f(u) \equiv \frac{dF}{du}, \quad (1.7)$$

segue-se que

$$\bar{u} = \int_{\mathbb{R}} u f(u) du. \quad (1.8)$$

Esta última definição de  $\bar{u}$  talvez seja a mais comum em cursos introdutórios de probabilidade.

**Distribuições conjuntas de variáveis aleatórias** Uma variável aleatória pode ter mais de uma “componente” ou, o que dá no mesmo, podemos considerar distribuições conjuntas de duas ou mais VAs. Isso pode ser formalizado (para duas variáveis com distribuição conjunta) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u, v); \\ \mathbf{u} : \omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \in \Omega &\mapsto (u(\omega), v(\omega)). \end{aligned}$$

Assim como antes, a função de distribuição de  $\mathbf{u}$  pode ser definida:

$$F(u^\#, v^\#) \equiv P\left(\left\{\omega \mid (u(\omega) \leq u^\#) \wedge (v(\omega) \leq v^\#)\right\}\right)$$

Da mesma forma, para um vetor de variáveis aleatórias no  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F(u_1^\#, \dots, u_n^\#) \equiv P\left(\left\{\omega \mid (u_1(\omega) \leq u_1^\#) \wedge \dots \wedge (u_n(\omega) \leq u_n^\#)\right\}\right).$$

O cálculo de médias, variâncias, etc., estende-se naturalmente às funções de distribuição conjuntas. Por exemplo, a média de  $u$  em uma distribuição bivariada de  $(u, v)$  é

$$\bar{u} = \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{v \in \mathbb{R}} u dF_{u,v}(u, v),$$

e a *covariância* entre  $u$  e  $v$  é

$$\text{Cov}\{u, v\} \equiv \overline{(u - \bar{u})(v - \bar{v})} = \int_{u \in \mathbb{R}} \int_{v \in \mathbb{R}} (u - \bar{u})(v - \bar{v}) dF_{u,v}(u, v).$$

## 1.2 – Processos estocásticos

Com as ferramentas da seção anterior, nós agora definimos brevemente o que são *processos estocásticos*: Seja  $\mathbb{F}$  o espaço das funções de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , e  $t \in \mathbb{R}$ , em  $\mathbb{R}$ . Um processo estocástico é uma função

$$\begin{aligned} u : \Omega &\rightarrow \mathbb{F} \\ \omega &\mapsto u(\mathbf{x}, t; \omega). \end{aligned}$$





Figura 1.5: Ilustração de um processo estocástico univariado  $u(t; \omega)$ : as unidades de  $u$  e  $t$  são arbitrárias.

Em outras palavras, a cada “sorteio”  $\omega$ , em vez de o resultado do sorteio ser um número real (que é a definição de VA), o resultado do sorteio agora é uma função completa  $u$  de  $x$  e  $t$ . Nós dizemos que  $u$  é uma *função aleatória* (note que não há contradição nessa terminologia!). O significado de um processo estocástico está esboçado graficamente na figura 1.5. Por simplicidade, na figura a função aleatória depende apenas de uma variável ( $t$ ).

A figura 1.5 dá um exemplo da idéia de um *conjunto de realizações* da variável  $u(t)$  (na literatura de língua inglesa, um *ensemble*). Para que as médias de  $u$  façam sentido, é preciso que elas sejam tomadas sobre todos os “membros” do conjunto. Note entretanto que é exatamente isso o que faz a definição de valor esperado (1.2): o papel de um “membro” do conjunto é desempenhado por um particular  $\omega \in \Omega$ .

Nossa definição de processo estocástico é extraordinariamente geral. Muito frequentemente, é preciso impor restrições a um processo estocástico para que resultados úteis em Turbulência (ou em qualquer outro campo de aplicação de processos estocásticos) possam ser obtidos. Algumas dessas restrições, muito úteis e frequentes em Turbulência, são discutidas a seguir.

**Processos estacionários e homogêneos** Considere por simplicidade um processo estocástico  $U(t; \omega)$  em que cada realização  $u(t; \omega^\#)$  ocorre apenas em  $t$  (a generalização para  $u(x, t; \omega)$  será óbvia). Neste curso, a variável  $t$  é *contínua* (note entretanto que processos estocásticos em que a variável  $t$  é discreta são perfeitamente possíveis, e eventualmente úteis também em turbulência). Independentemente disso, é sempre possível produzir sub-conjuntos discretos de  $n$  instantes de tempo,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , e para cada um desses sub-conjuntos (dos quais há infinitos) considerar a distribuição conjunta de probabilidade

$$F_{u(t_1), \dots, u(t_n)}(u_1^\#, \dots, u_n^\#).$$

Nós dizemos que o processo é *estacionário* se essa distribuição for *invariante* sob uma translação  $\tau$  dos instantes de tempo, ou seja, se

$$F_{u(t_1), \dots, u(t_n)}(u_1^\#, \dots, u_n^\#) = F_{u(t_1+\tau), \dots, u(t_n+\tau)}(u_1^\#, \dots, u_n^\#)$$

para *todos* os subconjuntos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  possíveis.

Alguns casos particulares dessa definição nos ajudam a entender, na prática, o que significa a estacionariedade do processo. Por exemplo, considere o caso  $n = 1$ , e a média probabilística do processo em dois instantes,  $u(t_1)$  e  $u(t_2)$ . Então (se o processo for estacionário), fazendo  $\tau = t_2 - t_1$ , e observando que  $F_{u(t_1)} = F_{u(t_2)}$ ,

$$\begin{aligned} \overline{u(t_1)} &= \int u \, dF_{u(t_1)} \\ &= \int u \, dF_{u(t_1+\tau)} \\ &= \int u \, dF_{u(t_2)} = \overline{u(t_2)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Em outras palavras, em um processo estocástico estacionário, a média não muda com o tempo. O mesmo ocorrerá com a variância, cuja prova deixamos para o leitor:

$$\text{Var}\{u(t_1)\} = \text{Var}\{u(t_2)\}.$$

Esses dois fatos são facilmente identificáveis nas realizações de um processo estocástico mostradas na figura 1.5: *visualmente*, não percebemos nenhuma “tendência” de mudança da média nem no “espalhamento” dos valores em torno da média ao longo do tempo.

Uma função particularmente importante para nós será a *função de autocovariância*. Em um processo estocástico estacionário, a média probabilística é constante. Consequentemente, é trivial subtrair essa constante e trabalhar com um processo cuja média é zero. Seja então  $u(t; \omega)$  com  $\overline{u(t; \omega)} = 0$ . A *função de autocovariância* de  $u(t; \omega)$  é definida (para o caso de média zero!) por

$$C_{uu}(t_1, t_2) \equiv \overline{u(t_1)u(t_2)}. \quad (1.9)$$

Como o processo é estacionário, e fazendo-se  $\tau = t_2 - t_1$ ,

$$\begin{aligned} \overline{u(t_1)u(t_2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \, dF_{u(t_1), u(t_2)}(u_1, u_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \, dF_{u(t_1-t_1), u(t_2-t_1)}(u_1, u_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u_1 u_2 \, dF_{u(0), u(\tau)}(u_1, u_2) \\ &= \overline{u(0)u(\tau)}. \end{aligned}$$

A função de autocovariância de um processo estocástico *estacionário*, portanto, é a rigor uma função de uma única variável: a *defasagem*  $\tau$  entre os valores de  $u$  em dois instantes. Para processos estacionários, portanto, uma definição equivalente da função de autocovariância é

$$C_{uu}(\tau) \equiv \overline{u(t)u(t+\tau)}. \quad (1.10)$$

Definições análogas podem ser feitas para processos estocásticos no espaço. O conceito análogo ao de estacionariedade no tempo é o de homogeneidade no espaço; quando a função de distribuição multivariada em um conjunto (arbitrário) de pontos  $x_1, \dots, x_n$  é invariante sob uma translação  $\mathbf{r}$  no espaço nós dizemos que o processo é *homogêneo*: se  $u(\mathbf{x})$  é um processo homogêneo no espaço (aqui, por simplicidade em uma dimensão  $x$ ) com  $\bar{u} = 0$ , então

$$C_{uu}(r) \equiv \overline{u(\mathbf{x})u(\mathbf{x} + \mathbf{r})}. \quad (1.11)$$

### 1.3 – A decomposição em média e flutuação, e os “postulados” (lemas) de Reynolds

De agora em diante nós vamos postular que em um escoamento turbulento cada variável  $u_i$  é um processo estocástico do tipo

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, t; \omega). \quad (1.12)$$

Como vimos na seção 1.2, uma *realização* do processo é uma função de  $\mathbf{x}$  e  $t$  observada para um particular  $\omega$ , ou ainda: cada  $\omega$  corresponde a uma *realização diferente* do processo estocástico subjacente.

Dada uma variável  $u_i$  em um escoamento turbulento, a *decomposição de Reynolds* consiste em escrever

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i. \quad (1.13)$$

Uma das principais utilidades da decomposição de Reynolds é separar o escoamento em uma variável determinística  $\bar{u}_i$  (que pode ou não variar no espaço e no tempo) e em uma *flutuação turbulenta*  $u'_i$ , que é uma VA com valor esperado nulo. De fato, por definição (ver (1.2)) temos que

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega). \quad (1.14)$$

Note que  $\bar{u}_i$  é determinística *por definição*. A média de população de  $u'_i$  então será

$$\begin{aligned} \overline{u'_i} &= \overline{u_i - \bar{u}_i} \\ &= \int_{\omega \in \Omega} (u_i(\mathbf{x}, t; \omega) - \bar{u}_i(\mathbf{x}, t)) dP(\omega) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) - \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) - \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Infelizmente, (1.15) está longe de garantir que  $u'_i$  seja um processo estocástico estacionário e/ou homogêneo. Por exemplo, nada está dito sobre a dependência (ou não) em  $\mathbf{x}$  e em  $t$  dos momentos de ordem 2 do tipo  $\overline{u'_i u'_j}$ . Entretanto, ela já é um começo, e pelo menos ela permite separar os efeitos de uma velocidade média com variação local muito forte, como é o caso de camadas-limite turbulentas com forte cisalhamento.

Utilizando (1.13) e (1.14), nós provaremos agora os demais “postulados” de Reynolds:

$$\bar{\bar{u}_i} = \int_{\omega \in \Omega} \bar{u}_i(\mathbf{x}, t) dP(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{u_i}(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\
&= \overline{u_i}(\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i \overline{u_j}} &= \int_{\omega \in \Omega} u'_i(\mathbf{x}, t; \omega) \overline{u_j}(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\
&= \overline{u_j}(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} u'_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \\
&= \overline{u_j} \overline{u'_i} = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Finalmente, as derivadas em relação a  $x_i$  e a  $t$  comutam com a operação de média probabilística:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} &= \int_{\omega \in \Omega} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t; \omega)}{\partial t} dP(\omega) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \right] \\
&= \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

A prova do resultado para as derivadas parciais em relação a  $x_i$ ,

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{1.19}$$

é similar à prova de (1.18), e é deixada para o leitor.

O conjunto de relações (1.15)–(1.19) é usualmente conhecido na literatura com o nome de *postulados de Reynolds*. À luz da sua dedução razoavelmente rigorosa acima, o nome mais adequado talvez fosse *lemas de Reynolds*.

## 1.4 – Dependência estocástica e correlação

Duas variáveis aleatórias  $u$  e  $v$  são *independentes* quando

$$F_{u,v}(u^\#, v^\#) = F_u(u^\#)F_v(v^\#) \tag{1.20}$$

Se duas variáveis  $u$  e  $v$  são independentes, é relativamente fácil provar que

$$\overline{uv} = \overline{u} \overline{v}. \tag{1.21}$$

Também é fácil provar que se um processo estocástico é estacionário,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} &= 0, \\
\overline{u \frac{\partial u}{\partial t}} &= 0, \\
\overline{\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial t}} &= 0, \\
\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial t}} &= 0 \blacksquare
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Ou seja: a covariância entre um processo estocástico estacionário e sua flutuação é nula. O mesmo vale para processos homogêneos no espaço. Na penúltima linha acima, usamos o fato de que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$$

para um processo estacionário.

Vamos a partir de agora trabalhar apenas com as flutuações turbulentas  $u'$  e  $v'$  de duas variáveis genéricas. Suponha que  $u'$  e  $v'$  sejam dois processos estocásticos estacionários, com médias de população nulas, variâncias unitárias (por simplicidade:  $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = 1$ ) e correlacionados.

Vamos supor um modelo muito simples de dependência estocástica:

$$\frac{du'}{dt} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{u'}{2} + \frac{rv'}{2} + \epsilon_u \right], \quad (1.23)$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{v'}{2} + \frac{ru'}{2} + \epsilon_v \right]. \quad (1.24)$$

onde  $r$  é uma constante adimensional, e  $\epsilon_u$  e  $\epsilon_v$  ruídos brancos: variáveis aleatórias com média zero, variância unitária, e com correlação nula entre si e com  $u$  e  $v$ .  $T$  é um tempo característico do sistema. Repare que ele é necessário para que (1.23)–(1.24) sejam dimensionalmente consistentes, assim como o requerimento de que  $\llbracket \epsilon_u \rrbracket = \llbracket u \rrbracket = \llbracket v \rrbracket = \llbracket \epsilon_v \rrbracket$ .

É importante enfatizar que (1.23)–(1.24) estão longe de constituírem um bom modelo para as flutuações de velocidade em um escoamento turbulento, governadas pelas equações de Navier-Stokes. Por exemplo, ao contrário de Navier-Stokes, elas são lineares. Mesmo assim, elas têm algumas propriedades desejáveis. Por exemplo, assim como ocorre com as equações de Navier-Stokes, (1.23)–(1.24) são simétricas em  $u', v'$  (elas não mudam se permutarmos  $u'$  com  $v'$ ). Além disso, o processo estocástico  $(u'(t, \omega), v'(t, \omega))$  que elas descrevem é estacionário. Portanto, há algumas coisas que podemos aprender, mesmo com esse modelo simples.

Multiplicando (1.23) por  $v'$ ; (1.24) por  $u'$ , e promediando,

$$\overline{v' \frac{du'}{dt}} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\overline{v'u'}}{2} + \frac{\overline{rv'^2}}{2} + \overline{v'\epsilon_u} \right], \quad (1.25)$$

$$\overline{u' \frac{dv'}{dt}} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\overline{u'v'}}{2} + \frac{\overline{ru'^2}}{2} + \overline{u'\epsilon_v} \right]. \quad (1.26)$$

Mas

$$\begin{aligned} \overline{v'^2} &= \overline{u'^2} = 1, \\ \overline{v'\epsilon_u} &= \overline{u'\epsilon_v} = 0; \end{aligned}$$

portanto, somando-se as equações em  $\overline{v' \frac{du'}{dt}}$  e  $\overline{u' \frac{dv'}{dt}}$ ,

$$\frac{d\overline{u'v'}}{dt} = \frac{1}{T} \left[ -\overline{u'v'} + r \right].$$

Como o processo é estacionário, o lado esquerdo acima é nulo. Portanto,

$$\overline{u'v'} = r; \quad (1.27)$$

em outras palavras, (1.23)–(1.24) descrevem um processo estocástico em que o coeficiente de correlação entre  $u'$  e  $v'$  é  $r$ . Substituindo (1.27), agora, em (1.31)–(1.26), encontramos

$$\overline{v' \frac{du'}{dt}} = 0, \quad (1.28)$$

$$\overline{u' \frac{dv'}{dt}} = 0. \quad (1.29)$$

Com esse pequeno exercício, portanto, nós exibimos um processo estocástico estacionário bivariado com algumas (poucas!) propriedades em comum com as flutuações de velocidade produzidas pelas equações de Navier-Stokes em que as covariâncias/correlações cruzadas entre as duas componentes são nulas.

Em escoamentos turbulentos de grande importância na natureza e em sistemas de engenharia, é comum encontrar situações em que duas variáveis  $u'$ ,  $v'$  que representam flutuações turbulentas são razoavelmente bem correlacionadas, sendo o seu coeficiente de correlação um valor entre (digamos) 0,1 e 1,0. Neste caso, mesmo que a dinâmica de  $u'$  e  $v'$  seja consideravelmente mais complicada que (1.23)–(1.24), ainda é razoável escrever

$$v' = ru' + \sqrt{1 - r^2} \sigma_v \epsilon_v \quad (1.30)$$

onde  $\epsilon_v$  é uma variável com média zero, desvio-padrão um, e independente de  $u'$ . Agora,

$$\begin{aligned} \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial t}} &= \overline{\left[ ru' + \sqrt{1 - r^2} \sigma_v \epsilon_v \right] \frac{\partial u'}{\partial t}} \\ &= \overline{ru' \frac{\partial u'}{\partial t}} + \underbrace{\sqrt{1 - r^2} \sigma_v \overline{\epsilon_v \frac{\partial u'}{\partial t}}}_{=0} \\ &= \overline{ru' \frac{\partial u'}{\partial t}}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Isso justifica de uma forma prática (e semi-empírica) que ao longo do texto nós suponhamos, para duas variáveis quaisquer  $u'$  e  $v'$ , as seguintes *ordens de grandeza* para as derivadas a seguir:

$$\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial t}} \sim \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial t}}, \quad (1.32)$$

$$\overline{v' \frac{\partial u'}{\partial x_i}} \sim \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x_i}} \quad (1.33)$$

sempre que necessário, uma vez que tipicamente o lado direito das equações acima é em geral muito mais fácil de se estimar analiticamente do que o lado esquerdo. O símbolo  $\sim$  em (1.32)–(1.33) significa “é da mesma ordem de grandeza que”, e é discutido de forma mais aprofundada a partir da seção 4.1.

## 1.5 – Uma primeira lição sobre isotropia

Coisas a fazer

Defina isotropia em um ponto. Discuta a natureza eminentemente cinemática do conceito de isotropia. Relacione isotropia com homogeneidade: o que vem antes, e qual é a relação entre elas? Explique que não há fluxos em tur-

# 2

## Termodinâmica de uma mistura diluída

---

### 2.1 – Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell

Para uma mistura de  $n_c$  componentes sem reações químicas, pode-se deduzir a *regra de fase* de Gibbs ([Adkins, 1983](#), p.223, eq. 11.45):

$$n_g = 2 + n_c - n_f, \quad (2.1)$$

onde  $n_g$  é o número de graus de liberdade do sistema, e  $n_f$  é o número de fases. No caso de  $n_c = 2$  e de apenas uma fase ( $n_f = 1$ ), o número de graus de liberdade do sistema é  $n_g = 2 + 2 - 1 = 3$ . Consequentemente, a equação de estado para uma mistura binária monofásica deve depender de 3 variáveis de estado independentes. Considere agora uma mistura de dois componentes com densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , tais que  $\rho_1 \gg \rho_2$ , ou seja: o sistema é uma mistura diluída da substância 2 na substância 1. Defina a concentração mássica da substância  $k$ :

$$c_k \equiv \frac{\rho_k}{\rho}, \quad (2.2)$$

onde

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (2.3)$$

é a densidade total do sistema; isso produz imediatamente as restrições

$$c_1 + c_2 = 1, \quad (2.4)$$

$$dc_1 = -dc_2, \quad (2.5)$$

de modo que dada a concentração de um componente, a concentração do outro está automaticamente determinada. Dependendo da conveniência, portanto, nós utilizaremos o símbolo  $c$  como sinônimo de  $c_2$ .

Pela regra de fase de Gibbs, a energia interna (e de fato qualquer outro potencial termodinâmico) deve ser uma função de 3 variáveis de estado. Escolhendo-se as 3 variáveis de estado “naturais” para a energia interna por unidade de massa  $u$ ,

$$u = u(v, s, c), \quad (2.6)$$

onde  $v$  é o volume específico (volume por unidade de massa)

$$v \equiv \frac{1}{\rho}, \quad (2.7)$$

$s$  é a entropia específica (entropia por unidade de massa) e  $c = c_2$  é a concentração mássica do componente 2 definida em (2.2).

A diferencial total de  $u$  será

$$\begin{aligned} du &= -pdv + Tds + \sum_{k=1}^2 \mu_k dc_k \\ &= -pdv + Tds + adc. \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde os  $\mu_k$ s são os potenciais químicos dos componentes da mistura, e

$$a = \mu_2 - \mu_1 \quad (2.9)$$

é a *afinidade* da mistura (Kondepudi e Prigogine, 1998, p. 114). Para se obter (2.8), utilizou-se (2.5). Um de nossos principais objetivos neste capítulo é a obtenção de uma expressão para a afinidade  $a$  da mistura em termos de grandezas físicas mensuráveis, tais como a temperatura ou calores específicos.

A partir de (2.8), obtém-se 3 relações de Maxwell:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v,c} = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{s,c}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial v} = \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial c} \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_{v,s} = \left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)_{c,s}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial c} \Rightarrow -\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)_{s,v} = \left(\frac{\partial a}{\partial s}\right)_{c,v}. \quad (2.12)$$

Para a entalpia específica  $h$ ,

$$h \equiv u + pv, \quad (2.13)$$

$$dh = vdp + Tds + adc, \quad (2.14)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.14) são

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{p,c} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{s,c}, \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_{p,s} = \left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_{c,s}, \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)_{s,p} = \left(\frac{\partial a}{\partial s}\right)_{c,p}. \quad (2.17)$$

Para a energia livre de Helmholtz específica  $f$ ,

$$f \equiv u - sT, \quad (2.18)$$

$$df = -pdv - sdT + adc, \quad (2.19)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.19) são

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v,c} = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_{T,c}, \quad (2.20)$$



$$-\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)_{v,T} = +\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)_{c,T}, \quad (2.21)$$

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,v} = +\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{c,v}. \quad (2.22)$$

Finalmente, para a energia livre de Gibbs específica,

$$g \equiv \hat{h} - sT, \quad (2.23)$$

$$dg = vdp - sdT + adc, \quad (2.24)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.24) serão

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p,c} = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,c}, \quad (2.25)$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)_{p,T} = +\left(\frac{\partial a}{\partial p}\right)_{c,T}, \quad (2.26)$$

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p} = +\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_{c,p}. \quad (2.27)$$

## 2.2 – Mistura diluída de 2 gases ideais

### 2.2.1 – Equações de estado

Considere agora 2 gases ideais. Cada gás ideal “ $k$ ” da mistura é definido pela equação de estado

$$p_k V = N_k R T, \quad (2.28)$$

onde  $p_k$  é a pressão parcial de cada gás,  $V$  é o volume total ocupado,  $N_k$  é o número de moles do gás  $k$ , e  $R$  é a constante universal dos gases. Se  $M_k$  é a massa do gás  $k$  e  $\mathcal{M}_k$  é sua massa molar, então

$$N_k = \frac{M_k}{\mathcal{M}_k}, \quad (2.29)$$

e

$$p_k = \frac{M_k}{V} \frac{R}{\mathcal{M}_k} T. \quad (2.30)$$

Definindo-se a constante e a densidade do gás  $k$

$$R_k \equiv R/\mathcal{M}_k, \quad (2.31)$$

$$\rho_k \equiv \frac{M_k}{V}, \quad (2.32)$$

obtem-se

$$p_k = \rho_k R_k T, \quad (2.33)$$

ou, alternativamente,

$$p_k v_k = R_k T. \quad (2.34)$$

A equação para sua energia interna específica é

$$u_k = u_{k0} + c_{vk}(T - T_0) \quad (2.35)$$

Tabela 2.1: Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa <sup>†</sup>

| propriedade →    | $\mathcal{M}_k$               | $R_k$                             | $Z_k$ | $c_{pk}$ (calculado)              | $c_{pk}$ (medido)                 |
|------------------|-------------------------------|-----------------------------------|-------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| gás ↓            | $10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ | $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |       | $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ | $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ |
| N <sub>2</sub>   | 28,013                        | 296,80                            | 5/2   | 1038,80                           | 1037                              |
| O <sub>2</sub>   | 31,999                        | 259,83                            | 5/2   | 909,40                            | 909                               |
| H <sub>2</sub> O | 18,016                        | 461,48                            | 3     | 1845,92                           | 1847                              |

<sup>†</sup>Fontes: [Fleagle e Businger \(1980\)](#), [Müller \(1985\)](#), [Iribarne e Godson \(1981\)](#).

([Callen 1985](#), p. 66; [Adkins 1983](#), p. 116), onde o calor específico a volume constante do gás  $k$  é dado por

$$c_{vk} = Z_k R_k \quad (2.36)$$

com  $Z_k = 3/2, 5/2$  e 3 para gases monoatômicos, biatômicos e com mais de dois átomos, respectivamente ([Müller, 1985](#), p. 9, eq. 1.20). À temperatura de referência  $T_0$  a energia interna possui um valor de referência *arbitrário*  $u_{k0}$ .

A relação geral entre os calores específicos a volume constante  $c_v$  e a pressão constante  $c_p$  em uma substância pura é ([Kondepudi e Prigogine, 1998](#), p.46)

$$c_p - c_v = \left[ p + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \right] \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (2.37)$$

de forma que da equação de estado (2.34) tem-se

$$c_{pk} - c_{vk} = R_k. \quad (2.38)$$

A tabela 2.1 fornece algumas propriedades de gases atmosféricos e a comparação entre os valores calculados de  $c_{pk}$  a partir de (2.36) e (2.38) com valores medidos.

### 2.2.2 – Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal

**Entalpia** Combinando-se (2.34) e (2.35), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_k &\equiv u_k + p_k v_k = u_{k0} + c_{vk}(T - T_0) + R_k T \\
 &= u_{k0} + R_k T_0 + (c_{vk} + R_k)(T - T_0) \\
 &= \hat{h}_{k0} + (c_{vk} + R_k)(T - T_0) \\
 &= \hat{h}_{k0} + c_{pk}(T - T_0).
 \end{aligned} \quad (2.39)$$

**Entropia** A primeira lei da termodinâmica para o  $k$ -ésimo componente da mistura de gases é

$$du_k = T ds_k - p_k dv_k, \quad (2.40)$$

e como  $u_k$  em um gás ideal depende somente de  $T$ ,

$$\begin{aligned}
 c_{vk} dT &= T ds_k - \frac{R_k T}{v_k} dv_k, \\
 ds_k &= c_{vk} \frac{dT}{T} + R_k \frac{dv_k}{v_k}, \\
 s_k - s_{k0} &= c_{vk} \ln \frac{T}{T_0} - R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}}.
 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Alternativamente, use

$$p_k dv_k + v_k dp_k = R_k dT, \quad (2.42)$$

$$\frac{dv_k}{v_k} + \frac{dp_k}{p_k} = \frac{dT}{T}, \quad (2.43)$$

para obter

$$\begin{aligned} ds_k &= (c_{vk} + R_k) \frac{dT}{T} - R_k \frac{dp_k}{p_k}, \\ s_k - s_{k0} &= c_{pk} \ln \frac{T}{T_0} - R_k \ln \frac{p_k}{p_{k0}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Novamente, a entropia de referência à temperatura  $T_0$  é  $s_{k0}$ . A 3ª lei da termodinâmica prevê que a entropia deve se anular quando a temperatura termodinâmica atinge o zero absoluto, de forma que  $s_{k0}$  não deve ser arbitrária.

**Energia livre de Gibbs específica** Para um gás ideal “ $k$ ” com equação de estado (2.34), a relação de Maxwell (2.24) resulta em

$$\left( \frac{\partial g_k}{\partial p_k} \right)_T = v_k = \frac{R_k T}{p_k}, \quad (2.45)$$

e agora integrando em relação a  $p$  (a  $T$  constante) nós obtemos

$$g_k(T, p_k) = g(T) + R_k T \ln \left( \frac{p_k}{p_{k0}} \right), \quad (2.46)$$

onde  $g(T)$  é uma função somente da temperatura, a determinar. Na verdade, para um gás ideal é possível fazer muito melhor do que isso utilizando-se simplesmente as definições de  $h_k$  (2.39) e  $s_k$  (2.41):

$$\begin{aligned} g_k &= h_k - T s_k \\ &= h_{k0} + c_{pk}(T - T_0) - T \left[ s_{k0} + c_{vk} \ln \frac{T}{T_0} - R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \right] \\ &= h_{k0} + R_k(T - T_0) + c_{vk}(T - T_0) - T \left[ s_{k0} + c_{vk} \ln \frac{T}{T_0} - R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \right] \\ &= (h_{k0} - T s_{k0}) + R_k T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vk} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vk} T \ln \frac{T_0}{T} + T R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \\ &= \underbrace{(h_{k0} - T_0 s_{k0})}_{g_{k0}} - s_{k0} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + R_k T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) \\ &\quad + c_{vk} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + T R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \\ &= g_{k0} + (R_k - s_{k0}) T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vk} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + T R_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Agora, para  $T_0/T \approx 1$ , se expandirmos  $\ln(T_0/T)$  em série de Taylor em torno de 1 até ordem 2, encontraremos

$$g_k \approx g_{k0} + (R_k - s_{k0}) T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) - \frac{1}{2} c_{vk} T \left( \frac{T_0 - T}{T} \right)^2 + R_k T \ln \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \quad (2.48)$$

É importante observar que há necessariamente *duas* constantes de integração a determinar em (2.47) ou em (2.48). Este é o mesmo resultado obtido por Müller (1985) em sua equação (6.72). No nosso caso, nós retivemos a temperatura de referência  $T_0$  de maneira que o argumento de  $\ln(\cdot)$  permanece sempre adimensional.

### 2.2.3 – A afinidade de uma mistura de gases ideais

A pressão total de uma mistura de gases ideais será a soma das pressões parciais de vapor (a *lei de Dalton*), do que se obtém a equação de estado de uma mistura de 2 componentes

$$\begin{aligned}
 p &= \sum p_k \\
 &= \rho_1 R_1 T + \rho_2 R_2 T, \\
 &= \rho \left[ \frac{\rho_1}{\rho} R_1 T + \frac{\rho_2}{\rho} R_2 T \right] \\
 &= \rho [c_1 R_1 + c_2 R_2] T \\
 &= \rho [(1 - c) R_1 + c R_2] T \\
 &= \rho [R_1 + (R_2 - R_1) c] T.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Note que a mistura se comporta como se fosse um gás ideal com constante  $R(c) = R_1 + (R_2 - R_1)c$  dependente da concentração  $c$ .

Além disto, pode-se mostrar que para uma mistura de gases ideais a pressão, a entropia e todos os potenciais termodinâmicos são iguais às somas das quantidades correspondentes de cada gás (Adkins, 1983, p. 215). Nós vamos usar este resultado geral para obter algumas relações de interesse. Por exemplo, para a energia interna,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = u_1 M_1 + u_2 M_2 \Rightarrow \\
 u &= \frac{\mathcal{U}}{M} = u_1 \frac{M_1}{M} + u_2 \frac{M_2}{M} \\
 &= c_1 u_1 + c_2 u_2.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Analogamente, a entalpia e a entropia específicas são dadas por

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2, \tag{2.51}$$

$$s = c_1 s_1 + c_2 s_2. \tag{2.52}$$

Segue-se de (2.51) que o calor específico a pressão constante da mistura é dado por

$$\begin{aligned}
 c_p &\equiv \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p,c} = (1 - c) \left( \frac{\partial h_1}{\partial T} \right)_p + c \left( \frac{\partial h_2}{\partial T} \right)_p \\
 &= (1 - c) c_{p1} + c c_{p2} \\
 &= [c_{p1} + (c_{p2} - c_{p1}) c].
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Note que enquanto que  $v$ ,  $s$ ,  $h$ , etc., são grandezas específicas por unidade de massa *total*  $M$ ,  $u_1$  e  $u_2$  são energias internas por unidade de massa *de cada gás*,  $M_1$  e  $M_2$  (o mesmo acontecendo com  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ , etc.). Aqui, as relações-chave são

$$v = \frac{V}{M} = \frac{V}{M_k} \frac{M_k}{M} = v_k c_k \quad (\text{para cada } k), \tag{2.54}$$

$$dv = c_k dv_k + v_k dc_k \quad (2.55)$$

Finalmente, para obtermos a afinidade  $A$  da mistura de 2 gases ideais, nós precisamos permitir que  $c$  varie. Diferenciando (2.50), obtemos

$$\begin{aligned} du &= \sum (c_k du_k + u_k dc_k) \\ &= \sum (c_k (T ds_k - p_k dv_k) + u_k dc_k). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Diferenciando (2.52),

$$\begin{aligned} ds &= \sum (c_k ds_k + s_k dc_k), \\ T \left( \sum c_k ds_k \right) &= T ds - \sum T s_k dc_k, \end{aligned} \quad (2.57)$$

e utilizando (2.54), (2.55) e (2.57) em (2.56):

$$\begin{aligned} du &= T ds - \sum T s_k dc_k - \sum p_k (dv - v_k dc_k) + \sum u_k dc_k \\ &= T ds - \left( \sum p_k \right) dv - \sum T s_k dc_k + \sum p_k v_k dc_k + \sum u_k dc_k \\ &= T ds - p dv + \sum (u_k + p_k v_k - T s_k) dc_k \\ &= T ds - p dv + \sum g_k dc_k. \end{aligned} \quad (2.58)$$

O resultado, comparado com (2.8), mostra que

$$\mu_k = g_k, \quad (2.59)$$

ou seja: os potenciais químicos de cada componente da mistura são iguais à respectiva energia livre de Gibbs da substância pura correspondente (ambos por unidade de massa); portanto, a afinidade de uma mistura de dois gases ideais é, simplesmente,

$$a = g_2 - g_1. \quad (2.60)$$

A rigor, este mesmo resultado poderia ter sido obtido muito mais rapidamente por meio da equação de Euler (Callen, 1985, p. 59),

$$Ts = u + pv - \sum_{k=1}^N \mu_k c_k; \quad (2.61)$$

fazendo  $N = 1$  para o caso de um único componente, e então  $c_k \equiv 1$ , obtém-se

$$\mu_k = u_k + p v_k - T s_k \equiv g_k. \quad (2.62)$$

# 3

## As equações diferenciais de transporte

---

A turbulência é uma consequência da não-linearidade das equações diferenciais que governam o escoamento de fluidos e o transporte de escalares (vapor d'água, calor, CO<sub>2</sub>, etc.). Neste capítulo nós vamos revisar de maneira breve a dedução dessas equações a partir de leis de conservação da física e de equações constitutivas.

### 3.1 – Notação indicial

Uma boa parte de nossas manipulações requer o uso de notação indicial, e dos conceitos de *vetor* e de *tensor*. De maneira extremamente breve, a notação indicial envolve simplesmente a supressão dos símbolos de somatório. Desta forma, um vetor em coordenadas cartesianas na base canônica ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ),

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i, \quad (3.1)$$

é escrito simplesmente como

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

A regra geral é que o aparecimento de um mesmo índice duas vezes em uma equação indica soma neste índice. Algumas vezes, entretanto, esta regra não se aplica. Por exemplo, eu posso querer me referir a  $v_1 \mathbf{e}_1$  ou  $v_2 \mathbf{e}_2$  ou  $v_3 \mathbf{e}_3$ . Nesse caso, usarei parênteses em torno dos índices (ou pelo menos um deles), para informar que não há uma soma implícita nestes índices:  $v_{(i)} \mathbf{e}_{(i)}$  ou  $v_i \mathbf{e}_{(i)}$ .

### 3.2 – Continuidade

Considere um volume  $\mathcal{V}$ , delimitado por uma superfície fechada  $\mathcal{S}$ . O balanço de massa total para  $\mathcal{V}$  é dado pela equação de balanço integral

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dA \quad (3.3)$$

onde  $\rho$  é a massa específica, ou densidade, do fluido e  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade do escoamento em cada ponto.

Em (3.3),  $\mathcal{V}$  é um *volume material* (Slattery, 1972), ou seja, o volume de um corpo que ocupa, instantaneamente,  $\mathcal{V}$ . Em Mecânica dos Fluidos básica, frequentemente as análises se concentram sobre a região do espaço definida por  $\mathcal{V}$ , que é então denominado *volume de controle* (Fox e McDonald, 1981).

A idéia de volume material é talvez um pouco mais rica: se considerarmos que cada ponto de  $\mathcal{C}$  representa um ponto material imerso no campo de velocidade  $\mathbf{u}$  no instante  $t = 0$ , e seguirmos a trajetória de cada uma dessas partículas, o volume ocupado pelas mesmas em um instante posterior  $t$  é o volume do mesmo corpo neste último instante.

O vetor unitário normal à superfície de controle em cada ponto é  $\mathbf{n}$ . A integral de superfície acima pode ser transformada em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV + \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \, dV, \\ 0 &= \int_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esboçamos agora o argumento do *Teorema da Localização*: o volume  $\mathcal{C}$  para o qual a equação acima se aplica é totalmente genérico: de fato, (3.4) acima aplica-se a *qualquer* volume dentro de um escoamento. Mas isso só é possível se o *integrand*o for identicamente nulo, ou seja: se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.5)$$

Uma outra forma útil da equação da continuidade é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalmente, se utilizarmos o *volume específico*,

$$v \equiv \frac{1}{\rho}, \quad (3.7)$$

obteremos uma terceira forma útil da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} \quad \blacksquare \quad (3.8)$$

Fisicamente, (3.8) significa que a divergência do campo de velocidade é igual à taxa temporal de variação do volume de fluido (por unidade de volume!) em cada ponto. Note que, em (3.6) e em (3.8), nós utilizamos a definição da *derivada material* de um campo escalar genérico  $f(\mathbf{x}, t)$ :

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \quad (3.9)$$

### 3.3 – Misturas

Nesta seção nós vamos seguir a essência da abordagem de Bird et al. (1960, cap. 16): ela permite entender claramente o significado de difusão molecular de uma substância em um fluido, e em nossa opinião evita totalmente confusões comuns a respeito do papel da difusão e da advecção em meios contínuos.

Além disso, nós vamos considerar, por simplicidade, apenas misturas binárias, com um soluto  $A$  dissolvido em um solvente  $B$ . A generalização para misturas com mais de 2 componentes é óbvia.

Em uma mistura binária nós postulamos a existência em cada ponto de uma densidade para cada componente,  $\rho_A$  e  $\rho_B$ , de tal maneira que as massas totais de  $A$  e  $B$  em um volume material  $\mathcal{C}$  são, respectivamente,

$$M_A = \int_{\mathcal{C}} \rho_A dV, \quad M_B = \int_{\mathcal{C}} \rho_B dV. \quad (3.10)$$

É evidente que, em cada ponto, devemos ter

$$\rho = \rho_A + \rho_B. \quad (3.11)$$

Note que a abordagem postulatória de (3.10) é compatível com a visão tradicional em Mecânica do Contínuo. Prosseguindo, nós também postulamos a existência de campos de velocidade para cada espécie,  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_B$ , cujas integrais em um volume material são a quantidade de movimento total de cada espécie, respectivamente  $\mathbf{P}_A$  e  $\mathbf{P}_B$ . Por analogia com (3.10)–(3.11), temos

$$\mathbf{P}_A = \int_{\mathcal{C}} \rho_A \mathbf{u}_A dV, \quad \mathbf{P}_B = \int_{\mathcal{C}} \rho_B \mathbf{u}_B dV. \quad (3.12)$$

Agora, a quantidade de movimento total do corpo que ocupa  $\mathcal{V}$  deve ser

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{C}} \rho \mathbf{u} dV, \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido em cada ponto, de tal forma que devemos ter

$$\rho \mathbf{u} = \rho_A \mathbf{u}_A + \rho_B \mathbf{u}_B. \quad (3.14)$$

Em seguida, o ponto fundamental é perceber que é extremamente difícil, senão impossível, medir diretamente  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_B$ . Em seu lugar, é muito mais simples trabalhar unicamente com o campo de velocidade  $\mathbf{u}$  do fluido como um todo em cada ponto. Para tanto, nós definimos o vetor fluxo difusivo de massa de  $A$ :

$$\mathbf{j}_A \equiv \rho_A [\mathbf{u}_A - \mathbf{u}]. \quad (3.15)$$

A concentração mássica de  $A$  é

$$c_A \equiv \frac{\rho_A}{\rho}, \quad (3.16)$$

e vale a lei de Fick em cada ponto:

$$\mathbf{j}_A = -\rho v_A \nabla c_A, \quad (3.17)$$

onde  $v_A$  é a difusividade molecular de  $A$  na mistura. Relações totalmente análogas também valem para o solvente  $B$ .

Finalmente, das equações (3.11) e (3.14) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_A + \mathbf{j}_B &= \rho_A [\mathbf{u}_A - \mathbf{u}] + \rho_B [\mathbf{u}_B - \mathbf{u}] \\ &= \rho_A \mathbf{u}_A + \rho_B \mathbf{u}_B - (\rho_A + \rho_B) \mathbf{u} \end{aligned}$$



$$= \rho \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

Essa equação é válida em todos os pontos de um fluido, *exceto talvez em uma superfície onde haja um fluxo líquido de A para dentro da massa de fluido*.

Prosseguindo, por analogia com (3.3), o balanço integral de A é tão simples quanto

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_A dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_A) dA \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_A dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_A - \mathbf{u} + \mathbf{u}]) dA; \\ - \oint_{\mathcal{S}} \rho_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{u}_A - \mathbf{u}]) dA &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_A dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA, \\ - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_A) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho_A dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde a introdução de  $\mathbf{j}_A$  na última linha segue-se de sua definição (3.15). Uma dedução totalmente análoga vale para B.

A aplicação dos teoremas da divergência e da localização para A e para B produz, agora, duas equações diferenciais de balanço de massa:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_A u_i)}{\partial x_i} = - \frac{\partial j_{A,i}}{\partial x_i}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \rho_B}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_B u_i)}{\partial x_i} = - \frac{\partial j_{B,i}}{\partial x_i}. \quad (3.21)$$

A soma de (3.20) e (3.21) tem que restaurar (3.5); dada a equação (3.11), segue-se necessariamente que

$$\frac{\partial j_{A,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial j_{B,i}}{\partial x_i} \equiv 0. \quad (3.22)$$

(3.22) vale *sempre*; duas coisas podem acontecer. No caso mais geral, qualquer difusão molecular do soluto A é compensada por difusão molecular, também do solvente B, de uma certa forma, “no sentido oposto”. Note entretanto que (3.22) estipula que é a soma das *divergências* dos fluxos difusivos de massa que é nula. Uma situação particular que pode ocorrer é o caso em que  $\mathbf{j}_A = \text{const.}$  e  $\mathbf{j}_B = 0$ ; portanto é possível ocorrer fluxo difusivo apenas do soluto, desde que a sua divergência seja nula. É comum a confusão entre um fluxo e sua divergência nas equações de um meio contínuo, e este é um bom exemplo para explicitar sua diferença.

### 3.4 – Quantidade de movimento

O balanço integral geral de quantidade de movimento para um volume material  $\mathcal{V}$  é

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{u} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA, \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{F}_s$  são as forças de superfície atuando sobre o volume material, e  $\mathbf{F}_c$  são as forças de corpo. A equação a seguir,

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dA = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dA = \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} \mathbf{e}_i dA, \quad (3.24)$$

condensa um volume considerável de conhecimento. A força de superfície é dada pela integral de superfície do *vetor-tensão*  $\mathbf{t}$ . Este por sua vez é escrito na forma  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , isto é, como o pré-produto do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  pelo *tensor de tensões*  $\mathbf{T}$ . Finalmente, a *equação constitutiva* para o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  em função do primeiro coeficiente de viscosidade  $\mu_u$ , do segundo coeficiente de viscosidade  $\lambda_u$  e da pressão termodinâmica  $p$  é

$$T_{ji} = \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu_u s_{ji}. \quad (3.25)$$

onde

$$s_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.26)$$

é a taxa de deformação; o delta de Kroenecker é

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (3.27)$$

A integral de superfície correspondente à força de superfície é transformada em uma integral de volume por intermédio do Teorema da divergência:

$$\mathbf{F}_s = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda_u \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu_u \frac{\partial}{\partial x_j} (s_{ji}) \right) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.28)$$

Para obter (3.28), nós supusemos  $\lambda_u$  e  $\mu_u$  constantes, e os “retiramos” da operação de diferenciação. Embora estritamente isso não seja verdade, é usual desconsiderar as variações de  $\mu_u$  (e eventualmente de  $\lambda_u$ ) com a posição na dedução das equações de Navier-Stokes.

A força de corpo num referencial em rotação deve incluir a aceleração de Coriolis:  $\Omega$  é a velocidade angular da terra,  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade (o que inclui os demais efeitos de a Terra ser um referencial não-inercial — veja (Liggett, 1994, seção 9.1.2), e

$$\mathbf{F}_c = \int_{\mathcal{V}} \rho [\mathbf{g} - 2\Omega \times \mathbf{u}] dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.29)$$

Os termos do lado direito são

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV \right] \mathbf{e}_i, \quad (3.30)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = \left[ \oint_{\mathcal{S}} u_i \rho n_j u_j dS \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.31)$$

Reunindo todos os termos,

$$\left[ \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}) + \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} - \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \right) dV \right] \mathbf{e}_i = 0. \quad (3.32)$$

Pelo teorema da localização, o integrando deve ser identicamente nulo; então:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.33)$$

Expandindo o lado esquerdo e simplificando-o por meio de (3.5), e explicitando  $T_{ji}$  com (3.25):

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}), \quad (3.34)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho \nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}. \quad (3.35)$$

onde nós usamos (3.25) e (3.28), e

$$\rho \nu_u \equiv \mu_u \quad (3.36)$$

define a viscosidade cinemática  $\nu_u$ .

Embora (3.35) seja provavelmente a forma mais “clássica” de apresentar as equações de Navier-Stokes compressíveis, ela *não* será a mais útil quando precisarmos lançar mão da aproximação de Boussinesq no capítulo 5. Por isso, preferimos escrever a equação para quantidade de movimento na forma totalmente equivalente proveniente de (3.33):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho \nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}. \quad (3.37)$$

### 3.5 – Vorticidade

As seguintes identidades serão úteis na sequência: se  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  é um campo escalar, então:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}]}_{=0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k \equiv \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{u}] &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ik} \\ &= \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{jil} + \epsilon_{ijl}]}_{=0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

A vorticidade em um ponto de um escoamento é definida como o rotacional da velocidade:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{3.40}$$

ou, em notação indicial:

$$\omega_k \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{3.41}$$

É fácil verificar a identidade:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} \omega_k &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \\
&= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \\
&= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Considere agora o rotacional da equação de *momentum*, pré-condicionada com a identidade (3.42):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} - \epsilon_{ijk} u_j \omega_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} \omega_j u_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial s_{ji}}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\omega_j + 2\Omega_j] u_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\omega_j + 2\Omega_j] u_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + (\lambda_u + \mu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nosso próximo passo é calcular o rotacional de (3.43). Isso é natural, na medida em que surgirá uma equação para  $D\boldsymbol{\omega}/Dt$ . Note também a presença de dois gradientes em (3.43),  $\nabla\phi$  e  $\nabla\psi$ , onde

$$\phi = \frac{1}{2} (u_j u_j), \tag{3.44}$$

$$\psi = -p + (\lambda_u + \mu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (3.45)$$

O rotacional de ambos é nulo, devido a (3.38). Prosseguimos agora termo a termo. O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.43) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{lim} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \omega_m}{\partial t}. \quad (3.46)$$

O rotacional do segundo termo do lado esquerdo de (3.43) é

$$\begin{aligned} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\omega_j + 2\Omega_j] u_k &= \epsilon_{lim} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\omega_j + 2\Omega_j] u_k) \\ &= \epsilon_{mli} \epsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\omega_j + 2\Omega_j] u_k) \\ &= [\delta_{mj} \delta_{lk} - \delta_{mk} \delta_{lj}] \frac{\partial}{\partial x_l} ([\omega_j + 2\Omega_j] u_k) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\omega_m + 2\Omega_m] u_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\omega_j + 2\Omega_j] u_m). \end{aligned}$$

Algumas simplificações ainda são possíveis. Note que a velocidade angular da terra,  $\Omega$ , é constante: as suas derivadas espaciais serão nulas. Além disso, note também que, em virtude de (3.39),  $\nabla \cdot \omega = 0$ . Aplicando essas simplificações,

$$\begin{aligned} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\omega_j + 2\Omega_j] u_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\omega_m + 2\Omega_m] u_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\omega_j + 2\Omega_j] u_m) \\ &= u_k \frac{\partial [\omega_m + 2\Omega_m]}{\partial x_k} + [\omega_m + 2\Omega_m] \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ &\quad - [\omega_j + 2\Omega_j] \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - u_m \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega_j + 2\Omega_j] \\ &= u_k \frac{\partial \omega_m}{\partial x_k} + [\omega_m + 2\Omega_m] \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - [\omega_j + 2\Omega_j] \frac{\partial u_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Conforme já havíamos comentado, o rotacional do terceiro termo do lado esquerdo de (3.43) é nulo em virtude de (3.38):

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i} = \epsilon_{lim} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} = 0. \quad (3.48)$$

O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.43) é nulo:

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0. \quad (3.49)$$

Com a ajuda de (3.45), o rotacional do segundo termo do lado direito de (3.43) é

$$\begin{aligned} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] &= \frac{1}{\rho} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ &= -\frac{1}{\rho^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p + (\lambda_u + \mu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, o rotacional do terceiro termo do lado direito de (3.43) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} v_u \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = v_u \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_{lim} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = v_u \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.51)$$

Nós agora reunimos os resultados (3.46)–(3.51) na equação da vorticidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_m}{\partial t} + u_k \frac{\partial \omega_m}{\partial x_k} = & \underbrace{[\omega_j + 2\Omega_j]}_I \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \underbrace{[\omega_m + 2\Omega_m]}_{II} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ & + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p - (\lambda_u + \mu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)}_{III} + \underbrace{v_u \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_j}}_{IV}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

O lado esquerdo de (3.52) é a derivada material da vorticidade,  $D\omega_m/dt$ . O termo I do lado direito é o termo de estiramento e inclinação de vórtice (*vortex stretching/tilting*): existe uma tendência a “esticar” as linhas de velocidade, intensificando a vorticidade ao mesmo tempo em que ela ocupa regiões menores (mais “finas”) do escoamento. Veja a discussão deste importante termo em escoamentos tridimensionais em Kundu (1990, p. 133 (“**Meaning of  $(\omega \cdot \nabla)u$ ”**)). O termo II do lado direito de (3.52) só vai ser importante em escoamentos em que a divergência da velocidade é não-nula. Como veremos no capítulo 5, mesmo quando a densidade  $\rho$  não é constante, muitas vezes uma estimativa da ordem de grandeza dos termos justifica a aproximação  $\partial u_k / \partial x_k \approx 0$ . O termo III é o termo baroclínico. É fácil ver que

$$III = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla \psi;$$

a presença de desalinhamento entre os gradientes de densidade e de pressão altera a vorticidade; finalmente, o termo IV é o termo viscoso.

É possível definir, para a vorticidade, uma grandeza análoga ao que é a energia cinética para a velocidade. O nome dessa grandeza é *enstrofia*:

$$Z \equiv \frac{1}{2} \omega_m \omega_m.$$

Da mesma forma que ocorre com a energia mecânica, cuja equação pode ser deduzida a partir da equação de momentum fazendo-se o produto interno dessa última com o vetor velocidade (ver seção 3.7), é possível obter uma equação para a enstrofia tomando-se o produto interno de 3.52 com  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega_m \frac{\partial \omega_m}{\partial t} + \omega_m u_k \frac{\partial \omega_m}{\partial x_k} = & \omega_m [\omega_j + 2\Omega_j] \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \omega_m [\omega_m + 2\Omega_m] \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ & + \omega_m \frac{1}{\rho^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p - (\lambda_u + \nu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \omega_m \nu_u \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

O lado esquerdo de (3.53) é

$$\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \quad (3.54)$$

(a derivada material da enstrofia). O único termo para o qual dedicaremos algum esforço algébrico adicional aqui será o último de (3.53). Note que (esse truque será utilizado repetidamente neste livro):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \omega_m \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \right) = \omega_m \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j}; \Rightarrow \\ v_u \omega_m \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_j} &= v_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - v_u \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

A *natureza* de cada um dos dois termos do lado direito de (3.55) acima é diferente: o primeiro termo é uma divergência e redistribui enstrofia (por difusão molecular), enquanto que o segundo termo é *sempre negativo*: na ausência de efeitos de compressibilidade, ele é o termo responsável pela destruição (dissipação) de enstrofia no escoamento. Note também que o termo baroclínico deu origem a um produto triplo entre os vetores  $\nabla \rho$ ,  $\nabla p$  e  $\omega$ . Nossa equação final para o balanço de enstrofia é

$$\begin{aligned} \frac{DZ}{Dt} &= \omega_m [\omega_j + 2\Omega_j] \frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \omega_m [\omega_m + 2\Omega_m] \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p - (\lambda_u + \nu_u) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \omega_m + v_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - v_u \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_j} \blacksquare \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.6 – Energia

A equação de balanço da energia *total* (ou seja: interna e cinética) para um volume material  $\mathcal{C}$  é

$$\dot{W} + \dot{Q} + \dot{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dA. \quad (3.57)$$

onde  $\dot{W}$  é a taxa de trabalho realizada sobre o volume material pelas forças de superfície  $e$  de corpo,  $\dot{Q}$  é o fluxo de calor por condução para dentro do volume material e  $\dot{I}$  é a taxa de aporte de energia para dentro do volume material devido à difusão de massa e consequente mudança relativa de composição química da mistura. A energia específica (por unidade de massa) é

$$e = \frac{1}{2} u_i u_i + u, \quad (3.58)$$

onde  $u$  é a energia interna por unidade de massa. Note que nós não incluímos nenhum termo de energia potencial, porque  $\dot{W}$  contabilizará *todas* as forças atuando sobre o volume de controle, incluindo as conservativas. O cálculo de cada um dos termos do lado esquerdo de (3.57) é feito como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) \, dA = \oint_{\mathcal{S}} \rho c_p v_T (\mathbf{n} \cdot \nabla T) \, dS \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \rho c_p v_T n_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \, dA = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho c_p v_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \, dV, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor fluxo de calor. Em notação indicial, a *equação constitutiva* para a transferência de calor por condução, ou difusão molecular, é

$$q_i = -\rho c_p v_T \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.60)$$

onde  $c_p$  é o calor específico a pressão constante do fluido,  $v_T$  é a difusividade térmica molecular, e  $T$  é a temperatura termodinâmica.

A taxa de trabalho realizado sobre  $\mathcal{C}$  é

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \int_{\mathcal{C}} (\rho [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u}) \, dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) \, dA \\ &= \int_{\mathcal{C}} \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) u_i \, dV + \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} u_i \, dA \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} u_i) \right) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( \rho \left( g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} T_{ji} \right) \, dV.\end{aligned}\quad (3.61)$$

O lado direito de (3.57) é

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho \, dV = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} \, dV = \int_{\mathcal{C}} \left( e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} \right) \, dV \quad (3.62)$$

e

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dS &= \oint_{\mathcal{S}} e \rho n_j u_j \, dS = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j e) \, dV = \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left( e \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} \right) \, dV\end{aligned}\quad (3.63)$$

Combinando (3.62) e (3.63) acima, tem-se

$$\int_{\mathcal{C}} \left( \underbrace{e \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right)}_{=0} + \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} \right) \right) \, dV, \quad (3.64)$$

onde o primeiro termo é nulo por força da equação da continuidade. O restante é

$$\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{De}{Dt} \, dV = \int_{\mathcal{C}} \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i + u \right) \, dV = \int_{\mathcal{C}} \rho \left( u_i \frac{Du_i}{Dt} + \frac{Du}{Dt} \right) \, dV. \quad (3.65)$$

Combinando-se todos os termos da equação de energia,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho c_p v_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} T_{ji} + u_i \rho \left( g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) - \right. \\ \left. \rho \left( u_i \frac{Du_i}{Dt} + \frac{Du}{Dt} \right) \right) \, dV = 0\end{aligned}\quad (3.66)$$

Colocando em evidência os termos com  $\rho u_i$  em comum,

$$\rho u_i \left[ \frac{Du_i}{Dt} - \left( g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) \right] \equiv 0, \quad (3.67)$$

já que o termo entre parênteses é a própria equação de balanço de quantidade de movimento! O que resta, após aplicarmos o teorema da localização, é

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} T_{ji}, \quad (3.68)$$



onde, de maneira análoga ao que foi feito com a equação de quantidade de movimento quando consideramos  $\mu_u$  constante, nós consideramos o termo  $\rho c_p v_T$  constante e o retiramos da derivada. Novamente, embora não seja estritamente correto, isso é usual.

O termo  $\partial u_i / \partial x_j T_{ji}$  é facilmente calculável:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} T_{ji} = \left( \left( -p + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu_u s_{ji} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.69)$$

$$= -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda_u \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu_u s_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (3.70)$$

Como os índices  $i$  e  $j$  são mudos (ambos aparecem repetidos, indicando somatórios), eles podem ser trocados:

$$\left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (3.71)$$

donde

$$\begin{aligned} 2s_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = 2s_{ij}s_{ij}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Note que (3.72) é uma soma de 9 termos, todos eles positivos. Finalmente, obtemos

$$T_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda_u \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu_u s_{ij}s_{ij}. \quad (3.73)$$

Os dois últimos termos correspondem à conversão *irreversível* de energia mecânica em energia interna, e é possível mostrar que sua soma é sempre positiva, debaixo da *hipótese de Stokes* (Kundu, 1990, p. 92),

$$\lambda_u + \frac{2}{3}\mu_u = 0. \quad (3.74)$$

Então, a equação de interação tensor de tensões-gradiente de velocidade fica

$$T_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu_u \left( s_{ij}s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right), \quad (3.75)$$

e podemos completar o quadrado do termo entre parênteses:

$$\begin{aligned} s_{ij}s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 &= s_{ij}s_{ij} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= s_{ij}s_{ij} - 2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= s_{ij}s_{ij} - 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_{ij}s_{ij} - 2s_{ij}\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{9}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2\delta_{ij}\delta_{ij} \\
&= \left(s_{ij} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right)^2.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Finalmente,

$$T_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -p\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + 2\mu_u\left(s_{ij} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right)^2. \tag{3.77}$$

A equação diferencial completa para a energia interna fica

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \underbrace{\rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)}_I - \underbrace{p\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)}_{II} + \underbrace{2\mu_u\left(s_{ij} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij}\right)^2}_{\Phi=III}, \tag{3.78}$$

onde I representa o aquecimento/resfriamento de uma partícula de fluido por condução, II representa o trabalho reversível realizado pela pressão, e III, que é sempre positivo, é a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna, e denomina-se *dissipação viscosa*. Em muitos livros, a dissipação viscosa é denotada pela letra grega (minúscula ou maiúscula)  $\Phi$ . Essa última está relacionada com uma grandeza que vai aparecer inúmeras vezes em teoria de turbulência, a *taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa*,  $\mathcal{E}_e$ . As duas relacionam-se simplesmente por

$$\Phi = \rho \mathcal{E}_e. \tag{3.79}$$

Uma forma alternativa a (3.78) é facilmente obtida: utilizando a definição de entalpia específica (2.14), encontramos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v}\frac{Du}{Dt} + \frac{p}{v}\frac{Dv}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \Phi, \\
\frac{1}{v}\frac{D}{Dt}(u + pv) - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \Phi, \\
\rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \Phi.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Por enquanto, suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica,  $\beta_p$ , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade,  $\kappa_T$ , são definidos nesse caso por

$$\beta_p \equiv \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{3.81}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T. \tag{3.82}$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa)  $h$  definida em (2.14) em função de  $T$  e  $p$ , e calculando seu diferencial,

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp$$

$$= c_p dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp, \quad (3.83)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p. \quad (3.84)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$dh = v dp + T ds, \quad (3.85)$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = v + T \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T; \quad (3.86)$$

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \beta_p v, \quad (3.87)$$

onde  $s$  é a entalpia específica, donde

$$\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = v (1 - \beta_p T). \quad (3.88)$$

Agora, partimos de (3.80), e utilizamos (3.84) e (3.88) para exprimir  $Dh/Dt$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \rho \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} \right] - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{v} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + v(1 - \beta_p T) \frac{Dp}{Dt} \right] - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_p T \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Uma vantagem óbvia de (3.89) é que nela comparecem apenas grandezas diretamente mensuráveis (em princípio) tais como  $T$  e  $p$ , e não mais potenciais termodinâmicos mais “abstratos”, tais como  $u$  ou  $h$ .

### 3.7 – A dissipação viscosa como perda de energia mecânica e fonte de energia interna

Neste ponto, é muito conveniente nós dedicarmos um pouco mais de atenção à *energia mecânica* do escoamento. Como vimos, utilizando uma série de simplificações baseadas nas leis de conservação de massa e de *momentum*, nós reduzimos o balanço integral que corresponde à conservação *geral* de energia (cinética *mais* interna), (3.57), a uma equação diferencial para a energia interna, (3.78). Na sequência, nós vamos seguir se não passo a passo pelo menos muito de perto a excelente exposição do assunto feita por Kundu (1990). Primeiramente, note de (3.61) que o taxa de trabalho realizado pelas forças de superfície sobre um volume material  $\mathcal{C}$  é:

$$\dot{W}_s = \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) dS = \dots = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} u_i) dV. \quad (3.90)$$

Kundu (1990) denomina  $\partial(T_{ji}u_i)/\partial x_j$  de *trabalho total*, por unidade de volume, das forças de superfície em um ponto. Já o produto escalar de  $\mathbf{u}$  pela equação dinâmica (3.34) é

$$\rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right) = \rho u_i g + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.91)$$

Note que o trabalho por unidade de volume das forças de superfície efetivamente responsável pela *variação* da energia cinética,  $u_i \partial T_{ji} / \partial x_j$ , é *diferente* do trabalho total; utilizando a regra da cadeia, entretanto, é elementar que

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right) = \rho u_i g + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i T_{ji}) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} T_{ji}. \quad (3.92)$$

O último termo do lado direito da equação acima é denominado por Kundu *trabalho de deformação*. Ele é dado por (3.77), donde

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u_i u_i \right) = \underbrace{\rho u_i g}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i T_{ji})}_{II} + \underbrace{p \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)}_{III} - \underbrace{2\mu_u \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{IV}. \quad (3.93)$$

Nosso quadro de balanço de energia fica, então, completo. O termo I, claro, é o trabalho da força peso. O termo II é um “termo de transporte”. Note que  $u_i T_{ji}$  representa um fluxo advectivo de tensão total  $T_{ji}$ . Esse termo encontra-se sob a forma de uma divergência: a sua integral sobre um volume suficientemente grande envolvendo o escoamento de interesse anula-se. Isso significa que II não pode criar nem destruir energia cinética localmente, mas representa uma *redistribuição* de energia cinética dentro do escoamento. O interessante é o aparecimento de III e IV: eles são os termos II e III de (3.78), com o sinal trocado. Em (3.93), III é a contribuição do trabalho *reversível* da pressão para o aumento da energia cinética (quando  $\partial u_k / \partial x_k > 0$ ), e IV é a conversão *irreversível* de energia cinética em energia interna.

Portanto,  $(\partial u_i / \partial x_j) T_{ij} = III + IV$  tem o papel de retirar energia mecânica (cinética) do escoamento, e transformá-la em energia interna. No capítulo 6 veremos o surgimento de termos totalmente análogos, exceto que lá os gradientes serão de *velocidades médias*, e a conversão será da energia cinética do escoamento médio, ECM, em energia cinética da turbulência, ECT, *antes* da conversão final desta última em energia interna.

### 3.8 – Momento angular

O balanço material de momento angular é da forma

$$\mathcal{T}_s + \mathcal{T}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA, \quad (3.94)$$

onde  $\mathcal{T}_s$  e  $\mathcal{T}_c$  são os torques devidos às forças de corpo e de superfície, respectivamente, atuando sobre o corpo, e  $\mathbf{r}$  é o raio-vetor que *segue* a partícula em cada ponto  $\mathbf{x}$  dentro de  $\mathcal{C}$  a partir de sua posição  $\xi$  em  $t = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r_i(\xi, t) \mathbf{e}_i, \\ r_i(\xi, t) &= x_i, \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = u_i.$$

ou seja:  $\mathbf{r}$  segue a partícula e é portanto uma descrição intrinsecamente *lagrangeana*. Desta forma, embora  $\partial \mathbf{x} / \partial t = \mathbf{0}$  para um ponto fixo  $\mathbf{x}$  dentro de  $\mathcal{C}$ ,  $\partial \mathbf{r} / \partial t = \mathbf{u}$ , pois  $\mathbf{r}$  segue as partículas.

Calculemos, agora, cada um dos termos de 3.94. Para  $\mathcal{T}_s$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_s &= \oint_{\mathcal{S}} [\mathbf{r} \times \mathbf{t}] dA \\ &= \left[ \oint_{\mathcal{S}} \epsilon_{lim} r_l n_k T_{ki} dA \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\epsilon_{lim} r_l T_{ki}) dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} \delta_{lk} T_{ki} dV \right] \mathbf{e}_m + \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} T_{li} dV \right] \mathbf{e}_m + \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} dV \right] \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Para  $\mathcal{T}_c$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c &= \int_{\mathcal{C}} \wp [\mathbf{r} \times (\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u})] dV \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \rho (g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k) dV \right] \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (3.96)$$

Prosseguindo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] dV &= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] \} dV \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho \epsilon_{lim} r_l u_i \} dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \epsilon_{lim} \rho u_i \frac{\partial r_l}{\partial t} dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \left( \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \epsilon_{lim} \rho u_l u_i \right) dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} dV \right] \mathbf{e}_m, \end{aligned} \quad (3.97)$$

pois

$$\epsilon_{lim} \rho u_l u_i \equiv 0.$$

O último termo é

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} \rho [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dA &= \left[ \oint_{\mathcal{S}} \rho \epsilon_{lim} r_l u_i (n_k u_k) dA \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \epsilon_{lim} r_l u_i u_k) dV \right] \mathbf{e}_m \\ &= \left[ \int_{\mathcal{C}} \left( \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \epsilon_{lim} \rho u_i u_k \frac{\partial r_l}{\partial x_k} \right) dV \right] \mathbf{e}_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \int_{\mathcal{C}} \left( \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \epsilon_{lim} \rho u_i u_k \delta_{lk} \right) dV \right] \mathbf{e}_m \\
&= \left[ \int_{\mathcal{C}} \left( \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \epsilon_{lim} \rho u_l u_i \right) dV \right] \mathbf{e}_m \\
&= \left[ \int_{\mathcal{C}} \epsilon_{lim} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) dV \right] \mathbf{e}_m \quad (3.98)
\end{aligned}$$

Reunindo agora todos os termos de (3.94), encontramos

$$\int_{\mathcal{C}} \left\{ \epsilon_{lim} r_l \left[ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} - \rho(g_i - 2\epsilon_{ijk}\Omega_j u_k) - \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} \right] + \epsilon_{lim} T_{li} \right\} dV = 0. \quad (3.99)$$

O termo entre colchetes acima nada mais é do que (3.33), e se anula; obtemos então, finalmente (para um volume material  $\mathcal{C}$  arbitrário),

$$\epsilon_{lim} T_{li} = 0 \Rightarrow T_{li} = T_{il}. \quad (3.100)$$

O princípio de balanço de momento angular, portanto, é equivalente à simetria do tensor de tensões, já imposta em (3.25).

### 3.9 – A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas

Duas quantidades que vimos até aqui aparecem de forma natural como quadrados. Elas são a energia cinética do escoamento (por unidade de massa),

$$e_c = \frac{1}{2} u_i u_i \quad (3.101)$$

e  $\mathcal{E}_e$ , a taxa de dissipação de  $e_c$ :

$$\mathcal{E}_e = 2\nu_u \left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (3.102)$$

Em (3.102), nós utilizamos (3.78) e (3.79) juntamente com (3.36).

Aplicando a decomposição de Reynolds (1.13) a (3.101), temos:

$$\begin{aligned}
e_c &= \frac{1}{2} [\bar{u}_i + u'_i] [\bar{u}_i + u'_i] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{u}_i \bar{u}_i + 2\bar{u}_i u'_i + u'_i u'_i] \\
&\equiv \underbrace{\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i}_{\bar{e}_{cm}} + \underbrace{\frac{u'_i u'_i}{2}}_{e_{ct}} \quad (3.103)
\end{aligned}$$

Há 3 termos em (3.103): uma decomposição de Reynolds “clássica” para  $e_c$ , em média e flutuação, não é possível, porque ela é uma quantidade quadrática. Mesmo assim, podemos identificar  $\bar{e}_{cm}$  acima como a energia cinética do escoamento médio. Da mesma forma, podemos identificar  $e_{ct}$  acima como a energia cinética local, no espaço-tempo, da turbulência. Promediando a equação acima, a média do termo intermediário se anula, e, utilizando os lemas de Reynolds, (1.15)–(1.17),

$$\bar{e}_c = \underbrace{\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i}_{\bar{e}_{cm}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}}_{\bar{e}_{ct}}. \quad (3.104)$$

Note que, por ser definida como um quadrado, a “flutuação”  $e_{ct}$  não tem média zero.

Como vimos, o primeiro termo do lado direito de (3.104) é a *energia cinética do escoamento médio*,  $\overline{e_{cm}}$ . O segundo termo de (3.104) é de grande importância em teoria de turbulência. Ele é, apropriadamente, denominado de *energia cinética da turbulência*,  $\overline{e_{ct}}$ , muitas vezes abreviado pela sigla ECT\*. A rigor, deveríamos chamar  $\overline{e_{ct}}$  de energia cinética *média* da turbulência, mas essa terminologia não é usual. Mesmo assim, neste texto nós manteremos o símbolo  $e_{ct}$  sob uma barra, para enfatizar o ponto. Para registro,

$$\overline{e_{ct}} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (3.105)$$

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de energia cinética é análogo. Comece notando que, novamente com a ajuda da decomposição de Reynolds (1.13), e de (1.19),

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right]}_{\overline{s_{ij}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right]}_{s'_{ij}} \\ &= \overline{s_{ij}} + s'_{ij}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

onde  $\overline{s_{ij}}$  é a taxa de deformação média, e  $s'_{ij}$  é a sua flutuação. Da mesma forma, é imediato que

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}. \quad (3.107)$$

Agora, substituindo (3.106) e (3.107) em (3.102),

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= 2\nu_u \left[ \overline{s_{ij}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s'_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \times \\ &\quad \left[ \overline{s_{ij}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s'_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \\ &= 2\nu_u \left\{ \left[ \overline{s_{ij}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]^2 + 2 \left[ \overline{s_{ij}} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ s'_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[ s'_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.108)$$

Prosseguimos, com a promediação de (3.108) e (novamente) com o uso dos lemas de Reynolds:

$$\overline{\mathcal{E}_e} = 2\nu_u \left[ \overline{s_{ij}} \overline{s_{ij}} - \frac{2}{3} \overline{s_{ij}} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \right]$$

\*Em Inglês, *Turbulence Kinetic Energy* ou TKE.

$$+ 2\nu_u \left[ \overline{s'_{ij}s'_{ij}} - \frac{2}{3} \overline{s'_{ij} \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}} + \frac{1}{9} \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij}} \right]. \quad (3.109)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \overline{s_{ij}} \delta_{ij} &= \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k}, \\ s'_{ij} \delta_{ij} &= \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}, \\ \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3, \end{aligned}$$

donde

$$\overline{\mathcal{E}_e} = \underbrace{2\nu_u \left[ \overline{s_{ij}s_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{\left( \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right)^2} \right]}_{\overline{\mathcal{E}_{em}}} + \underbrace{2\nu_u \left[ \overline{s'_{ij}s'_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right)^2} \right]}_{\overline{\epsilon_e}}. \quad (3.110)$$

Da mesma forma que a energia cinética (vide (3.104)), portanto, a taxa de dissipação de energia cinética pode ser decomposta numa taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\overline{\mathcal{E}_{em}}$  (primeiro termo do lado direito de (3.110)), e uma *taxa de dissipação da energia cinética da turbulência*,  $\overline{\epsilon_e}$  (segundo termo do lado direito de (3.110)). Essa última é uma grandeza muito importante. Para registro,

$$\overline{\epsilon_e} = 2\nu_u \left[ \overline{s'_{ij}s'_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{\left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \right)^2} \right]. \quad (3.111)$$

No início da década de 1940, começou a ficar claro que  $\overline{\epsilon_e}$  é uma grandeza fundamental em turbulência. No próximo capítulo, nós vamos ver que, com base em alguns argumentos simples e muito razoáveis,  $\overline{\epsilon_e} \gg \overline{\mathcal{E}_{em}}$  quando o número de Reynolds de um escoamento se torna muito grande. Isso por sua vez significa que  $\overline{s'_{ij}s'_{ij}} \gg \overline{s_{ij}s_{ij}}$ , e que deve existir, no caso escoamentos turbulentos com número de Reynolds muito grande, uma grande separação entre as *escalas macroscópicas* e as *escalas microscópicas* da turbulência. As primeiras estão associadas aos gradientes de velocidade, e taxas de deformação, médios. As segundas estão associadas aos gradientes quadráticos médios (e taxas de deformação quadráticas médias).

### 3.10 – O balanço do semiquadrado da temperatura

É possível obter uma equação de balanço do semi-quadrado da temperatura de forma totalmente análoga à que foi usada para obter a equação para a energia mecânica, (3.92). Isso é feito multiplicando-se (3.89) por  $T$ :

$$\rho c_p T \frac{DT}{Dt} - \beta_p T^2 \frac{Dp}{Dt} = \rho c_p \nu_T T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + T \Phi.$$

Mas

$$T \frac{DT}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right),$$



$$T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j};$$

portanto,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right) + \frac{\beta_p}{\rho c_p} T^2 \frac{Dp}{Dt} = \nu_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + T\Phi. \quad (3.112)$$

Observamos que, em escoamentos naturais, o segundo termo do lado esquerdo em geral é desprezado com base em argumentos de ordem de grandeza (mais sobre isso depois), e que o primeiro termo do lado direito é a divergência do vetor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) \mathbf{e}_j;$$

como tal, pelo Teorema da Divergência, esse termo redistribui, mas não cria nem destrói globalmente, a grandeza  $T^2/2$  (observe a analogia com o termo III de (3.93)).

O segundo termo do lado direito de (3.112),  $-\nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ , é responsável pela dissipação local da grandeza  $T^2/2$ . Como tal, ele é análogo ao último termo (termo de dissipação de energia cinética) em (3.93), dado em destaque em (3.102). Nós definimos portanto a quantidade análoga

$$\mathcal{E}_{TT} \equiv \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (3.113)$$

O último termo do lado direito de (3.112) é um termo de fonte, geralmente desimportante, devido à dissipação de energia mecânica em energia interna.

Por analogia com o que fizemos com a Energia Cinética da Turbulência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{2} &= \frac{1}{2} [\bar{T} + T'] [\bar{T} + T'] \\ &= \frac{1}{2} [\bar{T} \bar{T} + 2\bar{T}T' + T'T']. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.15)–(1.17),

$$\frac{1}{2} \overline{T^2} = \frac{1}{2} \bar{T} \bar{T} + \frac{1}{2} \overline{T'T'} \quad (3.115)$$

O segundo termo do lado direito de (3.115) é a semivariância das flutuações de temperatura. Ele é um termo importante em escoamentos turbulentos em que existem flutuações de temperatura (e de densidade).

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de  $T^2/2$  se segue.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}_{TT}} &= \nu_T \overline{\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T} + T') \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T} + T') \right]} \\ &= \nu_T \overline{\left[ \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right]} \\ &= \underbrace{\nu_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}}_{\overline{\mathcal{E}_{Tm}}} + \underbrace{\nu_T \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}}_{\overline{\mathcal{E}_{TT}}} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Da mesma forma que acontece com  $\overline{\mathcal{E}_{em}}$  e  $\overline{\epsilon_e}$ , nós veremos em seguida que  $\overline{\mathcal{E}_{Tm}} \ll \overline{\epsilon_{TT}}$ . Esse último, a taxa de dissipação da semivariância das flutuações de temperatura, é um parâmetro fundamental para descrever a dinâmica das flutuações turbulentas de temperatura. Para registro,

$$\overline{\epsilon_{TT}} = \nu_T \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}}. \quad (3.117)$$

# 4

## As macro e micro escalas da turbulência

---

Uma grande parte do conhecimento que temos sobre turbulência baseia-se nas ideias, relativamente simples, de que há uma grande quantidade de escalas em um escoamento turbulento (veja a discussão sobre escalas no capítulo 1).

Nós vamos chamar as maiores escalas presentes de “macro” escalas. Elas são relativamente fáceis de identificar com base na geometria do problema (o diâmetro de um tubo, a profundidade de um canal, a velocidade média em uma seção, etc.). Chamaremos as menores escalas nas quais ocorre, efetivamente, a dissipação de energia cinética, de “micro” escalas. Estas últimas são uma das grandes contribuições (entre tantas) de Kolmogorov para o entendimento da turbulência (Kolmogorov, 1941, 1991).

### 4.1 – Macro e micro escalas: uma apresentação informal

Como observa Davidson (2004, p. 19–20), uma *boa parte* do que nós sabemos sobre turbulência pode ser resumido nas relações

$$\overline{\mathcal{E}_e} \approx \overline{\epsilon_e} \sim \tilde{u}^3 / \ell, \quad (4.1)$$

$$\eta_u = \left( \frac{v_u^3}{\overline{\epsilon_e}} \right)^{1/4}, \quad (4.2)$$

$$\check{u} = (v_u \overline{\epsilon_e})^{1/4}, \quad (4.3)$$

$$\tau_u = \left( \frac{v_u}{\overline{\epsilon_e}} \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Nas equações acima,  $\tilde{u}$  e  $\ell$  são macroescalas de velocidade e de comprimento, respectivamente. Elas refletem as velocidades e comprimentos “macroscópicos” que nós “vemos” em um escoamento: o diâmetro da tubulação, a distância até a superfície em uma camada-limite, a profundidade do escoamento em um rio, etc. ( $\ell$ ); e as diferenças de velocidade entre duas seções, a intensidade das flutuações turbulentas de velocidade, etc. ( $\tilde{u}$ ).

Para as ordens de grandezas de termos nas equações, nós vamos adotar a notação de Tennekes e Lumley (1972): em (4.1), o símbolo  $\sim$  significa que o coeficiente adimensional que torna a relação uma equação não é maior do que 5, e não é menor do que 1/5.



Figura 4.1: Expansão súbita em uma tubulação.

Já  $\eta_u$  (“eta”, em grego),  $\check{u}$  e  $\tau_u$  (“tau”, em grego) são microescalas de comprimento, velocidade e de tempo; em homenagem ao seu proponente, elas são chamadas atualmente de *microescalas de Kolmogorov* (Kolmogorov, 1941, 1991).  $\check{u}$  e  $\eta_u$  não podem ser “vistas”; elas refletem as diferenças de velocidade e de comprimento que ocorrem em cada ponto de um escoamento turbulento, e que só podem ser estimadas (na média quadrática, como veremos em breve) em função da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência,  $\overline{\epsilon_e}$ , e da viscosidade cinemática  $\nu_u$ .

Para o estudante que aborda Turbulência pela primeira vez,  $\ell$  e  $\check{u}$  são estranhos e difíceis de compreender, enquanto que  $\eta_u$ ,  $\check{u}$ , e  $\tau_u$  são totalmente impossíveis. Numa tentativa de aliviar a estranheza, a abordagem que se segue procura dar um pouco de concretude a esses conceitos, por meio de alguns exemplos.

Em lugar de prosseguir com “escalas” arbitrárias  $\check{u}$  e  $\ell$ , considere o escoamento clássico de um fluido com densidade  $\rho$  constante através de uma expansão súbita em uma tubulação, mostrado na figura 4.1. As áreas das seções transversais antes e depois da expansão são  $A_a$  e  $A_b$ .

Os perfis esboçados na figura 4.1 são idealizações: é bem conhecido que a velocidade (relativa) de um fluido junto a uma parede sólida é zero, que é a “condição de não-deslizamento”. O significado físico da figura 4.1, portanto, é que na maior parte do escoamento “antes”, e “depois”, da expansão súbita de área, a velocidade é *aproximadamente* constante.

Para o volume material  $\mathcal{C}$  (com superfície  $\mathcal{S}$ ) indicado pela linha pontilhada na figura 4.1, as equações macroscópicas de balanço são (3.3) (massa); (3.23) (quantidade de movimento) e (3.57) (energia, com  $\dot{I} \equiv 0$ ), repetidas aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dA, \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u} \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dA, \\ \dot{W} + \dot{Q} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{C}} e \rho \, dV + \oint_{\mathcal{S}} e \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, dA. \end{aligned}$$

Suponha agora perfis uniformes de velocidade nas seções de entrada ( $a$ ) e saída ( $b$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= U_a \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{u}_b &= U_b \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Para  $\rho$  constante, a equação macroscópica de conservação de massa em regime permanente produz

$$U_a A_a = U_b A_b. \quad (4.5)$$

Para a conservação de quantidade de movimento, é preciso supor que as forças de atrito entre as paredes e o escoamento têm efeito desprezível, e que as forças de superfície são, preponderantemente, devidas à diferença de pressão entre as sessões  $a$  (entrada) e  $b$  (saída), de tal forma que

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} \, dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \, dA = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot [-p\boldsymbol{\delta}] \, dS = \oint_{\mathcal{S}} [-p\mathbf{n}] \, dA$$

(onde  $\boldsymbol{\delta}$  é o vetor unitário, cujas componentes são  $\delta_{ij}$ ). Na entrada,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ , e na saída  $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$ , donde (para perfis uniformes de pressão na entrada ( $p_a$ ) e na saída ( $p_b$ )) a componente das forças de pressão na direção longitudinal é

$$F_{s1} = (p_a - p_b) A_b.$$

Observe que  $A_b$  é comum, na expressão acima, para  $p_a$  e para  $p_b$ . A interpretação é que, imediatamente após a expansão, a pressão (na seção  $a$ ) *ainda* é  $p_a$ , e age de forma aproximadamente uniforme sobre a face esquerda do volume de controle. Com o termo transiente identicamente nulo, e  $F_c \equiv 0$ , segue-se agora que (na direção longitudinal, que é a única direção relevante para os balanços macroscópicos),

$$(p_a - p_b) A_b = \rho [-U_a^2 A_a + U_b^2 A_b] = \rho [U_b - U_a] (U_a A_a). \quad (4.6)$$

O trabalho realizado sobre a superfície de controle é preponderantemente devido à pressão:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA \\ &= \int_{A_a} U_a \mathbf{e}_1 \cdot [-p_a(-\mathbf{e}_1)] \, dA + \int_{A_b} U_b \mathbf{e}_1 \cdot [-p_b(+\mathbf{e}_1)] \, dA \\ &= p_a U_a A_a - p_b U_b A_b. \end{aligned}$$

A equação de balanço de energia, portanto, torna-se

$$(p_a - p_b)(U_a A_a) = \frac{\rho}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \underbrace{\rho(u_B - u_A)(U_a A_a) - \dot{Q}}_{\text{Tx. de Dissipação}}. \quad (4.7)$$

Os dois últimos termos do lado direito são o fluxo líquido de energia interna ( $u_A$  e  $u_B$  são as energias internas por unidade de massa na entrada e na saída do volume de controle), e a taxa de calor trocada com o volume de controle. Por hipótese, a dissipação de energia mecânica deve fazer com que ambos sejam positivos, ou seja:  $u_B > u_A$  (a dissipação aumenta a energia interna específica do fluido) e  $\dot{Q} < 0$  (parte de energia mecânica dissipada flui como calor para fora do volume de controle). Por definição, a sua soma é a taxa total de dissipação de energia. Se  $\tilde{\mathcal{E}}_e$  é a dissipação *média* de energia por unidade de massa dentro do volume de controle, temos

$$\rho A_b \ell \tilde{\mathcal{E}}_e = \rho(u_B - u_A)(U_a A_a) - \dot{Q}.$$

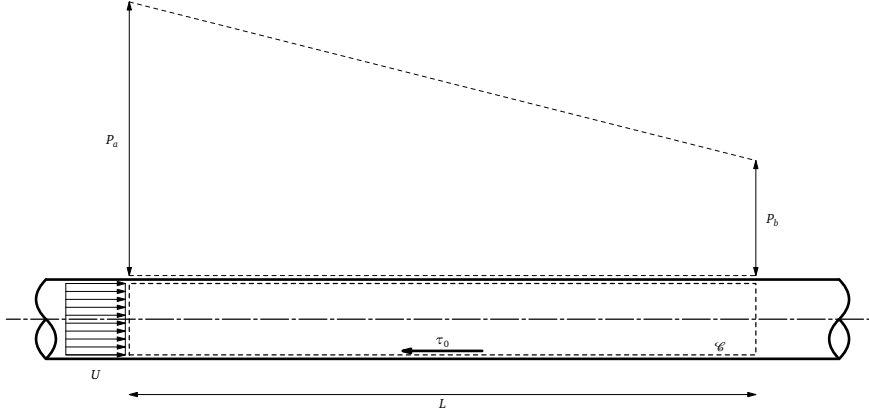


Figura 4.2: Escoamento clássico em um tubo com perda de carga.

Note primeiramente que a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\left[ \left( p_a + (1/2)\rho U_a^2 \right) - \left( p_b + (1/2)\rho U_b^2 \right) \right] (U_a A_a) = \rho A_b \ell \tilde{\mathcal{E}}_e,$$

ou seja, a “perda de carga” hidráulica entre as seções  $a$  e  $b$  é igual à dissipação de energia. Do ponto de vista de obter uma expressão final para  $\tilde{\mathcal{E}}_e$ , entretanto, é mais frutífero primeiro eliminar a diferença de pressão entre as sessões utilizando (4.6):

$$p_a - p_b = \rho(U_b - U_a)U_a \frac{A_a}{A_b},$$

e em seguida substituir na equação (4.7):

$$\begin{aligned} \rho(U_b - U_a) \frac{(U_a A_a)^2}{A_b} &= \frac{\rho}{2}(U_b^2 - U_a^2)(U_a A_a) + \rho A_b \ell \tilde{\mathcal{E}}_e, \\ (U_b - U_a)U_a \frac{A_a}{A_b} &= [(1/2)(U_a + U_b)(U_b - U_a)] + \frac{\ell \tilde{\mathcal{E}}_e}{U_a} \frac{A_a}{A_b}, \\ \frac{1}{2}(U_a + U_b) - U_a \frac{A_a}{A_b} &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a(U_a - U_b)} \tilde{\mathcal{E}}_e, \\ \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{A_a}{A_b} \right] U_a &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a^2 \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)} \tilde{\mathcal{E}}_e, \\ \tilde{\mathcal{E}}_e &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)^2 \frac{A_a}{A_b} \right] \frac{U_a^3}{\ell}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Note que (4.8) tem a mesma forma de (4.1). No entanto, há uma diferença significativa: enquanto que na sequência nós suporemos que (4.1) vale *pontualmente*, (4.8) dá a taxa de dissipação *média* dentro do volume de controle. Um argumento mais “crítico” — no sentido de que de fato não existe nada de excepcional em (4.8) — é que as duas equações têm que ter a mesma forma simplesmente pelo fato de que  $\bar{\mathcal{E}}_e$  e  $\tilde{\mathcal{E}}_e$  possuem as mesmas dimensões físicas. No entanto, a equação (4.1) aparecerá repetidamente neste livro, e espera-se que a dedução da análoga (4.8) ajude o estudante a compreender a sua motivação.

Nosso segundo exemplo, mostrado na figura 4.2, é o escoamento clássico ao longo de um tubo com perda de carga. Esse problema vai ser estudado detalhadamente do ponto de vista do perfil de velocidade, e de como a perda de carga é calculada, mais à frente neste texto. Por enquanto, vamos supor que há uma perda de carga linear ao

longo da tubulação e fazer a mesma aproximação de um perfil constante de velocidade na seção que fizemos no exemplo anterior. Os balanços integrais de massa, quantidade de movimento e energia entre as seções  $A$  e  $B$  do volume de controle  $\mathcal{C}$  indicado na figura resultam em

$$\begin{aligned} U &= \text{constante em } x, \\ (p_a - p_b)A - \tau_0 \times 2\pi RL &= 0, \\ (p_a - p_b)UA &= \underbrace{\rho(u_B - u_A)UA - \dot{Q}}_{\rho AL\tilde{\mathcal{E}}_e}, \end{aligned}$$

onde  $A = \pi R^2$  é a área da seção transversal, e  $\tau_0$  é a tensão de cisalhamento entre a parede do tubo e o escoamento. Da equação de balanço de quantidade de movimento,

$$p_a - p_b = \frac{2\tau_0 L}{R}.$$

Esta última, levada à equação de balanço de energia, produz

$$\begin{aligned} \frac{2\tau_0 L}{R} U &= \rho L \tilde{\mathcal{E}}_e, \\ 2 \frac{\tau_0}{\rho} \frac{U}{R} &= \tilde{\mathcal{E}}_e. \end{aligned}$$

Neste ponto, é conveniente introduzir o *coeficiente de arrasto*  $C_D$  e a *velocidade de atrito*  $u_*$ :

$$\tau_0 \equiv \rho C_D U^2, \quad (4.9)$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \equiv u_*, \quad (4.10)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{E}}_e = \frac{2}{\sqrt{C_D}} \frac{u_*^3}{R}. \quad (4.11)$$

Observe que, novamente, (4.11) tem a forma geral de (4.1). Novamente, trata-se de uma taxa de dissipação *média*, e um observador rigoroso poderá também argumentar que em sua essência (4.11) é simplesmente uma consequência das dimensões físicas de  $\tilde{\mathcal{E}}_e$ .

No entato, tanto (4.8) quanto (4.11) contam uma “história” importante: a taxa média de dissipação de energia mecânica  $\tilde{\mathcal{E}}_e$  está sendo *imposta* pelas escalas macroscópicas do escoamento. Observe como o coeficiente de viscosidade cinemática não comparece em nenhuma das duas equações. Em ambos os casos, o escoamento turbulento se “ajustará” a essa taxa imposta pelas escalas macroscópicas.

Hoje sabemos que o processo pelo qual a energia mecânica injetada no escoamento pelas escalas macroscópicas é dissipada possui dois “estágios”: no primeiro estágio, forma-se uma “cascata” de energia, que se redistribui sob a forma de energia cinética da turbulência em escalas progressivamente menores. O termo responsável por esse estágio nas equações de Navier-Stokes é o termo não-linear,  $u_k \partial u_i / \partial x_k$ . Em geral, supõe-se que esse processo é acompanhado pela geração de turbilhões sucessivamente menores,

e ele é bem descrito pelas equações de vorticidade. Em 3 dimensões, o processo de transferência inercial de energia é compreendido como sucessivos alongamentos de vórtices (*vortex stretching*) e entortamentos de vórtices (*vortex tilting*). Em um dado momento, as escalas espaciais que caracterizam esses vórtices são suficientemente pequenas para que a viscosidade do escoamento interaja diretamente com eles.

Esse é o segundo estágio, no qual a energia desses numerosos pequenos vórtices é dissipada. As escalas características da “faixa de dissipação” são  $\eta_u$ ,  $\tilde{u}$ , e  $\tau_u$ . Como veremos em seguida, um argumento dimensional simples sugere que  $\overline{\epsilon_e} \sim \nu(\hat{u}/\eta_u)^2$ . Nessas pequenas escalas o escoamento é “laminar”, no sentido de que o número de Reynolds formado pelas escalas locais de comprimento e de velocidade que caracterizam os menores vórtices do escoamento é da ordem de 1, como também veremos em detalhe a seguir.

## 4.2 – Uma definição formal das escalas macroscópicas

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\bar{u}$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de “covariâncias turbulentas”\*, por exemplo de  $\overline{u'_i u'_j}$ . Para o campo de velocidade, nós adotaremos inicialmente as seguintes estimativas:

$$\bar{u}_i \sim \tilde{u}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}}{\ell}, \quad (4.13)$$

$$\overline{u'_i u'_j} \sim \tilde{u}^2. \quad (4.14)$$

É muito importante observar que as ordens de grandeza em (4.12)–(4.14) são de uma extrema simplicidade, e que em escoamentos específicos elas podem vir a ser violadas. As análises de ordens de grandeza que faremos ao longo deste livro, portanto, devem sempre ser vistas com cuidado: sua aplicabilidade em escoamentos reais sempre deve ser testada e, quando necessário, modificada.

Um outro ponto importante é que, uma vez especificada a escala macroscópica de velocidade  $\tilde{u}$  por meio de (4.12) ou (4.14), (4.13) pode ser considerada como uma definição física ou fenomenológica de  $\ell$ , que fica associada aos gradientes existentes tanto do campo médio (caso de (4.13)), quando dos próprios momentos da turbulência, conforme veremos mais adiante no capítulo 6.

Uma dificuldade é que, como muitas vezes a notação de ordem de grandeza será utilizada em conjunto com a notação indicial de Einstein, a “ordem” de um termo envolvendo índices repetidos pode se referir a um ou alguns dos sub-termos, ou à soma de todos os sub-termos. Para evitar qualquer ambiguidade, nós usaremos  $\sim$  para indicar a ordem de grandeza do maior em módulo (e possivelmente outros) de todos os sub-termos; e  $\sim$  para indicar explicitamente a soma de todos os sub-termos. Portanto,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \sim \tilde{u}/\ell,$$

significa que

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right| \sim \tilde{u}/\ell,$$

---

\*Em Inglês, *eddy covariances*



enquanto que

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \sim \tilde{u}/\ell$$

significa que

$$\left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) \sim \tilde{u}/\ell.$$

Note que a segunda notação,  $\sim$ , só faz sentido quando houver pelo menos um índice repetido do lado esquerdo. Note também que (4.12)–(4.14) já seguem essa notação, ou seja: em cada uma delas, a ordem de grandeza refere-se a *termos individuais*, ou ao maior em módulo dos termos obtidos variando-se  $i$  e  $j$ .

Apesar de (4.14) não ser necessária nesta seção, nós a incluímos aqui para que a discussão a seguir fique auto-contida. Como vimos acima,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade. As equações (4.12)–(4.14), e suas generalizações óbvias para outras variáveis do escoamento, tais como densidade, pressão, concentração de um escalar e temperatura, constituem-se em um poderoso instrumento de análise das equações que regem um escoamento turbulento. Sua interpretação, entretanto, é difícil. Tennekes e Lumley (1972, p. 47) comentam sobre diversos erros comuns de interpretação de (4.12)–(4.14), e discutem em detalhe suas justificativas.

Além disso, elas não são necessariamente universais! Por exemplo, nada obriga que haja apenas uma escala de velocidade  $\tilde{u}$ , e uma escala de comprimento  $\ell$ , macroscópicas. Dependendo da geometria, e da complexidade do escoamento, várias escalas macroscópicas de velocidade e comprimento (e diversas outras variáveis, é claro) podem surgir.

No entanto, as relações (4.12)–(4.14) tendem a valer em escoamentos com cisalhamento médio que possuem uma única escala característica de velocidade, e uma única escala característica de comprimento (Tennekes e Lumley, 1972, p. 47–50). O essencial de (4.12)–(4.14) é a suposição de que as mesmas escalas  $\tilde{u}$  e  $\ell$  comparecem *tanto* na estimativa da ordem de grandeza dos gradientes de grandezas médias *quanto* das covariâncias turbulentas. Veremos mais à frente que  $\ell$  também pode ser associada à *escala integral da turbulência*, que tem uma definição estatística precisa. Como observam Tennekes e Lumley (1972), essa suposição de que as escalas macroscópicas servem a dois papéis reflete o fato de que elas são as únicas escalas características do escoamento; conseqüentemente, seu surgimento (a menos de coeficientes da ordem de 1) é uma exigência da consistência dimensional das expressões envolvidas.

Naturalmente, essa hipótese restringe a complexidade dos escoamentos que podemos analisar utilizando as equações (4.12)–(4.14); mesmo em situações ligeiramente mais complexas, idéias similares revelam-se úteis e em geral ajudam a compreender ou modelar melhor o problema.

As equações (4.12)–(4.13) são suficientes para estimarmos a contribuição da taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\overline{\mathcal{E}_{em}}$  para a taxa total de dissipação de energia cinética,  $\overline{\mathcal{E}_e}$ . Levando (4.13) em (3.110), encontramos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}_{em}} &\sim \nu_u \left( \frac{\tilde{u}}{\ell} \right)^2 \\ &= \nu_u \frac{\tilde{u}^3}{\ell^2} \\ &= \frac{\nu_u}{\ell} \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{E}_{em}} \sim \text{Re}_\ell^{-1} \overline{\mathcal{E}_e}. \quad (4.15)$$

Em (4.15), nós encontramos pela primeira vez o número de Reynolds (na escala  $\ell$ ):

$$\text{Re}_\ell \equiv \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u}, \quad (4.16)$$

e usamos a estimativa (4.1) para a taxa total de dissipação.

De fato, se nós admitirmos como vínhamos comentando que a dissipação total é dada por (4.1), (4.15) nos informa que os gradientes do escoamento médio são extremamente ineficazes para produzir essa dissipação em escoamentos turbulentos, nos quais o número de Reynolds em (4.16) é frequentemente da ordem de  $10^3$  ou maior.

A figura simples, porém extremamente útil, que surge é a seguinte: se a taxa de dissipação total de energia cinética é imposta pelas “grandes escalas”  $\tilde{u}$ ,  $\ell$ , do escoamento, essas mesmas escalas produzem gradientes de velocidade (e consequentemente taxas de deformação) que são incapazes de dissipar a energia cinética nessa taxa!

Isso significa que devem existir no escoamento gradientes de velocidade, e consequentemente taxas de deformação, *muito maiores*. Para encontrá-las, precisamos obviamente estudar a ordem de grandeza da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência,  $\overline{\epsilon_e}$ .

### 4.3 – Uma definição formal das escalas microscópicas

Se tomarmos (formalmente) o limite  $\text{Re}_\ell \rightarrow \infty$ , a contribuição de  $\overline{\mathcal{E}_{em}}$  para  $\overline{\mathcal{E}_e}$  tende a zero em (4.15). Isso *não é uma mera formalidade*. Na maioria dos escoamentos naturais e industriais, os números de Reynolds são muito altos.

Por exemplo, a  $20^\circ \text{C}$ ,  $\nu_{u[\text{água}]} = 1,005 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , e  $\nu_{u[\text{ar}]} = 1,50 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (à pressão atmosférica padrão ao nível do mar). Então, para um rio com uma velocidade típica  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  e uma profundidade típica  $\ell = 1 \text{ m}$ ,  $\text{Re}_\ell = 10^6$ . Da mesma forma, para uma velocidade do vento  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  a uma altura  $\ell = 10 \text{ m}$ , nós temos  $\text{Re}_\ell = 10^6$ .

A equação (4.15) então nos dá  $\overline{\mathcal{E}_e} \approx \overline{\epsilon_e}$  nessas condições (veja (3.110) e (4.1)). Retornando a (3.111), isso só pode significar que a ordem de grandeza de  $\overline{s'_{ij}s'_{ij}}$  (e de  $(\partial u'_k/\partial x_k)^2$ ) deve ser tal que

$$\overline{s'_{ij}s'_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}\right)^2} \sim \left(\frac{\tilde{u}}{\eta_u}\right)^2, \quad (4.17)$$

de tal forma que podemos definir

$$\overline{\epsilon_e} = \nu_u \left[ \overline{s'_{ij}s'_{ij}} - \frac{1}{3} \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}\right)^2} \right] \equiv \nu_u \left(\frac{\tilde{u}}{\eta_u}\right)^2. \quad (4.18)$$

A equação (4.17) mostra claramente que a ordem de grandeza do *gradiente microscópico de velocidade*  $\tilde{u}/\eta_u$  é definida por uma *média quadrática*. Por sua vez, (4.18) é suficiente para definir esse gradiente, mas é por si só incapaz de “separar” as escalas microscópicas de velocidade,  $\tilde{u}$ , e de comprimento,  $\eta_u$ . Isso pode ser feito de duas maneiras.

A primeira é puramente dimensional: se as únicas grandezas disponíveis para definir  $\eta_u$  e  $\tilde{u}$  são  $\overline{\epsilon_e}$  e  $\nu_u$ , então (4.2) e (4.3) seguem-se necessariamente do Teorema dos  $\Pi$ s de Buckingham (Buckingham, 1914). Para isso, escrevemos

$$\eta_u = [\overline{\epsilon_e}]^{a_1} [\nu_u]^{b_1}, \quad (4.19)$$

$$\check{u} = [\overline{\epsilon_e}]^{a_2} [\nu_u]^{b_2}. \quad (4.20)$$

A equação (4.19) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_u \rrbracket &= \llbracket \overline{\epsilon_e} \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_1}, \\ L &= [L^2 T^{-3}]^{a_1} [L^2 T^{-1}]^{b_1}, \end{aligned}$$

onde  $\llbracket \rrbracket$  significa “a dimensão de”,  $L$  é a dimensão “tempo”,  $L$  é a dimensão “comprimento”, etc., e donde se segue que

$$\begin{aligned} 1 &= 2a_1 + 2b_1, \\ 0 &= -3a_1 - b_1, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = -1/4$ ,  $b_1 = 3/4$ , e portanto obtém-se (4.2).

Analogamente, de (4.20),

$$\begin{aligned} \llbracket \check{u} \rrbracket &= \llbracket \overline{\epsilon_e} \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_2}, \\ L T^{-1} &= [L^2 T^{-3}]^{a_2} [L^2 T^{-1}]^{b_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 1 &= 2a_2 + 2b_2, \\ -1 &= -3a_2 - b_2, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = b_2 = 1/4$ , donde (4.3) se segue.

A segunda é encontrar  $\eta_u$ ,  $\check{u}$  como a solução de um sistema de duas equações, a primeira das quais é (4.18). A segunda equação é obtida a partir da intuição (*insight*) de que, *localmente*, o escoamento deve ser laminar. O número de Reynolds associado deve ser de ordem 1:

$$\text{Re}_{\eta_u} = \frac{\check{u}\eta_u}{\nu_u} = 1. \quad (4.21)$$

A solução do sistema (4.18)–(4.21) produz, novamente, as microescalas de Kolmogorov dadas por (4.2) e (4.3) (verifique).

#### 4.4 – A cascata de energia

Conforme notado pela primeira vez por Kolmogorov (1941), (4.1) não se aplica apenas à escala integral de comprimento  $\ell$ . Com alguma modificação, ela pode ser usada para todas as escalas intermediárias de comprimento  $r$  entre  $\ell$  e  $\eta_u$ . Para ver isso de uma maneira um pouco mais formal, seja

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad (4.22)$$

a separação entre dois pontos no espaço. Considere as componentes de velocidade em  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  longitudinais a  $\mathbf{r}$ ,

$$u_{\parallel} \equiv \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.23)$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$ . Suponha agora que, para  $r \ll \ell$ , o escoamento turbulento seja homogêneo. Isso corresponde ao conceito, introduzido por Kolmogorov (1941), de *homogeneidade local*. Por que a restrição  $r \ll \ell$ ? Porque *fisicamente*, a maioria dos escoamentos apresenta características estatísticas que variam consideravelmente sobre distâncias da

ordem de  $\ell$ . Isso significa que supor homogeneidade *global* (i.e., para qualquer  $r$ ) é uma má hipótese de modelagem. Por outro lado, sobre distâncias pequenas em relação a  $\ell$ , os escoamentos turbulentos variam estatisticamente muito menos, e a hipótese de homogeneidade se torna muito mais razoável.

Nessa escala restrita (local) de distâncias, então, podemos definir uma estatística, a *função de estrutura longitudinal de ordem 2*, que depende apenas de  $r$ :

$$D_{||uu}(r) \equiv \overline{[u_{||}(\mathbf{x}_2) - u_{||}(\mathbf{x}_1)]^2} \quad (4.24)$$

A rigor, para que a definição (4.24) seja feita basta que os incrementos de velocidade longitudinal  $u_{||}(\mathbf{x}_2) - u_{||}(\mathbf{x}_1)$  sejam *homogêneos*, e não as componentes de velocidade  $u_{||}$  elas mesmas. Além disso a hipótese de incrementos (localmente) homogêneos é mais fraca (mais geral) do que a hipótese de componentes de velocidade (localmente) homogêneas. Na maioria das aplicações de Engenharia, entretanto, é razoável utilizar a hipótese mais restritiva de homogeneidade das componentes de velocidade. Isso traz como benefício a possibilidade de definir um conjunto mais amplo de estatísticas (incluindo espectros) da turbulência, e não tem sido, historicamente, um impedimento para a análise estatística de séries de turbulência observadas. É possível que Kolmogorov tivesse a esperança de que, trabalhando com incrementos de velocidade, fosse possível evitar a decomposição de Reynolds e suas infundáveis complicações. Na experiência do autor, entretanto, na prática é impossível evitar a decomposição de Reynolds, e não parece haver um formalismo capaz de substituí-la por cálculos baseados apenas em incrementos de velocidade *para todas as situações de interesse prático em Engenharia*.

Se, além de localmente homogêneo, o escoamento for localmente *isotrópico*,  $D_{||uu} = D_{||uu}(r)$  apenas. Isso sem dúvida é uma analogia com o caso molecular, em que as velocidades das moléculas se distribuem igualmente em todas as direções, e do *Teorema de equipartição de energia*: a energia cinética das moléculas de um gás divide-se igualmente nas 3 direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . No caso de turbulência, a situação é mais complicada: em escoamentos no mundo real, as “grandes escalas”  $\ell$  quase nunca são homogêneas, uma vez que, como veremos, existem direções preferenciais de produção da energia cinética da turbulência. Nesse sentido, o termo *local* desempenha um papel importante: aqui, a hipótese é que a natureza difusiva da turbulência *tende* a equalizar a distribuição direcional de energia cinética da turbulência apenas para escalas  $r$  muito menores do que  $\ell$ . *Apenas* nessas escalas o escoamento (segundo essa hipótese) é isotrópico. Nesse caso, escrevemos

$$D_{||uu}(r) = \overline{[u_{||}(r) - u_{||}(0)]^2} \equiv (\delta u_r)^2, \quad (4.25)$$

e definimos uma escala de velocidade  $\delta u_r$  na escala de comprimento  $r$ .

Outra hipótese da teoria de Kolmogorov é que, para  $\eta_u \ll r \ll \ell$ , (4.1) continua valendo na forma

$$\overline{\epsilon}_e = C_2^{-3/2} \frac{(\delta u_r)^3}{r}, \quad (4.26)$$

onde  $C_2$  é uma constante adimensional. Para números de Reynolds  $Re_\ell$  suficientemente grandes,  $C_2$  deve ser uma constante universal. Segue-se, imediatamente, a previsão da teoria de Kolmogorov (1941) para a faixa inercial da função de estrutura:

$$D_{||uu}(r) = C_2 \overline{\epsilon}_e^{-2/3} r^{2/3}. \quad (4.27)$$

Essencialmente, (4.27) é apenas a afirmativa de que  $(\delta u_r)^3/r$  é invariante para uma faixa de separações  $r$  que correspondem a diferenças de velocidade  $\delta u_r$ . Essa faixa,

$$\eta_u \ll r \ll \ell, \quad (4.28)$$

é a *faixa inercial*. A existência da faixa inercial *depende* do número de Reynolds. Para que uma faixa inercial suficientemente grande exista, é preciso que  $\text{Re}_\ell$  seja suficientemente alto.

É importante observar que (4.27) também pode ser obtida, facilmente, por meio exclusivamente de análise dimensional. Para isso, basta especificar que  $D_{||uu}(r)$  depende apenas de  $\overline{\epsilon}_e$  e de  $r$  na faixa inercial,

$$D_{||uu}(r) = C_2 \overline{\epsilon}_e^a r^b,$$

igualar as dimensões dos dois lados, e obter  $a = 2/3$ ,  $b = 1/3$ .

## 4.5 – A função de autocovariância e a microescala de Taylor

Se  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  é um processo estocástico homogêneo podemos definir uma função de autocovariância longitudinal, de forma análoga ao que fizemos para definir (4.24):

$$C_{||uu}(\mathbf{r}) \equiv \overline{[u'_{||}(\mathbf{x} + \mathbf{r})u'_{||}(\mathbf{x})]} = \overline{[u'_{||}(\mathbf{r})u'_{||}(\mathbf{0})]}, \quad (4.29)$$

onde a segunda igualdade é uma consequência da homogeneidade.

É comum haver uma “direção principal” ao longo da qual o escoamento ocorre. Por exemplo, em canais a direção do próprio canal, e em escoamentos atmosféricos a direção do vento médio, etc.. Seja  $x_1$  essa direção. Considere agora  $\mathbf{r}$  alinhado com  $x_1$ , de forma que  $\mathbf{r} = (x_1, 0, 0)$  e  $u'_{||} = u'_1$ . Neste caso  $C_{||uu}$  depende apenas de  $x_1$ , e por simplicidade o rebatizamos de  $C_{11}(x_1)$ . Algumas definições úteis se seguem.

**A escala integral estatística** Por simplicidade, vamos definir uma escala integral de comprimento *estatística*  $\ell_s$  supondo (provisoriamente) que a turbulência seja homogênea, e escolhendo as flutuações  $u'_1$  na direção  $x_1$ :

$$2\overline{u'_1 u'_1} \ell_s \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} C_{11}(x_1) dx_1. \quad (4.30)$$

Existem diversas formas de se escolher *estatisticamente* uma escala de velocidade  $\tilde{u}$  (por exemplo, a *velocidade de atrito* é sempre uma candidata); para os nossos propósitos (e também porque em turbulência isotrópica  $\overline{u'_1 u'_1} = \overline{u'_2 u'_2} = \overline{u'_3 u'_3}$ ) provavelmente basta usar o desvio-padrão:

$$\tilde{u} \equiv \sqrt{\overline{u'_1 u'_1}}. \quad (4.31)$$

Uma escala integral estatística de tempo agora se segue naturalmente,

$$\tilde{t} \equiv \ell_s / \tilde{u}. \quad (4.32)$$

Em geral os textos e artigos científicos mencionam as “escalas integrais”, sem serem precisos nem atentarem ao fato de que em processos estocásticos multidimensionais existem muitas possíveis escalas integrais, e ainda que quando a turbulência for não-homogênea a definição clássica baseada na função de autocorrelação é simplesmente inaplicável, já que neste tipo de turbulência a função de autocorrelação simplesmente *não existe*.

**A microescala de Taylor** Prosseguindo, define-se a microescala de Taylor  $\lambda$  por

$$\left. \frac{\partial^2 C_{1,1}(x_1)}{\partial x_1 \partial x_1} \right|_{x_1=0} \equiv -2 \frac{\overline{u'_1 u'_1}}{\lambda^2}. \quad (4.33)$$

**Teorema 1** *Em turbulência homogênea,*

$$\frac{\overline{\partial u'_1}{\partial x_1}}{\partial x_1} = 2 \frac{\overline{u'_1 u'_1}}{\lambda^2}. \quad (4.34)$$

Prova:

Comente que Lumley se esqueceu do fator 2 em sua equação 3.2.10

$$\begin{aligned} C_{1,1}(x_1) &= \overline{u'_1(0,0,0)u'_1(x_1,0,0)}, \\ \frac{\partial C_{1,1}(x_1)}{\partial x_1} &= \overline{u'_1(0,0,0) \frac{\partial u'_1(x_1,0,0)}{\partial x_1}}, \\ \frac{\partial^2 C_{1,1}(x_1)}{\partial x_1^2} &= \overline{u'_1(0,0,0) \frac{\partial^2 u'_1(x_1,0,0)}{\partial x_1 \partial x_1}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Mas em turbulência homogênea, vale (1.22), na forma

$$\overline{u'_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}} = 0; \quad (4.36)$$

derivando novamente esta última expressão,

$$\overline{u'_1 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1^2}} + \overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}} = 0, \quad (4.37)$$

donde se segue (4.34). Esta última, combinada com (4.31), permite escrever

$$\frac{\overline{\partial u'_1}{\partial x_1}}{\partial x_1} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\lambda^2}, \quad (4.38)$$

ou, de forma mais geral,

$$\overline{\epsilon_e} \sim \overline{s'_{ij} s'_{ij}} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\lambda^2}. \quad (4.39)$$

Portanto, se a escala de velocidade de dissipação fosse  $\tilde{u}$ , a escala de comprimento de dissipação seria  $\lambda$ : esta foi a interpretação original (e errônea) dada por Taylor (1935) para  $\lambda$ ; agora sabemos que as escalas de dissipação são na verdade  $\check{u}$  e  $\eta_u$ .

## 4.6 – Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos

Os gradientes microscópicos de velocidade também podem ser entendidos em termos de médias quadráticas como

$$\overline{s'_{ij} s'_{ij}} \sim \frac{\overline{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}{\partial x_j} \sim \left( \frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2. \quad (4.40)$$

Esses gradientes microscópicos podem, agora, ser facilmente relacionados com os gradientes macroscópicos (sempre em *ordem de magnitude*), como se segue:

$$\begin{aligned}
 v_u \frac{\check{u}^2}{\eta_u^2} &= \frac{\tilde{u}^3}{\ell}, \\
 \frac{\check{u}}{\eta_u} &= \left( \frac{\tilde{u}^3}{v_u \ell} \right)^{1/2} \\
 &= \left( \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} \frac{\tilde{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\tilde{u}}{\ell} \left( \frac{\tilde{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\tilde{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Para valores típicos na atmosfera próximo à superfície, e supondo, de forma conservadora,  $\ell \sim 1\text{m}$ ,  $\tilde{u} \sim 1\text{ m s}^{-1}$ ,  $v_u = 1,509 \times 10^{-5}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ ,  $\text{Re}_\ell = 662690$ ,  $\text{Re}_\ell^{1/2} \sim 1000$ . Os gradientes microscópicos de velocidade são mil vezes maiores que os gradientes macroscópicos.

Além disso, é útil registrar, para uso posterior, o seguinte: de (4.1) e (4.2), segue-se que

$$\begin{aligned}
 \eta_u &= \left( v_u^3 \frac{\ell}{\tilde{u}^3} \right)^{1/4}, \\
 \eta_u^4 &= \frac{v_u^3 \ell}{\tilde{u}^3}, \\
 \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \frac{v_u^3}{\ell^3 \tilde{u}^3}, \\
 \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \text{Re}_\ell^{-3}, \\
 \frac{\eta_u}{\ell} &= \text{Re}_\ell^{-3/4}.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Analogamente,

$$\frac{\check{u}}{\tilde{u}} = \text{Re}_\ell^{-1/4}. \tag{4.43}$$

Da definição da microescala de Taylor segue-se agora que

$$\left( \frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2 = \left( \frac{\tilde{u}}{\lambda} \right)^2$$

ou

$$\frac{\check{u}}{\tilde{u}} = \frac{\eta_u}{\lambda} = \text{Re}_\ell^{-1/4}. \tag{4.44}$$

Portanto, para números de Reynolds altos, a microescala de Taylor é *muito* maior do que a microescala de dissipação.

## 4.7 – Macro e microescalas de temperatura

Macro e microescalas adicionais devem ser adicionadas à lista (4.1)–(4.3) quando a temperatura representa um papel importante em um escoamento turbulento. Começamos por notar, sem demonstração (ainda) que existe uma cascata de semi-variância de temperatura da turbulência que é análoga à cascata de energia cinética da turbulência que discutimos na seção 4.4.

Dizer onde isso será feito!

Na seção 3.10, nós obtivemos

$$\overline{\epsilon_{TT}} = \nu_T \frac{\overline{\partial T' \partial T'}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.45)$$

para a taxa de dissipação de semi-variância da temperatura da turbulência. A equação análoga a (4.1) é

$$\overline{\epsilon_{TT}} \sim \frac{\tilde{T}^2 \tilde{u}}{\ell}. \quad (4.46)$$

Em (4.46),  $\tilde{T}$  é uma macroescala de temperatura, e estamos supondo que a macroescala de comprimento associada à temperatura é o mesmo  $\ell$  já utilizado antes para a energia cinética.

A equação que define a microescala de gradientes de temperatura análoga a (4.18) é

$$\overline{\epsilon_{TT}} = \nu_T \frac{\check{T}^2}{\eta_T^2}. \quad (4.47)$$

onde  $\check{T}$  é a microescala de temperatura;  $\eta_T$  é a microescala de comprimento para temperatura; e  $\tilde{u}$  é a microescala de velocidade.

Para separar  $\check{T}$  de  $\eta_T$ , nós podemos recorrer ao Teorema dos Pi's, e escrever

$$\eta_T = [\langle \mathcal{E}_{TT} \rangle]^{a_1} [\nu_T]^{b_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{c_1}, \quad (4.48)$$

$$\check{T} = [\langle \mathcal{E}_{TT} \rangle]^{a_2} [\nu_T]^{b_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{c_2}, \quad (4.49)$$

Note que precisamos *incluir*  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  na lista de variáveis intervenientes. A equação (4.48) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_T \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{TT} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_T \rrbracket^{b_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{c_1}, \\ \mathbb{L} &= [\Theta^2 \mathbb{T}^{-1}]^{a_1} [\mathbb{L}^2 \mathbb{T}^{-1}]^{b_1} [\mathbb{L}^2 \mathbb{T}^{-3}]^{c_1}, \end{aligned}$$

donde agora

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= -3c_1, \\ 2(b_1 + c_1) &= 1, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 3/4$ ,  $c_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\eta_T = \left( \frac{\nu_T^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4}, \quad (4.50)$$

um resultado totalmente análogo a (4.2), exceto que  $\nu_T$  aparece no lugar de  $\nu_u$ .



Já (4.49) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_T \rrbracket^{b_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{c_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \mathcal{T}^{-1}]^{a_2} [L^2 \mathcal{T}^{-1}]^{b_2} [L^2 \mathcal{T}^{-3}]^{c_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - 3c_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = -1/4$ . Segue-se que

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \nu_T^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4}, \quad (4.51)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{T}}^2 &= \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \nu_T^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/2}, \\ \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle &= \check{\mathcal{T}}^2 \nu_T^{-1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/2}, \\ &= \nu_T \check{\mathcal{T}}^2 \nu_T^{-3/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/2} \\ &= \nu_T \check{\mathcal{T}}^2 \left[ \underbrace{\nu_T^{-3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/4}}_{\eta_{\mathcal{T}}^{-1}} \right]^2 \\ &= \nu_T \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \end{aligned}$$

Naturalmente, esse resultado é o mesmo que (4.47): a obtenção de  $\eta_{\mathcal{T}}$  por meio do Teorema dos Pi's em (4.49) é equivalente à definição (4.47).

Esse resultado, representado pelas escalas (4.50) e (4.51), entretanto, é limitado pelas hipóteses que fizemos na aplicação do Teorema dos Pi's em (4.48)–(4.49): note que nós estamos supondo que as microescalas associadas à temperatura *não dependem da viscosidade cinemática*  $\nu_u$ .

Na prática, isso só é verdade se o número de Prandtl do fluido,

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu_u}{\nu_T}, \quad (4.52)$$

for da ordem de 1. De fato, se  $\text{Pr} \sim 1$ , apenas uma das difusividades é necessária em (4.48)–(4.49): a inclusão da outra levaria a um sistema com mais incógnitas do que equações, já que há apenas 3 dimensões subjacentes ( $\Theta$ ,  $L$  e  $T$ ).

Se  $\text{Pr} \ll 1$  ou  $\text{Pr} \gg 1$ , entretanto, (4.50) deixa de ser verdadeira. A teoria envolvida deve, então, necessariamente incluir tanto  $\nu_T$  quanto  $\nu_u$ : ela foi desenvolvida por Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959), e prevê que a microescala de comprimento  $\eta_{\mathcal{T}}$  depende de  $\text{Pr}$ .

Para  $\text{Pr} \geq 1$ , Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) obtiveram

$$\frac{\eta_{\mathcal{T}}}{\eta_u} = \text{Pr}^{-1/2}, \quad (4.53)$$

donde

$$\check{\eta} = \left( \frac{\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle}{\nu_T} \right)^{1/2} \eta_{\mathcal{T}}. \quad (4.54)$$

Os resultados de [Batchelor \(1959\)](#) e [Batchelor et al. \(1959\)](#) podem ser obtidos com uma relativa facilidade da seguinte maneira. Em primeiro lugar nós incluímos  $\nu_u$  na lista de variáveis que governam a dinâmica da dissipação das flutuações de temperatura. Em segundo lugar, nós incluímos uma nova dimensão  $L_\theta$  no problema.

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_{\mathcal{T}}$  e para  $\check{\eta}$  agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_T]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \quad (4.55)$$

$$\check{\eta} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_T]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2}, \quad (4.56)$$

A equação (4.55) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_1} \llbracket \nu_T \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{d_1}, \\ L_\theta &= [\Theta^2 T^{-1}]^{a_1} [L^2 T^{-1}]^{b_1} [L_\theta^2 T^{-1}]^{c_1} [L^2 T^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(b_1 + d_1) &= 0, \\ 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= \nu_u^{1/4} \nu_T^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{1/4} \nu_u^{1/2} \nu_u^{-1/2} \nu_T^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \left( \frac{\nu_T}{\nu_u} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\nu_u^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{\nu_u}{\nu_T} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

que é o mesmo que (4.53), de [Batchelor \(1959\)](#). Já (4.56) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\eta} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_2} \llbracket \nu_T \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{d_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 T^{-1}]^{a_2} [L^2 T^{-1}]^{b_2} [L_\theta^2 T^{-1}]^{c_2} [L^2 T^{-3}]^{d_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} v_T^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = v_T \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (4.51) e (4.47). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ .

### O outro caso

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_{\mathcal{T}}$  e para  $\check{\mathcal{T}}$  agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_T]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \quad (4.58)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_T]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2}, \quad (4.59)$$

mas as dimensões serão diferentes! Em particular,

$$[\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle] = \Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_\theta^{-1}$$

A equação (4.58) produz

$$\begin{aligned} [\eta_{\mathcal{T}}] &= [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_T]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \\ \text{L}_\theta &= [\Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_\theta^{-1}]^{a_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_1} [\text{L}_\theta^2 \text{T}^{-1}]^{c_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(a_1 + b_1 + d_1) &= 0, \\ -a_1 + 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= \nu_u^{1/4} \nu_T^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{1/4} \nu_u^{1/2} \nu_u^{-1/2} \nu_T^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \left( \frac{\nu_T}{\nu_u} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\nu_u^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{\nu_u}{\nu_T} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

que é o mesmo que (4.53), de Batchelor (1959). Já (4.59) produz

$$[\check{\mathcal{T}}] = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_T]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2},$$

$$\Theta = [\Theta^2 \text{T}^{-1}]^{a_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_2} [\text{L}_0^2 \text{T}^{-1}]^{c_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_2},$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \nu_T^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_T \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (4.51) e (4.47). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ .

#### 4.8 – Escalas macro e microscópicas de temperatura

A taxa dissipação de semivariância de temperatura foi vista na seção 3.10. As dissipações total  $\overline{\epsilon_{T*}}$ , da semivariância média  $\overline{\epsilon_{Tm}}$ , e da semivariância das flutuações de temperatura  $\overline{\epsilon_{TT}}$  foram definidas em (3.116). Por outro lado os gradientes microscópicos (médios quadráticos) de temperatura  $\check{\mathcal{T}}/\eta_T$  têm ordem de grandeza

$$\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \sim \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_T} \right)^2. \quad (4.61)$$

Primeiramente, precisamos reconhecer o papel central da taxa de dissipação de semi-variância da temperatura. Em analogia com (4.1), temos agora

$$\overline{\epsilon_{T*}} \approx \overline{\epsilon_{TT}} \sim \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\ell}. \quad (4.62)$$

Observe que  $\llbracket \overline{\epsilon_{TT}} \rrbracket = \Theta^2 \text{T}^{-1}$ , e que para produzirmos uma escala de tempo precisamos utilizar  $\tilde{u}/\ell$ . Por outro lado, os gradientes microscópicos de temperatura devem ser tais que, analogamente com (4.18),

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_T \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \quad (4.63)$$

Então,

$$\begin{aligned} \nu_T \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}^2} &= \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\ell}, \\ \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} &= \left( \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\nu_T \ell} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\tilde{\mathcal{T}}^2}{\ell^2} \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_T} \right)^{1/2} \\
&= \frac{\tilde{\mathcal{T}}}{\ell} \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_T} \right)^{1/2} \\
&= \frac{\tilde{\mathcal{T}}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

(4.64) utiliza um número de Péclet

$$\text{Pe}_\ell = \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_T} = \text{Re}_\ell \text{Pr} \tag{4.65}$$

que é análogo ao número de Reynolds  $\text{Re}_\ell$  definido em (4.16).

# 5

## As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq

---

As equações de Navier-Stokes, e da energia, podem ser consideravelmente modificadas antes de serem usadas em problemas de interesse físico que envolvam escoamentos naturais. As modificações necessárias adotadas são de duas naturezas.

Primeiramente, utilizando-se uma decomposição proposta por Boussinesq para os campos de velocidade, densidade, temperatura e pressão que é baseada em um estado hidrostático de referência, é possível obter um conjunto de equações grandemente simplificadas. As principais simplificações são a substituição da densidade variável por uma densidade de referência (que pode ser variável de acordo com uma distribuição hidrostática, mas que não precisa mais ser *prognosticada*), e a adoção de um campo de velocidade solenoidal. Portanto, uma aproximação de incompressibilidade é obtida, *mesmo em escoamentos com densidade variável*. Nas próximas seções nós vamos mostrar que isso não constituiu nenhum paradoxo.

Em segundo lugar, a equação da energia é essencialmente inútil na variável dependente  $\mathcal{U}$ . É preciso manipular a equação (3.78) e reescrevê-la em termos de variáveis prognósticas “úteis”, isto é, efetivamente mensuráveis ou calculáveis. Via de regra, essas variáveis são ou a temperatura termodinâmica  $T$ , ou a temperatura potencial  $\Theta$ .

Ao final do capítulo, teremos obtido um conjunto de equações para as variáveis dependentes *médias*  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$ , e  $\bar{T}$  (ou  $\bar{\theta}$ ) as quais, por sua vez, nos dão informações úteis sobre os escoamentos do mundo real.

### 5.1 – O estado hidrostático de referência, e a altura de escala

Nesta seção nós obtemos um “estado hidrostático de referência” suficientemente geral para gases perfeitos e líquidos nas condições normalmente encontradas no ambiente. Esse estado será denominado  $(\rho_r, p_r, T_r)$ , e dependerá somente da altura  $z$ .

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura.

Considere as duas formas para a diferencial da entalpia obtidas no capítulo 3, (3.83) e (3.85); igualando ambas,

$$d\mathcal{h} = c_p dT + \left( \frac{\partial \mathcal{h}}{\partial p} \right)_T dp = v dp + T ds.$$

Utilizando ainda (3.88) e supondo um processo isentrópico ( $ds = 0$ ),

$$d\bar{h} = v dp = c_p dT + v (1 - \beta_p T) dp, \quad (5.1)$$

$$c_p dT = \beta_p T v dp. \quad (5.2)$$

Utilizando a equação da hidrostática,

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{v} \Rightarrow v dp = -g dz, \quad (5.3)$$

e substituindo em (5.2), obtemos um resultado central e muito importante:

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_p T \frac{g}{c_p} \quad (5.4)$$

O sistema de equações diferenciais (5.3)–(5.4) pode ser resolvido simultaneamente, pois  $\beta_p = \beta_p(p, T)$  e  $1/\rho = v = v(p, T)$  (essa última é a equação de estado). Portanto, em princípio, temos, após a integração a partir das condições iniciais  $p_0, T_0, \rho_0$  em  $z = 0$ , os perfis do estado termodinâmico de referência  $p_r(z)$ ,  $T_r(z)$  e  $\rho_r(z)$ .

Um parâmetro essencial para a análise de escala das equações da Mecânica dos Fluidos aplicadas a escoamentos naturais é a “altura de escala”  $D$  (em Inglês, *scale height*). Ela é definida a partir do estado de referência hidrostático de densidade:

$$D \equiv \left| \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_r(0)}{dz} \right|^{-1}. \quad (5.5)$$

A altura de escala pode ser facilmente obtida usando (3.81), (3.82), (5.3) e (5.4):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{v}, \\ d\rho &= -\frac{1}{v^2} dv; \\ d\rho &= \frac{d\rho}{dv} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \frac{d\rho}{dv} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp \\ &= -\frac{1}{v^2} (v\beta_p) dT + -\frac{1}{v^2} (-v\kappa_T) dp \\ &= -\rho\beta_p dT + \rho\kappa_T dp \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta_p dT + \kappa_T dp. \quad (5.7)$$

A equação (5.7) é um resultado (intermediário) importante para a estimativa da importância das flutuações de temperatura e de pressão sobre as de densidade. Por sua vez, a divisão de (5.6) por  $dz$  produz

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &= -\rho\beta_p \left( -\beta_p T \frac{g}{c_p} \right) + \rho\kappa_T (-\rho g); \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} &= \beta_p^2 T \frac{g}{c_p} - \kappa_T \rho g \Rightarrow \\ D &= \left| \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_r(0)}{dz} \right|^{-1} = \left| \beta_p^2 T_0 \frac{g}{c_p} - \kappa_T \rho_0 g \right|^{-1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para água a  $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288,15\text{ K}$ , tem-se

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 999,1\text{ kg m}^{-3}, \\ c_p &= 4,186 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}, \\ \beta_p &= 1,5 \times 10^{-4}\text{ K}^{-1}, \\ \kappa_T &= 4,9 \times 10^{-10}\text{ Pa}^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto,  $D_{\text{água}} = 2,089 \times 10^5\text{ m}$ .

Também é conveniente relacionar os valores de  $\beta_p$  e  $\kappa_T$  da água com a pressão e a temperatura ambientes. Para os mesmos valores de referência acima, e  $T_0 = 288,15\text{ K}$ ,  $p_0 = 101325\text{ Pa}$ ,

$$\beta_p^{-1} \approx 23T_0, \quad (5.9)$$

$$\kappa_T^{-1} \approx 20000p_0. \quad (5.10)$$

Note que  $T_0$  em (5.9) é necessariamente dado em Kelvins.

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$p = \rho RT, \quad \text{ou} \quad p v = RT, \quad (5.11)$$

onde  $R$  é a constante específica do gás (ou da particular mistura de gases: por exemplo, para o ar seco tem-se  $R = 287\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ,  $c_p = 1005\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , e  $c_v = 718\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ),  $p$  é a pressão termodinâmica, e  $T$  é a temperatura. Diferenciando-se (5.11), obtém-se imediatamente:

$$dp = R\rho dT + RTd\rho \quad \text{ou} \quad p dv + v dp = R dT, \quad (5.12)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}. \quad (5.13)$$

Portanto, para o ar teremos

$$\begin{aligned}v &= \frac{RT}{p}, \\ \beta_p &= \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{pv} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T},\end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \frac{RT}{p^2} = -\frac{1}{p}, \quad (5.15)$$

e

$$\begin{aligned}\beta_p^2 T \frac{g}{c_p} - \frac{\kappa_T g}{v} &= \frac{g}{c_p T} - \frac{g}{RT} \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{1}{c_p} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{R - c_p}{c_p R} \right) \\ &= -\frac{c_v}{c_p R} \frac{g}{T}.\end{aligned} \quad (5.16)$$

Para o ar seco, com  $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288,15\text{ K}$ ,  $R = 287\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ,  $c_p = 1005\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$  e  $c_v = 718\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , obtém-se  $D_{\text{ar}} = 1,180 \times 10^4\text{ m}$ .



## 5.2 – O estado de referência em uma atmosfera adiabática seca

O valor da taxa de variação de temperatura em (5.4), com  $\beta_p = 1/T$ , é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera adiabática e hidrostática, portanto, a temperatura cai a partir de  $z = 0$  segundo

$$T_r(z) = T_0 - \frac{g}{c_p} z. \quad (5.17)$$

A partir do perfil de temperatura, obtém-se facilmente o perfil de pressão:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho g, \\ \frac{dp}{dz} &= -\frac{pg}{RT}, \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{g dz}{RT} = \frac{c_p}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \ln \frac{p_r}{p_0} &= \ln \left[ \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right]^{c_p/R}, \\ p_r(z) &= p_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_p/R}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.18)$$

Analogamente, fazendo-se  $dT = -g dz / c_p$ , obtém-se, para o perfil de  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\frac{g dz}{RT} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\left( -\frac{g}{RT} + \frac{g}{c_p T} \right) dz \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{(-g dz)}{c_p T} \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \rho_r(z) &= \rho_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_v/R}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.19)$$

Relações diretas entre  $p$ ,  $\rho$  e  $T$  também podem ser obtidas. Por exemplo,

$$\begin{aligned} v dp &= c_p dT, \\ \frac{RT}{p} dp &= c_p dT, \\ \frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p}, \\ \ln \frac{T_0}{T} &= \ln \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \end{aligned}$$

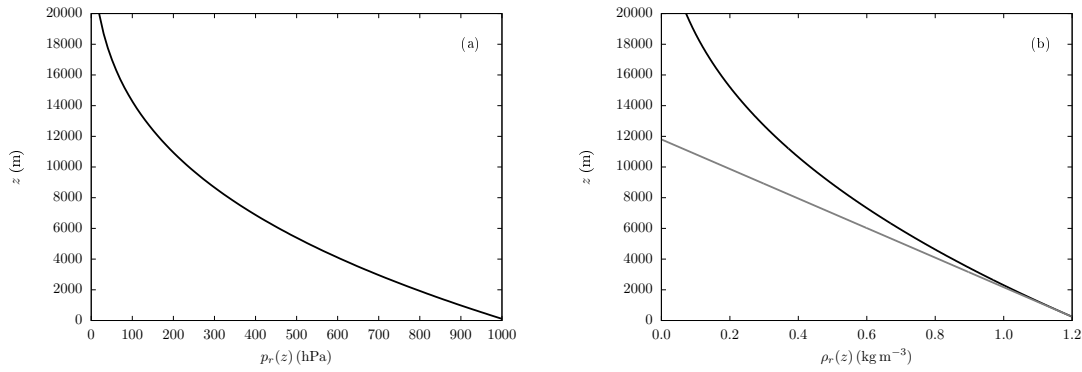


Figura 5.1: Dependência da pressão de referência  $p_r$  e da densidade de referência  $\rho_r$  em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude  $z$ .

$$T_0 = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}. \quad (5.20)$$

A equação (5.20) relaciona os valores de  $T$  e  $p$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de temperatura e pressão na superfície são  $T_0$  e  $p_0$ . Ela *também* serve para *definir* a temperatura potencial em uma atmosfera qualquer:

$$\theta \equiv T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}. \quad (5.21)$$

Portanto, segue-se a definição “verbal” frequentemente encontrada nos livros, de que a temperatura potencial  $\theta$  é a temperatura de uma parcela trazida adiabaticamente (e hidrostaticamente) do nível de pressão  $p$  até o nível de pressão  $p_0$  na superfície.

O mesmo pode ser feito com  $\rho$ ,  $p$ , naturalmente:

$$\begin{aligned} -p dv &= c_v dT, \\ -\frac{RT}{v} dv &= c_v dT, \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{c_v}{R} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p}, \\ &= -\frac{c_v}{c_p} \frac{dp}{p}; \\ \frac{d\rho}{\rho} &= \frac{c_v}{c_p} \frac{dp}{p}, \\ \rho_0 &= \rho \left( \frac{p_0}{p} \right)^{c_v/c_p}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Novamente, (5.22) relaciona  $\rho$  com  $p$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de densidade e pressão na superfície são  $\rho_0$  e  $p_0$ . Para uma atmosfera qualquer, ela é usada para definir a *densidade potencial*  $\rho_\ominus$ :

$$\rho_\ominus \equiv \rho \left( \frac{p_0}{p} \right)^{c_v/c_p}. \quad (5.23)$$

A Figura 5.1 mostra os perfis de pressão (a) e densidade (b) do estado hidrostático de referência em uma atmosfera seca. Na figura 5.1, a interseção da tangente em  $z = 0$  com o eixo das ordenadas marca a altura de escala  $D$ .

### 5.3 – Hipóteses para a magnitude das flutuações de densidade

Para um fluido cujo estado hidrostático de referência tem uma altura de escala  $D$ , suponha que o escoamento turbulento de interesse ocorre em uma camada cuja espessura  $\ell$  é tal que  $\ell \ll D$ . Para um ponto qualquer com  $0 \leq z \leq \ell$ , a variação  $\Delta\rho_r = |\rho_r(z) - \rho_r(0)|$  é

$$\Delta\rho_r \leq \left| \int_0^\ell \frac{d\rho_r}{dz} dz \right| \leq \int_0^\ell \left| \frac{d\rho_r}{dz} \right| dz \leq \int_0^\ell \max \left| \frac{d\rho_r}{dz} \right| dz = \rho_0 \frac{\ell}{D}, \quad (5.24)$$

Segue-se que

$$\frac{\Delta\rho_r}{\rho_0} \leq \frac{\ell}{D} \ll 1. \quad (5.25)$$

Faça agora cada um dos campos instantâneos do escoamento ser decomposto na soma de um estado de referência hidrostático e de uma flutuação de Boussinesq (*cuidado: essa **não** é a decomposição de Reynolds, e a flutuação **não** é uma flutuação turbulenta*):

$$u_i = 0 + u_{\delta i}, \quad (5.26)$$

$$\rho = \rho_r + \rho_\delta, \quad (5.27)$$

$$p = p_r + p_\delta, \quad (5.28)$$

$$T = T_r + T_\delta, \quad (5.29)$$

etc..

Um nível adicional de formalização pode ser obtido da seguinte forma: na região  $0 \leq z \leq \ell$ , a densidade de referência é muito proximamente igual à expansão de  $\rho_r$  até o primeiro termo de sua série de Taylor; de (5.5),

$$\frac{\rho_r}{\rho_0} \approx 1 - \frac{z}{D}, \quad (5.30)$$

donde

$$\frac{\partial\rho_r}{\partial z} \sim \frac{\rho_0}{D}. \quad (5.31)$$

Nós pretendemos avaliar a ordem de grandeza dos termos que comparecem na equação diferencial de conservação de massa (3.6). Para isso, nós precisamos estimar a ordem de grandeza dos gradientes de densidade,  $\partial\rho/\partial x_i$  e dos gradientes de velocidade,  $\partial U_i/\partial x_i$ . Em ambos os casos, é preciso decompor o escoamento tanto em termos de estado hidrostático/flutuação dinâmica (Boussinesq) quanto em termos de média/flutuação turbulenta (Reynolds). O processo, para densidade, é como se segue:

$$\rho = \rho_r + \rho_\delta, \quad (5.32)$$

$$\bar{\rho} = \rho_r + \bar{\rho}_\delta, \quad (5.33)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (5.34)$$

$$\rho = \rho_r + \bar{\rho}_\delta + \rho'. \quad (5.35)$$

A aproximação de Boussinesq consiste, primeiramente, em supor que na região  $0 \leq z \leq \ell$  vale

$$\rho_\delta \sim \rho_0 \frac{\ell}{D} \ll \rho_r. \quad (5.36)$$

Em outras palavras, estamos supondo que as flutuações de densidade são, no máximo, da mesma ordem que as variações na densidade de referência.

Conforme vimos acima, entretanto, não basta avaliar a ordem de grandeza das flutuações de densidade; é preciso também estimar a ordem de grandeza dos seus *gradientes*. Já temos uma estimativa da ordem de grandeza do gradiente vertical de  $\rho_r$  em (5.31).

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\bar{\rho}$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de covariâncias turbulentas, por exemplo de  $\overline{u'_i \rho'}$ . As estimativas que nós adotaremos são análogas às feitas em (4.12)–(4.14):

$$\overline{\rho_\delta} \sim \tilde{\rho}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho_\delta}}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\ell}, \quad (5.38)$$

$$\overline{u'_i \rho'} \sim \tilde{u} \tilde{\rho}. \quad (5.39)$$

Como vimos no capítulo 4,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade, e é natural que  $\tilde{\rho}$ , agora, seja uma escala macroscópica de densidade. Note que, de (5.36) e (5.37),

$$\tilde{\rho} \sim \rho_0 \frac{\ell}{D}. \quad (5.40)$$

Aqui, valem as mesmas considerações feitas na seção 4.2 a respeito da validade das estimativas (5.37)–(5.39), e uma releitura daquela seção é recomendável para que o leitor reforce seu entendimento da utilidade desse tipo de estimativa, mas também de suas limitações.

## 5.4 – A aproximação de Boussinesq para a conservação de massa

Comece agora com a equação instantânea de conservação de massa, (3.5), e tire a média; então, utilizando a decomposição e os postulados de Reynolds, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\rho u_i} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{\bar{\rho} + \rho'} [\bar{u}_i + u'_i]] &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\overline{\bar{\rho} \bar{u}_i + \bar{\rho} u'_i + \rho' \bar{u}_i + \rho' u'_i}] &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\rho} \bar{u}_i] + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A equação (5.41) é a equação de conservação de massa *exata* para as médias. Note o aparecimento das covariâncias  $\overline{\rho' u'_i}$ : a primeira lição é que em um escoamento com flutuações de densidade a equação da continuidade *média* contém um termo envolvendo as covariâncias de densidade com a velocidade. Aplicando agora (5.35),

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}_\delta}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\bar{u}_i \frac{\partial \rho_r}{\partial x_i}}_{\text{II}} + \underbrace{\bar{u}_i \frac{\partial \bar{\rho}_\delta}{\partial x_i}}_{\text{III}} + \underbrace{\rho_r \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}}_{\text{IV}} + \underbrace{\bar{\rho}_\delta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}}_{\text{V}} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial x_i}}_{\text{VI}} = 0. \quad (5.42)$$

A ordem de grandeza de cada termo pode ser facilmente estabelecida:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{II} &\sim \frac{\rho_0\tilde{u}}{D} \sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{III} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{IV} &\sim \frac{\rho_0\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{V} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{VI} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}. \end{aligned}$$

É importante frisar que I–VI referem-se às ordens de grandeza dos termos individuais, e não de suas somas. Em particular, note que IV significa, por extenso, que

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \sim \frac{\rho_0\tilde{u}}{\ell}, \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \sim \frac{\rho_0\tilde{u}}{\ell}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \sim \frac{\rho_0\tilde{u}}{\ell};$$

A estimativa da soma  $\sum_{i=1}^3 \partial \bar{u}_i / \partial x_i$  virá na sequência. Além disso, Em II, usamos (5.40). Em função de que  $\ell/D \ll 1$ ,  $\tilde{\rho}/\rho_0 \ll 1$ , é evidente que cada um dos 3 termos em IV é muito maior do que todos os outros; a soma, entretanto, tem que ser da ordem dos demais. Nesse sentido, podemos escrever agora, para a soma,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \ll \frac{\tilde{u}}{\ell} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \approx 0. \quad (5.43)$$

Portanto, uma primeira consequência das hipóteses da aproximação de Boussinesq para as macroescalas é que o escoamento médio  $\bar{\mathbf{u}}$  é *aproximadamente* solenoidal, ou seja:  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \approx 0$ .

## 5.5 – A aproximação de Boussinesq para a equação de quantidade de movimento

Em notação indicial, a equação da hidrostática (5.3) pode ser escrita

$$\rho_r g_i - \frac{\partial p_r}{\partial x_i} = 0. \quad (5.44)$$

Introduza agora a decomposição de Boussinesq na forma de (5.27) e (5.28), por enquanto apenas nos termos envolvendo a pressão e a aceleração da gravidade, na equação para a quantidade de movimento, (3.35), e simplifique utilizando (5.36) e (5.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= (\rho_r + \rho_\delta) \left[ g_i - 2\epsilon_{ijk} \Omega_j u_k \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -(p_r + p_\delta) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho \nu_u \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} &= \underbrace{\left[ \rho_r g_i - \frac{\partial p_r}{\partial x_i} \right]}_{\equiv 0} + \rho_\delta g_i - 2\rho \epsilon_{ijk} \Omega_j u_k \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -(p_r + p_\delta) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho \nu_u \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p_\delta + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho v_u \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} & \approx \rho_\delta g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \Omega_j u_k \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p_\delta + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r v_u \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental da *aproximação de Boussinesq* para a equação de quantidade de movimento consiste no seguinte: em (5.45), nós fizemos

$$\rho_r + \rho_\delta \approx \rho_r \tag{5.46}$$

em todos os termos em que  $\rho$  aparece *fora* das derivadas, com base em (5.36), *exceto no caso do termo de empuxo*  $\rho_\delta g_i$ . Esse último fica como está. A justificativa para esse procedimento tem base na física que estamos querendo representar (e, num sentido matemático muito concreto, *preservar!*). Em escoamentos com estratificação de densidade, esse é justamente o termo que produz convecção: é mais ou menos óbvio que, se o desprezarmos, a equação resultante não será mais capaz de representar *nenhum* efeito de empuxo devido a variações de densidade dentro do fluido.

Além disso, a substituição de  $\rho$  por  $\rho_r$  apenas nos termos fora de derivadas é um outro ponto crucial, já que  $\rho_\delta \ll \rho_r$  não implica  $\partial \rho_\delta / \partial x_k \ll \partial \rho_r / \partial x_k$ ! Isso significa que não podemos fazer essa aproximação *ainda* no lado esquerdo de (5.45). Muito pelo contrário, como  $\rho_\delta$  inclui as flutuações turbulentas, seus gradientes incluem também os gradientes locais dessas flutuações, os quais, conforme vimos no capítulo 4, são muito maiores que os gradientes das grandezas médias.

Portanto, a equação (5.45), nessa forma, é pouco útil, já que todos os gradientes que aparecem na equação envolvem tanto as macro quanto as microescalas que foram introduzidas no capítulo 4: não é possível fazer uma análise de escalas de (5.45). O próximo passo é promediá-la:

$$\frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} = \overline{\rho_\delta} g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \omega_j \overline{u_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\overline{p_\delta} + \lambda \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r v_u \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j}. \tag{5.47}$$

Os termos do lado direito de (5.47) estão prontos para uma análise de escalas, mas o lado esquerdo precisa ser “aberto”, com o uso, como sempre, da decomposição e dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \overline{[\bar{\rho} + \rho'] [\bar{u}_i + u'_i]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \overline{[\bar{\rho} \bar{u}_i + \bar{\rho} u'_i + \rho' \bar{u}_i + \rho' u'_i]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \overline{[\bar{\rho} \bar{u}_i + \rho' u'_i]};
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{\rho u_i u_j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{[\bar{\rho} + \rho] [\bar{u}_i + u'_i] [\bar{u}_j + u'_j]} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{[\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{\rho} \bar{u}_i u'_j + \bar{\rho} u'_i \bar{u}_j + \rho' \bar{u}_i u'_j]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\rho u'_i u'_j} + \overline{u_i \rho' u'_j} + \overline{u_j \rho' u'_i} + \overline{\rho' u'_i u'_j} \right] \\
& = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\rho} \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{\rho u'_i u'_j} + \overline{u_i \rho' u'_j} + \overline{u_j \rho' u'_i} + \overline{\rho' u'_i u'_j} \right]
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.47),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\overline{\rho} \overline{u_i})}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho} \overline{u_i} \overline{u_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_i \rho' u'_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j \rho' u'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i u'_j}}{\partial x_j} \\
& = \overline{\rho} g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k} - \frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r \nu_u \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j}. \quad (5.48)
\end{aligned}$$

É possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.41):

$$\begin{aligned}
& \overline{\rho} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial t} + \overline{u_i} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\rho} \overline{u_j} + \overline{\rho' u'_j}] \right\}}_{\equiv 0} + \\
& \quad \overline{\rho} \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j \rho' u'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i u'_j}}{\partial x_j} \\
& = \overline{\rho} g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k} - \frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r \nu_u \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\overline{\rho}$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.46) (na forma promediada, que utiliza (5.33)):

$$\begin{aligned}
& \rho_r \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial t} + \overline{u_i} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\rho u_j} + \overline{\rho' u'_j}] \right\}}_{\equiv 0} + \\
& \quad \rho_r \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \rho_r \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u_j \rho' u'_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' u'_i u'_j}}{\partial x_j} \\
& = \overline{\rho} g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \omega_j \overline{u_k} - \frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r \nu_u \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Finalmente, expandimos  $\partial \overline{\rho} / \partial x_j$  usando mais uma vez (5.33):

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\rho_r \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho' u'_i}}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{\rho_r \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{\rho_r \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \rho_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\rho_\delta}}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{\frac{\partial(\overline{u_j \rho' u'_i})}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho' u'_i u'_j}}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
& = \underbrace{\overline{\rho} g_i}_{\text{IX}} - \underbrace{2\rho_r \epsilon_{ijk} \omega_j \overline{u_k}}_{\text{X}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i}}_{\text{XI}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right)}_{\text{XII}} + \underbrace{2\rho_r \nu_u \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j}}_{\text{XIII}}. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Se estendermos as estimativas de ordem de grandeza que já fizemos para velocidades e densidades para as pressões (em analogia, por exemplo, a (5.37)–(5.39)), devemos ter:

$$\overline{p_\delta} \sim \tilde{p}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \quad (5.51)$$

$$\overline{u'_i p'} \sim \tilde{u} \tilde{p}. \quad (5.52)$$

As ordens de grandeza de cada termo se seguem:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{II} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{III} &\sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{IV} &\sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{V} &\sim \frac{\rho_0}{D} \tilde{u}^2 = \rho_0 \frac{\ell}{D} \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \sim \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{VI} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{VII} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{VIII} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{IX} &\sim \tilde{\rho} g, \\ \text{X} &\sim \rho_0 f \tilde{u} = \frac{\rho_0 f \ell}{\ell} \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}} \sim \frac{1}{\text{Ro}} \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{XI} &\sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \\ \text{XII} &\sim \rho_0 \nu_u \frac{1}{\ell} \left[ \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \right] = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{1}{\text{Re}_\ell} \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \text{XIII} &\sim \rho_0 \nu_u \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}. \end{aligned}$$

Os termos de maior ordem são I, III e IV (todos os três da mesma ordem), IX, e XI. Esses dois últimos são os “forçantes” da equação de quantidade de movimento, e consequentemente *têm* que produzir a ordem de magnitude observada em I, III e IV. Em X,  $f = 2\Omega \sin(\phi)$  é o parâmetro, ou frequência, de Coriolis;  $\phi$  é a latitude; e

$$\text{Ro} \equiv \frac{\tilde{u}}{f \ell} \quad (5.53)$$

é o número de Rossby. Na escala  $\ell$  do escoamento, o número de Rossby é muito grande, e podemos desprezar X *vis-à-vis* I, III e IV. Da mesma forma, em escoamentos turbulentos na natureza,  $\text{Re}_\ell$  é muito grande, e podemos desprezar XII e XIII *vis-à-vis* I, III e IV.



A equação aproximada de quantidade de movimento resultante é

$$\rho_r \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho_r \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \rho_r \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_j}{\partial x_j} = \bar{\rho}_\delta g_i - \frac{\partial \bar{p}_\delta}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.54)$$

Uma última simplificação é possível abrindo a derivada do 2º termo à esquerda e tomando ordens de grandeza:

$$\rho_r \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho_r \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}$$

Utilizando (5.43),

$$\begin{aligned} \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &\sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \rho_r \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} &\sim \rho_0 \tilde{u} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \ll \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \end{aligned}$$

e portanto, alternativamente a (5.54), podemos escrever

$$\rho_r \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_i \bar{u}'_j}{\partial x_j} \right] = \bar{\rho}_\delta g_i - \frac{\partial \bar{p}_\delta}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.55)$$

Ficamos então com as seguintes relações de ordens de grandeza em (5.54) ou (5.55):

$$g \tilde{\rho} \sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \quad (5.56)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\ell} \sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \Rightarrow \quad (5.57)$$

$$\tilde{p} \sim \tilde{\rho} g \ell. \quad (5.58)$$

Flutuações de pressão são extremamente difíceis de medir na atmosfera. Wyngaard (2010) dá a estimativa  $\tilde{p} \sim \rho_0 \tilde{u}^2$  para as flutuações turbulentas de pressão *em escoamentos com densidade  $\rho$  constante* (segundo o autor): note que isso é o mesmo que (5.57), que foi obtida sem exigência de constância da densidade do escoamento. Hauf et al. (1996) observaram valores de  $p'$  na atmosfera da ordem de 2,5 Pa, ou seja: da mesma ordem que a estimativa de Wyngaard e de (5.57). Esses dados observacionais reforçam as conclusões desta seção de que é razoável desprezar os efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações (tanto no sentido de Boussinesq quanto no de Reynolds) de densidade, como veremos agora.

De fato, levando (5.58) em (5.7), obtém-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \sim \underbrace{\beta_P \tilde{T}}_I + \underbrace{\kappa_T \tilde{p}}_{II}, \quad (5.59)$$

onde I representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade, e II representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações de densidade. Utilizando os valores listados na página 72 para  $\beta_P$ ,  $\kappa_T$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$ ;  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\ell = 10 \text{ m}$ ,  $\tilde{T} = 1 \text{ K}$ , e (5.56)–(5.58), obtemos as seguintes estimativas:

água:  $I \sim 1,500 \times 10^{-4}$ ,  $II \sim 4,896 \times 10^{-7}$ ;

ar:  $I \sim 3,470 \times 10^{-3}$ ,  $II \sim 1,204 \times 10^{-5}$ .

O efeito das flutuações de pressão sobre as de densidade é cerca de 100 vezes (no ar) a 1000 vezes (na água) menor do que o efeito das flutuações de temperatura. Isso permite simplificar (5.6) com (5.59) para

$$\rho_\delta \approx -\rho_r \beta_{P_r} T_\delta, \quad (5.60)$$

$$\overline{\rho_\delta} \approx -\rho_r \beta_{P_r} \overline{T_\delta}, \quad (5.61)$$

$$\rho' \approx -\overline{\rho} \beta_{P_m} T'. \quad (5.62)$$

Observe que ao escrevermos (5.62), estamos supondo que as flutuações turbulentas de densidade (e de temperatura e pressão) são no máximo da mesma ordem de magnitude que as flutuações de Boussinesq de densidade (e de temperatura e pressão). Em (5.60)–(5.61), o coeficiente isobárico de expansão térmica é calculado em  $(T_r, P_r)$ :

$$\beta_{P_r} = \beta_P(T_r, P_r),$$

porque se trata das flutuações em torno do estado de referência; em (5.62), ele é calculado em  $(\overline{T}, \overline{P})$ :

$$\beta_{P_m} = \beta_P(\overline{T}, \overline{P}),$$

porque se trata das flutuações turbulentas. Uma notação análoga vale para  $\kappa_T$ .

## 5.6 – Incompressibilidade: efeitos de pressão e temperatura sobre as flutuações de velocidade

O primeiro resultado que obtivemos com a aproximação de Boussinesq foi que o campo de velocidade médio é aproximadamente solenoidal (veja (5.43)). Nós nada afirmamos, entretanto, sobre o campo *instantâneo*

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k};$$

em que sentido podemos afirmar que ele *também* é solenoidal, e em que ordem de magnitude? Façamos

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}.$$

De (5.43), já temos uma estimativa da pequenez de  $\partial \overline{u_k} / \partial x_k$ . Para  $\partial u'_k / \partial x_k$ , podemos utilizar os 3 critérios estabelecidos por Batchelor (1967) (equações (3.6.16), (3.6.17) e (3.6.18)) para levar em conta os efeitos das variações locais de pressão. É muito importante notar que, para as flutuações turbulentas de velocidade, as escalas de comprimento e de velocidade que devemos usar são as microescalas de Kolmogorov correspondentes,  $\eta_u$  e  $\check{u}$ , dadas por (4.2) e (4.3). Além disso, a frequência  $n$  que aparece em (3.6.17) de Batchelor é aqui, simplesmente,  $\check{u} / \eta_u$ . Nesse caso, as condições todas elas resumem-se a

$$\frac{\check{u}^2}{c^2} \ll 1, \quad (5.63)$$

onde  $c$  é a velocidade do som no meio. Dada a pequenez das microescalas  $\check{u}$  no ar e na água, aparentemente as flutuações turbulentas de velocidade são “mais” incompressíveis do que o próprio campo médio.

Um segundo conjunto de condições provém dos efeitos das variações locais de temperatura sobre as variações locais de densidade. Novamente, utilizamos as micro-escalas de Kolmogorov; agora, vamos precisar também da microescala de temperatura  $\check{T}$ . O critério de incompressibilidade de Batchelor (1967), equação (3.6.21), torna-se

$$\beta_P \check{T} \frac{v_T}{\eta_u \check{u}} \ll 1. \quad (5.64)$$

É instrutivo comparar (5.63) e (5.64) na natureza. Vamos fazer inicialmente as contas apenas para o ar. Considere

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_e} &= \check{u}^3 / \ell = (1 \text{ m s}^{-1})^3 / 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}; \\ \overline{\epsilon_{TT}} &= \check{u} \check{T}^2 / \ell = (1 \text{ m s}^{-1} (1 \text{ K})^2) / 1 \text{ m} = 1 \text{ K}^2 \text{ s}^{-1}; \\ v_u &= 1,45 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ v_T &= 2,02 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ \eta_u &= 2,350 \times 10^{-4} \text{ m}, \\ \check{u} &= 6,171 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}, \\ \eta_T &= 2,773 \times 10^{-4} \text{ m}, \\ \check{T} &= 6,171 \times 10^{-2} \text{ K}. \end{aligned}$$

Então, de (5.63) e (5.64),

$$\begin{aligned} \frac{\check{u}^2}{c^2} &= 3,294 \times 10^{-8}, \\ \beta_P \check{T} \frac{v_T}{\eta_u \check{u}} &= 4,835 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Desse exercício, aprendemos o seguinte: o critério de incompressibilidade mais restritivo no caso de escoamentos na atmosfera não é o número de Mach, mas sim aquele que resulta da análise do efeito das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade. Mesmo assim,  $4,8 \times 10^{-3} \ll 1$ , de forma que, a partir deste ponto, nós vamos adotar a hipótese de que, para as flutuações locais de velocidade, vale

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \approx 0. \quad (5.65)$$

## Crítica

Entretanto, ao contrário do que fizemos com (5.43), nós não estimamos a *ordem de grandeza* de  $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ . Uma estimativa dessa ordem de grandeza, aparentemente, não existe na literatura, e seria um resultado importante.

## 5.7 – A correlação pressão-temperatura

Ainda de (5.7), obtém-se

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\beta_{P_m} T' + \kappa_{T_m} p', \quad (5.66)$$

onde, conforme já vimos,

$$|\kappa_{Tm}p| \ll |\beta_{pm}\mathcal{T}|. \quad (5.67)$$

Uma forma de ver melhor a ordem de grandeza dos termos em (5.66) é reescrevê-la como

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\beta \frac{T'}{\bar{T}} + \kappa \frac{p'}{\bar{p}}. \quad (5.68)$$

Em (5.68),  $\beta$  e  $\kappa$  são duas funções adimensionais de  $T$  e  $p$  definidas por

$$\beta_{pm} = \beta_p(\bar{T}, \bar{p}) \equiv \frac{\beta}{\bar{T}}, \quad (5.69)$$

$$\kappa_{Tm} = \kappa_T(\bar{T}, \bar{p}) \equiv \frac{\kappa}{\bar{p}}. \quad (5.70)$$

Para a água, segundo (5.9)–(5.10),  $\beta \approx 1/23$  e  $\kappa \approx 1/20000$ . Para um gás ideal, de acordo com (5.14)–(5.15),  $\beta = \kappa = 1$ .

Sob a validade da hipótese de Boussinesq, pressão e temperatura são muito fracamente correlacionadas (em termos das ordens de grandeza em (5.68); as flutuações de densidade respondem basicamente às flutuações de temperatura (densidade e temperatura são quase que perfeitamente anti-correlacionadas), e as flutuações de pressão respondem essencialmente ao campo de flutuações de velocidades, apenas.

Recentemente, [Gerolymos e Vallet \(2013\)](#) propuseram uma linearização simples para calcular as correlações  $\overline{\rho'T'}$ ,  $\overline{\rho'p'}$  e  $\overline{T'p'}$  em um escoamento turbulento compressível. Essa abordagem é adaptada e simplificada, aqui, para a estimativa da ordem de grandeza da correlação pressão-temperatura em escoamentos naturais debaixo da aproximação de Boussinesq.

Ela consiste em reescrever (5.68) na forma

$$\kappa \frac{p'}{\bar{p}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + \beta \frac{T'}{\bar{T}};$$

multiplicar sucessivamente por  $p/\bar{p}$ ,  $\rho/\bar{\rho}$  e  $\mathcal{T}/\bar{T}$ ; e promediar, obtendo-se assim um sistema de 3 equações:

$$\kappa \frac{\overline{p'p'}}{\bar{p}^2} = \frac{\overline{\rho p'}}{\bar{\rho} \bar{p}} + \beta \frac{\overline{T'p'}}{\bar{T} \bar{p}}, \quad (5.71)$$

$$\kappa \frac{\overline{\rho'p'}}{\bar{\rho} \bar{p}} = \frac{\overline{\rho'\rho'}}{\bar{\rho}^2} + \beta \frac{\overline{\rho'T'}}{\bar{\rho} \bar{T}}, \quad (5.72)$$

$$\kappa \frac{\overline{T'p'}}{\bar{T} \bar{p}} = \frac{\overline{\rho'T'}}{\bar{\rho} \bar{T}} + \beta \frac{\overline{T'T'}}{\bar{T}^2}. \quad (5.73)$$

É possível simplificar (5.71)–(5.73) um pouco mais reconhecendo que há apenas 6 variáveis (adimensionais) envolvidas, todas elas da forma

$$(ab) \equiv \frac{\overline{a'b'}}{\bar{a} \bar{b}};$$

Portanto,

$$\kappa(pp) = (\rho p) + \beta(Tp), \quad (5.74)$$

Eu nunca vi ninguém fazer isso, mas não sei se é original!

$$\kappa(\rho p) = (\rho \rho) + \beta(\rho T), \quad (5.75)$$

$$\kappa(Tp) = (\rho T) + \beta(TT). \quad (5.76)$$

Há portanto 6 variáveis em (5.74)–(5.76), e cada uma pode ser escrita em função de outras 3. Podemos escrever  $(Tp)$  em função das variâncias (adimensionalizadas)  $(pp)$ ,  $(\rho\rho)$  e  $(TT)$ :

$$(Tp) = \frac{\beta^2(TT) - (\rho\rho) + \kappa^2(pp)}{2\beta\kappa},$$

ou

$$\frac{\overline{T'p'}}{\overline{T}\overline{p}} = \frac{1}{2\beta\kappa} \left[ \beta^2 \frac{\overline{T'T'}}{\overline{T}\overline{T}} - \frac{\overline{\rho'\rho'}}{\overline{\rho}\overline{\rho}} + \kappa^2 \frac{\overline{p'p'}}{\overline{p}\overline{p}} \right] \quad (5.77)$$

A interpretação de (5.77) é difícil porque, em primeira ordem, nós já obtivemos que  $\rho'/\overline{\rho} \sim \beta T'/\overline{T}$  (veja 5.62), justamente desprezando as flutuações de pressão.

Portanto,

$$\frac{\overline{\rho'\rho'}}{\overline{\rho}^2} \sim \beta^2 \frac{\overline{T'T'}}{\overline{T}^2},$$

e o resíduo da diferença entre ambos deve ser da ordem do termo restante. Obtemos, consequentemente,

$$\frac{\overline{T'p'}}{\overline{T}\overline{p}} \sim \frac{\kappa}{2\beta} \frac{\overline{p'p'}}{\overline{p}^2};$$

utilizando, ainda, a aproximação relativamente grosseira (mas a melhor disponível) (5.57) para as flutuações de pressão, obtemos agora

$$\frac{\overline{T'p'}}{\overline{T}\overline{p}} \sim \frac{\kappa}{2\beta} \frac{\rho_0 \tilde{u}^4}{p_0^2} \quad (5.78)$$

## 5.8 – As ordens de grandeza da equação para a temperatura

Inicialmente, procuraremos escrever a equação da energia em uma forma que atenda a dois requisitos importantes:

1. Ser expressa em termos de grandezas mensuráveis *em princípio* (note que tanto (3.78) quanto (3.80) estão dadas em termos de funções termodinâmicas ( $u$  e  $\hat{h}$ ) que não são diretamente mensuráveis).
2. Ter validade tanto para líquidos quanto para gases.

Para tanto, partimos de (3.80), e utilizamos (3.84) e (3.88) para exprimir  $D\hat{h}/Dt$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\hat{h}}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \rho \left[ \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial T} \right)_p \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial \hat{h}}{\partial p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} \right] - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{v} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + v(1 - \beta_p T) \frac{Dp}{Dt} \right] - \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_p T \frac{Dp}{Dt} &= \rho c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (5.79)$$

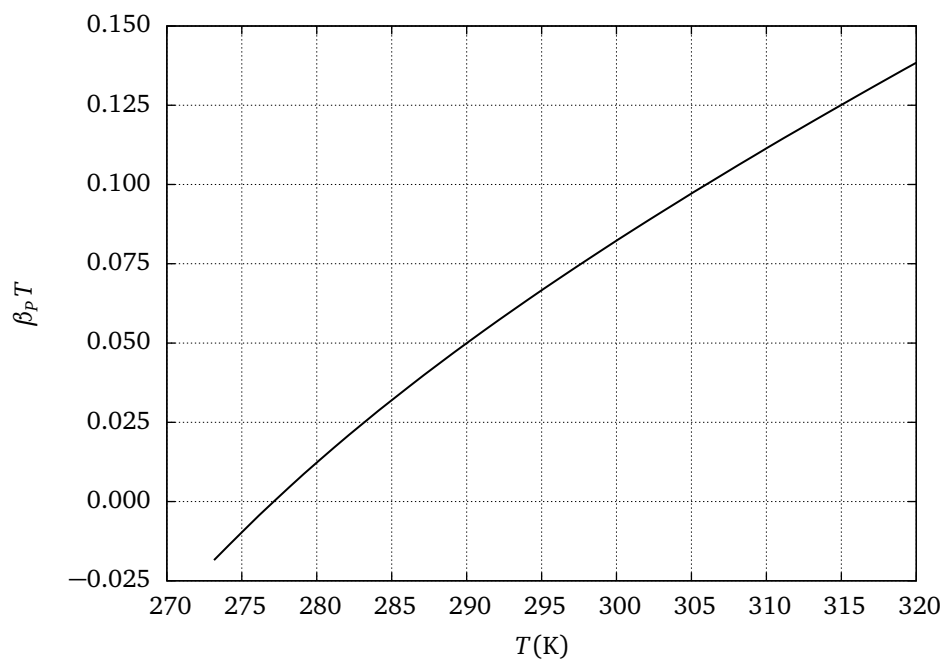


Figura 5.2: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida

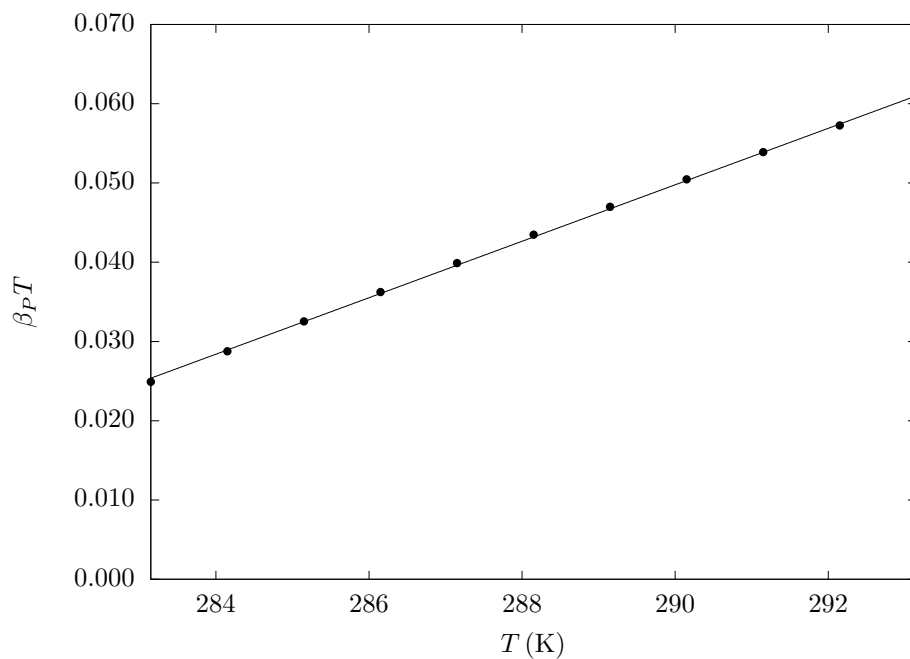


Figura 5.3: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C.

Daqui para a frente, uma *primeira* aproximação (no sentido da aproximação de Boussinesq) consistirá em supor que  $c_p$  é avaliado no estado hidrostático de referência. Com isso, poderemos supor  $c_p$  “constante” e mantê-lo fora das derivadas.

Para um gás ideal,  $\beta_p T \equiv 1$ , o que simplifica bastante a análise subsequente de (5.79); para água, entretanto,  $\beta_p T$  varia consideravelmente com a temperatura. Isso pode ser visto nas figuras 5.2 and 5.3, onde essa função está plotada para água à pressão atmosférica (<http://www.physchem.kfunigraz.ac.at/sm/Service/Water/H2Othermexp.htm>).

Para  $T_r$  na faixa 10–20° C (que é um exemplo razoável de condições encontradas em escoamentos de água líquida no ambiente), supondo que  $\beta_p T$  é uma função de  $T$  apenas, e fazendo uma expansão em série de Taylor truncada na primeira derivada,

$$\begin{aligned}\beta_p T &\equiv \phi(T) = \phi(T_r) + bT_\delta \\ &= \phi(T_r) + b\overline{T_\delta} + bT' \\ &= \phi(\overline{T}) + bT' \\ &\approx \overline{\phi(T)} + bT' \\ &= \overline{\beta_p T} + bT'.\end{aligned}\quad (5.80)$$

(pois  $\phi$  é aproximadamente linear), onde  $b = 0.00356 \text{ K}^{-1}$  é obtido por regressão linear através dos pontos na figura 5.3. Coincidentemente,

$$b \approx \frac{1}{T_0} = \frac{1}{288.15} = 0.00347 \text{ K}^{-1}. \quad (5.81)$$

O único objetivo de (5.80) é proporcionar uma base concreta sobre a qual estimativas de ordem de grandeza podem ser feitas.

Em seguida, nós aproximamos a densidade do lado direito por  $\rho_r$  (novamente, uma aproximação de Boussinesq) e utilizamos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + T c_p \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right] - \beta_p T \frac{Dp}{Dt} &\approx \rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi; \\ c_p \left[ \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho T u_j)}{\partial x_j} \right] - \beta_p T \frac{Dp}{Dt} &\approx \rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.\end{aligned}\quad (5.82)$$

Prosseguimos para promediar. A hipótese fundamental que simplificará extraordinariamente a álgebra é a ausência de correlação entre a temperatura e a pressão. Como acabamos de ver, para um gás  $\beta_p T \equiv 1$ , e nesse caso ficamos simplesmente com  $\frac{Dp}{Dt}$  no termo correspondente. Para água, devido à dependência de  $\beta_p$  com  $T$ , temos formalmente:

$$\overline{\beta_p T \frac{Dp}{Dt}} = \overline{\beta_p T} \frac{Dp}{Dt} + bT' \frac{Dp'}{Dt}. \quad (5.83)$$

Estimativas da ordem de grandeza das correlações entre as flutuações de temperatura  $T'$  e os *gradientes* de pressão não estão diretamente disponíveis, mas parece muito razoável supor que elas não devem exceder as correlações entre pressão e temperatura, das quais temos uma estimativa em (5.78) em termos dos valores ambientes (*i.e.*, “médios”) de  $p$  e  $T$ .

Suporemos portanto que

$$\frac{\overline{T' \frac{Dp'}{Dt}}}{\overline{T} \frac{Dp}{Dt}} \ll \frac{\overline{T' p'}}{\overline{T} \overline{p}} \sim \frac{\kappa}{2\beta} \frac{\rho_0^2 \tilde{u}^2}{p_0^2}. \quad (5.84)$$

Valores típicos de (5.84) podem ser encontrados, novamente, na página 72, ou reunidos no apêndice A. Usando  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ , para a água obtemos  $5,591 \times 10^{-8}$ .

Adotando essas estimativas em (5.83), devemos agora ter:

$$b \sim \frac{1}{T_0},$$

$$\overline{bT' \frac{Dp'}{Dt}} \ll 5,591 \times 10^{-8} \frac{\bar{T}}{T_0} \overline{\frac{Dp}{Dt}}.$$

Em  $T = T_0$ , a função da figura 5.3 vale  $\beta_p T = 0,042414$ , e (em ordem de grandeza)

$$\overline{bT' \frac{Dp'}{Dt}} \ll 1,318 \times 10^{-6} \overline{\beta_p T \frac{Dp}{Dt}}.$$

Os efeitos da correlação temperatura-(gradiente de pressão) na água são portanto desprezíveis, e adotamos

$$\overline{\beta_p T \frac{Dp}{Dt}} \approx \overline{\beta_p T} \overline{\frac{Dp}{Dt}}. \quad (5.85)$$

Com (5.85) em mãos, retornamos agora a (5.82) e promediamos:

$$c_p \left[ \frac{\partial \overline{\rho T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho T u_j}}{\partial x_j} \right] - \overline{\beta_p T \frac{Dp}{Dt}} \approx \rho_r c_p \nu_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Phi}. \quad (5.86)$$

A equação acima também vale para o ar, uma vez que neste caso tem-se  $\overline{\beta_p T} \equiv 1$ .

Os termos do lado esquerdo são expandidos da maneira usual:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho T}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [\overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{T} + T')}] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\bar{\rho} \bar{T} + \bar{\rho} T' + \rho' \bar{T} + \rho' T'}] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\bar{\rho} \bar{T} + \rho' T'}]; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho T u_j}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{T} + T')(\bar{u}_j + u'_j)}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_j + \bar{\rho} \bar{T} u'_j + \bar{\rho} T' \bar{u}_j + \rho' \bar{T} \bar{u}_j}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\bar{\rho} T' u'_j + \bar{T} \rho' u'_j + \bar{u}_j \rho' T' + \rho' T' u'_j}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_j + \bar{\rho} \bar{T} u'_j + \bar{T} \rho' u'_j + \bar{u}_j \rho' T' + \rho' T' u'_j}] \end{aligned}$$

Substituindo em (5.86),



$$c_p \left[ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' T'}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{T}' u'_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{T} \bar{\rho}' u'_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{\rho}' T')}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' T' u'_j}}{\partial x_j} \right] - \bar{\beta}_p \bar{T} \frac{D\bar{p}}{Dt} \approx \rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Phi}.$$

Novamente, é possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.41):

$$c_p \left[ \bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' T'}}{\partial t} + \underbrace{\bar{T} \left\{ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \bar{u}_j + \bar{\rho}' u'_j] \right\}}_{\equiv 0} \right] + \left[ \bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \frac{\partial \overline{T' u'_j}}{\partial x_j} + \bar{T}' u'_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{\rho}' T')}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' T' u'_j}}{\partial x_j} \right] - \bar{\beta}_p \bar{T} \frac{D\bar{p}}{Dt} \approx \rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Phi}.$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\bar{\rho}$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.46) (na forma promediada, que utiliza (5.33)):

$$c_p \left[ \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho' T'}}{\partial t} + \underbrace{\bar{T} \left\{ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \bar{u}_j + \bar{\rho}' u'_j] \right\}}_{\equiv 0} \right] + \left[ \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \rho_r \frac{\partial \overline{T' u'_j}}{\partial x_j} + \bar{T}' u'_j \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{\rho}' T')}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' T' u'_j}}{\partial x_j} \right] - \bar{\beta}_p \bar{T} \frac{D\bar{p}}{Dt} \approx \rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\Phi}.$$

Mais uma vez, expandimos  $\partial \langle \rho \rangle / \partial x_j$  usando (5.33):

$$\underbrace{c_p \rho_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \overline{\rho' T'}}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \rho_r \frac{\partial \overline{T' u'_j}}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \underbrace{c_p \bar{T}' u'_j \frac{\partial \rho_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \bar{T}' u'_j \frac{\partial \bar{\rho}_\delta}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{\rho}' T')}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \overline{\rho' T' u'_j}}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} - \underbrace{\bar{\beta}_p \bar{T} \frac{D\bar{p}}{Dt}}_{\text{IX}} \approx \underbrace{\rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right)}_{\text{X}} + \underbrace{\bar{\Phi}}_{\text{XI}}. \quad (5.87)$$

Todos os termos de (5.87) estão prontos para uma análise de ordem de grandeza, exceto pelo ainda ligeiramente problemático termo IX. Aqui, observe que

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{Dp}{Dt}} &= \overline{\frac{D(p_r + p_\delta)}{Dt}} \\
 &= \overline{u_j \frac{\partial p_r}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial p_\delta}{\partial t}} + \overline{u_j \frac{\partial p_\delta}{\partial x_j}} \\
 &= \overline{u_j \frac{\partial p_r}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial p_\delta}{\partial t}} + \overline{u_j \frac{\partial p_\delta}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\
 &= \underbrace{\overline{w \frac{\partial p_r}{\partial z}}}_i + \underbrace{\overline{\frac{\partial p_\delta}{\partial t}}}_{ii} + \underbrace{\overline{u_j \frac{\partial p_\delta}{\partial x_j}}}_{iii} + \underbrace{\overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}}}_{iv}
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Em primeira aproximação,  $\overline{w} \approx 0$ . Uma análise de ordem de grandeza mais consistente com o que é feito usualmente em camadas-limite, utilizando a equação da continuidade (5.43), é supor  $\partial \overline{u}/\partial x \ll \partial \overline{w}/\partial z$ ; mais especificamente, utilizaremos a altura de escala  $D$  para estimar os gradientes horizontais de velocidade média (isso é, infelizmente, uma hipótese adicional):

$$\frac{\overline{u}}{D} \sim \frac{\overline{w}}{\ell} \Rightarrow \overline{w} \sim \frac{\ell}{D} \tilde{u} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \tilde{u}.$$

Retornando a (5.88), descobrimos que todos os termos são da mesma ordem:

$$\begin{aligned}
 i &\sim \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \tilde{u} \rho_0 g = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \tilde{u} \rho_0 \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho} \ell} = \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 ii &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 iii &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 iv &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell} = \rho_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
 \end{aligned}$$

Em (i), usamos (5.58); (ii) e (iii) são simples. (iv) é obtido supondo-se que as flutuações turbulentas de velocidade e do gradiente de pressão são bem correlacionadas. À luz da equação não-promediada da quantidade de movimento (por exemplo, (5.45)), isso parece razoável e bastante natural, já que os gradientes de pressão por unidade de volume devem ser da mesma ordem que as acelerações. Na segunda igualdade de (iv), usamos (5.57).

Com isso, as ordens de magnitude de todos os termos de (5.87) estão estabelecidos:

$$\begin{aligned}
 I &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T} \tilde{u}}{\ell}, \\
 II &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T} \tilde{u}}{\ell}, \\
 III &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T} \tilde{u}}{\ell}, \\
 IV &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T} \tilde{u}}{\ell},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &\sim \tilde{T}\tilde{u}\frac{\rho_0}{D} = \tilde{\rho}c_p\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
VI &\sim \tilde{\rho}c_p\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
VII &\sim \tilde{\rho}c_p\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
VIII &\sim \tilde{\rho}c_p\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
IX &\sim (\beta_{p_0}T_0)\rho_0\frac{\tilde{u}^3}{\ell} \\
X &\sim \rho_0c_p\nu_T\frac{\tilde{T}}{\ell^2} = \rho_0c_p\frac{\nu_T}{\nu_u}\frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell}\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{Pr Re}_\ell}\rho_0c_p\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
XI &\sim \rho_0\frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
\end{aligned}$$

O parâmetro adimensional

$$\text{Ga}_0 \equiv \beta_{p_0}T_0 \quad (5.89)$$

é o número de Gay-Lussac; para o ar (como já vimos),  $\text{Ga}_0 \equiv 1$ ; para a água, um valor conservador para sua ordem de magnitude (vide Figura 5.2) é  $\beta_{p_0}T_0 \sim 0,1$ .

Claramente, I, III e IV são os termos dominantes; II, V, VI, VII, VIII, são todos da mesma ordem de magnitude, e bem menores; assim como X, uma vez que o número de Reynolds  $\text{Re}_\ell$  em escoamentos turbulentos é muito grande. IX e XI podem ser comparados com (I,II,IV) por meio do número turbulento de Eckart,

$$\text{Ec} \equiv \frac{\tilde{u}^2}{c_p\tilde{T}}; \quad (5.90)$$

obtemos

$$\text{I,III,IV} \sim \frac{1}{\text{Ec}}\rho_0\tilde{u}^3/\ell,$$

onde  $\text{Ec} = O(10^{-3})$  tanto para ar quanto para água. Portanto,

$$\text{I,III,IV} \gg \text{IX,XI}.$$

Finalmente, tanto para ar quanto para água, a equação simplificada para a temperatura termodinâmica  $T$  que se obtém com a aproximação de Boussinesq é

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{T'u'_j}}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}\right). \quad (5.91)$$

Observe que não houve necessidade, ainda, de introduzir a temperatura potencial: na região onde supomos que a aproximação de Boussinesq é estritamente válida,  $\ell/D \ll 1$ , é suficiente trabalhar com a temperatura termodinâmica  $T$ , mesmo no caso do ar.

## 5.9 – A equação para a temperatura potencial

Uma formulação alternativa para a equação da energia utiliza o conceito de temperatura potencial. Para um gás ideal,  $\hat{h} = \hat{h}(T)$ , e (3.80) com (5.1) torna-se

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho c_p \nu_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.92)$$

Utilizando a temperatura potencial introduzida em (5.21) e diferenciando,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T} &= \frac{d\theta}{\theta} + \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p}, \\ \frac{1}{\theta} \frac{D\theta}{Dt} &= \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{c_p p} \frac{Dp}{Dt}, \\ \frac{c_p p}{R\theta} \frac{D\theta}{Dt} &= \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt}.\end{aligned}\quad (5.93)$$

Comparando (5.93) com (5.92), chegamos finalmente à equação para a energia interna em termos da temperatura potencial,

$$\frac{c_p p}{R\theta} \frac{D\theta}{Dt} = \rho c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.94)$$

O termo

$$\frac{c_p p}{R\theta} = \frac{c_p p}{RT} \frac{T}{\theta}$$

é muito proximamente igual a

$$\frac{c_p p}{RT} = c_p \rho;$$

de fato,

$$\frac{T}{\theta} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} = \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \approx \frac{287.15}{288.15} = 0.9966,$$

para  $T_0 = 288.15$  K,  $g = 9.81$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $c_p = 1005$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> e  $z = 100$  m. Para  $z = 1000$  m, que é a ordem de grandeza da altura da camada-limite atmosférica, o valor acima muda para 0.9661: ainda próximo de 1, mas com diferenças maiores do que 1%. Debaixo das hipóteses da aproximação de Boussinesq, portanto, podemos aproximar (5.94) por

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = \rho_r c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.95)$$

Podemos agora manipular o lado esquerdo de (5.95) exatamente como fizemos para ir de (5.82) até (5.87), só que com  $\theta$  no lugar de  $T$ . Basta, portanto, copiar os termos dessa última com  $\theta$  em lugar de  $T$ :

$$\begin{aligned}& \underbrace{c_p \rho_r \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{\theta}'}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \rho_r \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \rho_r \frac{\partial \bar{\theta}' u'_j}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\& \underbrace{c_p \bar{\theta}' u'_j \frac{\partial \bar{\rho}_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \bar{\theta}' u'_j \frac{\partial \bar{\rho}_\delta}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{\rho}' \bar{\theta}')}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{\theta}' u'_j}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\& \approx \underbrace{\rho_r c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)}_{\text{IX}} + \underbrace{\bar{\Phi}}_{\text{X}}. \quad (5.96)\end{aligned}$$

Claramente, as mesmas escalas macroscópicas  $\tilde{T}$  e  $\ell$  aplicam-se a (5.96); as ordens de magnitude são:

$$\begin{aligned}
 \text{I} &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{II} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{III} &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{IV} &\sim \rho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{V} &\sim \tilde{T}\tilde{u} \frac{\rho_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VI} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VIII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{IX} &\sim \rho_0 c_p \nu_T \frac{\tilde{T}}{\ell^2} = \rho_0 c_p \frac{\nu_T}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{Pr Re}_\ell} \rho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{X} &\sim \rho_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
 \end{aligned}$$

Mantendo-se apenas os termos de maior ordem de magnitude, o resultado é uma equação análoga a (5.91):

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\theta' u'_j}}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \right). \quad (5.97)$$

A equação (5.97) é um pouco mais robusta e parcimoniosa de hipóteses do que (5.91): em particular, não precisamos nos preocupar com a interação entre os gradientes de pressão  $\partial p_r / \partial z$  e a velocidade vertical média  $\bar{w}$ : não precisamos supor portanto que  $\langle w \rangle \ll \bar{u}$ , e (5.97) é aplicável mesmo em regiões de alta velocidade vertical, como por exemplo dentro de térmicas. Por outro lado, continuamos restritos a  $\ell \ll D$ : na análise de escalas que estamos fazendo aqui, para a atmosfera,  $\ell \sim 1000$  m já está claramente violando aquela condição, e não há garantia (sob esse aspecto) de que as equações para as médias obtidas com a aproximação de Boussinesq valham para toda a camada-limite atmosférica.

## 5.10 – Os gradientes microscópicos de densidade

A equação (5.62) nos permite obter microescalas de Kolmogorov para densidade. Definimos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} \right)^2 &= \frac{\overline{\partial \rho}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial \rho}}{\partial x_j} = (\bar{\rho} \beta_{P_m})^2 \frac{\overline{\partial \mathcal{T}}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial \mathcal{T}}}{\partial x_j} = (\bar{\rho} \beta_{P_m})^2 \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2 \Rightarrow \\
 \check{\rho} &= \bar{\rho} \beta_{P_m} \check{\mathcal{T}},
 \end{aligned} \quad (5.98)$$

para  $\eta_\rho = \eta_\tau$ . A linearidade entre as microescalas de densidade e de temperatura produz agora as estimativas de ordem de grandeza, a partir de (4.64) e (??):

$$\frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}, \quad (5.99)$$

$$\frac{\check{\rho}}{\tilde{\rho}} = \text{Re}_\ell^{-1/4}. \quad (5.100)$$

# 6

## As equações de ordem 2

Este capítulo precisa de uma introdução!!!

### 6.1 – As equações locais de conservação de massa e de quantidade de movimento com a aproximação de Boussinesq

Com base na discussão da seção 5.6, nós vamos supor que o campo local de velocidade é solenoidal:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.1)$$

Uma equação local para a quantidade de movimento pode ser obtida como se segue. Primeiro, reescreva (3.35) substituindo  $\rho$  por  $\rho_r$ :

$$\rho_r \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \approx \rho_r (g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j u_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r \nu_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}.$$

Note que, como não há derivadas de  $\rho$  em (3.35), a sua substituição por  $\rho_r$  não acarreta problemas. Agora (como sempre), a subtração do estado hidrostático de referência (5.44) produz

$$\rho_r \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \approx \rho_\delta g_i - 2\rho_r \epsilon_{ijk} \omega_j u_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -p_\delta + \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\rho_r \nu_u \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j}.$$

Há dois termos viscosos, e suas ordens de magnitude podem ser comparadas da seguinte forma: primeiro, note que localmente os gradientes de velocidade são comensuráveis com as microescalas de Kolmogorov. Devemos então ter (lembre-se de (5.65))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_u \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \sim \rho_0 \nu_u \frac{1}{\eta_u} \left( \varepsilon \frac{\check{u}}{\eta_u} \right), \quad (6.2)$$

$$2\rho_r \nu_u \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \sim \rho_0 \nu_u \frac{\check{u}}{\eta_u^2}, \quad (6.3)$$

onde  $\varepsilon \ll 1$ . Podemos, portanto, desprezar o termo envolvendo  $\lambda_u$ .

Pelo mesmo argumento ou, o que dá no mesmo, utilizando 6.1,

$$u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k}.$$

A equação local para quantidade de movimento fica, finalmente,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\rho_\delta}{\rho_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_k - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p_\delta}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.4)$$

A mudança de  $\nu_u$  para  $\nu_{(i)}$  em (6.4) será explicada na sequência.

### Generalização para escalares.

Interessantemente, a equação (6.4) também representa o transporte de diversos escalares, desde que se adote uma convenção um pouco mais geral. Essa convenção é sugerida por Kader e Yaglom (1989), e também é adotada por Dias (1994). Lembrando da convenção alternativa clássica que usa  $(U, V, W)$  para o vetor velocidade, e  $(x, y, z)$  para o vetor posição, ela consiste em fazer

$$u_1 = u, \quad x_1 = x, \quad (6.5)$$

$$u_2 = v, \quad x_2 = y, \quad (6.6)$$

$$u_3 = w, \quad x_3 = z, \quad (6.7)$$

$$u_4 = c, \quad x_4 = 0, \quad (6.8)$$

$$v_{(1)} = v_{(2)} = v_{(3)} = v_u, \quad (6.9)$$

$$v_{(4)} = v_c. \quad (6.10)$$

Dessa forma, além de representar as 3 equações para a quantidade de movimento, (6.4) também representa o transporte de um escalar regido pela equação da advecção-difusão (o que inclui a temperatura termodinâmica para a água, e a temperatura potencial para o ar), com difusividade molecular  $v_c$ . De fato, fazendo  $i = 4$  em (6.4), e interpretando a convenção da maneira óbvia com  $g_4 = 0$ ,  $\epsilon_{4lk} = 0$  e  $\partial p_\delta / \partial x_4 = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial(u_4 u_k)}{\partial x_k} &= \frac{\rho_\delta}{\rho_r} g_4 - 2\epsilon_{4lk} \omega_l u_k - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p_\delta}{\partial x_4} + 2v_{(4)} \frac{\partial s_{4k}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial(u_4 u_k)}{\partial x_k} &= 2v_{(4)} \frac{\partial s_{4k}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial(u_4 u_k)}{\partial x_k} &= 2v_{(4)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_4}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_4} \right), \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} + \frac{\partial(u_4 u_k)}{\partial x_k} &= v_{(4)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_4}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(c u_k)}{\partial x_k} &= v_c \frac{\partial^2 c}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned}$$

que é a equação de transporte para o escalar cuja concentração é  $c$ . Portanto, nós também podemos utilizar (6.4) para o transporte de escalares, o que nos proporciona uma considerável economia. Na próxima seção, deve-se ter a notação definida em (6.5)–(6.10) em mente.

## 6.2 – As equações para as flutuações e para as covariâncias $\overline{u'_i u'_j}$

Desejamos agora obter diretamente as equações para as flutuações turbulentas  $u'_i$ . Começamos pela equação da continuidade, na forma

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.11)$$

Substituindo a decomposição de Reynolds na equação (6.4), nós obtemos



$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_k} + u'_k)] = \\ \frac{\overline{\rho_\delta} + \rho'}{\rho_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l [\overline{u_k} + u'_k] - \frac{1}{\rho_r} \left[ \frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right] + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \overline{s_{ik}}}{\partial x_k} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Note que a *média* de (6.12) destrói todos os termos que dependem linearmente de uma flutuação. O único “problema” é com os termos não-lineares:

$$\overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_k} + u'_k)} = \overline{u_i} \overline{u_k} + \overline{u'_i u'_k}, \quad (6.13)$$

donde se deduz novamente as equações para as médias,

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{u_i} \overline{u_k} + \overline{u'_i u'_k}] = \frac{\overline{\rho_\delta}}{\rho_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \overline{u_k} - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \overline{p_\delta}}{\partial x_i} + \nu_{(i)} \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (6.14)$$

O único termo “novo” é o fluxo cinemático turbulento  $\overline{u'_i u'_k}$ . Subtraindo (6.14) de (6.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u'_i \overline{u_k} + \overline{u_i} u'_k + u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k}] = \\ \frac{\rho'}{\rho_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u'_k - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

que é a equação resultante dos princípios de conservação de quantidade de movimento e massa de um escalar para as flutuações. Sua pré-multiplicação por  $u'_j$  resulta em

$$\begin{aligned} u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_k} u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_j u'_k \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + u'_j \frac{\partial u'_i u'_k}{\partial x_k} - u'_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{u'_j \rho'}{\rho_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u'_j u'_k - \frac{1}{\rho_r} u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} u'_j \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

É óbvio que uma equação igual a (6.16) vale se trocarmos os índices. Para registro, ela é:

$$\begin{aligned} u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \overline{u_k} u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x_k} - u'_i \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_k} = \\ \frac{u'_i \rho'}{\rho_r} g_j - 2\epsilon_{jlk} \omega_l u'_i u'_k - \frac{1}{\rho_r} u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + 2\nu_{(j)} u'_i \frac{\partial s'_{jk}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

Essas duas equações irmãs, (6.16)–(6.17), devem ser combinadas agora. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial t} &= u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}, \\ \frac{\partial (u'_i u'_j u'_k)}{\partial x_k} &= u'_j \frac{\partial (u'_i u'_k)}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \\ &= u'_j \frac{\partial (u'_i u'_k)}{\partial x_k} + u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$= u'_j \frac{\partial(u'_i u'_k)}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial(u'_j u'_k)}{\partial x_k}, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i} &= u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \Rightarrow \\ \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i} + \frac{\partial(u'_i p')}{\partial x_j} &= u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \Rightarrow \\ u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} &= \frac{\partial(u'_j p')}{\partial x_i} + \frac{\partial(u'_i p')}{\partial x_j} - p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

O trabalho com o termo viscoso é um pouco mais sofisticado; note que

$$v_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_j s'_{ik}) = v_{(i)} u'_j \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k} + v_{(i)} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} s'_{ik}; \quad (6.21)$$

por simetria,

$$v_{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_i s'_{jk}) = v_{(j)} u'_i \frac{\partial s'_{jk}}{\partial x_k} + v_{(j)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} s'_{jk}. \quad (6.22)$$

Somando-se as duas, obtém-se o seguinte resultado importante:

$$v'_{(i)} u'_j \frac{\partial s'_{ik}}{\partial x_k} + v'_{(j)} u'_i \frac{\partial s'_{jk}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v'_{(i)} u'_j s'_{ik} + v'_{(j)} u'_i s'_{jk}) - \left[ v'_{(i)} s'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + v'_{(j)} s'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right]. \quad (6.23)$$

Somando-se (6.16) e (6.17), e utilizando-se os resultados intermediários (6.18)–(6.23), obtém-se finalmente a equação para os momentos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\overline{u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}}_{\text{II}} + \underbrace{\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \underbrace{\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k}}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}}_{\text{V}} = \\ - \underbrace{\frac{g}{\rho_r} (\delta_{i3} \overline{u'_j \rho'} + \delta_{j3} \overline{u'_i \rho'})}_{\text{VI}} - \underbrace{2\Omega_l [\epsilon_{ilk} \overline{u'_j u'_k} + \epsilon_{jlk} \overline{u'_i u'_k}]}_{\text{VII}} \\ - \underbrace{\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{u'_j p'} \delta_{ik} + \overline{u'_i p'} \delta_{jk}]}_{\text{VIII}} + \underbrace{\frac{p'}{\rho_r} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{IX}} + \\ 2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (v_{(i)} \overline{u'_j s'_{ik}} + v_{(j)} \overline{u'_i s'_{jk}})}_{\text{X}} - 2 \underbrace{\left[ v_{(i)} s'_{ik} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + v_{(j)} s'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right]}_{\text{XI}}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

A denominação de cada um dos termos é a seguinte:

- I. é a derivada local de  $\overline{u'_i u'_j}$ ;
- II. é a derivada advectiva de  $\overline{u'_i u'_j}$ ;
- III. é (menos) um dos termos de produção por gradiente;

- IV. é (menos) um dos termos de produção por gradiente;
- V. é (menos) o transporte turbulento de  $\overline{u'_i u'_j}$ ;
- VI. é a produção/destruição pelo fluxo de flutuabilidade,  $\overline{u'_3 \rho'}$  (note a presença de  $\delta_{i3}$  e de  $\delta_{j3}$ );
- VII. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial;
- VIII. é o termo de transporte de pressão;
- IX. é o termo de desvio, ou termo de retorno à isotropia;
- X. é o termo de transporte molecular difusivo de  $\overline{u'_i u'_j}$ ;
- XI. é a dissipação molecular de  $\overline{u'_i u'_j}$ .

### 6.3 – Energia cinética da turbulência

Fazendo  $i = j$  em (6.24), e impedindo a soma em  $i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_{(i)} u'_{(i)}}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_{(i)} u'_{(i)}}}{\partial x_k} + 2 \overline{u'_{(i)} u'_k} \frac{\partial \overline{u_{(i)}}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_{(i)} u'_{(i)} u'_k}}{\partial x_k} = \\ - \frac{2g}{\rho_r} \overline{u'_3 \rho'} - 4\epsilon_{ilk} \Omega_l \overline{u'_{(i)} u'_k} - \frac{2}{\rho_r} \left[ \frac{\partial \overline{u'_{(i)} p'}}{\partial x_i} \right] + 2 \frac{\overline{p'}}{\rho_r} \left( \frac{\partial \overline{u'_{(i)}}}{\partial x_i} \right) \\ + 2\nu'_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{2u'_{(i)} s_{ik}} \right) - 2\nu_{(i)} \left[ \overline{2s_{ik} \frac{\partial u'_{(i)}}{\partial x_k}} \right]. \end{aligned}$$

Dividindo por 2, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u'_{(i)} u'_{(i)}}}{2} + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{u'_{(i)} u'_{(i)}}}{2} + \overline{u'_{(i)} u'_k} \frac{\partial \overline{u_{(i)}}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_{(i)} u'_{(i)} u'_k}}{\partial x_k} = \\ - \frac{g}{\rho_r} \delta_{i3} \overline{u'_{(i)} \rho'} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \overline{u'_{(i)} u'_k} - \frac{1}{\rho_r} \left[ \frac{\partial \overline{u'_{(i)} p'}}{\partial x_i} \right] + \frac{\overline{p'}}{\rho_r} \left( \frac{\partial \overline{u'_{(i)}}}{\partial x_i} \right) \\ + 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_{(i)} s_{ik}} \right) - 2\nu_{(i)} \left[ \overline{s_{ik} \frac{\partial u'_{(i)}}{\partial x_k}} \right]. \quad (6.25) \end{aligned}$$

A equação (6.25) representa 4 equações distintas, para  $i = 1, 2, 3$  e 4. As 3 primeiras são as equações para as semivariâncias  $\overline{u'_1 u'_1}/2$ ,  $\overline{u'_2 u'_2}/2$  e  $\overline{u'_3 u'_3}/2$ . A quarta é a equação para a semivariância de um escalar,  $\overline{c' c'}/2$ .

Somando as 3 primeiras ( $i = 1, 2, 3$ ) e utilizando (3.72) para o último termo acima, obtém-se a equação para a energia cinética da turbulência, que foi definida em (3.105):

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{e_{ct}}}{\partial t}}_I + \underbrace{\overline{u_k} \frac{\partial \overline{e_{ct}}}{\partial x_k}}_{II} + \underbrace{\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}}_{III} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_k}}{\partial x_k}}_{IV} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{g}{\rho_r} \overline{u'_3 \rho'}}_V - \underbrace{2\epsilon_{ilk} \Omega_l \overline{u'_i u'_k}}_{VI} - \underbrace{\frac{1}{\rho_r} \left[ \frac{\partial \overline{u'_i p'}}{\partial x_i} \right]}_{VII} \\
& \quad + \underbrace{2\nu_{(i)} \frac{\partial \overline{u'_i s'_{ik}}}{\partial x_k}}_{VIII} - \underbrace{2\nu_{(i)} \overline{s'_{ik} s'_{ik}}}_{IX}. \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Em (6.26,

- I. é a derivada local de  $\overline{e_{ct}}$ ;
- II. é a derivada advectiva de  $\overline{e_{ct}}$ ;
- III. é (menos) o termo de produção por gradiente;
- IV. é (menos) o transporte turbulento de  $\overline{e_{ct}}$ ;
- V. é a produção de  $\overline{e_c}$  pelo fluxo de flutuabilidade,  $\overline{u'_3 \rho'}$ ;
- VI. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial;
- VII. é o termo de transporte de pressão;
- VIII. é o termo de transporte difusivo de  $\overline{e_{ct}}$ ;
- IX. é a dissipação molecular da energia cinética da turbulência,  $\overline{\epsilon_e}$ .

Observe que, com a soma, um dos termos de (6.25) desaparece devido à equação da continuidade (6.11), a saber:

$$\sum_{i=1}^3 \overline{\frac{p'}{\rho_r} \left( \frac{\partial u'_{(i)}}{\partial x_i} \right)} = \overline{\frac{p'}{\rho_r} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)} = 0.$$

Os termos acima são termos de redistribuição de energia cinética entre as componentes 1, 2 e 3. Eles são negativos nas direções ao longo das quais energia cinética é produzida (com maior intensidade), e positivos nas demais, e somam zero. Dessa forma, seu efeito é o de *redistribuir* a energia cinética entre as 3 direções, no sentido de equalizá-la (ou seja: de isotropizar a turbulência).

(6.26) é a equação que antecede (1-111) de Hinze (1975) (p. 74). De (3.111), nós reconhecemos que, para um escoamento solenoidal nas flutuações ( $\partial u'_k / \partial x_k = 0$ ), o termo IX de (6.26) é  $\langle \epsilon_e \rangle$ . Além disso, também supondo que a divergência das flutuações de velocidade é nula, o termo VIII de (6.26) é

$$\begin{aligned}
2\nu_{(i)} \frac{\partial \overline{u'_i s'_{ik}}}{\partial x_k} &= 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \\
&= \nu_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right] \\
&= \nu_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \overline{(u'_i u'_i)} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right] \\
&= v_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} + v_{(i)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}. \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, o termo IX de (6.26) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
2v_{(i)} \overline{s'_{ik} s'_{ik}} &= 2v_{(i)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \right] \\
&= \frac{v_{(i)}}{2} \left[ \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right] \\
&= v_{(i)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + v_{(i)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}. \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Subtraindo-se (6.28) de (6.27) e levando-se em (6.26), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} + \overline{u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i u'_k}}{\partial x_k} = \\
- 2\epsilon_{ilk} \omega_l \overline{u'_i u'_k} - \frac{1}{\rho_r} \left[ \frac{\partial u'_i p'}{\partial x_i} \right] + v_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} - \underbrace{v_{(i)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\approx \overline{\epsilon_e}}. \quad (6.29)
\end{aligned}$$

Em um certo sentido, (6.26) é mais “correta” do que (6.29) porque nela  $\overline{\epsilon_e}$  aparece explicitamente, e exatamente. Agora, se a turbulência for homogênea, os dois penúltimos termos de (6.26) e de (6.29) são nulos, e o último termo de (6.29) para  $\overline{\epsilon_e}$  torna-se exato. Em turbulência *homogênea* portanto, vale

$$\overline{\epsilon_e} = v_{(i)} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = v_{(i)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = 0. \quad (6.30)$$

A equação (6.30) é uma entre várias relações similares que podem ser obtidas em turbulência homogênea e incompressível. Sua dedução pode ser feita diretamente a partir das hipóteses de homogeneidade e divergência nula de  $\mathbf{u}'$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} &= 0, \\
\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_i \partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0, \\
\frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} &= 0 \blacksquare \quad (6.31)
\end{aligned}$$

Resultados um pouco mais gerais também se aplicam:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= 0, \\ \overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j}} &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.32)$$

Finalmente, usando (6.32),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} &= 0, \\ \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}} &= 0, \\ \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.33)$$

## 6.4 – A semivariância de um escalar

No caso  $i = 4$ , (6.25) torna-se a equação para a semivariância de um escalar, e lê-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u'_4 u'_4}}{2} + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{u'_4 u'_4}}{2} + \overline{u'_4 u'_k} \frac{\partial \overline{u_4}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_4 u'_4 u'_k}}{\partial x_k} = \\ - \frac{g}{\rho_r} \delta_{43} \overline{u'_4 \rho} - \epsilon_{4lk} \omega_l \overline{u'_4 u'_k} - \frac{1}{\rho_r} \left[ \frac{\partial \overline{u'_4 p'}}{\partial x_4} \right] + \frac{p}{\rho_r} \left( \frac{\partial \overline{u'_4}}{\partial x_4} \right) \\ + 2\nu'_4 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_4 s'_{4k}} \right) - 2\nu_4 \left[ \overline{s'_{4k} \frac{\partial u'_4}{\partial x_k}} \right]. \end{aligned}$$

As simplificações com  $i = 4$  agora levam a

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{u'_4 u'_4}}{2} + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{u'_4 u'_4}}{2} + \overline{u'_4 u'_k} \frac{\partial \overline{u_4}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_4 u'_4 u'_k}}{\partial x_k} = 2\nu_4 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{u'_4 s'_{4k}} \right) - 2\nu_4 \left[ \overline{s'_{4k} \frac{\partial u'_4}{\partial x_k}} \right].$$

Os termos envolvendo  $s'_{4k}$  ainda podem ser simplificados:

$$s'_{4k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_4}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_4} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u'_4}{\partial x_k}.$$

Finalmente, com  $u_4 = c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{c' c'}}{2} + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{c' c'}}{2} + \overline{c' u'_k} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{c' c' u'_k}}{\partial x_k} = \nu_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( c' \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right) - \nu_c \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k}. \quad (6.34)$$

Para um escalar, portanto, (6.25) é idêntica a (6.34) acima, e não há a diferença notada (para a energia cinética da turbulência) entre (6.26) e (6.29). Em particular, a taxa média de dissipação da semivariância do escalar é, simplesmente,

$$\overline{\epsilon_{cc}} = \nu_c \overline{\frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k}}. \quad (6.35)$$

## 6.5 – As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2

Vamos agora estudar as ordens de grandeza dos termos de (6.24). Nós começamos por admitir que, em geral,

$$\mathcal{O}(\overline{u'_i u'_j}) = \tilde{u}^2. \quad (6.36)$$

Os termos I e II têm que ter (*no máximo*) a mesma ordem de grandeza dos demais, já que juntos eles formam uma “derivada material” seguindo o escoamento médio,

$$\frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} \equiv \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}. \quad (6.37)$$

Note que (6.37) pode ser interpretada como a derivada material seguindo o escoamento *médio*, já que é formada com  $\overline{U_k}$ , e não com  $U_k$ . A barra sobre o  $D$  serve para explicitar a diferença.

Vamos também supor que as escalas integrais (ou, como dizem os russos, *externas*) são impostas fisicamente ao escoamento, e por conseguinte estão relacionadas com os gradientes de velocidade média:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \sim \frac{\tilde{u}}{\ell}. \quad (6.38)$$

Neste caso,

$$\mathcal{O}(\text{III, IV, V}) \sim \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \quad (6.39)$$

*no máximo*, porque na verdade não temos muita idéia sobre o comportamento das correlações triplas. Continuando,

$$\mathcal{O}(\text{VI}) \sim \frac{g \tilde{u} \tilde{\rho}}{\rho_r}, \quad (6.40)$$

onde  $g$  é a escala externa das flutuações de densidade. Isto na verdade define uma *nova* escala de comprimento,

$$g \tilde{u} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r} \equiv \frac{\tilde{u}^3}{L_O} \Rightarrow \frac{1}{L_O} = \frac{g \tilde{\rho}}{\tilde{u}^2 \rho_r}, \quad (6.41)$$

o que nos deixa a um passo do comprimento de estabilidade de Obukhov.

A ordem de grandeza das covariâncias com a pressão vem a seguir. É razoável supor que

$$p' \sim \tilde{p} \sim \rho_r \tilde{u}^2, \quad (6.42)$$

mas ainda é necessário estimar o *nível de correlação* entre  $p$ ,  $u'_i$  e  $\partial u'_i / \partial x_k$ . Note que, se  $u'_i$  e  $\partial u'_i / \partial x_k$  fossem bem correlacionados, então  $\overline{u'_i \partial u'_i / \partial x_k} \sim \tilde{u}^2 / \lambda$  em virtude de (4.34); no entanto, seguindo a linha de raciocínio de Tennekes e Lumley (1972, p. 70):

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_i} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \ll \frac{\tilde{u}^2}{\lambda}. \quad (6.43)$$

O motivo para esta discrepância é que  $u_i$  e  $\partial u_i / \partial x_k$  não estão distribuídos na mesma faixa de números de onda. De fato, se pensarmos nos espectros respectivos,

$$\Phi_{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \sim k^2 \Phi_{i,i}, \quad (6.44)$$

ou seja, as faixas de números de onda das derivadas é bem mais alta. Daqui somos capazes de deduzir que o nível de correlação entre  $u_i$  e suas derivadas espaciais é

$$r_{u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \sim \frac{\lambda}{\ell}. \quad (6.45)$$

Note que o coeficiente de correlação é *identicamente nulo* em turbulência homogênea. A ordem de grandeza dos termos envolvendo a aceleração de Coriolis é:

$$\mathcal{O}(\text{VII}) \sim 2\Omega\tilde{u}^2. \quad (6.46)$$

Note que se os termos dominantes da equação de momentos de ordem 2 são de ordem  $u^3/\mathcal{L}$ , o *número de Rossby turbulento* é

$$\text{Ro} = \frac{\Omega\tilde{u}^2}{\tilde{u}^3/\ell} = \frac{\Omega\ell}{\tilde{u}} \sim 0,007 \ll 1, \quad (6.47)$$

donde se conclui que a influência destes termos na turbulência propriamente dita é desprezível.

Da mesma forma que no caso de  $\overline{u'_i \partial u'_i / \partial x_k}$ , VIII é nulo em turbulência homogênea; alguns autores (Stull, por exemplo) sugerem que VIII é desprezível na camada-limite atmosférica. Neste ponto, parece razoável partir da idéia de que se um termo é nulo em turbulência homogênea, ele deve ser relativamente pequeno em turbulência não-homogênea real. É claro que isto não resolve a questão do nível de correlação entre flutuações de pressão e as derivadas das flutuações de velocidade. Talvez o melhor que se possa fazer a esta altura (alguma contribuição para os modelos de fechamento dos termos de pressão?) seja mencionar que um modelo clássico de fechamento é (Hinze, 1975)

$$\frac{p'}{\rho_r} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = \frac{c\sqrt{u'_k u'_k}}{\ell} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{6} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} \right) \sim \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \quad (6.48)$$

Isto significa que os termos de correlação de pressão *são importantes*, da mesma ordem que os termos de produção e (possivelmente) de correlação tripla.

Continuamos a análise de ordens de grandeza, atacando agora os termos que envolvem viscosidade. Ao olhar para X, vemos imediatamente um termo que é *identicamente nulo* em turbulência homogênea; é de se esperar portanto que sua importância em geral seja pequena. Em X, temos

$$\left[ \nu_{(i)} \overline{u'_j s'_{ik}} + \nu_{(j)} \overline{u'_i s'_{jk}} \right] = \left[ \nu_{(i)} \frac{1}{2} u'_j \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) + \nu_{(j)} \frac{1}{2} u'_i \left( \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) \right].$$

Note o aparecimento de correlações do tipo  $\overline{u'_j \partial u'_k / \partial x_i}$  entre variáveis com índices distintos (aqui,  $j$  e  $k$ ). A maneira mais simples de estimar a ordem de grandeza desse termo é recorrer a (1.32)–(1.33). Para a primeira das quatro correlações,

$$\begin{aligned} \overline{u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} &\sim \overline{u'_j \frac{\partial u'_{(j)}}{\partial x_i}} \\ &= \frac{\overline{u'_j u'_{(j)}}}{2} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \end{aligned} \quad (6.49)$$



o mesmo podendo ser feito imediatamente para os demais termos dentro do colchete.

Outra ligeira complicação é a possibilidade de que  $\nu_{(i)} \gg \nu_{(j)}$  (ou vice-versa), ou seja: a possibilidade de números de Prandtl ou de Schmidt muito diferentes de 1. Deixando de lado essa complicação e fazendo  $\nu_{(i)} \sim \nu_{(j)} \sim \nu_u$ , segue-se imediatamente que

$$\mathcal{O}(X) = \nu_u \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} = \frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell} \frac{\tilde{u}^3}{\ell} = \text{Re}_\ell^{-1} \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \quad (6.50)$$

Por outro lado,

$$\mathcal{O}(XI) = \nu \left( \frac{\tilde{u}}{\lambda} \right)^2 \sim \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \gg \mathcal{O}(X) \quad \text{se } i = j! \quad (6.51)$$

Esta rápida análise mostra que o termo difusivo X é muito menor que o termo dissipativo XI. Neste ponto, é interessante definir uma taxa de dissipação de covariância,

$$2\epsilon_{ij} \approx (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \approx \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon_e. \quad (6.52)$$

Segundo Wyngaard (1981), a 2ª equação é estritamente válida se a turbulência for isotrópica. Ver também Hinze (1975, p. 189).

## 6.6 – Considerações adicionais sobre modelos de fechamento

Speziale (1991) define um tensor que pode ser importante para nós: o *tensor de anisotropia*,

$$b_{ij} \equiv \frac{1}{2 \langle e_c \rangle} \left[ \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \langle e_c \rangle \delta_{ij} \right]. \quad (6.53)$$

Observe que, em turbulência isotrópica,

$$\langle u_i u_j \rangle = \frac{2}{3} \langle e_c \rangle \delta_{ij};$$

então,

$$\langle u_{(i)} u_{(i)} \rangle = \frac{2}{3} \langle e_c \rangle.$$

Consequentemente, em turbulência isotrópica,  $b_{ij} \equiv 0$ .

# 7

## Soluções laminares das equações de Navier-Stokes

---

A maioria das camadas-limite encontradas em escoamentos industriais ou naturais é turbulenta. Além disso, é nessas camadas-limite que ocorrem os *fluxos* mais intensos de quantidade de movimento, calor e massa. Por exemplo, e para citar o mais óbvio, a assim chamada “perda de carga” em tubos e canais está ligada diretamente ao atrito entre paredes e escoamento, e à dissipação de energia cinética da turbulência em calor que lhe está associada. Para os engenheiros ao fim do século XIX e início do XX, este era um problema de grande importância, pois dele dependiam critérios de projeto de tubulações industriais e canais. Os primeiros resultados de engenharia foram obtidos de forma “empírica” (um físico diria: “fenomenológica”) e antecederam os resultados mais fundamentais de Mecânica dos Fluidos e Teoria de Turbulência. Frequentemente, usamos a palavra “Hidráulica” para caracterizar essa abordagem, que produziu, entre outras, fórmulas empíricas tais como a de Hazen-Williams e a de Manning. Entretanto, também desde o século XIX já se conhecia o suficiente da física de fluidos para saber que, em princípio, qualquer escoamento pode ser obtido como uma solução das equações de Navier-Stokes. Blasius obteve a primeira solução das equações de Navier-Stokes de interesse real em engenharia. Nosso objetivo neste capítulo será procurar entender da forma mais fundamental possível o comportamento das camadas-limite turbulentas.

### 7.1 – Algumas soluções laminares

O escoamento em um duto com seção retangular de largura infinita em  $y$  e de espessura  $h = 2\delta$  em  $z$ , em regime laminar sob a ação de um gradiente de pressão, é regido pelas equações de Navier-Stokes em duas dimensões,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (7.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (7.3)$$

As condições de contorno são

$$u(0) = 0, \quad (7.4)$$

$$w(0) = 0, \quad (7.5)$$

$$w(2\delta) = 0, \quad (7.6)$$

$$w(2\delta) = 0. \quad (7.7)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção  $x$ ,  $\partial(\cdot)/\partial x = 0$  (exceto, é claro, para a pressão) e a solução de (7.1) é  $w(z) = 0$ . Este resultado por sua vez anula todos os termos envolvendo  $w$  em (7.3), cuja solução então será simplesmente uma distribuição hidrostática em  $z$ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(x, z) = -\rho g z + p_0(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_0}{dx}. \quad (7.8)$$

Observe que  $p_0(x)$  é, por definição, a pressão na parede em  $z = 0$ .

Em (7.2), as condições de escoamento plenamente desenvolvido em  $x$  e velocidade vertical nula anulam os termos não lineares, e usando-se (7.8) obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = gJ, \quad (7.9)$$

onde a constante  $gJ$  deve-se ao fato de que o lado esquerdo de (7.9) é (no máximo) função somente de  $x$ , e o lado esquerdo de  $z$ .  $J$  é a perda de carga unitária, constante em  $x$ . A introdução da aceleração da gravidade na definição da constante em (7.9) objetiva tornar  $J$  adimensional. Obtém-se portanto os resultados

$$\frac{dp_0}{dx} = -\rho g J \quad (7.10)$$

e (aplicando-se as condições de contorno para  $u$ )

$$u(z) = \frac{gJ}{2\nu} z (2\delta - z). \quad (7.11)$$

Essa última equação é o bem conhecido perfil parabólico de velocidade em um escoamento de Hagen-Poiseuille; sua integração produz a velocidade média na seção do duto:

$$U = \frac{gJ\delta^2}{3\nu}, \quad (7.12)$$

a qual pode ser reescrita em termos de um fator de atrito  $f$ :

$$J = \frac{f U^2}{\delta 2g} \quad (7.13)$$

onde

$$f = \frac{6\nu}{U\delta} = \frac{6}{\text{Re}} \quad (7.14)$$

é o fator de atrito que depende, em um escoamento laminar, do número de Reynolds aqui definido em termos da semi-espessura  $\delta$ :

$$\text{Re} = \frac{\bar{U}\delta}{\nu}. \quad (7.15)$$

O fator numérico em (7.14) depende, naturalmente, das definições de  $f$  em (7.13) e de  $\text{Re}$  em (7.15)\*. Todo o desenvolvimento acima é clássico e muito bem conhecido. O ponto importante aqui é que vamos utilizar um desenvolvimento totalmente análogo para escoamentos turbulentos, recuperando diversos resultados obtidos para

---

\*É interessante notar que (7.14) tem um coeficiente numérico dez vezes menor que o da fórmula similar para o fator de atrito de Darcy em *tubos* de seção circular,  $f_D = 64/\text{Re}_D$ , onde o número de Reynolds neste caso é  $\text{Re}_D = UD/\nu$ , e  $D$  é o *diâmetro* do tubo.

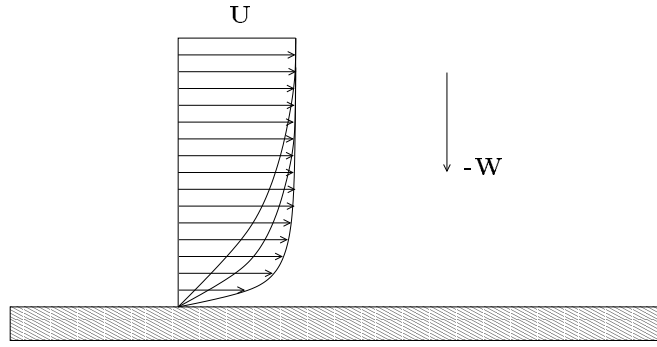


Figura 7.1: Escoamento laminar sobre uma placa porosa

escoamento laminar, inclusive a constância do gradiente de pressão. A obtenção do perfil de velocidade em função da perda de carga unitária em (7.11) é claramente o passo fundamental, que precisará ser repetido, ainda que com mais dificuldade, em escoamentos turbulentos.

Considere agora um escoamento bi-dimensional sobre uma placa porosa, com velocidade  $U_\infty$  horizontal longe da placa, e um campo de velocidade vertical uniforme  $-W_0$  (figura 7.1). As equações governantes (para um fluido com densidade constante) são novamente (7.1)–(7.3). As condições de contorno são

$$u(0) = 0, \quad (7.16)$$

$$u(\infty) = U_\infty, \quad (7.17)$$

$$w(0) = -W_0. \quad (7.18)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção  $x$ ,  $\partial(\cdot)/\partial x = 0$ , e a solução de (7.1) é  $W(z) = -W_0$ . A solução de (7.3) é simplesmente uma distribuição hidrostática de pressão na vertical, e finalmente (7.2) conduz à equação diferencial ordinária

$$\nu \frac{d^2 u}{dz^2} + W_0 \frac{du}{dz} = 0, \quad (7.19)$$

cujas soluções para as condições de contorno em  $U$  é

$$u(z) = U_\infty \left(1 - e^{-\frac{W_0 z}{\nu}}\right). \quad (7.20)$$

Observe que (7.20) é uma solução *laminar*, e em princípio sem utilidade para a solução de problemas reais turbulentos. Ela tem, entretanto, a característica interessante de depender do “número de Reynolds”

$$\text{Re}_z = \frac{W_0 z}{\nu}; \quad (7.21)$$

quanto maior  $\text{Re}_z$ , mais “reto” fica o perfil — em outras palavras, mais delgada se torna a camada-limite viscosa próximo da parede. Este é exatamente o tipo de comportamento que ocorre em escoamentos turbulentos reais. Em retrospecto, o responsável pelo “achatamento” do perfil de velocidade  $u(z)$  é o fluxo advectivo de quantidade de movimento  $-U(z)W_0$ . Em escoamentos turbulentos, a grandeza equivalente será o fluxo turbulento de quantidade de movimento (ou tensão de Reynolds)  $-\overline{u'w'}$ .

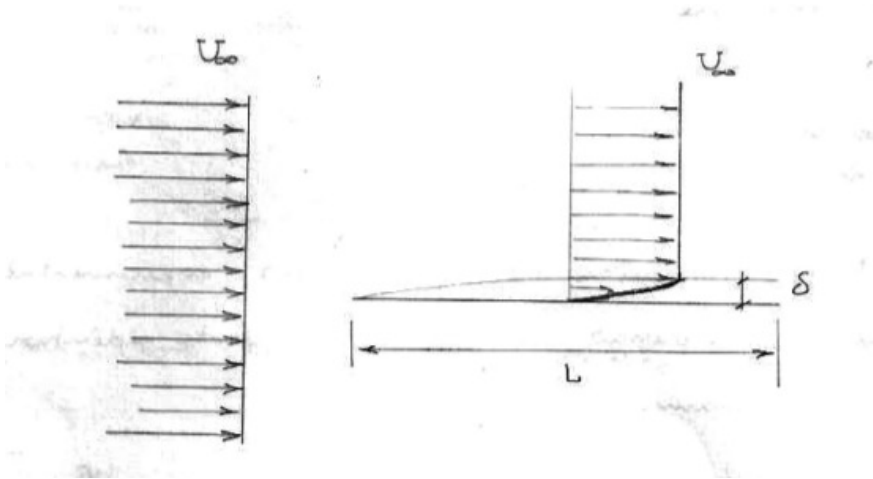


Figura 7.2: A camada-limite laminar

## 7.2 – A Solução de Blasius

Considere a figura 7.2. Desejamos resolver o sistema de equações 1

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{II}} = 0, \quad (7.22)$$

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{III}} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{IV}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{V}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{VI}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{VII}}, \quad (7.23)$$

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{VIII}} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{IX}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{X}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\text{XI}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{XII}} \quad (7.24)$$

1ª Observação: uma análise linear, que não é necessariamente fácil, deve indicar que, devido à presença da derivada segunda em relação a  $y$ ,  $\partial^2 \cdot / \partial y^2$ , este é um sistema elítico, que requer condições de contorno na extremidade direita da placa. Isso é, em um certo sentido, não-natural. O primeiro passo, portanto, é modificar as equações, por meio de uma análise da ordem de grandeza dos termos. A observação fundamental, de natureza experimental, é que a espessura da camada-limite é muito em comparação com as distâncias em  $x$ :

$$\frac{\delta}{L} \ll 1. \quad (7.25)$$

Da equação da continuidade, temos

$$\frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} \sim 0 \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty. \quad (7.26)$$

Seguem-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\text{I} \sim U_\infty / L, \quad (7.27)$$

$$\text{II} \sim \frac{U_\infty \delta}{L}, \quad (7.28)$$

$$\text{III} \sim U_\infty^2/L, \quad (7.29)$$

$$\text{IV} \sim U_\infty \frac{\delta U_\infty/L}{\delta} = U_\infty^2/L \quad (7.30)$$

Com a hipótese adicional

$$P \sim \rho U_\infty^2,$$

nós prosseguimos nas estimativas de ordens de grandeza:

$$\text{V} \sim U_\infty^2/L, \quad (7.31)$$

$$\text{VI} \sim \nu \frac{U_\infty}{L^2} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.32)$$

$$\text{VII} \sim \frac{\nu U_\infty}{\delta^2}. \quad (7.33)$$

Claramente, VI é muito menor que todos os demais termos em (7.23). Observe entretanto que VII possui uma escala à primeira vista “independente” das demais. Na região de interesse, entretanto, próximo da parede, VII é o único termo que ressa que inclui os efeitos viscosos. Para que estes efeitos sejam da mesma ordem que a aceleração convectiva dada por III, e IV,

$$\frac{\nu U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}. \quad (7.34)$$

É conveniente observar que

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}. \quad (7.35)$$

Finalmente, devemos explorar “até o fim” a última equação, de balanço de quantidade de movimento em  $y$  (utilizando em todos os casos (7.34)):

$$\text{VIII} \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.36)$$

$$\text{IX} \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.37)$$

$$\text{X} \sim \frac{L}{\delta} U_\infty^2/L = \sqrt{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.38)$$

$$\text{XI} \sim \frac{\nu}{L^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\delta}{L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L^{3/2}} U_\infty^2/L, \quad (7.39)$$

$$\text{XII} \sim \frac{\nu}{\delta^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu U_\infty}{\delta L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{L}{\delta} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L. \quad (7.40)$$

Estes resultados mostram que, em primeira aproximação, nós podemos re-escrever o sistema (7.22)–(7.24) como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.41)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.42)$$

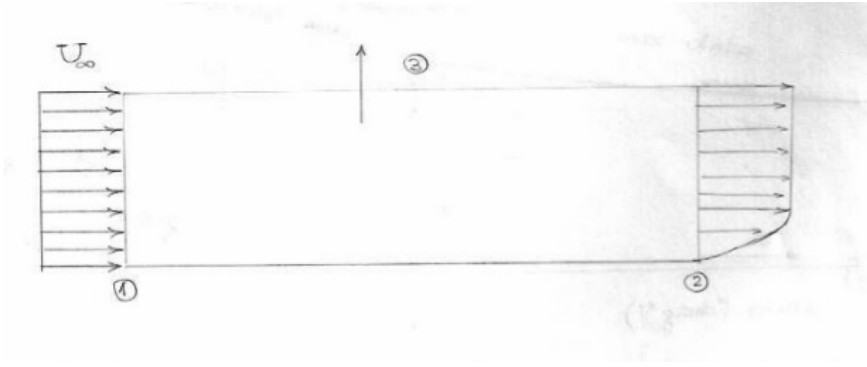


Figura 7.3: Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento  $\theta^*$ .

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.43)$$

Vários pontos são dignos de nota aqui. Em primeiro lugar, nós observamos que (7.43) significa que o gradiente de pressão  $\partial p / \partial x$  observado no escoamento *longe* da placa é “imposto” pelo escoamento sobre a mesma. Em outras palavras, é possível substituir  $\partial p / \partial x$ , em (7.42), por  $\partial p_\infty / \partial x$ , sendo que este último é a solução do problema invíscido longe da parede.

Em segundo lugar, existe um estranho problema de 2ª ordem (uma perturbação?)

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (7.44)$$

Se essa equação é ou não identicamente atendida pela solução de Blasius, que virá a seguir, é motivo de investigação futura.

### 7.2.1 – Espessura de deslocamento

Dada uma distância  $h$  da parede, pode-se definir uma escala de comprimento  $\delta_h^*$  via

$$\begin{aligned} \int_0^h u(y) \, dy &\equiv \int_{\delta_h^*}^h U_\infty \, dy, \\ &= U_\infty (h - \delta_h^*) \Rightarrow \\ U_\infty \delta_h^* &= \int_0^h (U_\infty - u(y)) \, dy; \\ \delta_h^* &= \int_0^h \left( 1 - \frac{u(y)}{U_\infty} \right) dy. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Note que  $h$  foi necessário, como um “andaime” para construir o resultado (7.45); agora, entretanto, podemos passar ao limite, e definir

$$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(y)}{U_\infty} \right) dy. \quad (7.46)$$

Para definir a espessura de quantidade de movimento  $\theta^*$ , nós precisamos de um volume de controle adequado; tal volume é mostrado na figura 7.3.

A equação de balanço de massa é

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{\mathcal{S}} \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \, dS \\
 &= \int_1 \rho(-U_\infty) \, dy + \int_2 \rho u(L, y) \, dy + \int_3 \rho v(x, h) \, dx \Rightarrow \\
 \dot{M} &= \int_3 \rho v(x, h) \, dx = \int_1 \rho(U_\infty) \, dy - \int_2 \rho u(L, y) \, dy; \\
 \rho \delta_h^* U_\infty &\equiv \dot{M} = \int_0^h \rho(U_\infty - u(y)) \, dy.
 \end{aligned}$$

Disso resulta a mesma expressão já obtida para  $\delta_h^*$ ,

$$\delta_h^* = \int_0^h \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty}\right) \, dy. \quad (7.47)$$

O balanço de quantidade de movimento é

$$\begin{aligned}
 -D &= \int_{\mathcal{S}} U \rho(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \, dS \\
 &= \int_1 U_\infty \rho(-U_\infty) \, dy + \int_2 \rho[u(L, y)]^2 \, dy + \int_3 U_\infty \rho v(x, h) \, dx \\
 &= \int_1 U_\infty \rho(-U_\infty) \, dy + \int_2 \rho[u(L, y)]^2 \, dy + U_\infty \int_3 \rho v(x, h) \, dx \\
 &= \int_1 U_\infty \rho(-U_\infty) \, dy + \int_2 \rho[u(L, y)]^2 \, dy + U_\infty \dot{M} \\
 &= \int_1 U_\infty \rho(-U_\infty) \, dy + \int_2 \rho[u(L, y)]^2 \, dy + U_\infty \int_0^h \rho(U_\infty - u(L, y)) \, dy \\
 &= \int_0^h \rho[u(L, y)]^2 \, dy - U_\infty \int_0^h \rho u(L, y) \, dy \Rightarrow \\
 D &= \int_0^h u(L, y) (U_\infty - u(L, y)) \rho \, dy.
 \end{aligned}$$

Defina agora a espessura de *momentum*  $\theta^*$ :

$$D \equiv \rho U_\infty^2 \theta^*, \quad (7.48)$$

donde, fazendo  $h \rightarrow \infty$ :

$$\theta^* = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \, dy. \quad (7.49)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^x \tau_0(\xi) \, d\xi \Rightarrow \\
 \tau_0 &= \frac{dD}{dx}, \\
 \tau_0 &= \rho U_\infty^2 \frac{d\theta^*}{dx}.
 \end{aligned} \quad (7.50)$$



### 7.2.2 – A solução de Blasius

Tente

$$\frac{u(x, y)}{U_\infty} = g(\eta), \quad (7.51)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.52)$$

Procure uma solução em termos de uma função-corrente  $\Psi$ :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (7.53)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.54)$$

Segue-se que

$$\Psi = \int_0^y u \, dY \quad (7.55)$$

$$= \delta(x) \int_0^y u \, d\eta = U_\infty \delta(x) \int_0^\eta \frac{u}{U_\infty} \, dH \quad (7.56)$$

$$= U_\infty \delta(x) \int_0^\eta g(H) \, dH, \quad (7.57)$$

onde

$$g(\eta) = \frac{df}{d\eta}. \quad (7.58)$$

Note que a adoção de uma função-corrente faz com que a equação da continuidade (na sua forma incompressível) seja atendida automaticamente (*remember* Lorenz); portanto, restou a equação de momentum em  $x$ , na qual (lembremo-nos)

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

A equação diferencial parcial em  $\Psi$  que precisamos resolver é, portanto,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (7.60)$$

Nossa proposta de adimensionalização para  $\Psi$  é

$$\Psi(x, y) = U_\infty \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (7.61)$$

Portanto,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right]; \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{U_\infty \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta}, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}. \quad (7.66)$$

Detalhadamente, para aprendermos a derivar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{dx} \right] \\ &= U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \right] \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} &= -\frac{y}{\delta^2} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ U_\infty \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ U_\infty \delta \frac{df}{d\eta} \times \frac{1}{\delta} \right] \\ &= U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{df}{d\eta} \right] \\ &= U_\infty \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} &= -\frac{\eta}{\delta} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{U_\infty \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_\infty \frac{df}{d\eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [U_\infty \delta(x) f(\eta)]$$

$$\begin{aligned}
&= U_{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{df}{d\eta} \right] \\
&= U_{\infty} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \frac{U_{\infty}}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}.$$

Substituindo-se todos os termos, encontra-se

$$\begin{aligned}
U_{\infty} f' \left[ -\frac{U_{\infty} \eta f''}{\delta} \right] - U_{\infty} [f - f' \eta] \frac{d\delta}{dx} \frac{U_{\infty} f''}{\delta} &= \nu \frac{U_{\infty} f'''}{\delta^2}, \\
\frac{U_{\infty}^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} [-\eta f' f'' - f f'' + \eta f' f'''] &= \nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} f''' \\
-\frac{U_{\infty} \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} [f f''] &= f'''.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\delta &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}, \\
\frac{d\delta}{dx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\nu x}{U_{\infty}} \right)^{-1/2} \frac{\nu}{U_{\infty}}, \\
\frac{U_{\infty} \delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0.$$

Agora com Maxima, para verificar:

```

load(pdifff)$
eq : U * (nu*x/U)^(1/2) * F(y/(nu*x/U)^(1/2))$
diff(eq,y) * diff(eq,x,1,y,1) - diff(eq,x)*diff(eq,y,2) - nu*diff(eq,y,3)$
ratsubst(w,y/sqrt((nu*x)/U),%)$
factor(%);

```

resulta em:

```

Maxima 5.22.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.

```

The function `bug_report()` provides bug reporting information.

```
(%i1) batch(psiblasius.max)
```

read and interpret file: #p/home/nldias/work/posgraduacao/tx752-metmatengamb/psiblasius

```
(%i2) load(pdifff)
```

```
(%i3) eq : U (----) F(-----)
          nu x 1/2 y
          U      nu x 1/2
                (----)
                U
```

```
(%i4) - nu diff(eq, y, 3) - diff(eq, x) diff(eq, y, 2)
      + diff(eq, y) diff(eq, x, 1, y, 1)
```

```
(%i5) ratsubst(w, -----, %)
          y
          nu x
          sqrt(----)
          U
```

```
(%i6) factor(%)
      (2 F (w) + F(w) F (w)) U
      (3) (2)
```

```
(%o6) - -----
      2 x
      psiblasius.max
```

Essa expressão significa

$$-\frac{2f''' + ff''}{2x}U_{\infty}^2,$$

que é a mesma equação que nós obtivemos “na mão”. Novamente, nós fomos capazes de reduzir um problema em equações diferenciais parciais a um problema em equações diferenciais ordinárias. Mas cuidado: isso nem sempre é possível.

### 7.2.3 – Blasius: solução numérica

Como vimos, uma camada-limite laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão longitudinal pode ser resolvida com

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (7.67)$$

sujeita às condições de contorno

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (7.68)$$

onde

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, y)}{U_{\infty}\delta(x)} \quad (7.69)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (7.70)$$

e

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (7.71)$$

As condições 7.68 não configuram um problema de valor inicial clássico, mas sim um problema de valor de contorno. Mesmo assim, vale a pena a seguinte abordagem. A mudança de variáveis

$$u_1 = f, \quad u_2 = f', \quad u_3 = f'', \quad (7.72)$$

produz o seguinte sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -\frac{1}{2}u_1u_3 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

Este sistema pode agora ser resolvido com 3 condições iniciais

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = \gamma \quad (7.74)$$

onde  $\gamma$  é um valor inicial arbitrário para  $f''(0)$ . A solução de 7.73 pode ser obtida com o programa `blasius.py`:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
# -----
# blasius.py
# -----
from __future__ import print_function
from numpy import array
from sys import argv
# -----
# por comodidade, a condição inicial é na linha de comando
# -----
gamma = float(argv[1])
h = 0.01
t = [0.0]
x = [array([0.0,0.0,gamma])]
n = int(20.0/h)          # número de passos
# -----
# sistema a ser integrado
# -----
def ff(t,x):
    return array( [ x[1],x[2],-0.5*x[0]*x[2] ] )
def rk4(t,x,h,ff):
    '''
    rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
    '''
    k1 = h*ff(t,x)
    k2 = h*ff(t+h/2,x+k1/2)
    k3 = h*ff(t+h/2,x+k2/2)
```

```

    k4 = h*ff(t+h,x+k3)
    xn = x + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
    return xn
for i in range(0,n):          # loop da solução numérica
    tn = (i+1)*h
    xn = rk4(t[i],x[i],h,ff)
    t.append(tn)
    x.append(xn)
fou = open('blasius.out','wt')
for i in range(0,n+1):       # imprime o arquivo de saída
    fou.write( '%12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n' %
               (t[i],x[i][0],x[i][1],x[i][2]) )
print('%12.6f %12.6f' % (xn[1], xn[2]) )
fou.close()

```

Sucessivas rodadas de `blasius.c` produzem a seguinte tabela:

| $\gamma$ | $f'(\infty)$ |
|----------|--------------|
| 0.1      | 0.449        |
| 0.2      | 0.731        |
| 0.3      | 0.934        |
| 0.4      | 1.132        |
| 0.35     | 1.035        |
| 0.32     | 0.975        |
| 0.33     | 0.995        |
| 0.335    | 1.005        |
| 0.334    | 1.003        |
| 0.333    | 1.001        |
| 0.3325   | 1.0008       |
| 0.3322   | 1.0002       |
| 1.0      | 2.085409     |

Se o processo todo estiver certo, então a última saída deve ter gerado o perfil de velocidade

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad (7.75)$$

O seguinte *script* de `gnuplot` deve plotar o resultado:

```

set terminal postscript eps monochrome "Times-Roman" 18
set xlabel 'eta'
set ylabel 'u/Uoo'
set output 'blasius.eps'
set grid
plot 'blasius.out' using 1:3 notitle with lines lt 1 lw 2
exit

```

O resultado pode ser visso na figura [7.4](#)

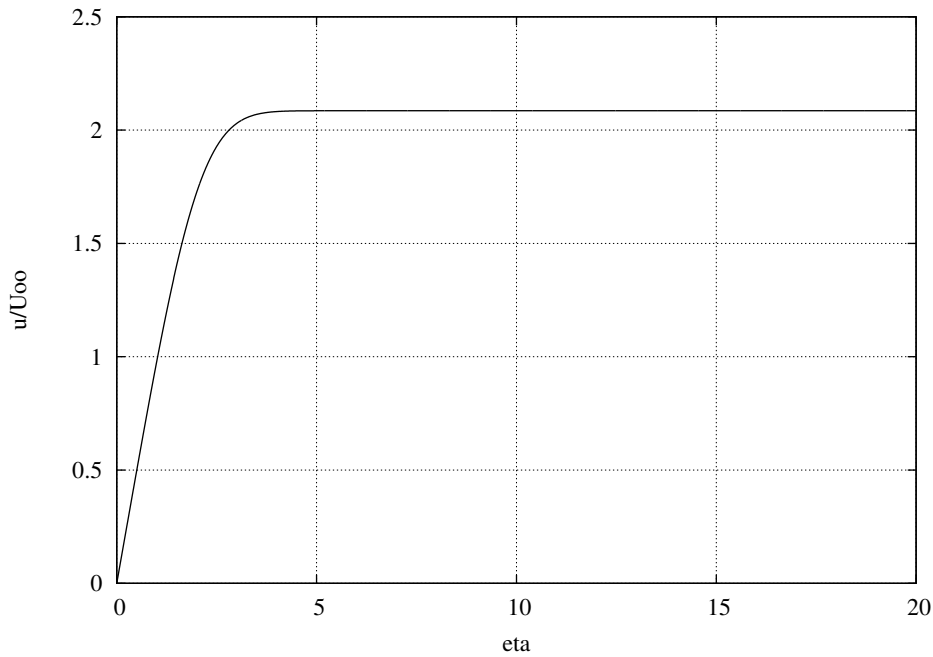


Figura 7.4: Perfil de velocidade adimensional de Blasius.

#### 7.2.4 – Uma alternativa

Liggett (1994) sugere a seguinte alternativa para definir condições de contorno em  $\eta = 0$ , e consequentemente produzir um problema de valor inicial desde o início:

$$f = \alpha g, \quad (7.76)$$

$$\xi = \beta \eta \quad (7.77)$$

Agora, em  $\xi = \eta = 0$ , a derivada segunda de  $f$  (que nós acabamos de determinar por tentativa-e-erro acima) é  $f''(0) = \gamma$ . A derivada segunda de  $g$  em relação a  $\xi$  será

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\xi} \\ &= \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^2} \frac{d^2 g}{d\eta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha \beta^2} \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Então,

$$\left. \frac{d^2 g}{d\xi^2} \right|_0 = \frac{1}{\alpha \beta^2} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_0 = \frac{\gamma}{\alpha \beta^2}. \quad (7.79)$$

Agora, imponha  $\gamma/(\alpha\beta^2) = 1$ , de tal modo que  $d^2g(0)/d\xi^2 = 1$ .

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{d(f/\alpha)}{d(\beta\eta)} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{df}{d\eta} \quad (7.80)$$

$$\frac{d^2g}{d\xi^2} = \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2f}{d\eta^2} \quad (7.81)$$

$$\frac{d^3g}{d\xi^3} = \frac{1}{\alpha\beta^3} \frac{d^3f}{d\eta^3} \quad (7.82)$$

Voltando à equação diferencial original,

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0, \\ 2\alpha\beta^3g''' + \alpha g\alpha\beta^2g'' &= 0 \end{aligned} \quad (7.83)$$

É conveniente agora fazer  $\alpha = \beta$ , de modo que a equação (7.83) torna-se

$$2g''' + gg'' = 0. \quad (7.84)$$

Trata-se evidentemente da *mesma* equação de Blasius, porém com condições iniciais diferentes. A sua solução levará à obtenção do valor de  $\alpha$ : de (7.80),

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{\alpha^2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (7.85)$$

Rodando blasius de novo com  $f''(0) = 1$  (na verdade,  $g''(0) = 1!$ ),  $g'(\infty) = 2.085409$  (veja a última linha da tabela, convenientemente inserida à espera deste momento);  $\alpha = 0.69247544534044858$ , e  $\gamma = \alpha^3 = 0.33205737835621146 = f''(0)$ , o que concorda com nosso resultado anterior obtido por tentativa-e-erro.



# 8

## Camadas-limite turbulentas

### 8.1 – Escoamento turbulento em um duto

Nesta seção estaremos estudando o escoamento sob pressão em um duto com seção retangular. Por simplicidade, vamos supor que a densidade  $\rho$  é estritamente constante, e vamos desprezar efeitos de rotação do referencial (ou seja: o termo de Coriolis não existe:  $\Omega = 0$ ). Neste caso, a promediação das equações do movimento (por exemplo, (3.35) ou (3.37)) produz

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.1)$$

e

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{u}_i \bar{u}_k + \overline{u'_i u'_k} \right] = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu_u \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (8.2)$$

Considere agora essas equações em um duto com seção retangular “infinita” na direção  $y$  e espessura na direção  $z$  dada por  $h = 2\delta$ , para um escoamento plenamente desenvolvido em  $x$ . O “plenamente desenvolvido” significa que as *médias* turbulentas — exceto pela pressão, como vai ficar óbvio — não variam em  $x$ :  $\partial(\cdot)/\partial x = 0$ ; da mesma forma, a seção “infinita” em  $y$  implica homogeneidade nessa direção:  $\partial(\cdot)/\partial y = 0$ . Substituindo essas condições na equação da continuidade, obtém-se

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \bar{w}(z) = \text{constante} \Rightarrow \bar{w}(z) = 0, \quad (8.3)$$

pois as condições de contorno em  $\bar{w}$  são  $\bar{w}(0) = \bar{w}(h) = 0$ .

A solução obtida  $\bar{w} = 0$  e a homogeneidade da turbulência em  $x$  e  $y$  simplificam a equação de *momentum* em  $z$  para

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Assim, um dos efeitos da turbulência é *desviar* a distribuição vertical de pressão média do estado hidrostático! Note que a imposição de *homogeneidade* da turbulência em  $x$  e  $y$  significa que  $\overline{w'w'}$  é uma função de  $z$  somente; tendo isso em mente, integre (8.4) entre 0 e  $z$  e imponha  $\overline{w'w'}(0) = 0$  (essa condição de contorno significa que a intensidade da turbulência “morre” na parede), para obter

$$\overline{w'w'}(z) + gz + \frac{1}{\rho} \bar{p}(x, z) = \frac{1}{\rho} \bar{p}(x, 0) \equiv \frac{1}{\rho} p_0(x), \quad (8.5)$$

onde  $p_0(x)$  significa a pressão média medida na parede do escoamento (teoricamente, também não há flutuações de pressão na parede). Um resultado importante pode ser obtido derivando-se essa última equação em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{dp_0}{dx}, \quad (8.6)$$

ou seja:

*O gradiente longitudinal da pressão média em todos os pontos de uma seção transversal é igual ao gradiente de pressão na parede.*

A homogeneidade em  $y$  faz com que a equação de *momentum* na direção  $y$  seja trivial:  $0 = 0$ ; na direção  $x$  teremos

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} - \nu \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} \equiv gJ. \quad (8.8)$$

O lado esquerdo dessa equação é uma função só de  $z$ , e o lado direito, uma função só de  $x$ . Os dois portanto devem ser constantes, donde se segue que, assim como no caso do escoamento laminar em um duto, a *perda de carga*  $J$  (para usar uma terminologia de engenheiros) é linear com  $x$  — um fato geralmente apresentado sem muita discussão em cursos de graduação. Note que (7.10) e (8.8) são essencialmente a mesma equação, que portanto se aplica tanto para o regime laminar quanto para o turbulento.

Integrando (8.8) entre 0 e  $z$  (e lembrando que  $\langle uw \rangle(0) = 0$  devido ao fato de que a intensidade da turbulência é nula na parede),

$$-\frac{z}{\rho} \frac{dp_0}{dx} - \overline{u'w'} + \nu \frac{d\bar{u}}{dz} = \nu \frac{d\bar{u}}{dz}(0), \quad (8.9)$$

onde

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dz}(0) = \frac{\rho \nu}{\rho} \frac{d\bar{u}}{dz}(0) = \frac{\tau_0}{\rho} \equiv u_*^2, \quad (8.10)$$

e  $\tau_0$  é a tensão cisalhante na parede. Pela primeira vez, aparece explicitamente uma escala de velocidade específica do problema, a *velocidade de atrito*  $u_*$ .

O resultado,

$$-\frac{z}{\rho} \frac{dp_0}{dx} - \underbrace{\overline{u'w'} + \nu \frac{d\bar{u}}{dz}}_{\tau/\rho} = u_*^2 \quad (8.11)$$

permite determinar *analiticamente* a tensão total  $\tau$  (turbulenta + viscosa) de cisalhamento em função de  $z$ :

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp_0}{dx} z, \quad (8.12)$$

com o resultado mostrado na figura 8.1.

A distribuição de tensões  $\tau$  é antissimétrica, com  $\tau(2\delta) = -\tau_0^*$ . Segue-se então que  $\tau(\delta) = 0$ , donde

$$-\frac{\delta}{\rho} \frac{dp_0}{dx} = u_*^2 \Rightarrow \quad (8.13)$$

---

\*Tanto em  $z = 0$  quanto em  $z = 2\delta$ , a componente  $x$  do vetor de tensão é  $-\tau_0$ ; em  $z = 0$  o vetor normal ao fluido é  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ , e em  $z = 2\delta$  ele é  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ . Da relação entre o vetor de tensão e o tensor de tensões,  $t_j = n_i T_{ij}$ , para um estado bi-dimensional de tensões deduz-se que  $T_{12}(z) = \tau(z)$  e  $\tau(2\delta) = -\tau_0$ .

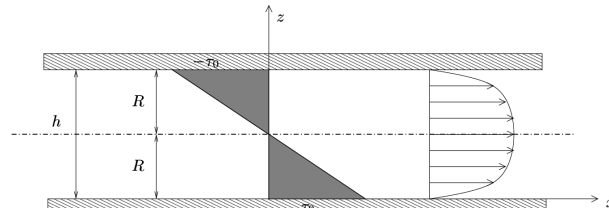


Figura 8.1: A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto.

$$-\overline{u'w'} + \nu \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right). \quad (8.14)$$

Este resultado é muito importante, pois foi obtido a partir somente da hipótese de estacionariedade e homogeneidade em  $x$  e  $y$  do escoamento. Dividindo por  $u_*^2$ :

$$\frac{-\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_*\delta} \frac{d\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)} = 1 - \frac{z}{\delta}. \quad (8.15)$$

Observe o aparecimento do número de Reynolds  $Re_* = u_*\delta/\nu$ . Quando  $Re_* \rightarrow \infty$ , o gradiente

$$\frac{d\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)}$$

desaparece (isto é, anula-se) de (8.15). Para analisarmos o que acontece próximo da parede, devemos encontrar uma forma de “preservar” o gradiente; ei-la:

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{d\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right)}{d\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)} = 1 - \frac{\nu}{\delta u_*} \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.16)$$

Está claro que nós aplicamos duas adimensionalizações diferentes para o gradiente de velocidade. Em ambas, a velocidade adimensional é  $\bar{u}/u_*$ . Na primeira adimensionalização, que corresponde à equação (8.15), a variável adimensional é

$$\eta \equiv z/\delta; \quad (8.17)$$

na segunda, a variável adimensional é

$$z_+ \equiv \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.18)$$

As equações (8.15) e (8.16) nas variáveis acima são

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{1}{Re_*} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right) = 1 - \eta, \quad (8.19)$$

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{d}{dz_+} \left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right) = 1 - \frac{1}{Re_*} z_+. \quad (8.20)$$

Em *ambas*, além de  $\eta$  ou  $z_+$ , aparece o número de Reynolds  $Re_*$ . Essas adimensionalizações sugerem que tanto  $\overline{u'w'}/u_*^2$  quanto  $\bar{u}/u_*$  dependem de  $\eta$  (ou  $z_+$ ) e *também* de  $Re_*$ .

Note agora como o efeito de  $Re_* \rightarrow \infty$  é diferente em cada uma delas. Obviamente, para  $z/\delta \ll 1$ ,  $\tau \approx$  constante. Essas condições definem a região *inercial* da camada-limite turbulenta. Por outro lado, para  $Re_* \rightarrow \infty$  e  $\eta \sim 1$ , (8.19) produz

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*} = 1 - \eta. \quad (8.21)$$

Tennekes e Lumley (1972) observam que essa equação não pode ser válida em  $\eta = 0$ . Sua região de validade é o *core layer* (camada central).

Alguma espécie de argumento dimensional agora é necessário para que possamos prosseguir. Tennekes e Lumley (1972) usam a equação de balanço de energia cinética da turbulência (6.26) para argumentar que  $d\bar{u}/dz \sim u_*/\delta$ ; isso é uma forma particular do argumento mais geral utilizado no capítulo 6, onde mostramos que o termo III (produção por gradiente) da equação para os momentos de 2ª ordem é da ordem de  $\tilde{u}^3/\ell$ .

Alternativamente aos argumentos de Tennekes e Lumley (1972), e talvez de maneira mais direta, observe que, de acordo com (8.19), o gradiente da velocidade adimensionalizada  $\bar{u}/u_*$  deve ser uma função de  $\eta$  (embora ele desapareça da equação quando  $Re_* \rightarrow \infty$ ). Suponha que a velocidade adimensionalizada também dependa de  $\eta$  nessa região, na forma

$$\frac{\bar{u} - U_\delta}{u_*}, \quad (8.22)$$

onde  $U_\delta$  é o valor de  $\langle U \rangle$  no centro do duto, em  $z = \delta$ . A inclusão de  $U_\delta$  é necessária porque o gradiente de velocidade deve ser integrado do *centro* do duto em direção à parede, uma vez que a relação de similaridade (8.24) não pode valer até a parede porque, em sua proximidade, as escalas de comprimento típicas do escoamento são diferentes de (na verdade, são muito menores do que)  $\delta$  (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). De acordo com Wosnik et al. (2000), a inclusão de  $U_\delta$  elimina a necessidade de levar em consideração efeitos viscosos próximo da parede quando o processo de tomada de limites que se segue for realizado. Isso significa essencialmente que não podemos esperar que a adimensionalização com  $\eta$  seja capaz de “ver” a condição de contorno de não-deslizamento na parede; a sua condição de contorno “natural” é  $\bar{u}/u_* = U_\delta/u_*$  em  $\eta = 1$ . Então,

$$\frac{\bar{u} - U_\delta}{u_*} = F_{\delta, Re} \left( \frac{z}{\delta}; Re_* \right). \quad (8.23)$$

Os argumentos de  $F_{\delta, Re}$  são sugeridos, obviamente, pela equação (8.19).

Um fato *experimental* amplamente conhecido é que os escoamentos turbulentos tornam-se assintoticamente independentes do número de Reynolds à medida que este cresce. Isso significa que  $F_{\delta, Re} \left( \frac{z}{\delta}; Re_* \right)$  em (8.23) deve tornar-se assintoticamente independente de  $Re_*$ . Chamamos a forma assintótica de  $F_\delta$ , e escrevemos

$$\lim_{Re_* \rightarrow \infty} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.24)$$

onde  $F_\delta(\eta)$ , a “lei da diferença de velocidade” (*velocity defect law*), é uma função adimensional a determinar que só depende, como indica a notação, de  $\eta$ , e não mais de  $Re_*$ .

De forma totalmente análoga e simétrica, em (8.20) vemos que o gradiente da velocidade adimensionalizada é uma função de  $z_+$ ; dessa vez, é este último que desaparece da equação quando  $Re_* \rightarrow \infty$ . A adimensionalização “natural” para o gradiente de velocidade média agora é

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = F_v, Re(z_+; Re_*) \Rightarrow \lim_{Re_* \rightarrow \infty} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_v}{dz_+}, \quad (8.25)$$

que é conhecida em Mecânica dos Fluidos como “lei da parede”. Como aconteceu acima com  $F_\delta$ ,  $F_v$  é a forma assintótica de  $F_v, Re$  para  $Re_* \rightarrow \infty$ , que só depende (agora) de  $z_+$ .

As variáveis  $z_+$  e  $\eta$  descrevem o balanço de quantidade de movimento sob duas “ópticas” (na verdade, duas escalas) diferentes:  $z_+$  é a variável adequada próximo da parede, e  $\eta$  a variável adequada na região central do escoamento. A técnica denominada *asymptotic matching* (“ajuste assintótico”) permite utilizar uma análise de múltiplas escalas para obter um resultado analítico adicional. O argumento é que, embora  $F_v$  e  $F_\delta$  descrevam a velocidade em regiões diferentes do escoamento, deve haver uma região onde ambas as descrições são válidas. Historicamente, essa abordagem surgiu apenas para o  $\lim_{Re_* \rightarrow \infty}$ ; daí sua presença em (8.24) e (8.25). Na região de “casamento”, ambas as equações devem valer, e essa região deve corresponder aos limites  $z_+ \rightarrow \infty$  e  $\eta \rightarrow 0$ :

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}. \quad (8.26)$$

Multiplicando por  $z$  ambos os lados e rearrumando os termos:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{zu_*}{\nu} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{z}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.27)$$

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} z_+ \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.28)$$

Note que cada lado de (8.28) depende, respectivamente, de  $z_+$  e de  $\eta$ , e por um argumento semelhante ao usado no método de separação de variáveis para a solução de equações diferenciais parciais, os dois devem no limite ser iguais a uma constante, aqui definida como  $1/\kappa$  ( $\kappa$  é a constante de von Kármán). Assim, obtém-se, imediatamente,

$$F_\delta(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_\delta, \quad (8.29)$$

$$F_v(z_+) = \frac{1}{\kappa} \ln z_+ + C_v. \quad (8.30)$$

Essa região de “casamento” é denominada *região inercial*. Os argumentos aqui utilizados para mostrar que, nessa região, o perfil de velocidade é logarítmico guardam uma semelhança intrigante com os argumentos que levam à “faixa inercial” do espectro na teoria clássica de turbulência de Kolmogorov (que será vista com detalhe no capítulo 11 à frente). Segundo Pope (2000),  $C_v = 5,2$ , e, como é bem conhecido, a constante de von Kármán é  $\kappa = 0,4$ . Por consistência com  $\bar{u}(\delta) = U_\delta$ , devemos ter  $C_\delta = 0$ , embora valores pequenos e diferentes de zero possam ser encontrados experimentalmente.

Uma região diferente permite também uma integração analítica do perfil de velocidade: em (8.20), quando  $z_+ \rightarrow 0$ , a tensão de Reynolds  $\langle uw \rangle$  tende a zero, donde se segue imediatamente que o perfil adimensional de velocidade é *linear* em  $z_+$ :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = z_+. \quad (8.31)$$

Essa previsão parece à primeira vista conflitar-se com a previsão de um perfil parabólico no caso do escoamento laminar em dutos (Hagen-Poiseuille) com a mesma geometria. Entretanto, é fácil reescrever o resultado *laminar* na forma

$$\frac{u}{u_*} = z_+ - \frac{1}{2\text{Re}_*} z_+^2 : \quad (8.32)$$

é evidente que, sendo o escoamento para o qual essa equação foi deduzida laminar, é proibido que  $\text{Re}_*$  atinja valores muito altos, ou tenda para o infinito. O  $\lim_{z_+ \rightarrow 0}$  de (8.32) para valores finitos de  $\text{Re}_*$ , por outro lado, reconcilia-a com (8.31).

Considere agora (8.20) com  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$ ,  $z_+ \rightarrow \infty$ ; para remover a indeterminação  $z_+/\text{Re}_*$ , note que

$$\lim_{\substack{\text{Re}_* \rightarrow \infty \\ z_+ \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{z_+}{\text{Re}_*} = \frac{\frac{zu_*}{\nu}}{\frac{u_*\delta}{\nu}} = \frac{z}{\delta} = \eta = 0. \quad (8.33)$$

Além disso, nessa região, em virtude de (8.28)

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa z_+} = 0; \quad (8.34)$$

portanto, *na região inercial*, (8.19) fica

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} \approx 1 \quad (8.35)$$

ou seja: a tensão de Reynolds nessa região é aproximadamente constante.

Para cumprir um programa semelhante ao realizado com o escoamento laminar em dutos, é preciso integrar o perfil de velocidade ao longo da seção, para então obter uma equação para a perda de carga. O perfil previsto por (8.30) não pode ser integrado desde  $z = 0$ , pois essa equação possui uma singularidade logarítmica aí. Alternativamente, nós podemos usar (8.29), e integrar sobre toda a seção. Naturalmente, a lei da diferença de velocidade não pode ser válida próximo da parede (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). No entanto, para escoamentos turbulentos em dutos, na região próxima à parede onde a lei não se aplica a contribuição para o cálculo da velocidade média é desprezível (Pope, 2000, p. 278). Então, a velocidade média é

$$U = \frac{u_*}{\delta} \int_{z=0}^{\delta} \left[ \frac{U_\delta}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta} \right] dz = U_\delta - \frac{u_*}{\kappa}. \quad (8.36)$$

Para que uma expressão para a perda de carga possa ser encontrada, é preciso ainda eliminar  $U_\delta$ . Isso pode ser feito, por exemplo, supondo-se que (8.30) vale até o centro do duto; este ponto, naturalmente, está fora da região de validade de (8.30), porém novamente as diferenças para escoamentos em dutos são relativamente pequenas (Pope, 2000, figura 7.9). Faça portanto

$$U_\delta = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{\nu} + C_v \right] \Rightarrow \quad (8.37)$$

$$U = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta u_*}{\nu} - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.38)$$

Observe que o problema de projeto de engenharia de uma tubulação está essencialmente resolvido: para uma vazão por unidade de largura  $2\bar{U}\delta$ , (8.38) determina o valor correspondente da velocidade de atrito  $u_*$ ; então, o gradiente de pressão que precisa ser impresso ao duto para que se atinja o valor prescrito de  $\bar{U}$  é dado por (8.13).

O procedimento de cálculo para projeto pode ser otimizado da seguinte forma: inicialmente, note que  $J$  pode ser relacionado diretamente com  $u_*$  eliminando-se  $dp_0/dx$  entre (8.8) e (8.13):

$$gJ\delta = u_*^2 \quad (8.39)$$

que, juntamente com (7.13), produz

$$\frac{u_*}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{f}{2}}. \quad (8.40)$$

O uso dessa última equação em (8.38) produz

$$U = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right] \quad (8.41)$$

(reveja a definição de  $\text{Re}$  em 7.15). Finalmente, levando-se (8.41) de volta em (8.39) e eliminando-se  $u_*$  obtém-se uma equação padrão para o fator de atrito, na mesma forma que (7.13):

$$J = \frac{2}{\underbrace{\left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]^2}_f} \frac{1}{\delta} \frac{\bar{U}^2}{2g} \Rightarrow \quad (8.42)$$

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.43)$$

A equação (8.43) pode ser descrita como uma equação de Prandtl para escoamento turbulento com paredes lisas em dutos de seção retangular e largura infinita. Ela define implicitamente a função  $f = f(\text{Re})$ . Em engenharia, os diagramas que plotam essa função são denominados “diagramas de perda de carga”.

## 8.2 – Escoamentos turbulentos com parede rugosa

Na definição de  $z_+$  em (8.18), está implícita uma escala de comprimento viscosa

$$z_v \equiv \frac{\nu}{u_*}. \quad (8.44)$$

Para o ar a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ; para a água a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 1,0 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  (Batchelor, 1967, apêndice 1, p. 594). Portanto, se  $u_* \sim 10^{-1} \text{m s}^{-1}$ ,  $z_v \sim 10^{-4}$  a  $10^{-3} \text{m}$ . Tanto em tubulações industriais quanto em escoamentos sobre superfícies naturais, há imperfeições ou “elementos de rugosidade” na superfície cuja ordem de grandeza é um “comprimento de rugosidade”  $z_0$ .

A tabela 8.1 ilustra alguns valores típicos de  $z_0$  para diferentes materiais: embora o valor de  $u_*$  que usamos seja uma estimativa que obviamente variará de escoamento para escoamento, fica claro que em muitas situações  $z_0 \sim z_v$ ; de fato, segundo Morris e Wiggert (1972), a maioria dos escoamentos em tubos são deste tipo. É de se esperar que

Tabela 8.1: Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1)

| Material            | $z_0(\text{m})$ |
|---------------------|-----------------|
| Aço muito corrugado | 0,001           |
| Aço pouco corrugado | 0,01            |
| Concreto liso       | 0,0003          |
| Concreto rugoso     | 0,003           |
| Madeira lisa        | 0,00018         |
| Madeira rugosa      | 0,001           |
| Aço laminado        | 0,00026         |
| Aço galvanizado     | 0,00015         |
| asphalted castiron  | 0,00012         |
| Aço comercial novo  | 0,00004         |
| Aço soldadon        | 0,00004         |
| Vidro               | 0,0000015       |

estes sejam os casos mais difíceis para se lidar. Por outro lado, também é de se esperar que existam casos em que  $z_0 \gg z_v$ ; para eles, é possível desenvolver uma teoria de “escoamento turbulento rugoso”. De fato, tudo é uma questão de quão alto é o número de Reynolds  $Re$ : para um valor suficientemente alto, a camada viscosa deve se tornar tão delgada que, no limite, toda a parede de qualquer material se torna “rugosa” no sentido de que seus elementos de rugosidade se estendem além da sub-camada viscosa.

Se  $z_0 \gg z_v$ , é natural tentar adimensionalizar (8.14) com  $z_0$ , em vez de  $z_v$ . Portanto, para as variáveis adimensionais

$$Re_0 \equiv \frac{u_* z_0}{\nu} = \frac{z_0}{z_v}, \quad (8.45)$$

$$z_* \equiv \frac{z}{z_0} \quad (8.46)$$

( $Re_0$  é um *número de Reynolds de rugosidade* (Brutsaert, 1982)), (8.14) admite a adimensionalização

$$-\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} + \frac{1}{Re_0} \frac{d\left(\frac{\bar{u}}{u_*}\right)}{dz_*} = 1 - z_* \frac{z_0}{\delta}. \quad (8.47)$$

De forma totalmente análoga aos resultados obtidos anteriormente para paredes lisas, nós esperamos que para uma região relativamente próxima da parede valha uma adimensionalização com a forma

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = F_{0,Re}(z_*, Re_0) \Rightarrow \lim_{Re_0 \rightarrow \infty} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*}. \quad (8.48)$$

Essa equação é análoga ao par (8.24) e (8.25): de fato, desde que  $z_0 \ll \delta$ , basta substituir  $z_v$  por  $z_0$  na análise de ajuste assintótico. O argumento padrão que conduz a um resultado análogo a (8.28), portanto, será

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = F_{0,Re}\left(\frac{z}{z_0}, Re_0\right) \Rightarrow \quad (8.49)$$

$$\lim_{Re_0 \rightarrow \infty} \frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz} \Rightarrow \quad (8.50)$$



$$\lim_{z_* \rightarrow \infty} z_* \frac{dF_0}{dz_*} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.51)$$

O perfil na região influenciada pela escala  $z_0$  portanto será novamente logarítmico:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + C_0. \quad (8.52)$$

Para os experimentos clássicos de Nikuradse de perda de carga em tubos muito lisos aos quais uma rugosidade artificial foi adicionada com grãos de areia, o  $\lim_{Re_* \rightarrow \infty}$  produz  $C_0 = 8.5$ . Não há na literatura (tanto quanto seja de nosso conhecimento) valores específicos para escoamentos em dutos muito largos sob pressão, portanto vamos admitir que este valor também se aplique. Com este valor para  $C_0$ , a previsão de (8.52) para a anulação de  $\bar{u}$  é

$$\ln \frac{z}{z_0} = -3,4 \Rightarrow \bar{u}(z = 0,0334z_0) = 0. \quad (8.53)$$

O objetivo agora é obter uma equação para o fator de atrito em escoamento plenamente rugoso. Para este fim, vamos usar novamente (8.36) e supor agora que  $U_\delta$  pode ser calculado com a nova lei da parede “rugosa” (8.52); o resultado é

$$U_\delta = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right] \quad (8.54)$$

— note que não há nenhuma dependência do número de Reynolds  $Re_0$  — e a equação correspondente para o fator de atrito é

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.55)$$

### 8.3 – O regime de transição

Considere agora o caso “mais complicado”,  $z_0 \sim z_\nu$ ; ambas as escalas podem ser usadas em um ajuste assintótico com a sub-camada externa, e é de se esperar que na camada inercial o perfil de velocidade dependa de ambos. Em termos de variáveis adimensionais:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, \frac{z_0 u_*}{\nu} \right). \quad (8.56)$$

Note que o segundo argumento, é o número de Reynolds de rugosidade  $Re_0$ , a razão entre  $z_0$  e  $z_\nu$ : veja a equação (8.45). A idéia é que o regime “liso” seja recuperado quando  $Re_0 \rightarrow 0$ , e o regime “rugoso” quando  $Re_0 \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{Re_0 \rightarrow 0} F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_\nu \left( \frac{z u_*}{\nu} \right), \quad (8.57)$$

$$\lim_{Re_0 \rightarrow \infty} F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, Re_0 \right) = F_0 \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (8.58)$$

Nosso objetivo, portanto, deve ser procurar uma forma analítica para a função das variáveis  $z/z_0$  e  $Re_0$  que “colapse” ambas em  $z u_*/\nu$  no primeiro caso, e que seja assintoticamente independente de  $Re_0$  no segundo. A propriedade do logaritmo do produto sugere que para escoamento liso devemos ter

$$F_{0\nu} \sim \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} + \ln \frac{z_0 u_*}{\nu} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z u_*}{\nu}, \quad (8.59)$$

onde “ $\sim$ ” deve ser lido “comporta-se como ... a menos de uma constante”. Para escoamento rugoso, por outro lado,  $Re_0$  deve desaparecer. Uma forma de obter ambos os comportamentos assintóticos é fazer

$$\begin{aligned} F_{0v} &\sim \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} + \ln \left( \frac{1}{\frac{1}{Re_0} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \ln \left( \frac{1}{Re_0} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.60)$$

De fato, para  $Re_0 \rightarrow 0$ , (8.60) é praticamente igual a (8.59), enquanto que para  $Re_0 \rightarrow \infty$  ela se torna, como desejado, assintoticamente independente de  $Re_0$ . Falta ainda garantir os valores exatos das constantes  $C_v$  e  $C_0$  em (8.57)–(8.58); isso pode ser obtido com

$$F_{0v} = \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \ln \left( \frac{B_{0v}}{Re_0} + 1 \right) \right] + C_0. \quad (8.61)$$

Claramente, (8.61) atende à constante  $C_0$  em (8.58): veja (8.52). Por outro lado, para que (8.61) também atenda à constante  $C_v$ , basta escolher  $B_{0v}$  de tal forma que

$$-\frac{1}{\kappa} \ln B_{0v} + C_0 = C_v, \quad (8.62)$$

donde se obtém, para dutos, que  $B_{0v} = 3,74$ . Um procedimento totalmente análogo ao feito anteriormente para escoamentos lisos e rugosos permite obter uma equação para o cálculo de fatores de atrito em escoamentos em regime de transição:

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - \ln \left( \sqrt{\frac{2}{f}} \frac{B_{0v}}{Re} \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.63)$$

Em (8.63)  $f$  depende, convenientemente, tanto de  $\delta/z_0$  como de  $Re$ ; em princípio, essa equação pode ser usada para calcular  $f$  em *qualquer* regime. Uma equação totalmente análoga a (8.63) foi obtida pela primeira vez por Colebrook e White para escoamentos transicionais em tubos de seção circular (Morris e Wiggert, 1972, p. 67): os coeficientes numéricos, naturalmente, são diferentes dos fornecidos aqui por conta da geometria diferente da seção; a rugosidade relativa de Colebrook e White é dada na forma  $z_0/D$ , e o número de Reynolds na forma  $UD/\nu$ .

O diagrama de fator de atrito para o escoamento em um duto de seção retangular e largura infinita *versus* o número de Reynolds para  $z_0/\delta = 0,05$ ,  $0,005$  e  $0,00005$  está mostrado na figura 8.3.

## 8.4 – A fórmula de Gauckler-Manning

A fórmula

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (8.64)$$

foi proposta por Manning (1891). Em (8.64),  $V$  é a velocidade média na seção de um canal com superfície livre;  $n$  é o “coeficiente” de Manning;

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (8.65)$$

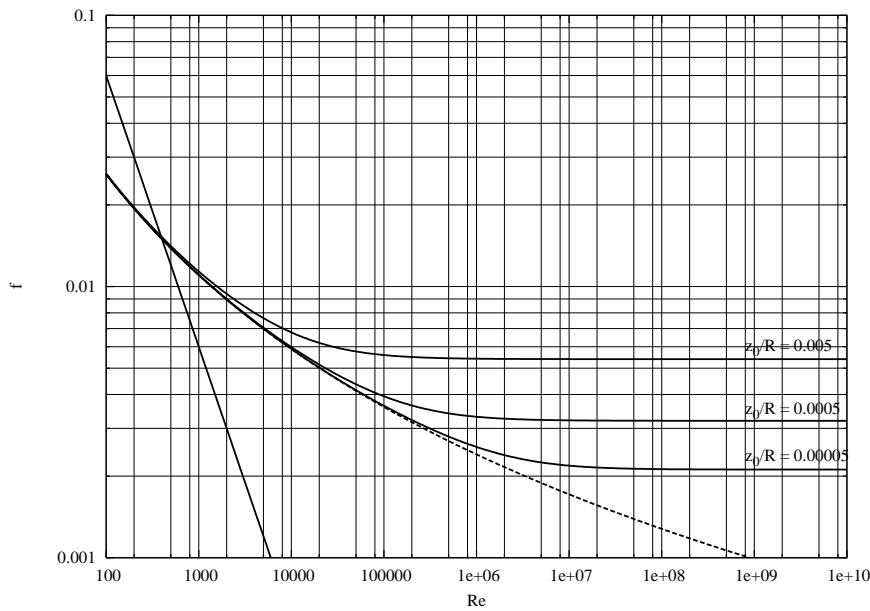


Figura 8.2: Fator de atrito  $f$  em função de  $Re$  e da rugosidade relativa  $z_0/\delta$  em um escoamento turbulento em um duto

é o raio hidráulico da seção, definido como a razão entre a *área molhada*  $A$  e o *perímetro hidráulico*  $P$  (veja a figura 8.3), e  $S_f$  é a perda de carga unitária (a notação  $S_f$  é usual na literatura de hidráulica de canais; em tubulações, usa-se  $J$ , como fizemos na equação (7.9)). Ainda na figura 8.3,  $z_f$  é a cota do fundo do canal;  $z_s$  é a cota da superfície livre; e  $B$  é largura da seção.

A menos que se atribua uma dimensão física a  $n$ , ela é dimensionalmente inconsistente. Ela é uma equação “empírica”, ou seja: ela foi proposta sem base em uma dedução a partir de equações mais fundamentais. É interessante nota que, apesar de ser batizada com seu nome, a “fórmula de Manning” foi, de fato, proposta pela primeira vez por [Gauckler \(1867\)](#).

A natureza empírica e aparentemente dimensionalmente inconsistente de (8.64) sempre intrigou os engenheiros que a utilizavam (veja por exemplo a longa nota de rodapé na página 98 de [Chow \(1959\)](#)), e desde cedo gerou interesse na obtenção de deduções “racionais” para ela. Uma dessas primeiras tentativas deve-se a [Keulegan \(1938\)](#). A abordagem de Keulegan faz bastante uso de expansões em série de Taylor das leis logarítmicas que discutimos nas seções 8.1– 8.3 acima e de “leis de potência” aproximadas para justificar a fórmula de Manning (vale notar que o artigo de Keulegan é bastante geral, e faz uma ampla revisão de leis de perda de carga também para dutos sob pressão).

Também recorrendo a aproximações do perfil de velocidade em uma camada-limite turbulenta com leis de potência, [Chen \(1991\)](#) sugeriu a “dedução” discutida a seguir.

Para um canal com superfície livre em escoamento turbulento, a vazão volumétrica através da seção, por definição, é

$$Q = \int_{y=0}^B \int_{z=z_f(y)}^{z_s} \bar{u}(y, z) \, dz \, dy. \quad (8.66)$$

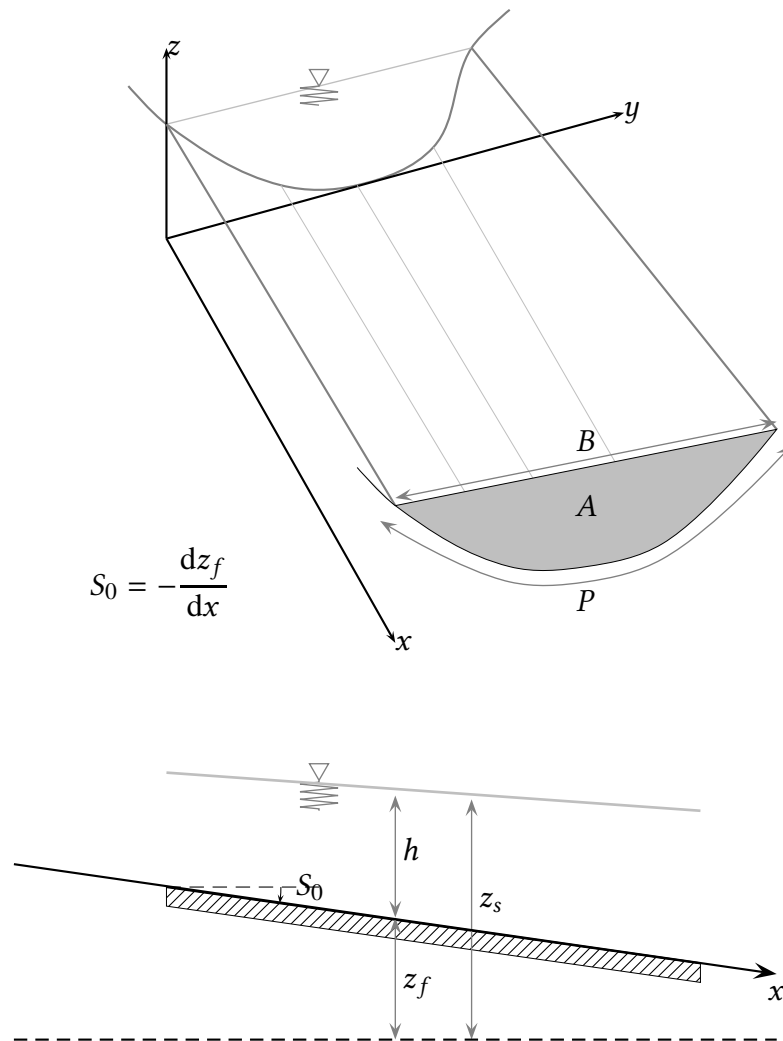


Figura 8.3: Características geométricas de um canal.

Dedução (Chen, 1991) Suponha agora que a velocidade média na distância transversal (desde a margem)  $y$ , e profundidade  $z$  seja função de uma velocidade de atrito “local”  $u_\star$  (essa idéia de uma velocidade de atrito “local” já aparecia em Keulegan (1938)) via

$$\bar{u}(y, z) = au_\star(y) \left( \frac{z - z_f(y)}{z_0} \right)^m, \quad (8.67)$$

onde  $a$  e  $m$  são constantes empíricas que ajustam um perfil de velocidade em forma de função potência. Por simplicidade, estamos supondo que os perfis de velocidade ao longo da seção transversal podem ser ajustados com um único parâmetro de rugosidade  $z_0$  para toda a seção. Então, a vazão volumétrica total na seção será

$$Q = \int_{y=0}^B \frac{au_\star(y)}{m+1} \left( \frac{h(y)}{z_0} \right)^m h(y) dy, \quad (8.68)$$

onde

$$h(y) = z_s - z_f(y) \quad (8.69)$$

é a profundidade ao longo da seção. A velocidade de atrito média ao longo da seção transversal,  $u_*$ , deve satisfazer à relação

$$u_* = \frac{1}{P} \int_{y'=0}^P u_\star(y') dy' \approx \frac{1}{B} \int_{y=0}^B u_\star(y) dy. \quad (8.70)$$

Com o par de transformações de variáveis

$$\eta = \frac{y}{B},$$

$$g(\eta) = \frac{u_\star(\eta)}{u_*},$$

encontramos então

$$Q = \frac{au_* R_h^m (R_h P)}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left( \frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta. \quad (8.71)$$

Finalmente, utilizando (8.39) para a perda de carga (com  $S_f$  em lugar de  $J$  e  $R_h$  em lugar de  $\delta$ ),

$$u_* = \sqrt{g R_h S_f} \quad (8.72)$$

e dividindo  $Q$  pela área  $A = P R_h$ , encontramos

$$V = \underbrace{\left[ \frac{a\sqrt{g}}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left( \frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta \right]}_{1/n} R_h^{m+1/2} S_f^{1/2} \quad (8.73)$$

que é a fórmula de Manning para  $m = 1/6$ .

Naturalmente, também é possível tentar uma abordagem baseada em análise dimensional. As 4 grandezas que devem estar envolvidas na fórmula de Manning são a velocidade média  $V$ ; a componente da aceleração da gravidade na direção do escoamento,  $gS_f$  (a rigor,  $S_f \neq S_0$  em escoamentos variados ou não permanentes, e o argumento deveria ser feito com  $S_f = S_0$  em escoamentos permanentes; vamos,

por simplicidade, manter  $S_f$ ); o raio hidráulico  $R_h$ ; e um comprimento de rugosidade  $z_0$ . As dimensões envolvidas são o comprimento  $\mathbb{L}$  e o tempo  $\mathbb{R}$ , e dois parâmetros adimensionais são então possíveis:

$$\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{gRS_f}},$$

$$\Pi_2 = \frac{z_0}{R}.$$

A previsão usual do Teorema dos Pi's, portanto, é

$$V = f\left(\frac{z_0}{R_h}\right) \sqrt{gRS_f}. \quad (8.74)$$

Na literatura de hidráulica de canais,  $f$  é muitas vezes denominado “coeficiente de Chézy”. Experimentalmente,  $z_0 \ll R_h$ , e a previsão mais comum de análise dimensional (também conhecida como “similaridade de 1º tipo”) é que

$$\lim_{z_0/R_h \rightarrow 0} f(z_0/R_h) = \text{const.}$$

Como observam [Gioia e Bombardelli \(2002\)](#), a previsão acima não se confirma experimentalmente. Uma segunda possibilidade é a “similaridade de segundo tipo”; neste caso, a previsão é

$$\lim_{z_0/R_h \rightarrow 0} f(z_0/R_h) = c \left(\frac{z_0}{R_h}\right)^\alpha + o\left[\left(\frac{z_0}{R_h}\right)^\alpha\right]. \quad (8.75)$$

Buscamos agora uma justificativa para  $\alpha = -1/6$  (como esperamos, por comparação com (8.64)).

Seguindo muito de perto [Gioia e Bombardelli \(2002\)](#), argumentamos que  $R$  e  $V$  são macroescalas do problema, mas que também existem escalas menores ainda na faixa inercial com significado físico. Uma delas é a própria rugosidade  $z_0$ , e outra é uma escala de velocidade normal à parede, que vamos denominar  $u_r$ . O fluxo de energia cinética da turbulência através da cascata de energia prevê

$$\overline{\epsilon_e} \sim \frac{V^3}{R_h} = \frac{u_r^3}{z_0},$$

ou

$$\frac{u_r}{V} = c^{-1} \left(\frac{z_0}{R}\right)^{1/3}. \quad (8.76)$$

O próximo argumento é que a tensão de Reynolds junto à parede tem justamente  $V$  (uma escala típica das flutuações longitudinais) e  $u_r$  uma escala típica das flutuações normais como escalas, de tal forma que (veja 8.72)

$$u_*^2 = gS_f R_h = u_r V. \quad (8.77)$$

Eliminamos agora  $u_r$  de (8.76)–(8.77), e obtemos

$$V^2 c^{-1} \left(\frac{z_0}{R_h}\right)^{1/3} = gS_f R_h;$$

$$V = c \left(\frac{R_h}{z_0}\right)^{1/6} g^{1/2} S_f^{1/2} R_h^{1/2}$$

$$= c z_0^{-1/6} g^{1/2} R_h^{2/3} S_f^{1/2}, \quad (8.78)$$

que é mesmo resultado obtido por [Chen \(1991\)](#) em (8.73). Além disso, comparando (8.78) com (8.75), nós verificamos que de fato  $\alpha = -1/6$ .

## 8.5 – Conclusões

- Ao contrário do que às vezes se pensa, resultados analíticos *são* possíveis a partir das equações de Navier-Stokes e Reynolds para escoamentos turbulentos.
- Ao longo do século XX e até os dias de hoje, novos resultados analíticos e experimentais continuam a esclarecer diversos pontos sobre “velhos” problemas.
- A equação de Manning, por exemplo, pode ser entendida como o resultado de uma *aproximação* em “lei de potência” para o perfil de velocidade em uma camada-limite turbulenta.
- As teorias analíticas existentes ainda dependem de constantes empíricas, notadamente a “constante” de von Kármán  $\rightarrow$  número de von Kármán:  $\kappa = \kappa(R_+)$ . Obter previsões teóricas diretamente a partir das eqs de N-S é um desafio para os dinamicistas de fluidos.

# 9

## Isotropia no domínio físico

---

### 9.1 – Transformações ortogonais

A transposta de uma transformação linear  $A$  é definida por

$$[A^T \cdot x] \cdot y = x \cdot [A \cdot y] \quad (9.1)$$

É fácil mostrar que as matrizes correspondentes obedecem (em qualquer base?) a

$$A_{ij}^T = A_{ji}. \quad (9.2)$$

Uma transformação linear  $C$  é *ortogonal* quando

$$C^T \cdot C = \delta, \quad (9.3)$$

ou seja: quando  $C^T = C^{-1}$ . Note que, abrindo (9.3), encontramos

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Sejam portanto

$$f_i = (C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}) \quad (9.5)$$

os vetores do  $\mathbb{R}^3$  formados a partir das colunas de  $[C]$ ; claramente,

$$f_i \cdot f_j = \delta_{ij}, \quad (9.6)$$

e os vetores  $(f_1, f_2, f_3)$  formam uma base ortonormal; essa é a (aparentemente) origem do nome dessa classe de transformações.

Duas propriedades importantes de transformações ortogonais são as seguintes:

$$x \cdot y = [C \cdot x] \cdot [C \cdot y], \quad (9.7)$$

$$\det [C] = \pm 1. \quad (9.8)$$

Acima, 9.7 significa que  $C$  preserva o produto escalar, ou seja: preserva *módulos* e *ângulos entre vetores*, enquanto que 9.8 significa que  $C$  preserva *volumes* (em módulo). Ambas as propriedades são cruciais para a definição de isotropia, e para manipulações algébricas a ela relacionadas. Eis a prova de 9.7

$$x \cdot y = [C^T \cdot C] \cdot x \cdot y$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbf{C}^\top \cdot [\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}] \cdot \mathbf{y} \\
&= [\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}] \cdot [\mathbf{C} \cdot \mathbf{y}],
\end{aligned}$$

onde usamos 9.3 e (9.1), nesta ordem.

Eis a prova de (9.8):

$$\begin{aligned}
\det[\mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{C}] &= \det[\mathbf{C}^\top] \det[\mathbf{C}] \\
&= (\det[\mathbf{C}])^2 = \det[\boldsymbol{\delta}] = 1 \Rightarrow \\
\det[\mathbf{C}] &= \pm 1.
\end{aligned}$$

Transformações ortogonais podem ser estudadas sistematicamente como se segue. Considere duas bases ortonormais,  $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  e  $E' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ . Cada vetor de uma delas pode ser escrito em termos dos vetores da outra, ou seja:

$$\mathbf{e}'_j = C_{ij} \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad (9.9)$$

$$\mathbf{e}_i = C_{ij} \mathbf{e}'_j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) \mathbf{e}'_j. \quad (9.10)$$

O significado geométrico de  $C_{ij}$  é claro: ele é o cosseno entre  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}'_j$ .

Note que

$$|\mathbf{e}'_j| = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 C_{ij}^2 = 1, \quad (9.11)$$

$$|\mathbf{e}_i| = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^3 C_{ij}^2 = 1. \quad (9.12)$$

As equações (9.11)–(9.12) são casos em que a notação indicial não funciona tão facilmente. Considere por exemplo (9.11). Como precisamos de uma soma em  $i$ , somos tentados a escrever

$$C_{ij} C_{ij} = 1$$

— mas isso está errado, porque significaria uma soma em  $i$  e em  $j$ ! De fato, em (9.11),  $j$  é um índice *livre*, ou seja: *não se soma em  $j$* . Uma maneira de lograr esse efeito com notação indicial é envolver em parênteses o índice que não deve ser somado. Portanto, a maneira correta de escrever (9.11) usando notação indicial é

$$C_{i(j)} C_{i(j)} = 1.$$

Note que em geral  $C_{ij} \neq C_{ji}$ , ou seja: a matriz  $[\mathbf{C}]$  *não* é simétrica. Agora, dado um vetor  $\mathbf{u}$  qualquer no  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{u} = u'_j \mathbf{e}'_j = u_i \mathbf{e}_i, \quad (9.13)$$

onde  $u'_j$  são as coordenadas de  $\mathbf{u}$  na base  $E'$ , e  $u_i$  são as coordenadas de  $\mathbf{u}$  na base  $E$ . Duas fórmulas podem ser obtidas daqui:

$$u_i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{u} \cdot C_{ij} \mathbf{e}'_j = C_{ij} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_j) = C_{ij} u'_j \Rightarrow [\mathbf{u}]_E = [\mathbf{C}][\mathbf{u}]_{E'}, \quad (9.14)$$

$$u'_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{u} \cdot C_{ij} \mathbf{e}_i = C_{ij} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) = C_{ij} u_i = C_{ji}^\top u_i \Rightarrow [\mathbf{u}]_{E'} = [\mathbf{C}]^\top [\mathbf{u}]_E. \quad (9.15)$$

Uma propriedade importante da matriz  $[\mathbf{C}]$  é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_k \mathbf{e}_k = u_i \mathbf{e}_i = u_i C_{ij} \mathbf{e}'_j = u_i C_{ij} C_{kj} \mathbf{e}_k; \\
u_k &= u_i C_{ij} C_{kj} = C_{kj} C_{ji}^\top u_i; \\
C_{kj} C_{ji}^\top &= \delta_{ki} \Rightarrow \\
[C][C]^\top &= [\delta] \blacksquare
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Em outras palavras,  $[C]^\top$  é uma *inversa direita* de  $[C]$ . É trivial mostrar que  $[C]^\top$  é uma inversa esquerda de  $[C]$ , também. Consequentemente,

$$[C][C]^\top = [C]^\top[C] = [\delta] \Rightarrow [C]^\top = [C]^{-1} \tag{9.17}$$

(a inversa de  $[C]$  é igual à sua transposta), donde se conclui que  $C$  é uma transformação ortogonal.

Da maneira como viemos tratando o assunto, a matriz  $[C]$  é uma *matriz de rotação de eixos*, ou de bases: o que “gira” ou “muda” é a base, permanecendo “fixo” o vetor  $\mathbf{u}$ . Portanto, o que muda são as coordenadas de  $\mathbf{u}$ , porque a base mudou. Mas tudo é relativo, e é óbvio que uma rotação de um ângulo  $+\theta$  dos eixos coordenados em torno de uma reta fixa  $r$  é equivalente a uma rotação de um ângulo  $-\theta$  em torno da mesma reta do vetor  $\mathbf{u}$ , mantendo-se a base fixa. *Nessa segunda interpretação,  $C$  é uma transformação linear que gira um vetor.*

Novamente, o determinante da transformação linear  $C$  é unitário. Suponha que a paridade da base  $E$  seja positiva, ou seja: que  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ ; então:

$$\begin{aligned}
1 &= [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{e}_3 \\
&= [C_{1l} \mathbf{e}'_l \times C_{2m} \mathbf{e}'_m] \cdot C_{3n} \mathbf{e}'_n \\
&= C_{1l} C_{2m} C_{3n} [\mathbf{e}'_l \times \mathbf{e}'_m] \cdot \mathbf{e}'_n \\
&= \pm \epsilon_{lmn} C_{1l} C_{2m} C_{3n} = \pm \det [C] \blacksquare
\end{aligned} \tag{9.18}$$

O problema aqui é que 9.9 não garante que  $E'$  tenha paridade positiva; de fato, se trocarmos duas colunas de  $[C]$ , trocamos a paridade de  $E'$ . *Isso significa que uma transformação ortogonal pode levar uma base dextrógira em uma base levógira (ou vice-versa).*

Uma mudança de base produzida por uma transformação ortogonal também muda, evidentemente, as matrizes das transformações lineares. Isso pode ser calculado muito convenientemente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= A'_{kl} \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_l \\
&= A'_{kl} C_{ki} \mathbf{e}_i C_{jl} \mathbf{e}_j \\
&= C_{ik} A'_{kl} C_{lj}^\top \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \Rightarrow \\
[A]_E &= [C][A]_{E'}[C]^\top;
\end{aligned} \tag{9.19}$$

bem como

$$\begin{aligned}
A'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j &= A_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\
&= A_{kl} C_{ki} \mathbf{e}'_i C_{lj} \mathbf{e}'_j \\
&= C_{ik}^\top A_{kl} C_{lj} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j \Rightarrow \\
[A]_{E'} &= [C]^\top [A]_E [C].
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Geometricamente, uma transformação ortogonal  $C$  pode significar tanto rotações, quanto reflexões, quanto uma combinação de ambas. O nosso grande problema é que usamos produtos vetoriais, e produtos vetoriais são definidos para uma mesma paridade. Em princípio, em uma base dextrógira nós definimos

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j; \quad (9.21)$$

é fácil verificar entretanto que o sinal dessa definição tem que ser trocado para uma base levógira (como já fizemos acima!). Primeiro, um resultado auxiliar importante: dada uma transformação ortogonal  $C$ ,

$$\epsilon_{ijk} C_{mi} C_{nj} C_{pk} = \epsilon_{mnp} \det [C]. \quad (9.22)$$

De fato, se  $m = 1$ ,  $n = 2$  e  $p = 3$ , a expressão acima é igual a  $\det [C]$ . Se houver qualquer permutação cíclica de 1, 2, 3, o sinal do determinante não muda; porém, se houver qualquer permutação anti-cíclica, o sinal muda. Finalmente, se dois ou mais índices forem iguais, (9.22) é o determinante de uma matriz com duas colunas iguais, e é igual a zero ■

Consideremos agora a questão:

Em que condições o produto vetorial é preservado em uma transformação ortogonal?

Vejamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' &= [C^T \cdot \mathbf{a}] \times [C^T \cdot \mathbf{b}]; \\ \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' &= \epsilon_{ijk} a'_i b'_j \mathbf{e}'_k \\ &= \epsilon_{ijk} [C_{mi} a_m C_{nj} b_j] C_{pk} \mathbf{e}_p \\ &= \det [C] \epsilon_{mnp} a_m b_n \mathbf{e}_p \\ &= \det [C] [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \end{aligned}$$

Portanto, o produto vetorial só é preservado para as transformações ortogonais em que  $\det [C] = +1$ ; essas transformações, geometricamente, apenas envolvem *rotações*; quando  $\det [C] = -1$ , o produto vetorial *não* é preservado: essas transformações envolvem, sempre, *reflexões* em torno de algum plano.

Vetores que se preservam sob uma transformação ortogonal geral, isto é, para  $\det [C] = \pm 1$ , são denominados *vetores polares*; vetores que somente se preservam quando  $\det [C] = +1$  são denominados *vetores axiais* (Corben e Stehle, 1994, p. 21).

Uma determinada lei física ou propriedade é *isotrópica* quando ela é invariante sob uma transformação ortogonal (incluindo reflexões). Quando, entretanto, a propriedade em questão envolve alguma operação com  $\epsilon_{ijk}$ , ela somente se preserva entre bases de mesma paridade. Por esse motivo, alguns autores referem-se a  $\epsilon_{ijk}$  como um “pseudo-tensor” de ordem 3.

## 9.2 – Tensores isotrópicos

Considere um tensor de ordem definido num ponto. Todo tensor de ordem zero (ou seja, todo escalar) é isotrópico:

$$\theta(x_i) = \theta(x'_i),$$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i.$$

não depende do referencial (será possível tornar este argumento mais elegante?)

Por outro lado, nenhum vetor tensor de ordem 1 (ou seja, nenhum vetor) consegue ser isotrópico. Se

$$\mathbf{r}' = \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{C}^\top = \boldsymbol{\delta},$$

mas isso impede qualquer mudança de base.

Os únicos tensores isotrópicos de ordem 2 são múltiplos simples da identidade. Seja

$$A_{kl} = \sigma^2 \delta_{kl};$$

então,

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= A_{kl} C_{ki} C_{lj} \\ &= \sigma^2 \delta_{kl} C_{ki} C_{lj} \\ &= \sigma^2 C_{li} C_{lj} \\ &= \sigma^2 \delta_{ij} = A_{ij}. \end{aligned}$$

Onde isso aparece imediatamente em turbulência? No tensor de tensões de Reynolds. Como sabemos,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}.$$

Quando a turbulência é isotrópica, todos os termos fora da diagonal são nulos, e

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Uma questão mais geral (e mais interessante) é a seguinte: o que é um tensor isotrópico quando ele depende da posição  $\mathbf{s}$ ? Em particular, considere

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{s}) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Agora, nós vamos definir  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  como um tensor isotrópico quando a contração  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{y}$  só depender da configuração espacial de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{s}$ . mas isso significa só depender dos produtos escalares  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  e — se nos restringirmos a transformações ortogonais *próprias* (rotações) — do produto triplo  $[\mathbf{x} \times \mathbf{y}] \cdot \mathbf{s}$ . A forma geral de  $\mathbf{A}(\mathbf{s})$  que atende a esses requisitos é

$$A_{ij}(\mathbf{s}) = F(s)\delta_{ij} + G(s)s_i s_j + H(s)\epsilon_{ijk}s_k, \quad (9.23)$$

onde  $s = |\mathbf{s}|$ . Agora, obtemos

$$\begin{aligned} x_i A_{ij} y_j &= x_i [F(s)\delta_{ij} + G(s)s_i s_j + H(s)\epsilon_{ijk}s_k] y_j \\ &= F(s)x_i y_i + G(s)(s_i x_i)(s_j y_j) + H(s)\epsilon_{ijk}x_i y_j s_k \\ &= F(s)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + G(s)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{y}) + H(s)([\mathbf{x} \times \mathbf{y}] \cdot \mathbf{s}). \end{aligned}$$

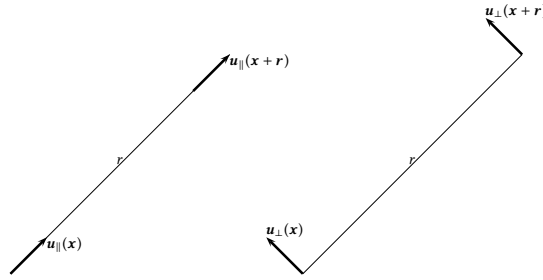


Figura 9.1: funções de correlação longitudinal e transversal

No entanto, se desejarmos isotropia “perfeita” — ou seja: se desejarmos permitir reflexões (transformações ortogonais impróprias), então, necessariamente,  $H(s) = 0$ . A forma final que obtemos para os elementos de  $A(s)$  em uma base ortonormal, portanto, é

$$A_{ij}(s) = F(s)\delta_{ij} + G(s)s_i s_j. \quad (9.24)$$

É fácil verificar que (9.24) é invariante sob uma transformação ortogonal:

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= C_{ki} C_{lj} A_{kl} \\ &= C_{ki} C_{lj} [F(s)\delta_{kl} + G(s)s_k s_l] \\ &= C_{li} C_{lj} F(s) + G(s) C_{ki} s_k C_{lj} s_l \\ &= F(s)\delta_{ij} + G(s)s'_i s'_j \blacksquare \end{aligned}$$

É conveniente escrever o tensor isotrópico em termos de quantidades diretamente medidas. Considere portanto a função de covariância cruzada S a turbulência é homogênea, ela é invariante sob uma translação:

$$\begin{aligned} R_{i,j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &\equiv \overline{u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\boldsymbol{\xi})} \\ &= R_{i,j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \\ &= R_{i,j}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) \\ &= R_{i,j}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

A “álgebra” da turbulência homogênea (Deissler, 1962; Hill, 2002) pode ser obtida a partir de

$$\xi_i = x_i + r_i, \quad (9.25)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial r_i}. \quad (9.26)$$

Suponha que a turbulência seja isotrópica:

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} &= \sigma^2 \delta_{ij}, \\ R_{i,j}(\mathbf{r}) &= F(r)\delta_{ij} + G(r)r_i r_j, \end{aligned}$$

e agora conseguimos medir com (certa) facilidade funções de autocorrelação ao longo do eixo  $x_1$ :

$$f(r) = \frac{u'_{\parallel}(0,0,0)u'_{\parallel}(r,0,0)}{\sigma^2},$$

$$g(r) = \frac{u'_{\perp}(0,0,0)u'_{\perp}(r,0,0)}{\sigma^2}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} R_{\parallel}(r) &= R_{11}(r) = F(r)\delta_{11} + G(r)r_1r_1 \\ &= F(r) + G(r)r^2 = \sigma^2 f(r); \\ R_{\perp}(r) &= R_{22}(r) = F(r)\delta_{22} + G(r)r_2r_2 \\ &= F(r) = \sigma^2 g(r), \end{aligned}$$

ou

$$R_{i,j}(\mathbf{r}) = \sigma^2 \left[ g(r)\delta_{ij} + \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j \right], \quad (9.27)$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$ .

Agora, tendo obtido (9.27), note que toda turbulência isotrópica também é homogênea, já que a homogeneidade é a hipótese necessária para que o tensor  $\mathbf{R}$  só dependa de  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$ , e que portanto

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_j} = \frac{\overline{\partial u'_i(x_k) u'_j(x_k + r_k)}}{\partial r_j} = \overline{u'_i(x_k) \frac{\partial u'_j(\xi_k)}{\partial \xi_j}} = 0, \quad (9.28)$$

(devido à equação da continuidade, (9.49), e à regra de derivação (11.18), donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_j} &= \frac{\partial F}{\partial r_j} \frac{\partial r}{\partial r_j} \delta_{ij} + G(r)r_i \frac{\partial r_j}{\partial r_j} + G(r)r_j \frac{\partial r_i}{\partial r_j} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_j} r_i r_j \\ &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{r_j}{r} \delta_{ij} + 3r_i G(r) + r_j G(r) \delta_{ij} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{r_j}{r} r_i r_j \\ &= r_i \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4r_i G(r) + r_i \frac{r^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \\ &= r_i \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4G(r) + r \frac{\partial G}{\partial r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.29)$$

onde usamos

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}, \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r}. \quad (9.31)$$

Finalmente, aplicando (9.29), obtém-se

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r f'(r), \quad (9.32)$$

e isso mostra que em turbulência isotrópica e incompressível  $R_{i,j}(\mathbf{r})$  depende de uma única função escalar  $f(r)$ .

Historicamente, a microescala de Taylor  $\lambda$  é introduzida em associação à função coeficiente de autocorrelação longitudinal da turbulência isotrópica,  $f(r)$ :

$$\frac{d^2 f(0)}{dr^2} \equiv -\frac{1}{\lambda^2} \quad (9.33)$$

(note que essa definição é compatível com nossa definição anterior de microescala de Taylor).

Finalmente, um resultado importante:

$$\begin{aligned} R_{i,i} &= \sigma^2 \left( \frac{f-g}{r^2} r_i r_i + g \delta_{ii} \right) \\ &= \sigma^2 ((f-g) + 3g) \\ &= \sigma^2 (f + 2g) \\ &= \sigma^2 \left( f + 2 \left( f + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} \right) \right) \\ &= \sigma^2 \left( 3f + r \frac{df}{dr} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^3 f(r) \right). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Agora resta considerar

$$\begin{aligned} \nabla^2 R_{i,i} &= \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \left( 3f + r \frac{df}{dr} \right) \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 3 \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \frac{\partial r}{\partial r_k} \frac{df}{dr} + r \frac{d^2 f}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right) \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 3 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \\ &= \sigma^2 \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 4 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Antes de prosseguir, estabelecemos o resultado auxiliar

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{r_k}{r} = \frac{r \delta_{kk} - r_k \frac{r_k}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r}. \quad (9.36)$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla^2 R_{i,i} &= \sigma^2 \left( 4 \frac{df}{dr} \frac{2}{r} + 4 \frac{r_k}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \frac{r_k}{r} + \frac{d^2 f}{dr^2} \delta_{kk} + r_k \frac{d^3 f}{dr^3} \frac{r_k}{r} \right) \\ &= \sigma^2 \left( 4 \frac{d^2 f}{dr^2} + 3 \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r} \frac{df}{dr} + r \frac{d^3 f}{dr^3} \right). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Observando agora que, pela regra de l'Hôpital,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dr}}{r} = \frac{\frac{d^2 f}{dr^2}}{1} = \frac{d^2 f}{dr^2}, \quad (9.38)$$

conclui-se que

$$\nabla^2 R_{i,i}(0) = 15\sigma^2 \frac{d^2 f(0)}{dr^2} = -15 \frac{\sigma^2}{\lambda^2}. \quad (9.39)$$

O resultado (9.39) pode ser utilizado para produzir estimativas práticas da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência  $\overline{\epsilon}_e$ . Da homogeneidade da turbulência temos, para as estatísticas em um único ponto do espaço,

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u'_i u'_i}{\partial x_k}} &= 0, \\ \overline{2u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} &= 0, \\ \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} &= 0, \end{aligned} \quad (9.40)$$

$$\overline{\epsilon}_e = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = -\nu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}}. \quad (9.41)$$

Mas observe que a covariância no último termo do lado direito de (9.41) é o mesmo que

$$\nabla^2 R_{i,i}(0) = \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \overline{u'_i(0) u'_i(r(k))} \Big|_{r_k=0} = \overline{u'_i(0) \frac{\partial^2 u'_i(r(k))}{\partial r_k \partial r_k}} \Big|_{r_k=0},$$

donde, de (9.39),

$$\overline{\epsilon}_e = -\nu \nabla^2 R_{i,i}(0) = -15\nu\sigma^2 \frac{d^2 f(0)}{dr^2}. \quad (9.42)$$

Por outro lado, tomando-se  $i = 1$  e  $k = 1$  em 9.40, é trivial verificar que (ainda em turbulência isotrópica)

$$\begin{aligned} \overline{u'_1 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1 \partial x_1}} + \overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}} &= 0, \\ \overline{u'_1 \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x_1 \partial x_1}} &= \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_1} R_{1,1}(0) = \sigma^2 \frac{d^2 f(0)}{dr^2}, \end{aligned} \quad (9.43)$$

donde

$$\overline{\epsilon}_e = 15\nu \overline{\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}}. \quad (9.44)$$

O último termo à direita de (9.44) é diretamente mensurável em uma turbulência real, embora exija uma frequência de medição altíssima, sendo algumas vezes utilizado para “medir” a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta.

Finalmente, verifique que a dissipação em turbulência homogênea é proporcional à enstrofia média:

$$\begin{aligned} \overline{\omega'_k \omega'_k} &= \overline{\epsilon_{ijk} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \epsilon_{lmk} \frac{\partial u'_m}{\partial x_l}} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_l}} \end{aligned}$$



$$= \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial u'_j}}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}. \quad (9.45)$$

Mas o segundo termo acima é nulo (ver 6.30), donde também se segue que

$$\overline{\epsilon_e} = \nu \overline{\omega'_k \omega'_k}. \quad (9.46)$$

### 9.3 – Isotropia das equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes/Reynolds para  $\rho$  constante, e consequentemente escoamento incompressível, são as equações de continuidade

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (9.47)$$

$$\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} = 0, \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (9.49)$$

e as equações de balanço de quantidade de movimento

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (9.50)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (9.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i} u'_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial (u'_i \overline{u_k})}{\partial x_k} + \frac{\partial (u'_i u'_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_k \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{u_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (u'_i u'_k)}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

A numeração é repetida aqui para que este pequeno capítulo fique auto-contido, mas no futuro, quando isto for um livro, as equações de outros capítulos devem ser referenciadas.

As coisas importantes aqui serão: as equações devem ser invariantes sob uma transformação de Galileu. Neste capítulo, utilizaremos a notação  $(x_1, x_2, x_3, t)$  e  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{t})$  para representar a posição e o instante em dois referenciais distintos, e  $(u_1, u_2, u_3)$  e  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  para representar um mesmo vetor em cada um dos dois referenciais. Note que, ao contrário do que foi feito nos capítulos 5 e 6, nós estamos (por enquanto!) fazendo um caso muito simples, com  $\rho$  constante e sem flutuações de Boussinesq — portanto, não há necessidade de escrever  $p_\delta$ , etc..

#### Translação simples

No caso de uma translação simples, a transformação de Galileu é

$$\tilde{x}_i = x_i - V_i t, \quad (9.53)$$

$$\tilde{t} = t. \quad (9.54)$$

De acordo com (9.53)–(9.54)  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$  coincide com  $Ox_1x_2x_3$  em  $t = 0$ , e afasta-se de sua origem com velocidade vetorial  $V$  (medida no referencial  $Ox_1x_2x_3$ ). De (9.53),

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}, \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} = -V_i. \quad (9.56)$$

A composição de velocidades é

$$u_i(x_k, t) = V_i + \tilde{u}_i(\tilde{x}_k, \tilde{t}) = V_i + \tilde{u}_i(x_k - V_k t, t). \quad (9.57)$$

Já a pressão é um escalar, e se transforma como

$$p(x_k, t) = \tilde{p}(\tilde{x}_k, \tilde{t}) = \tilde{p}(x_k - V_k t, t). \quad (9.58)$$

Isso define as seguintes regras para as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} = -V_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}}; \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_l} \delta_{lk} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k}; \\ \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} \delta_{li} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i}; \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} \right] \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} \right] \delta_{lk} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k}. \end{aligned}$$

As 3 “equações da continuidade” (9.47)–(9.49) são formalmente iguais, e basta averiguar como uma delas se transforma:

$$0 = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_l} \delta_{lk} = \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k}.$$

Portanto, a equação da continuidade permanece invariante sob uma translação galileana.

Para as equações de balanço de quantidade de movimento, fazemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} - V_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} + [V_k + \tilde{u}_k] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k}; \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k}, \end{aligned}$$

e com isso mostramos que as equações de Navier-Stokes são invariantes sob uma translação galileana.

### Rotação e translação

Para uma translação seguida de uma transformação ortogonal, as equações da transformação mais geral de Galileu são

$$\tilde{x}_j = C_{ij}(x_i - V_i t), \quad (9.59)$$

$$\tilde{t} = t. \quad (9.60)$$

Em (9.59),  $C$  é uma transformação ortogonal. Note também que a ordem transformação ortogonal/translação não importa:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= C_{ij}(x_i - V_i t), \\ \tilde{x}_j &= C_{ij}x_i - C_{ij}V_i = C_{ij}x_i - \tilde{V}_j t. \end{aligned}$$

As regras de derivação agora são

$$\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} = C_{ij}, \quad (9.61)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t} = -C_{ij}V_i = -\tilde{V}_j. \quad (9.62)$$

A composição de velocidades na presença de rotação é

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}_k, \tilde{t}) = C_{ij}(u_i(x_k, t) - V_i) = C_{ij}u_i - \tilde{V}_j. \quad (9.63)$$

Como antes, a transformação da pressão é simples (pois ela é um escalar):

$$p(x_k, t) = \tilde{p}(\tilde{x}_l, \tilde{t}) = \tilde{p}(C_{il}x_i - \tilde{V}_l t, t) \quad (9.64)$$

Isso define as seguintes regras para as derivadas:

$$\begin{aligned} C_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (C_{ij}u_i) = \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{u}_j + \tilde{V}_j) = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{t}} - \tilde{V}_l \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l}; \\ C_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (C_{ij}u_i) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tilde{u}_j + \tilde{V}_j) = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} = C_{kl} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l}; \\ C_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= C_{ij} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_i} = C_{ij} C_{il} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} = \delta_{jl} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j}; \\ C_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (C_{ij}u_i) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (\tilde{u}_j + \tilde{V}_j) \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_m \partial \tilde{x}_l} C_{kl} C_{km} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_m \partial \tilde{x}_l} \delta_{lm} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_l}. \end{aligned}$$

Para a equação da continuidade,

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} = \frac{\partial (C_{kl}u_k)}{\partial \tilde{x}_l} = \frac{\partial (\tilde{u}_l + \tilde{V}_l)}{\partial \tilde{x}_l} = \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_l}. \quad (9.65)$$

Multiplicamos, em seguida, as equações de quantidade de movimento por  $C_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ C_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} + C_{ij} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= -C_{ij} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + C_{ij} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - \tilde{V}_l \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} + C_{kl} u_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - \tilde{V}_l \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} + (\tilde{u}_l + \tilde{V}_l) \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_l}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{u}_l \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_l}.\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração de invariância das equações de Navier-Stokes em sua forma original, ou seja: (9.47) e (9.50). Para verificar a invariância de (9.48), (9.49), (9.51), e (9.52), por outro lado, precisamos conhecer como as médias  $\overline{u_i}$  e as flutuações  $u'_i$  são transformadas em uma transformação de Galileu. Isso não é difícil. Partindo de (9.63) e promediando,

$$\overline{\tilde{u}_j}(\tilde{x}_k, \tilde{t}) = \overline{C_{ij}(u_i(x_k, t) - V_i)} = C_{ij}\overline{u_i} - \tilde{V}_j \quad (9.66)$$

(pois  $V$  é constante); subtraindo agora (9.66) de (9.63), e levando em conta a decomposição de Reynolds (1.13),

$$\tilde{u}'_j = C_{ij}u'_i. \quad (9.67)$$

A transformação (9.66) é formalmente a mesma que (9.63); consequentemente, (9.48) é invariante sob uma transformação de Galileu. Para (9.49), a transformação (9.67) é ainda mais simples, e novamente (9.49) é invariante sob uma transformação de Galileu. Em ambos os casos, basta substituir  $u_k$  por  $\overline{u_k}$  e  $u'_k$ , respectivamente, e repetir o desenvolvimento de (9.65).

Por outro lado, a equação de quantidade de movimento promediada (9.51) só tem um termo formalmente distinto de (9.50):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k}.$$

Basta, portanto, verificar como ele se transforma:

$$\begin{aligned}C_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{C_{ij} u'_i u'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \overline{C_{ij} u'_i u'_k} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \overline{C_{ij} u'_i C_{kl} u'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \overline{\tilde{u}'_j \tilde{u}'_l}.\end{aligned}$$

Portanto, (9.48) e (9.51) também são invariantes sob uma transformação de Galileu.

### Exercícios Propostos

**9.1** Mostre que (9.52) também é invariante sob uma transformação de Galileu.

# 10

## Turbulence spectra

---

### 10.1 – Cross spectra of 4-dimensional stochastic processes

In this work we adopt the same convention used by [Kader e Yaglom \(1989\)](#), repeated here for clarity. We let  $u_i, i = 1, 2, 3$  be the three orthogonal velocity componetes, and  $u_4, u_5, u_6, \dots$  be a sequence of scalar mass concentrations, or temperature. Repeated indices, such as  $u_i u_i$ , however, still indicate a sum from 1 to 3 only. This will allow for a more compact notation, without the need to treat the scalar cases separately.

Whenever we need to disallow summation, we will use one or two parentheses; thus,  $\overline{u'_{(i)} u'_{(i)}}$  means the variance of the  $i^{\text{th}}$  velocity component (or scalar). Some background on spectra follows.

#### The three-dimensional cross-spectrum

Given the inverse Fourier transform

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \widehat{f}(\mathbf{k}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k}, \quad (10.1)$$

if  $\widehat{f}(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k})$  is Dirac's delta “function” in 3 dimensions, then

$$1 = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k}. \quad (10.2)$$

Therefore, we have (formally):

$$\delta(\mathbf{k}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x}. \quad (10.3)$$

The covariance function (sometimes also called the “correlation function”) is

$$R_{i,j}(\mathbf{r}, t) \equiv \overline{u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}, \quad (10.4)$$

where the overbar denotes ensemble averaging. Clearly, the covariance function is the correct function to describe what is commonly measured in the field. Suppose for example that  $u'_1$  is the velocity fluctuation measured along the longitudinal axis of a sonic anemometer,  $u'_2$  is the transversal component, and  $u'_3$  is the vertical component. Then, let a CO<sub>2</sub> concentration  $u'_5$  (say) be measured by an IRGA at a position  $\mathbf{r} = \ell \mathbf{e}_2$ , with the origin of the axes placed at the center of the sonic anemometer paths. If the

$x_1, x_2$  axes are perfectly positioned on the horizontal, then, the “measured”  $\text{CO}_2$  flux is analogous to the quantity

$$R_{3,5}(\ell \mathbf{e}_2, t) = \overline{u'_3(0, t) u'_5(\ell \mathbf{e}_2, t)}.$$

Obviously, the ensemble average cannot be calculated in practice. This last problem is bridged by assuming stationarity and ergodicity of the fluctuations, whence

$$\forall t, 0 \leq t \leq T, \quad \overline{u'_3(0, t) u'_5(\ell \mathbf{e}_2, t)} \approx \frac{1}{T} \int_{t'=0}^T u'_3(0, t') u'_5(\ell \mathbf{e}_2, t') dt'. \quad (10.5)$$

From now on, we will consider quantities such as (10.4) as representative of the covariances measured at points separated in space by  $\mathbf{r}$ , keeping in mind implicitly the ergodic and stationarity assumptions that lead to expressions such as (10.5). In line with that comment, from now on we will omit the  $t$ -dependency.

From (10.4) we can define the cross spectrum  $\Phi_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) &\equiv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{i,j}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \overline{u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

where the asterisk  $*$  denotes the conjugate. Here is the proof:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i &\equiv \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \Rightarrow \\ \overline{\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j} &= \overline{\left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} u'_j(\xi) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \xi)} d^3 \xi} \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^6 \int_{\mathbf{x}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} \overline{u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{r} \\ &= \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \right] \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R_{i,j}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r} \\ &= \delta(\mathbf{0}) \Phi_{i,j}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (10.8)$$

In (10.7), we are avoiding the more cumbersome notation  $\widehat{u}'_i$  for the Fourier Transform, because virtually always the turbulence spectra that we are interested in are those of the turbulent fluctuations, so the prime on the left is somewhat redundant. Naturally, the inverse of (10.6) is

$$R_{i,j}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k}. \quad (10.9)$$

Two things follow from (10.6) and (10.7): first,

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}(-\mathbf{k}) &= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i^*(-\mathbf{k}) \widehat{u}_j(-\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j^*(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \left[ \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) \right]^* = \Phi_{i,j}^*(\mathbf{k}); \quad (10.10)$$

second,

$$\Phi_{i,j}^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \left[ \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \right]^* = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_j^* \widehat{u}_i} = \Phi_{j,i}(\mathbf{k}). \quad (10.11)$$

Equation (10.11) shows that the spectral tensor  $\Phi$  is *hermitian*.

It is convenient to define the real and imaginary parts of  $\Phi_{i,j}(\mathbf{k})$  as the *cospectrum* and the *quadrature spectrum*:

$$C\Phi_{i,j}(\mathbf{k}) \equiv \text{Re} [\Phi_{i,j}(\mathbf{k})], \quad (10.12)$$

$$Q\Phi_{i,j}(\mathbf{k}) \equiv \text{Im} [\Phi_{i,j}(\mathbf{k})]. \quad (10.13)$$

On account of (10.10),  $C\Phi_{i,j}(\mathbf{k})$  and  $Q\Phi_{i,j}(\mathbf{k})$  are even and odd functions of  $\mathbf{k}$ , respectively. Therefore, using (10.9),

$$\overline{u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x})} = R_{i,j}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} C\Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}, \quad (10.14)$$

since, on account of  $Q\Phi_{i,j}$  being odd,

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} Q\Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} = 0. \quad (10.15)$$

In the sequence, we will also need cross-spectra related to third-order moments. They are defined as

$$\Phi_{i,jk} \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \widehat{u}_k}, \quad (10.16)$$

$$\Phi_{ij,k} \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i \widehat{u}_j^* \widehat{u}_k}. \quad (10.17)$$

Note that we are still omitting the primes in the Fourier Transforms above, *i.e.*,

$$\widehat{u_i u_j} = \mathcal{F} [u'_i(\mathbf{x}) u'_j(\mathbf{x})] = \widehat{u}_i(\mathbf{k}) * \widehat{u}_j(\mathbf{k}) = \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} \widehat{u}_i(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3\mathbf{l} \quad (10.18)$$

by the convolution theorem.

Equations (10.10) and (10.11) also apply to these third-order spectra. The derivations are exactly the same:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,jk}(-\mathbf{k}) &= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i^*(-\mathbf{k}) \widehat{u}_j \widehat{u}_k(-\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_i(\mathbf{k}) \widehat{u}_j \widehat{u}_k^*(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \left[ \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j \widehat{u}_k(\mathbf{k}) \right]^* = \Phi_{i,jk}^*(\mathbf{k}); \end{aligned} \quad (10.19)$$

and

$$\Phi_{i,jk}^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \left[ \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j \widehat{u}_k \right]^* = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \overline{\widehat{u}_j \widehat{u}_k^* \widehat{u}_i} = \Phi_{jk,i}(\mathbf{k}) \quad (10.20)$$

(and similarly for  $\Phi_{ij,k}$ ).

### The difficult problem of the Quadrature Spectrum of $\Phi_{i,j}(\mathbf{k})$

A lot of what we find in the literature seems to imply, without explicit warning, that  $Q_{\Phi_{i,j}} \equiv 0$ . For the velocity spectral tensor, we find in [Cambon et al. \(1981\)](#) that this will be true if the initial data are real. Therefore, in the context of studying the time evolution of the spectral equations, if the initial data for  $Q_{\Phi_{i,j}}(\mathbf{x}, 0) = 0$ , then  $Q_{\Phi_{i,j}}(\mathbf{x}, t) = 0$ .

We probably want to concentrate on the simpler case of the *scalar* spectral vector  $\Phi_a$ . For a scalar  $a$ , its cartesian components are

$$\Phi_{ia} \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \widehat{u_i^*} \widehat{a} = C_{\Phi_{ia}} + iQ_{\Phi_{ia}}. \quad (10.21)$$

It appears that under some fairly general conditions for homogeneous turbulence in non-rotating flow in the presence of a scalar gradient,  $Q_{\Phi_{ia}} = 0$ . Let us collect the evidence. Begin by [Monin e Yaglom \(1975\)](#); there, one finds that a general expression for  $\Phi_{ai}$  is

$$\Phi_{ia} = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) A_j(\mathbf{k}), \quad (10.22)$$

with

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (10.23)$$

being the *projector operator*. Perhaps not unsurprisingly, then, [Lumley \(1964\)](#) obtained (his Eq. (7)):

$$\Phi_{ia}(\mathbf{k}) = -\Delta_{ij} \mathcal{B}(k) \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_j} \quad (10.24)$$

where  $\mathcal{B}(k)$  is a real function and  $k = |\mathbf{k}|$ , but specifically for an isotropic and solenoidal velocity field. Then, it follows from (10.24) that  $Q_{\Phi_{ia}} \equiv 0$ . Already we can expect, therefore, that in the inertial subrange both  $C_{\phi_{ij}}(\mathbf{k}) = 0$  (on account of local isotropy) and  $Q_{\Phi_{ia}} = 0$  (on account of [Lumley \(1964\)](#)'s result). Recent developments, however, extend these results a little further. Note that [Monin e Yaglom \(1975\)](#) cannot rule out a non-zero quadrature spectrum, while [Lumley \(1964\)](#) needs the velocity field to be isotropic.

## 10.2 – Shell averages

Shell averages are defined by

$$E_{i,j}(k) \equiv \oint_{k=k} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (10.25)$$

The most famous of them is the TKE spectrum,

$$E_e(k) = \frac{1}{2} E_{i,i}(k). \quad (10.26)$$

The K41 theory predicts, for the inertial subrange,

$$E_e(k) = \alpha_e \epsilon_e^{2/3} k^{-5/3}. \quad (10.27)$$



### 10.3 – One-dimensional cross-spectra

The “projection” of the cross spectrum over the  $k_1$  axis is

$$F_{i,j}(k_1) = \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{i,j}(k_1, k_2, k_3) dk_3 dk_2. \quad (10.28)$$

Let us prove that  $F_{i,j}(k_1)$  is also hermitian:

$$\begin{aligned} F_{i,j}(-k_1) &= \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{i,j}(-k_1, k_2, k_3) dk_3 dk_2 \\ &= \int_{l_2=-\infty}^{-\infty} \int_{l_3=-\infty}^{-\infty} \Phi_{i,j}(-k_1, -l_2, -l_3) dl_3 dl_2 \\ &= \int_{l_2=-\infty}^{+\infty} \int_{l_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{i,j}(-k_1, -l_2, -l_3) dl_3 dl_2 \\ &= \int_{l_2=-\infty}^{+\infty} \int_{l_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{i,j}^*(k_1, l_2, l_3) dl_3 dl_2 = F_{i,j}^*(k_1) \\ &= \int_{l_2=-\infty}^{+\infty} \int_{l_3=-\infty}^{+\infty} \Phi_{j,i}(k_1, l_2, l_3) dl_3 dl_2 = F_{j,i}(k_1). \end{aligned}$$

Later, the same kind of proof will apply to  $\tilde{\Phi}_{i,j}(\mathbf{k})$  and  $\tilde{F}_{i,j}(k_1)$  defined below.

This “projection” is equivalent to Fourier-transforming a one-dimensional record. To see this, note that

$$\begin{aligned} F_{i,j}(k_1) &= \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi^3} \int_{r_1=-\infty}^{+\infty} \int_{r_2=-\infty}^{+\infty} \int_{r_3=-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(r_1, r_2, r_3) e^{-i(k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3)} dr_1 dr_2 dr_3 \right] dk_3 dk_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_1=-\infty}^{+\infty} e^{-ik_1 r_1} \\ &\quad \left\{ \int_{r_2=-\infty}^{+\infty} \int_{r_3=-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(r_1, r_2, r_3) \underbrace{\left[ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_2=-\infty}^{+\infty} \int_{k_3=-\infty}^{+\infty} e^{-i(k_2 r_2 + k_3 r_3)} dk_3 dk_2 \right]}_{\delta(r_2, r_3)} dr_3 dr_2 \right\} dr_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_1=-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(r_1, 0, 0) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \blacksquare \quad (10.29) \end{aligned}$$

### 10.4 – Taylor’s hypothesis and the connection between space and time spectra

Here we consider the one-dimensional field  $u'_i((x_1, 0, 0), t) = u'_i(x_1, t)$  for short. Suppose that the field is advected with constant velocity  $U$  in  $x_1$ , without distortion. This is a kinematic wave,

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} = 0, \quad (10.30)$$

$$u'_i(x_1, 0) = f_i(x_1). \quad (10.31)$$

It has the widely known solution

$$u'_i(x_1, t) = f_i(x_1 - Ut) \quad (10.32)$$

Now consider the segment of  $u'_i$  corresponding to  $0 \leq x_1 \leq L$  advected during a period of time  $0 \leq t \leq T$ , and place an Eulerian measuring station at  $x_1 = L$ , so that

$$L = UT, \quad (10.33)$$

and define  $\tau$  by

$$r_1 \equiv U\tau; \quad (10.34)$$

the Eulerian measurement is

$$g_i(t) = u'_i(L, t) = f_i(L - Ut), \quad (10.35)$$

whence

$$g_i(0) = u'_i(L, 0) = f_i(L), \quad (10.36)$$

$$g_i(\tau) = u'_i(L, \tau) = f_i(L - U\tau); \quad (10.37)$$

this is known in the literature as *Taylor's hypothesis*.

Let us now show that, if  $u'_i(x, t)$  is homogeneous in  $x_1$ , then  $g_i(t)$  is stationary. We begin by noting that

$$\begin{aligned} u'_j(x_1 + r_1, t) &= f_j(x_1 + r_1 - Ut) \\ &= f_j(x_1 + U\tau - Ut) \\ &= f_j(x_1 - U(t - \tau)) \\ &= u'_j(x_1, t - \tau), \end{aligned} \quad (10.38)$$

Now, using (10.34)–(10.38) as needed,

$$\begin{aligned} \overline{g_i(t)g_j(t - \tau)} &= \overline{u'_i(L, t)u'_j(L, t - \tau)} \\ &= \overline{u'_i(L, t)u'_j(L + r_1, t)} \\ (\text{homogeneity}) &= \overline{u'_i(L + Ut, t)u'_j(L + r_1 + Ut, t)} \\ &= \overline{f_i(L + Ut - Ut)f_j(L + r_1 + Ut - Ut)} \\ &= \overline{f_i(L)f_j(L + U\tau)} \\ &= \overline{g_i(0)g_j(-\tau)}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

The Eulerian measurement functions  $g_i$  are connected to a time covariance function defined by

$$Q_{i,j}(\mathbf{x}, \tau) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_j(\mathbf{x}, t + \tau)}. \quad (10.40)$$

Above,  $Q_{i,j}$  is defined at each point in space: at different values of  $\mathbf{x}$ , it is (in principle) a different function, and the only assumption needed for its existence is that the process  $\mathbf{u}$  is stationary at that point.

Now choose  $\mathbf{x} = (L, 0, 0)$ , drop the 0's for short as before, and proceed:

$$Q_{i,j}(L, \tau) = \overline{u'_i(L, t)u'_j(L, t + \tau)}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{g_i(t)g_j(t+\tau)} \\
&= \overline{g_i(t - [t+\tau])g_j(t+\tau - [t+\tau])} \\
&= \overline{g_j(0)g_i(-\tau)} \\
&\text{(per (10.39))} = \overline{u'_j(L, t)u'_i(L + r_1, t)} \\
&= R_{j,i}(r_1, t)
\end{aligned} \tag{10.41}$$

This also produces the relationship between one-dimensional “space” and “time” spectra. Begin with

$$k_1 = \frac{2\pi}{r_1} = \frac{2\pi}{U\tau} = \frac{2\pi n}{U}, \tag{10.42}$$

where  $n$  is the cyclic frequency. Then, using (10.29),

$$\begin{aligned}
F_{i,j}(k_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_1=-\infty}^{+\infty} R_{i,j}(r_1) e^{-ik_1 r_1} dr_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} Q_{j,i}(\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{U} U\tau} d(U\tau) \\
&= \frac{U}{2\pi} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} Q_{j,i}(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \\
&= \frac{U}{2\pi} S_{j,i}(n),
\end{aligned} \tag{10.43}$$

where

$$S_{j,i}(n) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} Q_{j,i}(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \tag{10.44}$$

is the one-dimensional time spectrum. Finally, by using (10.42) in (10.43) above, we obtain

$$k_1 F_{i,j}(k_1) = n S_{j,i}(n). \tag{10.45}$$

# 11

## A Teoria de Kolmogorov

---

A teoria de Kolmogorov de 1941 de turbulência é, com toda a justiça, celebrada como talvez a mais importante realização em turbulência até o presente. Em sua edição russa original, ela foi apresentada em um artigo de 4 páginas (Kolmogorov, 1941); em uma tradução recente para o inglês, ela ocupa apenas 6 (Kolmogorov, 1991). Neste capítulo, nós apresentamos a teoria em uma notação consistente com o restante deste livro, bem como alguns resultados que podem ser obtidos a partir dela, tais como uma expressão para a taxa de dissipação da energia cinética da turbulência em turbulência isotrópica.

### 11.1 – Alternativas de descrição da estrutura estocástica da turbulência

Kolmogorov (1941, 1991) “evitou” a decomposição de Reynolds

$$U = \langle U \rangle + u, \quad (11.1)$$

trabalhando em seu lugar com as diferenças de velocidade entre pontos vizinhos:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}) &= U(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - U(\mathbf{x}) \\ &= \langle U(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle - \langle U(\mathbf{x}) \rangle + u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x}) \\ &\approx \underbrace{\mathbf{r} \cdot \nabla \langle U \rangle}_{\langle W(\mathbf{r}) \rangle} + \underbrace{u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x})}_{w(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (11.2)$$

O desenvolvimento acima mostra que as diferenças de velocidade entre dois pontos também obedecem a uma decomposição de Reynolds. A hipótese de *homogeneidade global* é que  $U$ , ou pelo menos  $u$ , é um campo homogêneo (no sentido estocástico); então, necessariamente,

$$\langle w \rangle = \langle u(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u(\mathbf{x}) \rangle = 0. \quad (11.3)$$

Uma hipótese mais fraca, denominada por Kolmogorov de *homogeneidade local*, é que apenas  $w$  é homogêneo em  $\mathbf{r}$ , i.e.: que  $u$  é um campo com incrementos homogêneos. Nesse caso,  $\langle w \rangle$  não é necessariamente nulo.

É importante reforçar que, em seu trabalho original, Kolmogorov trabalhou com  $U$  e  $W$ , e não com as flutuações. Como já vimos, especificar que apenas as flutuações  $u$  são um processo homogêneo permite supor um campo médio  $\langle U \rangle$  determinístico que pode variar linearmente no espaço, o que nos aproxima, embora apenas um pouco mais, de situações mais realistas.

Em seguida, Kolmogorov especifica (*i.e.*, supõe) *isotropia local*: no nosso contexto, em que estamos trabalhando com as flutuações, isso significa supor que todos os momentos de  $w$  são invariantes debaixo de translações (em  $\mathbf{r}$ ), rotações e reflexões. No  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto de todas as rotações e translações possíveis é formado pelas transformações ortogonais  $C$ , com  $\det C = \pm 1$  (o determinante de  $C$  é  $\pm 1$ ). O caso  $\det C = +1$  corresponde a uma rotação, e o caso  $\det C = -1$  corresponde à reflexão de pelo menos um dos eixos coordenados.

Voltando à questão central agora, a invariância da média de  $w$  implica

$$C \cdot \langle w \rangle = \langle w \rangle$$

Suponha entretanto que  $\langle C \rangle$  seja, em particular, a reflexão em torno da origem; então

$$C \cdot \langle w \rangle = -\langle w \rangle$$

e

$$\langle w \rangle = -\langle w \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle w \rangle = 0.$$

Concluimos que  $\langle w \rangle = 0$  segue-se necessariamente da hipótese de isotropia. Naturalmente, se preferirmos definir isotropia em  $u$ , obteremos um resultado análogo, mas isso já era consequência da decomposição de Reynolds. Por outro lado, se impusermos (com mais força) a isotropia de  $U$ , obteremos o resultado mais restritivo  $\langle U \rangle = 0$ .

Conforme mencionado acima, neste texto nós preferimos trabalhar com as estatísticas das flutuações. Em um escoamento globalmente homogêneo em  $u$ , o tensor de covariâncias é definido por

$$R_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (11.4)$$

Por outro lado, o tensor função de estrutura de um campo de velocidades localmente homogêneo é definido por

$$D_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv \langle (u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_i(\mathbf{x}))(u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_j(\mathbf{x})) \rangle = \langle w_i w_j \rangle. \quad (11.5)$$

Agora, se a turbulência for globalmente isotrópica, deveremos ter

$$R_{i,j}(\mathbf{r}) = R_{i,j}(r), \quad (11.6)$$

onde

$$r^2 = r_k r_k; \quad (11.7)$$

da mesma forma, se a turbulência for localmente isotrópica,

$$D_{i,j}(\mathbf{r}) = D_{i,j}(r). \quad (11.8)$$

É importante notar que, até agora, a região de validade das hipóteses de homogeneidade e de isotropia ainda não tinha sido comentada por Kolmogorov. No § 2, temos

The hypothesis of isotropy in the sense of Taylor is experimentally quite well confirmed in the case of turbulence caused by passing of a flow through a grid (cf. (3)). In the majority of other cases interesting from the practical point of view it may be considered only as a rather far approximation of reality even for small domains  $G$  and very large Reynolds numbers.

On the other hand we think it rather likely that in an arbitrary turbulent flow with a sufficiently large Reynolds number

$$R = LU/\nu$$

the hypothesis of local isotropy is realized with good approximation in sufficiently small domains  $G$  of the four-dimensional space  $(x_1, x_2, x_3, t)$  not lying near the boundary of the flow or its other singularities. By a ‘small domain’ we mean here a domain whose linear dimensions are small in comparison with  $L$  and time dimensions — in comparison with

$$T = U/L.$$

It is natural that in so general and somewhat indefinite a formulation the just advanced proposition cannot be rigorously proved.

Em outras palavras, dada a escala integral do escoamento  $\ell$  que nós definimos no capítulo 4, a hipótese de homogeneidade e isotropia local *só deve valer para*  $r \ll \ell$ .

Antes de prosseguirmos, vamos revisitar as relações entre os tensores função de estrutura, função de correlação e espectro:

$$D = \langle (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u})(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \rangle \quad (11.9)$$

$$R = \langle \mathbf{u}\dot{\mathbf{u}} \rangle \quad (11.10)$$

$$\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3} R e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{r}. \quad (11.11)$$

Nas equações acima,  $\mathbf{u}$  significa a flutuação de velocidade no ponto  $\mathbf{x}$ , e  $\dot{\mathbf{u}}$  significa a flutuação de velocidade no ponto  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ . Note ainda que é possível relacionarmos as 3 estatísticas,  $D$ ,  $R$  e  $\Phi$ , *se* (e somente se) a turbulência além de localmente homogênea — o que garante a existência de  $D$  — também for globalmente homogênea — o que garante que  $R$  e  $\Phi$  existem. Mas

$$D = \langle \dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}\dot{\mathbf{u}} \rangle - \langle \dot{\mathbf{u}}\mathbf{u} \rangle; \quad (11.12)$$

em turbulência homogênea,

$$\langle \dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle = R(0); \quad (11.13)$$

finalmente,

$$R(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}(0)\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{u}(-\mathbf{r})\mathbf{u}(0) \rangle = \langle \mathbf{u}(0)\mathbf{u}(-\mathbf{r}) \rangle^T = R^T(-\mathbf{r}). \quad (11.14)$$

Portanto, a relação entre os tensores função de estrutura e de correlação é

$$D(\mathbf{r}) = 2R(0) - R(\mathbf{r}) - R^T(-\mathbf{r}), \quad (11.15)$$

ou seja: conhecendo-se  $D$  tem-se  $R$  (e consequentemente  $\Phi$ ), e vice-versa.

Considere agora o tensor

$$\begin{aligned} R_{i,j}(\mathbf{r}) &= \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r})u_j(\mathbf{x}) \rangle \end{aligned}$$

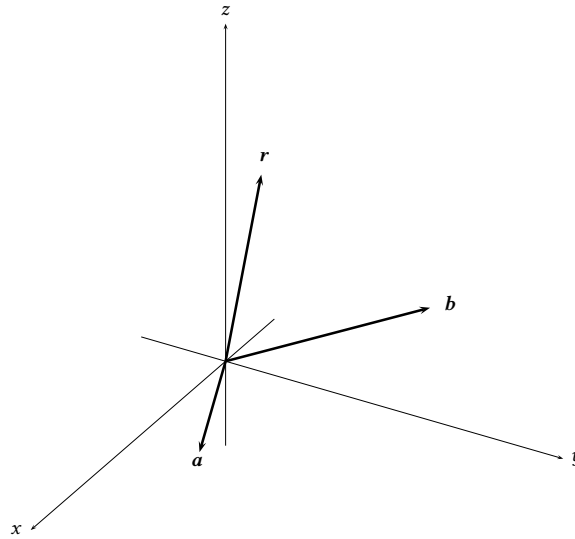


Figura 11.1: Invariantes geométricos em turbulência isotrópica

$$\begin{aligned} &= \langle u_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \rangle \\ &= R_{j,i}(-\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (11.16)$$

A “álgebra” da turbulência homogênea (Deissler, 1962; Hill, 2002) pode ser obtida a partir de

$$\xi_i = x_i + r_i, \quad (11.17)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial r_i}. \quad (11.18)$$

## 11.2 – Isotropia das funções $R_{ij}$ e $D_{ij}$

O material desta seção segue a exposição de Batchelor (1953). Dado  $\mathbf{R}$ , é possível contrair-lo segundo 2 direções dadas pelos vetores unitários  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , produzindo um escalar  $R$ :

$$R = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{b}, \quad (11.19)$$

ou, em notação indicial,

$$R = a_i R_{i,j} b_j. \quad (11.20)$$

Geometricamente, se a turbulência for isotrópica então  $R$  só deve depender de invariantes geométricos sob rotação. A figura 11.1 ilustra essa situação.

Os invariantes envolvendo  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e o vetor deslocamento  $\mathbf{r}$  entre dois pontos são

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i = \delta_{i,j} a_i b_j, \quad (11.21)$$

$$|\mathbf{r}| = r_k r_k = r^2, \quad (11.22)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = a_i r_i, \quad (11.23)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = b_j r_j, \quad (11.24)$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{r} = \epsilon_{ijk} a_i b_j r_k. \quad (11.25)$$

Comparando (11.20) com os invariantes acima, conclui-se que  $R_{i,j}$  deve ser da forma

$$R_{i,j}(\mathbf{r}) = F(r)\delta_{ij} + G(r)r_i r_j + H(r)\epsilon_{ijk}r_k, \quad (11.26)$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$ . Mas em condições isotrópicas,  $R$  deve ser um invariante debaixo de uma reflexão, ou seja,  $R$  deve permanecer o mesmo se trocarmos  $\mathbf{r}$  por  $-\mathbf{r}$ . Note que, então,

$$R_{i,j}(-\mathbf{r}) = F(r)\delta_{ij} + G(r)r_i r_j - H(r)\epsilon_{ijk}r_k, \quad (11.27)$$

de forma que, para garantirmos isotropia, é necessário que  $H(r) \equiv 0$ .

Agora, tendo obtido (11.26), note que toda turbulência isotrópica também é homogênea, já que a homogeneidade é a hipótese necessária para que o tensor  $\mathbf{R}$  só dependa de  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$ , e que portanto

$$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_j} = \frac{\partial \langle u_i(x_k) u_j(x_k + r_k) \rangle}{\partial r_j} = \left\langle u_i(x) \frac{\partial u_j(\xi_k)}{\partial \xi_j} \right\rangle = 0, \quad (11.28)$$

(devido à equação da continuidade, (9.49), e à regra de derivação (11.18), donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial r_j} &= \frac{\partial F}{\partial r_j} \frac{\partial r}{\partial r_j} \delta_{ij} + G(r) r_i \frac{\partial r_j}{\partial r_j} + G(r) r_j \frac{\partial r_i}{\partial r_j} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_j} r_i r_j \\ &= \frac{\partial F}{\partial r} \frac{r_j}{r} \delta_{ij} + 3r_i G(r) + r_j G(r) \delta_{ij} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{r_j}{r} r_i r_j \\ &= r_i \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4r_i G(r) + r_i \frac{r^2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \\ &= r_i \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + 4G(r) + r \frac{\partial G}{\partial r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (11.29)$$

onde usamos

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}, \quad (11.30)$$

$$\frac{\partial r}{\partial r_j} = \frac{r_j}{r}. \quad (11.31)$$

É usual definir funções de correlação longitudinal  $f(r)$  e transversal  $g(r)$  em turbulência isotrópica em termos das flutuações de velocidade em dois pontos separados por uma distância  $r$  ao longo da linha de separação ( $\mathbf{u}_{\parallel}$ ) e transversalmente a ela ( $\mathbf{u}_{\perp}$ ):

$$f(r) \equiv \frac{1}{\langle u_{\parallel}(\mathbf{x}) u_{\parallel}(\mathbf{x}) \rangle} \langle u_{\parallel}(\mathbf{x}) u_{\parallel}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (11.32)$$

$$g(r) \equiv \frac{1}{\langle u_{\perp}(\mathbf{x}) u_{\perp}(\mathbf{x}) \rangle} \langle u_{\perp}(\mathbf{x}) u_{\perp}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (11.33)$$

$$(11.34)$$

onde  $u_{\parallel} = |\mathbf{u}_{\parallel}|$  e  $u_{\perp} = |\mathbf{u}_{\perp}|$ . Agora oriente  $\mathbf{r}$  segundo  $x_1$ ,  $\mathbf{u}_{\perp}$  segundo  $x_2$ , e faça  $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$  e  $\boldsymbol{\xi} = (r_1, 0, 0)$ ; então,

$$R_{1,1}(r) = G(r)r_1^2 + F(r) = \langle u'_1 u'_1 \rangle f(r), \quad (11.35)$$



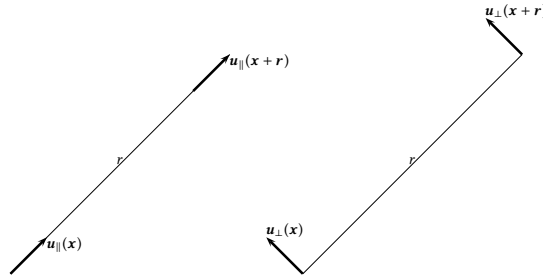


Figura 11.2: funções de correlação longitudinal e transversal

$$R_{2,2}(r) = G(r)r_2^2 + F(r) = F(r) = \langle u'_2 u'_2 \rangle g(r). \quad (11.36)$$

Como em turbulência isotrópica  $\langle u'_{(i)} u'_{(i)} \rangle \equiv \sigma^2$  é independente de  $(i)$ , segue-se o sistema de equações

$$r^2 F + G = \sigma^2 f, \quad (11.37)$$

$$G = \sigma^2 g, \quad (11.38)$$

isso é: podemos expressar  $(F, G)$  em função de  $(f, g)$  e vice-versa. Obtém-se então facilmente a expressão para o tensor de correlação isotrópico

$$R_{i,j} = \sigma^2 \left( \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r) \delta_{ij} \right). \quad (11.39)$$

Finalmente, aplicando (11.29), obtém-se

$$g(r) = f(r) + \frac{1}{2} r f'(r), \quad (11.40)$$

e isso mostra que em turbulência isotrópica e incompressível  $R_{i,j}(\mathbf{r})$  depende de uma única função escalar  $f(r)$ .

Historicamente, a microescala de Taylor  $\lambda$  é introduzida em associação à função coeficiente de autocorrelação longitudinal da turbulência isotrópica,  $f(r)$ :

$$\frac{d^2 f(0)}{dr^2} \equiv -\frac{1}{\lambda^2} \quad (11.41)$$

(note que essa definição é compatível com nossa definição anterior de microescala de Taylor).

Finalmente, um resultado importante:

$$\begin{aligned} R_{i,i} &= \sigma^2 \left( \frac{f - g}{r^2} r_i r_i + g \delta_{ii} \right) \\ &= \sigma^2 ((f - g) + 3g) \\ &= \sigma^2 (f + 2g) \\ &= \sigma^2 \left( f + 2 \left( f + \frac{1}{2} \frac{df}{dr} r \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left( 3f + r \frac{df}{dr} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^3 f(r) \right).
\end{aligned} \tag{11.42}$$

Agora ressa considerar

$$\begin{aligned}
\nabla^2 R_{i,i} &= \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} \left( 3f + r \frac{df}{dr} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 3 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_k} + \frac{\partial r}{\partial r_k} \frac{df}{dr} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial r_k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 3 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_k} \left( 4 \frac{df}{dr} \frac{r_k}{r} + r_k \frac{d^2 f}{dr^2} \right).
\end{aligned} \tag{11.43}$$

Antes de prosseguir, estabelecemos o resultado auxiliar

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{r_k}{r} = \frac{r \delta_{kk} - r_k \frac{r_k}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r}. \tag{11.44}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 R_{i,i} &= \left( 4 \frac{df}{dr} \frac{2}{r} + 4 \frac{r_k}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \frac{r_k}{r} + \frac{d^2 f}{dr^2} \delta_{kk} + r_k \frac{d^3 f}{dr^3} \frac{r_k}{r} \right) \\
&= \left( 4 \frac{d^2 f}{dr^2} + 3 \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r} \frac{df}{dr} + r \frac{d^3 f}{dr^3} \right).
\end{aligned} \tag{11.45}$$

Observando agora que, pela regra de l'Hôpital,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dr}}{r} = \frac{\frac{d^2 f}{dr^2}}{1} = \frac{d^2 f}{dr^2}, \tag{11.46}$$

conclui-se que

$$\nabla^2 R_{i,i}(0) = 15 \frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{15}{\lambda^2}. \tag{11.47}$$

Isso tem grande importância, já que é possível provar os seguintes fatos para turbulência isotrópica:

$$\langle \omega'_i(\mathbf{x}) \omega'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = -\nabla^2 R_{i,i}(\mathbf{r}), \tag{11.48}$$

$$\epsilon_e = \nu \langle \omega'_i \omega'_i \rangle = -\nu \nabla^2 R_{i,i}(0) = \frac{15\nu \langle u'u' \rangle}{\lambda^2} = 15\nu \left\langle \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right\rangle. \tag{11.49}$$

O último termo à direita de (11.49) é diretamente mensurável em uma turbulência real, embora exija uma frequência de medição altíssima (**por quê?**), sendo algumas vezes utilizado para “medir” a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta. Aliás, isso dá um paper fenomenal.

### 11.3 – Isotropia das funções $\Phi_{ij}$ e $E_e(k)$

Para  $E_e(k)$  isotrópico, temos

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E_e(k)}{4\pi k^2} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right]. \quad (11.50)$$

Consequentemente, o espectro tri-dimensional da velocidade longitudinal é

$$\phi_{11}(\mathbf{k}) = \frac{E_e(k)}{4\pi k^2} \left[ 1 - \frac{k_1^2}{k^2} \right]. \quad (11.51)$$

### 11.4 – As hipóteses de similaridade de Kolmogorov

Seja então  $D_{i,j}(r_k) = D_{i,j}(r)$  em turbulência localmente isotrópica.

Considere a taxa *média* de dissipação de energia cinética turbulenta; conforme vimos no capítulo 6, em escoamentos globalmente homogêneos,

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right\rangle, \quad (11.52)$$

sendo que essa relação vale com bom grau de aproximação mesmo quando o escoamento não for globalmente homogêneo.

No capítulo 4, nós introduzimos as macro ( $\ell$ ) e microescalas da turbulência ( $\eta_u, \check{u}$ ) dadas pelas equações (4.1)–(4.3).

A obtenção das microescalas é parte da 1ª hipótese de similaridade de Kolmogorov. Ele prevê então que (por argumentos meramente dimensionais)

$$D(r) = (\check{u})^2 \beta \left( \frac{r}{\eta} \right), \quad (11.53)$$

onde  $\beta$  é uma função *adimensional* e *universal* da variável adimensional  $r/\eta$ . Note a consistência dimensional de (11.53). O assunto torna-se mais interessante ainda para uma particular situação assintótica:  $r \gg \eta$ . Nesse caso, Kolmogorov supõe:

1. Que  $\beta$  pode ser escrita como uma função potência.
2. Que  $D(r)$  torna-se independente de  $\nu$ .

Então:

$$D(r) = C (\nu \epsilon)^{1/2} \left( \frac{r}{\nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}} \right)^n. \quad (11.54)$$

Observe como, para que  $D(r)$  possa ser independente de  $\nu$ , é indispensável que  $\beta$  seja da forma  $(r/\eta)^n$ . Prosseguindo,

$$D(r) = C \nu^{1/2-3n/4} \epsilon^{1/2+n/4} r^n. \quad (11.55)$$

Forçando o expoente de  $\nu$  a ser nulo, obtém-se finalmente a celebrada relação de Kolmogorov para a faixa inercial,

$$D(r) = C \epsilon^{2/3} r^{2/3}. \quad (11.56)$$

Essa relação também pode ser expressa em termos espectrais:

$$D_{i,i}(r) = 2 (R_{i,i}(0) - R_{i,i}(r)), \quad (11.57)$$

$$R_{i,i}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} S_{i,i}(k) dk \quad (11.58)$$

$$R_{i,i}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{i,i}(k) dk \Rightarrow \quad (11.59)$$

$$D_{i,i}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ikr}) S_{i,i}(k) dk \quad (11.60)$$

Suponha agora

$$S_{i,i} = B\epsilon_e^{2/3} |k|^{-m}; \quad (11.61)$$

(a dependência explícita de  $\epsilon_e$  é uma consequência da teoria de Kolmogorov, e pode ser facilmente justificada *a posteriori*; sua inclusão é apenas para facilitar a álgebra subsequente) a substituição direta de uma função potência como essa em (11.59) produz uma integral *divergente* (Frisch, 1995, p.54), enquanto que sua substituição em (11.60) produz

$$D_{i,i}(r) = 2B \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ikr}) |k|^{-m} dk; \quad (11.62)$$

fazendo  $u = kr$ ,

$$D_{i,i}(r) = 2B|r|^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{iu}) |u|^{-m} |r| dk, \quad (11.63)$$

donde se conclui que

$$D(r) = BA_m |r|^{m-1} \quad (11.64)$$

com

$$A_m = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{iu}) |u|^{-m} du. \quad (11.65)$$

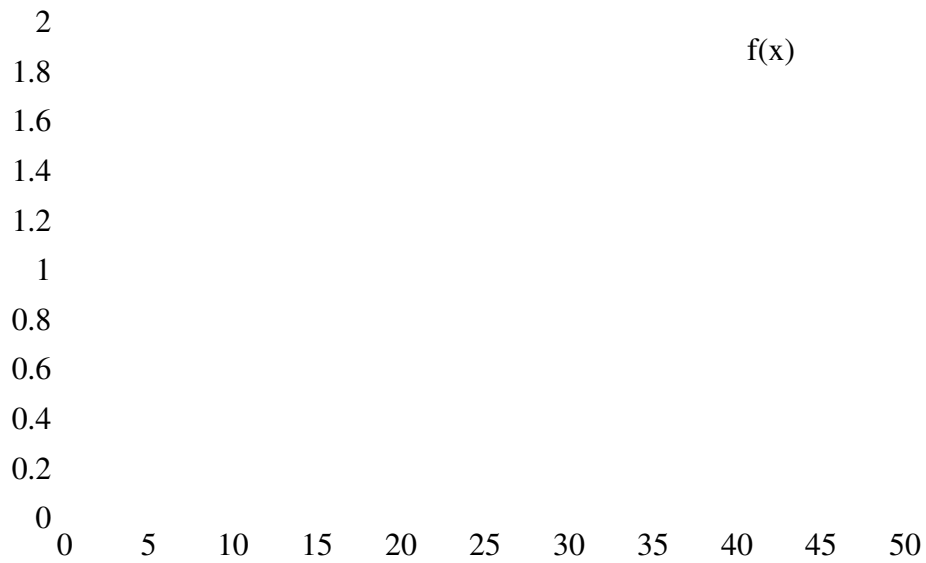
Essa última integral, ao contrário do que acontece com a integral do espectro, é *convergente* para uma certa faixa de valores de  $m$ . Para ver como, basta usar a fórmula de Euler e obter (Gradshteyn e Ryzhik, 1980, p. 447, §3.823)

$$A_m = 4 \int_0^{\infty} (1 - \cos(u)) u^{-m} du = \frac{16}{2^m} \int_0^{\infty} v^{-m} \sin^2 v dv = -4\Gamma(1-m) \cos \frac{(1-m)\pi}{2}, \quad (11.66)$$

que converge para  $m \in (1, 3)$ . Agora, se  $m - 1 = 2/3$ ,  $m = 5/3$ , e comparando (11.56) com (11.61),

$$-4\Gamma(1-m) \cos \left( \frac{1-m}{2} \pi \right) B = C \quad (11.67)$$

e (11.61) com  $m = 5/3$  dá a mesma lei de Kolmogorov para a faixa inercial para o comportamento do *espectro*.



Em resumo, nós concluímos que se  $D(r)$  é *qualquer* um dos componentes da diagonal do tensor de estrutura  $D(\mathbf{r})$  sobre *qualquer* direção  $\mathbf{n}$  do espaço,

$$r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \quad (11.68)$$

e existe uma região onde  $r \gg \eta$  na qual  $D$  se comporta como uma função potência dada por 11.56, cuja contrapartida espectral é (11.61) com  $m = 5/3$ .

# 12

## Dinâmica espectral

### 12.1 – Equações básicas sem forças de flutuação

Em um escoamento turbulento, a decomposição de Reynolds para o campo de velocidade, pressão e densidade respectivamente é

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (12.1)$$

$$p = \bar{p} + p', \quad (12.2)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (12.3)$$

onde

$$\overline{u'_i} = \overline{p'} = 0; \quad (12.4)$$

além disto, vamos supor inicialmente que as flutuações de densidade sejam desprezíveis (isto é: que o fluido é efetivamente incompressível):

$$\rho' \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{constante}. \quad (12.5)$$

Conceitualmente, a velocidade  $u_i$  e a flutuação de turbulência  $u'_i$  são funções aleatórias, e a velocidade média  $\bar{u}_i$  é uma função determinística da posição  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ . Vamos fazer a hipótese de que as flutuações de velocidade  $u'_i$  e de pressão  $p'$  são processos estocásticos homogêneos, ou seja: de que quaisquer momentos formados pelos produtos de  $u'_1, u'_2, u'_3$  e  $p'$  são invariantes debaixo de uma translação. Assim por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \langle u'_3 u'_3 p' \rangle = 0. \quad (12.6)$$

A equação da continuidade no domínio do espaço para as 3 componentes de velocidade em (12.1) é

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial u'_n}{\partial x_n} = 0. \quad (12.7)$$

A equação para as flutuações turbulentas é

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_n} \left[ u'_i \bar{u}_n + \bar{u}_i u'_n + u'_i u'_n - \overline{u'_i u'_n} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (12.8)$$

Considerável intuição (*insight*) pode ser obtida pela manipulação da equação dinâmica para as flutuações turbulentas em um escoamento homogêneo. Para tanto, abra a equação com a regra da derivada do produto:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \underbrace{u'_i \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_n}}_{=0} + \underbrace{\bar{u}_n \frac{\partial u'_i}{\partial x_n}}_{=0} + \underbrace{\bar{u}_i \frac{\partial u'_n}{\partial x_n}}_{=0} + \underbrace{u'_n \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_n}}_{=0} + \underbrace{u'_i \frac{\partial u'_n}{\partial x_n}}_{=0} +$$

$$u'_n \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} - \underbrace{\frac{\partial u'_i u'_n}{\partial x_n}}_{=0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_n \partial x_n}; \quad (12.9)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_n} \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} + u'_n \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} + u'_n \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_n \partial x_n}. \quad (12.10)$$

Os 3 primeiros termos nulos em (12.9) são consequência da equação da continuidade (12.7); o quarto termo se anula devido à homogeneidade de  $u_i$ .

Desejamos calcular as transformadas de Fourier de cada termo de (12.10). O termo envolvendo  $\overline{u_n}$  e o termo não-linear merecem atenção especial. A condição de cisalhamento constante, *necessária* para turbulência homogênea, é

$$\overline{u_n}(x_l) = \overline{u_{n0}} + \frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_l} x_l, \quad (12.11)$$

onde  $\overline{u_{n0}}$  é a velocidade em  $x_l = 0$ , e  $\partial \overline{u_n} / \partial x_l = \text{constante}$  para todo  $n$  e  $l$ .

Substituindo (12.11) em (12.10),

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \overline{u_{n0}} \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} + u'_n \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} + u'_n \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_n \partial x_n} \quad (12.12)$$

## 12.2 – Equações espectrais de turbulência

Compare:

$$\begin{aligned} \widehat{u'_i}^*(\mathbf{k}) &= 0, \\ \widehat{u'_i}(\mathbf{k}) &= 0, \\ \widehat{u_i}^*(\mathbf{k}) &= 0, \\ \widehat{u_i}(\mathbf{k}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{u'_i} &= 0, \\ \overline{u'_i} &= 0, \\ \overline{u_i} &= 0, \\ \overline{u_i} &= 0. \end{aligned}$$

### 12.2.1 – Transformadas de Fourier

A transformada de Fourier do termo não-linear é

$$\mathcal{F} \left[ u'_n \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right] = \mathcal{F}[u'_n] * \mathcal{F} \left[ \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right] = \mathcal{F}[u'_n] * i k_n \mathcal{F}[u'_i] = i k_n \widehat{u'_n} * \widehat{u'_i}. \quad (12.13)$$

Em (12.13),  $*$  indica convolução; de fato, (12.13) nada mais é do que o próprio teorema da convolução para transformadas de Fourier. A transformada de toda a equação (12.12) é

$$\frac{\partial \widehat{u_i}}{\partial t} + \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u_i} + \mathcal{F} \left[ \frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right] + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} \widehat{u_n} + i k_n \widehat{u_n} * \widehat{u_i} = -\frac{1}{\rho} i k_i \widehat{p} - \nu (k_n k_n) \widehat{u_i}. \quad (12.14)$$

### 12.2.2 – A transformada de Fourier do termo de cisalhamento

A transformada de Fourier do termo entre colchetes em (12.14) necessita de alguns truques inteligentes para ser explicitada. Primeiramente, note que

$$\frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} = -i x_l e^{-i(k_m x_m)}. \quad (12.15)$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} x_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right] &= \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} x_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} e^{-i(k_m x_m)} d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \left( -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_l} e^{-i(k_m x_m)} \right) d^3 \mathbf{x} \\ &= i \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} \left( \mathcal{F} \left[ \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right] \right) \\ &= i \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (i k_n \hat{u}_i) \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial k_l} (k_n \hat{u}_i) \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \left( k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \frac{\partial k_n}{\partial k_l} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \left( k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \hat{u}_i \delta_{nl} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} \delta_{nl} \hat{u}_i \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_n} \hat{u}_i \\ &= -\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Levando (12.16) em (12.14),

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_{n0} i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_l} k_n \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_l} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\rho} i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i;$$

neste ponto, é conveniente trocar os índices do 3º termo do lado esquerdo:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_{n0} i k_n \hat{u}_i - \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_n} \hat{u}_n + i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{1}{\rho} i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) \hat{u}_i. \quad (12.17)$$

### 12.2.3 – A eliminação do termo de pressão

A transformada de Fourier da equação da continuidade (12.7) produz

$$i k_n \hat{u}_n = 0. \quad (12.18)$$

É conveniente eliminar  $\hat{p}$  em (12.17); para isto, multiplique a equação por  $k_i$ :

$$\frac{\partial (k_i \hat{u}_i)}{\partial t} + \bar{u}_{n0} i k_n (k_i \hat{u}_i) - \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_n} k_i \hat{u}_n + i k_i k_n \hat{u}_n * \hat{u}_i = -\frac{i}{\rho} k_i k_i \hat{p} - \nu (k_n k_n) (k_i \hat{u}_i). \quad (12.19)$$



Em virtude de (12.18), todos os termos contendo  $(k_i \widehat{u}_i)$  desaparecem, restando

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} k_i k_m \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} k_i \widehat{u}_n + i k_i k_n \widehat{u}_n * \widehat{u}_i &= -\frac{i}{\rho} k_i k_i \widehat{p}, \\ -\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial k_n} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \widehat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_i &= -\frac{i}{\rho} \widehat{p}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Mas

$$k_i \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial k_n} = \frac{\partial}{\partial k_n} (k_i \widehat{u}_i) - \widehat{u}_i \frac{\partial k_i}{\partial k_n} = -\widehat{u}_i \delta_{in} = -\widehat{u}_n, \quad (12.21)$$

donde

$$\begin{aligned} +\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \widehat{u}_n + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_n} \frac{k_i}{k^2} \widehat{u}_n + i \frac{k_i k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_i &= -\frac{i}{\rho} \widehat{p} \\ 2 \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \frac{k_m}{k^2} \widehat{u}_n + i \frac{k_m k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_m &= -\frac{i}{\rho} \widehat{p} \\ 2 \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \widehat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_m &= -\frac{i}{\rho} k_i \widehat{p}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Os dois primeiros termos da primeira linha acima são iguais; eles são reunidos na segunda linha, onde o índice  $m$  substituiu  $i$ ; multiplicando-se por  $k_i$  obtém-se (12.22). Substituindo (12.22) em (12.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_i - \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial k_n} + \delta_{im} \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \widehat{u}_n + i k_n \widehat{u}_n * \widehat{u}_i &= \\ 2 \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \frac{k_i k_m}{k^2} \widehat{u}_n + i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_m - \nu k^2 \widehat{u}_i; \\ \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_i - \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \left[ k_m \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \widehat{u}_n - \delta_{im} \widehat{u}_n \right] + i k_n \widehat{u}_n * \widehat{u}_i &= \\ -i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_m + \nu k^2 \widehat{u}_i = 0. \end{aligned} \quad (12.23)$$

A equação (12.23) é o bloco de construção das equações de balanço de momentos espectrais de ordem  $n$ , conforme veremos na sequência. O seu conjugado é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial t} - \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_i^* - \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \left[ k_m \frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \widehat{u}_n^* - \delta_{im} \widehat{u}_n^* \right] - i k_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* &= \\ +i \frac{k_i k_m k_n}{k^2} (\widehat{u}_n * \widehat{u}_m)^* + \nu k^2 \widehat{u}_i^* = 0. \end{aligned} \quad (12.24)$$

A mesma equação (12.23) com o índice  $j$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} - \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_j - \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \left[ k_m \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial k_n} + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \widehat{u}_n - \delta_{jm} \widehat{u}_n \right] + i k_n \widehat{u}_n * \widehat{u}_j &= \\ -i \frac{k_j k_m k_n}{k^2} \widehat{u}_n * \widehat{u}_m + \nu k^2 \widehat{u}_j = 0. \end{aligned} \quad (12.25)$$

O truque padrão agora é pós-multiplicar (12.24) por  $\widehat{u}_j$ , pré-multiplicar (12.25) por  $\widehat{u}_i^*$ , e somar:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i^*}{\partial t} \widehat{u}_j + \widehat{u}_i^* \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial t} - \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j + \overline{u_{n0}} i k_n \widehat{u}_i^* \widehat{u}_j$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \left[ k_m \frac{\partial \widehat{u_i}^*}{\partial k_n} \widehat{u_j} + k_m \widehat{u_i}^* \frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial k_n} + 2 \frac{k_i k_m}{k^2} \widehat{u_n}^* \widehat{u_j} + 2 \frac{k_j k_m}{k^2} \widehat{u_i}^* \widehat{u_n} - \delta_{im} \widehat{u_n}^* \widehat{u_j} - \delta_{jm} \widehat{u_i}^* \widehat{u_n} \right] \\
& + \left[ i k_n \widehat{u_i}^* (\widehat{u_n} * \widehat{u_j}) - i k_n (\widehat{u_n} * \widehat{u_i})^* \widehat{u_j} \right] \\
& - \left[ \frac{k_j k_m k_n}{k^2} i \widehat{u_i}^* (\widehat{u_n} * \widehat{u_m}) - \frac{k_i k_m k_n}{k^2} i (\widehat{u_n} * \widehat{u_m})^* \widehat{u_j} \right] + 2 \nu k^2 \widehat{u_i}^* \widehat{u_j} = 0. \quad (12.26)
\end{aligned}$$

Observe que os termos envolvendo  $\overline{u_{n0}}$  se anulam. A equação ainda pode ser simplificada com a regra da derivada do produto:

$$\frac{\partial \widehat{u_i}^*}{\partial t} \widehat{u_j} + \widehat{u_i}^* \frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial t} = \frac{\partial (\widehat{u_i}^* \widehat{u_j})}{\partial t}. \quad (12.27)$$

$$k_m \frac{\partial \widehat{u_i}^*}{\partial k_n} \widehat{u_j} + k_m \widehat{u_i}^* \frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial k_n} = k_m \frac{\partial (\widehat{u_i}^* \widehat{u_j})}{\partial k_n} \quad (12.28)$$

Utilizando agora a definição do espectro cruzado direcional,

$$\Phi_{i,j}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u_i}^* \widehat{u_j} \rangle, \quad (12.29)$$

e sua extensão natural

$$\Phi_{i,jk}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle \widehat{u_i}^* \widehat{u_j} \widehat{u_k} \rangle, \quad (12.30)$$

$$\Phi_{ij,k}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \langle (\widehat{u_i} \widehat{u_j})^* \widehat{u_k} \rangle, \quad (12.31)$$

obtem-se a equação para o espectro na forma

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u_m}}{\partial x_n} \left[ k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} + 2 \left( \frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) - (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}) \right] \\
& + i k_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}] - i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}] + 2 \nu k^2 \Phi_{i,j} = 0. \quad (12.32)
\end{aligned}$$

#### 12.2.4 – Médias em $|\mathbf{k}|$ (*shell averages*)

É muitas vezes conveniente ou necessário reduzir a dimensionalidade dos espectros de turbulência de 3 para 1. Isto é feito por meio da definição dos espectros unidimensionais em  $k$ :

$$E_{i,j}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (12.33)$$

Existem também os espectros unidimensionais em  $k_1$ :

$$F_{i,j}(k_1) \equiv \int_{k_2 \in \mathbb{R}, k_3 \in \mathbb{R}} \Phi_{ij}(k_1, k_2, k_3) dk_2 dk_3. \quad (12.34)$$

As suas integrais respectivas produzem os elementos da matriz de covariâncias turbulentas:

$$\langle u_i u_j \rangle = \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Phi_{i,j} d^3 \mathbf{k} = \int_{k=0}^{\infty} E_{i,j}(k) dk = \int_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(k_1) dk_1. \quad (12.35)$$

Em particular, a *energia cinética turbulenta*,  $\langle e \rangle$ , é dada por

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \langle u_n u_n \rangle = \int_{k=0}^{\infty} E_e(k) dk, \quad (12.36)$$

onde

$$E_e(k) \equiv \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{k}|=k} \Phi_{n,n}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (12.37)$$

Finalmente, quando a turbulência é isotrópica, valem as seguintes relações entre  $E_e(k)$  e  $F_{11}(k_1)$ :

$$E_e(k) = k^3 \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{k} \frac{dF_{11}(k)}{dk_1} \right), \quad (12.38)$$

$$F_{11}(k_1) = \int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} E(k_1 x) dx. \quad (12.39)$$

### 12.2.5 – Interpretação física

É importante interpretar os termos de (12.32) da forma mais física que for possível.

$$\bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) = -\frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \quad (12.40)$$

funciona como um termo de *transferência do cisalhamento médio*, redistribuindo  $\Phi_{i,j}$  entre os números de onda (Deissler, 1998, p. 224–225). De fato, pode-se mostrar com facilidade que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Gamma}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (12.41)$$

Para a prova, basta observar que, por analogia com (12.16),

$$\mathcal{F} \left[ r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} \right] = -k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n},$$

onde  $R_{i,j}(\mathbf{r})$ , a função de covariância cruzada, é a transformada inversa de Fourier do espectro cruzado direcional  $\Phi_{i,j}$ ; então,

$$\begin{aligned} r_n \frac{\partial}{\partial r_m} R_{i,j} &= -\mathcal{F}^{-1} \left[ k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} \right] \\ &= -\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} k_m \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial k_n} e^{+i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3 \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (12.42)$$

e agora (12.41) segue-se de (12.42) avaliada em  $\mathbf{r} = 0$ .

O termo

$$\bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) = -2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \left( \frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{n,j} + \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{i,n} \right) \quad (12.43)$$

é a parte linear da interação entre a pressão e a velocidade no espaço de fase (veja a equação (12.22)). Claramente, ele é parcialmente responsável pela redistribuição de covariância  $\langle u_i u_j \rangle$  entre as 3 direções do espaço. Por exemplo, multiplicando-se (12.29) por  $k_i$  ou  $k_j$  e utilizando-se a equação da continuidade (12.18), obtém-se

$$k_i \Phi_{i,j} = k_j \Phi_{i,j} = 0; \quad (12.44)$$

portanto, é imediato que

$$\bar{\Pi}_{ii} = 0. \quad (12.45)$$

No entanto, não parece possível fazer nenhuma afirmação geral sobre

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Pi}_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} :$$

por exemplo, em (Deissler, 1998, p. 228), observa-se que em um particular escoamento com cisalhamento médio unidirecional  $d \langle U_1 \rangle / dx_3$ ,  $\bar{\Pi}_{11} < 0$  sempre,  $\bar{\Pi}_{22} > 0$  sempre, e que  $\bar{\Pi}_{33}$  troca de sinal com o tempo: ele é inicialmente positivo e depois se torna negativo.

O termo de produção por interação com o gradiente de velocidade média é

$$\bar{\Upsilon}_{i,j}(\mathbf{k}) = \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\delta_{im} \Phi_{n,j} + \delta_{jm} \Phi_{i,n}), \quad (12.46)$$

cuja integral em  $\mathbf{k}$  é

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \bar{\Upsilon}_{i,j}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = \delta_{im} \langle u_n u_j \rangle + \delta_{jm} \langle u_i u_n \rangle. \quad (12.47)$$

O termo de transferência inercial é

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = ik_n [\Phi_{i,nj} - \Phi_{ni,j}]. \quad (12.48)$$

Note que, assim como  $\Phi_{i,j}$ ,  $\Gamma_{ij}$  é hermitiano:

$$\Gamma_{ji}(\mathbf{k}) = \Gamma_{ij}^*(\mathbf{k}). \quad (12.49)$$

Desejo mostrar que

$$\int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 0. \quad (12.50)$$

Para isto, recuperemos a origem de (12.48) em (12.30)–(12.31), e na terceira linha de (12.26):

$$\begin{aligned} ik_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l} \\ &= i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l}; \end{aligned} \quad (12.51)$$

$$ik_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j = i \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{l}, \quad (12.52)$$

ou seja: (12.48) tem origem em

$$ik_n \widehat{u}_i^* (\widehat{u}_n * \widehat{u}_j) - ik_n (\widehat{u}_n * \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_j,$$

cuja integral em  $\mathbf{k}$  será

$$\begin{aligned} i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} = \\ i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} k_n [\widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) - \widehat{u}_n(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{l}) \widehat{u}_j(\mathbf{k})] d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} = \end{aligned}$$

$$i \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \int_{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^3} [k_n - l_n] \widehat{u}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \widehat{u}_i^*(\mathbf{k}) \widehat{u}_j(\mathbf{l}) d^3 \mathbf{l} d^3 \mathbf{k} = 0 \quad (12.53)$$

(note a troca de  $\mathbf{k}$  com  $\mathbf{l}$  no segundo termo dentro do colchete na 2ª linha, e o uso da equação da continuidade (12.18) na última linha acima), o que prova (12.50). Note portanto que  $\Gamma_{ij}$  somente redistribui a covariância  $\langle u_i u_j \rangle$  entre os vetores número de onda  $\mathbf{k}$  de  $\Phi_{i,j}$ , sem jamais trocá-la com outros espectros cruzados. Este é o mesmo papel do termo de transferência pelo cisalhamento médio  $\bar{\Gamma}_{i,j}$ .

Também é possível definir um termo unidimensional (em  $k$ ) de transferência:

$$T_{ij}(k) \equiv \int_{|\mathbf{k}|=k} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) d^2 \mathbf{k}. \quad (12.54)$$

Finalmente, o termo de redistribuição direcional de energia pelas correlações pressão-velocidade é

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = -i \frac{k_n k_m}{k^2} [k_j \Phi_{i,nm} - k_i \Phi_{nm,j}]. \quad (12.55)$$

Da mesma forma que ocorre com  $\bar{\Pi}_{ij}$ , não é (nem deve ser!) possível provar um resultado geral sobre a integral de  $\Pi_{ij}$  em  $\mathbf{k}$ . Note entretanto que  $\Pi_{ii}(\mathbf{k}) \equiv 0$ ; de fato,

$$k_i \phi_{i,nm} = k_i \frac{1}{\delta(0)} \langle \widehat{u}_i^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = \frac{1}{\delta(0)} \langle (k_i \widehat{u}_i)^* \widehat{u}_n \widehat{u}_m \rangle = 0. \quad (12.56)$$

### 12.2.6 – Produção e dissipação de energia cinética turbulenta

A contração  $i = j$  de (12.32) produz a *equação de evolução da energia cinética turbulenta*:

$$\frac{\partial \Phi_{i,i}}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + i k_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 \Phi_{i,i} = 0, \quad (12.57)$$

$$\frac{\partial 2\Phi_e}{\partial t} + \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} (\Phi_{n,m} + \Phi_{m,n}) + i k_n (\Phi_{i,ni} - \Phi_{ni,i}) + 2\nu k^2 (2\Phi_e) = 0. \quad (12.58)$$

Em virtude de (12.48), (12.50) e (12.35), a integral em  $\mathbf{k}$  de (12.58) é

$$\frac{\partial}{\partial t} (2e) + 2 \frac{\partial \langle U_m \rangle}{\partial x_n} \langle u_m u_n \rangle + 2\epsilon_e = 0. \quad (12.59)$$

A dissipação de covariância é dada por

$$\epsilon_{ij} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \Phi_{i,j}(\mathbf{k}) d^3 \mathbf{k} = 2 \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_{i,j}(k) dk; \quad (12.60)$$

em particular,

$$\epsilon_e = \frac{1}{2} \epsilon_{ii} = 2 \int_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} \nu k^2 \left( \frac{\Phi_{i,i}(\mathbf{k})}{2} \right) d^3 \mathbf{k} = 2\nu \int_{k=0}^{\infty} k^2 E_e(k) dk. \quad (12.61)$$

A taxa de dissipação de energia cinética turbulenta pode ser usada para definir as *microescalas de Kolmogorov* de comprimento e de tempo:

$$r_\epsilon = \nu^{3/4} \epsilon_e^{-1/4}, \quad (12.62)$$

$$t_\epsilon = \nu^{1/2} \epsilon_e^{-1/2}. \quad (12.63)$$

# A

## Grandezas padrão do ar e da água

---

| Água                               | Ar                                |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| $\beta = 1/23$                     | $\beta = 1$                       |
| $\kappa = 1/20000$                 | $\kappa = 1$                      |
| $\rho_0 = 999,1 \text{ kg m}^{-3}$ | $\rho_0 = 1,22 \text{ kg m}^{-3}$ |
| $p_0 = 101,325 \text{ Pa}$         | $p_0 = 101,325 \text{ Pa}$        |
| $T_0 = 288,15 \text{ K}$           | $T_0 = 288,15 \text{ K}$          |

# B

## Constantes físico-químicas

---

1 cal = 4,1868 J.

$R = 8.3144598(48) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Constante universal dos gases

# C

## Equação de estado para a água

---

A equação de Tumlirz adaptada por [Fischer e Dial \(1975\)](#) é

$$v = v_{\infty}(T) + \frac{\lambda(T)}{\Pi_0(T) + P}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $T$  está em °C,  $v$  e  $v_{\infty}$  estão em  $\text{cm}^3, \text{gm}^{-1}$ ;  $\lambda$  está  $\text{bars cm}^3 \text{gm}^{-1}$ , e  $\Pi_0$  e  $P$  estão em bars.  $v_{\infty}$ ,  $\lambda$  e  $\Pi_0$  são função da temperatura de acordo com

$$\begin{aligned} \lambda = & 1788.316 + 21.55053T - 0.4695911T^2 + 3.096363 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 0.7341182 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & 5928.499 + 58.05267T - 1.1253317T^2 + 6.6123869 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 1.4661625 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} v_{\infty} = & 0.6980547 - 0.7435626 \times 10^{-3}T + 0.3704258 \times 10^{-4}T^2 \\ & - 0.6315724 \times 10^{-6}T^3 + 0.9829576 \times 10^{-8}T^4 - 0.1197269 \times 10^{-9}T^5 \\ & + 0.1005461 \times 10^{-11}T^6 - 0.5437898 \times 10^{-14}T^7 + 0.1699460 \times 10^{-16}T^8 \\ & - 0.2295363 \times 10^{-19}T^9. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$



# Índice Remissivo

---

derivada material, [31](#)

microescala de Taylor, [62](#)

rotação

matriz de, [140](#)

## Referências Bibliográficas

---

- Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, New York.
- Batchelor, G. K. (1953). *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J Fluid Mech* , 5:113–133.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *J Fluid Mech* , 5:134–139.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edição.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (1960). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.
- Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.
- Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley.
- Cambon, C., Jeandel, D., e Mathieu, J. (1981). Spectral modelling of homogeneous non-isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:247–262.
- Chen, C.-I. (1991). Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. Hydraul. Eng.*, 117(3):371–389.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York.
- Corben, H. C. e Stehle, P. (1994). *Classical Mechanics*. Dover, New York, <sup>nd</sup> edição.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Oxford. 657 pp.

- Deissler, R. G. (1962). Turbulence in the presence of a vertical body force and temperature gradient. *J of Geophys Res*, 67(8):3049–3062.
- Deissler, R. G. (1998). *Turbulent Fluid Motion*. Taylor & Francis, Philadelphia, PA, USA.
- Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer*. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.
- Fischer, F. H. e Dial, Jr., O. E. (1975). Equation of state of pure water and sea water. Relatório técnico, Marine Physical Laboratory, Scripps Institution of Oceanography.
- Fleagle, R. G. e Businger, J. A. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Orlando.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Gauckler, P. (1867). Etudes Théoriques et Pratiques sur l'Écoulement et le Mouvement des Eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 64:818–822.
- Gerolymos, G. A. e Vallet, I. (2013). Pressure, density, temperature and entropy fluctuations in compressible turbulent plane channel flow. *arXiv*, página 1311.4330v1. compressible turbulence.
- Gioia, G. e Bombardelli, F. A. (2002). Scaling and similarity in rough channel flows. *Physical Review Letters*, 88:DOI:10.1103/PhysRevLett.88.014501.
- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego.
- Hauf, T., Finke, U., Neisser, J., Bull, G., e Stangenberg, J.-G. (1996). A ground-based network for atmospheric pressure fluctuations. *J Atmos Oceanic Technol*, 13:1001–1023.
- Hill, R. J. (2002). Exact second-order structure-function relationships. *J Fluid Mech*, 468:317–326.
- Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1981). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht, 2<sup>nd</sup> edição.
- James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Kader, B. A. e Yaglom, A. M. (1989). Spectra and correlation functions of surface layer atmospheric turbulence in unstable thermal stratification. Em Métails, O. e Lesieur, M., editores, *Turbulence 89: Organized Structures and Turbulence in Fluid Mechanics*, páginas 387–412. Kluwer Academic Press.

- Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *J Res NBS*, 21:707–741.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (in Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).
- Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kondepudi, D. e Prigogine, I. (1998). *Modern thermodynamics — From heat engines to dissipative structures*. John Wiley & Sons.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lesieur, M. (1990). *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2nd edição.
- Liggett, J. A. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Lumley, J. L. (1964). The spectrum of nearly inertial turbulence in a stably stratified fluid. *J Atmos Sci*, 21:99–102.
- Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 20:161–207.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1975). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 2. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Morris, H. M. e Wiggert, J. M. (1972). *Applied hydraulics in engineering*. John Wiley & Sons, New York, 2 edição.
- Müller, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Advanced Publishing Program.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, New York, 2ª edição.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans.*, 186:126–64.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Richardson, L. F. (1920). Some measurements of atmospheric turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. A* 221:1–28.

- Robinson, S. K. (1991). Coherent motions in the turbulent boundary layer. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):601–639.
- Rosenthal, J. S. (2008). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Slattery, J. C. (1972). *Momentum, energy, and mass transfer in continua*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- Speziale, C. G. (1991). Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):107–157.
- Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. I. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–444.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wosnik, M., Castillo, L., e George, W. K. (2000). A theory for turbulent pipe and channel flows. *J Fluid Mech*, 421:115–146.
- Wyngaard, J. C. (1981). Boundary-layer modeling. Em Nieuwstadt, F. T. M. e van Dop, H., editores, *Atmospheric turbulence and air pollution modelling*, capítulo 3, páginas 69–106. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Wyngaard, J. C. (2010). *Turbulence in the atmosphere*. Cambridge.