TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Mar 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Em um trecho de canal ou rio, verifica-se que a velocidade média na seção, V $(\mathsf{LT^{-1}})$, depende das seguintes variáveis: um comprimento de rugosidade z_0 (L) das paredes e do fundo; a componente da aceleração da gravidade na direção do escoamento, $\approx gS_0$ $(\mathsf{LT^{-2}})$; e o raio hidráulico R (L). S_0 é a declividade do canal, **e fica junto da aceleração da gravidade g.** Conforme indicado, elas devem ser consideradas **como uma única variável** gS_0. Há 4 variáveis e 2 dimensões, e portanto há 2 parâmetros adimensionais. Escolha gS_0 e R para comparecerem (possivelmente) em ambos, e obtenha Π_1 (envolvendo V) e Π_2 (envolvendo z_0).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
As duas dimensões fundamentais deste problema são L e T. Teremos 2 parâmetros adimensionais:

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= R^a (gS_0)^b V,\\
\Pi_2 &= R^a (gS_0)^b z_0.
\end{aligned}
$$

A primeira equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L^0T^0} &= \mathsf{L^a(LT^{-2})^bLT^{-1}} \Rightarrow\\
a + b + 1 &= 0,\\
-2b - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = -1/2, \qquad a = -1/2.
$$

donde

$$
\Pi_1 = \frac{V}{\sqrt{RgS_0}}.
$$

A segunda equação gera o sistema:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{L^0T^0} &= \mathsf{L^a(LT^{-2})^bL} \Rightarrow\\
a + b + 1 &= 0,\\
-2b &= 0
\end{aligned}
$$

Então,

$$
b = 0; \qquad a = -1.
$$

donde

$$
\Pi_2 = \frac{z_0}{R}.
$$

Temos agora a previsão de análise dimensional para a velocidade na seção

$$
\frac{V}{\sqrt{RgS_0}} = f\left(\frac{z_0}{R}\right),
$$

onde f é uma função empírica a determinar.

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] O programa a seguir,

```
#!/usr/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
a = 1
for k in range(2,100):
   a *= k
print(a)
```

imprime o seguinte resultado na tela:
933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175
999932299156089414639761565182862536979208272237582511852109168640000
000000000000000000
Entenda o que o programa faz: que operação matemática o programa está calculando? Reescreva a resposta do programa **utilizando apenas 3 caracteres**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O programa calcula o fatorial de 99, 99! ∎

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Mostre que os vetores

$$(1, 0, 0), \qquad (1, 2, 0), \qquad (1, 2, 3)$$

formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Precisamos mostrar que qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores acima, e que esses vetores são LI.
Primeiramente, se (x, y, z) é um vetor *qualquer* do $\mathbb{R}^3$, tente

$$\begin{aligned} \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(1, 2, 3) = (x, y, z) \Rightarrow \\ \alpha + \beta + \gamma &= x, \\ 2\beta + 2\gamma &= y, \\ 3\gamma &= z. \end{aligned}$$

O sistema é possível para *quaisquer* x, y, z: todo vetor do $\mathbb{R}^3$ pode ser decomposto nos vetores da base. Além disso, considere o caso particular $x = y = z = 0$: então, a única solução possível (e vice-versa) é $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e portanto os 3 vetores são LI ■

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Seja $E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Considere os objetos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= a_i \boldsymbol{e}_i,\\
\boldsymbol{M} &= M_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k,\\
\boldsymbol{b} &= b_l \boldsymbol{e}_l.
\end{aligned}
$$

Calcule

$$
\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b}] .
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b} &= M_{jk} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot b_l \boldsymbol{e}_l\\
&= M_{jk} b_l \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l)\\
&= M_{jk} b_l \boldsymbol{e}_j \delta_{kl}\\
&= M_{jk} b_k \boldsymbol{e}_j;\\
\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{b}] &= \epsilon_{ijk} a_i M_{jl} b_l \boldsymbol{e}_k \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Note a necessidade de mudar o índice k para l entre a penúltima e a última linhas.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$