Solução numérica da espiral de Ekman

30 de setembro de 2019

Em Mecânica dos Fluidos Geofísica, a espiral de Ekman é o padrão de velocidade que resulta do equilíbrio entre a força de Coriolis e as forças de atrito devidas à turbulência. Para a camada-limite atmosférica, um modelo muito simples (Kundu, 1990, seção 13.7) — e irrealista! — postula uma viscosidade cinemática turbulenta ν_W constante. O vetor velocidade é (u, v), e as equações do movimento nas direções x e y são, respectivamente,

$$0 = fv + \nu_W \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}, \tag{1}$$

$$0 = f(U - u) + \nu_W \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}. \tag{2}$$

O vetor $(U, 0)$ é denominado *vento geostrófico*, e $f \cong 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ (a 45° de latitude Norte) é o parâmetro de Coriolis. As condições de contorno do problema são

$$u(0) = 0, \qquad v(0) = 0, \tag{3}$$

$$u(+\infty) = U, \qquad v(+\infty) = 0. \tag{4}$$

A solução apresentada por Kundu usa variáveis complexas. Constrói-se uma velocidade complexa

$$W \equiv U + \mathrm{i}V \tag{5}$$

($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$) de tal forma que (1)–(2) podem ser escritas compactamente

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}z^2} - \frac{\mathrm{i}f}{\nu_W}(W - U) = 0 \tag{6}$$

(Cuidado! z é *real*!). A equação tem solução

$$W = U\left[1 - \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})z/\delta}\right], \tag{7}$$

com

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2\nu_W}{f}}, \tag{8}$$

ou seja:

$$u = U\left[1 - \mathrm{e}^{-z/\delta}\cos(z/\delta)\right], \tag{9}$$

$$v = U\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{sen}(z/\delta). \tag{10}$$

O seu trabalho é obter uma aproximação numérica para (7) (ou, o que dá no mesmo, para (9)–(10)), resolvendo o problema *transiente*

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\mathrm{i}f}{\nu_W}(W - U) = 0. \tag{11}$$

com as condições iniciais e de contorno

$$W(z,0) = 0, \tag{12}$$
$$W(0,t) = 0, \tag{13}$$
$$W(H,t) = U, \tag{14}$$

observando que $W(z,\infty)$ (quando $\partial W/\partial t \to 0$) é a solução de (6). Você utilizará $H \gg \delta$ para aproximar a solução analítica, que vale para um domínio (semi-)infinito. Valores que dão a ordem de grandeza correta na atmosfera são: $U = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\nu_W = 50\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, $f = 1\times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$, $\delta = 1000\,\mathrm{m}$, $H = 10000\,\mathrm{m}$. Embora seja possível resolver diretamente (11) no computador, é muito útil adimensionalizar! Fazemos

$$t = f\tau,$$
$$z = \delta\zeta,$$
$$W = \phi U,$$

e obtemos o problema (já com os valores numéricos indicados acima):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \mathrm{i}(\phi - 1). \tag{15}$$

As condições inciais e de contorno são

$$\phi(\zeta,0) = 0, \tag{16}$$
$$\phi(0,t) = 0, \tag{17}$$
$$\phi(10,t) = 1. \tag{18}$$

O problema a ser resolvido numericamente agora é:

a) Discretize a equação usando um esquema totalmente implícito para $\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2}$ e para ϕ. Você deve descrever a discretização e explicar o esquema numérico resultante.

b) Resolva a equação numericamente com o esquema obtido acima, usando. $\Delta\zeta = 0{,}005$ e $\Delta\tau = 0{,}01$ em sua solução.

A sua solução deve gerar pelo menos duas figuras semelhantes às figuras 1 e 2. Elas mostram as partes real e imaginária de ϕ (que correspondem a u/U e a v/U) nos instantes adimensionais $\tau = 5, 25, 50$ e 100.

Atenção: você vai precisar modificar a rotina `triad` (livro-texto) para que ela seja capaz de lidar com números complexos.

Referências

Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.

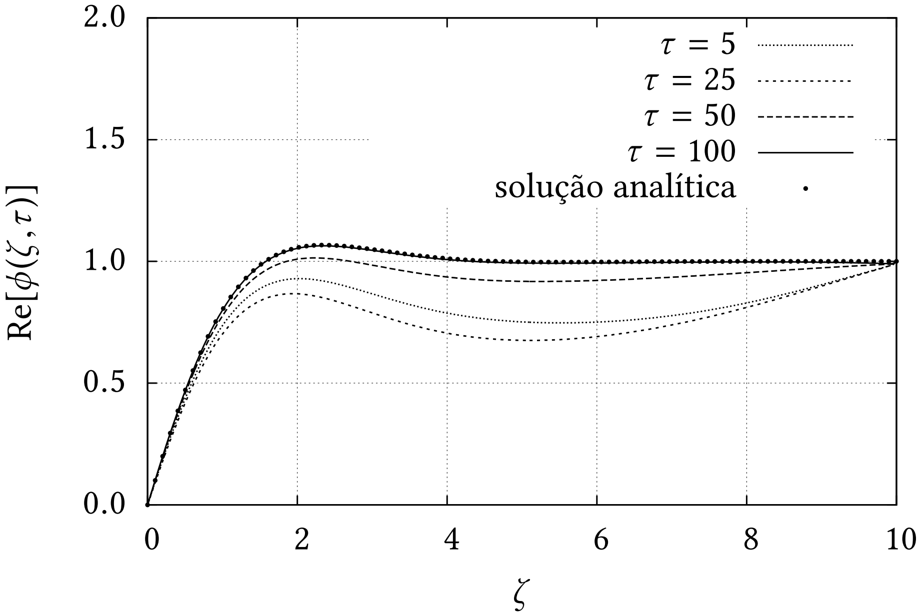

Figura 1: Parte real de $\phi(\zeta, \tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica.

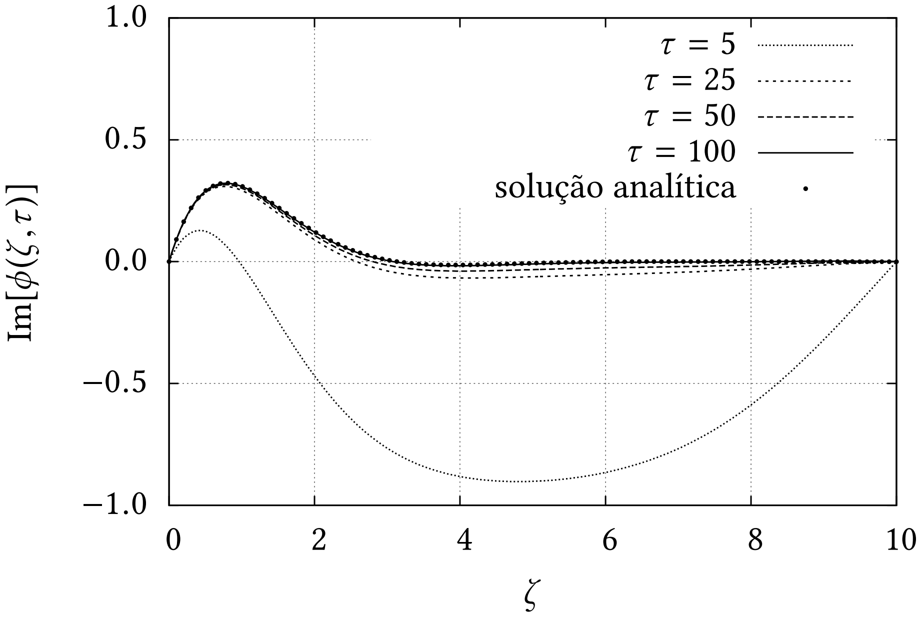

Figura 2: Parte imaginária de $\phi(\zeta, \tau)$, $\tau = 5, 25, 50, 100$, e solução analítica.