TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03B, 27 jan dez 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Obtenha a função de Green de

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{x}{x+1}y = f(x), \qquad y(0) = y_0.
$$

Você pode usar

$$
\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\eta}{\eta+1}\,\mathrm{d}\eta = \xi + \ln\left(\frac{1}{\xi+1}\right).
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi} - G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y &= G(x,\xi)f(\xi)\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi}y\,\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{\xi}{\xi+1}y\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y(0) - \int_0^\infty\left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}G\right]y(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

Nesse ponto, nós desejamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}G &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Façamos $G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi)$:

$$
\begin{aligned}
\left[u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right] + \frac{\xi}{\xi+1}uv &= \delta(\xi - x),\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} + \frac{\xi}{\xi+1}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x)\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} &= -v\frac{\xi}{\xi+1}\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\xi}{\xi+1}\mathrm{d}\xi\\
\int_{v(x,0)}^{v(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\int_{\eta=0}^{\xi} \frac{\eta}{\eta+1}\,\mathrm{d}\eta\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\int_{u=1}^{\xi+1} \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u\\
&= -\int_{u=1}^{\xi+1}\left(1 - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\\
&= -\left[u - \ln(u)\right]_1^{\xi+1} = -\xi + \ln(\xi+1);\\
\ln\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= -\xi + \ln(\xi+1);\\
\frac{v(x,\xi)}{v(x,0)} &= \exp\left[-\xi + \ln(\xi+1)\right],\\
v(x,\xi) &= v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1).
\end{aligned}
$$

Seguimos para u:

$$
\begin{aligned}
v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{v(x,0)}\mathrm{e}^{+\xi}\frac{1}{(\xi+1)}\delta(\xi - x);\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(x,0)}\mathrm{e}^{\xi}\frac{1}{(\xi+1)}\delta(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi;\\
\int_{u(x,0)}^{u(x,\xi)} \mathrm{d}u &= \frac{1}{v(x,0)}\int_{\eta=0}^{\xi} \mathrm{e}^{\eta}\frac{1}{(\eta+1)}\delta(\eta - x)\,\mathrm{d}\eta,\\
u(x,\xi) &= u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\left(\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(x+1)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) = u(x,\xi)v(x,\xi) &= \left[u(x,0) + \frac{1}{v(x,0)}H(\xi - x)\left(\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(x+1)}\right)\right]v(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\\
&= G(x,0)\mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1) + H(\xi - x)\mathrm{e}^{x-\xi}\frac{\xi+1}{x+1}.
\end{aligned}
$$

Isso já nos permite avaliar o comportamento de $G(x,\infty)$:

$$
\begin{aligned}
G(x,\infty) &= \mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\left[G(x,0) + \frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}\right],\\
G(x,0) &= -\frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
G(x,\xi) = \mathrm{e}^{-\xi}(\xi+1)\left[\frac{\mathrm{e}^{x}}{(x+1)}\left(H(\xi - x) - 1\right)\right] \blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville

$$
\begin{aligned}
y'' + \lambda y &= 0,\\
y'(0) &= 0,\\
y'(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $\lambda < 0$, faça $\lambda = -k^2$ para $k > 0$;

$$
\begin{aligned}
r^2 - k^2 &= 0,\\
r &= \pm k,\\
y(x) &= A\cosh(kx) + B\,\mathrm{senh}(kx),\\
y'(x) &= k\,[A\,\mathrm{senh}(kx) + B\cos(kx)]\,.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= kB \;\Rightarrow B = 0,\\
y'(1) &= k[A\,\mathrm{senh}(k) + B\cosh(k)] = kA\,\mathrm{senh}(k) \;\Rightarrow A = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a única solução possível é $A = B = 0$, e $\lambda < 0$ não pode ser autovalor.

Para $\lambda = 0$,

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0,\\
y(x) &= Ax + B,\\
y'(x) &= A.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= 0 \;\Rightarrow A = 0,\\
y'(1) &= 0 \;\Rightarrow A = 0,
\end{aligned}
$$

Portanto $A = 0$, e B é qualquer valor. $\lambda = 0$ é autovalor, e uma autofunção associada é $y_0 = 1$.

Para $\lambda > 0$, faça $\lambda = k^2$, para $k > 0$:

$$
\begin{aligned}
r^2 + k^2 &= 0,\\
r^2 &= -k^2,\\
r &= \pm k\mathrm{i},\\
y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\
y'(x) &= k\,[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)]\,.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno homogêneas produzem

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= kB = 0 \;\Rightarrow B = 0,\\
y'(1) &= k[-A\,\mathrm{sen}(k) + B\cos(k)] = -kA\,\mathrm{sen}(k) = 0;
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(k) &= 0,\\
k &= n\pi,\; n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Os autovalores não-nulos portanto são

$$
\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
$$

e as autofunções correspondentes são

$$
y_n(x) = \cos(n\pi x) \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Utilizando o método de separação de variáveis, resolva

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\\ \phi(0,t) &= \phi_0,\\ \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\ \phi(x,0) &= f(x).\end{aligned}$$

Sugestão:As condições de contorno não são homogêneas. Isso pode ser resolvido com a transformação

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \phi(x,t) - \phi_0 \;\Rightarrow\\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t},\\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\\ \psi(0,t) &= 0,\\ \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} &= 0,\\ \psi(x,0) &= f(x) - \phi_0.\end{aligned}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Fazemos agora $\psi(x,t) = X(x)T(t)$; a equação fica

$$\begin{aligned}X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2};\\ \frac{1}{\alpha^2 T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda.\end{aligned}$$

O problema de Sturm-Liouville é

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} - \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0,\ X'(L) = 0.$$

O problema é difusivo. É razoável proibir $\lambda > 0$. Sempre vale a pena, entretanto, testar $\lambda = 0$: a solução é do tipo

$$\begin{aligned}X(x) &= A + Bx;\\ X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\ X'(L) = 0 &\Rightarrow B = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda = 0$ não pode ser autovalor. Para $\lambda = -k^2 < 0$, com $k > 0$, a solução é do tipo

$$\begin{aligned}X(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx),\\ X'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]\end{aligned}$$

Impondo as condições de contorno,

$$\begin{aligned}X(0) = 0 &\Rightarrow A = 0,\\ X'(L) = 0 &\Rightarrow kB\cos(kL) = 0;\\ \cos(kL) = 0 &\Rightarrow\\ kL &= -\frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2L};\\ \lambda_n &= -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}.\end{aligned}$$

A equação em $T_n(t)$ é

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2 T_n}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} &= -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2};\\ \frac{\mathrm{d}T_n}{T_n} &= -\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\,\mathrm{d}t;\\ T_n(t) &= T_0 \exp\left[-\frac{\alpha^2(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}t\right].\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução geral é da forma

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).$$

Em $t = 0$:

$$f(x) - \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right),$$

$$[f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right),$$

$$\int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x = B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x,$$

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - \phi_0] \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) \mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Encontre $\phi(x,t)$ pelo método das características:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} = x, \qquad \phi(x,0) = f(x).$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi(x,t) = F(s)$ sobre $x = X(s)$ e $t = T(s)$:

$$\begin{aligned}
\phi(X(s),T(s)) &= F(s);\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s};\\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} &= 1 \Rightarrow T(s) = \underbrace{T(0)}_{\equiv 0} + s,\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} &= \operatorname{senh}(t) = \operatorname{senh}(s),\\
\int_{X(0)}^{X(s)} \mathrm{d}\xi &= \int_0^s \operatorname{senh}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\
X(s) - X(0) &= \cosh(s) - 1 \Rightarrow X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{senh}(t)\frac{\partial \phi}{\partial x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= X(s) = X(0) + \cosh(s) - 1,\\
\mathrm{d}F &= [X(0) + \cosh(s) - 1]\,\mathrm{d}s,\\
\int_{\xi=0}^{s} \mathrm{d}F &= \int_{\xi=0}^{s} [X(0) - 1 + \cosh(s)]\ \mathrm{d}\xi\\
F(s) - F(0) &= [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s) - \cancelto{0}{\operatorname{senh}(0)}\\
\phi(x,t) &= \phi(X(s),T(s))\\
&= F(s) = F(0) + [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= \phi(X(0),T(0)) + [X(0) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= f(X(0)) + [(X(s) - \cosh(s) + 1) - 1]s + \operatorname{senh}(s)\\
&= f(x - \cosh(t) + 1) + (x - \cosh(t))t + \operatorname{senh}(t) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$