TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04A, 17 jun 2023
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

AO REALIZAR ESTA PROVA, VOCÊ DEVE JUSTIFICAR TODAS AS PASSAGENS. EVITE "PULAR" PARTES IMPORTANTES DO DESENVOLVIMENTO DE CADA QUESTÃO. JUSTIFIQUE CADA PASSO IMPORTANTE. SIMPLIFIQUE AO MÁXIMO SUAS RESPOSTAS.

ATENÇÃO PARA A NOTAÇÃO VETORIAL E TENSORIAL! VETORES MANUSCRITOS DEVEM SER ESCRITOS COMO $\underset{\sim}{v}$; TENSORES DE ORDEM 2 COMO $\underset{\approx}{A}$.

---

1 [25] Encontre a solução geral da EDO não-linear

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = -by^3, \qquad y(0) = y_0,$$

$a > 0$, $b > 0$. **Sugestão:** Tente $y = uv$ e resolva uma EDO linear e homogênea em v.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Faça $y = uv$:

$$\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + auv &= -bu^3v^3,\\
\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + av\right]u + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^3v^3.
\end{aligned}$$

Obrigue o termo dentro dos colchetes a ser nulo, e resolva:

$$v = v_0\mathrm{e}^{-ax}.$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -bu^3v^2,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= -b[v_0\mathrm{e}^{-ax}]^2\,\mathrm{d}x,\\
\frac{\mathrm{d}u}{u^3} &= -bv_0^2\mathrm{e}^{-2ax}\,\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{2u_0^2} - \frac{1}{2u^2} &= -\frac{bv_0^2}{2a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u^2} &= -\frac{bv_0^2}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \frac{bv_0^2}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2} + \frac{bu_0^2v_0^2}{au_0^2}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right),\\
\frac{1}{u^2} &= \frac{1}{u_0^2}\left[1 + \frac{bu_0^2v_0^2}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right)\right],\\
u &= \frac{u_0}{\left[1+\frac{by_0^2}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right)\right]^{1/2}},
\end{aligned}$$

donde

$$y = uv = \frac{y_0\mathrm{e}^{-ax}}{\left[1+\frac{by_0^2}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-2ax}\right)\right]^{1/2}}\ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Encontre a solução geral de

$$y'' - 5y' + 6y = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A solução da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x}.$$

Agora aplicamos o método de variação de constantes, fazendo

$$y(x) = A(x)\mathrm{e}^{2x} + B(x)\mathrm{e}^{3x}.$$

Derivamos:

$$\begin{aligned}
y(x) &= A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x},\\
y'(x) &= 2A\mathrm{e}^{2x} + 3B\mathrm{e}^{3x} + \underbrace{A'\mathrm{e}^{2x} + B'\mathrm{e}^{3x}}_{=0},\\
y''(x) &= 4A\mathrm{e}^{2x} + 9B\mathrm{e}^{3x} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x}.
\end{aligned}$$

Substituímos na EDO:

$$\begin{aligned}
4A\mathrm{e}^{2x} + 9B\mathrm{e}^{3x} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} - 5\left[2A\mathrm{e}^{2x} + 3B\mathrm{e}^{3x}\right] + 6\left[A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x}\right] &= x,\\
A\mathrm{e}^{2x}\underbrace{[4 - 10 + 6]}_{=0} + B\mathrm{e}^{3x}\underbrace{[9 - 15 + 6]}_{=0} + 2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x.
\end{aligned}$$

Obtemos o sistema de EDO*s*,

$$\begin{aligned}
A'\mathrm{e}^{2x} + B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
3A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
A'\mathrm{e}^{2x} &= -x,\\
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -x\mathrm{e}^{-2x},\\
A(x) &= \frac{2x+1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 3B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
2A'\mathrm{e}^{2x} + 2B'\mathrm{e}^{3x} &= 0,\\
B'\mathrm{e}^{3x} &= x,\\
\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= x\mathrm{e}^{-3x},\\
B(x) &= -\frac{3x+1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + D.
\end{aligned}$$

Agora, juntando tudo,

$$\begin{aligned}
y(x) &= A(x)\mathrm{e}^{2x} + B(x)\mathrm{e}^{3x}\\
&= \left[\frac{2x+1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C\right]\mathrm{e}^{2x} + \left[-\frac{3x+1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + D\right]\mathrm{e}^{3x}\\
&= \frac{6x+5}{36} + C\mathrm{e}^{2x} + D\mathrm{e}^{3x} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Encontre as 3 raízes complexas de

$$z^3 = 1.$$

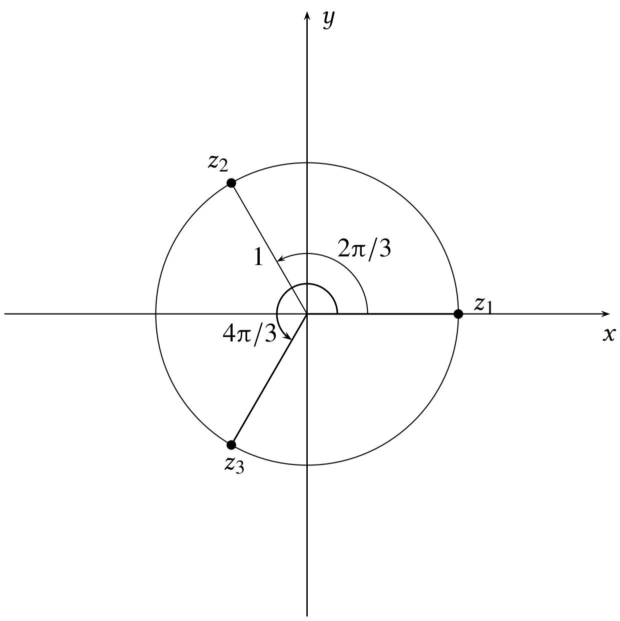
Deixe as 3 raízes explícitas e desenhe-as no plano complexo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
z^3 &= 1 = e^{i2k\pi},\\
z &= re^{i\theta},\\
z^3 &= r^3 e^{3i\theta},\\
r^3 e^{i3\theta} &= e^{i2k\pi},\\
r &= 1,\\
\theta &= \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

As 3 raízes são

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1,\\
z_2 &= e^{i\frac{2\pi}{3}},\\
z_3 &= e^{i\frac{4\pi}{3}} \blacksquare
\end{aligned}$$



Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Expanda a função complexa

$$f(z) = \frac{z-3}{z-7}$$

em série de Laurent em torno de $z = 3$ na região $|z-3| < 4$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que a região é do tipo $|z-3|/4 < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{z-3}{z-7} &= \frac{z-3}{(z-3)-4} \\
&= \frac{\frac{z-3}{4}}{\frac{z-3}{4}-1} \\
&= -\frac{z-3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{z-3}{4}} \\
&= -\frac{z-3}{4}\left[1 + \left(\frac{z-3}{4}\right) + \left(\frac{z-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{4}\right)^3 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹