TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 19 Jun 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] Considere a seguinte modificação do modelo que você utilizou no TC4:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -aSI + cR,\\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= aSI - bI,\\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= bI - cR
\end{aligned}
$$

Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve o sistema acima, com $a = 0.00001$, $b = 1/14$ e $c = 0.001$. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Supondo que `array` tenha sido importado de `numpy`,

```
def ff(x,y):
    a = 0.00001
    b = 1.0/14.0
    c = 0.001
    return array([-a*y[0]*y[1] + c*y[2], a*y[0]*y[1] - b*y[1], b*y[1]-c*y[2]])
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Expanda

$$f(x,y) = \exp(x+y)$$

em série de Taylor em torno de $(x,y) = (0,0)$ até os termos de ordem 2, ou seja: até os termos em x^2, y^2 e xy.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Até ordem 2, temos

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

As derivadas de interesse são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= 1;\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} &= 1;\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \exp(x+y); & \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} &= 1.
\end{aligned}$$

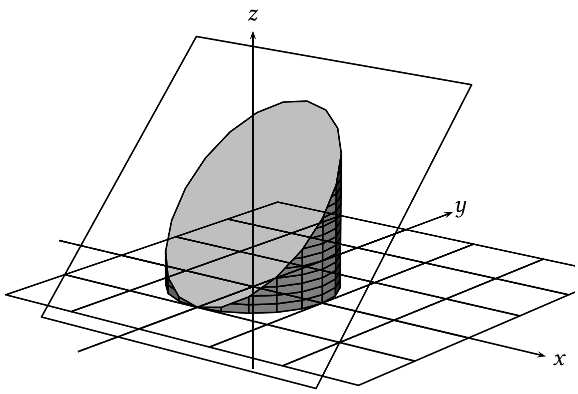
Portanto, em torno de $(0,0)$,

$$f(x,y) \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2xy) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Calcule o volume da região definida pela interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$ e o plano $-y + z = 1$. **SUGESTÃO: DESENHE!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Eis o desenho:



O plano corta um cilindro de base circular, raio 1, e altura 2, pela metade. Portanto,

$$V = \frac{1}{2}[\pi \times 1^2] \times 2 = \pi.$$

Se você quiser fazer da maneira mais difícil,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= z = 1 + y; \\
y &= r \operatorname{sen}(\theta); \\
z(r, \theta) &= 1 + r \operatorname{sen}(\theta); \\
V &= \iint_{\text{círculo}} z(r, \theta) r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} [1 + r \operatorname{sen}(\theta)] r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \pi \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Usando obrigatoriamente variáveis complexas, integração de contorno e o teorema dos resíduos, calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(\theta)}.$$

Sugestão: faça a transformação de variável $z = e^{i\theta}$ e transforme a integral acima em uma integral sobre o círculo unitário no plano complexo envolvendo um polo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Fazendo a substituição sugerida, se $z = e^{i\theta}$, quando θ vai de 0 a 2π, z percorre o círculo unitário C no plano complexo; então:

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta}, \\ dz &= ie^{i\theta}, \\ \frac{dz}{iz} &= d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} \\ &= [\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)] + [\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)] \\ &= 2\cos(\theta) \Rightarrow \\ \cos(\theta) &= \frac{z^2+1}{2z}. \end{aligned}$$

Retornando à integral,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(\theta)} &= \oint_C \frac{1}{2 - \frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} \\ &= \oint_C \frac{2i}{z^2 - 4z + 1} \end{aligned}$$

O integrando possui dois polos, $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $z_2 = 2 + \sqrt{3}$, mas apenas z_1 está dentro do círculo unitário. Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i c_{-1} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to z_1} \left[(z - z_1) \frac{2i}{(z-z_1)(z-z_2)} \right] \\ &= 2\pi i \frac{2i}{(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})} = \\ &= 2\pi i \frac{2i}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Usando o método de Frobenius, encontre **uma** solução LI de

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n},\\
y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1},\\
y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}.\\
x^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n},\\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} &= 0;\\
r+m &= r+n+1; \Rightarrow\\
n &= m-1;\\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{r+m};\\
\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} &= 0;\\
r(r-1)a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1)a_n + a_{n-1}\right] x^{r+n} &= 0
\end{aligned}$$

As raízes são $r_1 = 1$, e $r_2 = 0$. Tentemos r_2, pois ela *pode* levar a duas soluções LI (ou a nenhuma!):

$$\begin{aligned}
n(n-1)a_n + a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Partindo de $a_0 \neq 0$, não é possível encontrar a_1, pois temos uma divisão por zero. Logo, a menor raiz não leva a nenhuma solução. Tentemos portanto *uma* solução com $r_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \qquad \text{(sem perda de generalidade)};\\
(n+1)na_n + a_{n-1} &= 0;\\
a_n &= -\frac{a_{n-1}}{n(n+1)},\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}.
\end{aligned}$$

A 1ª solução será

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹