TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 30 mar 2012
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

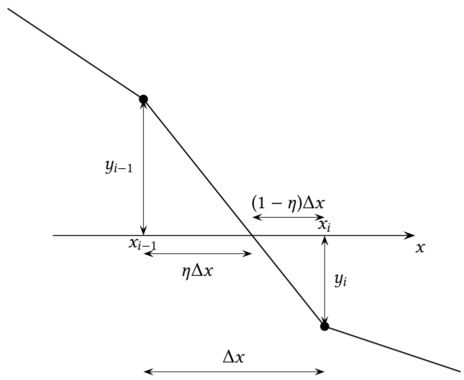
1 [30] A figura ao lado mostra o *zoom* da discretização de uma função $y(x)$ por pontos, com espaçamento horizontal Δx: a função muda de sinal, e portanto possui um zero, entre x_{i-1} e x_i. Se aproximarmos a função por um conjunto de segmentos de reta linearmente interpolados entre os pontos, veremos que o zero é dado por

$$x^* = x_{i-1} + \eta \Delta x,$$

onde $0 < \eta < 1$. Supondo como na figura que $y_{i-1} > 0$ e $y_i < 0$, mostre que

$$\eta = \frac{p}{1+p}, \qquad p = -y_{i-1}/y_i.$$

Sugestão: semelhança de triângulos.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{i-1}}{\eta \Delta x} &= -\frac{y_i}{(1-\eta)\Delta x},\\
p\frac{1}{\eta} &= \frac{1}{1-\eta},\\
(1-\eta)p &= \eta,\\
p &= \eta + \eta p,\\
\eta &= \frac{1}{1+p} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Considere a função $F(x)$ definida pela integral

$$F(x) \equiv \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt, \qquad x \geq 0.$$

Obtenha uma série para o cálculo de $F(x)$. Sugestão: expanda e^t em série de Taylor em torno de $t = 0$, etc., e em seguida integre termo a termo.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right) - 1\right] dt,\\
&= \int_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right] dt,\\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\right] dt,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n!}\,dt,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \times n!}\\
&= x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + \ldots \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Dados 3 vetores $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$, **não necessariamente ortonormais**, porém LI, segue-se que

$$B = \boldsymbol{b}_1 \cdot [\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3] = \boldsymbol{b}_3 \cdot [\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2] = \boldsymbol{b}_2 \cdot [\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1] \neq 0.$$

Defina agora **3 novos vetores**:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}^1 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3],\\
\boldsymbol{b}^2 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1],\\
\boldsymbol{b}^3 &\equiv \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2].
\end{aligned}$$

(Os sobre-escritos não significam potências! Eles apenas enumeram os novos vetores.) Prove que

$$\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}_j = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

SUGESTÃO: EVITE NOTAÇÃO INDICIAL: É MAIS FÁCIL FAZER POR ENUMERAÇÃO, TESTANDO CADA UM DOS NOVE CASOS E ARGUMENTANDO COM AS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS PRODUTOS ESCALAR E VETORIAL.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}^1 &= \boldsymbol{b}_1 \cdot \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3] = \frac{1}{B}\left(\boldsymbol{b}_1 \cdot [\boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{b}_3]\right) = \frac{B}{B} = 1;\\
\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}^2 &= \boldsymbol{b}_1 \cdot \frac{1}{B}[\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1] = \frac{1}{B}\boldsymbol{b}_1 \cdot [\boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{b}_1] \equiv 0;
\end{aligned}$$

etc.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 07 jun 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] A matriz

$$[\boldsymbol{A}] = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Possui determinante igual a +1, e os seguintes autovalores/autovetores ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$):

k	autovalor	autovetor
1	$\sqrt{2}/2 - \mathrm{i}\sqrt{2}/2$	$(1, \mathrm{i}, 0)$
2	$\sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\sqrt{2}/2$	$(1, -\mathrm{i}, 0)$
3	1	$(0, 0, 1)$

a) [10] Qual é o efeito geométrico de $\boldsymbol{A}$ sobre um vetor qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$?

b) [20] Dado qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ com componentes **estritamente reais**, $\boldsymbol{w} = (\alpha, \beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ele sempre pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores 1 e 2 acima:

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2,$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Obtenha c_1 e c_2 em função de α e β.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A transformação $\boldsymbol{A}$ gira um vetor $\boldsymbol{x}$ de $\pi/4$ radianos em torno de x_3.

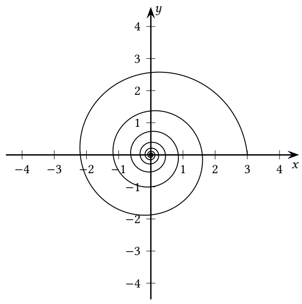
b)

$$\begin{aligned} c_1(1, \mathrm{i}, 0) + c_2(1, -\mathrm{i}, 0) &= (\alpha, \beta, 0) \\ c_1 + c_2 &= \alpha, \\ c_1 - c_2 &= \beta/\mathrm{i}, \\ c_1 &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \beta/\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - \mathrm{i}\beta), \\ c_2 &= \frac{1}{2}\left(\alpha - \beta/\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \mathrm{i}\beta\right) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [35] Na figura ao lado, considere a curva plana cujas equações paramétricas são

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 3\mathrm{e}^{-t/10}\cos t,\\
y(t) &= 3\mathrm{e}^{-t/10}\operatorname{sen} t,
\end{aligned}
$$



$t \geq 0$. Calcule o seu comprimento total. **Observação**: $0 \leq t < \infty$, mas o comprimento da curva é **finito**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\ell &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\left(-3\mathrm{e}^{-t/10}\left(\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{10}\cos(t)\right)\right)^2 + \left(+3\mathrm{e}^{-t/10}\left(\cos(t) - \frac{1}{10}\operatorname{sen}(t)\right)\right)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t\\
&= \left[9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\operatorname{sen}^2(t) + 2\operatorname{sen}(t)\frac{\cos(t)}{10} + \frac{1}{100}\cos^2(t)\right) + 9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\cos^2(t) - 2\cos(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{10} + \frac{1}{100}\sin^2(t)\right)\right]^{1/2}\mathrm{d}t\\
&= \left[9\mathrm{e}^{-2t/10}\left(\operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{100}\cos^2(t) + \cos^2(t) + \frac{1}{100}\sin^2(t)\right)\right]^{1/2}\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{\frac{909}{100}\mathrm{e}^{-2t/10}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{3\sqrt{101}}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Integrando,

$$
\ell = \int_{t=0}^{\infty} \frac{3\sqrt{101}}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{101} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [35] Obtenha a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x+1}y = x.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= uv,\\
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x+1}uv &= x,\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x+1}v\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x.
\end{aligned}$$

Force o termo entre colchetes a ser zero:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x+1}v &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{x+1}v,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -\frac{\mathrm{d}x}{x+1},\\
\ln|v| &= -\ln|x+1| + \ln k_1,\\
|v| &= \frac{k_1}{|x+1|},\\
v &= \pm\frac{k_1}{x+1} = \frac{c_1}{x+1}.
\end{aligned}$$

Substitua no que restou:

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{x+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= x,\\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{c_1}x(x+1)\,\mathrm{d}x,\\
u &= \frac{1}{c_1}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + c_2,\\
y = uv &= \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{(c_1c_2)}{x+1}\\
&= \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{c}{x+1} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 05 jul 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO   Assinatura: ____________________

---

1 [50] **Utilizando obrigatoriamente o método de Frobenius**, obtenha a solução geral de

$$x^2y'' + xy' - (1/9 + x)y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},\\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1},\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r-2},\\
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1},\\
xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r},\\
x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r)a_n x^{n+r}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0.$$

Vamos "consertar" o segundo somatório:

$$\begin{aligned}
m + r &= n + r + 1,\\
m &= n + 1,\\
n &= m - 1.
\end{aligned}$$

A EDO fica

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n x^{n+r} - \sum_{m+1}^{\infty} a_{m-1} x^{m+r} &= 0,\\
\left[(r-1)(r) + (r) - 1/9\right] a_0 x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0.
\end{aligned}$$

Evidentemente, a equação indicial é

$$\begin{aligned}
r^2 - 1/9 &= 0,\\
r &= \pm\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

As raízes são distintas e não diferem por um inteiro: consequentemente, cada uma delas levará a uma solução LI diferente. A relação de recorrência pode ser obtida de: para $r = \pm 1/3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+r-1)(n+r) + (n+r) - 1/9\right] a_n - a_{n-1}\right\} x^{n+r} &= 0,\\
\left[(n+r)^2 - 1/9\right] a_n - a_{n-1} &= 0,\\
a_n &= \frac{1}{(n+r)^2 - 1/9} a_{n-1}.
\end{aligned}$$

As duas soluções são calculadas por

Continue a solução no verso ⟹

```
a[0] : 1$
b[0] : 1$
a[n] := 1/((n+1/3)^2 -1/9) * a[n-1]$
b[n] := 1/((n-1/3)^2 -1/9) * b[n-1]$
for n : 1 thru 6 step 1 do (
print ("n = ",n ," an = ", a[n], " bn = ", b[n] )
);
```

E portanto:

$$y_1 = x^{1/3}\left[1 + \frac{3}{5}x + \frac{9}{80}x^2 + \frac{9}{880}x^3 + \frac{27}{49280}x^4 + \frac{81}{4188800}x^5 + \frac{81}{167552000}x^6 + \ldots\right],$$
$$y_2 = x^{-1/3}\left[1 + 3x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{56}x^3 + \frac{27}{2240}x^4 + \frac{81}{145600}x^5 + \frac{81}{4659200}x^6 + \ldots\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Expanda a função complexa

$$f(z) = \frac{z-3}{z-7}$$

em série de Laurent em torno de $z = 3$ na região $|z - 3| < 4$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Note que a região é do tipo $|z - 3|/4 < 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{z-3}{z-7} &= \frac{z-3}{(z-3)-4} \\
&= \frac{\frac{z-3}{4}}{\frac{z-3}{4} - 1} \\
&= -\frac{z-3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{z-3}{4}} \\
&= -\frac{z-3}{4}\left[1 + \left(\frac{z-3}{4}\right) + \left(\frac{z-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{z-3}{4}\right)^3 + \ldots\right] \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 27 jul 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Utilizando a **definição** de transformada de Laplace, $\mathscr{L}$, obtenha

$$\mathscr{L}\left\{t^2\right\} = ?$$

(ou seja: **calcule** a integral definidora.) Sugestão: integre por partes.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Integrando-se por partes duas vezes (por exemplo) obtém-se

$$\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{s^3} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Utilizando **obrigatoriamente** transformada de Laplace, resolva o problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} &= -Kt^2,\\
c(x,0) &= 0,\\
c(0,t) &= c_0.
\end{aligned}
$$

Ou seja: encontre $c(x,t)$. É útil saber que

$$
\int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t = e^{-sa}\int_a^\infty f(t-a)e^{-s(t-a)}\,\mathrm{d}(t-a) = e^{-sa}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
s\overline{c} - c(x,0) + U\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2K}{s^3},\\
\frac{\mathrm{d}\overline{c}}{\mathrm{d}x} + \frac{s}{U}\overline{c} &= -\frac{2K}{Us^3},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\overline{c} + \frac{2K}{Us^3}\right] + \frac{s}{U}\left[\overline{c} + \frac{2K}{Us^3}\right] &= 0,\\
\overline{c} + \frac{2K}{Us^3} &= A(s)\exp\left(-\frac{sx}{U}\right).
\end{aligned}
$$

Em $x = 0$, $\overline{c}(0,s) = c_0/s$; portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{c_0}{s} + \frac{2K}{Us^3} &= A(s),\\
\overline{c}(x,s) &= -\frac{2K}{Us^3} + \left[\frac{c_0}{s} + \frac{2K}{Us^3}\right]\exp\left(-\frac{sx}{U}\right),\\
c(x,t) &= -\frac{K}{U}t^2 + H\left(t - \frac{x}{U}\right)\left[c_0 + \frac{K}{U}\left(t - \frac{x}{U}\right)^2\right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] **Utilizando obrigatoriamente autovalores e autovetores**, resolva o sistema de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -5\\-5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Pares de autovalores, autovetores são:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2 & \boldsymbol{f}_1 &= (1,1),\\ \lambda_2 &= +8 & \boldsymbol{f}_2 &= (1,-1).\end{aligned}$$

Na base dos autovetores,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}v_1 &= A\mathrm{e}^{-2t},\\ v_2 &= B\mathrm{e}^{+8t}.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = A\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + B\mathrm{e}^{+8t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Se $\delta(x)$ e $H(x)$ são a delta de Dirac e a função de Heaviside, respectivamente, calcule a integral

$$\int_{\xi=-\infty}^{x} \left\{ [H(\xi) - H(\xi-1)] + \delta(\xi-2) \right\} \mathrm{d}\xi.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

É preciso saber/lembrar que

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = H(\xi - a),$$
$$\int_{-\infty}^{x} H(\xi - a)\,\mathrm{d}\xi = (x-a)H(x-a).$$

Então,

$$\int_{\xi=-\infty}^{x} \left\{ [H(\xi) - H(\xi-1)] + \delta(\xi-2) \right\} \mathrm{d}\xi = xH(x) - (x-1)H(x-1) + H(x-2) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT009 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 05 ago 2013
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Utilizando **obrigatoriamente** o método de variação de constantes, encontre a solução geral de

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = e^x\,.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

A equação característica da equação diferencial homogênea associada é

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 1 &= 0,\\ \lambda^2 &= -1,\\ \lambda &= \pm\mathrm{i}.\end{aligned}$$

A solução da homogênea associada é

$$y_h = A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$$

A opção pela exponencial complexa é para tornar a álgebra mais fácil devido ao termo não-homogêneo. Tentemos

$$\begin{aligned}y(x) &= A(x)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x},\\ y'(x) &= \mathrm{i}A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - \mathrm{i}B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left[A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right],\\ \left[A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right] &= 0,\\ y''(x) &= -A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left[\mathrm{i}A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - \mathrm{i}B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right]\end{aligned}$$

A penúltima equação impede o aparecimento de derivadas de ordem 2 em A ou B. Substituindo:

$$-A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \left[\mathrm{i}A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - \mathrm{i}B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right] + A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^x.$$

Um sistema de duas EDO's resulta:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + \mathrm{i}B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 0,\\ \mathrm{i}A'\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} - \mathrm{i}B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= \mathrm{e}^x,\\ 2\mathrm{i}A'\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= \mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x},\\ A(x) &= \frac{-\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} + A_0,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{i}B'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x},\\ B(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + B_0.\end{aligned}$$

Reunindo tudo,

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + \frac{\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + A_0\mathrm{e}^{+\mathrm{i}x} + B_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\\ &= \ldots,\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + C\cos(x) + D\,\mathrm{sen}(x)\ \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] **Utilizando obrigatoriamente autovalores e autovetores**, encontre a solução geral de

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Pares de autovalores, autovetores são:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 3 & \qquad \boldsymbol{f}_1 &= (1, -1), \\
\lambda_2 &= 1 & \qquad \boldsymbol{f}_2 &= (1, 1).
\end{aligned}
$$

Na base dos autovetores,

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
v_1 &= A\mathrm{e}^{3t}, \\
v_2 &= B\mathrm{e}^{t}.
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A\mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + B\mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Se $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ parametriza uma superfície S no $\mathbb{R}^3$, e se $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal a S em cada ponto, então é verdade que

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Portanto, dada uma função vetorial $\boldsymbol{v}(x,y,z)$,

$$I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S = \int_{R_{uv}} \left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sabendo disso, calcule $I = \int_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}S$, onde S é a superfície cilíndrica

$$y = 1 - x^2, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le z \le 1,$$

e $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (1-x, 1-y, 0)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Uma parametrização tão boa quanto qualquer outra é

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= 1 - u^2, \\ z &= v, \end{aligned}$$

para $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} &= (1, -2u, 0), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= (-2u, -1, 0), \\ \boldsymbol{v}(u,v) &= (1-u, u^2, 0), \\ \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right] \cdot \boldsymbol{v} &= -2u(1-u) - u^2 = u^2 - 2u, \\ I &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} (u^2 - 2u)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{3} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Usando **obrigatoriamente transformada de Laplace**, resolva

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = e^x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Preciso saber que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''\} &= s^2\overline{y} - sy(0) - y'(0),\\
\mathscr{L}\{e^x\} &= \frac{1}{s-1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
s^2\overline{y} - s - 1 + \overline{y} &= \frac{1}{s-1},\\
(s^2+1)\overline{y} &= \frac{1}{s-1} + (s+1)\\
\overline{y} &= \frac{1}{(s^2+1)}\frac{s^2}{(s-1)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1},
\end{aligned}$$

donde

$$y(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹