TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 01 Set 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________

---

1 [25] Dada a equação diferencial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k\phi,$$

e a discretização

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\phi_i^{n+1},$$

a) [5] Reescreva o esquema de diferenças finitas em termos de

$$\mathrm{Fo} = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},\ \mathrm{Ka} = k\Delta t,\ \phi_i^{n+1},\ \phi_{i-1}^n,\ \phi_i^n, \mathrm{e}\phi_{i+1}^n.$$

b) [5] O esquema é explícito ou implícito?

c) [15] Determine o fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ da análise de estabilidade de von Neumman em função de Fo, Ka, k_l e Δx. **NÃO É PRECISO VERIFICAR SE O ESQUEMA É ESTÁVEL OU INSTÁVEL.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
frac\phi_i^{n+1} - \phi_i^n\Delta t &= D\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\phi_i^{n+1},\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= D\Delta t\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} - k\Delta t\phi_i^{n+1},\\
\phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= \mathrm{Fo}\left[\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n\right] + \mathrm{Ka}\phi_i^{n+1},\\
[1+\mathrm{Ka}]\,\phi_i^{n+1} &= \phi_i^n + \mathrm{Fo}\left[\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n\right],\\
\phi_i^{n+1} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\phi_{i+1}^n + (1-2\mathrm{Fo})\phi_i^n + \mathrm{Fo}\phi_{i-1}^n\right].
\end{aligned}$$

b) Explícito.
c)

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(n+1)\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i+1)\Delta x} + (1-2\mathrm{Fo})\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{an\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-1)\Delta x}\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[\mathrm{Fo}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l\Delta x} + (1-2\mathrm{Fo}) + \mathrm{Fo}\xi_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right];\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[2\mathrm{Fo}\cos(k_l\Delta x) + (1-2\mathrm{Fo})\right];\\
&= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[2\mathrm{Fo}\left(\cos(k_l\Delta x) - 1\right) + 1\right].
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\cos(2x) - 1 &= -2\,\mathrm{sen}^2(x);\\
2\mathrm{Fo}\left[\cos(k_l\Delta x) - 1\right] &= -4\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \frac{1}{1+\mathrm{Ka}}\left[1 - 8\mathrm{Fo}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right) + 16\mathrm{Fo}^2\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{k_l\Delta x}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Uma competência importante em métodos numéricos é a comparação de um método numérico com resultados analíticos conhecidos. No quadriculado abaixo, escreva um programa **completo** em Python que calcule

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos(n\pi))}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

com precisão melhor do que 10^{-4}. **Sugestão:** para alguns valores de n, os termos são nulos. Quais? Evite-os em seu programa. **OBEDEÇA RIGOROSAMENTE AS REGRAS DE "INDENTAÇÃO" DE PYTHON, E ESCREVA UM CARACTERE EM CADA QUADRADO. ESCREVA A LÁPIS PARA FACILITAR A CORREÇÃO DE ERROS**.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
from math import sin, cos, pi
V = 0
n = 1
eps = 1.0e-4
dif = eps
while abs(dif) >= eps :
   dif = 2*(1-cos(n*pi))*sin(n*pi/2)/(n**2 * pi**2)
   V += dif
   print(n,dif)
   n += 2
pass
print('V␣=␣%8.4f' % V)
```

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule a série de Fourier **complexa** de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x + \mathrm{i}\frac{x}{|x|}, & x \in [-1,1] \wedge x \neq 0. \end{cases}$$

ATENÇÃO: x é real, mas $f(x)$ é complexa!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É sempre bom calcular c_0 separadamente para evitar problemas com n no denominador. Note que ambas as partes real e imaginária de $f(x)$ são funções *ímpares*. Portanto,

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0_-} [x - \mathrm{i}]\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x + \int_{0_+}^{1} [x + \mathrm{i}]\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{+1} x\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x + \int_{0_+}^{1} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0_-} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Convém separar as contas:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} x\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} [x\cos(\pi n x) - \mathrm{i}x\,\mathrm{sen}(\pi n x)]\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{i}\int_{-1}^{+1} x\,\mathrm{sen}(\pi n x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\mathrm{i}\cos(n\pi)}{n\pi};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0_+}^{1} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi n}\left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}\right]; \\
-\int_{-1}^{0_-} \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} n x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi n}\left[1 - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi n}\right].
\end{aligned}$$

Portanto,

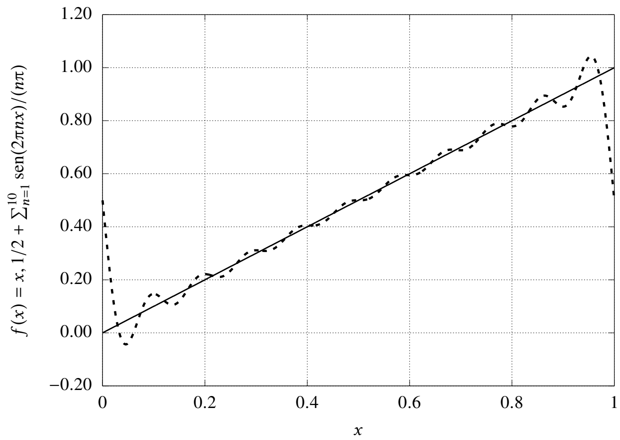
$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{\mathrm{i}\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi n} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi n}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\mathrm{i}\cos(n\pi) + 1 - \cos(n\pi)\right].
\end{aligned}$$

A série de Fourier complexa será

$$\begin{aligned}
x + \mathrm{i}\frac{x}{|x|} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi) + \mathrm{i}\cos(n\pi)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi) + \mathrm{i}\cos(n\pi)\right]\mathrm{sen}(n\pi x) \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Veja a figura a seguir para uma série de Fourier truncada de $f(x) = x$,



e considere a aproximação

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\pi} \,\text{sen}(2\pi n x), \qquad 0 \le x \le 1$$

mostrada com a linha tracejada. Na base $\{1, \text{sen}(2\pi x), \cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi 2x), \cos(2\pi 2x), \text{sen}(2\pi 3x), \cos(2\pi 3x), \ldots\}$, o que você pode afirmar sobre

$$\left\| f(x) - \left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n\pi} \,\text{sen}(2\pi n x) \right] \right\| ?$$

Note que $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Nesta base, essa quantidade é mínima.

Continue a solução no verso ⟹