TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01A, 14 Fev 2022
Prof. Nelson Luís Dias

0

**Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova**

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

**1** [25] Qual é a saída do programa a seguir?

```
#!/usr/bin/python3
from numpy import array
a = array([0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
b = (a[0:9] + a[1:10] + a[2:11])//3
print(a)
print(b)
```

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
[ 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10]
[1 2 3 4 5 6 7 8 9]
```

Continue a solução no verso ⟹

**2** [25] Considere o seguinte esquema de diferenças finitas para a equação da onda cinemática:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),$$

onde $c > 0$ é a celeridade da onda.

a) [05] Escreva $u_i^{n+1}$ em função de $u_i^n$, $u_{i-1}^n$, $u_{i-2}^n$ e $\mathrm{Co} = c\Delta t/\Delta x$.

b) [20] Faça uma análise de estabilidade de von Neumann: quais são os valores permitidos para Co?

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),\\
u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(u_i^n - u_{i-2}^n\right),\\
u_i^{n+1} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right)u_i^n + \frac{\mathrm{Co}}{2}u_{i-2}^n.
\end{aligned}$$

b) A análise de estabilidade de von Newmann se inicia pela equação de evolução para cada harmônico do erro de arredondamento:

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right)\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} + \frac{\mathrm{Co}}{2}\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l(i-2)\Delta x};\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k_l\Delta x};\\
\theta &\equiv 2k_l\Delta x;\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta};\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\cos(\theta) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta)\right);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= \left(1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\right) + \frac{\mathrm{Co}}{2}\cos(\theta) - \mathrm{i}\frac{\mathrm{Co}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta);\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 + \frac{\mathrm{Co}}{2}(\cos(\theta) - 1) - \mathrm{i}\frac{\mathrm{Co}}{2}\,\mathrm{sen}(\theta);
\end{aligned}$$

Agora impomos

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &\le 1;\\
1 + \mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos(\theta) - 1)^2 + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta) &\le 1\\
1 + \mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) + 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}\,\mathrm{sen}^2(\theta) &\le 1\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4} + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{4}(-2\cos(\theta) + 2) &\le 0\\
\mathrm{Co}(\cos(\theta) - 1) + \frac{\mathrm{Co}^2}{2}(-\cos(\theta) + 1) &\le 0\\
\mathrm{Co}(1 - \cos(\theta))\left[-1 + \frac{\mathrm{Co}}{2}\right] &\le 0;\ \Rightarrow\\
\frac{\mathrm{Co}}{2} &\le 1,\\
\mathrm{Co} &\le 2\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Continue a solução no verso ⟹

**3** [25] Um esquema implícito *upwind* para a equação da onda cinemática é

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x},$$

onde $c$ é a celeridade da onda. Como é o esquema de Crank-Nicholson equivalente?

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{2}\left[\frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

**4** [25] Obtenha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{-|x|} \cos(x)\, \mathrm{d}x,$$

onde $\delta(x)$ é a delta de Dirac.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, \mathrm{d}x = f(0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{e}^{-|x|} \cos(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-|0|} \cos(0) = 1 \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$