TEA010 Matemática Aplicada I
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 28 Jun 2019
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ________________________

1 [20] Considere a seguinte equação diferencial ordinária não linear:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = x^2; \qquad y(0) = 0.$$

Em princípio, ela não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser resolvida numericamente com facilidade com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Para a rotina padrão de solução com Runge-Kutta,

```
def rk4(x,y,h,ff):
   '''
   rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
   '''
   k1 = h*ff(x,y)
   k2 = h*ff(x+h/2,y+k1/2)
   k3 = h*ff(x+h/2,y+k2/2)
   k4 = h*ff(x+h,y+k3)
   yn = y + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
   return yn
```

basta escrever uma `ff` adequada. Escreva a `ff` que resolve a equação acima. **Indique a indentação cuidadosamente, com linhas verticais.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
def ff(x,y):
    return (x**2 - y**2)**(0.5)
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Encontre a solução geral de

$$x^2y'' - y = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Trata-se de uma equação de Euler; a solução é da forma

$$\begin{aligned} y &= x^r, \\ y' &= rx^{r-1}, \\ y'' &= (r-1)rx^{r-2} \Rightarrow \\ (r-1)rx^r - x^r &= 0, \\ r^2 - r - 1 &= 0, \\ r &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ y &= Ax^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + Bx^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \blacksquare \end{aligned}$$

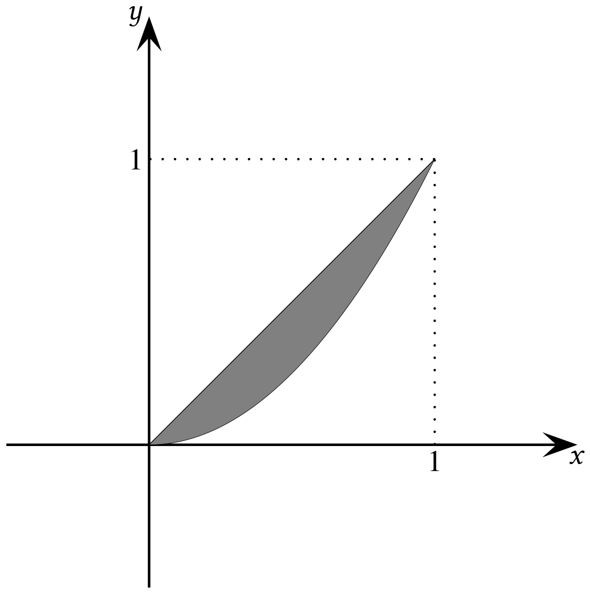
Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Calcule

$$I = \iint_R x \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

onde R é a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x$. **SUGESTÃO: DESENHE!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Eis o desenho:



A integral é

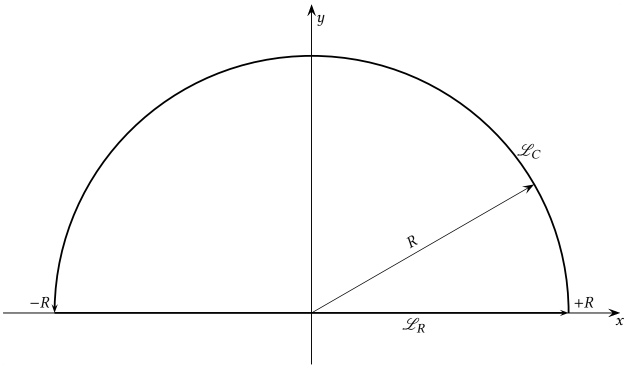
$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} x \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} x \left[x - x^2 \right] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \left[x^2 - x^3 \right] \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \blacksquare \end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Para a figura ao lado, prove **detalhadamente** que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z = 0,$$

onde $\mathscr{L}_C$ é o semicírculo mostrado, percorrido no sentido anti-horário.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
z &= R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};\\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta;\\
\left|\int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\mathscr{L}_C} \left|\frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right|\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \left|\frac{1}{1+(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^3}\,\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R}{|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}| &> |R^3|,\\
\frac{1}{|1+R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|} &< \frac{1}{|R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathscr{L}_C} \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R}{|R^3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}|}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{R^2} \longrightarrow 0 \text{ quando } R \longrightarrow 0 \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Para $a, b > 0$, $a \neq b$, calcule a transformada de Laplace inversa de

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s+b} \times \frac{1}{s+a}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Existem várias soluções possíveis. Uma delas é reconhecer:

$$\mathscr{L}\left\{\mathrm{e}^{-bt}\right\} = \frac{1}{s+b},$$

donde, pelo Teorema da Convolução,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+b} \times \frac{1}{s+a}\right\} &= \int_{\tau=0}^{t} \mathrm{e}^{-b(t-\tau)}\mathrm{e}^{-a\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}\right] \blacksquare\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$