TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P01, 10 Set 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Se X é uma variável aleatória continuamente distribuída, com f.d.p.

$$f_X(x) = Kx^2 e^{-x^2}, \qquad 0 \le x < \infty,$$

calcule K. O fato

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

pode ser útil.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\int_0^\infty K x^2 e^{-x^2}\, dx = 1.$$

Faça a substituição

$$\begin{aligned} x^2 &= t, \\ 2x\, dx &= dt, \\ dx &= \frac{dt}{2x} = \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2} t^{-1/2}\, dt. \end{aligned}$$

Obtenha

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K t e^{-t} \frac{1}{2} t^{-1/2}\, dt &= 1, \\ \frac{K}{2} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t}\, dt &= 1, \\ \frac{K}{2}\Gamma(3/2) &= 1, \\ K &= \frac{2}{\Gamma(3/2)}. \qquad \text{(questão certa se este ponto foi atingido)} \end{aligned}$$

Alguns se animaram:

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) &\Rightarrow (1/2)\Gamma(1/2) = \Gamma(3/2) \Rightarrow \\ K &= \frac{2}{(1/2)\Gamma(1/2)} = \frac{4}{\Gamma(1/2)}. \end{aligned}$$

E é mesmo possível lembrar que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$!

$$K = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [40] Considere a f.d.p. conjunta de X, Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \qquad 0 < x < y,\ 0 < y < 1.$$

a) [00] Esboce (== *desenhe*) *cuidadosamente* o domínio de variação de X e Y no plano xy.

b) [20] Calcule as f.d.p. marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

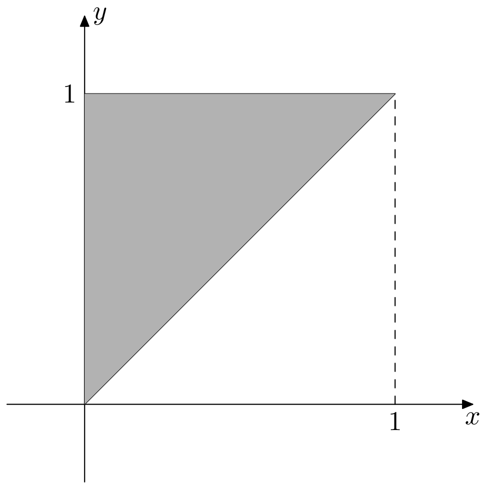
c) [10] Calcule a f.d.p. condicional $f_Y(y|X=x)$.

d) [10] X e Y são variáveis aleatórias independentes? *Justifique matematicamente.*

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a) A região de variação de X e Y é mostrada na figura ao lado. O desenho da figura é feito com MetaPost:

```
verbatimtex
%&latex
\documentclass{article}
\begin{document}
etex
beginfig(1) ;
drawarrow (-1cm,0)..(5cm,0) ;
drawarrow (0,-1cm)..(0,5cm) ;
path tria ;
tria = (0,0)--(4cm,4cm)--(0,4cm)--cycle ;
draw tria ;
fill tria withcolor 0.7 ;
draw (4cm,0)--(4cm,4cm) dashed evenly ;
label.bot(btex $x$ etex,(5cm,0));
label.rt(btex $y$ etex,(0,5cm));
label.lft(btex $1$ etex, (0,4cm));
label.bot(btex $1$ etex, (4cm,0));
endfig ;
end ;
```



Vale a pena verificar que

$$\iint_{xy} f_{X,Y}(x,y) = 1$$

usando MAXIMA:

```
(%i1) f : 8*x*y ;
(%o1)                          8 x y
(%i2) g : integrate(f,x,0,y);
                                  3
(%o2)                          4 y
(%i3) h : integrate(g,y,0,1);
(%o3)                            1
```

b) É muito importante *respeitar* a região de integração: olhe para a figura e entenda as integrais abaixo:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_y f_{XY}(x,y)\,dy \\ &= \int_{y=x}^{1} 8xy\,dy \\ &= 4x(1-x^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_x f_{XY}(x,y)\,dx \\ &= \int_{x=0}^{y} 8xy\,dx \\ &= 4y^3. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f_Y(y|X=x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{8xy}{4x(1-x^2)} \\ &= \frac{2y}{(1-x^2)}. \end{aligned}$$

d) Não:

$$f_X(x)f_Y(x) = 4x(1-x^2)4y^3 = 16xy^3(1-x^2) \neq 8xy = f_{XY}(x,y) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [30] Se X é uma variável aleatória com f.d.p.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \qquad -1 \le x \le 1,$$

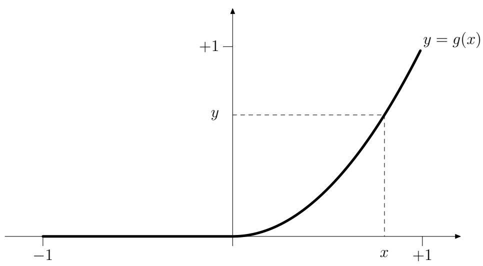
e $Y = g(X)$ é uma função de X dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

obtenha a f.d.a. de Y, $F_Y(y)$. *Não é uma boa idéia* tentar obter diretamente $f_Y(y)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Da figura ao lado,



$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{-1 \le X \le 0\} = 1/2, \\ F_Y(y) &= P\{Y \le y\} \\ &= 1/2 + P\{0 < Y \le y\} \\ &= 1/2 + P\{0 < X \le x\} \\ &= 1/2 + \int_0^x \frac{1}{2}\,dx \\ &= 1/2 + x/2 \\ &= (1 + \sqrt{y})/2 \blacksquare \end{aligned}$$

A figura desta questão também foi feita com MetaPost:

```
verbatimtex
%&latex
\documentclass[12pt]{article}
\usepackage{color}
\begin{document}
etex

input graph ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% unidade de medida
% ----------------------------------------------------------------------------
un = 5cm ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% define uma função a ser plotada
% ----------------------------------------------------------------------------
vardef sqrfun(expr x) = (x*x) enddef;
% ----------------------------------------------------------------------------
% começa a figura propriamente dita
% ----------------------------------------------------------------------------
beginfig(1) ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% faixa de variação de x
% ----------------------------------------------------------------------------
  xmin = -1 ;
  xmax = 1 ;
  xinc = 0.01 ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% this is an amazing trick:
% ----------------------------------------------------------------------------
  pickup pencircle scaled 2 pt ;
  path psqrf ;
  psqrf := (xmin*un,0*un)
  for x = xmin+xinc step xinc until -xinc:
    .. (x*un,0*un)
  endfor
  for x = 0 step xinc until xmax-xinc:
    .. (x*un,sqrfun(x)*un)
  endfor ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% plota a função
% ----------------------------------------------------------------------------
  draw psqrf withcolor black ;
% ----------------------------------------------------------------------------
% nomes das curvas
% ----------------------------------------------------------------------------
  label.urt(btex $y=g(x)$ etex, point 315 of psqrf) ;
% ----------------------------------------------------------------------------
```

Continue a solução no verso ⟹

```
% traça os eixos
% ------------------------------------------------------------------------------
  pickup pencircle scaled 0.5 pt ;
  drawarrow (-1.2*un,0)--(1.2*un,0) ;
  drawarrow (0,-0.05*un)--(0,1.2*un) ;
% ------------------------------------------------------------------------------
% dá números aos eixos
% ------------------------------------------------------------------------------
  draw (-1,0)*un--(-1,-0.05)*un ; label.bot(btex $-1$ etex,(-1,-0.05)*un) ;
  draw  (1,0)*un--(1,-0.05)*un ;  label.bot(btex $+1$ etex,(1, -0.05)*un) ;
  draw (0,1)*un--(-0.05,1)*un ;   label.lft(btex $+1$ etex,(-0.05,1)*un) ;
  draw (0,0.64)*un--(0.8,0.64)*un dashed evenly ; label.lft(btex $y$ etex,(-0.05,0.64)*un) ;
  draw (0.8,0.64)*un--(0.8,0)*un dashed evenly ; label.bot(btex $x$ etex,(0.8,-0.05)*un) ;
endfig ;

end.
```

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P02, 08 Ago 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] O engenheiro ambiental João Vaz ’Ão projetou um sistema de drenagem com uma capacidade máxima de escoamento (vazão) q para uma probabilidade de *falha* de 10%, ou seja: $P\{Q > q\} = 0{,}1$, onde Q é a máxima vazão instantânea afluente ao sistema de drenagem ao longo de um ano qualquer. Para isto, João Vaz supôs uma distribuição $F_Q(q)$ e também que as vazões máximas em anos distintos são *independentes*.
Durante os 4 anos seguintes, o sistema falhou.

a) [15] Calcule a probabilidade do evento acima (falha em 4 anos sucessivos) ocorrer.

b) [15] Faça uma análise da adequação do projeto de João Vaz, *usando no máximo 50 palavras*: explique se o projeto é adequado ou não, e por quê.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Como os eventos são independentes,

$$
\begin{aligned}
P\{Q_1 > q \wedge Q_2 > q \wedge Q_3 > q \wedge Q_4 > q\} &= \\
P\{Q_1 > q\} \times P\{Q_2 > q\} \times \{Q_3 > q\} \times \{Q_4 > q\} &= \\
P\{Q > q\}^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 &= \frac{1}{10000} \blacksquare
\end{aligned}
$$

b) Se a distribuição $F_Q(q)$ usada por João Vaz for verdadeira, a probabilidade de ocorrência do evento “4 falhas em 4 anos” é extremamente baixa. Em outras palavras, é *improvável* que a $F_Q(q)$ usada seja um bom modelo probabilístico; é muito mais provável que João Vaz tenha utilizado uma distribuição que *subestima* q: o sistema deve estar sub-dimensionado.

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Dadas as 5 propriedades clássicas de um produto interno em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$):

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*, \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle, \\
\langle \boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y} \rangle &= \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &\geq 0, \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= 0 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},
\end{aligned}
$$

verifique se

$$
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k)
$$

é um produto interno legítimo em $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$. Sua resposta deve ser justificada *matematicamente* — não vale só responder "sim" ou "não".

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Verificação item a item:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k^*)^*(x_k y_k^*)^* \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(x_k y_k^*)(x_k y_k^*)]^* \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (y_k^* x_k)(y_k^* x_k) \right]^* \\
&= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*; \qquad \checkmark \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \sum_{k=1}^{n} (x_k^*[y_k + z_k])(x_k^*[y_k + z_k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(x_k^* y_k) + (x_k^* z_k)]\,[(x_k^* y_k) + (x_k^* z_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(x_k^* y_k)(x_k^* y_k) + 2(x_k^* y_k)(x_k^* z_k) + (x_k^* z_k)(x_k z_k)] \\
&\neq \sum_{k=1}^{n} (x_k^* y_k)(x_k^* y_k) + \sum_{k=1}^{n} (x_k^* z_k)(x_k^* z_k) = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle. \qquad ✗
\end{aligned}
$$

Portanto, a operação definida acima, apesar da notação $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, não é um produto interno legítimo.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^{-x}$, obtenha a série de Fourier trigonométrica (em senos e cossenos) da extensão ímpar de f.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Desejamos

$$f_I(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L} \right],$$

onde $L = 2$; além disso, já sabemos que $A_n = 0$. O cálculo dos B_n's é

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi n x}{L}\, dx \\ &= \frac{4}{2} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(\pi n x)\, dx \\ &= 2 \int_0^1 e^{-x} \operatorname{sen}(\pi n x)\, dx \end{aligned}$$

Com MAXIMA,

$$B_n = -\frac{2\, e^{-1}\, \pi\, n\, \left((-1)^n - e\right)}{\pi^2\, n^2 + 1} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P03, 29 Out 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [30] Obtenha a função de Green da equação diferencial

$$
\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} + y &= f(x),\\
y(0) &= y_0.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A pré-multiplicação direta por $G(x,\xi)$ produz

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\xi\frac{dy}{d\xi} + G(x,\xi)y(\xi) &= G(x,\xi)f(\xi),\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\xi\frac{dy}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)y(\xi)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

mas isto é complicado de integrar por partes por causa do ξ "a mais" na primeira integral à esquerda. Isto sugere voltar um pouco e re-escrever a equação diferencial:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} &= \frac{f(x)}{x},\\
y(0) &= y_0.
\end{aligned}
$$

Re-começando,

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi} + G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi} &= G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi},\\
\int_0^\infty G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi}\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Apesar da aparente singularidade em $\xi = 0$, nós prosseguimos com fé: integrando por partes a primeira integral à esquerda (agora sim!),

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty y(\xi)\frac{dG(x,\xi)}{d\xi}\,d\xi + \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{y(\xi)}{\xi}\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,0)y_0 + \int_0^\infty y(\xi)\left[-\frac{dG(x,\xi)}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\right]d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Impondo

$$
\begin{aligned}
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) &= 0,\\
-\frac{dG(x,\xi)}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi} &= \delta(\xi - x),
\end{aligned}
$$

nós prosseguimos com

$$
\begin{aligned}
-G(x,0)y_0 + \int_0^\infty y(\xi)\delta(\xi - x)\,d\xi &= \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi,\\
y(x) &= G(x,0)y_0 + \int_0^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

Precisamos resolver o problema adjunto. Devido ao ξ no denominador da equação diferencial para G, não é uma boa idéia tentar transformada de Laplace — pelo menos à primeira vista. Façamos $G(x,\xi) = U(x,\xi)V(x,\xi)$, e substituamos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d(UV)}{d\xi} + \frac{UV}{\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-\left[U\frac{dV}{d\xi} + V\frac{dU}{d\xi}\right] + \frac{UV}{\xi} &= \delta(\xi - x)\\
U\left[-\frac{dV}{d\xi} + \frac{V}{\xi}\right] - V\frac{dU}{d\xi} &= \delta(\xi - x)\\
-\frac{dV}{d\xi} &= -\frac{V}{\xi},\\
\frac{dV}{V} &= \frac{d\xi}{\xi},\\
\int_{V(x,0)}^{V(x,\xi)} \frac{dV'}{V'} &= \int_{\eta=0}^{\xi} \frac{d\eta}{\eta},\\
\ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,0)} &= \ln\frac{\xi}{0}.
\end{aligned}
$$

Temos um problema! A integração com limites definidos não "funciona" para V, por conta da singularidade deste integrando. Vamos continuar tentando, com outra abordagem: calcular integrais indefinidas com constantes arbitrárias. Note como as "constantes arbitrárias" são no caso mais geral função da "outra" variável, x:

$$
\begin{aligned}
\ln|V| &= \ln|\xi| + \ln|C_0(x)|,\\
|V| &= |C_0(x)\xi|,\\
V &= \pm C_0(x)\xi = C(x)\xi \qquad \Rightarrow\\
-C(x)\xi\frac{dU}{d\xi} &= \delta(\xi - x),\\
-C(x)\frac{dU}{d\xi} &= \frac{\delta(\xi - x)}{\xi},\\
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= \int_0^{\xi} \frac{\delta(\eta - x)}{\eta}\, d\eta.
\end{aligned}
$$

Por coerência, a integral para $dU/d\xi$ também foi indefinida; por conveniência, a constante de integração é $-C_1(x)$. A integral do lado direito não parece ser tão problemática:

$$
\begin{aligned}
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= \int_0^{\xi} \frac{\delta(\eta - x)}{\eta}\, d\eta,\\
-C(x)\left[U(x,\xi) - C_1(x)\right] &= H(\xi - x)\frac{1}{x}\\
U(x,\xi) &= C_1(x) - \frac{1}{C(x)}H(\xi - x)\frac{1}{x} \qquad \Rightarrow\\
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi) = \left[C_1(x) - \frac{1}{C(x)}H(\xi - x)\frac{1}{x}\right]C(x)\xi\\
&= \left[C(x)C_1(x) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi\\
&= \left[D(x) - \frac{H(\xi - x)}{x}\right]\xi.
\end{aligned}
$$

Agora a condição de contorno

$$
\lim_{\xi\to\infty} G(x,\xi) = 0
$$

não "dá certo", pois $\xi \to \infty$, *a não ser* que o termo entre colchetes se anule neste limite, o que é possível se

$$
D(x) = \frac{1}{x};
$$

neste caso,

$$
G(x,\xi) = \left[1 - H(\xi - x)\right]\frac{\xi}{x} \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [30] Fazendo $u(x,t) = X(x)T(t)$, resolva

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= u\frac{\partial u}{\partial x}\\
u(0,t) &= 0,\\
u(1,0) &= 1.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[XT] &= XT\frac{\partial}{\partial x}[XT];\\
X\frac{dT}{dt} &= XT^2\frac{dX}{dx};\\
\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt} &= \frac{dX}{dx} = c_1;
\end{aligned}
$$

Encontro primeiramente T:

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{T^2} &= c_1 dt;\\
-\frac{1}{T} &= c_1 t + c_2;\\
T &= -\frac{1}{c_1 t + c_2};
\end{aligned}
$$

e em seguida X:

$$
X(x) = c_1 x + c_3.
$$

A forma geral da solução é

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= X(x)T(t)\\
&= -\frac{c_1 x + c_3}{c_1 t + c_2}\\
&= -\frac{x + c_3/c_1}{t + c_2/c_1}\\
&= -\frac{x+b}{t+a},
\end{aligned}
$$

e há apenas dois graus de liberdade (duas constantes) para determinar, que são

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = 0 &\Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0;\\
u(1,0) = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a = -1\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [40] Resolva o problema de valor inicial

$$3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = xy,$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O método das características se impõe. Se

$$x = X(s),$$
$$y = Y(s),$$

são as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^2$,

$$u = u(x,y) = u(X(s),Y(s)) = U(s),$$

isto é: $u = U(s)$ é uma *nova* função de s. Escrevemos agora lado a lado a equação diferencial parcial original e a derivada total de U:

$$xy = 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{dX}{ds} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{dY}{ds}.$$

Deste par, obtemos 3 equações ordinárias:

$$\frac{dX}{ds} = 3X(s), \qquad X(0) = \xi,$$
$$\frac{dY}{ds} = 3, \qquad Y(0) = 0,$$
$$\frac{dU}{ds} = X(s)Y(s), \qquad U(0) = u(\xi,0) = e^{-\xi^2}.$$

Que merecem ser integradas:

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{X} &= 3ds,\\
\ln\frac{X}{\xi} &= 3s,\\
X &= \xi e^{3s};\\
Y &= 3s;\\
\frac{dU}{ds} &= \xi e^{3s}3s,\\
U(s) - U(0) &= 3\xi\int_0^s ze^{3z}\,dz\\
&= \frac{((3s-1)e^{3s}+1)\xi}{3}.
\end{aligned}$$

Recuperamos agora as variáveis originais:

$$\begin{aligned}
s &= y/3,\\
\xi &= x/e^{3s} = x/e^y;\\
u(x,y) = U(s) &= U(0) + \frac{((3s-1)e^{3s}+1)\xi}{3}\\
&= e^{-\xi^2} + \frac{((3s-1)e^{3s}+1)\xi}{3}\\
&= e^{-(x/e^y)^2} + \frac{((y-1)e^y+1)\,\frac{x}{e^y}}{3}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
P04, 03 Dez 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Sejam X_1 e X_2 os resultados do lançamento de dois dados não-viciados: X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes. Seja

$$Y = \max\{X_1, X_2\}.$$

Calcule as *seis* probabilidades

$$P\{Y = n\}, \qquad n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O problema é suficientemente pequeno para ser resolvido por enumeração:

$$
\begin{aligned}
&Y = 1 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,1)\\
&Y = 2 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,2) \vee (2,1) \vee (2,2)\\
&Y = 3 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,3) \vee (2,3) \vee (3,3) \vee (3,1) \vee (3,2)\\
&Y = 4 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,4) \vee (2,4) \vee (3,4) \vee (4,4) \vee (4,1) \vee (4,2) \vee (4,3)\\
&Y = 5 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,5) \vee (2,5) \vee (3,5) \vee (4,5) \vee (5,5) \vee (5,1) \vee (5,2) \vee (5,3) \vee (5,4)\\
&Y = 6 \Rightarrow (X_1, X_2) = (1,6) \vee (2,6) \vee (3,6) \vee (4,6) \vee (5,6) \vee (6,6) \vee (6,1) \vee (6,2) \vee (6,3) \vee (6,4) \vee (6,5)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
P\{Y = 1\} &= 1/36\\
P\{Y = 2\} &= 3/36\\
P\{Y = 3\} &= 5/36\\
P\{Y = 4\} &= 7/36\\
P\{Y = 5\} &= 9/36\\
P\{Y = 6\} &= 11/36 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Seja $f(x)$ uma função *complexa* da variável real x; então valem as seguintes relações com a transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{+ikx}\,dk, && (\star)\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_{k=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{f}(k)e^{+ikx}\,dk, && (\star\star)\\
f^*(x) &= \int_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}^*(l)e^{-ilx}\,dl. && (\star\star\star)
\end{aligned}
$$

Sabendo que

$$
\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,dx,
$$

e utilizando $(\star\star)$ e $(\star\star\star)$ para substituir $\partial f/\partial x$ e $f^*(x)$ na integral a seguir, obtenha $G(k)$ em

$$
-\frac{i}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f^*(x)\frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int_{k=-\infty}^{+\infty} G(k)\,dk,
$$

onde $G(k)$ deve ser expresso em função de k e de $\widehat{f}(k)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{-i}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f^*(x)\frac{\partial f}{\partial x}\,dx &= \frac{-i}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{l=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}^*(l)e^{-ilx}\,dl \int_{k=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{f}(k)e^{+ikx}\,dk\,dx\\
&= \frac{-i}{2\pi}\int_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{l=-\infty}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(l)e^{ikx}e^{-ilx}\,dx\,dl\,dk\\
&= -i^2\int_{k=-\infty}^{+\infty} k\widehat{f}(k)\int_{l=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}^*(l)\frac{1}{2\pi}\int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{-i(l-k)x}\,dx\,dl\,dk\\
&= \int_{k=-\infty}^{+\infty} k\widehat{f}(k)\int_{l=-\infty}^{\infty}\widehat{f}^*(l)\delta(l-k)\,dl\,dk\\
&= \int_{k=-\infty}^{+\infty} k\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k)\,dk \qquad \Rightarrow\\
G(k) &= k\widehat{f}(k)\widehat{f}^*(k) \;\blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

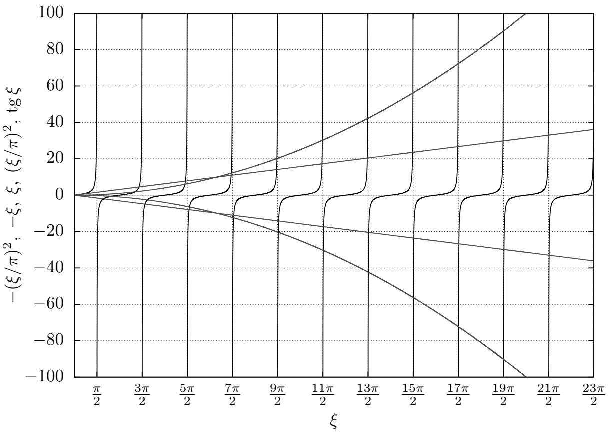
3 [25] Dado o problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) - y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0,$$

a) [10] Discuta os sinais de λ.

b) [10] Obtenha a equação transcendental (neste caso, uma equação que não pode ser resolvida analiticamente) para λ_n.

c) [5] Com o auxílio da figura ao lado, obtenha sua melhor estimativa numérica para $\lambda_5, \lambda_6, \ldots, \lambda_{10}$ (em outras palavras, para n "grande", $\lambda_n \sim$?): você pode, e *deve*, deixar os valores de π indicados.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Discutimos os sinais:
$\lambda < 0$:

$$y(x) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x),$$
$$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left[B\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + A\,\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}x)\right].$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$A - \sqrt{-\lambda}B = 0,$$
$$\cosh(\sqrt{-\lambda})A + \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda})B = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{-\lambda} \\ \cosh(\sqrt{-\lambda}) & \mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para termos $(A, B) \neq (0, 0)$, é necessário que

$$\mathrm{senh}(\sqrt{-\lambda}) + \sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Para economizar lápis: $\xi = \sqrt{-\lambda}$, e

$$\mathrm{senh}\,\xi + \xi\cosh\xi = 0$$
$$\mathrm{tgh}\,\xi = -\xi,$$

cuja única solução é $x = 0$, o que contraria a hipótese original.
$\lambda = 0$:

$$y = Ax + B,$$
$$y' = A$$

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$-A + B = 0,$$
$$A + B = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o determinante do sistema é -2, e a única solução possível é a trivial, $A = B = 0$, que não gera nenhuma autofunção.
Como já desconfiávamos, só nos resta $\lambda > 0$:

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$
$$y'(x) = \sqrt{\lambda}\left[-A\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]$$

Continue a solução no verso ⟹

O par de equações que precisamos resolver para atender as condições de contorno é

$$A - \sqrt{\lambda} B = 0,$$
$$\cos(\sqrt{\lambda})A + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda})B = 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{\lambda} \\ \cos(\sqrt{\lambda}) & \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, impondo que o determinante seja nulo para permitir $A \neq 0$ e/ou $B \neq 0$ (e fazendo novamente $\xi = \sqrt{\lambda}$:

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}) + \sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}) = 0$$
$$\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}) = -\sqrt{\lambda_n},$$
$$\operatorname{tg}\xi = -\xi$$

O `script` de Gnuplot a seguir mostra a solução "gráfica" dos primeiros autovalores:

```
set terminal epslatex color standalone font 'default' 10 header '\input{math.tex}'
set xrange [0:23*pi/2]
set yrange [-100:100]
f(x) = tan(x)
g1(x) = x
g2(x) = (x/pi)**2
h1(x) = -x
h2(x) = -(x/pi)**2
set xtics ( '$\frac{\pi}{2}$' pi/2,\
            '$\frac{3\pi}{2}$' 3*pi/2,\
            '$\frac{5\pi}{2}$' 5*pi/2,\
            '$\frac{7\pi}{2}$' 7*pi/2,\
            '$\frac{9\pi}{2}$' 9*pi/2,\
            '$\frac{11\pi}{2}$' 11*pi/2,\
            '$\frac{13\pi}{2}$' 13*pi/2,\
            '$\frac{15\pi}{2}$' 15*pi/2,\
            '$\frac{17\pi}{2}$' 17*pi/2,\
            '$\frac{19\pi}{2}$' 19*pi/2,\
            '$\frac{21\pi}{2}$' 21*pi/2,\
            '$\frac{23\pi}{2}$' 23*pi/2 )
set ytics -100,20
set format y '$%3.0f$'
set lmargin 8
set xlabel '$\xi$'
set ylabel '$-(\xi/\pi)^2,\; -\xi,\; \xi,\; (\xi/\pi)^2$, $\tg \xi$' offset 3
set output '2010-2-p04-c.tex'
set grid
set xzeroaxis lt 1 lw 1 lc rgb 'gray50'
set samples 10000
plot f(x) notitle with lines lt 1 lw 2 lc rgb 'black' , \
     g1(x) notitle with lines lt 1 lw 2 lc rgb 'gray30', \
     g2(x) notitle with lines lt 1 lw 2 lc rgb 'gray30', \
     h1(x) notitle with lines lt 1 lw 2 lc rgb 'gray30', \
     h2(x) notitle with lines lt 1 lw 2 lc rgb 'gray30'
     exit
```

Do gráfico, vemos claramente que, para $n \geq 5$,

$$\xi_n \approx (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow$$
$$\sqrt{\lambda_n} \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\lambda_n \approx (2n+1)^2\frac{\pi^2}{4};$$

Então,

$$\lambda_5 \approx \frac{121\pi^2}{4},$$
$$\lambda_6 \approx \frac{169\pi^2}{4},$$
$$\lambda_7 \approx \frac{225\pi^2}{4},$$
$$\lambda_8 \approx \frac{289\pi^2}{4},$$
$$\lambda_9 \approx \frac{361\pi^2}{4},$$
$$\lambda_{10} \approx \frac{441\pi^2}{4} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Resolva a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},$$

com condições inicial e de contorno

$$\begin{aligned}\phi(x,0) &= \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right),\\ \phi(0,t) &= 0,\\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(L,t) &= 0.\end{aligned}$$

Ei! Você pode usar as fórmulas ao lado (se forem, e as que forem, úteis) sem demonstração.

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2\frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)dx = \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = 0, \qquad n>1$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) = \frac{4L(-1)^{n-1}}{3\pi+4\pi n-4\pi n^2}$$

$$\int_0^L \cos\frac{\pi x}{L}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) = \frac{2(2n-1)(-1)^nL}{\pi(2n-3)(2n+1)}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Faça $\phi = X(x)T(t)$:

$$\begin{aligned}XT' &= a^2X''T,\\ \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda.\end{aligned}$$

É evidente que há um problema de Sturm-Liouville nos esperando em X, mas ganharemos um pouco de tempo resolvendo em T primeiro, e raciocinando fisicamente:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\lambda a^2T,\\ \frac{dT}{T} &= -\lambda a^2\,dt\\ \ln\frac{T}{T_0} &= -\lambda a^2t\\ T(t) &= T_0\exp(-\lambda a^2t).\end{aligned}$$

É evidente que não podemos deixar que a solução exploda para $t\to\infty$: $\lambda<0$ não é aceitável; $\lambda=0$ também não funciona, porque neste caso a solução permaneceria constante (é evidente que o perfil inicial $\phi(x,0)$ deve se abater, forçado pela condição de contorno esquerda). Segue-se que $\lambda>0$. Além disto, sem perda de generalidade faremos $T_0=1$. O problema de Sturm-Liouville em X é

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda X = 0,$$

$$\begin{aligned}X(0) &= 0,\\ \frac{dX}{dx}(L) &= 0.\end{aligned}$$

A solução geral é

$$\begin{aligned}X(x) &= A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x),\\ \frac{dX}{dx} &= \sqrt{\lambda}\left[-A\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)+B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right].\end{aligned}$$

A condição de contorno esquerda (em $x=0$) impõe $A=0$; a condição de contorno direita (em $x=L$) impõe

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{\lambda}L) &= 0,\\ \sqrt{\lambda_n}L &= (2n-1)\frac{\pi}{2},\\ \lambda_n &= \left(\frac{2n-1}{L}\right)^2\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

As autofunções são

$$\phi_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right).$$

Continue a solução no verso ⟹

A solução do problema de Sturm-Liouville dá conta das condições de contorno, e agora nós nos voltamos para a condição inicial. A solução geral deve ser da forma

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \exp\left(-\frac{(2n-1)^2 a^2 \pi^2 t}{4}\right).$$

Para atender à condição inicial, devemos ter

$$\begin{aligned}
\phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \\
\phi_0 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) dx \\
\phi_0 \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\right) dx &= B_m \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) dx \qquad \Rightarrow \\
B_m &= \frac{2}{L} \frac{4\phi_0 L(-1)^n}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2} \\
&= \frac{8\phi_0(-1)^n}{3\pi + 4\pi n - 4\pi n^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental
UFPR
F, 17 Dez 2010
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [20] A *mediana* de uma distribuição de probabilidade com função densidade de probabilidade contínua é o valor x_m tal que $P\{X \le x_m\} = 1/2$. Calcule a mediana da distribuição de Pareto, cuja f.d.p. é

$$f_X(x) = \theta x_0^\theta x^{-(1+\theta)}, \qquad x_0 \ge 0, \qquad \theta \ge 0, \qquad x \ge x_0.$$

ATENÇÃO: preste muita atenção ao domínio da $f_X(x)$: $x \ge x_0$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_m} \theta x_0^\theta x^{-(1+\theta)}\,dx &= \frac{1}{2},\\
\theta x_0^\theta \int_{x_0}^{x_m} x^{-(1+\theta)}\,dx &= \frac{1}{2},\\
\theta x_0^\theta \left.\frac{x^{-1-\theta+1}}{-1-\theta+1}\right|_{x_0}^{x_m} &= \frac{1}{2}\\
\frac{\theta x_0^\theta}{-\theta}\left[x_m^{-\theta} - x_0^{-\theta}\right] &= \frac{1}{2},\\
x_0^\theta\left[x_m^{-\theta} - x_0^{-\theta}\right] &= -\frac{1}{2},\\
\left(\frac{x_m}{x_0}\right)^{-\theta} - 1 &= -\frac{1}{2},\\
\left(\frac{x_m}{x_0}\right)^{-\theta} &= \frac{1}{2},\\
\left(\frac{x_m}{x_0}\right)^{\theta} &= 2,\\
\frac{x_m}{x_0} &= 2^{\frac{1}{\theta}},\\
x_m &= x_0 2^{\frac{1}{\theta}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Obtenha a série de Fourier da *extensão ímpar* de $f(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A série de Fourier da *extensão ímpar* $f_I(x)$ de $f(x)$ contém apenas senos:

$$f_I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L}$$

Como f está definida entre 0 e 1, f_I estará definida entre -1 e 1, donde $L = 2$. Teremos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L}\,dx \\ &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} f_I(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{2}\,dx \\ &= 2 \int_{0}^{1} f_I(x) \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\ &= 2 \int_{0}^{1/2} \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx. \end{aligned}$$

Calculo a integral com MAXIMA:

```
(%i1) declare( [n],integer) ;
(%o1)                              done
(%i2) 2*integrate(sin(n*%pi*x),x,0,1/2);
                                          %pi n
                                      cos(-----)
                                1             2
(%o2)                        2 (----- - ----------)
                               %pi n      %pi n
(%i3) factor(%);
                                     %pi n
                               2 (cos(-----) - 1)
                                       2
(%o3)                         - ------------------
                                     %pi n
```

e obtenho

$$B_n = \frac{2}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{2}\right) \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

3 [20] Utilizando a definição estabelecida no curso, calcule a transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{x}{|x|}, & 0 < |x| \le 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

ATENÇÃO: $f(x)$ é trivial! Quanto vale $x/|x|$ quando $x > 0$? E quando $x < 0$? Quanto vale $f(x)$ quando $|x| > 1$? Desenhe $f(x)$, se isto for útil para você.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ -1 & -1 \le x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & 0 < x \le 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^{0} -e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{1} e^{-ikx}\, dx \right] \end{aligned}$$

Com MAXIMA:

```
(%i1) i1 : integrate(exp(-%i*k*x),x,-1,0);
                                       %i k
                              %i    %i %e
(%o1)                         -- - ---------
                              k        k
(%i2) i2 : integrate(exp(-%i*k*x),x,0,1);
                                  - %i k
                             %i %e          %i
(%o2)                        ----------- - --
                                  k          k
(%i3) i2 - i1 ;
                           %i k          - %i k
                       %i %e        %i %e          2 %i
(%o3)                  --------- + ----------- - ----
                           k            k           k
```

donde

$$\widehat{f}(k) = \frac{i}{2\pi k} \left[e^{ik} + e^{-ik} - 2 \right] \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [20] Obtenha a função de Green de

$$x\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{x}{L}\right)y = f(x), \quad y(1) = y_1,$$

onde L é uma constante, e $f(x)$ é o forçante do sistema. **Atenção: este problema tem condição inicial em $x = 1$: todas as integrais devem ser entre 1 e ∞.**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Como sempre,

$$\begin{aligned}
G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi} + \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)y &= G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi},\\
\int_1^\infty G(x,\xi)\frac{dy}{d\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\xi)y(\xi)\Big|_{\xi=1}^{\xi=\infty} - \int_1^\infty y\frac{dG}{d\xi}\,d\xi + \int_1^\infty \frac{G(x,\xi)}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)y\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi\\
G(x,\infty)y(\infty) - G(x,1)y_1 + \int_1^\infty \left[-\frac{dG}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right]y(\xi)\,d\xi &= \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi
\end{aligned}$$

Agora escolhemos

$$\begin{aligned}
G(x,\infty) &= 0,\\
\left[-\frac{dG}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)G(x,\xi)\right] &= \delta(\xi - x),
\end{aligned}$$

e re-escrevemos

$$y(x) = G(x,1)y_1 + \int_1^\infty G(x,\xi)\frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Para resolver a equação diferencial em G, fazemos

$$\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi),\\
-U\frac{dV}{d\xi} - V\frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)UV &= \delta(\xi - x),\\
U\left[-\frac{dV}{d\xi} + \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)V\right] - V\frac{dU}{d\xi} &= \delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Como sempre, anulamos o colchete:

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{d\xi} &= \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)V,\\
\frac{dV}{V} &= \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\xi}{L}\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Como queremos $V(x,\xi)$, mudamos a variável de integração para *qualquer coisa* (por exemplo, z), e integramos a partir de $z = 1$ até $z = \xi$:

$$\begin{aligned}
\int_{V(x,1)}^{V(x,\xi)} \frac{dV}{V} &= \int_1^\xi \left[\frac{dz}{z} - \frac{dz}{L}\right],\\
\ln\frac{V(x,\xi)}{V(x,1)} &= \ln\frac{\xi}{1} - \frac{\xi - 1}{L},\\
\ln V(x,\xi) &= \ln\xi - \frac{\xi - 1}{L} + \ln V(x,1),\\
V(x,\xi) &= V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L}.
\end{aligned}$$

Ficamos agora com

$$\begin{aligned}
-V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L}\frac{dU}{d\xi} &= \delta(\xi - x),\\
\frac{dU}{d\xi} &= -\frac{1}{V(x,1)\xi}e^{(\xi-1)/L}\delta(\xi - x).
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Novamente, mudo de ξ para z e integro de 1 a ξ:

$$
\begin{aligned}
U(x,\xi) &= U(x,1) - \frac{1}{V(x,1)} \int_1^{\xi} \frac{e^{(z-1)/L}}{z} \delta(z-x)\, dz, \\
&= U(x,1) - \frac{H(\xi-x)}{V(x,1)} \frac{e^{(x-1)/L}}{x}.
\end{aligned}
$$

Isto agora nos dá a função de Green:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= U(x,\xi)V(x,\xi) \\
&= \left[U(x,1) - \frac{H(\xi-x)}{V(x,1)} \frac{e^{(x-1)/L}}{x} \right] V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L} \\
&= U(x,1)V(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L} - H(\xi-x)\frac{\xi}{x} e^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}} \\
&= G(x,1)\xi e^{-(\xi-1)/L} - H(\xi-x)\frac{\xi}{x} e^{\frac{(x-1)-(\xi-1)}{L}} \\
&= \xi e^{-(\xi-1)/L} \left[G(x,1) - H(\xi-x)\frac{e^{(x-1)/L}}{x} \right].
\end{aligned}
$$

Fazemos agora

$$
G(x,1) = \frac{e^{(x-1)/L}}{x},
$$

e retornamos:

$$
\begin{aligned}
G(x,\xi) &= \xi e^{-(\xi-1)/L} \left[1 - H(\xi-x) \right] \frac{e^{(x-1)/L}}{x}, \\
&= \frac{\xi}{x} e^{-\frac{\xi-x}{L}} \left[1 - H(\xi-x) \right] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

5 [20] Considere a equação não-linear de Boussinesq, em coordenadas polares e com simetria radial,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rh\frac{\partial h}{\partial r}\right],$$

com condições de contorno

$$h(r_0,t) = 0,$$
$$\frac{\partial h}{\partial r}(r_1,t) = 0.$$

Faça $h(r,t) = R(r)T(t)$ e separe as variáveis. Encontre as equações diferenciais ordinárias em T e em R. **Pare por aí!**

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$R\frac{dT}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rRT\frac{dRT}{dr}\right],$$
$$\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left[rR\frac{dR}{dr}\right] = a.$$

Equação em t:

$$T^{-2}\frac{dT}{dt} = a.$$

Equação em R:

$$\frac{d}{dr}\left[rR\frac{dR}{dr}\right] = arR.$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$