TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 05 set 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [30] Dada a equação de difusão em coordenadas polares com simetria radial,

$$
\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right),
$$

discretize-a, utilizando o esquema de Crank-Nicholson (implícito, $\mathscr{O}(\Delta t^2)$).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t} &= \frac{D}{r_i}\frac{\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\Big|_{i+1/2} - \left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\Big|_{i-1/2}}{\Delta r} \\
&= \frac{D}{r_i}\frac{\left(r_{i+1/2}\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta r}\right) - \left(r_{i-1/2}\frac{\phi_i-\phi_{i-1}}{\Delta_r}\right)}{\Delta r} \\
&= \frac{D}{r_i}\left[\frac{r_{i+1/2}(\phi_{i+1}-\phi_i) - r_{i-1/2}(\phi_i-\phi_{i-1})}{\Delta r^2}\right].
\end{aligned}
$$

Na expressão acima, é mais ou menos óbvio que

$$
\begin{aligned}
r_{i+1/2} &= \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \\
r_{i-1/2} &= \frac{r_i + r_{i-1}}{2}.
\end{aligned}
$$

Entretanto, nós ainda não especificamos os instantes em que as derivadas espaciais são calculadas, e Crank-Nicholson consiste em tirar uma média dessas entre n e $n+1$, para atingir $\mathscr{O}(\Delta t^2)$; portanto,

$$
\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t} = \frac{D}{2r_i}\left[\frac{r_{i+1/2}(\phi_{i+1}^{n+1}-\phi_i^{n+1}) - r_{i-1/2}(\phi_i^{n+1}-\phi_{i-1}^{n+1})}{\Delta r^2}\right] + \frac{D}{2r_i}\left[\frac{r_{i+1/2}(\phi_{i+1}^{n}-\phi_i^{n}) - r_{i-1/2}(\phi_i^{n}-\phi_{i-1}^{n})}{\Delta r^2}\right] \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [30] Considere o conjunto $\mathbb{V}$ dos pares ordenados (x, z), onde $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Considere o campo escalar $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Se $\boldsymbol{u} = (x_1, z_1) \in \mathbb{V}$; $\boldsymbol{v} = (x_2, z_2) \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, defina as operações

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &\equiv (x_1 + x_2, z_1 + z_2);\\
\alpha \boldsymbol{u} &\equiv ((\operatorname{Re}\alpha) x_1, \alpha z_1),
\end{aligned}
$$

onde Re significa “parte real”. Os 8 axiomas que definem um espaço vetorial estão ao lado: verifique-os um a um (2,5 pontos para cada verificação: **faça todas!**), e conclua: $\mathbb{V}$ é ou não é um espaço vetorial? (10 pontos para a resposta certa)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u};\\
\boldsymbol{u} + [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}] &= [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] + \boldsymbol{w};\\
\exists^* \boldsymbol{0} \in \mathbb{V} \mid \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{u},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V};\\
\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V},\ \exists^*[-\boldsymbol{u}] \in \mathbb{V} \mid \boldsymbol{u} + [-\boldsymbol{u}] &= \boldsymbol{0};\\
1\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V};\\
\alpha(\beta \boldsymbol{u}) &= (\alpha\beta)\boldsymbol{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{V};\\
\alpha[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] &= \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V};\\
(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} &= \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}.
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

i) Pela comutatividade da soma em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, ✓.

ii) Pela associatividade da soma em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, ✓.

iii) Se

$$
\boldsymbol{0} = (0, 0 + \mathrm{i}0) \Rightarrow (x, z) + (0, 0 + \mathrm{i}0) = (x, z) \qquad \forall (x, z). \qquad ✓
$$

iv) Faça $-\boldsymbol{u} = (-x, -z)$; então:

$$
(-x, -z) + (x, z) = (0, 0 + \mathrm{i}0). \qquad ✓
$$

v)

$$
(1 + \mathrm{i}0)(x, z) = ((\operatorname{Re} 1)x, (1 + \mathrm{i}0)z) = (x, z). \qquad ✓
$$

vi) Este aqui é mais sutil! Dados 2 números complexos

$$
\alpha = a_x + \mathrm{i}a_y, \qquad \beta = b_x + \mathrm{i}b_y,
$$

teremos

$$
\alpha\beta = (a_x b_x - a_y b_y) + \mathrm{i}(a_x b_y + a_y b_x)
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
(\beta \boldsymbol{u}) &= (b_x x, \beta z);\\
\alpha(\beta \boldsymbol{u}) &= (a_x b_x x, \alpha\beta z);\\
(\alpha\beta)\boldsymbol{u} &= ((a_x b_x - a_y b_y)x, \alpha\beta z). \qquad ✗
\end{aligned}
$$

$\mathbb{V}$ não é um espaço vetorial. Mas continuamos, pois queremos todos os pontos da questão!

vii)

$$
\begin{aligned}
\alpha[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] &= \alpha[(x_1, z_1) + (x_2, z_2)] = \alpha[(x_1 + x_2, z_1 + z_2)] =\\
&((\operatorname{Re}\alpha)(x_1 + x_2) + \alpha(z_1 + z_2)) = ((\operatorname{Re}\alpha)x_1, \alpha z_1) + ((\operatorname{Re}\alpha)x_2, \alpha z_2). \qquad ✓
\end{aligned}
$$

viii)

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} &= (\alpha + \beta)(x, z) = ((\operatorname{Re}(\alpha + \beta))x, (\alpha + \beta)z) =\\
&((\operatorname{Re}\alpha)x + (\operatorname{Re}\beta)x, \alpha z + \beta z) = ((\operatorname{Re}\alpha)x, \alpha z) + ((\operatorname{Re}\beta)x, \beta z). \qquad ✓
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [40] Analise a estabilidade do esquema de diferenças

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right);$$

(von Neumann); conclua sobre sua estabilidade/instabilidade condicional/incondicional.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Um esquema que é conhecido na literatura como indicado por representar melhor o termo advectivo em (??) é o esquema de diferenças regressivas; nesse esquema, chamado de esquema *upwind* — literalmente, "corrente acima" — na literatura de língua inglesa, a discretização utilizada é

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x},\\
u_i^{n+1} &= u_i^n - \mathrm{Co}\left[u_i^n - u_{i-1}^n\right]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Claramente, estamos utilizando um esquema de $O(\Delta x)$ para a derivada espacial. Ele é um esquema menos acurado que os usados anteriormente, mas se ele ao mesmo tempo for condicionalmente estável e não introduzir difusão numérica, o resultado pode ser melhor para tratar a advecção.

Antes de "colocarmos as mãos na massa", sabemos que devemos analisar analiticamente a estabilidade do esquema. Vamos a isso:

$$\begin{aligned}
\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\left[\xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{at_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{Co}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co}\left[1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right]\\
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x) - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Desejamos que o módulo do fator de amplificação $\mathrm{e}^{a\Delta t}$ seja menor que 1. O módulo (ao quadrado) é

$$\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 = (1 - \mathrm{Co} + \mathrm{Co}\cos(k_l\Delta x))^2 + (\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}(k_l\Delta x))^2.$$

Para aliviar a notação, façamos

$$\begin{aligned}
C_k &\equiv \cos(k_l\Delta x),\\
S_k &\equiv \mathrm{sen}(k_l\Delta x).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{a\Delta t}\right|^2 &= (\mathrm{Co}S_k)^2 + (\mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co} + 1)^2\\
&= \mathrm{Co}^2 S_k^2 + (\mathrm{Co}^2 C_k^2 + \mathrm{Co}^2 + 1) + 2(-\mathrm{Co}^2 C_k + \mathrm{Co}C_k - \mathrm{Co})\\
&= \mathrm{Co}^2(S_k^2 + C_k^2 + 1 - 2C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1\\
&= 2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1.
\end{aligned}$$

A condição para que o esquema de diferenças finitas seja estável é, então,

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Co}^2(1 - C_k) + 2\mathrm{Co}(C_k - 1) + 1 &\le 1,\\
2\mathrm{Co}\left[\mathrm{Co}(1 - C_k) + (C_k - 1)\right] &\le 0,\\
(1 - \cos(k_l\Delta x))\left[\mathrm{Co} - 1\right] &\le 0,\\
\mathrm{Co} &\le 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P02, 26 set 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

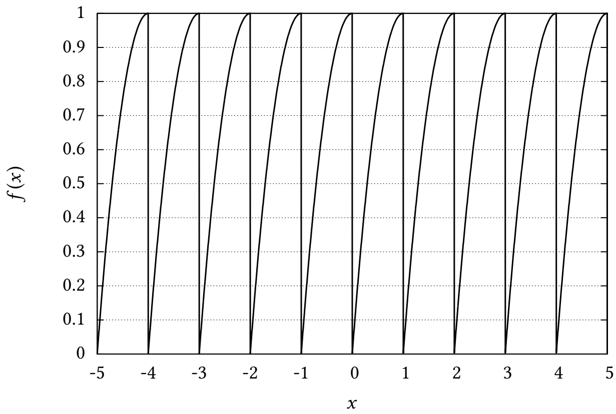
NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [50] Em Matemática, a função $\lfloor x \rfloor$ é definida como o maior inteiro menor ou igual do que x. Por exemplo, $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor 4{,}7 \rfloor = 4$ e $\lfloor -3{,}8 \rfloor = -4$. Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-2), & 0 < x \le 1, \\ f(x - \lfloor x \rfloor), & -1 < x \le 0 \text{ ou } |x| > 1 \end{cases}$$

mostrada abaixo, obtenha sua série de Fourier trigonométrica.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

Com $a = 0$, $b = 1$, $L = 1$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\cos\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right)\,d\xi \\ &= 2\int_0^1 (-\xi(\xi-2))\cos(2\pi n\xi)\,d\xi; \\ A_0 &= \frac{4}{3}, \\ A_n &= -\frac{1}{\pi^2 n^2}, \qquad n > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right)\,d\xi \\ &= 2\int_0^1 (-\xi(\xi-2))\,\mathrm{sen}(2\pi n\xi)\,d\xi; \\ &= -\frac{1}{\pi n}, \qquad n > 0. \end{aligned}$$

Portanto:

$$-x(2-x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(2n\pi x) - \frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}(2n\pi x)\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [50] Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0 \text{ ou } x > 1, \end{cases}$$

calcule a sua transformada de Fourier.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k} - \mathrm{i}k - 1)}{2\pi k^2} \\
&= \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k} - 1}{2\pi k^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P03, 31 out 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Obtenha a matriz adjunta de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 1+2i & 1 & -3i \\ 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transposta é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i \\ i & -3i & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz dos conjugados da transposta é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ -i & 3i & 0 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha a função de Green de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{e}^{-t/T}}{T}x(t) = \frac{1}{T}f(t); \qquad x(0) = x_0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}x(\tau) &= \frac{1}{T}f(\tau);\\
G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + G(t,\tau)\frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}x(\tau) &= G(t,\tau)\frac{1}{T}f(\tau);\\
\int_{\tau=0}^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{\infty} G(t,\tau)\frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau;\\
G(t,\tau)x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} x(\tau)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^{\infty} x(\tau)G(t,\tau)\frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}\,\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Neste ponto imponha

$$G(t,\infty) = 0.$$

Prossiga:

$$\begin{aligned}
-G(t,0)x(0) + \int_0^{\infty} x(\tau)\left[-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}G(t,\tau)\right]\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{T}\int_0^{\infty} G(t,\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau;\\
-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}G &= \delta(\tau - t);\\
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau);\\
-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}uv &= \delta(\tau - t);\\
u\left[-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau/T}}{T}v\right] - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t);\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \mathrm{e}^{-\tau/T}\mathrm{d}(\tau/T);\\
\int_{v(t,0)}^{v(t,\tau)} \frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int_{\xi=0}^{\xi=\tau} \mathrm{e}^{-\xi/T}\mathrm{d}(\xi/T);\\
\ln\frac{v(t,\tau)}{v(t,0)} &= 1 - \mathrm{e}^{-\tau/T};\\
v(t,\tau) &= v(t,0)\exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T}\right).
\end{aligned}$$

A equação em u é

$$\begin{aligned}
-\left[v(t,0)\exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \delta(\tau - t);\\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{-\delta(\tau - t)}{[v(t,0)\exp(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T})]};\\
\int_{\xi=0}^{\tau} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\xi=0}^{\tau} \frac{-\delta(\xi - t)}{\left[v(t,0)\exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\xi/T}\right)\right]}\,\mathrm{d}\xi;\\
u(t,\tau) - u(t,0) &= H(\tau - t)\left\{\frac{-1}{[v(t,0)\exp(1 - \mathrm{e}^{-t/T})]}\right\};\\
u(t,\tau) &= u(t,0) + H(\tau - t)\left\{\frac{-1}{[v(t,0)\exp(1 - \mathrm{e}^{-t/T})]}\right\};\\
G(t,\tau) &= u(t,\tau)v(t,\tau)\\
&= u(t,0)v(t,0)\exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T}\right) +\\
&\qquad H(\tau - t)\left\{\frac{-1}{[v(t,0)\exp(1 - \mathrm{e}^{-t/T})]}\right\}v(t,0)\exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T}\right);\\
&= \exp\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/T}\right)\left[G(t,0) - \frac{H(\tau - t)}{[\exp(1 - \mathrm{e}^{-t/T})]}\right].
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

Impomos agora

$$
\begin{aligned}
G(t,\infty) &= 0 \qquad \Rightarrow \\
G(t,0) - \frac{1}{\left[\exp\left(1-\mathrm{e}^{-t/T}\right)\right]} &= 0; \\
G(t,0) &= \frac{1}{\left[\exp\left(1-\mathrm{e}^{-t/T}\right)\right]}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
G(t,\tau) = [1 - H(\tau - t)]\,\frac{\exp\left(1-\mathrm{e}^{-\tau/T}\right)}{\exp\left(1-\mathrm{e}^{-t/T}\right)} \;\blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] A equação (que é uma equação de Euler)

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + 2xy' + \lambda y &= 0,\\
x'(0) &= 0,\\
x(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

é um problema de Sturm-Liouville? Por quê? (**Atenção: você tem que justificar.**)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
É preciso que nos lembremos da forma geral da equação de Sturm-Liouville:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0.
$$

Por inspeção,

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}
$$

Portanto, a equação pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda y &= 0,\\
x'(0) &= 0,\\
x(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

e este é, de fato, um problema de Sturm-Liouville com $p(x) = x^2$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$ ∎

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] A equação diferencial de Boussinesq modificada

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + i_0$$

representa a evolução de um maciço poroso reabastecido por uma taxa de infiltração constante, em x e em t, i_0. Como fizemos em sala, todos os termos devem ser considerados adimensionais: η é uma altura adimensionalizada do aquífero; i_0 é uma taxa de infiltração adimensional, etc.. Procure obter uma solução por separação de variáveis, assim como Boussinesq fez com a equação original: é possível? Basta verificar se a separação de variáveis vai funcionar ou não: não é preciso resolver!

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial XT}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(XT \frac{\partial XT}{\partial x}\right) + i_0 \\
X\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= T^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(X \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right) + i_0 \\
\frac{1}{T^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(X \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{i_0}{XT^2}.
\end{aligned}$$

Claramente, não é possível deixar funções apenas de t em um lado, e funções apenas de x do outro lado, devido ao termo $i_0/(XT^2)$. O método de separação de variáveis não funciona.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 28 nov 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

ATENÇÃO: ESCOLHA E RESOLVA 3 DAS 4 QUESTÕES ABAIXO. VOCÊ PODE TENTAR AS 4, MAS TEM QUE INDICAR QUAIS SÃO AS 3 QUE VOCÊ QUER QUE SEJAM PONTUADAS!

1 [33,33333...] Dada a equação de Boussinesq para regime permanente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) = 0, \qquad h(0) = 1/2,\ h(1) = 1,$$

a) [11,1111...] Obtenha uma solução analítica.

b) [22,2222...] Escreva um esquema numérico implícito *linearizado* que parta de um "chute" inicial $h(x,0) = 1$, e resolva **[cuidado com o Português! Quem "resolve" é o esquema: você não precisa resolver :-)]** a equação da difusão

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

até o regime permanente ser alcançado (isso é análogo ao que você fez no trabalho computacional). Observação: basta propor o esquema geral: não é necessário detalhar como se incorpora as condições de contorno.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right) &= 0,\\
h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= k_1,\\
h\mathrm{d}h &= k_1\mathrm{d}x,\\
\frac{1}{2}h^2 &= k_1 x + k_2,\\
h(0) = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{8} &= k_2;\\
h(1) = 1 \Rightarrow 1 = k_1 + \frac{1}{8} &\Rightarrow k_1 = 3/8 \Rightarrow\\
\frac{1}{2}h^2 &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

b) Faça

$$\begin{aligned}
h\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{i+1/2} &\approx \frac{h_{i+1}^n + h_i^n}{2}\left[\frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x}\right];\\
h\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{i-1/2} &\approx \frac{h_i^n + h_{i-1}^n}{2}\left[\frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right];
\end{aligned}$$

como estamos usando o "h" do passo tempo anterior (n), isso na prática linearliza o esquema. Vamos simplificar a notação:

$$\begin{aligned}
h_{i+1/2}^n &\equiv \frac{h_{i+1}^n + h_i^n}{2},\\
h_{i-1/2}^n &\equiv \frac{h_i^n + h_{i-1}^n}{2},
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
h \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{i+1/2} &\approx h^n_{i+1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i+1} - h^{n+1}_{i}}{\Delta x} \right];\\
h \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{i-1/2} &\approx h^n_{i-1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i} - h^{n+1}_{i-1}}{\Delta x} \right].
\end{aligned}
$$

Podemos agora calcular a segunda derivada (aproximada):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[h \frac{\partial h}{\partial x}\right]_i &\approx \frac{1}{\Delta x}\left[h \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{i+1/2} - h \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{i-1/2} \right]\\
&= \frac{1}{\Delta x}\left[h^n_{i+1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i+1} - h^{n+1}_{i}}{\Delta x} \right] - h^n_{i-1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i} - h^{n+1}_{i-1}}{\Delta x} \right] \right].
\end{aligned}
$$

O esquema numérico agora é

$$
\frac{h^{n+1}_i - h^n_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x}\left[h^n_{i+1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i+1} - h^{n+1}_{i}}{\Delta x} \right] - h^n_{i-1/2} \left[\frac{h^{n+1}_{i} - h^{n+1}_{i-1}}{\Delta x} \right] \right] \blacksquare
$$

Continue a solução no verso ⟹

2 [33,3333…] Dada a função

$$w(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right),$$

e o espaço das funções reais quadrado-integráveis em $[0,L]$, a operação

$$\langle f,g\rangle \equiv \int_0^L f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

não é um produto interno. Por quê? (Por exemplo, dê um contra-exemplo de uma propriedade violada do produto interno.)

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Escolha

$$f(x) = H(x - L/2)$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside, e calcule

$$\begin{aligned}\langle f,f\rangle &= \int_0^L [H(x-L/2)]^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{L/2}^L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{L}{\pi}.\end{aligned}$$

Mas isso viola a propriedade do produto interno

$$\langle f,f\rangle \geq 0 \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [33,3333...] Dada a função

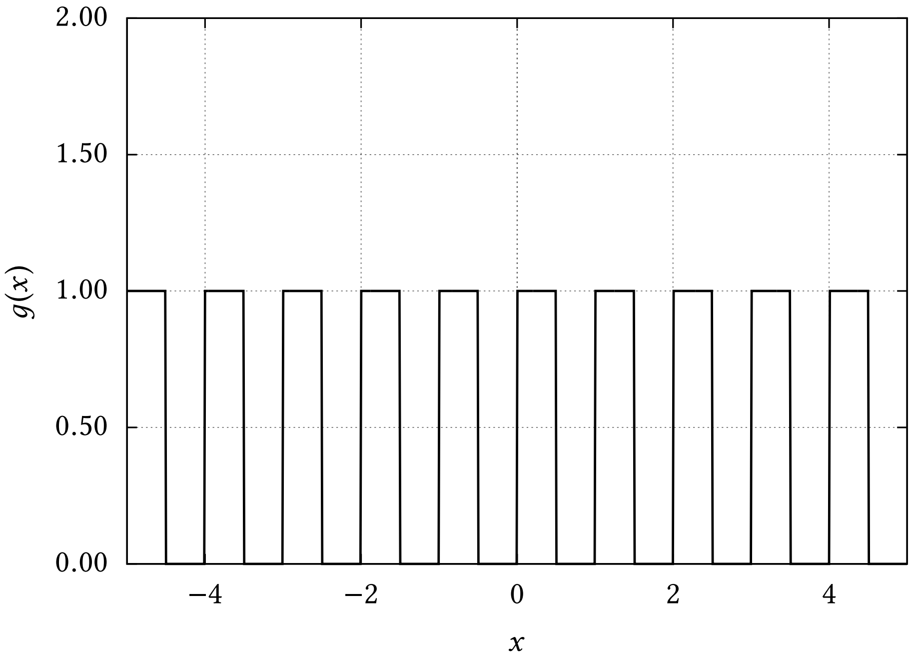
$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[H(x-n) - H(x-(n+1/2))\right],$$

a) [11,1111...] Desenhe acuradamente $g(x)$.

b) [22,2222...] Obtenha a Transformada de Fourier de $g(x)$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

a)



b)

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}\left[H(x-n) - H(x-(n+1)/2)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{n}^{n+1/2} e^{-ikx}\, dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\pi k} e^{-ikn} \left[e^{-ik/2} - 1\right] \; \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [33,3333…] Dada a equação do calor em um disco de raio ρ com simetria radial,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right),\\
\phi(r,0) &= f(r),\\
\frac{\partial \phi}{\partial r}(0,t) &= \frac{\partial \phi}{\partial r}(\rho,t) = 0,
\end{aligned}
$$

resolva o problema até o fim, **mas deixando todas as integrais necessárias indicadas, exceto esta, que você deve usar:**

$$
\int_0^\rho r J_0(k_m r)\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{k_m} J_1(k_m\rho), \qquad k_m > 0.
$$

Dica: a equação diferencial de Bessel de ordem μ,

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = 0
$$

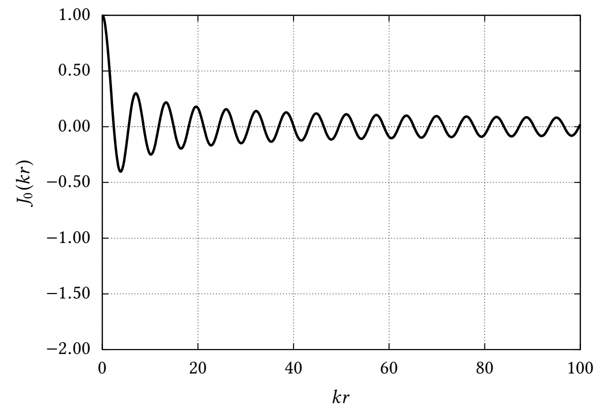
tem solução geral

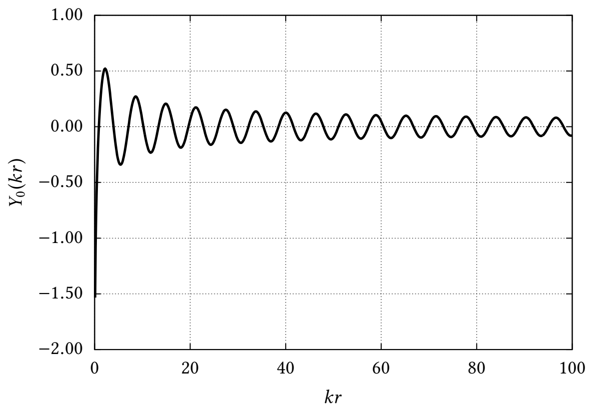
$$
y(x) = AJ_\mu(x) + BY_\mu(x),
$$

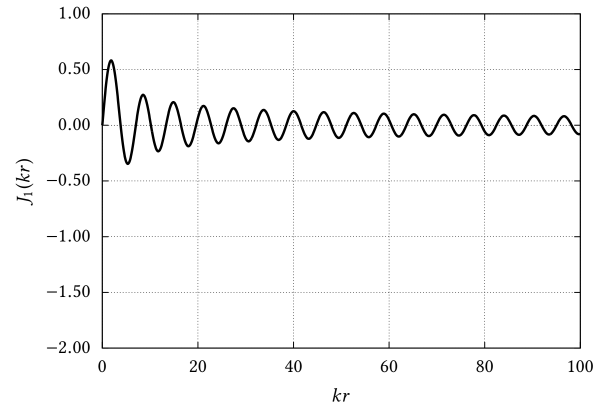
onde $J_0(x)$ é par, **e todas as Y's têm comportamento logaritmico próximo à origem**. Além disso,

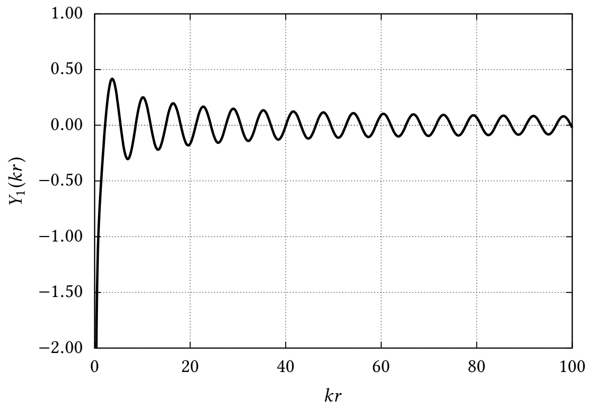
$$
\frac{\mathrm{d}J_0(x)}{\mathrm{d}x} = -J_1(x); \qquad \frac{\mathrm{d}Y_0(x)}{\mathrm{d}x} = -Y_1(x).
$$

Para $x = kr$ e $\mu = 0$, $\mu = 1$, essas funções estão plotadas abaixo.









Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Pelo método de separação de variáveis,

$$
\begin{aligned}
\phi(r,t) &= R(r)T(t),\\
R\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \alpha^2 T \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right);\\
\div RT &\Rightarrow\\
\frac{1}{\alpha^2}\frac{\mathrm{d}T}{T} &= \frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\lambda.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno do problema levam, após a separação de variáveis, a

$$
\frac{\mathrm{d}R(0)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}r} = 0.
$$

Essas são condições adequadas à Teoria de Sturm-Liouville; portanto, atacaremos primeiro a EDO em R:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) &= -\lambda,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) &= -\lambda r R,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \lambda r R &= 0,\\
r\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \lambda r R &= 0,\\
\lambda &= k^2 \ \Rightarrow\\
\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}(kr)^2} + \frac{1}{(kr)}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}(kr)} + R &= 0.
\end{aligned}
$$

Essa última é uma equação de Bessel de ordem zero, cuja solução geral é

$$
R(kr) = AJ_0(kr) + BY_0(kr).
$$

Antes de nos precipitarmos, devemos estudar os sinais de λ. É mais ou menos óbvio que $\lambda = k^2 > 0$ vai servir, mas no nosso caso $\lambda = 0$ *também vai!* Veja:

$$
\begin{aligned}
\lambda = 0 &\ \Rightarrow\\
\frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) &= 0,\\
r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} &= k_1,\\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} &= \frac{k_1}{r}\\
\mathrm{d}R &= k_1\frac{\mathrm{d}r}{r}\\
R(r) &= k_1 \ln r + k_2\\
R'(0) = 0 &\Rightarrow k_1 = 0;\ k_2 = \text{qualquer}.
\end{aligned}
$$

Portanto, se $\lambda = 0$, existe a autofunção associada $R_0(r) = 1$. É trivial que a $T(t)$ associada é $T_0(t) = 1$.
Vamos agora para a equação de Bessel.

$$
\begin{aligned}
\lambda = k^2 > 0 &\ \Rightarrow\\
R(r) &= AJ_0(kr) + BY_0(kr);\\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} &= -k\left[AJ_1(kr) + BY_1(kr)\right].
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

As condição de contorno $\mathrm{d}R(0)/\mathrm{d}r = 0$ leva a

$$\frac{\mathrm{d}R(0)}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow B = 0,$$

(pois Y_1 tem comportamento logaritmico na origem), e

$$J_1(0) = 0 \text{ (OK)}.$$

A condição de contorno $\mathrm{d}R(\rho)/\mathrm{d}r = 0$ leva a

$$J_1(k_n R) = 0, \tag{$\star$}$$

Os autovalores $\lambda_n = k_n^2$, $n \geq 1$ são definidos implicitamente por essa equação. Então,

$$R_n(r) = A_n J_0(k_n r), \qquad n \geq 1.$$

As funções $T(t)$ correspondentes são

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\mathrm{d}T_n}{\mathrm{d}t} = -k_n^2 t,$$
$$T_n(t) = C_n \exp\left(-(\alpha k_n)^2 t\right).$$

Note que podemos fazer $A_n = C_n = 1$ sem perda de generalidade. O que importa é reunir a solução em série, que deverá ser do tipo

$$\phi(r,t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(k_n r) \exp\left(-(\alpha k_n)^2 t\right).$$

Para obter os D_n's:

$$f(r) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(k_n r).$$

Precisamos tratar $R_0(r) = 1$ de forma distinta dos demais R_n's. Multiplicamos portanto primeiro por 1, pela função peso r e integramos de 0 a ρ:

$$\int_{r=0}^{\rho} r f(r)\,\mathrm{d}r = D_0 \int_{r=0}^{\rho} r\,\mathrm{d}r + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_n r)\,\mathrm{d}r$$

Mas pelo enunciado do problema,

$$\int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_n r)\,\mathrm{d}r = \frac{\rho}{k_n} J_1(k_n \rho) = 0,$$

pois os k_n's são autovalores (vide ($\star$)). Isso nos dá D_0:

$$D_0 = \frac{2}{\rho^2} \int_{r=0}^{\rho} r f(r)\,\mathrm{d}r.$$

Em seguida, Multiplicamos por $J_0(k_m r)$, pela função peso r e integramos de 0 a ρ:

$$\int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_m r) f(r)\,\mathrm{d}r = D_0 \int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_m r)\,\mathrm{d}r + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_m r) J_0(k_n r)\,\mathrm{d}r.$$

Pelo mesmo motivo de antes, a 1ª integral do lado direito é nula. Além disso, as autofunções $J_0(k_m r)$, $J_0(k_n r)$, são ortogonais para $m \neq n$. Portanto, ficamos com

$$\int_{r=0}^{\rho} r J_0(k_m r) f(r)\,\mathrm{d}r = D_m \int_{r=0}^{\rho} r \left[J_0(k_m r)\right]^2 \,\mathrm{d}r.$$

que pode ser deixada indicada, e que nos dá os D_m's, $m \geq 1$ ■

Continue a solução no verso ⟹

TT010 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
F, 8 Dez 2014
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Dada a equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

e as seguintes discretizações:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right), \tag{$\star$}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right), \tag{$\star\star$}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}D\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{2}D\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right), \tag{$\star\star\star$}$$

discuta *com clareza* e *em detalhes* as vantagens e desvantagens numéricas e computacionais de cada uma.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O método explícito ($\star$) é mais simples de implementar e rápido em cada passo, mas é condicionalmente estável. Isso limita o tamanho de passo de tempo permitido.
O implícito ($\star\star$) gera um sistema de equações mas é incondicionalmente estável, possibilitando passos de tempo maiores. A sua acurácia de $O(\Delta t)$.
Crank-Nicholson é um pouco mais complicado algebricamente (mas pouco!), e tem acurácia $O(\Delta t^2)$

Continue a solução no verso ⟹

2 [25] Use a desigualdade de Schwarz em um espaço vetorial que você deve encontrar, e a fórmula bem conhecida

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

para mostrar que

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} \le \frac{n(n+1)}{2}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
O espaço é $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}),\\
\boldsymbol{y} &= (1, 2, 3, \ldots, n),\\
|\langle x, y\rangle|^2 &\le \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle\\
\left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}\right)^2 &\le \left[\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\sqrt{k}\right] \sum_{k=1}^{n} k^2\\
\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} &\le \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Dada a função

$$f(x) = e^{-(x/a)^2}, \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-(x/a)^2}\,dx,$$

é fácil mostrar que $\widehat{f}(0) = a/(2\sqrt{\pi})$; note também que

$$\frac{df}{dx} = -2\frac{x}{a^2}e^{-(x/a)^2} = \frac{2}{a^2 i}(-ixf(x)) = \frac{2}{a^2 i}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d\widehat{f}}{dk}\right\}.$$

Calculando a transformada de Fourier das extremidades da esquerda e da direita das igualdades acima, monte uma equação diferencial para $\widehat{f}(k)$, e resolva-a. Você pode usar todos os fatos deste enunciado.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{\frac{df}{dx}\right\} &= \frac{2}{ia^2}\frac{d\widehat{f}}{dk} \\
ik\widehat{f} &= \frac{2}{ia^2}\frac{d\widehat{f}}{dk} \\
-\frac{a^2}{2}k\,dk &= \frac{d\widehat{f}}{\widehat{f}} \\
-\frac{k^2a^2}{4} &= \ln\left[\frac{\widehat{f}(k)}{\widehat{f}(0)}\right] \\
\widehat{f}(k) &= \frac{a}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{k^2a^2}{4}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

4 [25] Resolva o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y = 0; \qquad y'(0) = y'(L) = 0.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Se $k = 0$,

$$y(x) = \text{const.} = \cos(\frac{0 \times \pi x}{L})$$

é uma solução. Se $k > 0$,

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(kx) + B\,\mathrm{sen}(kx), \\ y'(x) &= k\left[-A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx)\right]. \end{aligned}$$

De

$$y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} y'(L) &= 0, \\ -kA\,\mathrm{sen}(kL) &= 0 \\ kL &= n\pi \\ k_n &= \frac{n\pi}{L}. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalors e as autofunções do problema são

$$k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$