TEA018 Hidrologia Ambiental – Notas de aula

Nelson Luís Dias

Prof. Titular, Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR

6 de agosto de 2020

Sumário

1 Introdução e Processos Hidrológicos **3**

1.1 Introdução e aplicações 3

1.2 Estimativas de P, Q e E 5

1.3 O conceito de sistemas — ou escalas! 7

1.4 História 9

2 As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia **10**

2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds 10

2.2 A equação da continuidade 12

2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos 13

2.4 Aplicações em Hidrologia 15

2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente 18

2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga 22

2.6.1 A fórmula de Manning 25

2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy 27

2.8 O balanço de radiação na superfície 28

2.9 Hidrologia computacional 29

3 Água na atmosfera **36**

3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa 36

3.2 Circulação atmosférica 38

3.3 A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura 41

3.4 A atmosfera como uma mistura de gases ideais 43

3.5 Saturação e grandezas associadas 50

3.6 Temperatura potencial 54

3.7 Precipitação 60

Capítulo 1

Introdução e Processos Hidrológicos

1.1 Introdução e aplicações

A água é a substância mais abundante na Terra.

A Hidrologia trata da água nos estados sólido, líquido e gasoso.

Aplicações de Hidrologia:

- Projeto e operação de estruturas hidráulicas.
- Abastecimento de Água.
- Tratamento e destino de esgotos.
- Irrigação.
- Drenagem.
- Geração de energia hidrelétrica.
- Controle de cheias.
- Navegação fluvial.
- Controle de erosão.
- Estabilidade de encostas.
- Controle de salinização de solos.
- Controle de poluição hídrica.
- Usos recreativos.
- Proteção da fauna e da flora.

Uma definição mais precisa

> Hidrologia é o estudo do ciclo hidrológico nas áreas continentais.

Tanto a variabilidade natural quanto as atividades humanas afetam os diversos fluxos do ciclo hidrológico e a qualidade da água.

Praticamente *todas* as atividades humanas impactam o ambiente, e o ciclo hidrológico, direta ou indiretamente. Exemplos:

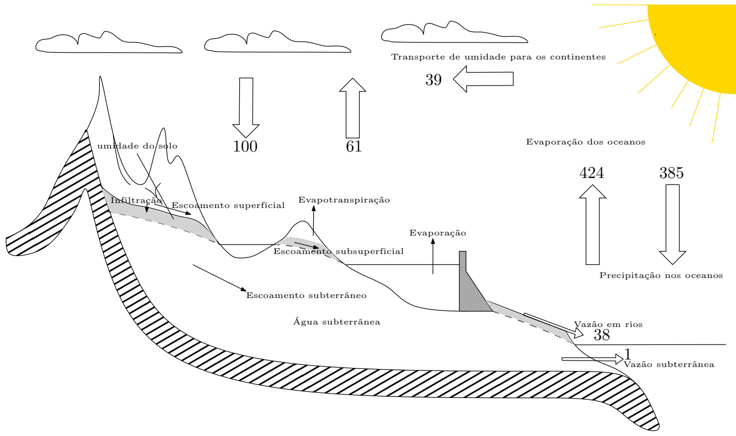


Figura 1.1: O ciclo hidrológico (adaptado de Chow et al. (1988)).

- Agricultura em geral:
  - Aragem do solo.
  - Irrigação.
  - Adubação.
- Desmatamento.
- Exploração de águas superficiais.
- Exploração de águas subterrâneas.
- Construção de represas.
- Lançamento de esgoto *in natura* ou tratado em rios, lagos e no oceano.
- Urbanização.
- ...

O ciclo hidrológico merece a figura 1.1 de Chow et al. (1988).

Aqui aparece pela primeira vez o termo *Runoff* que às vezes é sinônimo de *overland flow* (escoamento superficial) e às vezes é sinônimo de *streamflow* (vazão em uma seção de rio).

Meu conselho: evite *runoff*; diga com outras palavras e use outros símbolos. De todo modo, *runoff* significa o escoamento para fora de algum compartimento (uma gleba de solo no caso de uma visão mais local e "agronômica", ou a bacia como um todo no caso de uma visão "hidrológica").

Note também, na figura 1.2, a distinção entre leçol (e poço) freático e artesiano.

Como podemos ver na figura 1.1, são elementos do ciclo hidrológico nos continentes:

- Precipitação (chuva + neve + granizo)

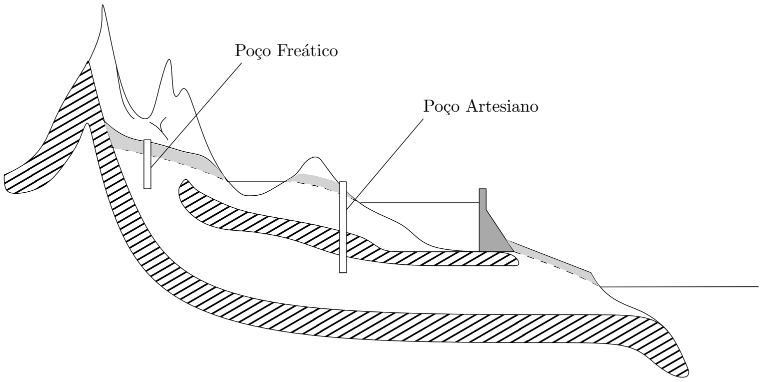


Figura 1.2: Poços freático e artesiano.

Tabela 1.1: Distribuição da água no planeta.

Região	Quantidade (%)
Oceanos	96.5
Água subterrânea	0.73 (doce)
Água subterrânea	0.96 (salgada)
Umidade do solo	0.0012
Calotas polares	1.7
Lagos	0.007 (doce)
Lagos	0.006 (salgada)
Pântanos	0.0008
Rios	0.0002
Seres vivos	0.0001
Atmosfera	0.001

- Evapotranspiração:
  - Evaporação
  - Evapotranspiração
- Infiltração
- Escoamento superficial (*overland flow*)
- Escoamento subsuperficial
- Escoamento subterrâneo Os três elementos podem contribuir para a formação da *vazão* na seção exutória de uma bacia hidrográfica.

As quantidades de água nas diversas regiões do planeta estão mostradas na tabela 1.1

1.2 Estimativas de P, Q e E

Algumas vezes, P, E e Q são denominados *fases* do ciclo hidrológico.

Considere o balanço hídrico de uma bacia hidrográfica,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = P - E - Q,$$

e integre:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= \int_{t_i}^{t_f} P\,\mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t_f} E\,\mathrm{d}t - \int_{t_i}^{t_f} Q\,\mathrm{d}t;\\
\langle P\rangle &\equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} P\,\mathrm{d}t;\\
S_f - S_i &= [\langle P\rangle - \langle E\rangle - \langle Q\rangle]\,\Delta t,\\
\frac{S_f - S_i}{\Delta t} &= [\langle P\rangle - \langle E\rangle - \langle Q\rangle]\,\Delta t.
\end{aligned}
$$

Agora, se Δt é *muito grande*, e se $S(t)$ é *estacionário*,

$$
\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{S_f - S_i}{\Delta t} = 0 \;\Rightarrow\; \langle P\rangle = \langle E\rangle + \langle Q\rangle\,.
$$

Muitas vezes encontra-se isso escrito simplesmente como

$$
P = E + Q.
$$

Portanto, cuidado com a notação: o significado das variáveis vai depender do contexto, e você deve ser capaz de compreender esse significado justamente *pelo contexto*.

Além disso, existem várias *dimensões* possíveis para P, E, e Q. Em princípio, devemos ter

$$
[\![P]\!] = [\![E]\!] = [\![Q]\!] = \mathsf{M}\,\mathsf{L}^{-2}\,\mathsf{T}^{-1}
$$

(um fluxo de massa por unidade de área em um ponto específico da bacia hidrográfica) ou

$$
[\![P]\!] = [\![E]\!] = [\![Q]\!] = \mathsf{M}\,\mathsf{T}^{-1}
$$

(um fluxo de massa sobre toda a superfície horizontal da bacia).

Por exemplo, no SI suponha P inicialmente em $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ (indicando um fluxo de massa sobre toda a área da bacia). Se ρ é a densidade da água e se a supusermos constante,

$$
\frac{\mathrm{kg\,s^{-1}}}{\mathrm{kg\,m^{-3}}} \;\Rightarrow\; P \text{ em } \mathrm{m^3\,s^{-1}}.
$$

Se dividirmos agora pela área superficial sobre a qual o fluxo ocorre,

$$
\frac{\mathrm{m^3\,s^{-1}}}{\mathrm{m^2}} \;\Rightarrow\; P \text{ em } \mathrm{m\,s^{-1}}.
$$

Alternativamente, encontra-se P em $\mathrm{mm\,dia^{-1}}$, $\mathrm{mm\,mês^{-1}}$, $\mathrm{mm\,ano^{-1}}$.

Algumas vezes, reporta-se a integral

$$
\int_{t_i}^{t_f} \frac{P(t)}{\rho A}\,\mathrm{d}t
$$

em m ou em mm.

Em resumo, as dimensões e as unidades e o *significado* dos símbolos dependem do *contexto*, e você deve estar atento a elas.

Finalmente, P, E e Q são fluxos entre “compartimentos” (volumes de controle). Por exemplo, P e E são fluxos entre a atmosfera e as superfícies continentais, Q é um fluxo através de uma seção de rio, etc..

Para entender a relação entre os fluxos e o armazenamento entre e em diversos compartimentos, é preciso ter uma sólida base em Mecânica dos Fluidos e em Matemática (Análise, Métodos Numéricos, Estatística, ...).

Em resumo, a Hidrologia é uma ciência multidisciplinar e que engloba desde aspectos muito teóricos até outros muito aplicados.

Tempo de residência Considere um balanço de massa simples e em seguida regime permanente:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = F_i - F_o,$$
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow F_i = F_o = F.$$

O tempo de residência do compartimento cuja massa é M é

$$T_r = \frac{M}{F}.$$

Quais são as dimensões de F?

1.3 O conceito de sistemas — ou escalas!

Classificação de modelos O problema de “classificar” um modelo é enorme, porque em geral a classificação “não fecha”, e um mesmo modelo acaba recebendo duas ou mais classificações. De todo modo, as categorias mais comuns são:

- Modelos físicos × empíricos.
- Modelos concentrados × distribuídos.
- Modelos determinísticos × estocásticos.

Algumas vezes é fácil “classificar” um modelo, e outras não. Considere

$$Q = ciA \qquad \text{ou} \qquad Q = cP,$$

que é a “fórmula racional”. Ela é racional porque Q e iA, ou Q e P, têm as mesmas dimensões físicas (i, em $\mathrm{mm\,h^{-1}}$ ou $\mathrm{mm\,dia^{-1}}$ é a intensidade de precipitação. A distinção entre i e P é cinzenta. Historicamente, P era reservado para “altura acumulada de chuva”, em mm).

A fórmula racional é “empírica”, e c tem que ser descoberto, adivinhado, ou calibrado, para cada bacia. Por outro lado, a Equação de Saint-Vennant,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f,$$

é um model “físico” porque se baseia no princípio de conservação de quantidade de movimento. Ainda assim, S_f depende de uma relação empírica ou semi-empírica (em geral, a fórmula de Manning).

Modelos concentrados em geral fazem um balanço sobre todo um volume de controle. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= I(t) - O(t),\\
O(t) &= aS^b,\\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + aS^b &= I(t).
\end{aligned}
$$

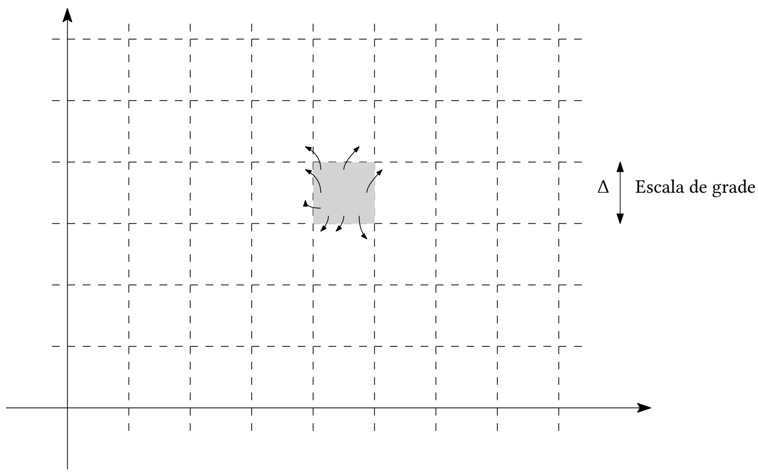
Classifique a equação diferencial acima.

Muitas vezes, o modelo concentrado é alimentado por uma equação empírica ou semi-empírica do tipo $O = aS^b$, etc..

Modelos distribuídos são muitas vezes implementados em grades 1D, 2D ou 3D. A *resolução* do modelo é o tamanho da grade.

Mesmo em um modelo distribuído com base fortemente física, entretanto, o que acontece em escalas abaixo da escala da grade [digamos, Δx] precisa ainda ser *parametrizado.* A parametrização:

- Em geral depende da escala da grade Δx.
- Envolve algum nível de empirismo.



Por exemplo, a equação constitutiva para um fluido Newtoniano,

$$
\begin{aligned}
T_{ij} &= -P\delta_{ij} + \lambda s_{kk}\delta_{ij} + 2\mu s_{ij},\\
s_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),
\end{aligned}
$$

expressa as tensões T_{ij} em um *continuum* em termos da pressão termodinâmica p, da taxa de deformação $\boldsymbol{s}$, e de dois coeficientes de viscosidade, μ e λ, que parametrizam o efeito das interações moleculares na escala do contínuo (a microescala de Kolmogorov).

Um modelo estocástico abre mão da física e de parametrizações físicas para estimar probabilidades de ocorrência. Um exemplo extremo é o modelo de Gumbel para a vazão x_T com período de retorno T:

$$
\begin{aligned}
y_T &= -\ln\left[\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right],\\
x_T &= u + \alpha y_T,
\end{aligned}
$$

onde u e α são os parâmetros da distribuição Gumbel.

O argumento altamente sensato de Brutsaert (1986, 1998) é que faz mais sentido identificar as escalas que estão sendo resolvidas explicitamente e aquelas cujo resulado agregado precisa ser parametrizado. A partir daí, nós procuramos identificar quais são as parametrizações de subgrade necessárias (ou explicitar sua utilização).

1.4 História

Chow et al. (1988) fazem um bom resumo do desenvolvimento histórico da hidrologia. O conceito de ciclo hidrológico começou a ser compreendido qualitativamente já na antiguidade. No entanto, somente na Idade Moderna *medições* começaram o difícil processo de quantificar seus componentes e demonstrar experimentalmente a sua validade.

Outro ponto importante é que a Mecânica dos Fluidos só começou a produzir resultados úteis em Engenharia a partir de meados do século XIX (Darrigol, 2005). Com isso, a Hidrologia tem se desenvolvido a reboque dos avanços científicos em Mecânica dos Fluidos.

Até hoje, Hidráulica e Hidrologia carregam a tradição em empirismo (na acepção de tentativas não-informadas, ou mal-informadas, pela ciência) e soluções *ad-hoc* e só lentamente têm evoluído na direção de soluções de Engenharia com fundamentos racionais nas ciências exatas e da natureza.

Capítulo 2

As leis de conservação e as bases de Mecânica dos Fluidos da Hidrologia

2.1 O Teorema do Transporte de Reynolds

Propriedades extensivas ⇒ valem para um corpo como um todo (*in bulk*).

Propriedades intensivas ⇒ valem cada ponto do contínuo.

Elas vêm aos pares, sendo definidas por

$$N = \int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V,$$

onde

N É a propriedade extensiva, válida para o corpo que ocupa a região $\mathscr{C}$ (às vezes diremos: para o corpo $\mathscr{C}$, ou para a região material $\mathscr{C}$.

ρ É a massa específica ou densidade do fluido.

η É a propriedade intensiva (por unidade de massa) associada.

O Teorema do Transporte de Reynolds talvez seja mais importante do que sua dedução; portanto, vamos enunciá-lo primeiro:

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \eta\rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A.$$

A utilidade do Teorema do Transporte de Reynolds vem do fato de que:

a) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ é a derivada material.

b) $\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t}$ é a taxa de variação da grandeza N pertinente ao corpo $\mathscr{C}$.

Leis da física

Massa

$$\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} = 0, \qquad \eta = 1.$$

Momentum

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{P}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{F}, \qquad \eta = \boldsymbol{v}, \qquad (2^{\underline{a}} \text{ lei de Newton}).$$

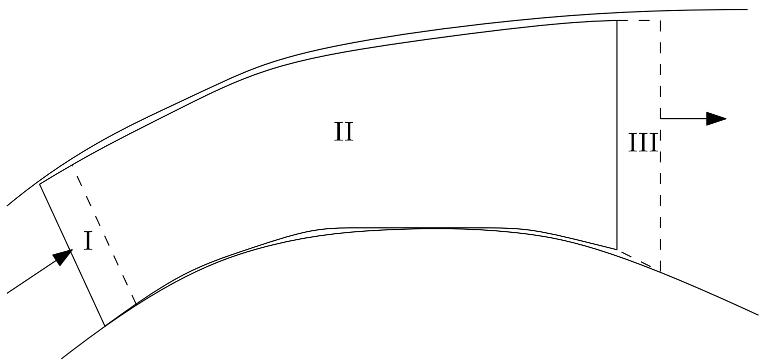
Energia

$$\frac{\mathrm{D}(\mathscr{U}+\mathscr{E}_c)}{\mathrm{D}t} = \dot{W} + \dot{Q}, \qquad \eta = \frac{v^2}{2} + u.$$

onde $\mathscr{U}$ é a energia interna do corpo, e $\mathscr{E}_c$ é a sua energia cinética.

Isso permite *matematizar* as leis de conservação para um meio contínuo.

Uma dedução muito básica do teorema é a seguinte:



$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

$$N(t) = \int_{\mathrm{I+II}} \eta\rho \, \mathrm{d}V,$$

$$N(t+\Delta t) = \int_{\mathrm{II+III}} \eta\rho \, \mathrm{d}V.$$

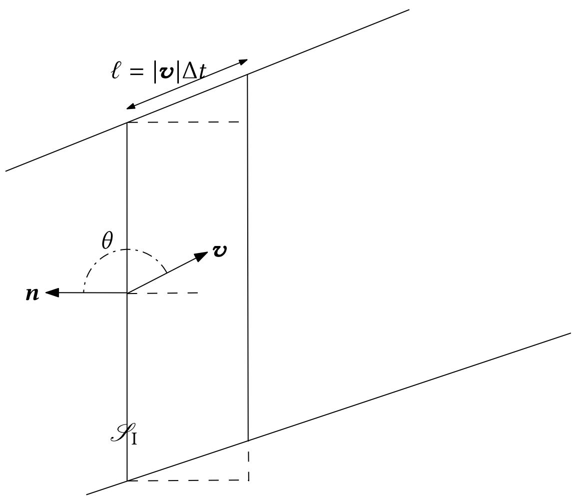
Portanto temos

$$\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right](t+\Delta t) - \left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right](t) + \left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right](t+\Delta t) - \left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right](t)\right\}.$$

As integrais sobre $\mathrm{II}(t+\Delta t)$ e $\mathrm{II}(t)$ formam uma derivada parcial em relação ao tempo usual:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right](t+\Delta t) - \left[\int_{\mathrm{II}} \eta\rho\,\mathrm{d}V\right]}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \eta\rho\,\mathrm{d}V.$$

Vamos olhar agora para a região I:



Em toda a fronteira de I com o exterior, $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) < 0$. Além disso, para Δt "pequeno", $\ell = |\boldsymbol{v}|\Delta t$ é pequeno. O volume de I é aproximadamente dado por

$$
\begin{aligned}
V_I = -\int_{\mathscr{S}_I} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\Delta t \,\mathrm{d}A \qquad \Rightarrow \\
-\left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \,\mathrm{d}V\right](t) = \left[\int_{\mathscr{S}_\mathrm{I}} \eta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A\right]\Delta t,
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
N_I = \left[\int_{\mathscr{S}_\mathrm{I}} \eta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A\right]\Delta t,
$$

ou

$$
-\left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \,\mathrm{d}V\right](t) = +\left[\int_{\mathscr{S}_\mathrm{I}} \eta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A\right]\Delta t.
$$

Analogamente,

$$
+\left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho \,\mathrm{d}V\right](t+\Delta t) = +\left[\int_{\mathscr{S}_\mathrm{III}} \eta(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A\right]\Delta t.
$$

Note que a superfície $\mathscr{S}$ é formada por

$\mathscr{S}_\mathrm{I}$ onde $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) < 0$;

$\mathscr{S}_\mathrm{III}$ onde $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) > 0$;

$\mathscr{S}_0$ onde $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$.

Logo,

$$
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[\int_{\mathrm{III}} \eta\rho \,\mathrm{d}V\right](t+\Delta t) - \left[\int_{\mathrm{I}} \eta\rho \,\mathrm{d}V\right](t)\right\} = \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A,
$$

e isso conclui o Teorema do Transporte de Reynolds:

$$
\frac{\mathrm{D}N}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \eta\rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \eta\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A \;\blacksquare
$$

2.2 A equação da continuidade

Para a massa M de um corpo,

$$
\begin{aligned}
\eta &= 1,\\
\frac{\mathrm{D}M}{\mathrm{D}t} &= 0;
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A,\\
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n}\cdot[\rho\boldsymbol{v}])\,\mathrm{d}A.
\end{aligned}
$$

A equação da continuidade é a melhor forma de introduzir o Teorema da Divergência para a obtenção das equações diferenciais de Mecânica dos Fluidos:

$$\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}A = \int_{\mathscr{C}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V,$$

onde

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z},$$

para o *campo vetorial* $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, f_z)$. Logo

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}V;$$

$$0 = \int_{\mathscr{C}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}] \right] \mathrm{d}V.$$

A equação acima tem que ser válida para uma região material $\mathscr{C}$ *arbitrária*; logo,

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}]$$

2.3 As equações de Mecânica dos Fluidos

Nas microescalas de Kolmogorov

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho \boldsymbol{v}] &= 0,\\
\frac{\partial c}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} c &= D \nabla^2 c\\
\rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \right] &= \rho \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla} \left(-p + (\lambda + \mu)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \right) + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}\\
\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u \right) &= \rho c_p \alpha \nabla^2 T - p(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissip visc}}
\end{aligned}$$

As equações promediadas de Reynolds

(Para uma densidade ρ_0 de referência, e escoamento solenoidal ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$))

Médias "de conjunto" (ou sobre um grande número de realizações k do escoamento):

$$\overline{a} \equiv \sum_{k=1}^{N} a(k).$$

Essa ideia vai voltar muitas vezes neste curso, quando nós discutirmos métodos estatísticos e Hidrologia Estocástica.

A decomposição de Reynolds:

$$a(\boldsymbol{x}, t; k) = \overline{a}(\boldsymbol{x}, t) + a'(\boldsymbol{x}, t; k).$$

As médias de Reynolds são determinísticas; as flutuações são (modeladas como) aleatórias.

As equações promediadas de Reynolds (RANS: *Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\overline{\boldsymbol{v}} &= 0,\\
\frac{\partial\overline{c}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{c} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\overline{\boldsymbol{v}'c'}\right]}_{\text{Vet Reynolds}} &= D\nabla^2\overline{c},\\
\frac{\partial\overline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \overline{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{v}} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\overline{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}'}\right]}_{\text{Tensor Reynolds}} &= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\overline{p} + \nu\nabla^2\overline{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}
$$

Para a temperatura, o termo $p(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$ em geral não pode ser desprezado!!! Em muitos casos, usamos (com muitas aproximações) uma equação análoga à de difusão-advecção:

$$
\rho_0 c_p\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\overline{T} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\overline{\boldsymbol{v}'T'}\right]\right) \approx \rho c_p\alpha\nabla^2\overline{T} + \overline{\Phi}
$$

A maioria (mas não todos) dos escoamentos de nosso interesse em Hidrologia são turbulentos. Uma exceção são alguns escoamentos no solo. Uma característica importante das equações "de ordem 1" de Reynolds, que listamos acima, é que os termos difusivos e de dissipação são pequenos em relação aos demais em cada equação, respectivamente:

$$
D\nabla^2\overline{c},\;\; \nu\nabla^2\overline{\boldsymbol{v}},\;\; \rho c_p\alpha\nabla^2\overline{T},\;\; \overline{\Phi}.
$$

Por exemplo,

$$
D\nabla^2\overline{c} \ll \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\overline{\boldsymbol{v}'c'}\right].
$$

Isso *não significa* que os efeitos moleculares podem ser simplesmente esquecidos, porque eles se revelam importantes nas equações de Reynolds *de ordem 2*. A equação para a energia cinética da turbulência (ECT, ou TKE em Inglês) foi obtida originalmente pelo próprio Reynolds (Reynolds, 1895):

$$
\overline{e} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\overline{v_i'v_i'};
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{e}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\overline{v}_j\frac{\partial\overline{e}}{\partial x_j} &= \underbrace{-\frac{g}{\rho_0}\overline{v_3'\rho'}}_{B}\underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right)\overline{v_i'v_j'}}_{P}\\
&\quad - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho_0}\overline{v_j'p'} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\overline{v_i'v_i'v_j'} - 2\nu\sum_{i=1}^{3}\overline{u_i's_{ij}'}\right) - \underbrace{2\nu\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\overline{s_{ij}'s_{ij}'}}_{\epsilon\equiv\Phi/\rho_0}.
\end{aligned}
$$

Em condições de "equilíbrio",

$$
\frac{\overline{D}\overline{e}}{Dt} \approx 0 \approx P + B - \epsilon.
$$

A “difusividade turbulenta” é uma analogia ruim:

$$
\begin{aligned}
q_z &= -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial z};\\
\overline{w'T'} &= -K_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

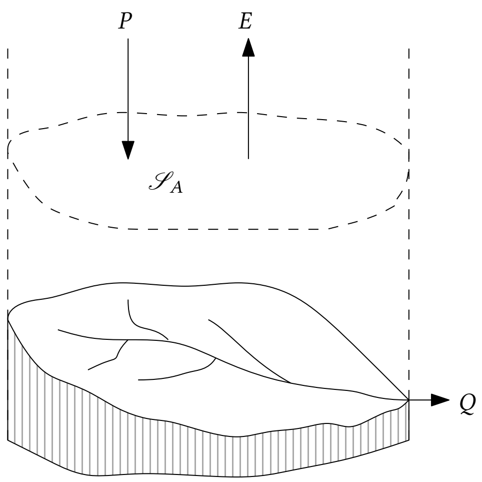
Aqui, $[\![K_T]\!] = [\![\alpha]\!] = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-1}$. Ao contrário da *difusividade molecular* para o calor, α, a *difusividade turbulenta K_T depende do escoamento.* Modelos universais para a previsão de divusividades turbulentas são muito mais a exceção do que a regra. Não há consenso de que essa abordagem um dia possa “resolver” o problema da turbulência (mesmo indo para ordens superiores a 2); na verdade, provavelmente a maioria dos pesquisadores hoje em dia pensa que isso não é possível.

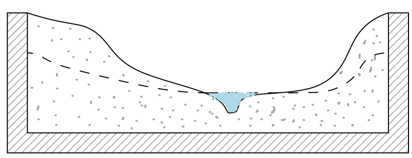
No entanto, na falta de coisa melhor, a abordagem é muitas vezes útil em Engenharia, e nós a encontraremos (ou variações sobre o tema) muitas vezes neste curso.

2.4 Aplicações em Hidrologia

O balanço hídrico de uma bacia hidrográfica

Faça $\mathscr{C}$ = bacia hidrográfica até a camada impermeável e até os divisores de água, e um pouco acima da superfície da bacia.





Nossa hipótese será de que só existe fluxo de massa:

- através da superfície superior,
- na seção exutória da bacia.

Note que isso nem sempre será verdade!

O fluxo de água líquida através da superfície superior é

$$
\dot{M}_P = \int_{\mathscr{S}_A} \rho_w (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = \rho_w \int_{\mathscr{S}_A} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A < 0.
$$

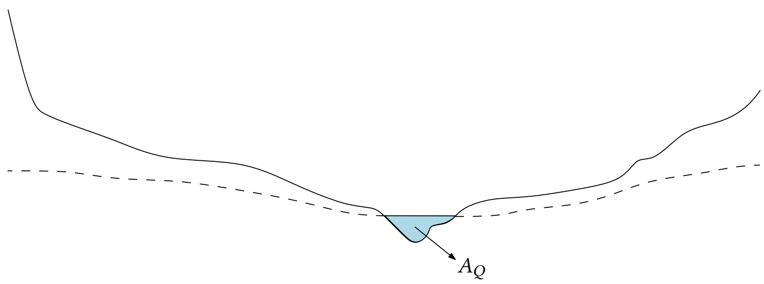
As unidades de $\dot{M}_P$ são

$$
\{\!\!\{\dot{M}_P\}\!\!\} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \times \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}.
$$

Nesta seção vamos definir tudo em termos de *fluxos específicos* (por unidade de área horizontal):

$$
\begin{aligned}
\dot{M}_P &= \int_{\mathscr{S}_A} \rho_w (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A \equiv -PA < 0,\\
\dot{M}_E &= \int_{\mathscr{S}_A} \rho_v (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A \equiv EA > 0,\\
\dot{M}_Q &= \int_{\mathscr{S}_Q} \rho_w (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A \equiv QA > 0.
\end{aligned}
$$

Estritamente falando, estamos desprezando a difusão molecular e "fazendo as contas" alguns metros acima da superfície da bacia hidrográfica sobre uma superfície horizontal plana $\mathscr{S}_A$ cuja área é A. Acima, ρ_w é a massa específica da água líguida. Na integral de $\dot{M}_E$, ρ_v é a massa específica do *vapor d'água*. Note também que a última integral acima é sobre a seção do rio $\mathscr{S}_Q$, cuja área A_Q é muito menor do que a área horizontal A da bacia. Mesmo assim, nós estamos definindo (*nesta seção*) Q como uma vazão mássica *específica*, por unidade de área horizontal da bacia.



Dentro de $\mathscr{C}$ ($\equiv$ bacia hidrográfica) a água é armazenada dentro de plantas e animais, na região vadosa (zona não-saturada do solo) e na região saturada do solo (água subterrânea). Nós vamos desprezar o armazenamento em plantas e animais.

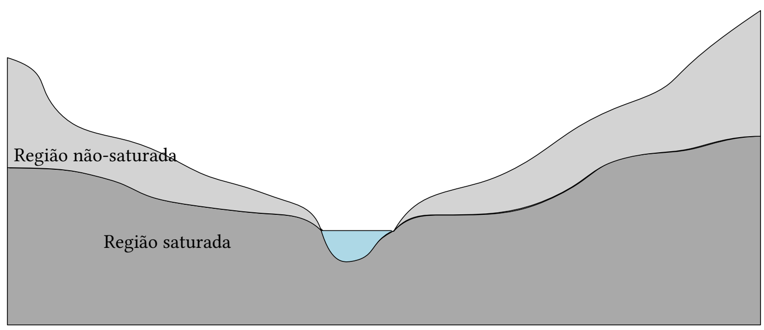
Até agora,

$$
\oint_{\mathscr{S}} \rho (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A = [-P + E + Q]\, A,
$$

restando o termo transiente

$$
\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V
$$

que contabiliza a água no solo.



Agora,

$$M = M_s + M_n = \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V.$$

Defina

$$\begin{aligned} M &\equiv SA, \\ M_s &\equiv S_s A, \\ M_n &\equiv S_n A; \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V &= \frac{\partial}{\partial t} \left[M_s + M_n \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(S_s + S_n) A \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[AS \right] \\ &= A \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

A equação de balanço é

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathscr{C}} \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A \\ 0 &= A \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + A \left[-P + E + Q \right]; \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= P - E - Q, \end{aligned}$$

como já vimos anteriormente. Lembre-se:

$$\begin{aligned} &⦃P⦄ = ⦃E⦄ = ⦃Q⦄ = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}; \\ &⦃S⦄ = \mathrm{kg\,m^{-2}}. \end{aligned}$$

Na prática, quando chove $P \gg E$, e quando não chove $E \gg P$ (pelo menos enquanto a bacia não fica muito seca), mas a equação de balanço hídrico em geral envolve uma *média temporal*, de forma que *na média* ambos os termos são importantes. De fato, se P, E e Q são valores *instantâneos* para a bacia como um todo,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= P - E - Q, \\ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}\tau &= \int_t^{t+\Delta t} \left[P - E - Q \right] \, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Defina

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\Rightarrow$$

$$\int_t^{t+\Delta t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle P \rangle\,\Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} E(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle E \rangle\,\Delta t,$$

$$\int_t^{t+\Delta t} Q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \langle Q \rangle\,\Delta t,$$

de tal maneira que $\langle P \rangle$ significa a *média temporal* de P ao longo de Δt. Fazendo o mesmo para E e Q,

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = [\langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle]\,\Delta t.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

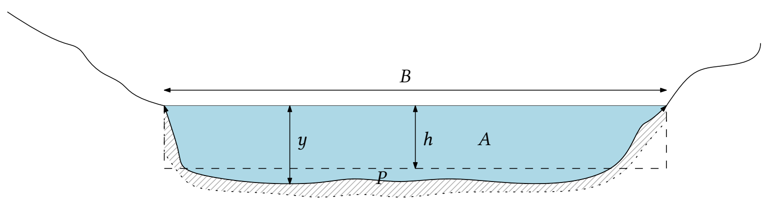
$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_t^{t+\Delta t} \mathrm{d}S = S(t+\Delta t) - S(t); \;\Rightarrow$$

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \langle P \rangle - \langle E \rangle - \langle Q \rangle\,.$$

Note que $\langle P \rangle$ e $\langle Q \rangle$ são medidos(estimados) com *razoável* facilidade e acurácia. Porém, a medição(estimação) de S_n, S_s e E é *muito* difícil.

2.5 Balanços de massa, quantidade de movimento e energia em um trecho de rio em escoamento uniforme e permanente

Algumas definições:



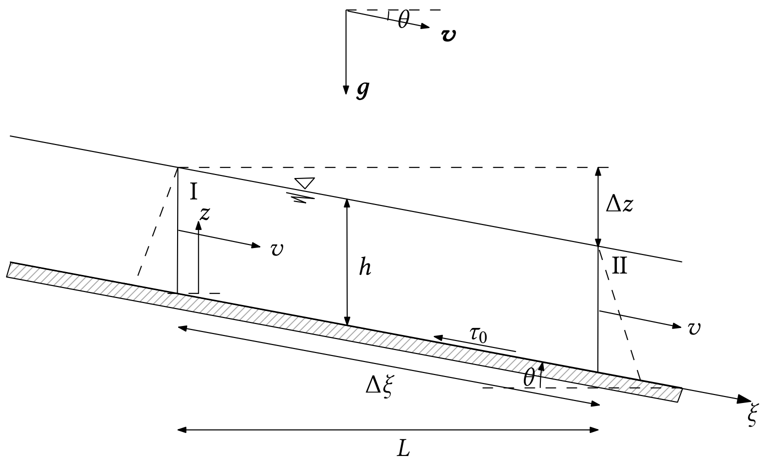
B	Largura
A	Área molhada
P	Perímetro molhado
y	Profundidade do escoamento
h	Profundidade média do escoamento
R	Raio hidráulico

Temos:

$$h = \frac{A}{B},$$
$$R = \frac{A}{P}.$$

Muitas vezes $B \gg h$, e a seção é assimilada a um retângulo de dimensões $B \times h$.

Em escoamento uniforme, a linha d'água é paralela à linha do fundo.



A equação de balanço de massa agora resume-se a (para ρ_w = constante)

$$Q = v\cos\theta A$$

Atenção! Q mudou de significado, e agora é uma vazão volumétrica!
Parta do Teor. Transp. Reynolds e chegue em $Q = v\cos\theta A$

A equação de balanço de quantidade de movimento é

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} v_\xi \rho \, \mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A$$

O escoamento é permanente:

$$F_{s\xi} + F_{c\xi} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} v_\xi \rho \, \mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A$$

O escoamento é uniforme e as velocidades são iguais nas seções de entrada e saída do trecho (o que muda?)

$$F_{c\xi} + F_{s\xi} = \cancelto{0}{\oint_{\mathscr{S}} v_\xi \rho (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}A}$$

$$(\rho g A L)\,\mathrm{sen}\,\theta - \tau_0 P \Delta\xi + \int_{\mathscr{S}_I} p\cos(\theta)\,\mathrm{d}A - \int_{\mathscr{S}_{II}} p\cos(\theta)\mathrm{d}A = 0,$$
$$(\rho g A L)\,\mathrm{sen}\,\theta - \tau_0 P \Delta\xi = 0,$$

Existe portanto um equilíbrio entre o peso e o atrito do fundo sobre a água no trecho.

$$
\begin{aligned}
L &= \Delta\xi \cos\theta;\\
\theta \approx 0 \Rightarrow \cos\theta &\approx 1;\ \ \operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta;\\
\rho g A \Delta\xi \cos\theta \operatorname{sen}\theta &= \tau_0 P \Delta\xi,\\
\rho g A \Delta\xi \operatorname{tg}\theta &= \tau_0 P \Delta\xi,\\
g\frac{A}{P}\operatorname{tg}\theta &= \frac{\tau_0}{\rho}
\end{aligned}
$$

$\operatorname{tg}\theta = S_0$

$$
\tau_0 = \rho g R S_0
$$

$\tau_0/\rho \equiv v_*^2$:

$$
\begin{aligned}
gRS_0 &= v_*^2\\
1 &= \frac{gRS_0}{v_*^2},\\
v^2 &= \left(\frac{v}{v_*}\right)^2 gRS_0\\
v &= \frac{v}{v_*}\sqrt{gRS_0},\\
v &= C\sqrt{gRS_0} \qquad \text{(Equação de Chézy)}
\end{aligned}
$$

Atenção para as simplificações! Isso foi obtido para uma velocidade v relativamente mal especificada (nós multiplicamos os dois lados da equação por v^2!), e supostamente igual à velocidade média na seção.

Note que se a área da seção for medida na vertical, a afirmativa de Chow et al. (1988, p. 33),

> The weight of fluid in the control volume is γAL (L é o nosso $\delta\xi$)

está estritamente errada, mas para ângulos pequenos, como vimos acima, o resultado final é na prática o mesmo.

A equação de balanço de energia é

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathscr{W}} + \dot{\mathscr{Q}} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} e\rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A,\\
e &= u + \frac{v^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Passo a passo:

$$
\dot{\mathscr{W}} = \int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A;
$$

Primeiramente, a integral de volume:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V &= \int_{\mathscr{C}} \rho g v \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}V \\
&= \rho g v \operatorname{sen}\theta \int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}V \\
&= \rho g v \operatorname{sen}\theta L B h.
\end{aligned}
$$

mas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta &= S_0, \\
L\tan\theta &= \Delta z, \\
Bh &= A, \\
vA &= Q, \;\Rightarrow \\
\int_{\mathscr{C}} \rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V &= \rho g Q \Delta z.
\end{aligned}
$$

Em seguida, a integral de superfície:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t} &\approx -p\boldsymbol{n} \;\Rightarrow \\
\oint_{\mathscr{S}} (\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.
\end{aligned}
$$

Mas $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) \neq 0$ apenas ao longo das superfícies I e II:

$$
\oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A = \int_{\mathrm{I}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A + \int_{\mathrm{II}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A.
$$

Ao longo da superfície I (fazendo $z=0$ no fundo),

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= -v\cos\theta; \\
p(z) &= p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h-z).
\end{aligned}
$$

Ao longo da superfície II (fazendo $z=0$ no fundo),

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) &= +v\cos\theta; \\
p(z) &= p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h-z).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{I}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \int_{z=0}^{h} +v\cos\theta\,[p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h-z)]\,B\,\mathrm{d}z \\
&= +v\cos\theta\left[p_{\mathrm{atm}} B h + \frac{1}{2}\rho g B h^2\right]; \\
\int_{\mathrm{II}} (-p\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}A &= \int_{z=0}^{h} -v\cos\theta\,[p_{\mathrm{atm}} + \rho g(h-z)]\,B\,\mathrm{d}z \\
&= -v\cos\theta\left[p_{\mathrm{atm}} B h + \frac{1}{2}\rho g B h^2\right].
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\oint_{\mathscr{S}} (-p\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A = 0.$$

Juntando tudo até agora,

$$\dot{\mathcal{W}} = \rho g Q \Delta z.$$

A equação de balanço de energia fica:

$$\rho g Q \Delta z + \dot{Q} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} e\rho\, \mathrm{d}V} + \oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A.$$

Suponha agora, por simplicidade, que as energias internas específicas são uniformes em cada uma das seções I e II. Temos

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathscr{S}} e\rho(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}A &= \int_{\mathrm{I}} \left(u_1 + \frac{v^2}{2}\right) \rho(-v\cos\theta)\, \mathrm{d}A \\
&+ \int_{\mathrm{II}} \left(u_2 + \frac{v^2}{2}\right) \rho(+v\cos\theta)\, \mathrm{d}A \\
&= -\rho v \cos\theta \left(u_1 + \frac{v^2}{2}\right) Bh + \rho v \cos\theta \left(u_2 + \frac{v^2}{2}\right) Bh \\
&= \rho v \cos\theta Bh (u_2 - u_1) \\
&= \rho Q (u_2 - u_1).
\end{aligned}$$

É importante explicar fisicamente que $\dot{Q} < 0$. Para explicitar isso, façamos

$$\rho g Q \Delta z - \left|\dot{Q}\right| = \rho Q (u_2 - u_1).$$

Mas a perda de carga é *por definição* a energia mecânica (em unidades de comprimento) convertida em interna e (também) exportada para fora de $\mathscr{C}$ como fluxo de calor:

$$\rho g Q h_f \equiv \left|\dot{Q}\right| + \rho Q (u_2 - u_1)$$

Portanto,

$$h_f = \Delta z.$$

Em resumo, quando o escoamento é permanente, a variação do nível d'água é igual à perda de carga.

2.6 Métodos racionais para o cálculo da perda de carga

O perfil log

Um dos maiores desafios em Mecânica dos Fluidos foi o desenvolvimento de métodos *racionais* para o cálculo da perda de carga em escoamentos turbulentos. A história da Mecânica dos Fluidos vale um ou mais livros à parte: veja por exemplo Darrigol (2005). No caso de escoamentos laminares, relações entre velocidade média na seção e perda de carga podem ser obtidas diretamente a partir de soluções das equações de Navier-Stokes.

Por exemplo, para um escoamento sob pressão em um duto retangular de largura infinita e altura 2δ, o perfil de velocidade é parabólico, e dado por

$$u(z) = \frac{gS_f}{2\nu} z\,(2\delta - z)\,,$$

onde g é a aceleração da gravidade, ν é a viscosidade cinemática, e $z = 0$ na parede inferior, e

$$S_f = -\frac{1}{\rho g}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

é a perda de carga unitária, calculada em função do gradiente de pressão na tubulação. A integração da equação acima entre $z = 0$ e $z = 2\delta$ produz a relação para a perda de carga:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2h}\int_{z=0}^{2h} u(z)\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{gS_f\delta^2}{3\nu}; \Rightarrow\\
&= \frac{\mathrm{m\,s^{-2}m^2}}{\mathrm{m^2\,s^{-1}}} = \mathrm{m\,s^{-1}}\\
q = 2\delta v &= \frac{2gS_f\delta^3}{3\nu}.
\end{aligned}$$

A importância dessa equação é enorme: se quisermos projetar uma tubulação para a vazão q (por unidade de largura), podemos resolver a equação para S_f, e consequentemente calcular a pressão necessária na tubulação para produzir a vazão desejada.

Em escoamentos turbulentos, não é possível deduzir analticamente uma equação para o perfil de velocidade na seção, mas uma série de argumentos relativamente sofisticados e parcialmente baseados nas equações de conservação leva ao perfil log de velocidade de vón Kármán (Tennekes e Lumley, 1972; Pope, 2000):

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right),$$

onde z_0 é a rugosidade para a quantidade de movimento, e $\kappa = 0.4$ é a constante de vón Kármán. Note que nós já encontramos a velocidade de atrito v_* antes; em um canal,

$$v_* = \sqrt{gRS_f},$$

onde S_f é a perda de carga. Em escoamento permanente e uniforme, nós sabemos que $S_f = h_f/L = S_0$, onde S_0 é a declividade do fundo.

Uma abordagem racional agora pode ser obtida, facilmente, para relacionar a vazão média no canal com a perda de carga. A velocidade média na seção é

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{h}\int_{z=0}^{h} \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\,\mathrm{d}z \\
v &\approx \frac{1}{h}\int_{z=z_0}^{h} \frac{v_*}{\kappa}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{v_*}{\kappa}\left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Essa equação já basta, mas para vermos as coisas com mais clareza, considere o seguinte: em uma seção retangular bem larga, o raio hidráulico é praticamente igual à altura do escoamento:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{A}{P} \\
&= \frac{Bh}{2h + B} \\
&= \frac{h}{2\frac{h}{B} + 1} \\
&\approx h,\ h \ll B.
\end{aligned}
$$

Façamos agora

$$
\begin{aligned}
v_* &= \sqrt{ghS_f}, \\
v &= \frac{\sqrt{ghS_f}}{\kappa}\left[\frac{z_0}{h} + \left(\ln\left(\frac{h}{z_0}\right) - 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

como $h \approx R$, isso pode ser escrito também em termos de R:

$$
v = \frac{\sqrt{gRS_f}}{\kappa}\left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1\right)\right].
$$

Incidentalmente, isso mostra que o coeficiente de Chézy não é constante, mas sim

$$
C = \frac{1}{\kappa}\left[\frac{z_0}{R} + \left(\ln\left(\frac{R}{z_0}\right) - 1\right)\right].
$$

Agora, dada a geometria da seção e a perda de carga unitária S_f (igual a S_0 para escoamento permanente e uniforme), podemos calcular a velocidade média, e vice-versa: dada uma certa geometria e uma velocidade média *desejada* (no caso de projeto de canais artificiais, ou de intervenções de Engenharia em canais naturais), podemos determinar a declividade S_0 necessária.

Note que a equação obtida é *dimensionalmente consistente*:

$$
\begin{aligned}
[\![v]\!] &= \mathsf{LT^{-1}}, \\
\left[\!\!\left[\sqrt{gRS_f}\right]\!\!\right] &= \left[\!\!\left[\left[\mathsf{LT^{-2}\,L\,1}\right]^{1/2}\right]\!\!\right] = \mathsf{LT^{-1}}, \\
[\![\kappa]\!] &= 1, \\
\left[\!\!\left[\frac{z_0}{R}\right]\!\!\right] &= 1.
\end{aligned}
$$

Além disso, a função log possui argumento adimensional, como dita o Teorema de Buckingham (Buckingham, 1914).

Observe que para que o cálculo seja realizado, é preciso conhecer a rugosidade z_0 do "fundo". Além disso, se a incógnita do problema for R (ou h), ou S_f, a solução precisará ser numérica. Métodos para a obtenção de raízes de equações que não possuem solução algébrica são bem conhecidos (método da bissecção, método de Newton-Raphson, etc.) e podem ser facilmente implementados.

2.6.1 A fórmula de Manning

Por motivos históricos, as equações da sub-seção acima não são normalmente utilizadas para o cálculo de perdas de carga em canais e rios. Historicamente, o perfil log só surgiu no século XX, com os estudos de Ludwig Prandtl e Theodor vón Kárman sobre camadas-limite turbulentas. Esses estudos foram em seguida sistematizados para o cálculo de perdas de carga em tubulações por Colebrook (1939) e Moody (1944).

Antes disso, entretanto, o engenheiro irlandês R. Manning propôs uma fórmula empírica para relacionar v e S_f em canais (Manning, 1891):

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2},$$

que em geral é denominada "Equação de Manning". A fórmula entretanto já tinha sido obtida anteriormente por Gauckler (1867). Na fórmula acima, n é um coeficiente que deve ser obtido experimentalmente para canais com diversos tipos de revestimento. Por exemplo, Chow (1959) apresenta extensas tabelas para n em seu capítulo 5.

Um problema imediato com a equação de Gauckler-Manning é que ela aparenta ser dimensionalmente inconsistente. Do lado esquerdo,

$$[\![v]\!] = \mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1},$$

enquanto que do lado direito,

$$\left[\!\!\left[R^{2/3}\right]\!\!\right] = \mathsf{L}^{2/3}.$$

Para que a equação seja dimensionalmente consistente, é necessário que

$$[\![n]\!] = \mathsf{L}^{-1/3}\,\mathsf{T},$$

mas o significado físico que deve ser atribuído a um n com tais dimensões físicas está longe de ser óbvio.

Provavelmente, o primeiro pesquisador que propôs uma abordagem racional, ou uma "dedução", da equação de Manning, foi Keulegan (1938). O assunto continou a atrair interesse, entretanto, como por exemplo no trabalho de Chen (1991), e mais recentemente de Gioia e Bombardelli (2002). Aqui, nós vamos seguir mais de perto a dedução (se é que esse é um bom termo) de Chen.

A dedução baseia-se em substituir (ou *aproximar*) o perfil log por um perfil potência,

$$\frac{u(z)}{v_*} = a\left(\frac{z}{z_0}\right)^m,$$

e em seguida calcular a velocidade média na seção:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{v_*}{h}\int_0^h u(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{v_*}{h}\int_0^h a\left(\frac{z}{z_0}\right)^m \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{a v_*}{m+1}\left(\frac{h}{z_0}\right)^m
\end{aligned}
$$

É importante observar que esse resultado pressupõe que a distribuição de velocidades é uniforme na direção *transversal*. Isso não é estritamente verdadeiro, e estamos fazendo uma simplificação apenas para captar a essência da relação da equação de Gauckler-Manning com o perfil log e a rugosidade z_0 do fundo do canal. Note que agora tudo ficou muito simples:

$$
v_* = \sqrt{gRS_f},
$$

e

$$
h \approx R,
$$

(para uma seção em que $B \gg h$), de forma que, substituindo h por R, obtemos

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{a}{m+1}\left(\frac{R}{z_0}\right)^m \left[gRS_f\right]^{1/2} \\
&= \left[\frac{a g^{1/2}}{(m+1) z_0^m}\right] R^{m+1/2} S_f^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Se nós compararmos essa equação com a equação de Gauckler-Manning, devemos ter $m = 1/6$, donde

$$
v = \underbrace{\left[\frac{6 a g^{1/2}}{7 z_0^{1/6}}\right]}_{1/n} R^{2/3} S_f^{1/2}.
$$

Note que o coeficiente de Manning agora pode ser expresso em termos de grandezas físicas e números adimensionais:

$$
\frac{1}{n} = \frac{6 a g^{1/2}}{7 z_0^{1/6}},
$$

de forma que

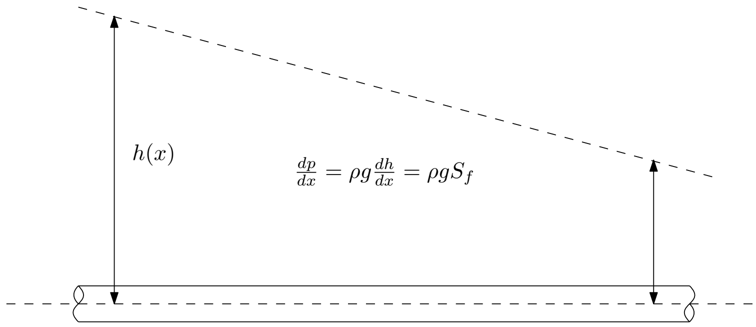
$$
\begin{aligned}
[\![n]\!] &= \left[\left(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-2}\right)^{1/2} \mathsf{L}^{-1/6}\right]^{-1} \\
&= \left[\mathsf{L}^{1/2-1/6}\mathsf{T}^{-1}\right]^{-1} \\
&= \mathsf{L}^{-1/3}\mathsf{T}^{1},
\end{aligned}
$$

o que concorda com as dimensões de n extraídas diretamente da equação de Gauckler-Manning.

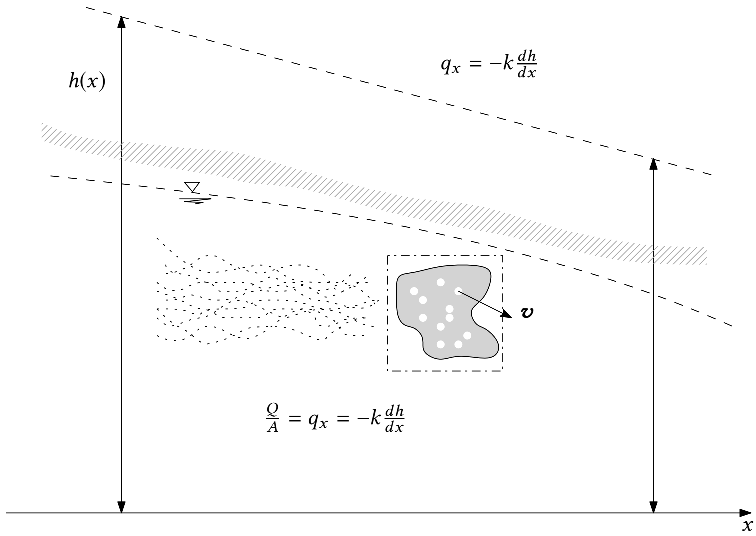
2.7 Escoamentos em meios porosos: lei de Darcy

Em um tubo circular horizontal em escoamento laminar, a velocidade é proporcional à perda de carga:

$$v = \left(\frac{gD^2}{32\nu}\right) S_f.$$



Uma relação semelhante existe para o escoamento através dos microcanais que existem na matriz do solo; ela é a lei de Darcy:



$$q_x = \frac{Q}{A} = -k\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x},$$

onde

$$h(x) = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{q_x^2}{2g}$$

é a carga hidráulica total. O último termo acima em geral é considerado desprezível.

Nota: cuidado com a “termodinâmica” de Chow et al. (1988), porque ela não é muito boa: há muitas imprecisões. Por exemplo, a equação (2.7.5),

$$\mathrm{d}u = c_p \mathrm{d}T$$

está *errada*!

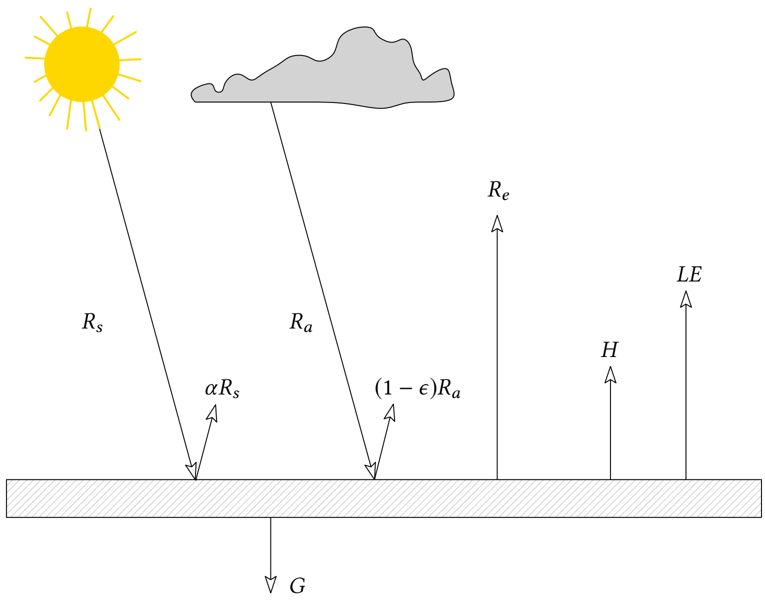
2.8 O balanço de radiação na superfície

A superfície da Terra recebe dois tipos de radiação:

Radiação de onda curta , na faixa 0.2–3.0 µm, emitida pelo sol, e transmitida através da atmosfera. Uma parte chega diretamente da direção aparente do sol (radiação solar direta) e outra chega após múltiplas revlexões (radiação solar difusa).

Radiação de onda longa , emitida pela própria atmosfera (gotas de água, vapor d'água, gases de efeito estufa, etc.) na faixa 3.0–100.0 μm.

O balanço de energia na superfície pode ser melhor entendido a partir da figura a seguir:



$$
\begin{aligned}
R_l &= R_s(1-\alpha) + \epsilon R_a - R_e,\\
R_e &= \epsilon \sigma T_0^4,\\
R_l &= H + LE + G.
\end{aligned}
$$

Os significados dos símbolos acima são os seguintes:

R_l Irradiância líquida ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

R_s Irradiância solar incidente ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

R_a Irradiância atmosférica incidente ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

R_e Irradiância emitida ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

H Fluxo de calor sensível ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

LE Fluxo de calor latente ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)

E	Fluxo de massa de vapor d'água ($\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$)
L	Calor latente de evaporação (ou vaporização) ($\mathrm{J\,kg^{-1}}$)
G	Fluxo de calor no solo ($\mathrm{W\,m^{-2}}$)
T_0	Temperatura da superfície (K)
α	Albedo da superfície (1)
ϵ	Emissividade/absortividade da superfície (1)
σ	é a constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.

Note que nas equações acima $⦃E⦄ = \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$; $⦃L⦄ = \mathrm{J\,kg^{-1}}$ e que portanto

$$
\begin{aligned}
⦃LE⦄ &= \mathrm{J\,kg^{-1} kg\,m^{-2}\,s^{-1}} \\
&= \mathrm{J\,m^{-2}\,s^{-1}} = \mathrm{W\,m^{-2}}.
\end{aligned}
$$

2.9 Hidrologia computacional

Atualmente, muitos dos "métodos" desenvolvidos historicamente para hidrologia estão se tornando, ou se tornaram, obsoletos, com o advento de amplos recursos computacionais, com a expansão das redes de monitoramento, com o surgimento de sistemas de informação geográfica, e com o advento do grandes bases de dados de reanálise e de sensoriamento remoto.

Algumas bases globais são extremamente úteis, e devem ser citadas explicitamente:

SRTM (Shuttle Radar Topograpphy Mission) Veja https://www2.jpl.nasa.gov/srtm/. Dados de topografia com resolução de 30 m, para todo o planeta.

MODIS Um grande número de produtos de sensoriamento remoto (satélite) (Ver tabelas a seguir)

CSFV2 (Dados de reanálise). Ver https://rda.ucar.edu/. Dados em format NETCDF.

Endereços de obtenção de produtos MODIS úteis para estimativas espacializadas de evaporação

Variável	Endereço
r_0	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod09.php
T_0, ϵ_0	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod11.php
NDVI	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod13.php
E	https://modis.gsfc.nasa.gov/data/dataprod/mod16.php

Frequência e resolução de produtos disponíveis

Variável	Frequência	Resolução espacial
r_0	8 dias	250 m
r_0	8 dias	500 m
r_0	1 dia	1 km
r_0	1 dia	250 m
T_{0r}, ϵ_0	8 dias	1 km
T_{0r}, ϵ_0	1 dia	1 km
NDVI	16 dias	250 m
NDVI	16 dias	500 m
NDVI	16 dias	1 km
E	8 dias	500 m

Nós precisamos, portanto, de capacidade para acessar as bases de dados, recuperar a informação relevante, entender e traduzir formatos, e realizar os processamentos necessários.

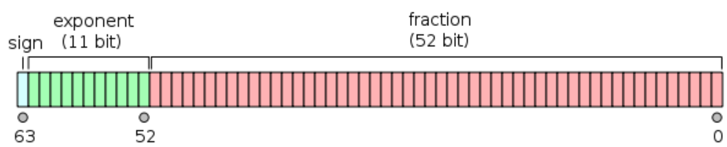
Nesta aula, nós vamos aprender alguns conceitos básicos que podem ser úteis para nós, embora a maior parte do processamento no curso vá ser feito com ferramentas e com formatos relativamente simples.

A escolha de uma linguagem de programação

No fundo, qualquer uma serve. Use a que você dominar melhor. Minha preferência pessoal, principalmente para um curso como o nosso, definitivamente é Python. Todos os meus exemplos neste curso serão em Python. Minha sugestão de instalação é miniconda: `https://docs.conda.io/en/latest/miniconda.html`.

Formatos binários, e formatos texto

Num formato binário, os dados são gravados como estavam na memória. Em geral isso significa que cada 8 bytes = 64 bits (tipicamente) codificam um número de ponto flutuante. Em computadores com processadores Intel, isso em geral significa o esquema abaixo:



A faixa de números que podem ser representados em 64 bits com essa organização é a seguinte:

$$\pm 2^{51} \times 2^{\pm 2^{10}}$$

A *mantissa* é um número inteiro de 52 bits. O *expoente* é outro número inteiro de 10 bits (mais um bit de sinal). O maior número representável em módulo dessa forma é

$$\pm 2^{51} \times 2^{1023} = \pm 2.024022533073106 \times 10^{323},$$

mas na prática o menor e o maior valor representáveis são

$$\pm 1.79769 \times 10^{308}.$$

Além disso (no sentido de $\pm\infty$) ocorre *overflow*.

Os números mais próximos de 0 representáveis são

$$\pm 2.22507 \times 10^{-308}.$$

Além disso (no sentido de 0) ocorre *underflow*.

O comportamento do programa quando ocorre *overflow*, *underflow* ou quando ocorrem operações ilícitas (por exemplo, $\sqrt{-1.0}$ para números "reais") é indefinido, e depende da linguagem e muitas vezes das opções com que o programa é rodado.

Um ponto importante a ser levado em consideração é que o fato de a representação interna ser toda na base 2 leva a erros de arredondamento. Considere o programa em Python

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
x = 0.1
print('%40.38f' % x)
```

sua saída é

```
0.10000000000000000555111512312578270212
```

Devido aos erros de arredondamento a se passar da base 10 para a base 2, o programa

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
x = 0.0
while True :
   x = x + 0.1
   print(x)
   if (x == 1.0) :
      break
   pass
pass
```

não para nunca!

Dito isso, vamos fazer alguns exemplos de arquivos binários. Nosso primeiro exemplo vai escrever 10 números de ponto flutuante em formato binário no disco, e depois nós vamos ver o seu "conteúdo". O programa é

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fou = open('bbin.dat','wb')      # abre um arquivo. wb == write/binary
from numpy import arange         # arange devolve um array com incrementos fixos
aa = arange(0.0,10.0,0.1,float) # cria o array
aa.tofile(fou)                   # escreve o array no arquivo fou
fou.close()                      # fecha o arquivo
print('%6.4f' % aa[0])
```

A saída agora, se visualizada, é

```
^@^@^@^@^@^@^@^@<9A><99><99><99><99><99><B9>?<9A><99><99><99><99><99>
<C9>?433333<D3>?<9A><99><99><99><99><99><D9>?^@^@^@^@^@^@<E0>?433333
<E3>?gfffff<E6>?<9A><99><99><99><99><99><E9>?<CD><CC><CC><CC><CC><CC>
<EC>?^@^@^@^@^@^@<F0>?<9A><99><99><99><99><99><F1>?433333<F3>?<CD><CC>
<CC><CC><CC><CC><F4>?gfffff<F6>?^@^@^@^@^@^@<F8>?<9A><99><99><99><99>
```

```
<99><F9>?433333<FB>?<CD><CC><CC><CC><CC><CC><FC>?gfffff<FE>?^@^@^@^@^@
^@^@@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^@@<9A><99><99><99><99><99>^A@gfffff^B@43
3333^C@^@^@^@^@^@^@^D@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^D@<9A><99><99><99><99>
<99>^E@gfffff^F@433333^G@^@^@^@^@^@^@^H@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^H@<9A>
<99><99><99><99><99>@gfffff@433333^K@^@^@^@^@^@^@^L@<CD><CC><CC><CC>
<CC><CC>^L@<9A><99><99><99><99><99>^M@gfffff^N@433333^O@^@^@^@^@^@^@^P@
gfffff^P@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^P@333333^Q@<9A><99><99><99><99><99>^Q
@^@^@^@^@^@^@^R@gfffff^R@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^R@433333^S@<9A><99><99>
<99><99><99>^S@^@^@^@^@^@^@^T@gfffff^T@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^T@433333^
U@<9A><99><99><99><99><99>^U@^@^@^@^@^@^@^V@gfffff^V@<CD><CC><CC><CC><CC>
<CC>^V@433333^W@<9A><99><99><99><99><99>^W@^@^@^@^@^@^@^X@gfffff^X@<CD>
<CC><CC><CC><CC><CC>^X@433333^Y@<9A><99><99><99><99><99>^Y@^@^@^@^@^@^@
^Z@gfffff^Z@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^Z@433333ESC@<9A><99><99><99><99><99>
ESC@^@^@^@^@^@^@^\@gfffff^\@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^\@433333^]@<9A><99>
<99><99><99><99>^]@^@^@^@^@^@^@^^@gfffff^^@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>^^@
433333^_@<9A><99><99><99><99><99>^_@^@^@^@^@^@^@@333333@gfffff@<9A><99>
<99><99><99><99>@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>@^@^@^@^@^@^@!@333333!@gfffff!
@<9A><99><99><99><99><99>!@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>!@^@^@^@^@^@^@"@3333
33"@gfffff"@<9A><99><99><99><99><99>"@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>"@^@^@^@^@
^@^@#@433333#@gfffff#@<9A><99><99><99><99><99>#@<CD><CC><CC><CC><CC><CC>#@
```

Note que o tamanho do arquivo `bbin.dat` é 800 bytes. Faz sentido, certo?

Por outro lado, nós podemos imprimir os 10 elementos do array aa, depois que ele foi criado, em um arquivo texto, com o seguinte programa

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fou = open('ttxt.dat','wt')      # abre um arquivo. wt == write/text
from numpy import arange         # arange devolve um array com incrementos fixos
aa = arange(0.0,10.0,0.1,float) # cria o array
for i in range(0,10):           # loop sobre todos os elementos do array
   fou.write('%02d␣%4.1f\n' % (i,aa[i]))   # escreve cada elemento, pulando linha
pass
fou.close()                      # fecha o arquivo
```

cuja saída é

```
00  0.0
01  0.1
02  0.2
03  0.3
04  0.4
05  0.5
06  0.6
07  0.7
08  0.8
09  0.9
```

Finalmente, vamos ler o arquivo texto de volta:

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fin = open('ttxt.dat','rt')      # abre um arquivo. wt == read/text
from numpy import zeros          # zeros devolve um array com zeros
aa = zeros(10,float)             # cria o array
for line in fin:                 # loop sobre as *linhas*
   field = line.split()          # separa os campos
   i = int(field[0])             # o primeiro campo
   aa[i] = float(field[1])       # o segundo campo
   print(field,i,aa[i])          # o que lemos?
pass
fin.close()                      # fecha o arquivo
```

A saída é

```
['00', '0.0'] 0 0.0
['01', '0.1'] 1 0.1
['02', '0.2'] 2 0.2
['03', '0.3'] 3 0.3
['04', '0.4'] 4 0.4
['05', '0.5'] 5 0.5
['06', '0.6'] 6 0.6
['07', '0.7'] 7 0.7
['08', '0.8'] 8 0.8
['09', '0.9'] 9 0.9
```

Tendo feito uma rápida "introdução" a Python (veja também os capítulos sobre Python em meu livro, em: https://nldias.github.io/pdf/matappa-2ed.pdf), vamos agora fazer um problema do livro-texto.

(Ex. 2.3.2 de Chow et al. (1988))

The precipitation and streamflow for the storm of May 12, 1980, on Shoal Creek at Northwest Park in Austin, Texas, are shown below. Calculate the time distribution of storage on the watershed assuming that the initial storage is 0. Compute the total depth of precipitation and the equivalent depth of streamflow which occurred during the 8-hour period. How much storage remained in the watershed at the end of the period? What percent of the precipitation appeared as streamflow during this period? What was the maximum storage? Plot the time distribution of incremental precipitation, streamflow, change in storage, and cumulative storage. The watershed area is 7.03 mi^2.

Time (h)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	
Incremental Precipitation (in)		0.18	0.42	0.21	0.16				
Instantaneous Streamflow (cfs)	25	27	38	109	310	655	949	1060	
Time (h)	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
Instantaneous Streamflow (cfs)	968	1030	826	655	466	321	227	175	160

Primeiro, nós preparamos um arquivo texto com os dados:

```
# Time (h) Precip (in)  Streamflow (cfs)
0.0        0.00         25.0
0.5        0.18         27.0
1.0        0.42         38.0
1.5        0.21         109.0
2.0        0.16         310.0
2.5        0.00         655.0
3.0        0.00         949.0
3.5        0.00         1060.0
4.0        0.00         968.0
4.5        0.00         1030.0
5.0        0.00         826.0
5.5        0.00         655.0
6.0        0.00         466.0
6.5        0.00         321.0
7.0        0.00         227.0
7.5        0.00         175.0
8.0        0.00         160.0
```

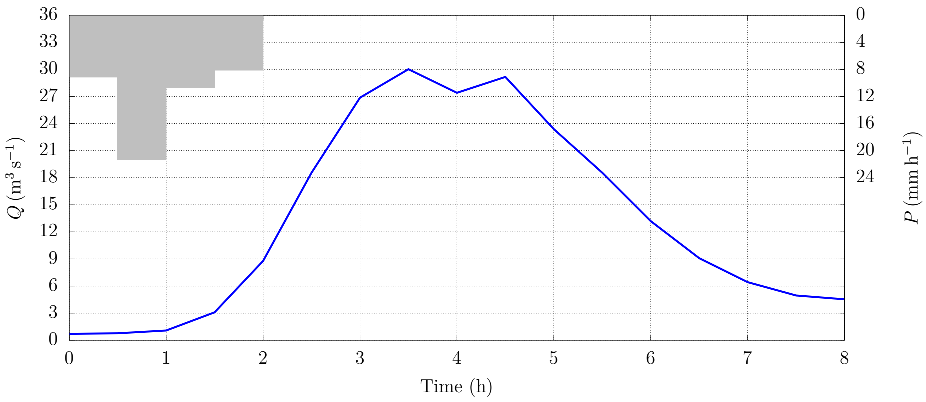
Em seguida nós plotamos os dados com Gnuplot

Os dados de entrada são plotados por

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
set output 'shoaldata.tex'
set xrange [0:8]
```

```
set yrange [0:36]
set ytics 0,3
set y2range [48:0]
set xtics 0,1
set y2tics 0,4,24
set xlabel 'Time␣(h)'
set y2label '$P\,(\mathrm{mm\,h^{-1}})$'
set ylabel '$Q\,␣(\mathrm{m^3\,s^{-1}})$'
set boxwidth 1.0 relative
set grid
plot 'shoal.dat' using (column(1)-0.25):(column(2)*25.4*2) axes x1y2 \
      notitle with boxes fs solid lc rgb 'gray75',\
      'shoal.dat' using 1:(column(3)*0.3048**3) axes x1y1 \
      notitle with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue'
```

e o gráfico resultante é este aqui:



O programa de processamento de dados está aqui:

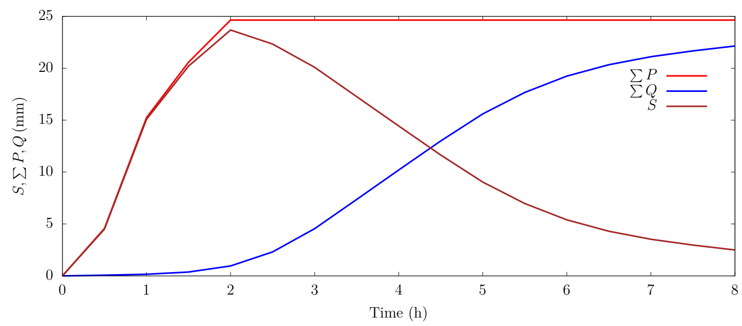
```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
fin = open('shoal.dat','rt')       # abre um arquivo. wt == read/text
tt = []                            # lista vazia de tempos
pp = []                            # lista vazia de precipitações
qq = []                            # lista vazia de vazões
for line in fin:                   # loop sobre as *linhas*
   if line[0] == '#' :             # pula o cabeçalho
      continue
   pass
   field = line.split()            # separa os campos
   inst = float(field[0])          # o instante
   prec = float(field[1])*25.4     # precip em mm durante o intervalo
   vaz = float(field[2])*0.3048**3 # vazão em m3/s no instante
   tt.append(inst)                 # adiciona à lista de tempos
   pp.append(prec)                 # adiciona à lista de precips
   qq.append(vaz)                  # adiciona à lista de vazões
pass
fin.close()                        # fecha o arquivo de entrada
n = len(tt)                        # tamanho das listas
from numpy import array
tt = array(tt)                     # as listas se tornam arrays
pp = array(pp)
qq = array(qq)
# ------------------------------------------------------------------
# área da bacia, em m^2
# ------------------------------------------------------------------
Area = 7.03 * (1609.34)**2
print('Area␣=␣%8.2f␣km2' % (Area/1.0e6))
qe = (qq/Area)*1000*3600.0         # vazão específica, mm/h
print(pp)
print(qe)
# ------------------------------------------------------------------
# calculo o volume total precipitado
# ------------------------------------------------------------------
Vp = pp.sum()
```

```
print('Vp␣=␣', Vp, '␣mm')
# ------------------------------------------------------------------
# calculo o volume total escoado com a regra do trapézio
# ------------------------------------------------------------------
deltah = 0.5                        # dados de 0.5 em 0.5 hora
Se = qe[0] + qe[n-1]
Si = 0.0
for k in range(1,n-1):
   Si += qe[k]
Vq = Se + 2*Si
Vq *= deltah
Vq /= 2.0
print('Vq␣=␣', Vq, '␣mm')
# ------------------------------------------------------------------
# cálculo do volume armazenado na bacia em função do tempo
# ------------------------------------------------------------------
fou = open('shoal.out','wt')
Vp = 0.0
Vq = 0.0
Vs = 0.0
fou.write('%4.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f\n' % (0.0,0.0,0.0,0.0,0.0))
for k in range(1,n):
   dp = pp[k]
   dq = (qe[k-1]+qe[k])*deltah/2.0
   Vp += dp
   Vq += dq
   deltas = dp - dq
   Vs += deltas
   fou.write('%4.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f␣%6.2f\n' % (tt[k],Vp,Vq,Vs,deltas))
pass
fou.close()
```

O *script* de Gnuplot para os totais acumulados na bacia é

```
set encoding iso_8859_1
set terminal epslatex standalone color solid font 'lmr' 12 size 21cm, 9cm
set output 'shoalacum.tex'
set xrange [0:8]
set xtics 0,1
set xlabel 'Time␣(h)'
set ylabel '$S,\sum␣P,Q\,(\mathrm{mm})$'
set key at 6.75,20 left
plot 'shoal.out' using 1:2 title '$\sum␣P$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'red',\
     'shoal.out' using 1:3 title '$\sum␣Q$' with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'blue',\
     'shoal.out' using 1:4 title '$S$'      with lines lt 1 lw 5 lc rgb 'brown'
```

e o gráfico resultante é



Capítulo 3

Água na atmosfera

3.1 O balanço radiativo da Terra e o efeito estufa

A lei de Stefan-Boltzmann é

$$R = \epsilon\sigma T^4,$$

onde R é a radiação *emitida* pelo corpo, e T é a sua temperatura. Para um "corpo negro"[1], a emissividade $\epsilon = 1$. Cada superfície real possui uma emissividade $\epsilon < 1$ diferente.

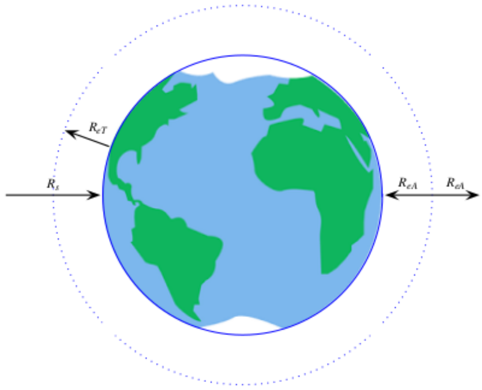
Nesta seção, vamos considerar o equilíbrio termodinâmico global planetário para dois cenários de atmosfera e cobertura de superfície do planeta. O conceito mais simples com o qual podemos trabalhar é o de *temperatura de equilíbrio* T_e: esta é a temperatura em que um planeta está em equilíbrio termodinâmico com a radiação solar incidente. Agora, se a é o albedo planetário ($a \approx 0{,}30$), em média a radiação solar absorvida pela terra é $R_{s0}(1-a)\pi r_T^2$, onde $R_{s0} = 1361.5\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ é a *constante solar*, e r_T é o raio da terra. Por outro lado, o fluxo de energia radiante em ondas longas emitida pela Terra é em média (admitindo-se uma emissividade planetária igual a 1) $\sigma T_e^4 4\pi r_T^2$. Igualando-se os dois:

$$
\begin{aligned}
R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 &= \sigma T_e^4 4\pi r_T^2 \\
T_e &= \left[\frac{R_{s0}(1-a)}{4\sigma}\right]^{1/4} \\
&= \left[\frac{1361.5 \times 0.7}{4 \times 5.670374419 \times 10^{-8}}\right]^{1/4} = 254{,}60\,\mathrm{K} = -18{,}55^\circ\,\mathrm{C}.
\end{aligned}
$$

Essa temperatura T_e é a temperatura que o planeta teria *se não houvesse atmosfera.*

Nós agora vamos construir 2 modelos simples para o efeito estufa. No primeiro, vamos colocar uma "campânula" de vidro em volta da Terra, como mostra a figura a seguir, onde ela é indicada pelo círculo pontilhado.

[1]Isso é um nome técnico, e não significa que o corpo precise ter coloração preta; na verdade, para as temperaturas observadas na atmosfera terrestre, a radiação é emitida em uma faixa de comprimentos de onda invisíveis para os seres humanos.



Nesta figura, a radiação solar atravessa a campânula e incide diretamente sobre a superfície da terra, a qual por sua vez emite radiação de onda longa R_{eT}. Por outro lado, a campânula (= atmosfera) absorve esta última, reemitindo um fluxo R_{eA} de radiação de onda longa tanto de volta à terra quanto em direção ao espaço. Desta forma, o balanço radiativo de ambos os corpos é

$$\begin{aligned} R_s + R_{eA} &= R_{eT}, \\ R_{eT} &= 2R_{eA}. \end{aligned}$$

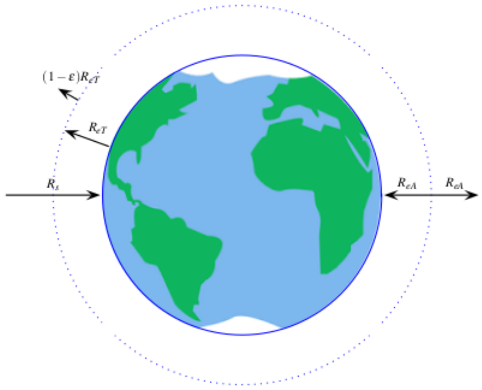
Usando-se as equações de radiação, tem-se:

$$\begin{aligned} R_{s0}(1-a)\pi r_T^2 + \sigma T_A^4 4\pi r_T^2 &= \sigma T_s^4 4\pi r_T^2, \\ \sigma T_s^4 4\pi r_T^2 &= 2\sigma T_A^4 4\pi r_T^2, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 4\sigma T_s^4, \\ \sigma T_s^4 &= 2\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) + 4\sigma T_A^4 &= 8\sigma T_A^4, \\ R_{s0}(1-a) &= 4\sigma T_A^4 \;\; \Rightarrow T_A = T_e; \\ T_s &= 2^{1/4} T_A = 2^{1/4} \times 254.60 = 302.77\,\mathrm{K}. \end{aligned}$$

Nota-se portanto que a temperatura da campânula, que representa a atmosfera[2], é a mesma temperatura de equilíbrio anterior, enquanto que a superfície ficou bem mais quente.

Este modelo pode ser sofisticado com a abertura de uma "janela" atmosférica, ou seja: com a utilização de uma emissividade atmosférica ϵ_a menor que 1. A figura a seguir ilustra este segundo modelo.

[2]Nestes caso simplificado, ela representa o *topo* da atmosfera, na "fronteira" com o espaço sideral; numa atmosfera real, obviamente, a atmosfera se torna progressivamente mais rarefeita na direção do espaço.



Agora, a atmosfera deixa escapar uma parcela $(1-\epsilon_a)$ da radiação emitida pela superfície da Terra. Na construção do balanço termodinâmico, é conveniente usar T_e no lugar de R_{s0}:

$$
\begin{aligned}
4\pi r_T^2 \left[T_e^4 + \epsilon_a \sigma T_A^2 = \sigma T_s^4\right] \\
4\pi r_T^2 \left[\epsilon_a \sigma T_s^4 = 2\epsilon_a \sigma T_A^4\right].
\end{aligned}
$$

Usando-se agora $\epsilon_a = 0{,}9$, a solução do sistema acima é

$$
\begin{aligned}
T_s^4 &= \frac{2T_e^4}{2-\epsilon_a} \Rightarrow T_s = 295{,}64K \\
T_A^4 &= \frac{T_e^4}{2-\epsilon_a} \Rightarrow T_A = 248{,}60K
\end{aligned}
$$

Isso mostra claramente que a existência de "janelas" na atmosfera terrestre produz uma temperatura de superfície *menor*. A implicação disto é que se uma "janela" for fechada pela presença de um novo gás de efeito estufa que absorve radiação de onda longa nesta janela, a superfície ficará mais quente.

Chow et al. (1988) citam um valor médio de 210 W m^{-2} para a radiação solar atingindo a superfície da Terra. De onde vem esse número? Provavelmente ele é igual à incidência média de radiação solar dividade pela área da superfície da terra:

$$
\frac{R_{s0}(1-a)\pi r_T^2}{4\pi r_T^2} = \frac{R_{s0}(1-a)}{4} = 238.26 \mathrm{W\,m^{-2}}.
$$

(A diferença deve ser porque Chow et al. (1988) provavelmente usaram valores um pouco diferentes para R_{s0} e a.)

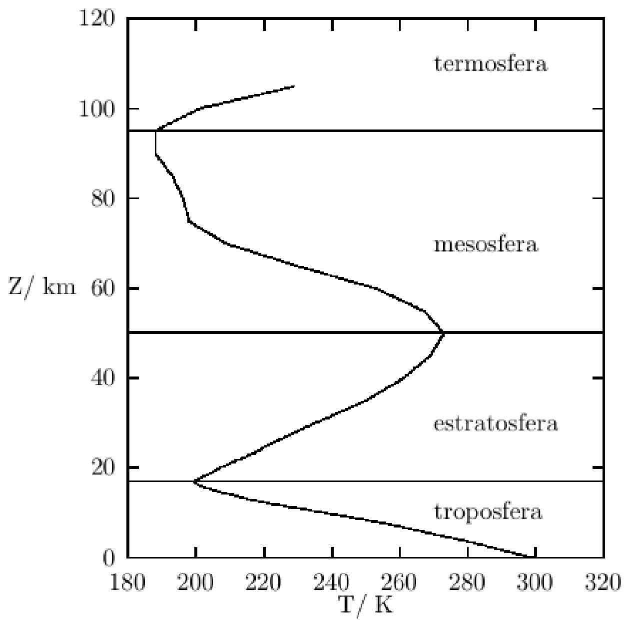
3.2 Circulação atmosférica

A circulação na atmosfera é forçada

1. pelo balanço radiativo do planeta;

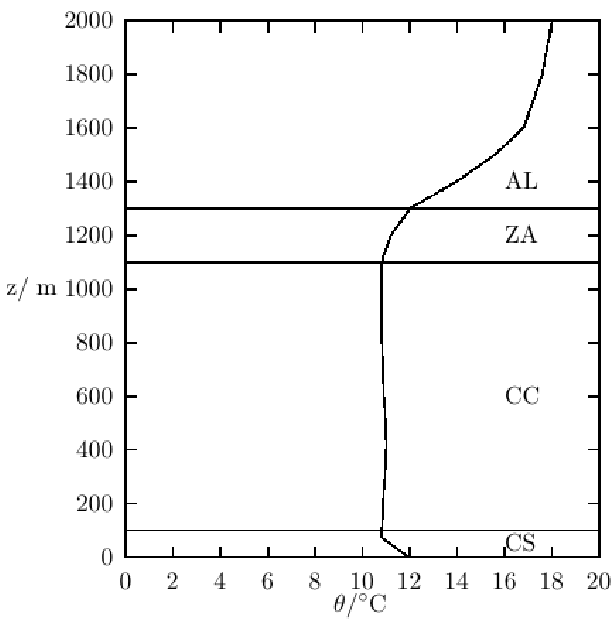
2. pela rotação da Terra;
3. pela trajetória da Terra no espaço.

As camadas da atmosfera:

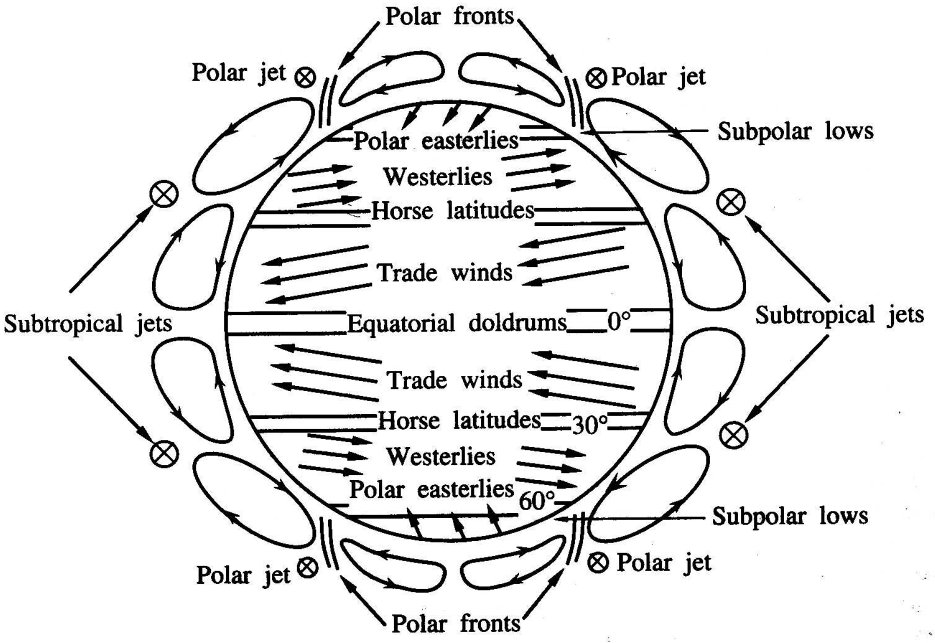


A troposfera é a camada mais densa, mais próxima da superfície, e onde ocorrem episódios significativos de convecção.

Apesar da diminuição de temperatura com a altitude, a troposfera é em sua maior parte *estável*. Uma pequena região, a camada-limite atmosférica, é instável ou neutra.



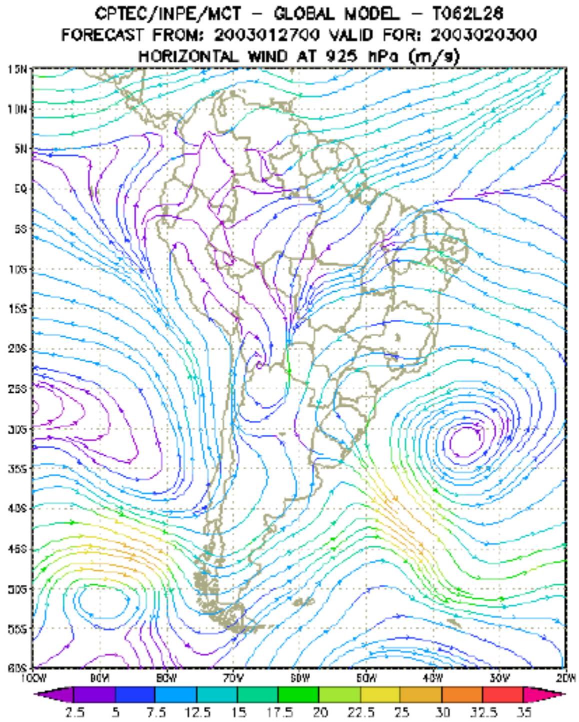
A combinação da existência de células de convecção e da rotação da terra produz os padrões globais de circulação vertical e horizontal.



Fonte: Seinfeld e Pandis (1998), Figura 1.2 (sem permissão, com objetivos estritamente didáticos)

As células verticais que vemos na figura acima são: a célula tropical, a célula de latitudes médias, e a célula polar. Massas de ar frio que se originam nas regiões polares movem-se em direção às zonas temperadas e tropicais, e seu encontro com massas de ar mais quente dão origem às frentes frias.

Em tempo bom, padrões persistentes de circulação se forma em torno de anti-ciclons extratropicais, como o anti-ciclone do Atlântico Sul:



3.3 A leis dos gases ideais e calores específicos para uma substância pura

A lei dos gases ideais se aplica bem para condições típicas da troposfera. Para uma *substância pura*, ela é dada por

$$pV = nR^{\#}T,$$

onde p é a pressão, V é o volume ocupado pelo gás, n é o número de moles, $R^{\#} = 8{,}314\,462\,618\,15\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ (no SI) é a constante universal dos gases e T é temperatura termodinâmica. Ainda para uma pura substância, ela também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} p &= n\frac{R^{\#}}{V}T = \frac{m}{M}\frac{R^{\#}}{V}T = \frac{m}{V}\frac{R^{\#}}{M}T \Rightarrow \\ p &= \rho R T. \end{aligned}$$

Acima, M é a massa molar; m é a massa do gás, o qual está relacionado com o número de moles por

$$m = nM;$$

a constante de gás é

$$R = \frac{R^{\#}}{M},$$

a qual depende do gás específico via M; e

$$\rho = \frac{m}{V}$$

é a densidade; seu inverso,

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{3.1}$$

é o *volume específico* v. Note que $p = \rho RT$ é mais útil do que $pV = nRT$ na prática: V não aparece na primeira, e ela só envolve quantidades intensivas (pressão, densidade e temperatura), de modo que se aplica a todos os pontos na atmosfera.

A lei dos gases é um caso específico de *equação de estado* em Termodinâmica; a equação de estado para uma substância pura toma uma das formas

$$p = p(v, T) \qquad \text{or} \qquad v = v(p, T) \qquad \text{or} \qquad T = T(p, v).$$

No caso dos gases atmosféricos, as letras minúsculas indicam quantidades específicas (por unidade de massa ou unidade de volume), e são mais convenientes já que nós não costumamos tratar indivídalmente "sistemas" ou "parcelas" de ar.

Duas funções termodinâmicas importantes são a energia interna específica u e a entalpia específica $\hbar$ definida por

$$\hbar = u + pv.$$

Para uma substância pura, u e $\hbar$ são funções de duas variáveis, escolhidas entre p, v e T. Nós geralmente escrevemos

$$\begin{aligned} u &= u(v, T), \\ \hbar &= \hbar(p, T), \end{aligned}$$

uma vez que estes pares levam a definições úteis de quantidades mensuráveis, tais como calores específicos. As equações acima levam a diferenciais perfeitos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v + \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T, \\ \mathrm{d}\hbar &= \left(\frac{\partial \hbar}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial \hbar}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T. \end{aligned}$$

Os calores específicos a volume constante e pressão constante são definidos por

$$\begin{aligned} c_v &= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v, \\ c_p &= \left(\frac{\partial \hbar}{\partial T}\right)_p. \end{aligned}$$

Os subscritos v e p no lado direito das equações acima são usados em termodinâmica como lembretes de que u está sendo tomada em função da v, T, e que $\hbar$ está sendo tomada como uma função de p, T.

Para um gás perfeito, a equação de estado toma a forma

$$pv = RT,$$

onde R é uma constante de gás específica para a substância pura e é possível mostrar que, neste caso u e $\hbar$ são funções de T somente (Adkins, 1983). Então, as derivadas parciais que definem c_v e c_p se tornam derivadas ordinárias. Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \hbar}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial T}\left[u + pv\right]\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} + p\frac{R}{p} \quad \Rightarrow \\
c_p &= c_v + R.
\end{aligned}$$

Fisicamente, $c_p > c_v$ devido à energia extra necessária para a expansão da o ar contra a pressão constante p.

3.4 A atmosfera como uma mistura de gases ideais

A atmosfera no entanto não é uma substância pura, mas uma mistura de gases. A questão então é como $pV = nR^{\#}T$ pode ser razoavelmente generalizado para uma mistura de gases. Na verdade, a partir de agora, muitas vezes quando nós usarmos $p = \rho RT$, etc, estaremos nos referindo à pressão atmosférica total p (de uma mistura de gases), à densidade total ρ da atmosfera, etc ..

Portanto, vamos começar, exigindo que $pV = nRT$ *valha para a mistura*; em seguida, o número total de moles, n, é a soma de o número de moles de cada componente individual. Seja i o índice para cada um dos gases em uma mistura; temos

$$n = \sum_i n_i,$$

onde n_i é o número de moles do gás i.

Queremos que a lei dos gases perfeitos seja aplicável também para cada constituinte. Existem duas possibilidades para fazermos isso: o modelo de pressões parciais, e o modelo de volumes parciais. No primeiro caso, especificamos para cada gás

$$p_i V = n_i R^{\#} T.$$

Neste modelo de todos os gases ocumpam um volume comum V, cada um exercendo a sua própria pressão parcial p_i, de tal modo que a pressão total é

$$p = \sum_i p_i.$$

No segundo caso,

$$pV_i = n_i R^{\#} T,$$

e agora todos os gases são sujeitos à mesma pressão p, cada um ocupando, nominalmente, um volume parcial V_i, com

$$V = \sum_i V_i.$$

Em ambos os casos, somando as equações de estado individuais recupera-se a lei dos gases perfeitos para a mistura. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\sum_i (p_i V) &= \sum_i \left(n_i R^\# T\right), \\ \left(\sum_i p_i\right) V &= \left(\sum_i n_i\right) R^\# T, \\ pV &= nR^\# T.\end{aligned}$$

Os modelos de volumes parciais e pressões parciais levam a

$$x_i = \frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n}$$

que define uma concentração (expressa em tradicionalmente %, partes por milhão (ppm), partes por bilião (ppb), etc.) quer em fração de pressão parcial, fração de volume parcial, ou *fração molar*. A lei de gás para cada constituinte também pode ser escrita

$$\begin{aligned}p_i &= n_i \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{M_i} \frac{R^\#}{V} T = \frac{m_i}{V} \frac{R^\#}{M_i} T \quad \Rightarrow \\ p_i &= \rho_i R_i T,\end{aligned}$$

onde (como antes para uma substância pura)

$$m_i = n_i M_i$$

e

$$\begin{aligned}\rho_i &= m_i / V, \\ v_i &= \frac{1}{\rho_i},\end{aligned}$$

são a densidade ou a massa específica (com massa m_i ocupando o volume V) e o volume específico, respectivamente, do gás i, e M_i é a massa molar do gás i.

$$R_i = \frac{R^\#}{M_i}$$

é a constante do gás i.

Note que ρ_i é ela mesma uma concentração, dada por massa da substância i por volume ($\mathrm{kg_i\,m^{-3}}$).

Mais uma vez, $p = \rho RT$ é válida para o mistura. Para ver como, note que a massa total da mistura é

$$m = \sum_i m_i;$$

e da mesma forma para a densidade total:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum_i m_i}{V} = \sum_i \frac{m_i}{V} = \sum_i \rho_i.$$

Também será necessário definir a *concentração mássica* ou *fração mássica* de cada constituinte,

$$c_i \equiv \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}.$$

Agora nós somamos as equações dos constituintes para obter

$$\begin{aligned}\sum_i p_i &= \sum_i \rho_i R_i T,\\ p &= \left(\sum_i \rho_i R_i\right) T \equiv \rho R T.\end{aligned}$$

Isso *define* a constante de gás R da mistura; agora, temos

$$\begin{aligned}R &= \frac{\sum_i \rho_i R_i}{\rho}\\ &= \frac{\sum_i \frac{m_i}{V} R_i}{\frac{m}{V}}\\ &= \sum_i \frac{m_i}{m} R_i = \sum_i c_i R_i.\end{aligned}$$

Portanto, dadas as concentrações mássicas, nós podemos calcular a constante de gás equivalente.

A massa molar média da mistura é

$$M = \sum_i x_i M_i = \frac{\sum_i n_i M_i}{n} = \frac{m}{n},$$

Isso finalmente permite fechar o circuito e recuperar a constante de gás para a mistura:

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{m}\left(\sum_i m_i R_i\right)\\ &= \frac{1}{m}\left(\sum_i n_i M_i R_i\right)\\ &= \frac{1}{m}\left(\sum_i n_i R^\#\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_i n_i\right) R^\#\\ &= \frac{n}{m} R^\# = \frac{R^\#}{M}.\end{aligned}$$

Concentrações

Uma relação entre x_i e c_i pode agora ser facilmente obtida:

$$x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{m_i}{M_i}}{\frac{m}{M}} = \frac{m_i}{m}\frac{M}{M_i},$$

ou

$$x_i M_i = c_i M.$$

Outras medidas de concentração também estão em uso em meteorologia, e precisam ser definidas. A razão de mistura pode ser expressa quer como uma *razão de mistura molar*,

$$\eta_i = \frac{n_i}{n - n_i},$$

ou como uma *razão de mistura mássica*

$$r_i = \frac{m_i}{m - m_i}.$$

É simples converter frações mássicas c_i em razões (mássicas) de mistura r_i e vice-versa:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{\rho_i}{\rho - \rho_i} = \frac{\frac{\rho_i}{\rho}}{1 - \frac{\rho_i}{\rho}}; \\ r_i &= \frac{c_i}{1 - c_i} \quad \Rightarrow \\ c_i &= \frac{r_i}{1 + r_i}. \end{aligned}$$

A razão de mistura, por conseguinte, é a razão entre a quantidade (quer em moles ou em massa) da substância i e a quantidade de todos as *outras* substâncias. Segue-se que para qualquer substância *diferente* do vapor de água , o denominador inclui a quantidade de vapor d'água presente no ar no momento da medição. Por esta razão, *quando i não é vapor d'água*, η_i e r_i são chamadas de *razões de mistura úmidas*.

Nós listamos na tabela a seguir as fracções molares de vários gases atmosféricos em $\mathrm{g\,m^{-3}}$ em uma atmosfera *seca* (uma atmosfera fictícia sem vapor de água). Os valores de M_i foram obtidos a partir de NIST (2020). Os valores de x_i são de Dias (2020), e eles são *aproximações*, com base em várias referências existentes (Iribarne e Godson, 1981; COESA, 1976; Wallace e Hobbs, 2006; Wikipedia, 2020a); os valores de x_i, particularmente para CO_2, são atualizados com os dados disponíveis mais recentes (a partir de 2020). Além disso, os valores foram ajustados manualmente para garantir que

$$\sum_i x_i = 1.$$

Constituição de uma atmosfera "seca" (não incluindo vapor d'água. Os valores são aproximados, e ajustados para assegurar que as fracções molares somem 1.

Gas	M_i ($\mathrm{g\,mol^{-1}}$)	x_i ($\mathrm{mol\,mol^{-1}}$)
N_2	28.0134	0.78078700
O_2	31.9988	0.20943200
Ar	39.948	0.00934000
CO_2	44.0095	0.00041390
Ne	20.1797	0.00001818
He	4.002602	0.00000524
CH_4	16.0425	0.00000170
Kr	83.798	0.00000110
H_2	2.01588	0.00000055
N_2O	44.0128	0.00000033
soma		1.00000000

Estamos agora em condições de calcular a constante do gás para *ar seco*, R_d, por meio de $M = \sum_i x_i M_i$ e $R = R^\#/M$, utilizando os valores da tabela acima, e obtendo

$$R_d = 287.0429\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}.$$

Este valor é ligeiramente menor do que o que foi adotado para a atmosfera padrão de 1976 ($R_d = 287.0569$), que é compatível com a tabela I-4 de Iribarne e Godson (1981). Note entretanto que tem havido um aumento constante no CO_2 atmosférico desde a publicação da Atmosfera Padrão de 1976, e portanto, além de não ser muito diferente do de COESA (1976), o valor adotado aqui é provavelmente mais próximo do estado atual (2020) da atmosfera.

Ar úmido

Note que as equações de seção 3.3 não são estritamente válidas para o ar atmosférico, o que não é um substância *pura*; ao contrário, é uma mistura de muitos gases. Cada nova constituinte faz com que as equações termodinâmicas fiquem mais complexas; em particular, funções de estado, tais como u e $\hbar$ tornam-se então também funções das concentrações de cada novo constituinte.

Nós não vamos seguir o caminho rigoroso de tratar a atmosfera como uma mistura de vários gases e de dar o tratamento termodinâmico completo para a mistura; em vez disso, vamos considerar "ar seco", discutido acima e vamos introduzir diversos índices de umidade para a concentração de vapor d'água (que é o componente variável mais importante da atmosfera).

Considere então um certo volume V, composto inicialmente de ar seco com massa m_d, número total de moles n_d, pressão p_d, e densidade ρ_d, ao qual se adiciona vapor d'água com massa m_v e n_v moles. As equações desenvolvidas na seção 3.4 aplicam-se para o ar úmido. De acordo com o modelo de pressões parciais, cada componente gasoso exerce sua própria pressão parcial em função da temperatura T e do número de moles n_i. Se vapor d'água for adicionado isotermicamente, a pressão total após sua adição aumentará em um valor igual à *pressão parcial de vapor d'água* a qual é dada por

$$e = \frac{1}{V} n_v R^\# T.$$

Estritamente falando, deveríamos ter usado p_v em lugar de e acima, mas é padrão em Meteorologia denominar a pressão parcial de vapor e, e vamos seguir essa prática.

O conteúdo de vapor d'água no ar, entretanto, é altamente variável na atmosfera; além disso, em medições de fluxos turbulentos de escalares é frequentemente preferível utilizar concentrações medidas em uma atmosfera seca equivalente (veja, por exemplo, Butenhoff e Khalil, 2002). Portanto, nós revisitaremos diversas definições de concentração em relação aos componentes de uma atmosfera seca. Para a fração molar, nós agora temos a pressão do ar seco, a razão volumétrica e a razão molar

$$x_{di} = \frac{p_i}{p_d} = \frac{V_i}{V_d} = \frac{n_i}{n_d} \qquad (i \neq v)$$

e a fração mássica (ou concentração mássica) de ar seco,

$$c_{di} = \frac{\rho_i}{\rho_d} \qquad (i \neq v).$$

Acima, observe que após a adição de vapor d'água, o volume dos constituintes do ar seco será $V_d < V$. Também podemos considerar as razões de mistura *secas*

$$\eta_{di} = \frac{n_i}{n_d - n_i}, \qquad (i \neq v)$$

e

$$r_{di} = \frac{m_i}{m_d - m_i} \qquad (i \neq v).$$

Desde que as concentrações relativas dos componentes do ar seco permaneçam as mesmas, os cálculos anteriores das propriedades do ar seco M_d e R_d (a massa molecular média e a constante de gás do ar seco, respectivamente) também permanecem inalteradas. Verifiquemos:

$$p = p_d + e,$$

onde p_d é dado por

$$p_d = \sum_{i \neq v} p_i = \sum_{i \neq v} \rho_i R_i T \equiv \rho_d R_d T.$$

Como antes, a equação acima define R_d. Portanto, o valor da constante de gás de ar seco em uma atmosfera úmida é

$$R_d = \frac{\sum_{i \neq v} \rho_i R_i}{\rho_d} = \sum_{i \neq v} \frac{\rho_i}{\rho_d} R_i = \sum_{i \neq v} c_{di} R_i,$$

onde os pesos das constantes específicas de gás R_i são agora as concentrações mássicas "secas" c_{di}. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
R_d &= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} m_i R_i \\
&= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i M_i R_i \\
&= \frac{1}{m_d} \sum_{i \neq v} n_i R^\# = \frac{1}{m_d} \left(\sum_{i \neq v} n_i \right) R^\# \\
&= \frac{n_d}{m_d} R^\# \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Mas a massa molar média do ar seco em uma atmosfera úmida é, por definição,

$$M_d = \sum_{i \neq v} x_{di} M_i = \frac{\sum_{i \neq v} n_i M_i}{n_d} = \frac{m_d}{n_d}$$

de forma que, como antes,

$$R_d = \frac{R^\#}{M_d}.$$

Note também que se as concentrações relativas dos componentes do ar seco não mudam, então os x_{di}'s de agora são os mesmos que os x_i's na tabela acima, o que prova a afirmação de que neste caso os valores de M_d e R_d não mudam.

Com estes resultados em mão, podemos simplificar os cálculos substancialmente dividindo ar ocupando V com massa total de m em um componente seco e vapor de água:

$$
\begin{aligned}
m &= m_d + m_v, \\
\frac{m}{V} &= \frac{m_d}{V} + \frac{m_v}{V}, \\
\rho &= \rho_d + \rho_v,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

onde ρ_v é a densidade de vapor de água. Em si mesmo, ρ_v é um índice de concentração de vapor de água; em meteorologia, é chamado *umidade absoluta*. Usando $M_v = 18.0153\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, descobrimos que

$$
R_v = 461.5230\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}
$$

é a constante de gás para o vapor d'água. A pressão parcial de vapor d'água é

$$
e = \rho_v R_v T.
$$

A *umidade específica* q é o mesmo que a fração mássica de vapor d'água c_v, sendo definida como

$$
q = \frac{\rho_v}{\rho}.
$$

Em meteorologia, é normal usar q e não c_v (este último também é fácil confundir com o calor específico a volue constante, c_v, *e será evitado.* De novo: compare $c_v \times c_v$). Somando as pressões parciais de ar seco e de ar úmido,

$$
\begin{aligned}
p &= p_d + e \\
&= \rho_d R_d T + \rho_v R_v T \\
&= (\rho_d R_d + \rho_v R_v)\, T \\
&= \rho \left(\frac{\rho_d}{\rho} R_d + \frac{\rho_v}{\rho} R_v \right) T \\
&= \rho R_d \left(\frac{\rho_d}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{R_v}{R_d} \right) T \\
&= \rho R_d \left((1 - q) + \frac{R_v}{R_d} q \right) T.
\end{aligned}
$$

Substituindo

$$
\begin{aligned}
\frac{R_v}{R_d} &= 1.608 \approx 1.61 \qquad \Rightarrow \\
p &= \rho R_d \underbrace{(1 + 0.61q)T}_{T_v}, \qquad \text{ou} \\
p &= \rho \underbrace{R_d (1 + 0.61q)}_{R} T
\end{aligned}
$$

A *temperatura virtual* T_v definida acima é a temperatura de uma atmosfera seca com a mesma densidade ρ; T_v é ligeiramente maior do que T. Um outro índice de umidade atmosférica é a razão de mistura (mais especificamente, a razão de mistura mássica para o vapor d'água). A razão de mistura foi definida anteriormente. Para o vapor d'água, a razão de mistura mássica é

$$r_v = \frac{\rho_v}{\rho - \rho_v} = \frac{\rho_v}{\rho_d}.$$

Na sequência nós vamos usar sistematicamente a lei dos gases

$$p_i = \rho_i R_i T \implies \rho_i = \frac{p_i}{R_i T}.$$

Relações úteis entre a razão de mistura e a umidade específica são

$$\begin{aligned}
r_v &= \frac{\rho_v}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{(p-e)}{R_d T}} \\
&= \frac{R_d}{R_v}\frac{e}{p-e} = 0.622\,\frac{e}{p-e}; \qquad (3.4)\\
q &= \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\rho_d + \rho_v} \\
&= \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p-e}{R_d T} + \frac{e}{R_v T}} \\
&= \frac{R_d}{R_v}\frac{e}{p + \left(\frac{R_d}{R_v} - 1\right)e} \\
&= 0.622\frac{e}{p - 0.378e} \approx 0.622\frac{e}{p}. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

3.5 Saturação e grandezas associadas

O calor latente de evaporação da água, L_w, é a quantidade de a energia usada para mudar a fase de uma unidade de massa de líquido para vapor, em uma mistura pura das duas fases. Uma boa aproximação para a obtenção de uma expressão para L_w como uma função da temperatura é o pressuposto de que as capacidades térmicas das duas fases são iguais. Isso leva a (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. 10.16)

$$\mathrm{d}L_w = [c_{pv} - c_{pw}]\mathrm{d}T$$

onde c_{pv} e c_{pw} são os calores específicos a pressão constante do vapor de água e da água no estado líquido, respectivamente. Se os calores específicos, por sua vez, forem supostos constantes, obtém-se

$$L_w = a_L + b_L T$$

onde $b_L = [c_{pv} - c_{pw}]$. No SI, com T in Kelvins, Dake (1972) fornece

$$L_w = 3.142689 \times 10^6 - 2.365601 \times 10^3 T$$

in $\mathrm{J\,kg^{-1}}$. Henderson-Sellers (1984) argumenta que uma expressão mais acurada é

$$L_w = 1.91846 \times 10^6 \left[T/(T - 33.91)\right]^2 .$$

Uma alternativa razoável é usar um valor constante, dado que L_w varia pouco com T na faixa de temperaturas normalmente observadas no ambiente. A $T = 288.15\,\mathrm{K}$, $L_w = 2.464 \times 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.

Para um sistema constituído por vapor d'água e água no estado líquido em equilíbrio, uma equação pode ser obtida para a derivada em relação à temperatura da *pressão de saturação do vapor d'água* e^* (a pressão do vapor de água em equilíbrio com a água em estado líquido) para a mudança em volume específico v entre as duas fases e o calor latente, a saber

$$\frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} = \frac{L_w}{T\Delta v};$$

esta é a equação de *Clausius-Clapeyron* equation (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. (10.11)). Acima,

$$\Delta v = v_v - v_w.$$

Supondo a validade da lei dos gases ideais, e que o volume específico da fase líquida é insignificante em comparação com o volume específico do vapor d'água, a equação de Clausius-Clapeyron leva a (Adkins, 1983, Cap. 10, eq. (10.12))

$$\frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} = \frac{L_w e^*}{R_v T^2}.$$

Observe que a dependência do calor latente L_w com a temperatura termodinâmica pode ser usada para integrar a equação acima,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^*}{e^*} &= \frac{L_w}{R_v}\frac{\mathrm{d}T}{T^2},\\
\frac{\mathrm{d}e^*}{e^*} &= \frac{1}{R_v}\frac{(a_L + b_L T)}{T^2}\,\mathrm{d}T,\\
\ln\left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)}\right) &= \int_{T_0}^{T}\frac{1}{R_v}\frac{(a_L + b_L\tau)}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau,\\
\ln\left(\frac{e^*(T)}{e^*(T_0)}\right) &= \frac{1}{R_v}\left\{-b_L\ln(T_0) + b_L\ln(T) + a_L\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\},
\end{aligned}$$

resultando em

$$e^*(T) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{b_L}{R_v}} e^*(T_0)\exp\left[\frac{a_L}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right],$$

onde T_0 é uma temperatura de referência. Com $b_L = 0$, a equação acima se parece muito (mas não é igual) à equação empirica de Teten (Murray, 1966; Dilley, 1968; Stull, 1995; Alduchov e Eskridge, 1996):

$$e^*(T) = e_0\exp\left[\frac{b(T - T_1)}{T - T_2}\right],$$

com $e_0 = 610.78\,\mathrm{Pa}$, $b = 17.2693882\,\mathrm{K^{-1}}$, $T_1 = 273.16\,\mathrm{K}$ e $T_2 = 35.86\,\mathrm{K}$. Para a pressão de vapor em equilíbrio com o gelo, as constantes mudam para $b = 21.8745584$ e $T_2 = 7.66$.

Para a maioria das aplicações meteorológicas, a fórmula de Teten é mais do que suficiente. Note entretanto que as constantes mudam para a pressão do vapor de saturação sobre o *gelo*; Note também que a presença de sais na água altera e^* significativamente. Finalmente, a equação de Richards (Brutsaert, 1982) é

$$\begin{aligned}
e^*(T) &= 101\,325 \exp\left[13.3185 t_r - 1.9760 t_r^2 - 0.6445 t_r^3 - 0.1299 t_r^4\right] && (3.6)\\
\frac{\mathrm{d}e^*}{\mathrm{d}T} &= \frac{373.15}{T^2} e^*(T)\left[13.3185 - 3.9520 t_r - 1.9335 t_r^2 - 0.5996 t_r^3\right], && (3.7)\\
t_r &= 1 - \frac{373.15}{T}. && (3.8)
\end{aligned}$$

Muitas dessas fórmulas foram obtidas para padrões antigos de temperatura (ITS-27, ITS-48, IPTS-68, IPTS-68(75), EPT-76), que foram revistos significativamente em 1990 (ITS-90); ver Consultative Committee for Thermometry (2015); em particular, o ponto de ebulição da água pura (VSMOW; Wikipedia (2020c)) a uma pressão atmosférica (101 325 Pa) é 99.974°C, e não mais 100 °C! (Wikipedia, 2020b).

O conceito de saturação agora permite a definição de vários índices de umidade nele baseados. A *umidade relativa* y é a razão entre a razão de mistura real e a razão de mistura em uma atmosfera saturada, à mesma temperatura e à mesma pressão:

$$y = \frac{r}{r^*}.$$

Note que, por ser especificada à mesma temperatura e pressão, a densidade do ar seco na atmosfera saturada (ρ_{d*}) é na verdade menor do que a densidade do ar seco na atmosfera não-saturada (ρ_d). As equações de estado são

$$\begin{aligned}
p - e &= \rho_d R_d T, & e &= \rho_v R_v T, && (3.9)\\
p - e^* &= \rho_{d*} R_d T, & e^* &= \rho_v^* R_v T. && (3.10)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
y = \frac{r}{r^*} = \frac{\frac{\rho_v}{\rho_d}}{\frac{\rho_v^*}{\rho_{d*}}} &= \frac{\rho_{d*}}{\rho_d} \times \frac{\rho_v}{\rho_v^*}\\
&= \frac{\frac{p-e^*}{R_d T}}{\frac{p-e}{R_d T}} \times \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e^*}{R_v T}}\\
&= \frac{p - e^*}{p - e} \times \frac{e}{e^*}\\
&= \frac{p(1 - e^*/p)}{p(1 - e/p)} \times \frac{e}{e^*}\\
&\approx (1 - e^*/p)(1 + e/p)\frac{e}{e^*}\\
&= \left(1 - (e^*/p)^2\right)\frac{e}{e^*}\\
&\approx \frac{e}{e^*}. && (3.11)
\end{aligned}$$

A última equação acima é a comumente utilizada em cálculos.

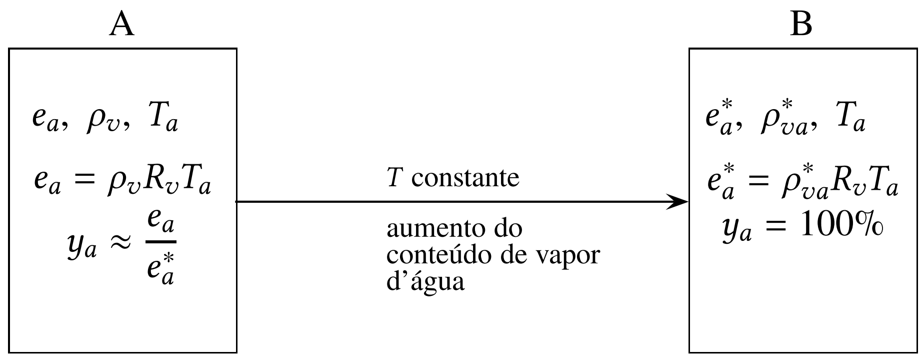
A *temperatura de ponto de orvalho* T_d é a temperatura à qual a pressão reinante de vapor d'água se torna a pressão de saturação:

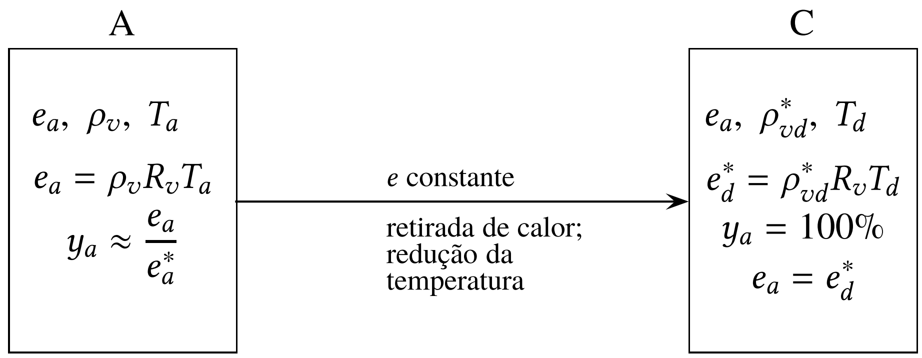
$$e^*(T_d) = e.$$

Geralmente, a temperatura varia com a altura na camada limite atmosférica . Subscritos como T_x ou e_x, muitas vezes serão usados para especificar temperatura, pressão de vapor de água, etc, em algum nível específico. Além disso, muitas vezes, vamos usar a notação simplificada

$$\begin{aligned} e_x^* &= e^*(T_x), \\ d_x &= \frac{\mathrm{d}e^*(T_x)}{\mathrm{d}T}, \\ \rho_{vx}^* &= \rho_v^*(T_x). \end{aligned}$$

Na figura a seguir, mostramos no quadro A, as condições prevalecentes no atmosfera. No quadro B, a saturação é atingida, a partir de A, através do aumento teor de vapor de água. No quadro C, condições de saturação também são atingidas, mas desta vez através de uma queda contínua na temperatura até a temperatura de ponto de orvalho T_d.





Exercises

3.1 Show that the *exact* expression for e as a function of y also depends on p and is

$$e = \frac{ye^*}{1 + (y-1)\frac{e^*}{p}}.$$

Of course, e^* itself is a function of temperature.

3.6 Temperatura potencial

Análise para uma atmosfera sem condensação

Considere a expansão adiabática de uma parcela de ar, a partir de um nível (mais acima) em que a pressão ambiente é p para um nível mais baixo em que a pressão ambiente é p_0. A primeira lei da termodinâmica é (q é o calor por unidade de massa adicionado ao sistema; w é o trabalho por unidade de massa realizado sobre o sistema)

$$\mathrm{d}u = \text{đ}q + \text{đ}w;$$

Para um processo adiabático ($\text{đ}q = 0$) e reversível,

$$\mathrm{d}u = -p\mathrm{d}v$$

A diferenciação da lei dos gases ($pv = RT$) e o uso das definições dos calores específicos a volume constante e pressão constante leva a

$$\begin{aligned}
p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p &= R\mathrm{d}T \\
c_v\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p - R\mathrm{d}T \\
(c_v + R)\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p = \frac{RT}{p}\mathrm{d}p \\
c_p\mathrm{d}T &= v\mathrm{d}p = \frac{RT}{p}\mathrm{d}p \\
\frac{\mathrm{d}T}{T} &= \frac{R}{c_p}\frac{\mathrm{d}p}{p}.
\end{aligned}$$

Nós agora integramos entre os pares (T, p) e (θ, p_0):

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}}.$$

A temperatura potencial θ definida acima é a temperatura de uma parcela de ar trazida adiabatica e reversivelmente do estado p, T para um estado de referência cuja pressão é p_0.

O cálculo da temperatura potencial deve ser feito com o valor correto de R/c_p no caso de ar úmido. Isso ocorre porque neste caso a constante de gás e o calor específico a pressão constante de ar úmido dependem da umidade específica q. Para ver isso, suponha que a entalpia total (não a *entalpia específica*) para uma parcela de ar com massa total m possa ser calculada adicionando as entalpias de seco e o ar úmido:

$$m\hbar = m_d\hbar_d + m_v\hbar_v.$$

Isso produz

$$\begin{aligned}
\hbar &= \frac{\rho_d}{\rho}\hbar_d + \frac{\rho_v}{\rho}\hbar_v, \\
\hbar &= (1-q)\hbar_d + q\hbar_v, \\
c_p &= \left(\frac{\partial\hbar}{\partial T}\right)_p = (1-q)c_{pd} + qc_{pv} = (1 + 0.84q)c_{pd}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

(usando valores tabelados para c_{pd} e c_{pv}: ver (Brutsaert, 1982, Tabela 3.1): $c_{pd} = 1005\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, e $c_{pv} = 1846\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$).

Com base na definição da temperatura virtual, a constante de gás para ar úmido é

$$R = R_d(1 + 0.61q)$$

(Note que se trata de uma interpretação alternativa de temperatura virtual: nós agora estamos mudando a constante de gás, enquanto mantemos a temperatura absoluta T, de tal forma que $pv = RT$ ainda se aplica.) Portanto,

$$\frac{R}{c_p} = \frac{R_d}{c_{pd}}\frac{1 + 0.61q}{1 + 0.84q}.$$

Usando a identidade

$$\frac{1 + ax}{1 + bx} \equiv 1 - (b - a)x + \frac{(b - a)bx^2}{1 + bx} \approx 1 - (b - a)x,$$

nós encontramos (para $x = q \ll 1$)

$$\frac{R}{c_p} \approx (1 - 0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}$$

para ar úmido. Portanto,

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(1-0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}}$$

Também é imediato obter o calor específico a volume constante para o ar úmido:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = (1 - q)c_{vd} + qc_{vv} = (1 + 0.94q)c_{vd},$$

fazendo novamente uso da Tabela 3.1 de Brutsaert (1982), com $c_{vd} = 716\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, $c_{vv} = 1386\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Finalmente, essas definições se estendem para a temperatura virtual, *mas não de forma unívoca*, como discutido em Brutsaert (1982, seção 3.2b). A *temperatura potencial virtual* é a temperatura virtual que uma parcela de ar úmido teria se trazida adiabaticamente de seu estado real até a pressão de referência p_0:

$$\theta_{vp} = T_v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(1-0.23q)\frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

Isso é ligeiramente diferente (numericamente) da *temperatura virtual potencial*, que é a temperatura potencial de ar seco com a mesma pressão e a mesma densidade iniciais, e que é dada por

$$\theta_{pv} = T_v\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}}.$$

As duas quantidades são obviamente muito próximas numericamente. Daqui para frente, sempre utilizaremos a temperatura potencial virtual. Além disso, nós a denotaremos simplesmente por θ_v.

A taxa de variação da temperatura em uma atmosfera com condensação (taxa pseudo-adiabática)

Considere a equação de estado de um gás ideal, e um estado hidrostático da atmosfera:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{v},\\ pv &= RT \;\Rightarrow\\ p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p &= R\mathrm{d}T\end{aligned}$$

Considere também a 1ª lei da Termodinâmica *para um gás ideal, em um processo adiabático*:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \text{đ}w + \cancelto{0}{\text{đ}q},\\ c_v\mathrm{d}T &= -p\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Substituindo na última equação do bloco anterior,

$$-c_v\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p = R\mathrm{d}T$$

Mas

$$v\mathrm{d}p = -g\mathrm{d}z; \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}-c_v\mathrm{d}T - g\mathrm{d}z &= R\mathrm{d}T,\\ -g\mathrm{d}z &= (R + c_v)\mathrm{d}T,\\ -g\mathrm{d}z &= c_p\mathrm{d}T,\\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{c_p} = 0{,}00976\,\mathrm{K\,m^{-1}},\end{aligned}$$

que é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera úmida, a coisa é mais complicada: à medida que parcelas são levantadas e atingem níveis mais altos e frios, uma parte do vapor d'água condensa, e o calor latente liberado *diminui* a queda de temperatura. Isso produz taxas *pseudo-adiabáticas úmidas*. Um valor representativo, frequentemente citado é

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = 0.00650\,\mathrm{K\,m^{-1}}.$$

Nós podemos retomar os cálculos da temperatura potencial para uma atmosfera em que ocorre condensação, de forma aproximada. Seja portanto

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\alpha$$

a taxa pseudo-adiabática prevalecente na atmosfera. As equações agora são

$$\begin{aligned}v\mathrm{d}p &= -g\mathrm{d}z, &&\text{(eq. hidrostática)}\\ \mathrm{d}T &= -\alpha\mathrm{d}z. &&\text{(“substituindo a 1ª Lei”)}\end{aligned}$$

Com a lei dos gases,

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{RT}{p},\\
\frac{RT}{p}\mathrm{d}p &= -g\mathrm{d}z,\\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= \left(-\frac{g}{RT}\right)\mathrm{d}z,\\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= \left(-\frac{g}{\alpha R}\right)\frac{\mathrm{d}T}{T},\\
p_2 &= p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{g/(\alpha R)},
\end{aligned}
$$

juntamente com

$$
T_2 = T_1 - \alpha(z_2 - z_1).
$$

Água precipitável

É a massa de água em uma coluna da atmosfera entre dois níveis por unidade de área.

$$
m_P(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} q\rho \mathrm{d}z.
$$

Exemplo 3.2.2 de Chow et al. (1988): Calcule a água precipitável em uma coluna de ar de 10 km de altura a partir da superfície ($p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, $T = 30°\mathrm{C}$, $\alpha = 6.5°\mathrm{C\,m^{-1}}$).

Para resolver o problema, nós vamos precisar de um computador, e de uma linguagem de programação. Usarei Python. Precisaremos de uma rotina para calcular a pressão de saturação de vapor d'água, de uma rotina de integração numérica, e das constantes de gás para fazermos todos os cálculos.

O programa `agprec.py` é (espero!) auto-explicativo.

Listing 3.1: `agprec.py` — Cálculo de água precipitável.

```python
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ------------------------------------------------------------------
# Exemplo 3.2.2 de Chow, Maidment & Mays. Por simplicidade, partimos
# de z = 0 com p0 = 101325 Pa, T0 = 303.15 K
#
# Nelson Luís Dias
# criado      em 2020-07-28T18:35:04
# modificado em 2020-07-28T19:20:16
# ------------------------------------------------------------------
def Ta(z):
   '''
   Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
   '''
   alfa = 0.0065
   return 273.15 + 30.0 - alfa*z
# ------------------------------------------------------------------
from math import exp
def es(T):
   '''
   Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
```

```
   temperatura T (K) (Eq de Tetens)
   '''
   b = 17.2693882
   T1 = 273.16
   T2 = 35.86
   e0 = 610.78
   return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
# --------------------------------------------------------------------
def newstate(p1,rho1,T1,z2,delz):
   '''
   Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
   estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
   da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
   '''
   g = 9.81               # aceleração da gravidade
   epsp = 0.001           # erro no cálculo de p2, em Pa
   p20 = p1 + 2*epsp      # força o while a começar
   p2 = p1                # primeira estimativa de p2
   T2 = Ta(z2)            # temperatura do ar em z2: não muda mais
   e2 = es(T2)            # press vapor em z2; não muda mais
# --------------------------------------------------------------------
# Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
# --------------------------------------------------------------------
   q2 = 0.622*e2/p2                  # umidade esp em z2
   rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))     # densidade em z2
   while (abs(p2 - p20) > epsp) :
      p20 = p2                       # guarda o valor anterior
      rhobar = (rho1 + rho2)/2       # dens média da camada
      delp = -rhobar*g*delz          # eq da hidrostática
      p2 = p1 + delp                 # novo p2
      q2 = 0.622*e2/p2               # nova umid esp em z2
      rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))# nova densidade em z2
      print('.')
   pass
   print(p2,rho2,T2,q2)
# --------------------------------------------------------------------
# retorna o estado da atmosfera no nível z2
# --------------------------------------------------------------------
   return (p2, rho2, T2, q2)
# --------------------------------------------------------------------
# aqui começa o programa principal: as condições na superfície estão
# completamente determinadas.
# --------------------------------------------------------------------
Rd = 287.03805                       # cte de gás do ar seco
p0 = 101325.0                        # pressão na superfície
T0 = 303.15                          # temperatura na superfície
e0 = es(T0)                          # press vapor na superfície
q0 = 0.622*e0/p0                     # umid esp na superfície
rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0))      # densidade do ar na superfície
print(q0,rho0)
# --------------------------------------------------------------------
# discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
# --------------------------------------------------------------------
n = 1000                             # 1000 intervalos
zmax = 10000.0                       # altura máxima (m)
delz = 10.0                          # intervalo de integração (m)
# --------------------------------------------------------------------
# crio vetores de estado com n+1 pontos
# --------------------------------------------------------------------
from numpy import arange, zeros
p = zeros(n+1,float)                 # pressão em todos os pontos
T = zeros(n+1,float)                 # temperatura em todos os pontos
q = zeros(n+1,float)                 # umid esp em todos os pontos
rho = zeros(n+1,float)               # densidade em todos os pontos
z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float)     # níveis de cálculo
# ---------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ---------------------------------------------------------------------
(p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
for i in range(n) :
   (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
      newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
pass
```

```
# ----------------------------------------------------------------------
# A integração numérica com a regra do trapézio deve ser relativamente
# simples
# ----------------------------------------------------------------------
ff = rho*q           # função a ser integrada, já calculada pto a pto
Se = ff[0] + ff[n]   # soma, ptos externos
Si = 0.0             # soma, ptos internos
for k in range(1,n):
   Si += ff[k]
pass
I = Se + 2*Si        # agora basta aplicar a fórmula
I *= delz
I /= 2.0
print('Água␣precipitável␣=␣%8.2f␣kg/m2' % I)
```

3.7 Precipitação

A formação de nuvens requer o levantamento de ar úmido até a condensação. Esse levantamento pode ser produzido:

1. Por frentes (chuvas frontais).
2. Pela orografia (chuvas orográficas).
3. Pela atividade convectiva (chuvas convectivas, chuvas "de verão").

A formação de gotas de chuva requer *núcleos de condensação* (aerossóis). Vários tipos de aerossol podem funcionar como núcleos de condensação.

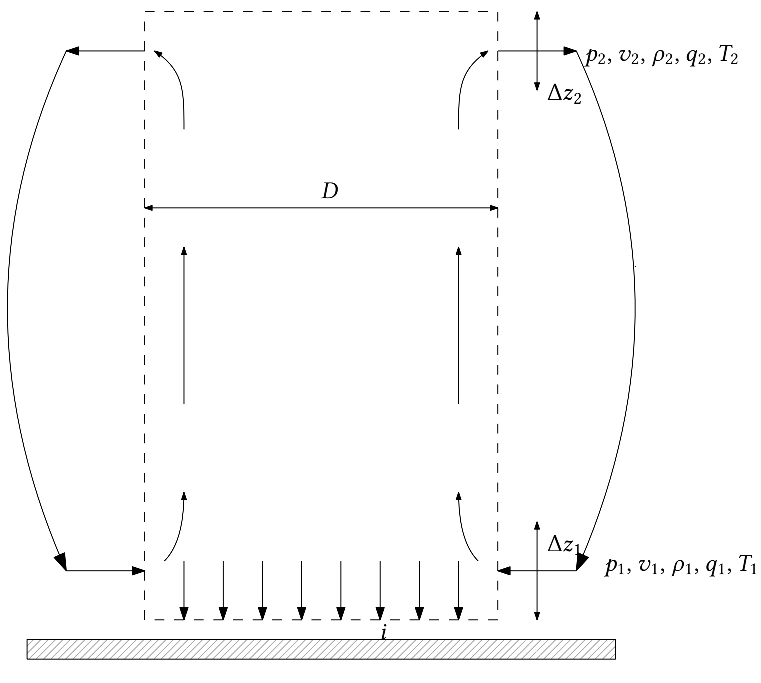
Dependendo das condições de temperatura, presença/ausência de núcleos de condensação, etc., neve e granizo podem se formar.

Gotas de chuva possuem uma velocidade terminal,

$$V_t = \left[\frac{4gD}{3C_d}\left(\frac{\rho_w}{\rho_a} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Um modelo de tempestade

O modelo a seguir é muito simples, mas mesmo assim é muito útil em aplicações. Em particular, no método da precipitação máxima provável, que veremos mais à frente.



Para uma "célula de tempestade" cilíndrica, de diâmetro D, considere as equações de balanço de massa de ar seco, e de massa de vapor d'água.

Para o ar seco,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} \rho_d \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} \rho_d(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V;\\
0 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_2\,\pi D - [\rho(1-q)v\Delta z]_1\,\pi D\\
[\rho(1-q)v\Delta z]_2 &= [\rho(1-q)v\Delta z]_1\\
[\rho v\Delta z]_2 &= [\rho v\Delta z]_1\,\frac{1-q_1}{1-q_2}
\end{aligned}
$$

e para o vapor d'água,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{C}} q\rho \,\mathrm{d}V + \oint_{\mathscr{S}} q\rho(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V;\\
0 &= \dot{P}\frac{\pi D^2}{4} + [q\rho v\Delta z]_2\,\pi D - [q\rho v\Delta z]_1\,\pi D\\
\dot{P}\frac{\pi D^2}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1\,\pi D - [q\rho v\Delta z]_2\,\pi D\\
\dot{P}\frac{D}{4} &= [q\rho v\Delta z]_1 - [q\rho v\Delta z]_2\\
\dot{P}\frac{D}{4} &= q_1\,[\rho v\Delta z]_1 - q_2\,[\rho v\Delta z]_1\,\frac{1-q_1}{1-q_2}\\
\dot{P}\frac{D}{4} &= \left(q_1 - q_2\frac{1-q_1}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1\\
\dot{P}\frac{D}{4} &= \left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1\,,\\
\dot{P} &= \frac{4}{D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1\,.
\end{aligned}
$$

Note que $\{\!\!\{\dot{P}\}\!\!\} = \mathrm{kg}_{\mathrm{H_2O}}\,\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$. A intensidade de precipitação em $\mathrm{m\,s^{-1}}$ é

$$
\dot{P} = \frac{4}{\rho_w D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1
$$

e a intensidade de precipitação em $\mathrm{mm\,h^{-1}}$ é

$$
\dot{P} = \frac{4}{\rho_w D}\left(\frac{q_1-q_2}{1-q_2}\right)[\rho v\Delta z]_1 \times 1000 \times 3600.
$$

Façamos portanto o Exemplo 3.3.2 de Chow et al. (1988):

A thunderstorm cell 5 km in diameter has a cloud base of 1.5 km, and surface conditions recorded nearby indicate saturated air conditions with air temperature 30° C, pressure 101325 Pa and wind speed $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Assuming a lapse rate of $7.5\,^\circ\,\mathrm{km}^{-1}$ and an average outflow elevation of 10 km, calculate the precipitation intensity from this storm. Also determine what proportion of the incoming moisture is precipitated as air passes through the storm cell and calculate the rate of release of latent heat through moisture condensation in the column.

A solução será calculada pelo programa `stcell.py`.

Listing 3.2: `stcell.py` — Modelo de tempestade.

```
#!/home/nldias/miniconda3/bin/python3
# -*- coding: iso-8859-1 -*-
# ----------------------------------------------------------------------
# Exemplo 3.3.2, Chow, Maidment e Mays
#
# Nelson Luís Dias
# 2020-08-04T17:19:27
# ----------------------------------------------------------------------
# ----------------------------------------------------------------------
# vou precisar da fórmula para a pressão de saturação de vapor d'água
# ----------------------------------------------------------------------
from math import exp
def es(T):
   '''
   Calcula a pressão de saturação de vapor d'água es (Pa) em função da
   temperatura T (K) (Eq de Tetens)
   '''
   b = 17.2693882
   T1 = 273.16
   T2 = 35.86
   e0 = 610.78
   return e0*exp( b*(T - T1)/(T - T2) )
def Ta(z):
   '''
   Calcula a temperatura do ar em função da altura z em m, em K
   '''
   alfa = 0.0075    # esta mudança é muito importante!!!!
   return 273.15 + 30.0 - alfa*z
# ----------------------------------------------------------------------
# vou precisar de uma fórmula para o calor latente de evaporação
# ----------------------------------------------------------------------
def latente(T) :
   '''
   latent: Latent heat of evaporation (in J kg^{-1}) as a function
   of
   thermodynamic temperature (in K)

   From Dake 1972 "Evaporative Cooling of a body of water", Water
   Resour Res, (8)1087--1091.
   '''
   return (3142689.0 - 2356.01 * T)
# ----------------------------------------------------------------------
# todas as variáveis no SI!!!!
# ----------------------------------------------------------------------
Diam = 5000.0            # diâmetro da célula
delz1 = 1500.0           # $\Delta z_1$
p0 = 101325.0            # pressão atmosférica em Pa
T0 = 30+273.15           # temperatura do ar na "entrada", em K
v1 = 1.0                 # velocidade do vento na "entrada", em m/s
rhow = 1000.0            # densidade da água líquida
es0 = es(T0)             # press vap na entrada
q0 = 0.622*es0/p0        # umidade específica na superfície
Rd = 287.03805                   # cte de gás do ar seco
rho0 = p0/(Rd*T0*(1 + 0.61*q0))  # densidade do ar na superfície
# ----------------------------------------------------------------------
# nós vamos precisar da pressão atmosférica a 10 km de altura!!!!
# para isso, temos que calcular a mesma integral de antes :-(
# copio e colo o programa que fiz antes para ir até p2
# ----------------------------------------------------------------------
def newstate(p1,rho1,T1,z2,delz):
   '''
   Calcula o estado da atmosfera no nível z2 a partir do
   estado no nível z1, usando a equação de estado e a equação
   da hidrostática. newstate é um integrador "sob medida"
   '''
   g = 9.81              # aceleração da gravidade
   epsp = 0.001          # erro no cálculo de p2, em Pa
   p20 = p1 + 2*epsp     # força o while a começar
   p2 = p1               # primeira estimativa de p2
   T2 = Ta(z2)           # temperatura do ar em z2: não muda mais
   e2 = es(T2)           # press vapor em z2; não muda mais
# ----------------------------------------------------------------------
```

```
# Os 2 valores abaixo são estimativas *iniciais*
# --------------------------------------------------------------------
   q2 = 0.622*e2/p2                 # umidade esp em z2
   rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))    # densidade em z2
   while (abs(p2 - p20) > epsp) :
      p20 = p2                      # guarda o valor anterior
      rhobar = (rho1 + rho2)/2      # dens média da camada
      delp = -rhobar*g*delz         # eq da hidrostática
      p2 = p1 + delp                # novo p2
      q2 = 0.622*e2/p2              # nova umid esp em z2
      rho2 = p2/(Rd*T2*(1+0.61*q2))# nova densidade em z2
#      print('.')
   pass
#   print(p2,rho2,T2,q2)
# --------------------------------------------------------------------
# retorna o estado da atmosfera no nível z2
# --------------------------------------------------------------------
   return (p2, rho2, T2, q2)
# --------------------------------------------------------------------
# discretizo a atmosfera em n = 1000 pontos
# --------------------------------------------------------------------
n = 1000                            # 1000 intervalos
zmax = 10000.0                      # altura máxima (m)
delz = 10.0                         # intervalo de integração (m)
# --------------------------------------------------------------------
# crio vetores de estado com n+1 pontos
# --------------------------------------------------------------------
# ---------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ---------------------------------------------------------------------
print("Condições aqui em baixo:")
print("        p   rho      T      q       z")
print("%9.2f %5.2f %5.2f %6.4f %7.1f" % (p0,rho0,T0,q0,0.0))
from numpy import arange, zeros
p = zeros(n+1,float)                # pressão em todos os pontos
T = zeros(n+1,float)                # temperatura em todos os pontos
q = zeros(n+1,float)                # umid esp em todos os pontos
rho = zeros(n+1,float)              # densidade em todos os pontos
z = arange(0.0,zmax+delz,delz,float)    # níveis de cálculo
# ---------------------------------------------------------------------
# loop em z, de baixo para cima
# ---------------------------------------------------------------------
(p[0],rho[0],T[0],q[0]) = (p0, rho0, T0, q0)
for i in range(n) :
   (p[i+1],rho[i+1],T[i+1],q[i+1]) = \
      newstate(p[i],rho[i],T[i],z[i+1],delz)
pass
(p2,rho2,T2,q2,z2) = (p[n],rho[n],T[n],q[n],z[n])
print("Condições lá em cima:")
print("%9.2f %5.2f %5.2f %6.4f %7.1f" % (p2,rho2,T2,q2,z2))
# --------------------------------------------------------------------
# As variáveis q1 e rho1 agora referem-se à média sobre delz1: note
# que z[150] = 1500 m. Portanto, vamos fazer a média de q e a média de
# rho de 0 a 150 inclusive
# --------------------------------------------------------------------
from numpy import average
rho1 = average(rho[0:151])
print(rho1)
q1 = average(q[0:151])
print(q1)
# --------------------------------------------------------------------
# agora temos condições de continuar a fazer as contas. O resultado
# mais importante é a taxa de precip, em kg/m2/s
# --------------------------------------------------------------------
Pdot = (4.0/(Diam))*((q1 - q2)/(1-q2))*rho1*v1*delz1 # kg/m2/s
print("Pdot = ",Pdot)
Pdms = Pdot/rhow                                     # m/s
print("Pdms = ",Pdms)
Pmmh = Pdms*1000*3600                                # mm/h
print("Pmmh = ",Pmmh)
```

Referências Bibliográficas

Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics.* Cambridge University Press, New York.

Alduchov, O. A. e Eskridge, R. E. (1996). Improved Magnus form approximation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 35:601–609.

Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere.* D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.

Brutsaert, W. (1986). Catchment-scale evaporation and the atmospheric boundary layer. *Water Resour Res*, 22(9):39S–45S.

Brutsaert, W. (1998). Land-surface water vapor and sensible heat flux: Spatial variability, homogeneity, and measurement scales. *Water Resour Res*, 34(10):2433–2442.

Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4):345.

Butenhoff, C. L. e Khalil, M. A. K. (2002). Correction for water vapor in the measurement of atmospheric trace gases. *Chemosphere*, 47(8):823–836.

Chen, C.-l. (1991). Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. Hydraul. Eng.*, 117(3):371–389.

Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics.* McGraw-Hill, New York.

Chow, V. T., Maidment, D. R., e Mays, L. W. (1988). *Applied Hydrology.* McGraw-Hill, New York.

COESA (1976). U.S. Standard Atmosphere, 1976. Relatório técnico, U.S. Government Printing Office.

Colebrook, C. F. (1939). Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws.(includes plates). *Journal of the Institution of Civil engineers*, 12(8):393–422.

Consultative Committee for Thermometry (2015). Guide to the Realization of the ITS-90. Relatório técnico, Bureau International des Poids et Mesures.

Dake, J. M. (1972). Evaporative cooling of a body of water. *Water Resources Research*, 8(4):1087–1091.

Darrigol, O. (2005). *Worlds of Flow.* Oxford University Press, Oxford, U.K.

Dias, N. L. (2020). O efeito do aumento de CO_2 atmosférico sobre a constante de gás do ar seco. *Revista Brasileira de Meteorologia (submitted).*

Dilley, A. C. (1968). On the computer calculation of vapor pressure and specific humidity gradients from psychrometric data. *J Appl Meteorol*, 7:717–719.

Gauckler, P. (1867). Etudes Théoriques et Pratiques sur l'Ecoulement et le Mouvement des Eaux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 64:818–822. This is the first occurence of Manning's Formula.

Gioia, G. e Bombardelli, F. A. (2002). Scaling and similarity in rough channel flows. *Physical Review Letters*, 88:DOI:10.1103/PhysRevLett.88.014501.

Henderson-Sellers, B. (1984). A new formula for latent heat of vaporization of water as a function of temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 110(466):1186–1190.

Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1981). *Atmospheric Thermodynamics.* D. Reidel, Dordrecht, 2nd ª edição.

Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *J Res NBS*, 21:707–741.

Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland,*, 20,:161–207.

Moody, L. F. (1944). Friction factors for pipe flow. *Trans. Asme*, 66:671–684.

Murray, F. W. (1966). On the computation of saturation vapor pressure. *J Appl Meteorol*, 6:203–204.

NIST (2020). NIST Chemistry Web Book, SRD69. Available at https://webbook.nist.gov/chemistry/mw-ser/. Retrieved in 2020-04-10T09:05:36.

Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows.* Cambridge University Press, Cambridge.

Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.

Seinfeld, J. H. e Pandis, S. N. (1998). *Atmospheric chemistry and physics.* John Wiley & Sons, New York.

Stull, R. B. (1995). *Meteorology today for scientists and engineers.* West Publishing Company, Minneapolis / St. Paul.

Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Wallace, J. M. e Hobbs, P. V. (2006). *Atmospheric Science: an introductory survey*. Elsevier, Amsterdam, 2nd a edição.

Wikipedia (2020a). Atmosphere of Earth. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth. Retrieved in 2020-04-08T11:25:15.

Wikipedia (2020b). International Temperature Scale of 1990. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/International_Temperature_Scale_of_1990. Retrieved in 2020-07-27T10:47:48.

Wikipedia (2020c). Vienna Standard Mean Ocean Water. Available at https://en.wikipedia.org/wiki/Vienna_Standard_Mean_Ocean_Water. Retrieved in 2020-07-27T10:52:34.