TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P04, 01 Dez 2017
Prof. Nelson Luís Dias

0

NOME: GABARITO Assinatura: ____________________

---

1 [25] Nesta questão, todas as funções são reais e definidas no intervalo real [0, 1]. O produto interno entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

A figura ao lado mostra 3 funções reais: $u(x)$, $h_1(x)$ e $h_2(x)$.

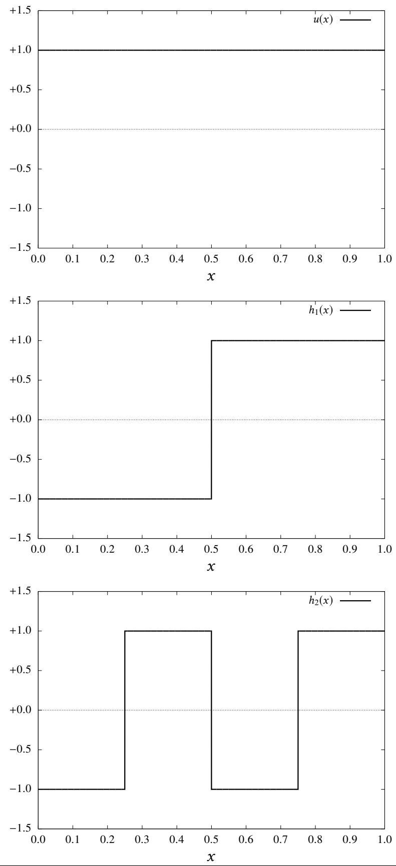
a) [05] Calcule $\|u(x)\|$, $\|h_1(x)\|$ e $\|h_2(x)\|$.

b) [10] $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são ortonormais?

c) [10]É possível aproximar $u(x)$ por mínimos quadrados, **de forma razoável**, escrevendo

$$u(x) \approx a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x)$$

e calculando a_1 e a_2? **Sugestão:** Calcule a_1 e a_2, e discuta o que você encontrou.



SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a)

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \int_0^1 |u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1,\\
\|h_1(x)\| &= \int_0^{1/2} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 |1|^2\,\mathrm{d}x = 1,\\
\|h_2(x)\| &= \int_0^{1/4} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2} |1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4} |-1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{3/4}^1 |1|^2\,\mathrm{d}x = 1.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle h_1(x), h_2(x)\rangle &= \int_0^{1/4}(-1\times -1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2}(-1\times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4}(1\times -1)\,\mathrm{d}x + \int_{3/4}^1 (1\times 1)\,\mathrm{d}x\\
&= 1/4 - 1/4 - 1/4 + 1/4 = 0.
\end{aligned}$$

Sim, pois elas são ortogonais e $\|h_1(x)\| = \|h_2(x)\| = 1$.
c)

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

Se for possível projetar $u(x)$ sobre $h_1(x)$ e $h_2(x)$, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \langle h_1(x), u(x) \rangle = \int_0^1 h_1(x)u(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} (-1 \times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (1 \times 1) = 0; \\
a_2 &= \langle h_2(x), u(x) \rangle = \int_0^{1/4} (-1 \times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/4}^{1/2} (1 \times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{3/4} (-1 \times 1)\,\mathrm{d}x + \int_{3/4}^1 (1 \times 1) \\
&= -1/4 + 1/4 - 1/4 + 1/4 = 0.
\end{aligned}
$$

Não é possível projetar $u(x)$ sobre $h_1(x)$ e $h_2(x)$, porque $u(x)$ é perpendicular a ambas ■

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

2 [25] Obtenha os coeficientes c_n da **série de Fourier <u>complexa</u>** de

$$f(x) = 4(x - 1/2)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i n x}. \qquad 0 \le x \le 1.$$

Observação: você pode usar os seguintes fatos:

$$\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x}\,dx = \frac{1 + i\pi n}{2\pi^2 n^2},$$
$$\int_0^1 x e^{-2\pi i n x}\,dx = \frac{i}{2\pi n}.$$

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 4(x - 1/2)^2 e^{-2\pi i n x}\,dx \\
&= \int_0^1 \left[4(x^2 - x + 1/4)e^{-2\pi i n x}\right]\,dx \\
&= \int_0^1 \left[(4x^2 - 4x + 1)e^{-2\pi i n x}\right]\,dx \\
&= 4\frac{1 + i\pi n}{2\pi^2 n^2} - 4\frac{i}{2\pi n} \\
&= \frac{4(1 + i\pi n) - 4i(\pi n)}{2\pi^2 n^2} \\
&= \frac{4}{2\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi^2 n^2} \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹

3 [25] Calcule a convolução de Fourier entre

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x),\\
g(x) &= \frac{1}{2}[H(x+1) - H(x-1)],
\end{aligned}
$$

onde $H(x)$ é a função de Heaviside.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
[f * g](x) &= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} \operatorname{sen}(x-\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \operatorname{sen}(x-\xi)\, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}[\cos(x-1) - \cos(x+1)] \blacksquare
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [25] Dada a equação diferencial parcial

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + f(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t \geq 0, \qquad \phi(x,0) = 0,\\
f(x) &= \begin{cases} 1, & |x| \leq 1,\\ 0, & |x| > 1 \end{cases},
\end{aligned}
$$

obtenha $\widehat{\phi}(k,t)$, a transformada de Fourier de $\phi(x,t)$ em x. **Sugestão:** calcule a transformada de Fourier da equação diferencial parcial, e prossiga até o amargo fim.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
A transformada de Fourier de $f(x)$ é

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \cos(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}.
\end{aligned}
$$

Agora transforme a condição inicial:

$$
\widehat{\phi}(k,t) = \mathscr{F}\{\phi(x,0)\} = 0.
$$

E em seguida transforme a equação:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} &= D(\mathrm{i}k)^2\widehat{\phi} + \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\\
\frac{\mathrm{d}\widehat{\phi}}{\mathrm{d}t} + Dk^2\widehat{\phi} &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}, \qquad \widehat{\phi}(k,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Agora $\widehat{\phi} = uv$; $\qquad \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Dk^2uv &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\\
u\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + vDk^2\right] + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}.
\end{aligned}
$$

Anule o colchete:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -vDk^2,\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= -Dk^2\mathrm{d}t\\
\int_{v(k,0)}^{v(k,t)} \frac{\mathrm{d}v'}{v'} &= \int_0^t \left(-Dk^2\right)\mathrm{d}\tau\\
\ln\frac{v(k,t)}{v(k,0)} &= -Dk^2t,\\
v(k,t) &= v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right).
\end{aligned}
$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

De volta à EDO,

$$\begin{aligned}
v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{v(k,0)}\exp(Dk^2t)\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k} \\
\mathrm{d}u &= \frac{1}{v(k,0)}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\exp(Dk^2t)\mathrm{d}t \\
u(k,t)-u(k,0) &= \frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right] \\
u(k,t) &= u(k,0)+\frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right] \\
u(k,t)v(k,t) &= \left\{u(k,0)+\frac{1}{v(k,0)Dk^2}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\right\}v(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right) \\
\widehat{\phi}(k,t) &= \widehat{\phi}(k,0)\exp\left(-Dk^2t\right)+\left\{\frac{1}{Dk^2}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\left[\exp(Dk^2t)-1\right]\right\}\exp\left(-Dk^2t\right).
\end{aligned}$$

Mas $\widehat{\phi}(k,0)=0$, donde

$$\widehat{\phi}(k,t)=\frac{1}{Dk^2}\frac{\operatorname{sen}(k)}{\pi k}\left[1-\exp(-Dk^2t)\right] \blacksquare$$

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$