

EAMB 7004 Camadas-Limite Naturais e Dispersão de Poluentes  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental  
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR  
P03, 05 Dez 2021  
Entrega em 06 Dez 2021, 09:30.  
Prof. Nelson Luís Dias

**Prova com consulta exclusivamente ao material didático da disciplina.**

NOME: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**1** [33] Considere a equação de balanço de variância de um escalar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{c'c'}}{2} + \overline{u_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{c'c'}}{2} + \overline{c'u'_k} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{c'c'u'_k}}{\partial x_k} = \nu_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( c' \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right) - \nu_c \frac{\partial c'}{\partial x_k} \frac{\partial c'}{\partial x_k}.$$

Simplifique-a ao máximo, utilizando as seguintes hipóteses:

1. Turbulência estacionária.
2. Turbulência homogênea em  $x$  e em  $y$ .
- 3.

$$\nu_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( c' \frac{\partial c'}{\partial x_k} \right) \approx 0.$$

- 4.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= 0, \\ \bar{w} &= 0.\end{aligned}$$

Escreva a equação simplificada abrindo todas as somas (ou seja: sem usar notação indicial) e utilizando  $x, y, z$  em lugar de  $x_1, x_2, x_3$  e  $u, v, w$  em lugar de  $u_1, u_2, u_3$ .

**2** [33] Considere um escoamento turbulento sob pressão em um duto com seção retangular (e largura infinita). Utilizando as equações relevantes, prove que o gradiente longitudinal da pressão média em todos os pontos de uma seção transversal é igual ao gradiente da pressão na parede.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

**3** [34] Dadas as equações de Navier-Stokes em um referencial  $\tilde{x}_i, \tilde{t}$  em um escoamento turbulento, sempre existe uma transformação de Galileu

$$\begin{aligned}x_i &= \tilde{x}_i + V_i t, \\t &= \tilde{t}, \\ \overline{u_i} &= V_i + \overline{\tilde{u}_i} = 0,\end{aligned}$$

de tal forma que  $\overline{u_i} = 0$  no referencial  $x_i, t$ . Neste referencial, parta agora da equação para as flutuações de velocidade em um escoamento com densidade  $\rho$  estritamente constante (e com o termo de aceleração da gravidade absorvido na pressão modificada  $p$ ),

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ u'_i \overline{u_k} + \overline{u_i} u'_k + u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu_{(i)} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k},$$

e simplifique-a para o caso de turbulência homogênea.

---

SOLUÇÃO DA QUESTÃO: