TEA013 Matemática Aplicada II
Curso de Engenharia Ambiental
Departamento de Engenharia Ambiental, UFPR
P01, 31 Ago Mar 2018
Prof. Nelson Luís Dias

0

Declaro que segui o código de ética do Curso de Engenharia Ambiental ao realizar esta prova

NOME: GABARITO Assinatura: ______________________

---

1 [20] Considere a seguinte seção interativa de Python:

```
> a = [[1,2,3],[4,5,6]]
> b = a
> b[0] = [7,8,9]
> print(a)
```

O que é impresso na linha seguinte?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

```
[[7, 8, 9], [4, 5, 6]]
```

Continue a solução no verso ⟹

2 [20] Faça a análise de estabilidade de von Neumann do esquema explícito de diferenças finitas para a equação de advecção

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right).$$

Qual é a sua conclusão (não vale citar de memória) sobre a sua estabilidade?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:

$$\xi_l \mathrm{e}^{a(t_n+\Delta t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} = \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l i\Delta x} - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i+1)\Delta x} - \xi_l \mathrm{e}^{a t_n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_l (i-1)\Delta x}\right);$$

eliminando o fator comum $\xi_l \mathrm{e}^{a t_n + \mathrm{i}k_l i\Delta x}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a\Delta t} &= 1 - \frac{\mathrm{Co}}{2}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_l\Delta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_l\Delta x}\right)\\
&= 1 - \mathrm{i}\mathrm{Co}\,\mathrm{sen}\,k_l\Delta x.
\end{aligned}$$

Claramente, $|\mathrm{e}^{a\Delta t}| > 1$, e o esquema é incondicionalmente instável ■

Continue a solução no verso ⟹

3 [20] Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau 2 definidos em $[-1,+1]$, $\mathbb{P} = \{ax^2 + bx + c\}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) [10] Mostre que $(1, x, x^2)$ é uma base de $\mathbb{P}$.

b) [10] Se $f(x) \in \mathbb{P}$ e $g(x) \in \mathbb{P}$, um produto interno legítimo é

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Verifique se a base do item (a) é ortogonal com este produto interno.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
a) Um conjunto de vetores é uma base se:
i) Ele gera o espaço. Dada $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}$, uma combinação linear dos vetores da base gera qualquer vetor do espaço se existem α, β e γ tais que, para quaisquer a, b e c,

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = ax^2 + bx + c.$$

Mas isso é sempre possível para $\alpha = a$, $\beta = b$ e $\gamma = c$, de modo que $(1, x, x^2)$ de fato geram $\mathbb{P}$.
ii) Os vetores da base são LI, ou seja,

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \mathit{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

onde $\mathit{0}$ é a função $f(x) \equiv 0$, em $x \in [-1, +1]$.
O sentido $\Leftarrow$ é óbvio.
Para provar o sentido $\Rightarrow$, escolha 3 valores de x entre -1 e $+1$, por exemplo -1, 0 e 1. Então,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

O sistema acima possui solução única $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e isso conclui o item (a).
b) Os produtos internos dos pares de vetores da base são

$$\begin{aligned} \langle 1, x\rangle &= \int_{-1}^{+1} 1\,x\,\mathrm{d}x = 0, \\ \left\langle 1, x^2\right\rangle &= \int_{-1}^{+1} 1\,x^2\,\mathrm{d}x = 2/3, \\ \left\langle x, x^2\right\rangle &= \int_{-1}^{+1} x\,x^2\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Logo, a base não é ortogonal.

Continue a solução no verso $\Longrightarrow$

4 [20] Obtenha a série de Fourier trigonométrica de $f(x) = 1 - x^2$ no intervalo $[a, b] = [-1, +1]$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Note que f é par! Logo,

$$B_n \equiv 0, \ \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Continuando, $a = -1$, $b = +1$, $L = 2$.

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right) \, dx \\
&= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \cos\left(\frac{2n\pi x}{2}\right) \, dx; \\
A_0 &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 4/3; \\
A_n &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \cos(n\pi x) \, dx \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}, \ n > 0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi x) \ \blacksquare$$

Continue a solução no verso ⟹

5 [20] Prove a identidade de Parseval para funções complexas de uma variável real em uma forma um pouco mais geral do que a discutida em aula: se

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} m x}{L}},$$
$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}},$$

$\alpha \le x \le \beta$, então

$$\frac{1}{L}\int_\alpha^\beta f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m$$

para $L = \beta - \alpha$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO:
Começo notando que

$$\left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \right\rangle = \left\| \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \right\|^2 = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-n)x}{L}}\,\mathrm{d}x = L,$$
$$\left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} m x}{L}}, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}} \right\rangle = \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}{L}}\,\mathrm{d}x = 0,\ m \ne n.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\alpha^\beta \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i} m x}{L}}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \mathrm{e}^{+\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{L}}\right]\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_n \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(n-m)x}{L}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m L \\
&= L \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m^* b_m \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Continue a solução no verso ⟹