

# MECÂNICA DA TURBULÊNCIA

Nelson Luís Dias

Versão: 2017-06-25T13:53:35

©Nelson Luís da Costa Dias, 2017. Todos os direitos deste documento estão reservados. Este documento não está em domínio público. Cópias para uso acadêmico podem ser feitas e usadas livremente, e podem ser obtidas em <https://nldias.github.io> — Ensino. Este documento é distribuído sem nenhuma garantia, de qualquer espécie, contra eventuais erros aqui contidos.

# Sumário

---

<b>Notação</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
1.1 Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados . . . . .	12
1.2 Processos estocásticos . . . . .	17
1.3 A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds . . . . .	19
1.4 Dependência estocástica e correlação . . . . .	20
1.5 Uma primeira lição sobre isotropia . . . . .	22
<b>2 Termodinâmica de uma mistura diuída</b>	<b>23</b>
2.1 Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell . . . . .	23
2.2 Mistura diluída de 2 gases ideais . . . . .	25
2.2.1 Equações de estado . . . . .	25
2.2.2 Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal . . . . .	26
2.2.3 A afinidade de uma mistura de gases ideais . . . . .	28
<b>3 As equações diferenciais de transporte</b>	<b>31</b>
3.1 Notação indicial . . . . .	31
3.2 Continuidade . . . . .	31
3.3 Misturas . . . . .	32
3.4 Quantidade de movimento . . . . .	34
3.5 Vorticidade . . . . .	36
3.6 Energia . . . . .	40
3.7 Dissipação viscosa . . . . .	44
3.8 A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas . . . . .	45
3.9 O balanço do semiquadrado da temperatura . . . . .	47
<b>4 As macro e micro escalas da turbulência</b>	<b>50</b>
4.1 Macro e micro escalas: uma apresentação informal . . . . .	50
4.2 Uma definição formal das escalas macroscópicas . . . . .	54
4.3 Uma definição formal das escalas microscópicas . . . . .	56
4.4 A cascata de energia . . . . .	57
4.5 Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos . . . . .	58
4.6 Macro e microescalas de temperatura . . . . .	59
<b>5 As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq</b>	<b>65</b>
5.1 O estado hidrostático de referência . . . . .	65
5.2 O estado de referência na atmosfera . . . . .	68
5.3 Magnitude das flutuações de densidade . . . . .	70

5.4	Conservação de massa . . . . .	71
5.5	Quantidade de movimento . . . . .	72
5.6	Incompressibilidade: efeitos de pressão e temperatura sobre as flutuações de velocidade . . . . .	77
5.7	A correlação pressão-temperatura . . . . .	79
5.8	As ordens de grandeza da equação para a temperatura . . . . .	80
5.9	A equação para a temperatura potencial . . . . .	86
5.10	Os gradientes microscópicos de densidade . . . . .	88
<b>6</b>	<b>As equações de ordem 2</b>	<b>89</b>
6.1	As equações locais de conservação de massa e de quantidade de movimento com a aproximação de Boussinesq . . . . .	89
6.2	As equações para as flutuações e para as covariâncias $\langle u_i u_j \rangle$ . . . . .	90
6.3	Energia cinética da turbulência . . . . .	93
6.3.1	A semivariância de um escalar . . . . .	96
6.4	As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2 . . . . .	96
6.5	Considerações adicionais sobre modelos de fechamento . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Soluções laminares das equações de Navier-Stokes</b>	<b>101</b>
7.1	Algumas soluções laminares . . . . .	101
7.2	A Solução de Blasius . . . . .	103
7.2.1	Espessura de deslocamento . . . . .	106
7.2.2	A solução de Blasius . . . . .	107
7.2.3	Blasius: solução numérica . . . . .	111
7.2.4	Uma alternativa . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Camadas-limite turbulentas</b>	<b>115</b>
8.1	Escoamento turbulento em um duto . . . . .	115
8.2	Escoamentos turbulentos com parede rugosa . . . . .	121
8.3	O regime de transição . . . . .	123
8.4	A fórmula de Manning . . . . .	125
<b>A</b>	<b>Identidades vetoriais</b>	<b>128</b>
<b>B</b>	<b>Difusão em sistemas binários</b>	<b>129</b>
<b>C</b>	<b>Constantes físico-químicas</b>	<b>130</b>
<b>D</b>	<b>Equação de estado para a água</b>	<b>131</b>
<b>E</b>	<b>Soluções dos problemas</b>	<b>132</b>

# Lista de Tabelas

---

2.1	Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa <sup>†</sup> . . . . .	26
2.2	Entalpia e energia livre de Gibbs de formação, e entropia padrão de gases atmosféricos a 298,15 K e 100.000 Pa <sup>†</sup> . . . . .	30
8.1	Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1) . . . . .	122

# Lista de Figuras

---

1.1	O experimento de Reynolds (figuras do autor: Reynolds (1883), figuras 3, 4 e 5, pág. 942, e lâmina 73.) . . . . .	12
1.2	Efeito de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52. Fonte: Wikipedia ( <a href="https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg">https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg</a> ) . . . . .	13
1.3	A rua de vórtices de von Kármán, causada pelo vento soprando ao redor das ilhas Juan Fernández, ao largo da costa do Chile (Por Bob Cahalan, NASA GSFC, em domínio público: <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336</a> ) . . . . .	14
1.4	10 minutos de medições de concentração de CO <sub>2</sub> sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40. . . . .	15
1.5	Ilustração de um processo estocástico univariado $U(t; \omega)$ : as unidades de $U$ e $t$ são arbitrárias. . . . .	17
4.1	Expansão súbita em uma tubulação. . . . .	51
4.2	Escoamento clássico em um tubo com perda de carga. . . . .	53
4.3	O significado diferente de $L_0$ nos casos $Pr \gg 1$ (acima) e $Pr \ll 1$ (abaixo). . . . .	63
5.1	Dependência da pressão de referência $P_r$ e da densidade de referência $\varphi_r$ em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude $z$ . . . . .	69
5.2	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida . . . . .	81
5.3	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C. . . . .	81
7.1	Escoamento laminar sobre uma placa porosa . . . . .	103
7.2	A camada-limite laminar . . . . .	104
7.3	Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento $\theta^*$ . . . . .	106
7.4	Perfil de velocidade adimensional de Blasius. . . . .	113
8.1	A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto. . . . .	116
8.2	Fator de atrito $f$ em função de $Re$ e da rugosidade relativa $z_0/\delta$ em um escoamento turbulento em um duto . . . . .	125

# Notação

---

Uma grande dificuldade ao escrever este texto foi a enorme quantidade de grandezas diferentes com as quais é necessário tratar. Nós utilizamos ao mesmo tempo grandezas extensivas (em geral escritas com letras maiúsculas) e intensivas (*idem*); variáveis aleatórias e valores observados (realizações) das mesmas, médias turbulentas e flutuações. Diferentes autores encontraram diferentes soluções para denotar com um número limitado de símbolos romanos e gregos um número muito maior de grandezas físicas e suas interpretações e abordagens matemáticas. As soluções que eu encontrei são, como sempre, um compromisso. A notação que utilizo é em parte original, e segue a idéia de ser tão simples quanto possível e ao mesmo razoavelmente clara. No entanto, alguns conflitos de símbolos são inevitáveis, conflitos os quais só podem ser parcialmente aliviados pela notação utilizada. A seguir, são dadas as principais explicações sobre a notação adotada no texto e sobre como lidar com as suas eventuais ambiguidades.

## Variáveis extensivas e intensivas

Variáveis extensivas dizem respeito a um corpo como um todo. *Em geral*, mas não sempre, elas são denotadas por letras maiúsculas em itálico com um til. Exemplos são

$\dot{\tilde{W}}$ : a taxa de trabalho realizada sobre um corpo,

$\tilde{U}$ : a energia interna total de um corpo,

$\tilde{P}$ : a quantidade de movimento total de um corpo.

Variáveis intensivas (definidas em um ponto) e instantâneas *em geral* são indicadas em maiúsculas em itálico também...ou então em letras gregas maiúsculas:

$\mathcal{U}$ : a energia interna específica (por unidade de massa),

$U$ : a velocidade vetorial do fluido,

$T$ : a temperatura,

$t$ : o vetor de tensões,

$T$ : o tensor de tensões,

$\varphi$ : a densidade,

$\Theta$ : a temperatura potencial.

Observe a exceção para o vetor de tensões  $t$ .

## Médias e flutuações turbulentas

A *decomposição de Reynolds* (Reynolds, 1895) é o procedimento padrão para distinguir grandezas às quais preferimos dar um tratamento determinístico (as “médias” de Reynolds) daquelas que necessitam ser modeladas como variáveis aleatórias ou como processos estocásticos (as “flutuações turbulentas”). Talvez a maneira mais antiga (mas ainda extremamente usada em engenharia) seja

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i,$$

onde a barra indica a média, e a linha indica a flutuação, da grandeza  $u_i$ . A honrosa lista de autores que a utilizam inclui Monin e Yaglom (1971, equações 3.3–3.7, p. 207), Richardson (1920), e Stull (1988, equações 2.4.2k, 2.4.3a–c, p. 40–41). Durante muito tempo ela foi minha preferida, mas o seu efeito quando se trabalha com a transformada de Fourier da flutuação,

$$\widehat{u'_i} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x},$$

é feio e particularmente trabalhoso sempre que se escreve as equações espectrais de turbulência à mão.

Tennekes e Lumley (1972) (equação 2.1.6, p. 28) preferem

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i;$$

Hinze (1975) (p. 4) utiliza

$$U_i = \bar{U}_i + u_i,$$

enquanto que Pope (2000) usa um misto de

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i$$

para a velocidade (equação 4.1, p. 83) e

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$$

para um escalar transportado (equação 4.36, p. 91).

Em todos os casos acima, o lado esquerdo é a grandeza intensiva instantânea, para a qual valem as leis de conservação e/ou as equações constitutivas clássicas, e o lado direito é a soma de uma média probabilística e de uma flutuação turbulenta. Talvez o caso mais infeliz seja o da confusão entre densidade e pressão. Utilizando-se por exemplo uma notação uniforme de letras maiúsculas para as grandezas instantâneas, e os símbolos clássicos  $p$  para (flutuação de) pressão e  $\rho$  para (flutuação de) densidade, tem-se

$$\begin{aligned} P &= \langle P \rangle + p, \\ P &= \langle P \rangle + \rho, \end{aligned}$$

onde  $P$ , além de ser um rô maiúsculo, infelizmente, é igual (a menos do tipo itálico) ao  $P$  romano maiúsculo. A diferença é demasiadamente sutil para ser aceitável, de forma que nenhum autor ousa na prática usar o símbolo  $P$  para indicar um rô maiúsculo. Muitos autores contornam este problema simplesmente utilizando a hipótese de



um escoamento com densidade estritamente constante ou apelando velada ou abertamente para a aproximação de Boussinesq (sobre a qual falaremos com um razoável nível de detalhe neste texto) e utilizando apenas uma densidade de referência constante (digamos,  $\rho_r$ ) nas equações. Por exemplo, [Richardson \(1920\)](#) sabia perfeitamente disto:

Note that there is no need to assume  $\rho$  to be independent of position. REYNOLDS assumed this, but for a reason that does not need concern us. It will be necessary however to assume that  $\rho'$ , the variation of density at a fixed point, is so much smaller in comparison with  $\bar{\rho}$  than is  $v'^*$  in comparison with  $\bar{v}$ , that we may put  $\rho' = 0$ .

O outro problema de notação encontrado em livros de turbulência são as flutuações de temperatura. A notação original de Reynolds,

$$T = \bar{T} + T'$$

funciona bem, mas o uso estrito de maiúsculas-minúsculas preferido por autores mais recentes produziria neste caso

$$T = \langle T \rangle + t,$$

o que é desagradável, já que  $t$  está comprometido com a variável “tempo”.

Minha solução para esses dilemas é utilizar sucedâneos para as letras gregas maiúsculas que estão “faltando”, e letras maiúsculas pequenas (*small caps*) alternativas quando as minúsculas já estiverem “comprometidas”. Em resumo, a notação deste texto para a decomposição de Reynolds é

$$\begin{aligned} U_i &= \langle U_i \rangle + u_i && \text{(velocidade),} \\ P &= \langle P \rangle + p && \text{(pressão),} \\ T &= \langle T \rangle + \mathcal{T} && \text{(temperatura),} \\ \varrho &= \langle \varrho \rangle + \rho && \text{(densidade),} \end{aligned}$$

etc.. Infelizmente, nem tudo está perfeitamente resolvido; ainda restam dois problemas.

## Conflitos entre símbolos

Muitos símbolos utilizados neste texto possuem significados distintos em termodinâmica e em mecânica, ou mesmo dentro da mecânica. Alguns casos notórios (na notação deste texto) são

- $F$  é a energia livre de Helmholtz;  $f_i$  é uma força de corpo;
- $G$  é a energia livre de Gibbs;  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade;  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração da gravidade, e  $g_i$  é sua  $i$ -ésima componente;
- $t$  é o tempo;  $\mathbf{t}$  é o vetor-tensão;
- $T$  é a temperatura;  $\mathbf{T}$  é o tensor de tensões,

---

\* $v$  é o símbolo de Richardson para a velocidade

etc..

Em lugar de tentar criar um número suficiente de símbolos novos (por exemplo, [Batchelor \(1967\)](#) utiliza  $e$  e não  $u$  para a energia interna específica), o que de qualquer forma terminaria por esgotar o estoque de símbolos antes que todas as grandezas estivessem representadas, eu preferi:

1. procurar separar os símbolos sempre que possível por capítulo ou pelo menos por seção (por exemplo, a maior parte dos símbolos termodinâmicos está utilizada no capítulo sobre termodinâmica); e
2. deixar ao leitor atento a compreensão do significado dos símbolos em seu contexto.

## Variáveis aleatórias e suas realizações

Em teoria de probabilidades, é usual separar uma variável aleatória  $X$  de uma particular realização ou valor de quantil  $x$ ; isto facilita muito escrever coisas do tipo:

$$P(X \leq x)$$

é a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  seja menor ou igual que o valor  $x$ . Neste texto, entretanto, as letras maiúsculas representam valores instantâneos. Em particular, as flutuações de velocidade  $u_i$ , variáveis aleatórias extremamente importantes, são denotadas em letras minúsculas. Infelizmente, não parece possível separar de forma “limpa” o símbolo de uma variável aleatória do símbolo de uma particular realização ou de um quantil. O melhor que pode ser feito é utilizar os argumentos da variável para explicitar a diferença. Assim, voltando à decomposição de Reynolds, em geral teremos

$$U(\mathbf{x}, t; \omega) = \langle U \rangle(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Aqui, as variáveis aleatórias são função do elemento  $\omega$  do espaço amostral  $\Omega$ , além de o serem da posição e do tempo. É conveniente imaginar  $\Omega$  como uma urna de sorteio, e  $\omega$  como o particular valor sorteado, que neste caso vai definir uma realização da função aleatória  $U(\mathbf{x}, t; \omega)$  ou  $u(\mathbf{x}, t; \omega)$ .

## “É função de ...”

Neste trabalho, quando uma variável  $\phi$  qualquer é (por hipótese) uma função univariada de uma outra variável  $k$ , nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k).$$

Quando  $\phi$  é uma função (multivariada) de  $k$  entre outras variáveis, nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k, \dots).$$

Quando  $\phi$  não é função de  $k$  (mas é, possivelmente, função de outras variáveis), dizemos ff:

$$\phi := \text{ff}(k);$$

Finalmente,  $\phi$  pode ser uma constante:

$$\phi := \text{€}$$

# 1

## Introdução

---

Todo autor e todo curso se sente na obrigação de fornecer uma introdução de “largo espectro” ao assunto que vai ser estudado. Este é, efetivamente, o espírito deste primeiro capítulo. O objetivo geral deste curso é proporcionar uma introdução às ferramentas e técnicas de teoria de turbulência úteis em Engenharia. Em um grande número de aplicações, isso acontece em camadas-limite turbulentas.

Para se entender turbulência, é preciso antes de mais nada “vê-la”. Richardson a via como turbilhões, de diversos tamanhos, os maiores “alimentando” os menores num processo “contínuo” até que as flutuações do escoamento fossem amortecidas pela viscosidade. Isso é a essência do processo de *transferência inercial, não-linear, de covariâncias*, conforme veremos neste curso (bem mais à frente).

Portanto os pioneiros, Richardson, Taylor e Kolmogorov, tinham uma clara noção de que existem “estruturas”, “pedaços” ou “entes” num escoamento turbulento em um *continuum* de escalas, e que o próprio conceito de “escala” é essencial para a compreensão da turbulência.

No entanto, *escala* é um conceito “físico” ou “fenomenológico”, cuja exata definição matemática em termos dos campos de velocidade  $U(\mathbf{x}, t)$  ou de escalares tais como a temperatura  $T(\mathbf{x}, t)$  é consideravelmente difícil, senão impossível. Mesmo assim, é possível identificar diferentes escalas com diversas ferramentas matemáticas, tais como:

- Análise espectral (provavelmente a mais antiga).
- Funções empíricas ortogonais.
- Diferentes algoritmos para a identificação de estruturas e sua decomposição.
- Ondeletas (*Wavelets*).

Essas “estruturas” de diversos tamanhos realmente existem em um escoamento turbulento, mas nós devemos ser cuidadosos em não equacioná-las demais (nem de menos!) com uma particular técnica matemática de identificá-las.

Várias fotografias e figuras coloridas interessantes existem no livro sobre turbulência de Lesieur (1990), e também no de Frisch (1995): dê uma olhada nelas.

Existem algumas estruturas e alguns problemas clássicos relacionados um pouco à instabilização de escoamentos, que estão relacionados com a questão de turbulência:

- O experimento de Reynolds: a forma “clássica” de apresentar a turbulência em cursos de graduação, ele ainda conserva um considerável charme e didatismo:

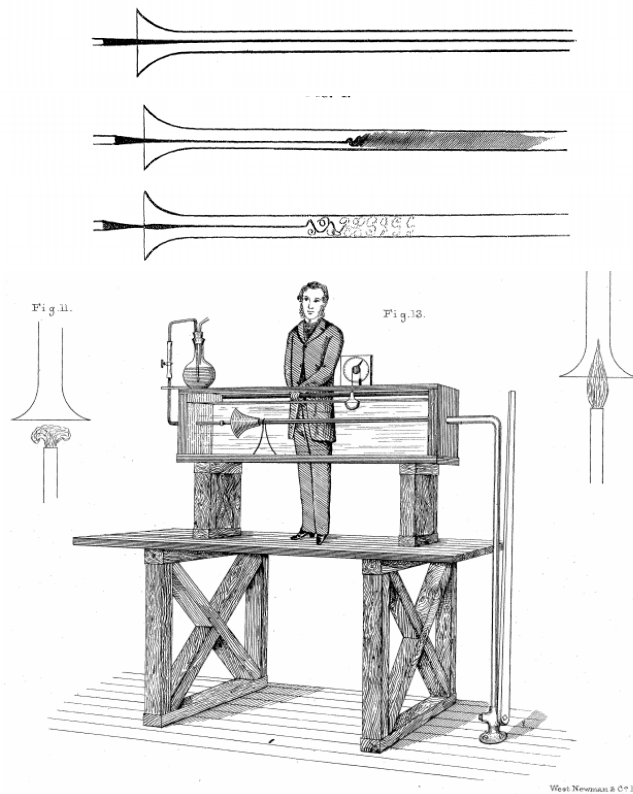


Figura 1.1: O experimento de Reynolds (figuras do autor: [Reynolds \(1883\)](#), figuras 3, 4 e 5, pág. 942, e lâmina 73.)

aumentado-se gradualmente a velocidade média em um tubo em que se injeta, no centro, um corante, atinge-se um ponto, em torno do número de Reynolds

$$Re_D = \frac{\rho V D}{\mu} \sim 2000,$$

( $\rho$  é a massa específica do fluido,  $V$  é a velocidade média,  $D$  é o diâmetro do tubo e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica) em que o escoamento se desestabiliza e se torna turbulento. A figura 1.1 mostra ilustrações do próprio Reynolds sobre o seu experimento.

- A “Rua de vórtices de von Kármán” (*Kármán vortex street*) (ver figura 1.3).
- Jatos e esteiras
- Turbulência atrás de uma grade em um túnel de vento (*grid turbulence*).

A turbulência é ao mesmo tempo um fenômeno de grande interesse teórico e grande importância prática. A figura 1.2, por exemplo, mostra o efeito de um episódio de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52 (um avião consideravelmente grande e resistente).

## 1.1 – Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados

Nós estamos acostumados a identificar diversos fenômenos à nossa volta como “aleatórios”: jogos de azar, envolvendo dados e cartas, e loterias, são talvez os mais



Figura 1.2: Efeito de turbulência em céu claro sobre o leme de um B-52. Fonte: Wikipedia ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing\\_B-52\\_with\\_no\\_vertical\\_stabilizer.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3ABoeing_B-52_with_no_vertical_stabilizer.jpg))

comuns. Nós percebemos aleatoriedade também, entretanto, em fenômenos que envolvem *física*: por exemplo, a velocidade de uma molécula em um gás, as condições do tempo, e também em numerosos fenômenos de escoamento de fluidos, tais com a superfície de um mar revolto e, é claro, escoamentos turbulentos.

A figura 1.4 é um exemplo disso: ela mostra a medição da densidade  $\varphi_c$  de  $\text{CO}_2$  a cerca de 2 m acima do solo, durante 10 minutos, sobre um gramado. A natureza errática de  $\varphi_c$  é inegável, e sugere que existe um componente aleatório na turbulência.

Tratar um fenômeno como aleatório em geral é mais simples do que tentar descrevê-lo em todos os seus detalhes, o que pode levar a uma complexidade analítica ou computacional insuperável. Por exemplo, em princípio nós poderíamos usar as equações da dinâmica de corpos rígidos para tentar prever o resultado do lançamento de um dado. Isso entretanto envolve conhecer em detalhes como o lançamento é feito; a resistência do ar durante a sua queda; a natureza da superfície em que ele cai, etc.. Na prática, o esforço para modelar *cada* lançamento individual é injustificável, e é preferível descrever o processo como probabilístico, com 1/6 de probabilidade de ocorrência do número de cada face.

A situação com turbulência é parecida: nós acreditamos que a turbulência é uma manifestação (ou uma *realização*) das equações de Navier-Stokes, as equações diferenciais *determinísticas* que regem o escoamento de um fluido. No entanto, os detalhes associados com a definição das condições iniciais e de contorno, assim como com a solução propriamente dita dessas equações não-lineares, são tão formidáveis que alternativas a um ataque direto, e infrutífero, são necessárias. A teoria de probabilidade e processos estocásticos é um elemento essencial de qualquer abordagem minimamente bem-sucedida ao problema de turbulência.

A melhor abordagem, que todos adotamos modernamente, para a teoria de probabilidade é devida a A. N. Kolmogorov, sendo chamada de “abordagem axiomática”. Ela é consideravelmente mais elegante do que a alternativa anterior, histórica, de definir probabilidade como um limite da frequência empírica com que um resultado (um “evento”) é observado. Uma abordagem elementar mas muito clara pode ser encontrada em Papoulis (1991, capítulo 2); em ordem crescente de rigor (mas inevitavel-

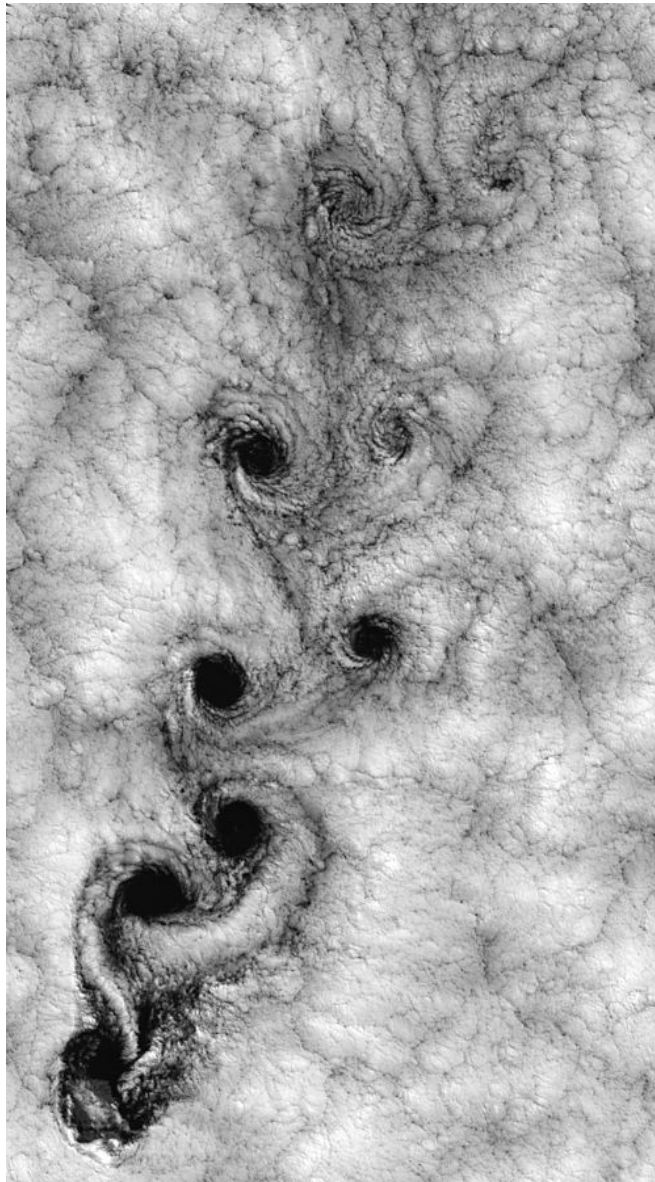


Figura 1.3: A rua de vórtices de von Kármán, causada pelo vento soprando ao redor das ilhas Juan Fernández, ao largo da costa do Chile (Por Bob Cahalan, NASA GSFC, em domínio público: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=87336>)



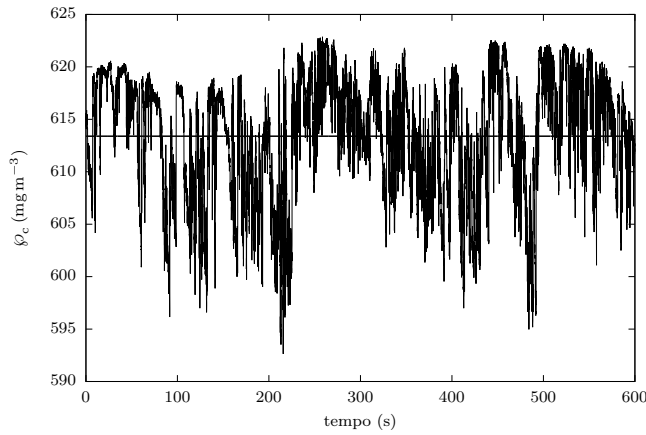


Figura 1.4: 10 minutos de medições de concentração de CO<sub>2</sub> sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40.

mente, também de dificuldade), outras abordagens podem ser encontradas em [James \(1981\)](#), [Rosenthal \(2008\)](#) e [Billingsley \(1986\)](#).

A essência da abordagem axiomática de Kolmogorov é postular a existência de uma *tripla de probabilidade*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ([Rosenthal, 2008](#), capítulo 2):

- $\Omega$  é um conjunto, denominado *espaço amostral*.
- $\mathcal{F}$  é um campo, um conjunto formado por sub-conjuntos de  $\Omega$ . Mas não *todos* os subconjuntos! (Mais sobre isso em um instante). Em linguagem matemática muito técnica,  $\mathcal{F}$  é uma álgebra  $\sigma$ , ou um campo  $\sigma$ .
- $P$  é a medida de probabilidade, que dá, para cada  $A \in \mathcal{F}$ , a probabilidade do ocorrência do conjunto — ou melhor, do *evento* —  $A$ . Mais especificamente,  $P$  é uma função do tipo

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A) \in [0, 1].$$

O segredo (e o enorme problema) da coisa é que  $\mathcal{F}$  *não* é, em geral, igual ao conjunto de todos os sub-conjuntos de  $\Omega$ . Ele é formado apenas pelos conjuntos  $A \subseteq \Omega$  para os quais é possível definir  $P(A)$  (para mais detalhes, veja a excelente exposição de [Rosenthal \(2008\)](#), capítulo 1)).

Dentro dessa abordagem, uma *variável aleatória* VA é agora, a função *mensurável*  $U(\omega)$ :

$$U : \omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \in \Omega \mapsto U = U(\omega).$$

Por definição, uma função  $U(\omega)$  é mensurável se

$$\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq U^\#\} \in \mathcal{F}, \quad U^\# \in \mathbb{R}$$

([Rosenthal, 2008](#), capítulo 3).

A pergunta mais importante do ponto de vista prático é: qual é a probabilidade de ocorrência de um certo intervalo de valores de  $U(\omega)$ ? A resposta é dada com a definição da *função de distribuição* de  $U$ ,  $F(U^\#)$ :

$$F(U^\#) \equiv P\left(\{\omega \mid U(\omega) \leq U^\#\}\right). \quad (1.1)$$

Em particular, fica então evidente que é necessário que  $U(\omega)$  seja mensurável para que  $F(U^\#)$  possa ser definida em termos da medida de probabilidade  $P$ .

Talvez o descritor mais comum de uma VA seja a sua média, ou valor esperado. Ela é dada por uma integral de  $U(\omega)$  sobre  $\Omega$ , a saber

$$\langle U \rangle \equiv \int_{\Omega} U(\omega) dP(\omega). \quad (1.2)$$

A definição das integrais do tipo (1.2) é tecnicamente muito elaborada, e passa por um assunto denominado *Teoria da medida*; talvez um tratado definitivo sobre o tema, em conexão com a teoria de probabilidade, seja Billingsley (1986). Em Engenharia, nós estamos normalmente acostumados com o cálculo de integrais sobre intervalos de números reais, e não em conjuntos mais genéricos e abstratos tais como  $\Omega$  (cuja natureza sequer foi definida acima!). Felizmente, vem em nosso auxílio o seguinte teorema, que nós citamos sem prova (Rosenthal, 2008, Teorema 6.1.1):

**Teorema de mudança de variáveis:** Dada uma tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , seja  $U$  uma variável aleatória com medida de probabilidade  $P$  e distribuição  $F$ . Então, para qualquer função mensurável  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF(t). \quad (1.3)$$

Observações:

1. O teorema (1.3) é também a definição do valor esperado de uma função  $g(U)$ :

$$\langle g(U) \rangle \equiv \int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega). \quad (1.4)$$

2. Em particular, quando  $g(t) = t$  (a identidade), nós obtemos a expressão para o valor esperado, ou média probabilística, de  $U$ :

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U dF(U). \quad (1.5)$$

3. Analogamente, a variância de  $U$  é

$$\text{Var}\{U\} \equiv \langle (U - \langle U \rangle)^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (U - \langle U \rangle)^2 dF(U). \quad (1.6)$$

4. Finalmente, se  $F(U)$  for diferenciável, e se existir a *função densidade de probabilidade*

$$f(U) \equiv \frac{dF}{dU}, \quad (1.7)$$

segue-se que

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U f(U) dU. \quad (1.8)$$

Esta última definição de  $\langle U \rangle$  talvez seja a mais comum em cursos introdutórios de probabilidade.



Figura 1.5: Ilustração de um processo estocástico univariado  $U(t; \omega)$ : as unidades de  $U$  e  $t$  são arbitrárias.

**Distribuições conjuntas de variáveis aleatórias** Uma variável aleatória pode ter mais de uma “componente” ou, o que dá no mesmo, podemos considerar distribuições conjuntas de duas ou mais VA’s. Isso pode ser formalizado (para duas variáveis com distribuição conjunta) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U &= (U, V); \\ U &: \omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \in \Omega &\mapsto (U(\omega), V(\omega)). \end{aligned}$$

Assim como antes, a função de distribuição de  $U$  pode ser definida:

$$F(U^\#, V^\#) \equiv P\left(\left\{\omega \mid (U(\omega) \leq U^\#) \wedge (V(\omega) \leq V^\#)\right\}\right)$$

Da mesma forma, para um vetor de variáveis aleatórias no  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F(U_1^\#, \dots, U_n^\#) \equiv P\left(\left\{\omega \mid (U_1(\omega) \leq U_1^\#) \wedge \dots \wedge (U_n(\omega) \leq U_n^\#)\right\}\right).$$

O cálculo de médias, variâncias, etc., estende-se naturalmente às funções de distribuição conjuntas. Por exemplo, a média de  $\langle U \rangle$  em uma distribuição bivariada de  $(U, V)$  é

$$\langle U \rangle = \int_{U \in \mathbb{R}} \int_{V \in \mathbb{R}} U dF_{U,V}(U, V),$$

e a *covariância* entre  $U$  e  $V$  é

$$\{U, V\} = \int_{U \in \mathbb{R}} \int_{V \in \mathbb{R}} (U - \langle U \rangle)(V - \langle V \rangle) dF_{U,V}(U, V).$$

## 1.2 – Processos estocásticos

Com as ferramentas da seção anterior, nós agora definimos brevemente o que são **processo estocásticos**: Seja  $\mathbb{F}$  o espaço das funções de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , e  $t \in \mathbb{R}$ , em  $\mathbb{R}$ . Um processo estocástico é uma função

$$\begin{aligned} U &: \Omega \rightarrow \mathbb{F} \\ \omega &\mapsto U(\mathbf{x}, t; \omega). \end{aligned}$$

Em outras palavras, a cada “sorteio”  $\omega$ , em vez de o resultado do sorteio ser um número real (que é a definição de VA), o resultado do sorteio agora é uma função completa  $U$  de  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Nós dizemos que  $U$  é uma *função aleatória* (note que não há contradição nessa terminologia!). O significado de um processo estocástico está esboçado graficamente na figura 1.5. Por simplicidade, na figura a função aleatória depende apenas de uma variável ( $t$ ).

A figura 1.5 dá um exemplo da idéia de um *conjunto de realizações* da variável  $U(t)$  (na literatura de língua inglesa, um *ensemble*). Para que as médias de  $U$  façam sentido, é preciso que elas sejam tomadas sobre todos os “membros” do conjunto.

Note entretanto que é exatamente isso o que faz a definição de valor esperado (1.2): o papel de um “membro” do conjunto é desempenhado por um particular  $\omega \in \Omega$ .

Nossa definição de processo estocástico é extraordinariamente geral. Muito frequentemente, é preciso impor restrições a um processo estocástico para que resultados úteis em Turbulência (ou em qualquer outro campo de aplicação de processos estocásticos) possam ser obtidos. Algumas dessas restrições, muito úteis e frequentes em Turbulência, são discutidas a seguir.

**Processos estacionários e homogêneos** Considere por simplicidade um processo estocástico  $U(t; \omega)$  em que cada realização  $U(t; \omega^\#)$  ocorre apenas em  $t$  (a generalização para  $U(\mathbf{x}, t; \omega)$  será óbvia). Neste curso, a variável  $t$  é *contínua* (note entretanto que processos estocásticos em que a variável  $t$  é discreta são perfeitamente possíveis, e eventualmente úteis também em turbulência). Independentemente disso, é sempre possível produzir sub-conjuntos discretos de  $n$  instantes de tempo,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , e para cada um desses sub-conjuntos (dos quais há infinitos) considerar a distribuição conjunta de probabilidade

$$F_{U(t_1), \dots, U(t_n)}(U_1^\#, \dots, U_n^\#).$$

Nós dizemos que o processo é *estacionário* se essa distribuição for *invariante* sob uma translação  $\tau$  dos instantes de tempo, ou seja, se

$$F_{U(t_1), \dots, U(t_n)}(U_1^\#, \dots, U_n^\#) = F_{U(t_1+\tau), \dots, U(t_n+\tau)}(U_1^\#, \dots, U_n^\#)$$

para *todos* os subconjuntos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  possíveis.

Alguns casos particulares dessa definição nos ajudam a entender, na prática, o que significa a estacionariedade do processo. Por exemplo, considere o caso  $n = 1$ , e a média probabilística do processo em dois instantes,  $\langle U(t_1) \rangle$  e  $\langle U(t_2) \rangle$ . Então (se o processo for estacionário), fazendo  $\tau = t_2 - t_1$ ,

$$\begin{aligned} \langle U(t_1) \rangle &= \int U dF_{U(t_1)} \\ &= \int U dF_{U(t_1+\tau)} \\ &= \int U dF_{U(t_2)} = \langle U(t_2) \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Em outras palavras, em um processo estocástico, a média não muda com o tempo. O mesmo ocorrerá com a variância, cuja prova deixamos para o leitor:

$$\text{Var}\{U(t_1)\} = \text{Var}\{U(t_2)\}.$$

Esses dois fatos são facilmente identificáveis nas realizações de um processo estocástico mostradas na figura 1.5: *visualmente*, não percebemos nenhuma “tendência” de mudança da média nem no “espalhamento” dos valores em torno da média ao longo do tempo.

Uma função particularmente importante para nós será a *função de autocovariância*. Em um processo estocástico estacionário, a média é constante. Consequentemente, é trivial subtrair essa constante e trabalhar com um processo cuja média é zero. Seja então  $U(t; \omega)$  com  $\langle U(t; \omega) \rangle = 0$ . A *função de autocovariância* de  $U(t; \omega)$  é definida (para o caso de média zero!) por

$$C_{UU}(t_1, t_2) \equiv \langle U(t_1)U(t_2) \rangle. \quad (1.9)$$

Como o processo é estacionário, e fazendo-se  $\tau = t_2 - t_1$ ,

$$\begin{aligned}\langle U(t_1)U(t_2) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} U_1 U_2 dF_{U(t_1), U(t_2)}(U_1, U_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U_1 U_2 dF_{U(t_1-t_1), U(t_2-t_1)}(U_1, U_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U_1 U_2 dF_{U(0), U(\tau)}(U_1, U_2) \\ &= \langle U(0)U(\tau) \rangle.\end{aligned}$$

A função de autocovariância de um processo estocástico, portanto, é a rigor uma função de uma única variável, a *defasagem*  $\tau$  entre os valores de  $U$  em dois instantes. Para processos estacionários, portanto, uma definição equivalente da função de autocovariância é

$$C_{UU}(\tau) \equiv \langle U(t)U(t + \tau) \rangle. \quad (1.10)$$

Definições análogas podem ser feitas para processos estocásticos no espaço. O conceito análogo ao de estacionariedade no tempo é o de homogeneidade no espaço; quando a função de distribuição multivariada em um conjunto (arbitrário) de pontos  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  é invariante sob uma translação  $\mathbf{r}$  no espaço nós dizemos que o processo é *homogêneo*.

### 1.3 – A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds

De agora em diante nós vamos postular que em um escoamento turbulento cada variável  $U_i$  é um processo estocástico do tipo

$$U_i = U_i(\mathbf{x}, t; \omega). \quad (1.11)$$

Como vimos na seção 1.2, uma *realização* do processo é uma função de  $\mathbf{x}$  e  $t$  observada para um particular  $\omega$ , ou ainda: cada  $\omega$  corresponde a uma *realização diferente* do processo estocástico subjacente.

Dada uma variável  $U_i$  em um escoamento turbulento, a *decomposição de Reynolds* consiste em escrever

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i. \quad (1.12)$$

Uma das principais utilidades da decomposição de Reynolds é separar o escoamento em uma variável determinística  $\langle U_i \rangle$  (que pode ou não variar no espaço e no tempo) e em uma *flutuação turbulenta*  $u_i$ , que é uma VA com valor esperado nulo. De fato, por definição (ver (1.2)) temos que

$$\langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega). \quad (1.13)$$

Note que  $\langle U_i \rangle$  é determinística *por definição*. A média de população de  $u_i$  então será

$$\begin{aligned}\langle u_i \rangle &= \langle U_i - \langle U_i \rangle \rangle \\ &= \int_{\omega \in \Omega} (U_i(\mathbf{x}, t; \omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t)) dP(\omega) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega)\end{aligned}$$

$$= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.14)$$

Infelizmente, (1.14) está longe de garantir que  $u_i$  seja um processo estocástico estacionário e/ou homogêneo. Por exemplo, nada está dito sobre a dependência (ou não) em  $\mathbf{x}$  e em  $t$  dos momentos de ordem 2 do tipo  $\langle u_i u_j \rangle$ . Entretanto, ela já é um começo, e pelo menos ela permite separar os efeitos de uma velocidade média com variação local muito forte, como é o caso de camadas-limite turbulentas com forte cisalhamento.

Utilizando (1.12) e (1.13), nós provaremos agora os demais “postulados” de Reynolds:

$$\begin{aligned} \langle \langle U_i \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i \langle U_j \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle \langle u_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Finalmente, as derivadas em relação a  $x_i$  e a  $t$  comutam com a operação de média probabilística:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\rangle &= \int_{\omega \in \Omega} \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, t; \omega)}{\partial t} dP(\omega) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \right] \\ &= \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

A prova do resultado para as derivadas parciais em relação a  $x_i$ ,

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (1.18)$$

é similar à prova de (1.17), e é deixada para o leitor.

O conjunto de relações (1.14)–(1.18) é usualmente conhecido na literatura com o nome de *postulados de Reynolds*. À luz da sua dedução rigorosa acima, o nome mais adequado talvez fosse *lemas de Reynolds*.

## 1.4 – Dependência estocástica e correlação

Duas variáveis aleatórias  $U$  e  $V$  são *independentes* quando

$$F_{U,V}(U^\#, V^\#) = F_U(U^\#)F_V(V^\#)$$

Se duas variáveis  $U$  e  $V$  são independentes, é relativamente fácil provar que

$$\langle UV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle.$$

Também é fácil provar que se um processo estocástico é estacionário,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle U^2 \rangle &= 0, \\ \left\langle U \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\ \langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Ou seja: a covariância entre um processo estocástico estacionário e sua flutuação é nula. O mesmo vale para processos homogêneos no espaço. Na penúltima linha acima, usamos o fato de que

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} = 0$$

para um processo estacionário.

Vamos a partir de agora trabalhar apenas com as flutuações turbulentas  $u$  e  $v$  de duas variáveis genéricas. Suponha que  $u$  e  $v$  sejam dois processos estocásticos estacionários, com médias de população nulas, variâncias unitárias (por simplicidade:  $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = 1$ ) e correlacionados.

Vamos supor um modelo muito simples de dependência estocástica:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{u}{2} + \frac{rv}{2} + \epsilon_u \right], \quad (1.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{T} \left[ -\frac{v}{2} + \frac{ru}{2} + \epsilon_v \right]. \quad (1.20)$$

onde  $r$  é uma constante adimensional, e  $\epsilon_u$  e  $\epsilon_v$  *ruídos brancos*: variáveis aleatórias com média zero, variância unitária, e com correlação nula entre si e com  $u$  e  $v$ .  $T$  é um tempo característico do sistema. Repare que ele é necessário para que (1.19)–(1.20) sejam dimensionalmente consistentes, assim como o requerimento de que  $\llbracket \epsilon_u \rrbracket = \llbracket u \rrbracket = \llbracket v \rrbracket = \llbracket \epsilon_v \rrbracket$ .

É importante enfatizar que (1.19)–(1.20) *estão longe de constituírem um bom modelo para as flutuações de velocidade em um escoamento turbulento, governadas pelas equações de Navier-Stokes*. Por exemplo, ao contrário de Navier-Stokes, elas são lineares. Mesmo assim, elas têm algumas propriedades desejáveis. Por exemplo, assim como ocorre com as equações de Navier-Stokes, (1.19)–(1.20) são simétricas em  $u, v$  (elas não mudam se permutarmos  $u$  com  $v$ ), e o processo estocástico  $(u(t, \omega), v(t, \omega))$  que elas descrevem é estacionário. Portanto, há algumas coisas que podemos aprender, mesmo com esse modelo simples.

Multiplicando (1.19) por  $v$ ; (1.20) por  $u$ , e promediando,

$$\left\langle v \frac{du}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\langle vu \rangle}{2} + \frac{r \langle v^2 \rangle}{2} + \langle v \epsilon_u \rangle \right], \quad (1.21)$$

$$\left\langle u \frac{dv}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \left[ -\frac{\langle uv \rangle}{2} + \frac{r \langle u^2 \rangle}{2} + \langle u \epsilon_v \rangle \right]. \quad (1.22)$$

Mas

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \langle u^2 \rangle = 1, \\ \langle v \epsilon_u \rangle &= \langle u \epsilon_v \rangle = 0; \end{aligned}$$

portanto, somando-se as equações em  $\left\langle v \frac{du}{dt} \right\rangle$  e  $\left\langle u \frac{dv}{dt} \right\rangle$ ,

$$\frac{d\langle uv \rangle}{dt} = \frac{1}{T} [-\langle uv \rangle + r].$$

Como o processo é estacionário, o lado esquerdo acima é nulo. Portanto,

$$\langle uv \rangle = r; \quad (1.23)$$

em outras palavras, (1.19)–(1.20) descrevem um processo estocástico em que o coeficiente de correlação entre  $u$  e  $v$  é  $r$ . Substituindo (1.23), agora, em (1.21)–(1.22), encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle v \frac{du}{dt} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u \frac{dv}{dt} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Com esse pequeno exercício, portanto, nós exibimos um processo estocástico bivariado com algumas (poucas!) propriedades em comum com as flutuações de velocidade produzidas pelas equações de Navier-Stokes em que as covariâncias/correlações cruzadas entre as duas componentes são nulas.

## 1.5 – Uma primeira lição sobre isotropia

Coisas a fazer

Defina isotropia em um ponto. Discuta a natureza eminentemente cinemática do conceito de isotropia. Relacione isotropia com homogeneidade: o que vem antes, e qual é a relação entre elas? Explique que não há fluxos em turbulência isotrópica, mas que isso pode ser relaxado com o conceito de isotropia local.

# 2

## Termodinâmica de uma mistura diluída

---

### 2.1 – Regra de fase de Gibbs e relações de Maxwell

Para uma mistura de  $n_c$  componentes sem reações químicas, pode-se deduzir a regra de fase de Gibbs ([Adkins, 1983](#), p.223, eq. 11.45):

$$n_g = 2 + n_c - n_f, \quad (2.1)$$

onde  $n_g$  é o número de graus de liberdade do sistema, e  $n_f$  é o número de fases. No caso de  $n_c = 2$  e de apenas uma fase ( $n_f = 1$ ), o número de graus de liberdade do sistema é  $n_g = 2 + 2 - 1 = 3$ . Consequentemente, a equação de estado para uma mistura binária monofásica deve depender de 3 variáveis de estado independentes. Considere agora uma mistura de dois componentes com densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , tais que  $\rho_1 \gg \rho_2$ , ou seja: o sistema é uma mistura diluída da substância 2 na substância 1. Defina a concentração mássica da substância  $K$ :

$$C_K \equiv \frac{\wp_K}{\wp}, \quad (2.2)$$

onde

$$\wp = \wp_1 + \wp_2 \quad (2.3)$$

é a densidade total do sistema; isso produz imediatamente as restrições

$$C_1 + C_2 = 1, \quad (2.4)$$

$$dC_1 = -dC_2, \quad (2.5)$$

de modo que dada a concentração de um componente, a concentração do outro está automaticamente determinada. Dependendo da conveniência, portanto, nós utilizaremos o símbolo  $C$  como sinônimo de  $C_2$ .

Pela regra de fase de Gibbs, a energia interna (e de fato qualquer outro potencial termodinâmico) deve ser uma função de 3 variáveis de estado. Escolhendo-se as 3 variáveis de estado “naturais” para a energia interna por unidade de massa  $\mathcal{U}$ ,

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{V}, S, C), \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{V}$  é o volume específico (volume por unidade de massa)

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\wp}, \quad (2.7)$$

$S$  é a entropia específica (entropia por unidade de massa) e  $C = C_2$  é a concentração mássica do componente 2 definida em (2.2).

A diferencial total de  $U$  será

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= -Pd\mathcal{V} + TdS + \sum_{K=1}^2 \mu_K dC_K \\ &= -Pd\mathcal{V} + TdS + AdC. \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde os  $\mu_K$ 's são os potenciais químicos dos componentes da mistura, e

$$A = \mu_2 - \mu_1 \quad (2.9)$$

é a *afinidade* da mistura (Kondepudi e Prigogine, 1998, p. 114). Para se obter (2.8), utilizou-se (2.5). Um de nossos principais objetivos neste capítulo é a obtenção de uma expressão para a afinidade  $A$  da mistura em termos de grandezas físicas mensuráveis, tais como a temperatura ou calores específicos.

A partir de (2.8), obtém-se 3 relações de Maxwell:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial S \partial \mathcal{V}} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathcal{V} \partial S} \Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{\mathcal{V},C} = \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{V}}\right)_{S,C}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial C \partial \mathcal{V}} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathcal{V} \partial C} \Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial C}\right)_{\mathcal{V},S} = \left(\frac{\partial A}{\partial \mathcal{V}}\right)_{C,S}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial C \partial S} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial S \partial C} \Rightarrow -\left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)_{S,\mathcal{V}} = \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{C,\mathcal{V}}. \quad (2.12)$$

Para a entalpia específica  $H$ ,

$$H \equiv \mathcal{U} + P\mathcal{V}, \quad (2.13)$$

$$dH = \mathcal{V}dP + TdS + AdC, \quad (2.14)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.14) são

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial S}\right)_{P,C} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,C}, \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial C}\right)_{P,S} = \left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{C,S}, \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial A}{\partial S}\right)_{C,P}. \quad (2.17)$$

Para a energia livre de Helmholtz específica  $F$ ,

$$F \equiv \mathcal{U} - ST, \quad (2.18)$$

$$dF = -Pd\mathcal{V} - SdT + AdC, \quad (2.19)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.19) são

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{V},C} = -\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{V}}\right)_{T,C}, \quad (2.20)$$



$$-\left(\frac{\partial P}{\partial C}\right)_{\mathcal{V},T} = +\left(\frac{\partial A}{\partial \mathcal{V}}\right)_{C,T}, \quad (2.21)$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)_{T,\mathcal{V}} = +\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{C,\mathcal{V}}. \quad (2.22)$$

Finalmente, para a energia livre de Gibbs específica,

$$G \equiv H - ST, \quad (2.23)$$

$$dG = \mathcal{V}dP - SdT + AdC, \quad (2.24)$$

e as 3 relações de Maxwell a partir de (2.24) serão

$$+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T}\right)_{P,C} = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,C}, \quad (2.25)$$

$$+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial C}\right)_{P,T} = +\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_{C,T}, \quad (2.26)$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)_{T,P} = +\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{C,P}. \quad (2.27)$$

## 2.2 – Mistura diluída de 2 gases ideais

### 2.2.1 – Equações de estado

Considere agora 2 gases ideais. Cada gás ideal “ $K$ ” da mistura é definido pela equação de estado

$$P_K \mathcal{V} = N_K R T, \quad (2.28)$$

onde  $N_K$  é o número de moles do gás  $K$ , e  $R$  é a constante universal dos gases.

$$P_K = \frac{M_K}{\mathcal{V}} \frac{R}{\mathcal{M}_K} T,$$

e definindo-se a constante e a densidade do gás  $K$

$$R_K \equiv R/\mathcal{M}_K, \quad (2.29)$$

$$\rho_K \equiv \frac{M_K}{\mathcal{V}}, \quad (2.30)$$

obtem-se

$$P_K = \rho_K R_K T, \quad (2.31)$$

ou, alternativamente,

$$P_K \mathcal{V}_K = R_K T, \quad (2.32)$$

e pela equação para sua energia interna específica,

$$U_K = U_{K0} + c_{vK}(T - T_0) \quad (2.33)$$

(Callen 1985, p. 66; Adkins 1983, p. 116), onde o calor específico a volume constante do gás  $K$  é dado por

$$c_{vK} = Z_K R_K \quad (2.34)$$

Tabela 2.1: Propriedades de gases atmosféricos a 0° C e 101325 Pa <sup>†</sup>

propriedade →	$\mathcal{M}_K$	$\mathcal{R}_K$	$Z_K$	$c_{pK}$ (calculado)	$c_{pK}$ (medido)
gás ↓	$10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$		$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
N <sub>2</sub>	28,013	296,80	5/2	1038,80	1037
O <sub>2</sub>	31,999	259,83	5/2	909,40	909
H <sub>2</sub> O	18,016	461,48	3	1845,92	1847

<sup>†</sup>Fontes: [Fleagle e Businger \(1980\)](#), [Müller \(1985\)](#), [Iribarne e Godson \(1986\)](#).

com  $Z_K = 3/2, 5/2$  e 3 para gases monoatômicos, biatômicos e com mais de dois átomos, respectivamente ([Müller, 1985](#), p. 9, eq. 1.20). À temperatura de referência  $T_0$  a energia interna possui um valor de referência *arbitrário*  $U_{K0}$ . Além disto,  $P_K$  é a pressão parcial de vapor do gás  $K$ ,  $\mathcal{V}$  é o volume total ocupado,  $N_K$  é o número de moles do gás  $K$ ,  $R$  é a constante universal dos gases,  $M_K$  é a massa do gás  $K$  e  $\mathcal{M}_K$  é a massa molar do gás  $K$ .

A relação geral entre os calores específicos a volume constante  $c_v$  e a pressão constante  $c_p$  em uma substância pura é ([Kondepudi e Prigogine, 1998](#), p.46)

$$c_p - c_v = \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial \mathcal{V}} \right)_T \right] \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P \quad (2.35)$$

de forma que da equação de estado (2.32) tem-se

$$c_{pK} - c_{vK} = R_K. \quad (2.36)$$

A tabela 2.2.1 fornece algumas propriedades de gases atmosféricos e a comparação entre os valores calculados de  $c_{pK}$  a partir de (2.34) e (2.36) com valores medidos.

### 2.2.2 – Demais potenciais termodinâmicos de um gás ideal

**Entalpia** Combinando-se (2.32) e (2.33), obtém-se

$$\begin{aligned} H_K &\equiv U_K + P_K \mathcal{V}_K = U_{K0} + c_{vK}(T - T_0) + R_K T \\ &= U_{K0} + R_K T_0 + (c_{vK} + R_K)(T - T_0) \\ &= H_{K0} + (c_{vK} + R_K)(T - T_0) \\ &= H_{K0} + c_{pK}(T - T_0). \end{aligned} \quad (2.37)$$

**Entropia** A primeira lei da termodinâmica para o  $K$ -ésimo componente da mistura de gases é

$$dU_K = T dS_K - P_K d\mathcal{V}_K, \quad (2.38)$$

e como  $U_K$  em um gás ideal depende somente de  $T$ ,

$$\begin{aligned} c_{vK} dT &= T dS_K - \frac{R_K T}{\mathcal{V}_K} d\mathcal{V}_K, \\ dS_K &= c_{vK} \frac{dT}{T} + R_K \frac{d\mathcal{V}_K}{\mathcal{V}_K}, \\ S_K - S_{K0} &= c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{\rho_K}{\rho_{K0}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Alternativamente, use

$$P_K d\mathcal{V}_K + \mathcal{V}_K dP_K = R_K dT, \quad (2.40)$$

$$\frac{d\mathcal{V}_K}{\mathcal{V}_K} + \frac{dP_K}{P_K} = \frac{dT}{T}, \quad (2.41)$$

para obter

$$\begin{aligned} dS_K &= (c_{vK} + R_K) \frac{dT}{T} - R_K \frac{dP_K}{P_K}, \\ S_K - S_{K0} &= c_{pK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Novamente, a entropia de referência à temperatura  $T_0$  é  $S_{K0}$ . A 3ª lei da termodinâmica prevê que a entropia deve se anular quando a temperatura termodinâmica atinge o zero absoluto, de forma que  $S_{K0}$  não deve ser arbitrária; entretanto, nós vamos procurar abordar o problema mais à frente utilizando tabelas de entalpias e entropias de formação dos constituintes da mistura, e de certa forma evitando a 3ª lei.

**Energia livre de Gibbs específica** Para um gás ideal “K” com equação de estado (2.32), a relação de Maxwell (2.24) resulta em

$$\left( \frac{\partial G_K}{\partial P_K} \right)_T = \mathcal{V}_K = \frac{R_K T}{P_K}, \quad (2.43)$$

e agora integrando em relação a  $P$  (a  $T$  constante) nós obtemos

$$G_K(T, P_K) = \mathcal{G}(T) + R_K T \ln \left( \frac{P_K}{P_{K0}} \right), \quad (2.44)$$

onde  $\mathcal{G}(T)$  é uma função somente da temperatura, a determinar. Na verdade, para um gás ideal é possível fazer muito melhor do que isto utilizando-se simplesmente as definições de  $H_K$  (2.37) e  $S_K$  (2.39):

$$\begin{aligned} G_K &= H_K - TS_K \\ &= H_{K0} + c_{pK}(T - T_0) - T \left[ S_{K0} + c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \right] \\ &= H_{K0} + R_K(T - T_0) + c_{vK}(T - T_0) - T \left[ S_{K0} + c_{vK} \ln \frac{T}{T_0} - R_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \right] \\ &= (H_{K0} - TS_{K0}) + R_K T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \ln \frac{T_0}{T} + TR_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \\ &= \underbrace{(H_{K0} - T_0 S_{K0})}_{g_{K0}} - S_{K0} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + R_K T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) \\ &\quad + c_{vK} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + TR_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \\ &= g_{K0} + (R_K - S_{K0}) T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) + c_{vK} T \left( 1 - \frac{T_0}{T} + \ln \frac{T_0}{T} \right) + TR_K \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Agora, para  $T_0/T \approx 1$ , se expandirmos  $\ln(T_0/T)$  em série de Taylor em torno de 1 até ordem 2, encontraremos

$$G_K \approx G_{K0} + (R_K - S_{K0}) T \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right) - \frac{1}{2} c_{vK} T \left( \frac{T_0 - T}{T} \right)^2 + R_K T \ln \frac{P_K}{P_{K0}} \quad (2.46)$$

É importante observar que há necessariamente *duas* constantes de integração a determinar em (2.45) ou em (2.46). Este é o mesmo resultado obtido por Müller (1985) em sua equação (6.72). No nosso caso, nós retivemos a temperatura de referência  $T_0$  de maneira que o argumento de  $\ln(\cdot)$  permanece sempre adimensional. O conhecimento de  $T_0$  também será importante quando utilizarmos na próxima sub-seção os conceitos de entalpia, entropia e energia livre de Gibbs de *formação* de uma substância.

### 2.2.3 – A afinidade de uma mistura de gases ideais

A pressão total de uma mistura de gases ideais será a soma das pressões parciais de vapor (a *lei de Dalton*), do que se obtém a equação de estado da mistura:

$$\begin{aligned}
 P &= \sum P_k \\
 &= \rho_1 R_1 T + \rho_2 R_2 T, \\
 &= \rho \left[ \frac{\rho_1}{\rho} R_1 T + \frac{\rho_2}{\rho} R_2 T \right] \\
 &= \rho [C_1 R_1 + C_2 R_2] T \\
 &= \rho [(1 - C) R_1 + C R_2] T \\
 &= \rho [R_1 + (R_2 - R_1) C] T.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Note que a mistura se comporta como se fosse um gás ideal com constante  $R(C) = R_1 + (R_2 - R_1)C$  dependente da concentração  $C$ .

Além disto, pode-se mostrar que para uma mistura de gases ideais a pressão, a entropia e todos os potenciais termodinâmicos são iguais às somas das quantidades correspondentes de cada gás (Adkins, 1983, p. 215). Nós vamos usar este resultado geral para obter algumas relações de interesse. Por exemplo, para a energia interna,

$$U = U_1 + U_2 = U_1 M_1 + U_2 M_2 \Rightarrow U = C_1 U_1 + C_2 U_2. \tag{2.48}$$

Analogamente, a entalpia e a entropia específicas são dadas por

$$H = C_1 H_1 + C_2 H_2, \tag{2.49}$$

$$S = C_1 S_1 + C_2 S_2. \tag{2.50}$$

Segue-se de (2.49) que o calor específico a pressão constante da mistura é dado por

$$\begin{aligned}
 c_p &\equiv \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,C} = (1 - C) \left( \frac{\partial H_1}{\partial T} \right)_P + C \left( \frac{\partial H_2}{\partial T} \right)_P \\
 &= (1 - C) c_{p1} + C c_{p2} \\
 &= [c_{p1} + (c_{p2} - c_{p1}) C].
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Note que enquanto que  $\mathcal{V}$ ,  $S$ ,  $H$ , etc., são grandezas específicas por unidade de massa *total*  $M$ ,  $U_1$  e  $U_2$  são energias internas por unidade de massa *de cada gás*,  $M_1$  e  $M_2$  (o mesmo acontecendo com  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , etc.). Aqui, as relações-chave são

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}}{M} = \frac{\mathcal{V}}{M_K} \frac{M_K}{M} = \mathcal{V}_K C_K \quad (\text{para cada } K), \tag{2.52}$$

$$d\mathcal{V} = C_K d\mathcal{V}_K + \mathcal{V}_K dC_K \tag{2.53}$$

Finalmente, para obtermos a afinidade  $A$  da mistura de 2 gases ideais, nós precisamos permitir que  $C$  varie. Diferenciando (2.48), obtemos

$$\begin{aligned} dU &= \sum (C_K dU_K + U_K dC_K) \\ &= \sum (C_K (TdS_K - P_K d\mathcal{V}_K) + U_K dC_K). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Diferenciando (2.50),

$$\begin{aligned} dS &= \sum (C_K dS_K + S_K dC_K), \\ T \left( \sum C_K dS_K \right) &= TdS - \sum TS_K dC_K, \end{aligned} \quad (2.55)$$

e utilizando (2.52), (2.53) e (2.55) em (2.54):

$$\begin{aligned} dU &= TdS - \sum TS_K dC_K - \sum P_K (d\mathcal{V} - \mathcal{V}_K dC_K) + \sum U_K dC_K \\ &= TdS - \left( \sum P_K \right) d\mathcal{V} - \sum TS_K dC_K + \sum P_K \mathcal{V}_K dC_K + \sum U_K dC_K \\ &= TdS - Pd\mathcal{V} + \sum (U_K + P_K \mathcal{V}_K - TS_K) dC_K \\ &= TdS - Pd\mathcal{V} + \sum G_K dC_K. \end{aligned} \quad (2.56)$$

O resultado, comparado com (2.8), mostra que

$$\mu_K = G_K, \quad (2.57)$$

ou seja: os potenciais químicos de cada componente da mistura são iguais à respectiva energia livre de Gibbs da substância pura correspondente (ambos por unidade de massa); portanto, a afinidade de uma mistura de dois gases ideais é, simplesmente,

$$A = G_2 - G_1. \quad (2.58)$$

A rigor, este mesmo resultado poderia ter sido obtido muito mais rapidamente por meio da equação de Euler (Callen, 1985, p. 59),

$$TS = U + P\mathcal{V} - \sum_{k=1}^N \mu_K C_K; \quad (2.59)$$

fazendo  $N = 1$  para o caso de um único componente, e então  $c_K \equiv 1$ , obtém-se

$$\mu_K = U_K + P_K \mathcal{V}_K - TS_K \equiv G_K. \quad (2.60)$$

Tabela 2.2: Entalpia e energia livre de Gibbs de formação, e entropia padrão de gases atmosféricos a 298,15 K e 100.000 Pa <sup>†</sup>

propriedade → gás ↓	$\Delta_f H^0$ MJ kg <sup>-1</sup>	$\Delta_f G^0$ MJ kg <sup>-1</sup>	$S^0$ kJ kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
N <sub>2</sub>	0	0	6,8383
O <sub>2</sub>	0	0	6,4086
H <sub>2</sub> O	-13,423	-12,688	10,479

<sup>†</sup>Fontes: NIST Chemistry WebBook, <http://webbook.nist.gov/chemistry>.

# 3

## As equações diferenciais de transporte

---

A turbulência é uma consequência da não-linearidade das equações diferenciais que governam o escoamento de fluidos e o transporte de escalares (vapor d'água, calor, CO<sub>2</sub>, etc.). Neste capítulo nós vamos revisar de maneira breve a dedução destas equações a partir de leis de conservação da física e de equações constitutivas.

### 3.1 – Notação indicial

Uma boa parte de nossas manipulações requer o uso de notação indicial, e dos conceitos de *vetor* e de *tensor*. De maneira extremamente breve, a notação indicial envolve simplesmente a supressão dos símbolos de somatório. Desta forma, um vetor em coordenadas cartesianas na base canônica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ,

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \mathbf{e}_i, \quad (3.1)$$

é escrito simplesmente como

$$\mathbf{V} = V_i \mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

A regra geral é que o aparecimento de um mesmo índice duas vezes em uma equação indica soma neste índice. Algumas vezes, entretanto, esta regra não se aplica. Por exemplo, eu posso querer me referir a  $V_1 \mathbf{e}_1$  ou  $V_2 \mathbf{e}_2$  ou  $V_3 \mathbf{e}_3$ . Nesse caso, usarei parênteses em torno dos índices, para informar que não há uma soma implícita nestes índices:  $V_{(i)} \mathbf{e}_{(i)}$ .

### 3.2 – Continuidade

Considere um volume  $\mathcal{V}$ , delimitado por uma superfície fechada  $\mathcal{S}$ . O balanço de massa total para  $\mathcal{V}$  é dado pela equação de balanço integral

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \quad (3.3)$$

onde  $\wp$  é a massa específica, ou densidade, do fluido e  $\mathbf{U}$  é o vetor velocidade do escoamento em cada ponto.

Em (3.3),  $\mathcal{V}$  é um *volume material* (Slattery, 1972), ou seja, o volume de um corpo que ocupa, instantaneamente,  $\mathcal{V}$ . Em Mecânica dos Fluidos básica, frequentemente

as análises se concentram sobre a região do espaço definida por  $\mathcal{V}$ , que é então denominado *volume de controle* (Fox e McDonald, 1981).

A idéia de volume material é talvez um pouco mais rica: se considerarmos que cada ponto de  $\mathcal{V}$  representa um ponto material imerso no campo de velocidade  $\mathbf{U}$  no instante  $t = 0$ , e seguirmos a trajetória de cada uma dessas partículas, o volume ocupado pelas mesmas em um instante posterior é o volume do mesmo corpo nesse último instante.

O vetor unitário normal à superfície de controle em cada ponto é  $\mathbf{n}$ . A integral de superfície acima pode ser transformada em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \, dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \, dV, \\ 0 &= \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \right) \, dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esboçamos agora o argumento do *Teorema da Localização*: o volume  $\mathcal{V}$  para o qual a equação acima se aplica é totalmente genérico: de fato, (3.4) acima aplica-se a *qualquer* volume dentro de um escoamento. Mas isso só é possível se o *integrando* for identicamente nulo, ou seja:

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.5)$$

Uma outra forma útil da equação da continuidade é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \wp}{\partial t} + U_i \frac{\partial \wp}{\partial x_i} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{D\wp}{Dt} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalmente, se utilizarmos o *volume específico*,

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\wp}, \quad (3.7)$$

obteremos uma terceira forma útil da equação da continuidade:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt} \quad \blacksquare \quad (3.8)$$

Fisicamente, (3.8) significa que a divergência do campo de velocidade é igual à taxa temporal de variação do volume de fluido (por unidade de volume!) em cada ponto.

### 3.3 – Misturas

Nesta seção nós vamos seguir a essência da abordagem de Bird et al. (1960, cap. 16): ela permite entender claramente o significado de difusão molecular de uma substância em um fluido, e em nossa opinião evita totalmente confusões comuns a respeito do papel da difusão e da advecção em meios contínuos.

Além disso, nós vamos considerar, por simplicidade, apenas misturas binárias, com um soluto A dissolvido em um solvente B. A generalização para misturas com mais de 2 componentes é óbvia.



Em uma mistura binária nós postulamos a existência em cada ponto de uma densidade para cada componente,  $\wp_A$  e  $\wp_B$ , de tal maneira que as massas totais de A e B em um volume material  $V$  são, respectivamente,

$$M_A = \int_V \wp_A dV, \quad M_B = \int_V \wp_B dV. \quad (3.9)$$

É evidente que, em cada ponto, devemos ter

$$\wp = \wp_A + \wp_B. \quad (3.10)$$

Note que a abordagem postulatória de (3.9) é compatível com a visão tradicional em Mecânica do Contínuo. Prosseguindo, nós também postulamos a existência de campos de velocidade para cada espécie,  $U_A$  e  $U_B$ , cujas integrais em um volume material são a quantidade de movimento total de cada espécie, respectivamente  $P_A$  e  $P_B$ . Por analogia com (3.9)–(3.10), temos

$$P_A = \int_{\mathcal{V}} \wp_A U_A dV, \quad P_B = \int_{\mathcal{V}} \wp_B U_B dV. \quad (3.11)$$

Agora, a quantidade de movimento total do corpo que ocupa  $\mathcal{V}$  deve ser

$$P = \int_{\mathcal{V}} \wp U dV, \quad (3.12)$$

onde  $U$  é a velocidade do fluido em cada ponto, de tal forma que devemos ter

$$\wp U = \wp_A U_A + \wp_B U_B. \quad (3.13)$$

O ponto fundamental agora é perceber que é extremamente difícil, senão impossível, medir diretamente  $U_A$  e  $U_B$ . Em seu lugar, é muito mais simples trabalhar unicamente com o campo de velocidade  $U$  do fluido como um todo em cada ponto. Para tanto, nós definimos o vetor fluxo difusivo de massa de A:

$$J_A = \wp_A [U_A - U]. \quad (3.14)$$

A concentração mássica de A é

$$C_A \equiv \frac{\wp_A}{\wp}, \quad (3.15)$$

e vale a lei de Fick em cada ponto:

$$J_A = -\wp v_A \nabla C, \quad (3.16)$$

onde  $v_A$  é a difusividade molecular de A na mistura. Relações totalmente análogas também valem para o solvente B.

Finalmente, das equações (3.10) e (3.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} J_A + J_B &= \wp_A [U_A - U] + \wp_B [U_B - U] \\ &= \wp_A U_A + \wp_B U_B - (\wp_A + \wp_B) U \\ &= \wp U - \wp U = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Essa equação é válida em todos os pontos de um fluido, *exceto talvez em uma superfície onde haja um fluxo líquido de A para dentro da massa de fluido*.

Prosseguindo, por analogia com (3.3), o balanço integral de  $A$  é tão simples quanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_A) dS \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U} + \mathbf{U}]) dS; \\
 - \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U}]) dS &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\
 - \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

onde a introdução de  $\mathbf{J}_A$  na última linha segue-se de sua definição (3.14). Uma dedução totalmente análoga vale para  $B$ .

A aplicação dos teoremas da divergência e da localização para  $A$  e para  $B$  produz, agora, duas equações diferenciais de balanço de massa:

$$\frac{\partial \wp_A}{\partial t} + \frac{\partial \wp_A U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{A,i}}{\partial x_i}, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \wp_B}{\partial t} + \frac{\partial \wp_B U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{B,i}}{\partial x_i}. \tag{3.20}$$

A soma de (3.19) e (3.20) tem que restaurar (3.5); dada a equação (3.10), segue-se necessariamente que

$$\frac{\partial J_{A,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{B,i}}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{3.21}$$

(3.21) vale *sempre*; duas coisas podem acontecer. No caso mais geral, qualquer difusão molecular do soluto  $A$  é compensada por difusão molecular, também do solvente  $B$ , de uma certa forma, “no sentido oposto”. Note entretanto que (3.21) estipula que é a soma das *divergências* dos fluxos difusivos de massa que é nula. Uma situação particular que pode ocorrer é o caso em que  $\mathbf{J}_A = \text{const.}$  e  $\mathbf{J}_B = 0$ ; portanto é possível ocorrer fluxo difusivo apenas do soluto, desde que a sua divergência seja nula. É comum a confusão entre um fluxo e sua divergência nas equações de um meio contínuo, e este é um bom exemplo para explicitar sua diferença.

### 3.4 – Quantidade de movimento

O balanço integral geral de quantidade de movimento para um volume material  $\mathcal{V}$  é

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp \mathbf{U} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{3.22}$$

onde  $\mathbf{F}_s$  são as forças de superfície atuando sobre o volume de controle, e  $\mathbf{F}_c$  são as forças de corpo. A equação a seguir,

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} \mathbf{e}_i dS, \tag{3.23}$$

condensa um volume considerável de conhecimento. A força de superfície é dada pela integral de superfície do *vetor-tensão*  $\mathbf{t}$ . Esse por sua vez é escrito na forma  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , isto é, como o pré-produto do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  pelo *tensor de tensões*  $\mathbf{T}$ . Finalmente, a *equação constitutiva* para o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  em função do primeiro

coeficiente de viscosidade  $\mu$ , do segundo coeficiente de viscosidade  $\lambda$  e da pressão termodinâmica  $P$  é

$$T_{ji} = \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ji}. \quad (3.24)$$

onde

$$S_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.25)$$

é a taxa de deformação; o delta de Kroenecker é

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (3.26)$$

A integral de superfície correspondente à força de superfície é transformada em uma integral de volume por intermédio do Teorema da divergência:

$$\mathbf{F}_s = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \left( -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ji}) \right) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.27)$$

Para obter (3.27), nós supusemos  $\mu$  constante, e o “retiramos” da operação de diferenciação. Embora estritamente isso não seja verdade, é usual desconsiderar as variações de  $\mu$  (e eventualmente de  $\lambda$ ) com a posição na dedução das equações de Navier-Stokes.

A força de corpo num referencial em rotação deve incluir a aceleração de Coriolis:  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular da terra,  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade (o que inclui os demais efeitos de a Terra ser um referencial não-inercial – veja Liggett (1994)), e

$$\mathbf{F}_c = \int_{\mathcal{V}} \wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}] dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.28)$$

Os termos do lado direito são

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \wp U_i}{\partial t} dV \right] \mathbf{e}_i, \quad (3.29)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS = \left[ \oint_{\mathcal{S}} U_i \wp n_j U_j dS \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_i U_j) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (3.30)$$

Reunindo todos os termos,

$$\left[ \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}) + \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) - \frac{\partial (\wp U_i)}{\partial t} - \frac{\partial (\wp U_i U_j)}{\partial x_j} \right) dV \right] \mathbf{e}_i = 0. \quad (3.31)$$

Pelo teorema da localização, o integrando deve ser identicamente nulo; então:

$$\frac{\partial (\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.32)$$

Expandindo o lado esquerdo e simplificando-o por meio de (3.5), e explicitando  $T_{ji}$  com (3.24):

$$\wp \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}), \quad (3.33)$$

$$\wp \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp v_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.34)$$

onde nós usamos (3.24) e (3.27), e

$$\wp v_u \equiv \mu \quad (3.35)$$

define a viscosidade cinemática  $v_u$ .

Embora (3.34) seja provavelmente a forma mais “clássica” de apresentar as equações de Navier-Stokes compressíveis, ela *não* será a mais útil quando precisarmos lançar mão da aproximação de Boussinesq no capítulo 5. Por isso, preferimos escrever a equação para quantidade de movimento na forma totalmente equivalente

$$\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (3.36)$$

### 3.5 – Vorticidade

As seguintes identidades serão úteis na sequência: se  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  é um campo escalar, então:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}]}_{=0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{u}] &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_l \\ &= \epsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ik} \\ &= \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{jil} + \epsilon_{ijl}]}_{=0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (3.38)$$

A vorticidade em um ponto de um escoamento é definida como o rotacional da velocidade:

$$\Omega = \nabla \times U, \quad (3.39)$$

ou, em notação indicial:

$$\Omega_k \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} e_k. \quad (3.40)$$

É fácil verificar a identidade:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \Omega_k &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\ &= \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Considere agora o rotacional da equação de *momentum*, pré-condicionada com a identidade (3.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} - \epsilon_{ijk} U_j \Omega_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} \Omega_j U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + (\lambda + \mu) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nosso próximo passo é calcular o rotacional de (3.42). Isso é natural, na medida em que surgirá uma equação para  $D\Omega/Dt$ . Note também a presença de dois gradientes em (3.42),  $\nabla\phi$  e  $\nabla\psi$ , onde

$$\phi = \frac{1}{2} (U_j U_j), \quad (3.43)$$

$$\psi = -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k}. \quad (3.44)$$

O rotacional de ambos é nulo, devido a (3.37). Prosseguimos agora termo a termo. O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}. \quad (3.45)$$

O rotacional do segundo termo do lado esquerdo de (3.42) é

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \epsilon_{lim} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= \epsilon_{mli} \epsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= [\delta_{mj} \delta_{lk} - \delta_{mk} \delta_{lj}] \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m).
 \end{aligned}$$

Algumas simplificações ainda são possíveis. Note que a velocidade angular da terra,  $\omega$ , é constante: as suas derivadas espaciais serão nulas. Além disso, note também que, em virtude de (3.38),  $\nabla \cdot \Omega = 0$ . Aplicando essas simplificações,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m) \\
 &= U_k \frac{\partial [\Omega_m + 2\omega_m]}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\
 &\quad - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - U_m \frac{\partial}{\partial x_j} [\Omega_j + 2\omega_j] \\
 &= U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j}. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Conforme já havíamos comentado, o rotacional do terceiro termo do lado esquerdo de (3.42) é nulo em virtude de (3.37):

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2} \frac{\partial U_j U_j}{\partial x_i} = \epsilon_{lim} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} = 0. \quad (3.47)$$

O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (3.42) é nulo:

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0. \quad (3.48)$$

Com a ajuda de (3.44), o rotacional do segundo termo do lado direito de (3.42) é

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{1}{\wp} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] &= \frac{1}{\wp} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{1}{\wp} \right) \\
 &= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\
 &= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right). \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Finalmente, o rotacional do terceiro termo do lado direito de (3.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu_u \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.50)$$

Nós agora reunimos os resultados (3.45)–(3.50) na equação da vorticidade:

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + U_k \underbrace{\frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k}}_I = \underbrace{[\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j}}_I - \underbrace{[\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k}}_{II}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{\text{III}} + \underbrace{\nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{IV}}. \quad (3.51)$$

O lado esquerdo de (3.51) é a derivada material da vorticidade,  $D\Omega_m/dt$ . O termo I do lado direito é o termo de estiramento e inclinação de vórtice (*vortex stretching/tilting*): existe uma tendência a “esticar” as linhas de velocidade, intensificando a vorticidade ao mesmo tempo em que ela ocupa regiões menores (mais “finas”) do escoamento. Veja a discussão deste importante termo em escoamentos tridimensionais em Kundu (1990, p. 133 (“**Meaning of  $(\omega \cdot \nabla)u$ ”**)). O termo II do lado direito de (3.51) só vai ser importante em escoamentos compressíveis. O termo III é o termo baroclínico. É fácil ver que

$$\text{III} = \frac{1}{\wp^2} \nabla \wp \times \nabla \psi;$$

a presença de desalinhamento entre os gradientes de densidade e de pressão altera a vorticidade; finalmente, o termo IV é o termo viscoso.

É possível definir para a vorticidade, uma grandeza análoga ao que é a energia cinética para a velocidade. O nome dessa grandeza é *enstrofia*:

$$Z \equiv \frac{1}{2} \Omega_m \Omega_m.$$

Da mesma forma que ocorre com a energia mecânica, cuja equação pode ser deduzida a partir da equação de momentum fazendo-se o produto interno dessa última com o vetor velocidade (ver seção 3.7), é possível obter uma equação para a enstrofia tomando-se o produto interno de 3.51 com  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + \Omega_m U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} &= \Omega_m [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ &+ \Omega_m \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \Omega_m \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

O lado esquerdo de (3.52) é

$$\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \quad (3.53)$$

(a derivada material da enstrofia). O único termo para o qual dedicaremos algum esforço algébrico adicional aqui será o último de (3.52). Note que (esse truque será utilizado repetidamente neste livro):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \right) = \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}; \Rightarrow \\ \nu_u \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - \nu_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A *natureza* de cada um dos dois termos do lado direito de (3.54) acima é diferente: o primeiro termo é uma divergência e redistribui enstrofia (por difusão molecular),

enquanto que o segundo termo é *sempre negativo*: na ausência de efeitos de compressibilidade, ele é o termo responsável pela destruição (dissipação) de enstrofia no escoamento. Note também que o termo baroclínico deu origem a um produto triplo entre os vetores  $\nabla\wp$ ,  $\nabla P$  e  $\Omega$ . Nossa equação final para o balanço de enstrofia fica:

$$\begin{aligned} \frac{DZ}{Dt} = & \Omega_m [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ & + \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \Omega_m + \nu_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - \nu_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \blacksquare \end{aligned} \quad (3.55)$$

### 3.6 – Energia

A equação de balanço da energia *total* (ou seja: interna e cinética) para um volume de controle é

$$\dot{\tilde{W}} + \dot{\tilde{Q}} + \dot{\tilde{I}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \quad (3.56)$$

onde  $\dot{\tilde{W}}$  é a taxa de trabalho realizada sobre o volume de controle pelas forças de superfície  $e$  de corpo,  $\dot{\tilde{Q}}$  é o fluxo de calor por condução para dentro do volume de controle e  $\dot{\tilde{I}}$  é a taxa de aporte de energia para dentro do volume de controle devido à difusão de massa e consequente mudança relativa de composição química da mistura. Os tís servem para diferenciar valores totais de valores por unidade de massa; assim (por exemplo),  $\tilde{W}$  é o trabalho sobre um corpo, enquanto que  $W$  é o trabalho por unidade de massa. A energia específica (por unidade de massa) é

$$E = \frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U}, \quad (3.57)$$

onde  $\mathcal{U}$  é a energia interna por unidade de massa. Note que nós não incluímos nenhum termo de energia potencial, porque  $\dot{W}$  contabilizará *todas* as forças atuando sobre o volume de controle, incluindo as conservativas. O cálculo de cada um dos termos do lado esquerdo de (3.56) é feito como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Q}} &= - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) dS = \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} n_j \frac{\partial T}{\partial x_j} dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor fluxo de calor. Em notação indicial, a *equação constitutiva* para a transferência de calor por condução, ou difusão molecular, é

$$q_i = -\wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.59)$$

onde  $c_p$  é o calor específico a pressão constante do fluido,  $\nu_{\mathcal{T}}$  é a difusividade térmica molecular, e  $T$  é a temperatura termodinâmica.

A taxa de trabalho realizado sobre  $\mathcal{V}$  é

$$\dot{\tilde{W}} = \int_{\mathcal{V}} (\wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}] \cdot \mathbf{U}) dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) U_i dV + \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} U_i dS \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left( \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) \right) dV \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left( \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) U_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} \right) dV. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

O lado direito de (3.56) é

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(E\wp)}{\partial t} dV = \int_{\mathcal{V}} \left( E \frac{\partial \wp}{\partial t} + \wp \frac{\partial E}{\partial t} \right) dV \tag{3.61}$$

e

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS &= \oint_{\mathcal{S}} E \wp n_j U_j dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_j E) dV = \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left( E \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} + \wp U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) dV \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Combinando (3.61) e (3.62) acima, tem-se

$$\int_{\mathcal{V}} \left( E \underbrace{\left( \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} \right)}_{=0} + \wp \left( \frac{\partial E}{\partial t} + U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) \right) dV, \tag{3.63}$$

onde o primeiro termo é nulo por força da equação da continuidade. O restante é

$$\int_{\mathcal{V}} \wp \frac{DE}{Dt} dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \left( U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) dV. \tag{3.64}$$

Combinando-se todos os termos da equação de energia,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \wp c_p v_\theta \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} + U_i \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. \wp \left( U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) \right) dV = 0 \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos com  $\wp U_i$  em comum,

$$\wp U_i \left[ \frac{DU_i}{Dt} - \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) \right] \equiv 0, \tag{3.66}$$

já que o termo entre parênteses é a própria equação de balanço de quantidade de movimento! O que resta, após aplicarmos o teorema da localização, é

$$\wp \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}, \tag{3.67}$$

onde, de maneira análoga ao que foi feito com a equação de quantidade de movimento quando consideramos  $\mu$  constante, nós consideramos o termo  $\wp c_p v_\theta$  constante e o retiramos da derivada. Novamente, embora não seja estritamente correto, isso é usual.

O termo  $\partial U_i / \partial x_j T_{ji}$  é facilmente calculável:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} = \left( \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ij} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.68)$$

$$= -P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (3.69)$$

Como os índices  $i$  e  $j$  são mudos (ambos aparecem repetidos, indicando somatórios), eles podem ser trocados:

$$\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} 2S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 = 2S_{ij} S_{ij}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Note que (3.71) é uma soma de 9 termos, todos eles positivos. Finalmente, obtemos

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} S_{ij}. \quad (3.72)$$

Os dois últimos termos correspondem à conversão *irreversível* de energia mecânica em energia interna, e é possível mostrar que sua soma é sempre positiva, debaixo da *hipótese de Stokes* (Kundu, 1990, p. 92),

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \quad (3.73)$$

Então, a equação de interação tensor de tensões-gradiente de velocidade fica

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + 2\mu \left( S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \right), \quad (3.74)$$

e podemos completar o quadrado do termo entre parênteses:

$$\begin{aligned} S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 &= S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2 \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2S_{ij} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$= \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2. \quad (3.75)$$

Finalmente,

$$T_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2. \quad (3.76)$$

A equação diferencial completa para a energia interna fica

$$\wp \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \underbrace{\wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_I - \underbrace{P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{II} + \underbrace{2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{\Phi=III}, \quad (3.77)$$

onde I representa o aquecimento/resfriamento de uma partícula de fluido por condução, II representa o trabalho reversível realizado pela pressão, e III, que é sempre positivo, é a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna, e denomina-se *dissipação viscosa*. Em muitos livros, a dissipação viscosa é denotada pela letra grega (minúscula ou maiúscula)  $\Phi$ . Essa última está relacionada com uma grandeza que vai aparecer inúmeras vezes em teoria de turbulência, a *taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa*,  $\mathcal{E}_E$ . As duas relacionam-se simplesmente por

$$\Phi = \wp \mathcal{E}_E. \quad (3.78)$$

Uma forma alternativa a (3.77) é facilmente obtida: utilizando a definição de entalpia específica (2.14), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{P}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\mathcal{U} + P\mathcal{V}) - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \frac{DH}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Por enquanto, suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica,  $\beta_P$ , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade,  $\kappa_T$ , são definidos nesse caso por

$$\beta_P \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\wp} \left( \frac{\partial \wp}{\partial T} \right)_P, \quad (3.80)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (3.81)$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa)  $H$  definida em (2.14) em função de  $T$  e  $P$ , e calculando seu diferencial,

$$\begin{aligned} dH &= \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \\ &= c_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP, \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P. \quad (3.83)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$dH = \mathcal{V}dP + TdS, \quad (3.84)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} + T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T; \quad (3.85)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \beta_P \mathcal{V}, \quad (3.86)$$

onde  $S$  é a entalpia específica, donde

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} (1 - \beta_P T). \quad (3.87)$$

Agora, partimos de (3.79), e utilizamos (3.83) e (3.87) para exprimir  $DH/Dt$ :

$$\begin{aligned} \wp \frac{DH}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Uma vantagem óbvia de (3.88) é que nela comparecem apenas grandezas diretamente mensuráveis (em princípio) tais como  $T$  e  $P$ , e não mais potenciais termodinâmicos mais “abstratos”, tais como  $\mathcal{U}$  ou  $H$ .

### 3.7 – A dissipação viscosa como perda de energia mecânica e fonte de energia interna

Neste ponto, é muito conveniente nós dedicarmos um pouco mais de atenção à *energia mecânica* do escoamento. Como vimos, utilizando uma série de simplificações baseadas nas leis de conservação de massa e de *momentum*, nós reduzimos o balanço integral que corresponde à conservação *geral* de energia (cinética *mais* interna), (3.56), a uma equação diferencial para a energia interna, (3.77). Na sequência, nós vamos seguir se não passo a passo pelo menos muito de perto a excelente exposição do assunto feita por Kundu (1990). Primeiramente, note de (3.60) que o taxa de trabalho realizado pelas forças de superfície sobre um volume material  $\mathcal{V}$  é:

$$\dot{\tilde{W}}_s = \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS = \dots = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) dV. \quad (3.89)$$

Kundu (1990) denomina  $\partial (T_{ji} U_i) / \partial x_j$  de *trabalho total*, por unidade de volume, das forças de superfície em um ponto. Já o produto escalar de  $\mathbf{U}$  pela equação dinâmica (3.33) é

$$\wp U_i \frac{DU_i}{Dt} = \wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \wp U_i g + U_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (3.90)$$

Note que o trabalho por unidade de volume das forças de superfície efetivamente responsável pela *variação* da energia cinética,  $U_i \partial T_{ji} / \partial x_j$ , é *diferente* do trabalho total; utilizando a regra da cadeia, entretanto, é elementar que

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \rho U_i g + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji}) - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}. \quad (3.91)$$

O último termo do lado direito da equação acima é denominado por Kundu *trabalho de deformação*. Ele é dado por (3.76), donde

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \underbrace{\rho U_i g}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji})}_{II} + \underbrace{P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{III} - \underbrace{2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{IV}. \quad (3.92)$$

Nosso quadro de balanço de energia fica, então, completo. O termo I, claro, é o trabalho da força peso. O termo II é um “termo de transporte”. Note que  $U_i T_{ji}$  representa um fluxo advectivo de tensão total  $T_{ji}$ . Esse termo encontra-se sob a forma de uma divergência: a sua integral sobre um volume suficientemente grande envolvendo o escoamento de interesse anula-se. Isso significa que II não pode criar nem destruir energia cinética localmente, mas representa uma *redistribuição* de energia cinética dentro do escoamento. O interessante é o aparecimento de III e IV: eles são os termos II e III de (3.77), com o sinal trocado. Em (3.92), III é a contribuição do trabalho *reversível* da pressão para o aumento da energia cinética (quando  $\partial U_k / \partial x_k > 0$ ), e IV é a conversão *irreversível* de energia cinética em energia interna.

### 3.8 – A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas

Duas quantidades que vimos até aqui aparecem de forma natural como quadrados. Elas são a energia cinética do escoamento (por unidade de massa),

$$E_c = \frac{1}{2} U_i U_i \quad (3.93)$$

e  $\mathcal{E}_E$ , a taxa de dissipação de  $E_c$ :

$$\mathcal{E}_E = 2\nu_u \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (3.94)$$

Em (3.94), nós utilizamos (3.77) e (3.78) juntamente com (3.35).

Aplicando a decomposição de Reynolds (1.12) a (3.93), temos:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle + u_i] [\langle U_i \rangle + u_i] \\ &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle \langle U_i \rangle + 2 \langle U_i \rangle u_i + u_i u_i] \\ &\equiv \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle}_{\langle E_{cm} \rangle} + \underbrace{\langle U_i \rangle u_i}_{e_c} + \frac{u_i u_i}{2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Há 3 termos em (3.95): uma decomposição de Reynolds “clássica” para  $E_c$ , em média e flutuação, não é possível, porque ela é uma quantidade quadrática. Mesmo assim, podemos identificar  $\langle E_{cm} \rangle$  acima como a energia cinética do escoamento médio. Da

mesma forma, podemos identificar  $e_c$  acima como a energia cinética local, no espaço-tempo, da turbulência. Promediando a equação acima, a média do termo intermediário se anula, e, utilizando os postulados de Reynolds, (1.14)–(1.16),

$$\langle E_c \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle}_{\langle E_{cm} \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle}_{\langle e_c \rangle}. \quad (3.96)$$

Note que, por ser definida como um quadrado, a “flutuação”  $e_c$  não é tem média zero.

Como vimos, o primeiro termo do lado direito de (3.96) é a *energia cinética do escoamento médio*,  $\langle E_{cm} \rangle$ . O segundo termo de (3.96) é de grande importância em teoria de turbulência. Ele é, apropriadamente, denominado de *energia cinética da turbulência*,  $\langle e_c \rangle$ , muitas vezes abreviado pela sigla ECT\*. A rigor, deveríamos chamar  $\langle e_c \rangle$  de energia cinética *média* da turbulência, mas essa terminologia não é usual. Mesmo assim, neste texto nós manteremos o símbolo  $e_c$  entre colchetes angulares,  $\langle \rangle$ , para enfatizar o ponto. Para registro:

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle. \quad (3.97)$$

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de energia cinética é análogo. Comece notando que, novamente com a ajuda da decomposição de Reynolds (1.12), e de (1.18),

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right]}_{\langle S_{ij} \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]}_{s_{ij}} \\ &= \langle S_{ij} \rangle + s_{ij}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde  $\langle S_{ij} \rangle$  é a taxa de deformação média, e  $s_{ij}$  é a sua flutuação. Da mesma forma, é imediato que

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (3.99)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_E &= 2\nu_u \left[ \left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \times \\ &\quad \left[ \left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \\ &= 2\nu_u \left\{ \left[ \left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]^2 + 2 \left[ \left\langle S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \right. \end{aligned}$$

---

\*Em Inglês, *Turbulence Kinetic Energy* ou TKE.

$$\left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^2 \} \quad (3.100)$$

Prosseguimos, com a promediação de (3.100) e (novamente) com o uso dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_E \rangle = & 2\nu_u \left[ \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \langle s_{ij} \rangle \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \right] \\ & + 2\nu_u \left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \left\langle s_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \delta_{ij} \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \langle s_{ij} \rangle \delta_{ij} &= \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k}, \\ s_{ij} \delta_{ij} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \\ \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3, \end{aligned}$$

donde

$$\langle \mathcal{E}_E \rangle = \underbrace{2\nu_u \left[ \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \right]}_{\langle \mathcal{E}_{Em} \rangle} + \underbrace{2\nu_u \left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]}_{\langle \mathcal{E}_e \rangle}. \quad (3.102)$$

Da mesma forma que a energia cinética (vide (3.96)), portanto, a taxa de dissipação de energia cinética pode ser decomposta numa taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\langle \mathcal{E}_{Em} \rangle$  (primeiro termo do lado direito de (3.102)), e uma *taxa de dissipação da energia cinética da turbulência*,  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  (segundo termo do lado direito de (3.102)). Essa última é uma grandeza muito importante. Para registro:

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = 2\nu_u \left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]. \quad (3.103)$$

No início da década de 1940, começou a ficar claro que  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  é uma grandeza fundamental em turbulência. No próximo capítulo, nós vamos ver que, com base em alguns argumentos simples e muito razoáveis,  $\langle \mathcal{E}_e \rangle \gg \langle \mathcal{E}_{Em} \rangle$  quando o número de Reynolds de um escoamento se torna muito grande. Isso por sua vez significa que  $\langle s_{ij} s_{ij} \rangle \gg \langle s_{ij} \rangle \langle s_{ij} \rangle$ , e que deve existir, no caso escoamentos turbulentos com número de Reynolds muito grande, uma grande separação entre as *escalas macroscópicas* e as *escalas microscópicas* da turbulência. As primeiras estão associadas aos gradientes de velocidade, e taxas de deformação, médios. As segundas estão associadas aos gradientes quadráticos médios (e taxas de deformação quadráticas médias).

### 3.9 – O balanço do semiquadrado da temperatura

É possível obter uma equação de balanço do semi-quadrado da temperatura de forma totalmente análoga à que foi usada para obter a equação para a energia mecânica, (3.91). Isso é feito multiplicando-se (3.88) por T:

$$\rho c_p T \frac{DT}{Dt} - \beta_p T^2 \frac{DP}{Dt} = \rho c_p \nu_T T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.$$

Mas

$$T \frac{DT}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right),$$

$$T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j};$$

portanto,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right) + \frac{\beta_P}{\rho c_p} T^2 \frac{DP}{Dt} = \nu_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + T \Phi. \quad (3.104)$$

Observamos que, em escoamentos naturais, o segundo termo do lado esquerdo em geral é desprezado com base em argumentos de ordem de grandeza (mais sobre isso depois), e que o primeiro termo do lado direito é a divergência do vetor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) \mathbf{e}_j;$$

como tal, pelo Teorema da Divergência, esse termo redistribui, mas não cria nem destrói globalmente, a grandeza  $T^2/2$  (observe a analogia com o termo III de (3.92)).

O último segundo do lado direito de (3.104),  $\nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ , é responsável pela dissipação local da grandeza  $T^2/2$ . Como tal, ele é análogo ao último termo (termo de dissipação de energia cinética) em (3.92), dado em destaque em (3.94). Nós definimos portanto a quantidade análoga

$$\mathcal{E}_T \equiv \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (3.105)$$

O último termo do lado direito de (3.104) é um termo de fonte, geralmente desimportante, devido à dissipação de energia mecânica em energia interna.

Por analogia com o que fizemos com a Energia Cinética da Turbulência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{2} &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle + \mathcal{T}] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] \\ &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle \langle T \rangle + 2 \langle T \rangle \mathcal{T} + \mathcal{T} \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.14)–(1.16),

$$\left\langle \frac{1}{2} T^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle T \rangle \langle T \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle \quad (3.107)$$

O segundo termo do lado direito de (3.107) é a semivariância das flutuações de temperatura. Ele é um termo importante em escoamentos turbulentos em que existem flutuações de temperatura (e de densidade).

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de  $T^2/2$  se segue.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_T \rangle &= \nu_T \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \right\rangle \\ &= \nu_T \left\langle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.108)$$



$$= \underbrace{\nu_T \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle} + \underbrace{\nu_T \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle}_{\langle \mathcal{E}_{T\mathcal{T}} \rangle} \quad (3.109)$$

Da mesma forma que acontece com  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  e  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ , nós veremos em seguida que  $\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle \ll \langle \mathcal{E}_{T\mathcal{T}} \rangle$ . Esse último, a taxa de dissipação da semivariância das flutuações de temperatura, é um parâmetro fundamental para descrever a dinâmica das flutuações turbulentas de temperatura.

# 4

## As macro e micro escalas da turbulência

---

Uma grande parte do conhecimento que temos sobre turbulência baseia-se nas ideias, relativamente simples, de que há uma grande quantidade de escalas em um escoamento turbulento (reveja a discussão sobre escalas no capítulo 1).

Nós vamos chamar as maiores escalas presentes de “macro” escalas. Elas são relativamente fáceis de identificar com base na geometria do problema (o diâmetro de um tubo, a profundidade de um canal, a velocidade média em uma seção, etc.). E as menores escalas nas quais ocorre, efetivamente, a dissipação de energia cinética, de “micro” escalas. Estas últimas são uma das grandes contribuições (entre tantas) de Kolmogorov para o entendimento da turbulência (Kolmogorov, 1941, 1991).

### 4.1 – Macro e micro escalas: uma apresentação informal

Como observa Davidson (2004, p. 19–20), uma *boa parte* do que nós sabemos sobre turbulência pode ser resumido nas relações

$$\langle \mathcal{E}_E \rangle \approx \langle \mathcal{E}_e \rangle \sim \tilde{u}^3 / \ell, \quad (4.1)$$

$$\eta_u = \left( \frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4}, \quad (4.2)$$

$$\check{u} = (v_u \langle \mathcal{E}_e \rangle)^{1/4}, \quad (4.3)$$

$$\tau_u = \left( \frac{v_u}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

O restante é como se segue:  $\tilde{u}$  e  $\ell$  são macroescalas de velocidade e de comprimento, respectivamente. Elas refletem as velocidades e comprimentos “macroscópicos” que nós “vemos” em um escoamento: o diâmetro da tubulação, a distância da superfície em uma camada-limite, a profundidade do escoamento em um rio, etc. ( $\ell$ ); e as diferenças de velocidade entre duas seções, a intensidade das flutuações turbulentas de velocidade, etc. ( $\tilde{u}$ ).

Para as ordens de grandezas de termos nas equações, nós vamos adotar a notação de Tennekes e Lumley (1972): em (4.1), o símbolo  $\sim$  significa que o coeficiente adimensional que torna a relação uma equação não é maior do que 5, e não é menor do que 1/5.

Já  $\eta_u$  (“eta”, em grego),  $\check{u}$  e  $\tau_u$  (“tau”, em grego) são microescalas de comprimento, velocidade e de tempo; em homenagem ao seu proponente, elas são chamadas atualmente de *microescalas de Kolmogorov* (Kolmogorov, 1941, 1991).  $\check{u}$  e  $\eta_u$  não podem

Figura 4.1: Expansão súbita em uma tubulação.

ser “vistas”; elas refletem as diferenças de velocidade e de comprimento que ocorrem em cada ponto de um escoamento turbulento, e que só podem ser estimadas (na média quadrática, como veremos em breve) em função da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência,  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ , e da viscosidade cinemática  $\nu_u$ .

Para o estudante que aborda Turbulência pela primeira vez,  $\ell$  e  $\tilde{u}$  são estranhos e difíceis de compreender, enquanto que  $\eta_u$ ,  $\check{u}$ , e  $\tau_u$  são totalmente impossíveis. Numa tentativa de aliviar a estranheza, a abordagem que se segue procura dar um pouco de concretude a esses conceitos, por meio de alguns exemplos.

Em lugar de prosseguir com “escalas” arbitrárias  $\tilde{u}$  e  $\ell$ , considere o escoamento clássico de um fluido com densidade  $\wp$  constante através de uma expansão súbita em uma tubulação, mostrado na figura 4.1. As áreas das seções transversais antes e depois da expansão são  $A_a$  e  $A_b$ .

Os perfis esboçados na figura 4.1 são idealizações: é bem conhecido que a velocidade (relativa) de um fluido junto a uma parede sólida é zero, que é a “condição de não-deslizamento”. O significado físico da figura 4.1, portanto, é que na maior parte do escoamento “antes”, e “depois”, da expansão súbita de área, a velocidade é *aproximadamente* constante.

Para o volume material  $\mathcal{V}$  (com superfície  $\mathcal{S}$ ) indicado pela linha pontilhada na figura 4.1, as equações macroscópicas de balanço são (3.3) (massa); (3.22) (quantidade de movimento) e (3.56) (energia, com  $\dot{I} \equiv 0$ ), repetidas aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ F_s + F_c &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ \dot{\tilde{W}} + \dot{\tilde{Q}} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \end{aligned}$$

Suponha agora perfis uniformes de velocidade nas seções de entrada (a) e saída (b),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a &= U_a \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{U}_b &= U_b \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Para  $\wp$  constante, a equação macroscópica de conservação de massa em regime permanente produz

$$U_a A_a = U_b A_b. \quad (4.5)$$

Para a conservação de quantidade de movimento, é preciso supor que as forças de atrito têm efeito desprezível, e que as forças de superfície são, preponderantemente, devidas à diferença de pressão entre as sessões a (entrada) e b (saída), de tal forma que

$$F_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot [-P \boldsymbol{\delta}] dS = \oint_{\mathcal{S}} [-P \mathbf{n}] dS.$$

Na entrada,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ , e na saída  $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$ , donde (para perfis uniformes de pressão na entrada ( $P_a$ ) e na saída ( $P_b$ )),

$$F_{s1} = (P_a - P_b) A_b.$$

Observe que  $A_b$  é comum, na expressão acima, para  $P_a$  e para  $P_b$ . A interpretação é que, imediatamente após a expansão, a pressão (na seção  $a$ ) *ainda* é  $P_a$ , e age de forma aproximadamente uniforme sobre a face esquerda do volume de controle. Com o termo transiente identicamente nulo, e  $F_c \equiv 0$ , segue-se agora que (na direção longitudinal, que é a única direção relevante para os balanços macroscópicos),

$$(P_a - P_b) A_b = \oint [-U_a^2 A_a + U_b^2 A_b] = \oint [U_b - U_a] (U_a A_a) \quad (4.6)$$

O trabalho realizado sobre a superfície de controle é preponderantemente devido à pressão:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &= \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dS \\ &= \int_{A_a} U_a \mathbf{e}_1 \cdot [-P_a(-\mathbf{e}_1)] \, dS + \int_{A_b} U_b \mathbf{e}_1 \cdot [-P_b(+\mathbf{e}_1)] \, dS \\ &= P_a U_a A_a - P_b U_b A_b. \end{aligned}$$

A equação de balanço de energia, portanto, torna-se

$$(P_a - P_b)(U_a A_a) = \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \underbrace{\oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}}_{\text{Tx. de Dissipação}}. \quad (4.7)$$

Os dois últimos termos do lado direito são o fluxo líquido de energia interna ( $\mathcal{U}_A$  e  $\mathcal{U}_B$  são as energias internas por unidade de massa na entrada e na saída do volume de controle), e a taxa de calor trocada com o volume de controle. Por hipótese, a dissipação de energia mecânica deve fazer com que ambos sejam positivos, ou seja:  $\mathcal{U}_B > \mathcal{U}_A$  (a dissipação aumenta a energia interna específica do fluido) e  $\dot{\tilde{Q}} < 0$  (parte de energia mecânica dissipada flui como calor para fora do volume de controle). Por definição, a sua soma é a taxa total de dissipação de energia. Se  $\overline{\mathcal{E}_E}$  é a dissipação média por unidade de massa dentro do volume de controle, temos

$$\oint A_b \ell \overline{\mathcal{E}_E} = \oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}.$$

Note primeiramente que a equação (4.7) pode ser reescrita como

$$\left[ \left( P_a + (1/2) \oint U_a^2 \right) - \left( P_b + (1/2) \oint U_b^2 \right) \right] (U_a A_a) = \oint A_b \ell \overline{\mathcal{E}_E},$$

ou seja, a “perda de carga” hidráulica entre as seções  $a$  e  $b$  é igual à dissipação de energia. Do ponto de vista de obter uma expressão final para  $\overline{\mathcal{E}_E}$ , entretanto, é mais frutífero primeiro eliminar a diferença de pressão entre as sessões utilizando (4.6):

$$P_a - P_b = \oint (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b},$$

e em seguida substituir na equação (4.7):

$$\begin{aligned} \oint (U_b - U_a) \frac{(U_a A_a)^2}{A_b} &= \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \oint A_b \ell \overline{\mathcal{E}_E}, \\ (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b} &= [(1/2)(U_a + U_b)(U_b - U_a)] + \frac{\ell \overline{\mathcal{E}_E}}{U_a} \frac{A_a}{A_b}, \end{aligned}$$

Figura 4.2: Escoamento clássico em um tubo com perda de carga.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(U_a + U_b) - U_a \frac{A_a}{A_b} &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a(U_a - U_b)} \bar{\mathcal{E}}_E, \\
\left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{A_a}{A_b} \right] U_a &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a^2 \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)} \bar{\mathcal{E}}_E, \\
\bar{\mathcal{E}}_E &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)^2 \frac{A_a}{A_b} \right] \frac{U_a^3}{\ell}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Note que (4.8) tem a mesma forma de (4.1). No entanto, há uma diferença significativa: enquanto que na sequência nós suporemos que (4.1) vale *pontualmente*, (4.8) dá a taxa de dissipação *média* dentro do volume de controle. Um argumento mais “crítico” — no sentido de que de fato não existe nada de excepcional em (4.8) — é que as duas equações têm que ter a mesma forma simplesmente pelo fato de que  $\langle \mathcal{E}_E \rangle$  e  $\bar{\mathcal{E}}_E$  possuem as mesmas dimensões físicas. No entanto, a equação (4.1) aparecerá repetidamente neste livro, e espera-se que a dedução da análoga (4.8) ajude o estudante a compreender a sua motivação.

Nosso segundo exemplo, mostrado na figura 4.2, é o escoamento clássico ao longo de um tubo com perda de carga. Esse problema vai ser estudado detalhadamente do ponto de vista do perfil de velocidade, e de como a perda de carga é calculada, mais à frente neste texto. Por enquanto, vamos supor que há uma perda de carga linear ao longo da tubulação e fazer a mesma aproximação de um perfil constante de velocidade na seção que fizemos no exemplo anterior. Os balanços integrais de massa, quantidade de movimento e energia entre as seções  $A$  e  $B$  do volume de controle  $\mathcal{V}$  indicado na figura resultam em

$$\begin{aligned}
U &= \text{constante em } x, \\
(P_a - P_b)A - \tau_0 \times 2\pi RL &= 0, \\
(P_a - P_b)UA &= \underbrace{\wp(\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)UA - \tilde{Q}}_{\wp AL \bar{\mathcal{E}}_E},
\end{aligned}$$

onde  $A = \pi R^2$  é a área da seção transversal, e  $\tau_0$  é a tensão de cisalhamento entre a parede do tubo e o escoamento. Da equação de balanço de quantidade de movimento,

$$P_a - P_b = \frac{2\tau_0 L}{R},$$

que levada à equação de balanço de energia produz

$$\begin{aligned}
\frac{2\tau_0 L}{R} U &= \wp L \bar{\mathcal{E}}_E, \\
2 \frac{\tau_0}{\wp} \frac{U}{R} &= \bar{\mathcal{E}}_E.
\end{aligned}$$

Neste ponto, é conveniente introduzir o *coeficiente de arrasto*  $C_D$  e a *velocidade de atrito*  $u_*$ :

$$\tau_0 \equiv \wp C_D U^2, \tag{4.9}$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\varnothing}} = u_*^2, \quad (4.10)$$

donde

$$\bar{\mathcal{E}}_E = \frac{2}{\sqrt{C_D}} \frac{u_*^3}{R}. \quad (4.11)$$

Observe que, novamente, (4.11) tem a forma geral de (4.1). Novamente, trata-se de uma taxa de dissipação *média*, e um observador rigoroso poderá também argumentar que em sua essência (4.11) é simplesmente uma consequência das dimensões físicas de  $\bar{\mathcal{E}}_e$ .

No entato, tanto (4.8) quanto (4.11) contam uma “história” importante: a taxa de dissipação de energia mecânica  $\bar{\mathcal{E}}_E$  está sendo *imposta* pelas escalas macroscópicas do escoamento. Observe como o coeficiente de viscosidade cinemática não comparece em nenhuma das duas equações. Em ambos os casos, o escoamento turbulento se “ajustará” a essa taxa imposta pelas escalas macroscópicas.

Hoje conhecemos que o processo pelo qual a energia mecânica injetada no escoamento pelas escalas macroscópicas é dissipada possui dois “estágios”: no primeiro estágio, forma-se uma “cascata” de energia, que se redistribui sob a forma de energia cinética da turbulência em escalas progressivamente menores. O termo responsável por esse estágio nas equações de Navier-Stokes é o termo não-linear,  $U_k \partial U_i / \partial x_k$ . Em geral, supõe-se que esse processo é acompanhado pela geração de turbilhões sucessivamente menores, e ele é bem descrito pelas equações de vorticidade. Em 3 dimensões, o processo de transferência inercial de energia é compreendido como sucessivos alongamentos de vórtices (*vortex stretching*) e entortamentos de vórtices (*vortex tilting*). Em um dado momento, as escalas espaciais que caracterizam esses vórtices são suficientemente pequenas para que a viscosidade do escoamento interaja diretamente com eles.

Esse é o segundo estágio, no qual a energia desses numerosos pequenos vórtices é dissipada. As escalas características da “faixa de dissipação” são  $\eta_u$ ,  $\tilde{u}$ , e  $\tau_u$ . Um argumento dimensional simples sugere que  $\langle \mathcal{E}_e \rangle \sim \nu (\hat{u} / \eta_u)^2$ . Nessas pequenas escalas o escoamento é “laminar”, no sentido de que o número de Reynolds formado pelas escalas locais de comprimento e de velocidade que caracterizam os menores vórtices do escoamento é da ordem de 1, como veremos em detalhe a seguir.

## 4.2 – Uma definição formal das escalas macroscópicas

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\langle U \rangle$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de “covariâncias turbulentas”, por exemplo de  $\langle u_i u_j \rangle$ . Para o campo de velocidade, nós adotaremos inicialmente as seguintes estimativas:

$$\langle U_i \rangle \sim \tilde{u}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}}{\ell}, \quad (4.13)$$

$$\langle u_i u_j \rangle \sim \tilde{u}^2. \quad (4.14)$$

Uma dificuldade é que, como muitas vezes a notação de ordem de grandeza será utilizada em conjunto com a notação indicial de Einstein, a “ordem” de um termo envolvendo índices repetidos pode se referir a um ou alguns dos sub-termos, ou à

soma de todos os sub-termos. Para evitar qualquer ambiguidade, nós usaremos  $\sim$  para indicar a ordem de grandeza do *maior em módulo* (e possivelmente outros) de todos os sub-termos; e  $\approx$  para indicar explicitamente a *soma* de todos os sub-termos. Portanto,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \sim \tilde{u}/\ell,$$

significa que

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} \left| \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right| \sim \tilde{u}/\ell,$$

enquanto que

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \approx \tilde{u}/\ell$$

significa que

$$\left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right) \sim \tilde{u}/\ell.$$

Note que a segunda notação,  $\approx$ , só faz sentido quando houver pelo menos um índice repetido do lado esquerdo. Note também que (4.12)–(4.14) já seguem essa notação, ou seja: em cada uma delas, a ordem de grandeza refere-se a *termos individuais*, ou ao maior em módulo dos termos obtidos variando-se  $i$  e  $j$ .

Apesar de (4.14) não ser necessária nesta seção, nós a incluímos aqui para que a discussão a seguir fique auto-contida. Como vimos acima,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade. As equações (4.12)–(4.14), e suas generalizações óbvias para outras variáveis do escoamento, tais como densidade, pressão, concentração de um escalar e temperatura, constituem-se em um poderoso instrumento de análise das equações que regem um escoamento turbulento. Sua interpretação, entretanto, é difícil. [Tennekes e Lumley \(1972, p. 47\)](#) comentam sobre diversos erros comuns de interpretação de (4.12)–(4.14), e discutem em detalhe suas justificativas.

Além disso, elas não são necessariamente universais! Por exemplo, nada obriga que haja apenas uma escala de velocidade  $\tilde{u}$ , e uma escala de comprimento  $\ell$ , macroscópicas. Dependendo da geometria, e da complexidade do escoamento, várias escalas macroscópicas de velocidade e comprimento (e diversas outras variáveis, é claro) podem surgir.

No entanto, as relações (4.12)–(4.14) tendem a valer em escoamentos com cisalhamento médio que possuem uma única escala característica de velocidade, e uma única escala característica de comprimento ([Tennekes e Lumley, 1972, p. 47–50](#)). O essencial de (4.12)–(4.14) é a suposição de que as mesmas escalas  $\tilde{u}$  e  $\ell$  comparecem *tanto* na estimativa da ordem de grandeza dos gradientes de grandezas médias *quanto* das covariâncias turbulentas. Veremos mais à frente que  $\ell$  também pode ser associada à *escala integral da turbulência*, que tem uma definição estatística precisa. Como observam [Tennekes e Lumley \(1972\)](#), essa suposição de que as escalas macroscópicas servem a dois papéis reflete o fato de que elas são as únicas escalas características do escoamento; conseqüentemente, seu surgimento (a menos de coeficientes da ordem de 1) é uma exigência da consistência dimensional das expressões envolvidas.

Naturalmente, essa hipótese restringe a complexidade dos escoamentos que podemos analisar utilizando as equações (4.12)–(4.14); mesmo em situações ligeiramente mais complexas, entretanto, idéias similares revelam-se úteis e em geral ajudam a compreender ou modelar melhor o problema.

As equações (4.12)–(4.13) são suficientes para estimarmos a contribuição da taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\langle \mathcal{E}_{Em} \rangle$  para a taxa total de dissipação de energia cinética,  $\langle \mathcal{E}_E \rangle$ . Levando (4.13) em (3.102), encontramos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{Em} \rangle &\sim \nu_u \left( \frac{\tilde{u}}{\ell} \right)^2 \\ &= \nu_u \frac{\tilde{u}^3}{\tilde{u} \ell^2} \\ &= \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \Rightarrow \\ \langle \mathcal{E}_{Em} \rangle &\sim \text{Re}_\ell^{-1} \langle \mathcal{E}_E \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Em (4.15), nós encontramos pela primeira vez o número de Reynolds (na escala  $\ell$ ):

$$\text{Re}_\ell \equiv \frac{\tilde{u} \ell}{\nu_u}, \quad (4.16)$$

e usamos a estimativa (4.1) para a taxa total de dissipação.

De fato, se nós admitirmos como vínhamos comentando que a dissipação total é dada por (4.1), (4.15) nos informa que os gradientes do escoamento médio são extremamente ineficazes para produzir essa dissipação em escoamentos turbulentos, nos quais o número de Reynolds em (4.16) é frequentemente da ordem de  $10^3$  ou maior.

A figura simples, porém extremamente útil, que surge é a seguinte: se a taxa de dissipação total de energia cinética é imposta pelas “grandes escalas”  $\tilde{u}, \ell$ , do escoamento, essas mesmas escalas produzem gradientes de velocidade (e consequentemente taxas de deformação) que são incapazes de dissipar a energia cinética nessa taxa!

Isso significa que devem existir no escoamento gradientes de velocidade, e consequentemente taxas de deformação,  *muito maiores* . Para encontrá-las, precisamos obviamente estudar a ordem de grandeza da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência,  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ .

### 4.3 – Uma definição formal das escalas microscópicas

Se tomarmos (formalmente) o limite  $\text{Re}_\ell \rightarrow \infty$ , a contribuição de  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  para  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  tende a zero em (4.15). Isso *não é uma mera formalidade*. Na maioria dos escoamentos naturais e industriais, os números de Reynolds são muito altos.

Por exemplo, a  $20^\circ \text{C}$ ,  $\nu_u[\text{água}] = 1,005 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , e  $\nu_u[\text{ar}] = 1,50 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (à pressão atmosférica padrão ao nível do mar). Então, para um rio com uma velocidade típica  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  e uma profundidade típica de  $\ell = 1 \text{ m}$ ,  $\text{Re}_\ell = 10^6$ . Da mesma forma, para uma velocidade do vento  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  a uma altura  $\ell = 10 \text{ m}$ , nós temos  $\text{Re}_\ell = 10^6$ .

A equação (4.15) então nos dá  $\langle \mathcal{E}_E \rangle \approx \langle \mathcal{E}_e \rangle$  nessas condições (veja (4.1)). Retornando a (3.103), isso só pode significar que a ordem de grandeza de  $\langle s_{ij} s_{ij} \rangle$  (e eventualmente de  $\langle (\partial u_k / \partial x_k)^2 \rangle$ ) deve ser tal que

$$\langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \sim \left( \frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2, \quad (4.17)$$

onde devemos ter

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = \nu_u \left( \frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2. \quad (4.18)$$



A equação (4.17) mostra claramente que a ordem de grandeza do *gradiente microscópico de velocidade*  $\check{u}/\eta_u$  é definida por uma média quadrática. Por sua vez, (4.18) é suficiente para definir esse gradiente, mas é por si só incapaz de “separar” as escalas microscópicas de velocidade,  $\check{u}$ , e de comprimento,  $\eta_u$ . Isso pode ser feito de duas maneiras. A primeira é puramente dimensional: se as únicas grandezas disponíveis para definir  $\eta_u$  e  $\check{u}$  são  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  e  $v_u$ , então (4.2) e (4.3) seguem-se necessariamente do Teorema dos  $\Pi$ 's de Buckingham.

A segunda é encontrar  $\eta_u$ ,  $\check{u}$  como a solução de um sistema de duas equações, a primeira das quais é (4.18). A segunda equação é obtida a partir da intuição (*insight*) de que, *localmente*, o escoamento deve ser laminar. O número de Reynolds associado deve ser de ordem 1:

$$\text{Re}_{\eta_u} = \frac{\check{u}\eta_u}{v_u} = 1. \quad (4.19)$$

A solução do sistema (4.18)–(4.19) produz, novamente, as microescalas de Kolmogorov dadas por (4.2) e (4.3).

## 4.4 – A cascata de energia

Conforme notado pela primeira vez por Kolmogorov (1941), (4.1) não se aplica *apenas* à escala integral de comprimento  $\ell$ . Com alguma modificação, ela pode ser usada para todas as escalas intermediárias de comprimento  $r$  entre  $\ell$  e  $\eta_u$ . Para ver isso de uma maneira um pouco mais formal, defina a *função de estrutura de ordem 2* da velocidade:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; \quad (4.20)$$

$$D_{uu}(\mathbf{r}) \equiv \langle [U(\mathbf{x}_2) - U(\mathbf{x}_1)] \cdot [U(\mathbf{x}_2) - U(\mathbf{x}_1)] \rangle \quad (4.21)$$

A definição (4.21) só é possível se os incrementos de velocidade do escoamento forem *homogêneos*; nesse caso,  $D_{uu}$  depende apenas da diferença  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , e não de cada um dos dois vetores.

Se, além disso, o escoamento for *isotrópico*,  $D_{uu} = D_{uu}(r)$  apenas, onde  $r = |\mathbf{r}|$ . Kolmogorov (1941) formulou a hipótese de *isotropia local*: segundo essa hipótese, apenas para  $r \ll \ell$ , o escoamento é isotrópico. Isso sem dúvida é uma analogia com o caso molecular, em que as velocidades das moléculas se distribuem igualmente em todas as direções, e do *Teorema de equipartição de energia*: a energia cinética das moléculas de um gás divide-se igualmente nas 3 direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . No caso de turbulência, a situação é mais complicada: em escoamentos no mundo real, as “grandes escalas”  $\ell$  quase nunca são homogêneas, uma vez que, como veremos, existem direções preferenciais de produção da energia cinética da turbulência. Nesse sentido, o termo *local* desempenha um papel importante: aqui, a hipótese é que a natureza difusiva da turbulência *tende* a equalizar a distribuição direcional de energia cinética da turbulência apenas para escalas  $r$  muito menores do que  $\ell$ . *Apenas* nessas escalas o escoamento (segundo essa hipótese) é isotrópico. Nesse último caso, escrevemos

$$D_{uu}(r) = \langle [u(r) - u(0)]^2 \rangle \equiv (\delta u_r)^2, \quad (4.22)$$

e definimos uma escala de velocidade  $\delta u_r$  na escala de comprimento  $r$ .

Outra hipótese da teoria de Kolmogorov é que, para  $\eta_u \ll r \ll \ell$ , (4.1) continua valendo na forma

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = \alpha^{3/2} \frac{(\delta u_r)^3}{r}. \quad (4.23)$$

Segue-se, imediatamente, a previsão da teoria de Kolmogorov (1941) para a faixa inercial da função de estrutura:

$$D_{uu}(r) = \alpha \langle \mathcal{E}_e \rangle^{2/3} r^{2/3}. \quad (4.24)$$

Essencialmente, (4.24) é apenas a afirmativa de que  $(\delta u_r)^3/r$  é invariante para uma faixa de separações  $r$  que correspondem a diferenças de velocidade  $\delta u_r$ . Essa faixa,  $\eta_u \ll r \ll \ell$ , é a *faixa inercial*.

#### 4.5 – Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos

Os gradientes microscópicos de velocidade e de temperatura (e por conseguinte, de densidade (veja (4.17)) são

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \sim \left( \frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2, \quad (4.25)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \right\rangle \sim \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \quad (4.26)$$

Esses gradientes microscópicos podem, agora, ser facilmente relacionados com os gradientes macroscópicos (sempre em *ordem de magnitude*), como se segue:

$$\begin{aligned} v_u \frac{\check{u}^2}{\eta_u^2} &= \frac{\tilde{u}^3}{\ell}, \\ \frac{\check{u}}{\eta_u} &= \left( \frac{\tilde{u}^3}{v_u \ell} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\tilde{u}^2}{\ell^2} \frac{\tilde{u}}{v_u} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\tilde{u}}{\ell} \left( \frac{\tilde{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\tilde{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para valores típicos na atmosfera próximo à superfície, e supondo, de forma conservadora,  $\ell \sim 1\text{m}$ ,  $\tilde{u} \sim 1\text{ m s}^{-1}$ ,  $v_u = 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{Re}_\ell = 662690$ ,  $\text{Re}_\ell^{1/2} \sim 1000$ . Os gradientes microscópicos de velocidade são mil vezes maiores que os gradientes macroscópicos.

Além disso, é útil registrar, para uso posterior, o seguinte: de (4.1) e (4.2), segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_u &= \left( v_u^3 \frac{\ell}{\tilde{u}^3} \right)^{1/4}, \\ \eta_u^4 &= \frac{v_u^3 \ell}{\tilde{u}^3}, \\ \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \frac{v_u^3}{\ell^3 \tilde{u}^3}, \\ \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \text{Re}^{-3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\eta_u}{\ell} = \text{Re}^{-3/4}. \quad (4.28)$$

Analogamente,

$$\frac{\check{u}}{\tilde{u}} = \text{Re}^{-1/4}. \quad (4.29)$$

O mesmo pode ser feito para os gradientes microscópicos (médios quadráticos) de temperatura  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , definidos em (4.26). Primeiramente, precisamos reconhecer o papel central da taxa de dissipação de semi-variância da temperatura. Em analogia com (4.1), temos agora

$$\langle \mathcal{E}_{TT} \rangle \approx \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \sim \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\ell}. \quad (4.30)$$

Observe que  $\llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket = \Theta^2 \mathcal{T}^{-1}$ , e que para produzirmos uma escala de tempo precisamos utilizar  $\tilde{u}/\ell$ .

Por outro lado, os gradientes microscópicos de temperatura devem ser tais que, analogamente com (4.18),

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \quad (4.31)$$

Então,

$$\begin{aligned} \nu_{\mathcal{T}} \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}^2} &= \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\ell}, \\ \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} &= \left( \frac{\tilde{u} \check{\mathcal{T}}^2}{\nu_{\mathcal{T}} \ell} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2 \tilde{u} \ell}{\ell^2 \nu_{\mathcal{T}}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\check{\mathcal{T}}}{\ell} \left( \frac{\tilde{u} \ell}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\check{\mathcal{T}}}{\ell} \text{Pe}_{\ell}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.32) utiliza um número de Péclet

$$\text{Pe}_{\ell} = \frac{\tilde{u} \ell}{\nu_{\mathcal{T}}} = \text{Re}_{\ell} \text{Pr} \quad (4.33)$$

que é análogo ao número de Reynolds  $\text{Re}_{\ell}$  definido em (4.16).

## 4.6 – Macro e microescalas de temperatura

Macro e microescalas adicionais devem ser adicionadas à lista (4.1)–(4.3) quando a temperatura representa um papel importante em um escoamento turbulento. Começamos por notar, sem demonstração (ainda) que existe uma cascata de semi-variância de temperatura da turbulência que é análoga à cascata de energia cinética da turbulência que discutimos na seção 4.4.

Dizer onde isso será feito!

Na seção 3.9, nós obtivemos

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_{\mathcal{T}} \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \quad (4.34)$$

para a taxa de dissipação de semi-variância da temperatura da turbulência. A equação análoga a (4.1) é

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \sim \frac{\check{\mathcal{T}}^2 \tilde{u}}{\ell}. \quad (4.35)$$

Em (4.35),  $\check{\mathcal{T}}$  é uma macroescala de temperatura, e estamos supondo que a macroescala de comprimento associada à temperatura é o mesmo  $\ell$  já utilizado antes para a energia cinética.

A equação que define a microescala de gradientes de temperatura análoga a (4.18) é

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_{\mathcal{T}} \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}^2}. \quad (4.36)$$

onde  $\check{\mathcal{T}}$  é a microescala de temperatura;  $\eta_{\mathcal{T}}$  é a microescala de comprimento para temperatura; e  $\tilde{u}$  é a microescala de velocidade.

Para separar  $\check{\mathcal{T}}$  de  $\eta_{\mathcal{T}}$ , nós podemos recorrer ao Teorema dos Pi's, e escrever

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{c_1}, \quad (4.37)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{c_2}, \quad (4.38)$$

Note que precisamos *incluir*  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  na lista de variáveis intervenientes. A equação (4.37) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{c_1}, \\ \mathbf{L} &= [\Theta^2 \mathbf{T}^{-1}]^{a_1} [\mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{-1}]^{b_1} [\mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{-3}]^{c_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= -3c_1, \\ 2(b_1 + c_1) &= 1, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 3/4$ ,  $c_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\eta_{\mathcal{T}} = \left( \frac{\nu_{\mathcal{T}}^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4}, \quad (4.39)$$

um resultado totalmente análogo a (4.2), exceto que  $\nu_{\mathcal{T}}$  aparece no lugar de  $\nu_u$ .

Já (4.38) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{c_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \mathbf{T}^{-1}]^{a_2} [\mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{-1}]^{b_2} [\mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{-3}]^{c_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - 3c_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = -1/4$ . Segue-se que

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4}, \quad (4.40)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \check{\mathcal{T}}^2 &= \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/2}, \\
 \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle &= \check{\mathcal{T}}^2 v_{\mathcal{T}}^{-1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/2}, \\
 &= v_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 v_{\mathcal{T}}^{-3/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/2} \\
 &= v_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 \left[ \underbrace{v_{\mathcal{T}}^{-3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{1/4}}_{\eta_{\mathcal{T}}^{-1}} \right]^2 \\
 &= v_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Naturalmente, esse resultado é o mesmo que (4.36): a obtenção de  $\eta_{\mathcal{T}}$  por meio do Teorema dos Pi's em (4.38) é equivalente à definição (4.36).

Esse resultado, representado pelas escalas (4.39) e (4.6), entretanto, é limitado pelas hipóteses que fizemos na aplicação do Teorema dos Pi's em (4.37)–(4.38): note que nós estamos supondo que as microescalas associadas à temperatura *não dependem da viscosidade cinemática*  $\nu_u$ .

Na prática, isso só é verdade se o número de Prandtl do fluido,

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu_u}{\nu_{\mathcal{T}}}, \quad (4.41)$$

for da ordem de 1. De fato, se  $\text{Pr} \sim 1$ , apenas uma das difusividades é necessária em (4.37)–(4.38): a inclusão da outra levaria a um sistema com mais incógnitas do que equações, já que há apenas 3 dimensões subjacentes ( $\Theta$ ,  $L$  e  $T$ ).

Se  $\text{Pr} \ll 1$  ou  $\text{Pr} \gg 1$ , entretanto, (4.39) deixa de ser verdadeira. A teoria envolvida deve, então, necessariamente incluir tanto  $\nu_{\mathcal{T}}$  quanto  $\nu_u$ : ela foi desenvolvida por Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959), e prevê que a microescala de comprimento  $\eta_{\mathcal{T}}$  depende de  $\text{Pr}$ .

### O caso $\text{Pr} \gg 1$

Para  $\text{Pr} \geq 1$ , Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) obtiveram

$$\frac{\eta_{\mathcal{T}}}{\eta_u} = \text{Pr}^{-1/2}, \quad (4.42)$$

donde

$$\check{\mathcal{T}} = \left( \frac{\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{1/2} \eta_{\mathcal{T}}. \quad (4.43)$$

Os resultados de Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) podem ser obtidos com uma relativa facilidade da seguinte maneira. Em primeiro lugar nós incluímos  $\nu_u$  na lista de variáveis que governam a dinâmica da dissipação das flutuações de temperatura. Em segundo lugar, nós incluímos uma nova dimensão  $L_\theta$  no problema. Essa dimensão vai aparecer nas dimensões de  $\nu_{\mathcal{T}}$ : ela corresponde portanto às *escalas de dissipação da semivariância de temperatura*.

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_{\mathcal{T}}$  e para  $\check{\mathcal{T}}$  agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \quad (4.44)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2}, \quad (4.45)$$

A equação (4.44) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{d_1}, \\ \mathsf{L}_{\Theta} &= [\Theta^2 \mathsf{T}^{-1}]^{a_1} [\mathsf{L}^2 \mathsf{T}^{-1}]^{b_1} [\mathsf{L}_{\Theta}^2 \mathsf{T}^{-1}]^{c_1} [\mathsf{L}^2 \mathsf{T}^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(b_1 + d_1) &= 0, \\ 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= \nu_u^{1/4} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{1/4} \nu_u^{1/2} \nu_u^{-1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \left( \frac{\nu_{\mathcal{T}}}{\nu_u} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\nu_u^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{\nu_u}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

que é o mesmo que (4.42), de Batchelor (1959). Já (4.45) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_2} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_e \rangle \rrbracket^{d_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \mathsf{T}^{-1}]^{a_2} [\mathsf{L}^2 \mathsf{T}^{-1}]^{b_2} [\mathsf{L}_{\Theta}^2 \mathsf{T}^{-1}]^{c_2} [\mathsf{L}^2 \mathsf{T}^{-3}]^{d_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (4.6) e (4.36). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ .

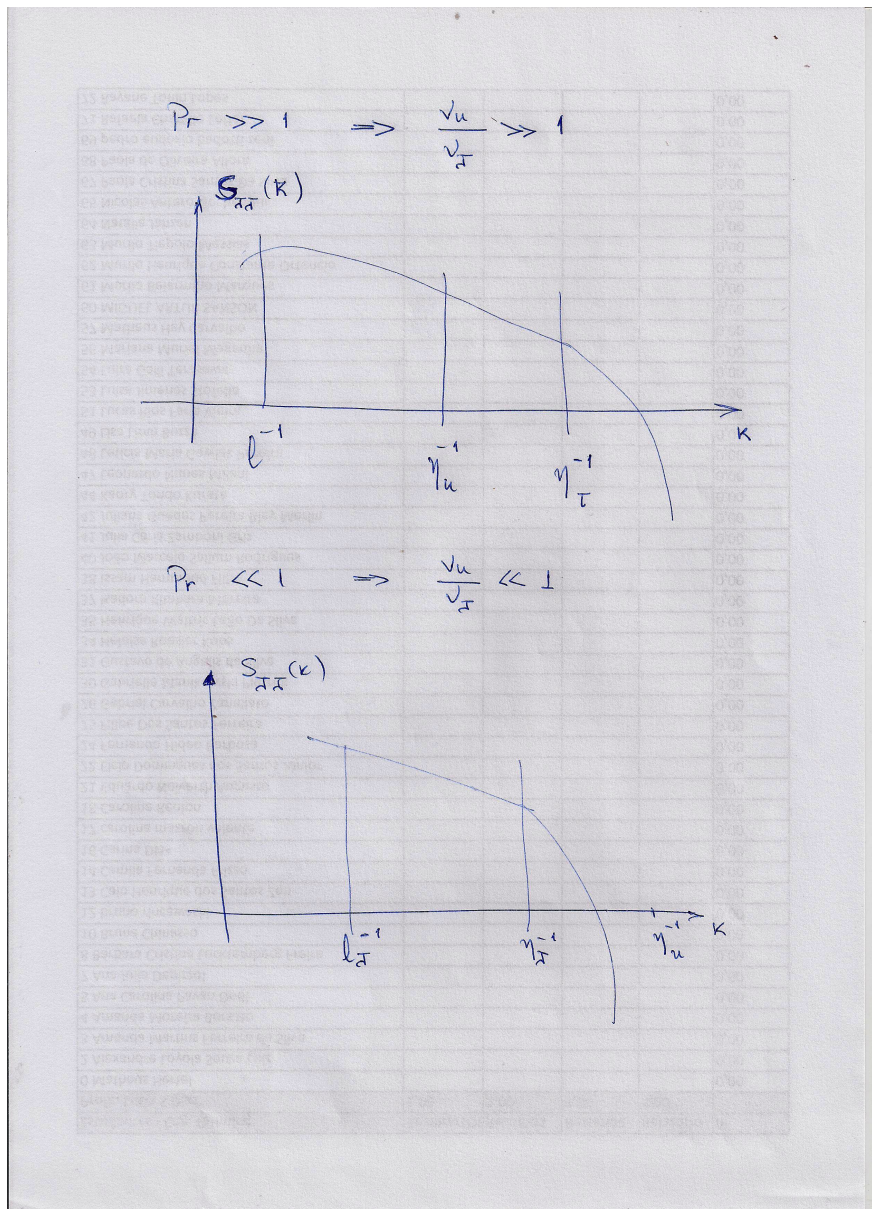


Figura 4.3: O significado diferente de  $L_\theta$  nos casos  $Pr \gg 1$  (acima) e  $Pr \ll 1$  (abaixo).

### O caso $\ll 1$

Atenção: é preciso verificar novamente em Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) a validade do que está escrito aqui!

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_T$  e para  $\check{\gamma}$  ainda é

$$\eta_T = [\langle \mathcal{E}_{TT} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_T]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \quad (4.47)$$

$$\check{\gamma} = [\langle \mathcal{E}_{TT} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_T]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2}, \quad (4.48)$$

Basta citar as equações que já existiam acima!

mas as dimensões serão diferentes! A figura 4.3 foi feita para nos dar uma ideia do que pode estar acontecendo.

No primeiro caso, tratado acima ( $Pr \gg 1$ ), a escala de dissipação de velocidade  $\eta_u$  é imposta pela escala integral de velocidade  $\ell$ . A escala de comprimento de dissipação de temperatura,  $\eta_T$ , dita o surgimento de uma nova dimensão de comprimento  $L_\theta$  nas pequenas escalas, conforme mencionado acima.



No segundo caso, é preciso (aparentemente) que haja uma escala “grande”  $\ell_{\mathcal{T}}$  que imponha a escala de comprimento de dissipação de semivariância de temperatura,  $\eta_{\mathcal{T}}$ , de forma *independente* da escala de comprimento de dissipação de energia  $\eta_u$ . Neste caso, nós esperamos ter

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle \sim \frac{\tilde{\mathcal{T}}^2 \tilde{u}}{\ell_{\mathcal{T}}}, \quad (4.49)$$

sendo que devemos atribuir a mesma dimensão  $L_\theta$  a  $\ell_{\mathcal{T}}$  e a  $\eta_{\mathcal{T}}$ . Portanto,

$$[\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle] = \Theta^2 L T^{-1} L_\theta^{-1}$$

A equação (4.47) produz

$$\begin{aligned} [\eta_{\mathcal{T}}] &= [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_1}, \\ L_\theta &= [\Theta^2 L T^{-1} L_\theta^{-1}]^{a_1} [L^2 T^{-1}]^{b_1} [L_\theta^2 T^{-1}]^{c_1} [L^2 T^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(a_1 + b_1 + d_1) &= 0, \\ -a_1 + 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= \nu_u^{1/4} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{1/4} \nu_u^{1/2} \nu_u^{-1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \\ &= \nu_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4} \left( \frac{\nu_{\mathcal{T}}}{\nu_u} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\nu_u^3}{\langle \mathcal{E}_e \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{\nu_u}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

que é o mesmo que (4.42), de Batchelor (1959). Já (4.48) produz

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{T}}] &= [\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_e \rangle]^{d_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 T^{-1}]^{a_2} [L^2 T^{-1}]^{b_2} [L_\theta^2 T^{-1}]^{c_2} [L^2 T^{-3}]^{d_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\tilde{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle^{1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_e \rangle^{-1/4},$$



ou

$$\langle \mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}} \rangle = \nu_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2 .$$

Essas equações são as mesmas que (4.6) e (4.36). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}\mathcal{T}}$ .

# 5

## As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq

---

As equações de Navier-Stokes, e da energia, podem ser consideravelmente simplificadas antes de serem usadas em problemas de interesse físico. As simplificações adotadas são de duas naturezas.

Primeiramente, utilizando-se uma decomposição proposta por Boussinesq para os campos de velocidade, densidade, temperatura e pressão que é baseada em um estado hidrostático de referência, é possível obter um conjunto de equações grandemente simplificadas. As principais simplificações são a substituição da densidade variável por uma densidade de referência (que pode ser variável de acordo com uma distribuição hidrostática, mas que não precisa mais ser *prognosticada*), e a adoção de um campo de velocidade solenoidal. Portanto, uma aproximação de incompressibilidade é obtida, *mesmo em escoamentos com densidade variável*. Nas próximas seções nós vamos mostrar que isso não constituiu nenhum paradoxo.

Em segundo lugar, a equação da energia é essencialmente inútil na variável dependente  $\mathcal{U}$ . É preciso manipular a equação (3.77) e reescrevê-la em termos de variáveis prognósticas “úteis”, isto é, efetivamente mensuráveis ou calculáveis. Via de regra, essas variáveis são ou a temperatura termodinâmica  $T$ , ou a temperatura potencial  $\Theta$ .

Ao final do capítulo, teremos obtido um conjunto de equações para as variáveis dependentes *médias*  $\langle U \rangle$ ,  $\langle P \rangle$ , e  $\langle T \rangle$  (ou  $\langle \Theta \rangle$ ) as quais, por sua vez, nos dão informações úteis sobre os escoamentos do mundo real.

### 5.1 – O estado hidrostático de referência, e a altura de escala

Nesta seção nós obtemos um “estado hidrostático de referência” suficientemente geral para gases perfeitos e líquidos nas condições normalmente encontradas no ambiente. Esse estado será denominado  $(\varphi_r, P_r, T_r)$ , e dependerá somente da altura  $z$ .

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura.

Considere as duas formas para a diferencial da entalpia obtidas no capítulo 3, (3.82) e (3.84); igualando ambas,

$$dH = c_p dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP = \mathcal{V} dP + T dS.$$

Utilizando ainda (3.87) e supondo um processo isentrópico ( $dS = 0$ ),

$$dH = \mathcal{V}dP = c_p dT + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) dP, \quad (5.1)$$

$$c_p dT = \beta_P T \mathcal{V} dP. \quad (5.2)$$

Utilizando a equação da hidrostática,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{\mathcal{V}} \Rightarrow \mathcal{V}dP = -g dz, \quad (5.3)$$

e substituindo em (5.2), obtemos um resultado central e muito importante:

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_P T \frac{g}{c_p} \quad (5.4)$$

O sistema de equações diferenciais (5.3)–(5.4) pode ser resolvido simultaneamente, pois  $\beta_P = \beta_P(P, T)$  e  $1/\wp = \mathcal{V} = \mathcal{V}(P, T)$  (essa última é a equação de estado). Portanto, em princípio, temos, após a integração a partir das condições iniciais  $P_0, T_0, \wp_0$  em  $z = 0$ , os perfis do estado termodinâmico de referência  $P_r(z)$ ,  $T_r(z)$  e  $\wp_r(z)$ .

Um parâmetro essencial para a análise de escala das equações da Mecânica dos Fluidos aplicadas a escoamentos naturais é a “altura de escala”  $D$  (em Inglês, *scale height*). Ela é definida a partir do estado de referência hidrostático de densidade:

$$D \equiv \left| \frac{1}{\wp_0} \frac{d\wp_r(0)}{dz} \right|^{-1}. \quad (5.5)$$

A altura de escala pode ser facilmente obtida usando (3.80), (3.81), (5.3) e (5.4):

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{1}{\mathcal{V}}, \\ d\wp &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}; \\ d\wp &= \frac{d\wp}{d\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P dT + \frac{d\wp}{d\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (\mathcal{V} \beta_P) dT + -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (-\mathcal{V} \kappa_T) dP \\ &= -\wp \beta_P dT + \wp \kappa_T dP \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\frac{d\wp}{\wp} = -\beta_P dT + \kappa_T dP. \quad (5.7)$$

A equação (5.7) é um resultado (intermediário) importante para a estimativa da importância das flutuações de temperatura e de pressão sobre as de densidade. Por sua vez, a divisão de (5.6) por  $dz$  produz

$$\begin{aligned} \frac{d\wp}{dz} &= -\wp \beta_P \left( -\beta_P T \frac{g}{c_p} \right) + \wp \kappa_T (-\wp g); \\ \frac{1}{\wp} \frac{d\wp}{dz} &= \beta_P^2 T \frac{g}{c_p} - \kappa_T \wp g \Rightarrow \\ D &= \left| \frac{1}{\wp_0} \frac{d\wp_r(0)}{dz} \right|^{-1} = \left| \beta_P^2 T_0 \frac{g}{c_p} - \kappa_T \wp_0 g \right|^{-1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para água a  $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288,15\text{ K}$ , tem-se

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 999,1\text{ kg m}^{-3}, \\ \beta_P &= 1,5 \times 10^{-4}\text{ K}^{-1}, \\ \kappa_T &= 4,9 \times 10^{-10}\text{ Pa}^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto,  $D_{\text{água}} = 2,089 \times 10^{+05}\text{ m}$ .

Também é conveniente relacionar os valores de  $\beta_P$  e  $\kappa_T$  da água com a pressão e a temperatura ambientes. Para os mesmos valores de referência acima, e  $T_0 = 288,15\text{ K}$ ,  $P_0 = 101325\text{ Pa}$ ,

$$\beta_P^{-1} \approx 23T_0, \quad (5.9)$$

$$\kappa_T^{-1} \approx 20000P_0. \quad (5.10)$$

Note que  $T_0$  em (5.9) é necessariamente dado em Kelvins.

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$P = \varphi RT, \quad \text{ou} \quad P\mathcal{V} = RT, \quad (5.11)$$

onde  $R$  é a constante específica do gás (ou da particular mistura de gases: por exemplo, para o ar seco tem-se  $R = 287\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ,  $c_p = 1005\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , e  $c_v = 718\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ),  $P$  é a pressão termodinâmica, e  $T$  é a temperatura. Diferenciando-se (5.11), obtém-se imediatamente:

$$dP = R\varphi dT + RTd\varphi \quad \text{ou} \quad Pd\mathcal{V} + \mathcal{V}dP = RdT, \quad (5.12)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{dT}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}. \quad (5.13)$$

Portanto, para o ar teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{RT}{P}, \\ \beta_P &= \frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P\mathcal{V}} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T},\end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{RT}{P^2} = \frac{1}{P}, \quad (5.15)$$

e

$$\begin{aligned}\beta^2 T \frac{g}{c_p} - \frac{\kappa g}{\mathcal{V}} &= \frac{g}{c_p T} - \frac{g}{RT} \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{1}{c_p} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{R - c_p}{c_p R} \right) \\ &= -\frac{c_v}{c_p R} \frac{g}{T}.\end{aligned}$$

Para o ar seco, com  $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288,15\text{ K}$ ,  $R = 287\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ,  $c_p = 1005\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$  e  $c_v = 718\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , obtém-se  $D_{\text{ar}} = 1,180 \times 10^{+04}\text{ m}$ . Note também, das equações acima, que para um gás ideal teremos

$$\beta_P T \equiv 1. \quad (5.16)$$

## 5.2 – O estado de referência em uma atmosfera adiabática seca

O valor da taxa de variação de temperatura em (5.4), com  $\beta_P = 1/T$ , é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera adiabática e hidrostática, portanto, a temperatura cai a partir de  $z = 0$  segundo

$$T_r(z) = T_0 - \frac{g}{c_p} z. \quad (5.17)$$

A partir do perfil de temperatura, obtém-se facilmente o perfil de pressão:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\wp g, \\ \frac{dP}{dz} &= -\frac{Pg}{RT}, \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{g dz}{RT} = \frac{c_p}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \ln \frac{P_r}{P_0} &= \ln \left[ \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right]^{c_p/R}, \\ P_r(z) &= P_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_p/R}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.18)$$

Analogamente, fazendo-se  $dT = -g dz / c_p$ , obtém-se, para o perfil de  $\wp$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\wp}{\wp} &= \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\frac{g dz}{RT} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\left( -\frac{g}{RT} + \frac{g}{c_p T} \right) dz \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{(-g dz)}{c_p T} \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \wp_r(z) &= \wp_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_v/R}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.19)$$

Relações diretas entre  $P$ ,  $\wp$  e  $T$  também podem ser obtidas. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \forall dP &= c_p dT, \\ \frac{RT}{P} dP &= c_p dT, \\ \frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ \ln \frac{T_0}{T} &= \ln \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}, \end{aligned}$$

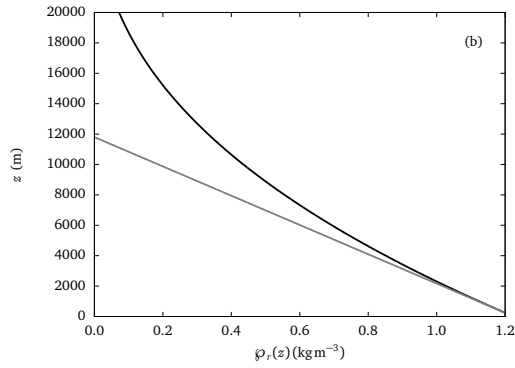


Figura 5.1: Dependência da pressão de referência  $P_r$  e da densidade de referência  $\phi_r$  em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude  $z$ .

$$T_0 = T \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}. \quad (5.20)$$

A equação (5.20) relaciona os valores de  $T$  e  $P$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de temperatura e pressão na superfície são  $T_0$  e  $P_0$ . Ela *também* serve para *definir* a temperatura potencial em uma atmosfera qualquer:

$$\Theta \equiv T \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}. \quad (5.21)$$

Portanto, segue-se a definição “verbal” frequentemente encontrada nos livros, de que a temperatura potencial  $\Theta$  é a temperatura de uma parcela trazida adiabaticamente (e hidrostaticamente) do nível de pressão  $P$  até o nível de pressão  $P_0$  na superfície.

O mesmo pode ser feito com  $\phi$ ,  $P$ , naturalmente:

$$\begin{aligned} -Pd\mathcal{V} &= c_v dT, \\ -\frac{RT}{\mathcal{V}}d\mathcal{V} &= c_v dT, \\ \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} &= -\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{c_v}{R} - \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ &= -\frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}; \\ \frac{d\phi}{\phi} &= \frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ \phi_0 &= \phi \left( \frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Novamente, (5.22) relaciona  $\phi$  com  $P$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de densidade e pressão na superfície são  $\phi_0$  e  $P_0$ . Para uma atmosfera qualquer, ela é usada para definir a *densidade potencial*  $\phi_\Theta$ :

$$\phi_\Theta \equiv \phi \left( \frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}. \quad (5.23)$$

A Figura 5.1 mostra os perfis de Pressão (a) e Densidade (b) do estado hidrostático de referência em uma atmosfera seca. Na figura 5.1, a interseção da tangente em  $z = 0$  com o eixo das ordenadas marca a altura de escala  $D$ .

### 5.3 – Hipóteses para a magnitude das flutuações de densidade

Para um fluido cujo estado hidrostático de referência tem uma altura de escala  $D$ , suponha que o escoamento turbulento de interesse ocorre em uma camada cuja espessura  $\ell$  é tal que  $\ell \ll D$ . Para um ponto qualquer com  $0 \leq z \leq \ell$ , a variação  $\Delta \wp_r = |\wp_r(z) - \wp_r(0)|$  é

$$\Delta \wp_r \leq \left| \int_0^\ell \frac{d\wp_r}{dz} dz \right| \leq \int_0^\ell \left| \frac{d\wp_r}{dz} \right| dz \leq \int_0^\ell \max \left| \frac{d\wp_r}{dz} \right| dz = \wp_0 \frac{\ell}{D}, \quad (5.24)$$

Segue-se que

$$\frac{\Delta \wp_r}{\wp_0} \leq \frac{\ell}{D} \ll 1. \quad (5.25)$$

Faça agora cada um dos campos instantâneos do escoamento ser decomposto na soma de um estado de referência hidrostático e de uma flutuação de Boussinesq (*cuidado: essa **não** é a decomposição de Reynolds, e a flutuação **não** é uma flutuação turbulenta*):

$$U_i = 0 + U'_i, \quad (5.26)$$

$$\wp = \wp_r + \wp', \quad (5.27)$$

$$P = P_r + P', \quad (5.28)$$

$$T = T_r + T', \quad (5.29)$$

etc..

Um nível adicional de formalização pode ser obtido da seguinte forma: na região  $0 \leq z \leq \ell$ , a densidade de referência é muito proximamente igual à expansão de  $\wp_r$  até o primeiro termo de sua série de Taylor; de (5.5),

$$\frac{\wp_r}{\wp_0} \approx 1 - \frac{z}{D}, \quad (5.30)$$

donde

$$\frac{\partial \wp_r}{\partial z} \sim \frac{\wp_0}{D}. \quad (5.31)$$

Nós pretendemos avaliar a ordem de grandeza dos termos que comparecem na equação diferencial de conservação de massa (3.6). Para isso, nós precisamos estimar a ordem de grandeza dos gradientes de densidade,  $\partial \wp / \partial x_i$  e dos gradientes de velocidade,  $\partial U_i / \partial x_i$ . Em ambos os casos, é preciso decompor o escoamento tanto em termos de estado hidrostático/flutuação dinâmica (Boussinesq) quanto em termos de média/flutuação turbulenta (Reynolds). O processo, para densidade, é como se segue:

$$\wp = \wp_r + \wp', \quad (5.32)$$

$$\langle \wp \rangle = \wp_r + \langle \wp' \rangle, \quad (5.33)$$

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho, \quad (5.34)$$

$$\wp = \wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho. \quad (5.35)$$

A aproximação de Boussinesq consiste, primeiramente, em supor que na região  $0 \leq z \leq \ell$  vale

$$\wp' \sim \wp_0 \frac{\ell}{D} \ll \wp_r. \quad (5.36)$$

Em outras palavras, estamos supondo que as flutuações de densidade são, no máximo, da mesma ordem que as variações na densidade de referência.

Conforme vimos acima, entretanto, não basta avaliar a ordem de grandeza das flutuações de densidade; é preciso também estimar a ordem de grandeza dos seus *gradientes*. Já temos uma estimativa da ordem de grandeza do gradiente vertical de  $\wp_r$  em (5.31).

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\langle \wp \rangle$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de covariâncias turbulentas, por exemplo de  $\langle u_i \rho \rangle$ . As estimativas que nós adotaremos são análogas às feitas em (4.12)–(4.14):

$$\langle \wp' \rangle \sim \tilde{\rho}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\ell}, \quad (5.38)$$

$$\langle u_i \rho \rangle \sim \tilde{u} \tilde{\rho}. \quad (5.39)$$

Como vimos no capítulo 4,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade, e é natural que  $\tilde{\rho}$ , agora, seja uma escala macroscópica de densidade. Note que, de (5.36) e (5.37),

$$\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\ell}{D}. \quad (5.40)$$

Aqui, valem as mesmas considerações feitas na seção 4.2 a respeito da validade das estimativas (5.37)–(5.39), e uma releitura daquela seção é recomendável para que o leitor reforce seu entendimento da utilidade desse tipo de estimativa, mas também de suas limitações.

## 5.4 – A aproximação de Boussinesq para a conservação de massa

Comece agora com a equação instantânea de conservação de massa, (3.5), e tire a média; então, utilizando a decomposição e os postulados de Reynolds, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \wp U_i \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i] \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle &= 0, \\ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle] + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A equação (5.41) é a equação de conservação de massa *exata* para as médias. Note o aparecimento das covariâncias  $\langle \rho u_i \rangle$ : a primeira lição é que em um escoamento com flutuações de densidade a equação da continuidade *média* contém um termo envolvendo as covariâncias de densidade com a velocidade. Aplicando agora (5.35),

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i}}_{II} + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i}}_{III} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_{IV} + \underbrace{\langle \wp' \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_V + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i}}_{VI} = 0. \quad (5.42)$$



A ordem de grandeza de cada termo pode ser facilmente estabelecida:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{II} &\sim \frac{\wp_0\tilde{u}}{D} \sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{III} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{IV} &\sim \frac{\wp_0\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{V} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}; \\ \text{VI} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}}{\ell}. \end{aligned}$$

É importante frisar que I–VI referem-se às ordens de grandeza dos termos individuais, e não de suas somas. Em particular, note que IV significa, por extenso, que

$$\frac{\partial\langle U_1\rangle}{\partial x_1} \sim \frac{\wp_0\tilde{u}}{\ell}, \quad \frac{\partial\langle U_2\rangle}{\partial x_2} \sim \frac{\wp_0\tilde{u}}{\ell}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial\langle U_3\rangle}{\partial x_3} \sim \frac{\wp_0\tilde{u}}{\ell};$$

A estimativa da soma  $\sum_{i=1}^3 \partial\langle U_i\rangle/\partial x_i$  virá na sequência. Além disso, Em II, usamos (5.40). Em função de que  $\ell/D \ll 1$ ,  $\tilde{\rho}/\wp_0 \ll 1$ , é evidente que cada um dos 3 termos em IV é muito maior do que todos os outros; nesse sentido, podemos escrever agora, para a soma,

$$\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \ll \frac{\tilde{u}}{\ell} \Rightarrow \frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_i} \approx 0. \quad (5.43)$$

Portanto, uma primeira consequência das hipóteses da aproximação de Boussinesq para as macroescalas é que o escoamento médio  $\langle U \rangle$  é *aproximadamente* solenoidal, ou seja:  $\nabla \cdot U \approx 0$ .

## 5.5 – A aproximação de Boussinesq para a equação de quantidade de movimento

Em notação indicial, a equação da hidrostática (5.3) pode ser escrita

$$\wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} = 0. \quad (5.44)$$

Introduza agora a decomposição de Boussinesq na forma de (5.27) e (5.28), por enquanto apenas nos termos envolvendo a pressão e a aceleração da gravidade, na equação para a quantidade de movimento, (3.34), e simplifique utilizando (5.36) e (5.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= (\wp_r + \wp') \left[ g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -(P_r + P') + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp v_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= \underbrace{\left[ \wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} \right]}_{\equiv 0} + \wp' g_i - 2\wp \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp v_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} & \approx \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (5.45)
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental da *aproximação de Boussinesq* para a equação de quantidade de movimento consiste no seguinte: em (5.45), nós fizemos

$$\wp_r + \wp' \approx \wp_r \quad (5.46)$$

em todos os termos em que  $\wp$  aparece *fora* das derivadas, com base em (5.36), *exceto no caso do termo de empuxo*  $\wp' g_i$ . Esse último fica como está. A justificativa para esse procedimento tem base na física que estamos querendo representar (e, num sentido matemático muito concreto, *preservar!*). Em escoamentos com estratificação de densidade, esse é justamente o termo que produz convecção: é mais ou menos óbvio que, se o desprezarmos, a equação resultante não será mais capaz de representar *nenhum* efeito de empuxo devido a variações de densidade dentro do fluido.

Além disso, a substituição de  $\wp$  por  $\wp_r$  apenas nos termos fora de derivadas é um outro ponto crucial, já que  $\wp' \ll \wp_r$  não implica  $\partial \wp' / \partial x_k \ll \partial \wp_r / \partial x_k$ ! Isso significa que não podemos fazer essa aproximação *ainda* no lado esquerdo de (5.45). Muito pelo contrário, como  $\wp'$  inclui as flutuações turbulentas, seus gradientes incluem também os gradientes locais dessas flutuações, os quais, conforme vimos no capítulo 4, são muito maiores que os gradientes das grandezas médias.

Portanto, a equação (5.45), nessa forma, é pouco útil, já que todos os gradientes que aparecem na equação envolvem tanto as macro quanto as microescalas que foram introduzidas no capítulo 4: não é possível fazer uma análise de escalas de (5.45). O próximo passo é promediá-la:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} & = \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\langle P' \rangle + \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \quad (5.47)
\end{aligned}$$

Os termos do lado direito de (5.47) estão prontos para uma análise de escalas, mas o lado esquerdo precisa ser “aberto”, com o uso, como sempre, da decomposição e dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} & = \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i] \rangle \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle \\
& = \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \rho u_i \rangle];
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i][\langle U_j \rangle + u_j] \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \left[ \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle u_j + \langle \wp \rangle u_i \langle U_j \rangle + \rho \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle \right] \right\rangle \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \left[ \langle \wp \rangle u_i u_j + \langle U_i \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho u_i + \rho u_i u_j \right] \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle \right]
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.47),

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle)}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\
&\frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\
&= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \quad (5.48)
\end{aligned}$$

É possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.41):

$$\begin{aligned}
&\langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\
&\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial(\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\
&= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\langle \wp \rangle$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.46) (na forma promediada, que utiliza (5.33)):

$$\begin{aligned}
&\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\
&\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial(\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\
&= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Finalmente, expandimos  $\partial \langle \wp \rangle / \partial x_j$  usando mais uma vez (5.33):

$$\underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} +$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{\frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
&= \underbrace{\langle \wp' \rangle g_i}_{\text{IX}} - \underbrace{2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle}_{\text{X}} - \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i}}_{\text{XI}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)}_{\text{XII}} + \underbrace{2 \wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}}_{\text{XIII}}. \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Se estendermos as estimativas de ordem de grandeza que já fizemos para velocidades e densidades para as pressões (em analogia, por exemplo, a (5.37)–(5.39)), devemos ter:

$$\langle P' \rangle \sim \tilde{p}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \quad (5.51)$$

$$\langle u_i p \rangle \sim \tilde{u} \tilde{p}. \quad (5.52)$$

As ordens de grandeza de cada termo se seguem:

$$\begin{aligned}
\text{I} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{II} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{III} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IV} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{V} &\sim \frac{\wp_0}{D} \tilde{u}^2 = \wp_0 \frac{\ell}{D} \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \sim \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VI} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VII} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VIII} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IX} &\sim \tilde{\rho} g, \\
\text{X} &\sim \wp_0 f \tilde{u} = \frac{\wp_0 f l}{l} \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}} \sim \frac{1}{\text{Ro}} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XI} &\sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \\
\text{XII} &\sim \wp_0 \nu_u \frac{1}{\ell} \left[ \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \right] = \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XIII} &\sim \wp_0 \nu_u \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}.
\end{aligned}$$

Os termos de maior ordem são I, III e IV (todos os três da mesma ordem), IX, e XI. Esses dois últimos são os “forçantes” da equação de quantidade de movimento, e consequentemente *têm* que produzir a ordem de magnitude observada em I, III e IV. Em

$X, f = 2\omega \sin(\phi)$  é o parâmetro, ou frequência, de Coriolis;  $\phi$  é a latitude; e

$$\text{Ro} \equiv \frac{\tilde{u}}{f\ell} \quad (5.53)$$

é o número de Rossby. Na escala  $\ell$  do escoamento, o número de Rossby é muito grande, e podemos desprezar  $X$  *vis-à-vis* I, III e IV. Da mesma forma, em escoamentos turbulentos na natureza,  $\text{Re}_\ell$  é muito grande, e podemos desprezar XII e XIII *vis-à-vis* I, III e IV.

A equação aproximada de quantidade de movimento resultante é

$$\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.54)$$

Uma última simplificação é possível abrindo a derivada do 2º termo à esquerda e tomando ordens de grandeza:

$$\wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} = \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j}$$

Utilizando (??),

$$\begin{aligned} \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\ \wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \tilde{u} \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \ll \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \end{aligned}$$

e portanto, alternativamente a (5.54), podemos escrever

$$\wp_r \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \right] = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (5.55)$$

Ficamos então com as seguintes relações de ordens de grandeza em (5.54) ou (5.55):

$$g\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \quad (5.56)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\ell} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \Rightarrow \quad (5.57)$$

$$\tilde{p} \sim \tilde{\rho} g \ell. \quad (5.58)$$

Flutuações de pressão são extremamente difíceis de medir na atmosfera. [Wyn-gaard \(2010\)](#) dá a estimativa  $p \sim \wp_0 \tilde{u}^2$  para escoamentos com densidade  $\wp$  constante (segundo o autor): note que isso é o mesmo que (5.57), que foi obtida sem exigência de constância da densidade do escoamento. [Hauf et al. \(1996\)](#) observaram valores de  $p$  da ordem de 2,5 Pa, ou seja: da mesma ordem que a estimativa de Wyngaard e de (5.57). Esses dados observacionais reforçam as conclusões desta seção de que é razoável desprezar os efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações (tanto no sentido de Boussinesq quanto no de Reynolds) de densidade.

Levando (5.58) em (5.7), obtém-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\frac{\tilde{p}}{\varphi_0} \sim \underbrace{\beta_P \tilde{T}}_I + \underbrace{\kappa_T \tilde{p}}_{II}, \quad (5.59)$$

onde I representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade, e II representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações de densidade. Utilizando os valores listados nas páginas 67 e 67 para  $\beta_P$ ,  $\kappa_T$ ,  $T_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $P_0$ ;  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\ell = 10 \text{ m}$ ,  $\tilde{T} = 1 \text{ K}$ , e (5.56)–(5.58), obtemos as seguintes estimativas:

água:  $I \sim 1,500 \times 10^{-04}$ ,  $II \sim 4,900 \times 10^{-07}$ ;

ar:  $I \sim 3,470 \times 10^{-03}$ ,  $II \sim 1,184 \times 10^{-05}$ .

O efeito das flutuações de pressão sobre as de densidade é cerca de 100 vezes (no ar) a 1000 vezes (na água) menor do que o efeito das flutuações de temperatura. Isso permite simplificar (5.6) com (5.59) para

$$\varphi' \approx -\varphi_r \beta_{P_r} T', \quad (5.60)$$

$$\langle \varphi' \rangle \approx -\varphi_r \beta_{P_r} \langle T' \rangle, \quad (5.61)$$

$$\rho \approx -\langle \varphi \rangle \beta_{P_m} T. \quad (5.62)$$

Observe que ao escrevermos (5.62), estamos de fato supondo que as flutuações turbulentas de densidade (e de temperatura e pressão) são no máximo da mesma ordem de magnitude que as flutuações de Boussinesq de densidade (e de temperatura e pressão). Em (5.60)–(5.61), o coeficiente isobárico de expansão térmica é calculado em  $(T_r, P_r)$ :

$$\beta_{P_r} = \beta_P(T_r, P_r),$$

porque se trata das flutuações em torno do estado de referência; em (5.62), ele é calculado em  $(\langle T \rangle, \langle P \rangle)$ :

$$\beta_{P_m} = \beta_P(\langle T \rangle, \langle P \rangle),$$

porque se trata das flutuações turbulentas. Uma notação análoga vale para  $\kappa_T$ .

## 5.6 – Incompressibilidade: efeitos de pressão e temperatura sobre as flutuações de velocidade

O primeiro resultado que obtivemos com a aproximação de Boussinesq foi que o campo de velocidade médio é aproximadamente solenoidal (veja ??). Nós nada afirmamos, entretanto, sobre o campo *instantâneo*

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k},$$

em que sentido podemos afirmar que ele *também* é solenoidal, e em que ordem de magnitude? Façamos

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

De ??, já temos uma estimativa da pequenez de  $\partial \langle U_k \rangle / \partial x_k$ . Para  $\partial u_k / \partial x_k$ , podemos utilizar os 3 critérios estabelecidos por Batchelor (1967) (equações (3.6.16), (3.6.17) e

(3.6.18)) para levar em conta os efeitos das variações locais de pressão. É muito importante notar que, para as flutuações turbulentas de velocidade, as escalas de comprimento e de velocidade que devemos usar são as microescalas de Kolmogorov correspondentes,  $\eta_u$  e  $\check{u}$ , dadas por (4.2) e (4.3). Além disso, a frequência  $n$  que aparece em (3.6.17) de Batchelor é aqui, simplesmente,  $\check{u}/\eta_u$ . Nesse caso, as condições todas elas resumem-se à condição

$$\frac{\check{u}^2}{c^2} \ll 1. \quad (5.63)$$

Dada a pequenez das microescalas  $\check{u}$  no ar e na água, aparentemente as flutuações turbulentas de velocidade são “mais” incompressíveis do que o próprio campo médio.

Um segundo conjunto de condições provém dos efeitos das variações locais de temperatura sobre as variações locais de densidade. Novamente, utilizamos as microescalas de Kolmogorov; agora, vamos precisar também da microescala de temperatura  $\check{T}$ . O critério de incompressibilidade de Batchelor (1967), equação (3.6.21), torna-se

$$\beta_P \check{T} \frac{v_T}{\eta_u \check{u}} \ll 1. \quad (5.64)$$

É instrutivo comparar (5.63) e (5.64) na natureza. Vamos fazer inicialmente as contas apenas para o ar. Considere

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle &= \check{u}^3 / \ell = (1 \text{ m s}^{-1})^3 / 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}; \\ \langle \mathcal{E}_{Ti} \rangle &= \check{u} \check{T}^2 / \ell = (1 \text{ m s}^{-1} (1 \text{ K})^2) / 1 \text{ m} = 1 \text{ K}^2 \text{ s}^{-1}; \\ v_u &= 1,45 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ v_T &= 2,02 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \\ \eta_u &= 2,350 \times 10^{-04} \text{ m}, \\ \check{u} &= 6,171 \times 10^{-02} \text{ m s}^{-1}, \\ \eta_T &= 2,773 \times 10^{-04} \text{ m}, \\ \check{T} &= 6,171 \times 10^{-02} \text{ K}. \end{aligned}$$

Então, de (5.63) e (5.64),

$$\begin{aligned} \frac{\check{u}^2}{c^2} &= 3,294 \times 10^{-08}, \\ \beta_P \check{T} \frac{v_\theta}{\eta_u \check{u}} &= 4,835 \times 10^{-03}. \end{aligned}$$

Desse exercício, aprendemos o seguinte: o critério de incompressibilidade mais restritivo no caso de escoamentos na atmosfera não é o número de Mach, mas sim aquele que resulta da análise do efeito das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade. Mesmo assim,  $4,8 \times 10^{-3} \ll 1$ , de forma que, a partir deste ponto, nós vamos adotar a hipótese de que, para as flutuações locais de velocidade, vale

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \approx 0. \quad (5.65)$$

## 5.7 – A correlação pressão-temperatura

Ainda de (5.7), obtém-se

$$\frac{\rho}{\langle \wp \rangle} = -\beta_{P_m} \mathcal{T} + \kappa_{T_m} p, \quad (5.66)$$

onde, conforme já vimos,

$$|\kappa_{T_m} p| \ll |\beta_{P_m} \mathcal{T}|. \quad (5.67)$$

Uma forma de ver melhor a ordem de grandeza dos termos em (5.66) é reescrevê-la como

$$\frac{\rho}{\langle \wp \rangle} = -\beta \frac{\mathcal{T}}{\langle T \rangle} + \kappa \frac{p}{\langle P \rangle}. \quad (5.68)$$

Em (5.68),  $\beta$  e  $\kappa$  são duas funções adimensionais de  $T$  e  $P$  definidas por

$$\beta_{P_m} = \beta_P(\langle T \rangle, \langle P \rangle) \equiv \frac{\beta}{\langle T \rangle}, \quad (5.69)$$

$$\kappa_{T_m} = \kappa_T(\langle T \rangle, \langle P \rangle) \equiv \frac{\kappa}{\langle P \rangle}. \quad (5.70)$$

Para a água, segundo (5.9)–(5.10),  $\beta \approx 1/23$  e  $\kappa \approx 1/20000$ . Para um gás ideal, de acordo com (5.14)–(5.15),  $\beta = \kappa = 1$ .

Sob a validade da hipótese de Boussinesq, pressão e temperatura são muito fracamente correlacionadas (em termos das ordens de grandeza em (5.68); as flutuações de densidade respondem basicamente às flutuações de temperatura (densidade e temperatura são quase que perfeitamente anti-correlacionadas), e as flutuações de pressão respondem essencialmente ao campo de flutuações de velocidades, apenas.

Recentemente, Gerolymos e Vallet (2013) propuseram uma linearização simples para calcular as correlações  $\langle \rho \mathcal{T} \rangle$ ,  $\langle \rho p \rangle$  e  $\langle \mathcal{T} p \rangle$  em um escoamento turbulento compressível. Essa abordagem é adaptada e simplificada, aqui, para a estimativa da ordem de grandeza da correlação pressão-temperatura em escoamentos naturais debaixo da aproximação de Boussinesq.

Ela consiste em reescrever (5.68) na forma

$$\kappa \frac{p}{\langle P \rangle} = \frac{\rho}{\langle \wp \rangle} + \beta \frac{\mathcal{T}}{\langle T \rangle};$$

multiplicar sucessivamente por  $p/\langle P \rangle$ ,  $\rho/\langle \wp \rangle$  e  $\mathcal{T}/\langle T \rangle$ ; e promediar, obtendo-se assim um sistema de 3 equações:

$$\kappa \frac{\langle pp \rangle}{\langle P \rangle^2} = \frac{\langle \rho p \rangle}{\langle \wp \rangle \langle P \rangle} + \beta \frac{\langle \mathcal{T} p \rangle}{\langle T \rangle \langle P \rangle}, \quad (5.71)$$

$$\kappa \frac{\langle \rho p \rangle}{\langle \wp \rangle \langle P \rangle} = \frac{\langle \rho \rho \rangle}{\langle \wp \rangle^2} + \beta \frac{\langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\langle \wp \rangle \langle T \rangle}, \quad (5.72)$$

$$\kappa \frac{\langle \mathcal{T} p \rangle}{\langle T \rangle \langle P \rangle} = \frac{\langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\langle \wp \rangle \langle T \rangle} + \beta \frac{\langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle^2}. \quad (5.73)$$

É possível simplificar (5.71)–(5.73) um pouco mais reconhecendo que há apenas 6 variáveis (adimensionais) envolvidas, todas elas da forma

$$(ab) \equiv \frac{\langle ab \rangle}{\langle A \rangle \langle B \rangle};$$

Eu nunca vi ninguém fazer isso, mas não sei se é original!



Portanto,

$$\kappa(pp) = (\rho p) + \beta(\mathcal{T}p), \quad (5.74)$$

$$\kappa(\rho p) = (\rho\rho) + \beta(\rho\mathcal{T}), \quad (5.75)$$

$$\kappa(\mathcal{T}p) = (\rho\mathcal{T}) + \beta(\mathcal{T}\mathcal{T}). \quad (5.76)$$

Há portanto 6 variáveis em (5.74)–(5.76), e cada uma pode ser escrita em função de outras 3. Podemos escrever  $(\mathcal{T}p)$  em função das variâncias (adimensionalizadas)  $(pp)$ ,  $(\rho\rho)$  e  $(\mathcal{T}\mathcal{T})$ :

$$(\mathcal{T}p) = \frac{\beta^2(\mathcal{T}\mathcal{T}) - (\rho\rho) + \kappa^2(pp)}{2\beta\kappa},$$

ou

$$\frac{\langle \mathcal{T}p \rangle}{\langle T \rangle \langle P \rangle} = \frac{1}{2\beta\kappa} \left[ \beta^2 \frac{\langle \mathcal{T}\mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle \langle T \rangle} - \frac{\langle \rho\rho \rangle}{\langle \varnothing \rangle \langle \varnothing \rangle} + \kappa^2 \frac{\langle pp \rangle}{\langle P \rangle \langle P \rangle} \right] \quad (5.77)$$

## 5.8 – As ordens de grandeza da equação para a temperatura

Inicialmente, procuraremos escrever a equação da energia em uma forma que atenda a dois requisitos importantes:

1. Ser expressa em termos de grandezas mensuráveis *em princípio* (note que tanto (3.77) quanto (3.79) estão dadas em termos de funções termodinâmicas ( $\mathcal{U}$  e  $H$ ) que não são diretamente mensuráveis).
2. Ter validade tanto para líquidos quanto para gases.

Para tanto, partimos de (3.79), e utilizamos (??) e (??) para exprimir  $DH/Dt$ :

$$\begin{aligned} \varnothing \frac{DH}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \varnothing c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \varnothing \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \varnothing c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V}(1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \varnothing c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \varnothing c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \varnothing c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Daqui para a frente, uma *primeira* aproximação (no sentido da aproximação de Boussinesq) consistirá em supor que  $c_p$  é avaliado no estado hidrostático de referência. Com isso, poderemos supor  $c_p$  “constante” e mantê-lo fora das derivadas.

Para um gás ideal,  $\beta_P T \equiv 1$ , o que simplifica bastante a análise subsequente de (5.78); para água, entretanto,  $\beta_P T$  varia consideravelmente com a temperatura. Isso pode ser visto nas figuras 5.2 and 5.3, onde essa função está plotada para água à pressão atmosférica (<http://www.physchem.kfunigraz.ac.at/sm/Service/Water/H2Othermexp.htm>).

Para  $T_r$  na faixa 10–20° C (que é um exemplo razoável de condições encontradas em escoamentos de água líquida no ambiente), tem-se

$$(\beta_P T) \equiv \phi(T) = \phi(T_r) + bT'$$

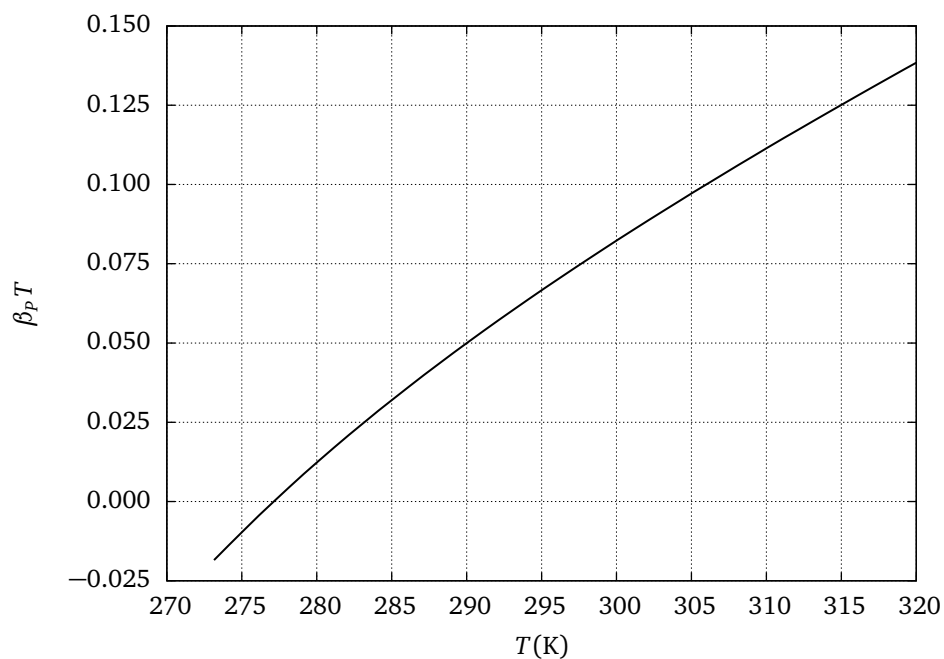


Figura 5.2: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida

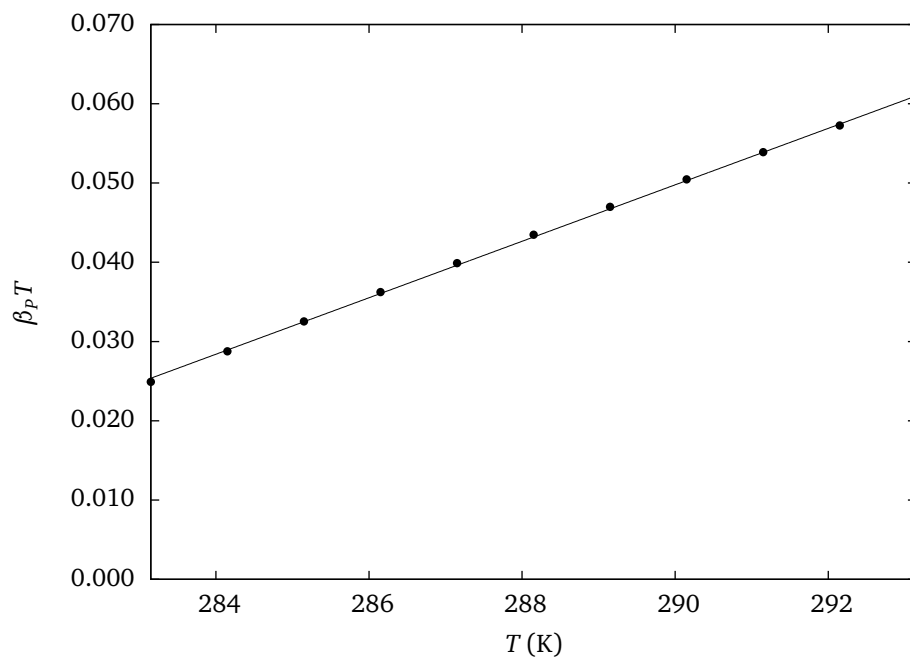


Figura 5.3: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C.

$$\begin{aligned}
&= \phi(T_r) + b \langle T' \rangle + b\mathcal{T} \\
&= \phi(\langle T \rangle) + b\mathcal{T} \\
&\approx \langle \phi(T) \rangle + b\mathcal{T} \\
&= \langle \beta_P T \rangle + b\mathcal{T}.
\end{aligned} \tag{5.79}$$

(pois  $\phi$  é aproximadamente linear), onde  $b = 0.00356 \text{ K}^{-1}$  é obtido por regressão linear através dos pontos na figura 5.3. O único objetivo de (5.79) é proporcionar uma base concreta sobre a qual estimativas de ordem de grandeza podem ser feitas.

Em seguida, nós aproximamos a densidade do lado direito por  $\varphi_r$  (novamente, uma aproximação de Boussinesq) e utilizamos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
\varphi c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + T c_p \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi U_j}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \varphi_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi; \\
c_p \left[ \frac{\partial(\varphi T)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi T U_j)}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \varphi_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Prosseguimos para promediar. A hipótese fundamental que simplificará extraordinariamente a álgebra é a ausência de correlação entre a temperatura e a pressão. Como acabamos de ver, para um gás  $\beta_P T \equiv 1$ , e nesse caso ficamos simplesmente com  $\frac{D\langle P \rangle}{Dt}$  no termo correspondente. Para água, devido à dependência de  $\beta_P$  com  $T$ , temos formalmente:

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle = \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle + b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle. \tag{5.81}$$

Estimativas da ordem de grandeza das correlações entre as flutuações de temperatura  $\mathcal{T}$  e os *gradientes* de pressão não estão diretamente disponíveis, mas parece muito razoável supor que elas não devem exceder as correlações entre pressão e temperatura, das quais temos uma excelente estimativa em (??) em termos dos valores ambientes (*i.e.*, “médios”) de  $P$  e  $T$ . Adotando essas estimativas em (5.81), devemos agora ter:

$$\begin{aligned}
b &\sim \beta_P / 10, \\
\left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle T \rangle}{100} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle, \\
b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle \beta_P T \rangle}{1000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \frac{1}{23000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Os efeitos da correlação temperatura-(gradiente de pressão) na água são portanto desprezíveis, e adotamos

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle. \tag{5.82}$$

Com (5.82) em mãos, retornamos agora a (5.80) e promediamos:

$$c_p \left[ \frac{\partial \langle \varphi T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \varphi T U_j \rangle}{\partial x_j} \right] - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \varphi_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle; \tag{5.83}$$

Os termos do lado esquerdo são expandidos da maneira usual:

$$\frac{\partial \langle \varphi T \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \varphi \rangle + \rho][\langle T \rangle + \mathcal{T}] \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \wp \rangle \mathcal{T} + \rho \langle T \rangle + \rho \mathcal{T}] \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \rho \mathcal{T} \rangle];
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp T U_j \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle T \rangle + \mathcal{T}][\langle U_j \rangle + u_j] \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle T \rangle u_j + \langle \wp \rangle \mathcal{T} \langle U_j \rangle + \rho \langle T \rangle \langle U_j \rangle] \rangle \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \mathcal{T} u_j + \langle T \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho \mathcal{T} + \rho \mathcal{T} u_j] \rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle + \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle + \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle]
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.83),

$$\begin{aligned}
c_p \left[ \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \right. \\
\left. \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \right] \\
- \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.
\end{aligned}$$

Novamente, é possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (5.41):

$$\begin{aligned}
c_p \left[ \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right] + \\
\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \\
- \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.
\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\langle \wp \rangle$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (5.46) (na forma promediada, que utiliza (5.33)):

$$\begin{aligned}
c_p \left[ \wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right] + \\
\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \\
- \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, expandimos  $\partial \langle \varphi \rangle / \partial x_j$  usando (5.33):

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\
 & \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
 & - \underbrace{\langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle}_{\text{IX}} \approx \underbrace{\wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{X}} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_{\text{XI}}. \quad (5.84)
 \end{aligned}$$

Todos os termos de (5.84) estão prontos para uma análise de ordem de grandeza, exceto pelo ainda ligeiramente problemático termo IX. Aqui, observe que

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{D(P_r + P')}{Dt} \right\rangle \\
 &= \left\langle U_j \frac{\partial P_r}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial P'}{\partial t} + U_j \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right\rangle \\
 &= \langle U_j \rangle \frac{\partial P_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle \\
 &= \underbrace{\langle W \rangle \frac{\partial P_r}{\partial z}}_{\text{i}} + \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t}}_{\text{ii}} + \underbrace{\langle U_j \rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{iii}} + \underbrace{\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{iv}} \quad (5.85)
 \end{aligned}$$

Em primeira aproximação,  $\langle W \rangle \approx 0$ . Uma análise de ordem de grandeza mais consistente com o que é feito usualmente em camadas-limite, utilizando a equação da continuidade (5.43), é supor  $\partial \langle U \rangle / \partial x \ll \partial \langle W \rangle / \partial z$ ; mais especificamente, utilizaremos a altura de escala  $D$  para estimar os gradientes horizontais de velocidade média (isso é, infelizmente, uma hipótese adicional):

$$\frac{\langle U \rangle}{D} \sim \frac{\langle W \rangle}{\ell} \Rightarrow \langle W \rangle \sim \frac{\ell}{D} \tilde{u} = \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \tilde{u}.$$

Retornando a (5.85), descobrimos que todos os termos são da mesma ordem:

$$\begin{aligned}
 \text{i} &\sim \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 g = \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho} \ell} = \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 \text{ii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 \text{iii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\
 \text{iv} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell} = \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
 \end{aligned}$$

Em (i), usamos (5.58); (ii) e (iii) são simples. (iv) é obtido supondo-se que as flutuações turbulentas de velocidade e do gradiente de pressão são bem correlacionadas. À luz da equação não-promediada da quantidade de movimento (por exemplo, (5.45)), isso

parece razoável e bastante natural, já que os gradientes de pressão por unidade de volume devem ser da mesma ordem que as acelerações. Na segunda igualdade de (iv), usamos (5.57).

Com isso, as ordens de magnitude de todos os termos de (5.84) estão estabelecidos:

$$\begin{aligned}
 \text{I} &\sim \varrho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{II} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{III} &\sim \varrho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{IV} &\sim \varrho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{V} &\sim \tilde{T}\tilde{u} \frac{\varrho_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VI} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{VIII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\
 \text{IX} &\sim (\beta_{P0} T_0) \varrho_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \\
 \text{X} &\sim \varrho_0 c_p \nu_T \frac{\tilde{T}}{\ell^2} = \varrho_0 c_p \frac{\nu_T}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{Pr Re}_\ell} \varrho_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\
 \text{XI} &\sim \varrho_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
 \end{aligned}$$

O parâmetro adimensional

$$\text{Ga}_0 \equiv \beta_{P0} T_0 \quad (5.86)$$

é o número de Gay-Lussac; para o ar (como já vimos),  $\text{Ga}_0 \equiv 1$ ; para a água, um valor conservador para sua ordem de magnitude (vide Figura 5.2) é  $\beta_{P0} T_0 \sim 0,1$ .

Claramente, I, III e IV são os termos dominantes; II, V, VI, VII, VIII, são todos da mesma ordem de magnitude, e bem menores; assim como X, uma vez que o número de Reynolds  $\text{Re}_\ell$  em escoamentos turbulentos é muito grande. IX e XI podem ser comparados com (I,II,IV) por meio do número turbulento de Eckart,

$$\text{Ec} \equiv \frac{\tilde{u}^2}{c_p \tilde{T}}; \quad (5.87)$$

obtemos

$$\text{I,III,IV} \sim \frac{1}{\text{Ec}} \varrho_0 \tilde{u}^3 / \ell,$$

onde  $\text{Ec} = \mathcal{O}(10^{-3})$  tanto para ar quanto para água. Portanto,

$$\text{I,II,IV} \gg \text{IX,XI}.$$

Finalmente, tanto para ar quanto para água, a equação simplificada para a temperatura termodinâmica  $T$  que se obtém com a aproximação de Boussinesq é

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\varrho_0} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \right). \quad (5.88)$$

Observe que não houve necessidade, ainda, de introduzir a temperatura potencial: na região onde supomos que a aproximação de Boussinesq é estritamente válida,  $\ell/D \ll 1$ , é suficiente trabalhar com a temperatura termodinâmica  $T$ , mesmo no caso do ar.

## 5.9 – A equação para a temperatura potencial

Uma formulação alternativa para a equação da energia utiliza o conceito de temperatura potencial. Para um gás ideal,  $H = H(T)$ , e (3.79) com (??) torna-se

$$\wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.89)$$

Utilizando a temperatura potencial introduzida em (5.21) e diferenciando,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ \frac{1}{\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{c_p P} \frac{DP}{Dt}, \\ \frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Comparando (5.90) com (5.89), chegamos finalmente à equação para a energia interna em termos da temperatura potencial,

$$\frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.91)$$

O termo

$$\frac{c_p P}{R\Theta} = \frac{c_p P}{RT} \frac{T}{\Theta}$$

é muito proximamente igual a

$$\frac{c_p P}{RT} = c_p \wp;$$

de fato,

$$\frac{T}{\Theta} = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p} = \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \approx \frac{287.15}{288.15} = 0.9966,$$

para  $T_0 = 288.15$  K,  $g = 9.81$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>,  $c_p = 1005$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> e  $z = 100$  m. Para  $z = 1000$  m, que é a ordem de grandeza da altura da camada-limite atmosférica, o valor acima muda para 0.9661: ainda próximo de 1, mas com diferenças maiores do que 1%. Debaixo das hipóteses da aproximação de Boussinesq, portanto, podemos aproximar (5.91) por

$$\wp c_p \frac{D\Theta}{Dt} = \wp_r c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (5.92)$$

Podemos agora manipular o lado esquerdo de (5.92) exatamente como fizemos para ir de (5.80) até (5.84), só que com  $\Theta$  no lugar de  $T$ . Basta, portanto, copiar os termos dessa última com  $\Theta$  em lugar de  $T$ :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\
& \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \theta \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
& \approx \underbrace{\wp_r c_p \nu_\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{IX}} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_{\text{X}}. \quad (5.93)
\end{aligned}$$

Claramente, as mesmas escalas macroscópicas  $\tilde{\tau}$  e  $\ell$  aplicam-se a (5.93); as ordens de magnitude são:

$$\begin{aligned}
\text{I} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{II} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{III} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{IV} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{V} & \sim \tilde{\tau} \tilde{u} \frac{\wp_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{VI} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{VII} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{VIII} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{IX} & \sim \wp_0 c_p \nu_\tau \frac{\tilde{\tau}}{\ell^2} = \wp_0 c_p \frac{\nu_\tau}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{Pr Re}_\ell} \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\
\text{X} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.
\end{aligned}$$

Mantendo-se apenas os termos de maior ordem de magnitude, o resultado é uma equação análoga a (5.88):

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \right). \quad (5.94)$$

A equação (5.94) é um pouco mais robusta e parcimoniosa de hipóteses do que (5.88): em particular, não precisamos nos preocupar com a interação entre os gradientes de pressão  $\partial P_r / \partial z$  e a velocidade vertical média  $\langle W \rangle$ : não precisamos supor portanto que  $\langle W \rangle \ll \langle U \rangle$ , e (5.94) é aplicável mesmo em regiões de alta velocidade vertical, como por exemplo dentro de térmicas. Por outro lado, continuamos restritos a  $\ell \ll D$ : na análise de escalas que estamos fazendo aqui, para a atmosfera,  $\ell \sim 1000$  m já está claramente violando aquela condição, e não há garantia (sob esse aspecto) de que as equações para as médias obtidas com a aproximação de Boussinesq valham para toda a camada-limite atmosférica.



## 5.10 – Os gradientes microscópicos de densidade

A equação (5.62) nos permite obter microescalas de Kolmogorov para densidade. Definimos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} \right)^2 &= \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right\rangle = (\langle \wp \rangle \beta_{P_m})^2 \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle = (\langle \wp \rangle \beta_{P_m})^2 \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2 \Rightarrow \\ \check{\rho} &= \langle \wp \rangle \beta_{P_m} \check{\mathcal{T}}, \end{aligned} \quad (5.95)$$

para  $\eta_\rho = \eta_{\mathcal{T}}$ . A linearidade entre as microescalas de densidade e de temperatura produz agora as estimativas de ordem de grandeza, a partir de (4.32) e (??):

$$\frac{\check{\rho}}{\eta_\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}, \quad (5.96)$$

$$\frac{\check{\rho}}{\tilde{\rho}} = \text{Re}_\ell^{-1/4}. \quad (5.97)$$

# 6

## As equações de ordem 2

### 6.1 – As equações locais de conservação de massa e de quantidade de movimento com a aproximação de Boussinesq

Com base na discussão da seção 5.6, nós vamos supor que o campo local de velocidade é solenoidal:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.1)$$

Uma equação local para a quantidade de movimento pode ser obtida como se segue. Primeiro, reescreva (3.34) substituindo  $\wp$  por  $\wp_r$ :

$$\wp_r \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \approx \wp_r (g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}.$$

Note que, como não há derivadas de  $\wp$  em (3.34), a sua substituição por  $\wp_r$  não acarreta problemas. Agora (como sempre), a subtração do estado hidrostático de referência (5.44) produz

$$\wp_r \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \approx \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r v_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}.$$

Há dois termos viscosos, e suas ordens de magnitude podem ser comparadas da seguinte forma: primeiro, note que localmente os gradientes de velocidade são comensuráveis com as microescalas de Kolmogorov. Devemos então ter (lembre-se de (5.65))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \sim \wp_0 v_u \frac{1}{\eta_u} \left( \epsilon \frac{\check{u}}{\eta_u} \right), \quad (6.2)$$

$$2\wp_r v \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \sim \wp_0 v_u \frac{\check{u}^2}{\eta_u}, \quad (6.3)$$

onde  $\epsilon \ll 1$ . Podemos, portanto, desprezar o termo envolvendo  $\lambda$ .

Pelo mesmo argumento ou, o que dá no mesmo, utilizando 6.1,

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial (U_i U_k)}{\partial x_k}.$$

A equação local para quantidade de movimento fica, finalmente,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_k)}{\partial x_k} = \frac{\wp'}{\wp_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l U_k - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + 2v_{(i)} \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.4)$$

A mudança para  $v_{(i)}$  será explicada na sequência.

### Generalização para escalares.

Interessantemente, a equação (6.4) também representa o transporte de diversos escalares, desde que se adote uma convenção um pouco mais geral. Essa convenção é sugerida por Kader e Yaglom (1989), e também é adotada por Dias (1994). Lembrando da convenção alternativa clássica que usa  $(U, V, W)$  para o vetor velocidade, e  $(x, y, z)$  para o vetor posição, ela consiste em fazer

$$U_1 = U, \quad x_1 = x, \quad (6.5)$$

$$U_2 = V, \quad x_2 = y, \quad (6.6)$$

$$U_3 = W, \quad x_3 = z, \quad (6.7)$$

$$U_4 = C, \quad x_4 = 0, \quad (6.8)$$

$$v_{(1)} = v_{(2)} = v_{(3)} = v_u, \quad (6.9)$$

$$v_{(4)} = v_c. \quad (6.10)$$

Dessa forma, além de representar as 3 equações para a quantidade de movimento, (6.4) também representa o transporte de um escalar regido pela equação da advecção-difusão (o que inclui a temperatura termodinâmica para a água, e a temperatura potencial para o ar), com difusividade molecular  $v_c$ . De fato, fazendo  $i = 4$  em (6.4), e interpretando a convenção da maneira óbvia com  $g_4 = 0$ ,  $\epsilon_{4lk} = 0$  e  $\partial P' / \partial x_4 = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial(U_4 U_k)}{\partial x_k} &= \frac{\wp'}{\wp_r} g_4 - 2\epsilon_{4lk} \omega_l U_k - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial P'}{\partial x_4} + 2v_{(4)} \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial(U_4 U_k)}{\partial x_k} &= 2v_{(4)} \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial(U_4 U_k)}{\partial x_k} &= 2v_{(4)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_4}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_4} \right), \\ \frac{\partial U_4}{\partial t} + \frac{\partial(U_4 U_k)}{\partial x_k} &= v_{(4)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial U_4}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(C U_k)}{\partial x_k} &= v_c \frac{\partial^2 C}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned}$$

que é a equação de transporte para o escalar cuja concentração é  $C$ . Portanto, nós também podemos utilizar (6.4) para o transporte de escalares, o que nos proporciona uma considerável economia. Na próxima seção, deve-se ter a notação definida em (6.5)–(6.10) em mente.

## 6.2 – As equações para as flutuações e para as covariâncias $\langle u_i u_j \rangle$

Desejamos agora obter diretamente as equações para as flutuações turbulentas  $u_i$ . Começamos pela equação da continuidade, na forma

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (6.11)$$

Substituindo a decomposição de Reynolds na equação (6.4), nós obtemos

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] =$$

$$\frac{\langle \wp' \rangle + \rho}{\wp_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l [\langle U \rangle_k + u_k] - \frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.12)$$

Note que a *média* de (6.12) destrói todos os termos que dependem linearmente de uma flutuação. O único “problema” é com os termos não-lineares:

$$\langle [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] \rangle = \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle, \quad (6.13)$$

donde se deduz novamente as equações para as médias,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = \frac{\langle \wp' \rangle}{\wp_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle U_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \nu_{(i)} \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (6.14)$$

O único termo “novo” é o fluxo cinemático turbulento  $\langle u_i u_k \rangle$ . Subtraindo (6.14) de (6.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i \langle U_k \rangle + \langle U_i \rangle u_k + u_i u_k - \langle u_i u_k \rangle] = \\ \frac{\rho}{\wp_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_k - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

que é a equação resultante dos princípios de conservação de quantidade de movimento e massa de um escalar para as flutuações. Sua pré-multiplicação por  $u_j$  resulta em

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle u_k \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ \frac{u_j \rho}{\wp_r} g_i - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_j u_k - \frac{1}{\wp_r} u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} u_j \frac{\partial^2 s_{ik}}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

É óbvio que uma equação igual a (6.16) vale se trocarmos os índices. Para registro, ela é:

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \langle u_k \rangle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ \frac{u_i \rho}{\wp_r} g_j - 2\epsilon_{jlk} \omega_l u_i u_k - \frac{1}{\wp_r} u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + 2\nu_{(j)} u_i \frac{\partial^2 s_{jk}}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

Essas duas equações irmãs, (6.16)–(6.17), devem ser combinadas agora. Note que

$$\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial t} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u_i u_j u_k)}{\partial x_k} &= u_j \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ &= u_j \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_i u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ &= u_j \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial (u_j u_k)}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial (u_j p)}{\partial x_i} = u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_j p)}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_j} &= u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \\ u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \frac{\partial(u_j p)}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_j} - p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

O trabalho com o termo viscoso é um pouco mais sofisticado; note que

$$v_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j s_{ik}) = v_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + v_{(i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik}; \quad (6.21)$$

por simetria,

$$v_{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i s_{jk}) = v_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} + v_{(j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk}. \quad (6.22)$$

Somando-se as duas, obtém-se o resultado importante:

$$v_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + v_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_{(i)} u_j s_{ik} + v_{(j)} u_i s_{jk}) - \left[ v_{(i)} s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + v_{(j)} s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \quad (6.23)$$

Somando-se (6.16) e (6.17), e utilizando-se os resultados intermediários (6.18)–(6.23), obtém-se finalmente a equação para os momentos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}}_{II} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k}}_{III} + \underbrace{\langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{IV} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k}}_V = \\ - \underbrace{\frac{g}{\varphi_r} (\delta_{i3} \langle u_j \rho \rangle + \delta_{j3} \langle u_i \rho \rangle)}_{VI} - \underbrace{2\omega_l [\epsilon_{ilk} \langle u_j u_k \rangle + \epsilon_{jlk} \langle u_i u_k \rangle]}_{VII} \\ - \underbrace{\frac{1}{\varphi_r} \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_j p \rangle \delta_{ik} + \langle u_i p \rangle \delta_{jk}]}_{VIII} + \underbrace{\left\langle \frac{p}{\varphi_r} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle}_{IX} + \\ \underbrace{2 \frac{\partial}{\partial x_k} (v_{(i)} \langle u_j s_{ik} \rangle + v_{(j)} \langle u_i s_{jk} \rangle)}_X - \underbrace{2 \left[ v_{(i)} \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + v_{(j)} \left\langle s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]}_{XI}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

A denominação de cada um dos termos é a seguinte:

- I. é a derivada local de  $\langle u_i u_j \rangle$ ;
- II. é a derivada advectiva de  $\langle u_i u_j \rangle$ ;
- III. é (menos) um dos termos de produção por gradiente;
- IV. é (menos) um dos termos de produção por gradiente;
- V. é (menos) o transporte turbulento de  $\langle u_i u_j \rangle$ ;
- VI. é a produção/destruições pelo fluxo de flutuabilidade,  $\langle u_3 \rho \rangle$  (note a presença de  $\delta_{i3}$  e de  $\delta_{j3}$ );
- VII. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial;

VIII. é o termo de transporte de pressão;

IX. é o termo de desvio, ou termo de retorno à isotropia;

X. é o termo de transporte molecular difusivo de  $\langle u_i u_j \rangle$ ;

XI. é a dissipação molecular de  $\langle u_i u_j \rangle$ .

### 6.3 – Energia cinética da turbulência

Fazendo  $i = j$  em (6.24), e impedindo a soma em  $i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_{(i)} u_{(i)} \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_{(i)} u_{(i)} \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_{(i)} u_k \rangle \frac{\partial \langle U_{(i)} \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_{(i)} u_{(i)} u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \frac{2g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_{(i)} u_k \rangle - \frac{2}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_{(i)} p \rangle}{\partial x_i} \right] + 2 \left\langle \frac{p}{\wp_r} \left( \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ + 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( 2 \langle u_{(i)} s_{ik} \rangle \right) - 2\nu_{(i)} \left[ 2 \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Dividindo por 2, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_{(i)} u_{(i)}}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_{(i)} u_{(i)}}{2} \right\rangle + \langle u_{(i)} u_k \rangle \frac{\partial \langle u_{(i)} \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_{(i)} u_{(i)} u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \frac{g}{\wp_r} \delta_{i3} \langle u_{(i)} \rho \rangle - \epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_{(i)} u_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_{(i)} p \rangle}{\partial x_i} \right] + \left\langle \frac{p}{\wp_r} \left( \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ + 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \langle u_{(i)} s_{ik} \rangle \right) - 2\nu_{(i)} \left[ \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \quad (6.25) \end{aligned}$$

A equação (6.25) representa 4 equações distintas, para  $i = 1, 2, 3$  e 4. As 3 primeiras são as equações para as semivariâncias  $\langle u_1 u_1 \rangle / 2$ ,  $\langle u_2 u_2 \rangle / 2$  e  $\langle u_3 u_3 \rangle / 2$ . A quarta é a equação para a semivariância de um escalar,  $\langle cc \rangle / 2$ .

Somando as 3 primeiras ( $i = 1, 2, 3$ ) e utilizando (3.71) para o último termo acima, obtém-se a equação para a energia cinética da turbulência, que foi definida em (3.97):

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial t}}_I + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial x_k}}_{II} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{III} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k}}_{IV} = \\ - \underbrace{\frac{g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle}_V - \underbrace{\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle}_{VI} - \underbrace{\frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right]}_{VII} \\ + \underbrace{2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle u_i s_{ik} \rangle}{\partial x_k}}_{VIII} - \underbrace{2\nu_{(i)} \langle s_{ik} s_{ik} \rangle}_{IX}. \quad (6.26) \end{aligned}$$

Em (6.26,

- I. é a derivada local de  $\langle E_{ct} \rangle$ ;
- II. é a derivada advectiva de  $\langle E_{ct} \rangle$ ;
- III. é (menos) o termo de produção por gradiente;
- IV. é (menos) o transporte turbulento de ECT;
- V. é a produção pelo fluxo de flutuabilidade,  $\langle u_3 \rho \rangle$ ;
- VI. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial;
- VII. é o termo de pressão;
- VIII. é o termo de transporte difusivo de  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ ;
- IX. é a dissipação molecular da energia cinética da turbulência,  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ .

Observe que, com a soma, um dos termos de (6.25) desaparece, a saber:

$$\sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{p}{\varphi_r} \left( \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{p}{\varphi_r} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right\rangle = 0.$$

Os termos acima são termos de redistribuição de energia cinética entre as componentes 1, 2 e 3. Eles são negativos nas direções ao longo das quais energia cinética é produzida (com maior intensidade), e positivos nas demais, e somam zero. Dessa forma, seu efeito é o de *redistribuir* a energia cinética entre as 3 direções, no sentido de equalizá-la (ou seja: de isotropizar a turbulência).

(6.26) é a equação que antecede (1-111) de [Hinze \(1975\)](#) (p. 74). De (3.103), nós reconhecemos que, para um escoamento incompressível nas flutuações ( $\partial u_k / \partial x_k = 0$ ), o último termo de (6.26) é  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ . Além disso, também utilizando incompressibilidade, o termo VIII de (6.26) é

$$\begin{aligned} 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle u_i s_{ik} \rangle}{\partial x_k} &= 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ &= \nu_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle \right] \\ &= \nu_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle \right] \\ &= \nu_{(i)} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} (u_i u_i) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle \right] \\ &= \nu_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \nu_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Da mesma forma, o termo IX de (6.26) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} 2\nu_{(i)} \langle s_{ik} s_{ik} \rangle &= 2\nu_{(i)} \left[ \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \right] \\ &= \frac{\nu_{(i)}}{2} \left[ \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle \right] \end{aligned}$$

$$= v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (6.28)$$

Subtraindo-se (6.28) de (6.27) e levando-se em (6.26), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle + \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] + v_{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left\langle \frac{u_i u_i}{2} \right\rangle - \underbrace{v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle}_{\approx \epsilon_e}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Em um certo sentido, (6.26) é mais “correta” do que (6.29) porque nela  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  aparece explicitamente, e exatamente. Agora, se a turbulência for homogênea, os dois penúltimos termos de (6.26) e de (6.29) são nulos, e o último termo de (6.29) para  $\epsilon_e$  torna-se exato. Em turbulência homogênea portanto, vale

$$\epsilon_e = v_{(i)} \left\langle \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = v_{(i)} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (6.30)$$

A equação (6.30) é uma entre várias relações similares que podem ser obtidas em turbulência homogênea e incompressível. Sua dedução pode ser feita diretamente a partir das hipóteses de homogeneidade e incompressibilidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.31)$$

Resultados um pouco mais gerais também se aplicam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.32)$$

Finalmente, usando (6.32),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned} \quad (6.33)$$



### 6.3.1 – A semivariância de um escalar

No caso  $i = 4$ , (6.25) torna-se a equação para a semivariância de um escalar, e lê-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_4 u_4}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_4 u_4}{2} \right\rangle + \langle u_4 u_k \rangle \frac{\partial \langle U_4 \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_4 u_4 u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \frac{g}{\wp_r} \delta_{43} \langle u_4 \rho \rangle - \epsilon_{4lk} \omega_l \langle u_4 u_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_4 p \rangle}{\partial x_4} \right] + \left\langle \frac{p}{\wp_r} \left( \frac{\partial u_4}{\partial x_4} \right) \right\rangle \\ + 2\nu_4 \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_4 s_{4k} \rangle) - 2\nu_4 \left[ \left\langle s_{4k} \frac{\partial u_4}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

As simplificações com  $i = 4$  agora levam a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{u_4 u_4}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{u_4 u_4}{2} \right\rangle + \langle u_4 u_k \rangle \frac{\partial \langle U_4 \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_4 u_4 u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ 2\nu_4 \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_4 s_{4k} \rangle) - 2\nu_4 \left[ \left\langle s_{4k} \frac{\partial u_4}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Os termos envolvendo  $s_{4k}$  ainda podem ser simplificados:

$$s_{4k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_4}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_4} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_4}{\partial x_k}.$$

Finalmente, com  $u_4 = c$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{cc}{2} \right\rangle + \langle U_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{cc}{2} \right\rangle + \langle cu_k \rangle \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle ccu_k \rangle}{\partial x_k} = \\ \nu_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \left\langle c \frac{\partial c}{\partial x_k} \right\rangle \right) - \nu_c \left\langle \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial c}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (6.34) \end{aligned}$$

Para um escalar, portanto, (6.25) é idêntica a (6.34) acima, e não há a diferença notada (para a energia cinética da turbulenta) entre (6.26) e (6.29). Em particular, a taxa de dissipação da semivariância do escalar é, simplesmente,

$$\mathcal{E}_{cc} = \nu_c \left\langle \frac{\partial c}{\partial x_k} \frac{\partial c}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (6.35)$$

## 6.4 – As ordens de grandeza dos termos das equações de ordem 2

A escala integral  $\mathcal{T}$  de um processo estocástico  $u(t)$  estacionário com média zero é definida por meio da integral da função de autocorrelação:

$$\mathcal{T} R_{uu}(0) = \mathcal{T} \langle u^2(t) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\tau) d\tau. \quad (6.36)$$

No caso de turbulência tridimensional, a rigor existiriam diversas “escalas” integrais para as diferentes funções de correlação  $R_{ij}$ ,  $R_{ijk}$ , etc. Por simplicidade, vamos definir uma escala integral de *comprimento*  $\mathcal{L}$  supondo (provisoriamente) que a turbulência seja homogênea, e escolhendo as flutuações  $u_1$  na direção  $x_1$ :

$$\langle u_1 u_1 \rangle \ell \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(x_1) dx_1. \quad (6.37)$$

Existem diversas formas de se escolher uma escala de velocidade  $u$  (por exemplo, a *velocidade de atrito* é sempre uma candidata); para os nossos propósitos (e também porque em turbulência isotrópica esta é uma variável particularmente frequente) provavelmente basta usar o desvio-padrão:

$$\tilde{u} \equiv \sqrt{\langle u_1 u_1 \rangle}. \quad (6.38)$$

Uma escala de tempo agora se segue naturalmente,

$$t \equiv \ell / \tilde{u}. \quad (6.39)$$

Em geral os textos e artigos científicos mencionam as “escalas integrais”, sem serem precisos nem atentarem ao fato de que em processos estocásticos multidimensionais existem muitas possíveis escalas integrais, e ainda que quando a turbulência for não-homogênea a definição clássica baseada na função de autocorrelação é simplesmente inaplicável, já que neste tipo de turbulência a função de autocorrelação simplesmente *não existe*.

Prosseguindo, define-se a microescala de Taylor  $\lambda$  por

$$\left. \frac{\partial^2 R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1 \partial x_1} \right|_{x_1=0} \equiv -2 \frac{\langle u_1 u_1 \rangle}{\lambda^2}. \quad (6.40)$$

**Teorema 1** *Em turbulência homogênea,*

$$\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{\langle u_1 u_1 \rangle}{\lambda^2}. \quad (6.41)$$

Prova:

$$\begin{aligned} R_{1,1}(x_1, 0, 0) &= \langle u_1(0, 0, 0) u_1(x_1, 0, 0) \rangle, \\ \frac{\partial R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1} &= \left\langle u_1(0, 0, 0) \frac{\partial u_1(x_1, 0, 0)}{\partial x_1} \right\rangle, \\ \frac{\partial^2 R_{1,1}(x_1, 0, 0)}{\partial x_1^2} &= \left\langle u_1(0, 0, 0) \frac{\partial^2 u_1(x_1, 0, 0)}{\partial x_1 \partial x_1} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Mas em turbulência homogênea, vale (??), na forma

$$\left\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = 0; \quad (6.43)$$

derivando novamente esta última expressão,

$$\left\langle u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\rangle = 0, \quad (6.44)$$

donde se segue (6.41).

Vamos agora estudar as ordens de grandeza dos termos de (6.24). Nós começamos por admitir que, em geral,

$$\mathcal{O}(\langle u_i u_j \rangle) = u^2. \quad (6.45)$$

Os termos *I* e *II* têm que ter (*no máximo*) a mesma ordem de grandeza dos demais, já que juntos eles formam uma “derivada material” seguindo o escoamento médio,

$$\frac{\overline{D}\langle u_i u_j \rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}. \quad (6.46)$$

Note que (6.46) pode ser interpretada como a derivada material seguindo o escoamento *médio*, já que é formada com  $\langle U_k \rangle$ , e não com  $U_k$ . A barra sobre o  $D$  serve para explicitar a diferença.

Vamos também supor que as escalas integrais (ou, como dizem os russos, *externas*) são impostas fisicamente ao escoamento, e por conseguinte estão relacionadas com os gradientes de velocidade média:

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} \sim \frac{u}{\mathcal{L}}. \quad (6.47)$$

Neste caso,

$$\mathcal{O}(\text{III}, \text{IV}, \text{V}) \sim \frac{u^3}{\mathcal{L}} \quad (6.48)$$

*no máximo*, porque na verdade não temos muita idéia sobre o comportamento das correlações triplas. Continuando,

$$\mathcal{O}(\text{VI}) \sim \frac{gu\rho}{\wp_r}, \quad (6.49)$$

onde  $\rho$  é a escala externa das flutuações de densidade. Isto na verdade define uma *nova* escala de comprimento,

$$gu \frac{\rho}{\wp_r} \equiv \frac{u^3}{\mathcal{L}_\rho} \Rightarrow \mathcal{L}_\rho = \frac{g\rho}{u^2 \wp_r}, \quad (6.50)$$

o que nos deixa a um passo do comprimento de estabilidade de Obukhov.

A ordem de grandeza das covariâncias com a pressão vem a seguir. É razoável supor que

$$p \sim \wp_r u^2, \quad (6.51)$$

mas ainda é necessário estimar o *nível de correlação* entre  $p$ ,  $u_i$  e  $\partial u_i / \partial x_k$ . Note que, se  $u_i$  e  $\partial u_i / \partial x_k$  fossem bem correlacionados, então  $\langle u_i \partial u_i / \partial x_k \rangle \sim u^2 / \lambda$  em virtude de (6.41); no entanto, seguindo a linha de raciocínio de Tennekes e Lumley (1972, p. 70):

$$\left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_i \rangle \sim \frac{u^2}{\mathcal{L}} \ll \frac{u^2}{\lambda}. \quad (6.52)$$

O motivo para esta discrepância é que  $u_i$  e  $\partial u_i / \partial x_k$  não estão distribuídos na mesma faixa de números de onda. De fato, se pensarmos nos espectros respectivos,

$$\Phi \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \sim k^2 \Phi_{i,i}, \quad (6.53)$$

ou seja, as faixas de números de onda das derivadas é bem mais alta. Daqui somos capazes de deduzir que o nível de correlação entre  $u_i$  e suas derivadas espaciais é

$$r_{u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \sim \frac{\lambda}{\mathcal{L}}. \quad (6.54)$$

Note que o coeficiente de correlação é *identicamente nulo* em turbulência homogênea. A ordem de grandeza dos termos envolvendo a aceleração de Coriolis é:

$$\mathcal{O}(\text{VII}) \sim 2\omega u^2. \quad (6.55)$$

Note que se os termos dominantes da equação de momentos de ordem 2 são de ordem  $u^3/\mathcal{L}$ , o *número de Rossby turbulento* é

$$Ro = \frac{\omega u^2}{u^3/\mathcal{L}} = \frac{\omega \mathcal{L}}{u} \sim 0,007 \ll 1, \quad (6.56)$$

donde se conclui que a influência destes termos na turbulência propriamente dita é desprezível.

Da mesma forma que no caso de  $\langle u_i \partial u_i / \partial x_k \rangle$ , VIII é nulo em turbulência homogênea; alguns autores (Stull, por exemplo) sugerem que VIII é desprezível na camada-limite atmosférica. Neste ponto, parece razoável partir da idéia de que se um termo é nulo em turbulência homogênea, ele deve ser relativamente pequeno em turbulência não-homogênea real. É claro que isto não resolve a questão do nível de correlação entre flutuações de pressão e as derivadas das flutuações de velocidade. Talvez o melhor que se possa fazer a esta altura (alguma contribuição para os modelos de fechamento dos termos de pressão?) seja mencionar que um modelo clássico de fechamento é (Hinze, 1975)

$$\left\langle \frac{p}{\rho_r} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \frac{c \sqrt{\langle u_k u_k \rangle}}{\mathcal{L}} \left( \langle u_i u_j \rangle - \frac{1}{6} \delta_{ij} \langle u_k u_k \rangle \right) \sim \frac{u^3}{\mathcal{L}}. \quad (6.57)$$

Isto significa que os termos de correlação de pressão são *importantes*, da mesma ordem que os termos de produção e (possivelmente) de correlação tripla.

Continuamos a análise de ordens de grandeza, atacando agora os termos que envolvem viscosidade. Ao olhar para X, vemos imediatamente um termo que é identicamente nulo em turbulência homogênea; é de se esperar portanto que sua importância em geral seja pequena; nossa estimativa é

$$\mathcal{O}(\text{X}) = \frac{1}{\mathcal{L}} \left( \nu \frac{u^2}{\mathcal{L}} \right) = \frac{\nu u^2}{\mathcal{L}^2}, \quad (6.58)$$

enquanto que

$$\mathcal{O}(\text{XI}) = \nu \left( \frac{u}{\lambda} \right)^2 \gg \frac{\nu u^2}{\mathcal{L}^2} \quad \text{se } i = j! \quad (6.59)$$

Esta rápida análise mostra que o termo difusivo X é muito menor que o termo dissipativo XI. Neste ponto, é interessante definir uma taxa de dissipação de covariância,

$$2\epsilon_{ij} \approx (\nu_{(i)} + \nu_{(j)}) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle \approx \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon_e. \quad (6.60)$$

Segundo Wyngaard (1981), a 2ª equação é estritamente válida se a turbulência for isotrópica. Ver também Hinze (1975, p. 189).

## 6.5 – Considerações adicionais sobre modelos de fechamento

[Speziale \(1991\)](#) define um tensor que pode ser importante para nós: o *tensor de anisotropia*,

$$b_{ij} \equiv \frac{1}{2\langle e_c \rangle} \left[ \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \langle e_c \rangle \delta_{ij} \right]. \quad (6.61)$$

Observe que, em turbulência isotrópica,

$$\langle u_i u_j \rangle = \frac{2}{3} \langle e_c \rangle \delta_{ij};$$

então,

$$\langle u_{(i)} u_{(i)} \rangle = \frac{2}{3} \langle e_c \rangle.$$

Consequentemente, em turbulência isotrópica,  $b_{ij} \equiv 0$ .

# 7

## Soluções laminares das equações de Navier-Stokes

---

A maioria das camadas-limite encontradas em escoamentos industriais ou naturais é turbulenta. Além disso, é nessas camadas-limite que ocorrem os *fluxos* mais intensos de quantidade de movimento, calor e massa. Por exemplo, e para citar o mais óbvio, a assim chamada “perda de carga” em tubos e canais está ligada diretamente ao atrito entre paredes e escoamento, e à dissipação de energia cinética da turbulência em calor que lhe está associada. Para os engenheiros ao fim do século XIX e início do XX, este era um problema de grande importância, pois dele dependiam critérios de projeto de tubulações industriais e canais. Os primeiros resultados de engenharia foram obtidos de forma “empírica” (um físico diria: “fenomenológica”) e antecederam os resultados mais fundamentais de Mecânica dos Fluidos e Teoria de Turbulência. Frequentemente, usamos a palavra “Hidráulica” para caracterizar essa abordagem, que produziu, entre outras, fórmulas empíricas tais como a de Hazen-Williams e a de Manning. Entretanto, também desde o século XIX já se conhecia o suficiente da física de fluidos para saber que, em princípio, qualquer escoamento pode ser obtido como uma solução das equações de Navier-Stokes. Blasius obteve a primeira solução das equações de Navier-Stokes de interesse real em engenharia. Nosso objetivo neste capítulo será procurar entender da forma mais fundamental possível o comportamento das camadas-limite turbulentas.

### 7.1 – Algumas soluções laminares

O escoamento em um duto com seção retangular de largura infinita em  $y$  e de espessura  $h = 2\delta$  em  $z$ , em regime laminar sob a ação de um gradiente de pressão, é regido pelas equações de Navier-Stokes em duas dimensões,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (7.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right), \quad (7.2)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right). \quad (7.3)$$

As condições de contorno são

$$U(0) = 0, \quad (7.4)$$

$$W(0) = 0, \quad (7.5)$$

$$W(2\delta) = 0, \quad (7.6)$$

$$W(2\delta) = 0. \quad (7.7)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção  $x$ ,  $\partial(\cdot)/\partial x = 0$  (exceto, é claro, para a pressão) e a solução de (7.1) é  $W(z) = 0$ . Este resultado por sua vez anula todos os termos envolvendo  $W$  em (7.3), cuja solução então será simplesmente uma distribuição hidrostática em  $z$ :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow P(x, z) = -\rho g z + P_0(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}. \quad (7.8)$$

Observe que  $P_0(x)$  é, por definição, a pressão na parede em  $z = 0$ .

Em (7.2), as condições de escoamento plenamente desenvolvido em  $x$  e velocidade vertical nula anulam os termos não lineares, e usando-se (7.8) obtém-se

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP_0}{dx} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = gJ, \quad (7.9)$$

onde a constante  $gJ$  deve-se ao fato de que o lado esquerdo de (7.9) é (no máximo) função somente de  $x$ , e o lado esquerdo de  $z$ .  $J$  é a perda de carga unitária, constante em  $x$ . A introdução da aceleração da gravidade na definição da constante em (7.9) objetiva tornar  $J$  adimensional. Obtém-se portanto os resultados

$$\frac{dP_0}{dx} = -\rho g J \quad (7.10)$$

e (aplicando-se as condições de contorno para  $u$ )

$$U(z) = \frac{gJ}{2\nu} z (2\delta - z). \quad (7.11)$$

Essa última equação é o bem conhecido perfil parabólico de velocidade em um escoamento de Hagen-Poiseuille; sua integração produz a velocidade média na seção do duto:

$$\bar{U} = \frac{gJ\delta^2}{3\nu}, \quad (7.12)$$

a qual pode ser reescrita em termos de um fator de atrito  $f$ :

$$J = \frac{f}{\delta} \frac{\bar{U}^2}{2g} \quad (7.13)$$

onde

$$f = \frac{6\nu}{\bar{U}\delta} = \frac{6}{\text{Re}} \quad (7.14)$$

é o fator de atrito que depende, em um escoamento laminar, do número de Reynolds aqui definido em termos da semi-espessura  $\delta$ :

$$\text{Re} = \frac{\bar{U}\delta}{\nu}. \quad (7.15)$$

O fator numérico em (7.14) depende, naturalmente, das definições de  $f$  em (7.13) e de  $\text{Re}$  em (7.15)\*. Todo o desenvolvimento acima é clássico e muito bem conhecido. O

---

\*É interessante notar que (7.14) tem um coeficiente numérico dez vezes menor que o da fórmula similar para o fator de atrito de Darcy em tubos de seção circular,  $f_D = 64/\text{Re}_D$ , onde o número de Reynolds neste caso é  $\text{Re}_D = UD/\nu$ , e  $D$  é o diâmetro do tubo.

Figura 7.1: Escoamento laminar sobre uma placa porosa

ponto importante aqui é que vamos utilizar um desenvolvimento totalmente análogo para escoamentos turbulentos, recuperando diversos resultados obtidos para escoamento laminar, inclusive a constância do gradiente de pressão. A obtenção do perfil de velocidade em função da perda de carga unitária em (7.11) é claramente o passo fundamental, que precisará ser repetido, ainda que com mais dificuldade, em escoamentos turbulentos.

Considere agora um escoamento bi-dimensional sobre uma placa porosa, com velocidade  $U_\infty$  horizontal longe da placa, e um campo de velocidade vertical uniforme  $-W_0$  (figura 7.1). As equações governantes (para um fluido com densidade constante) são novamente (7.1)–(7.3). As condições de contorno são

$$u(0) = 0, \quad (7.16)$$

$$u(\infty) = U_\infty, \quad (7.17)$$

$$w(0) = -W_0. \quad (7.18)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido na direção  $x$ ,  $\partial(\cdot)/\partial x = 0$ , e a solução de (7.1) é  $W(z) = -W_0$ . A solução de (7.3) é simplesmente uma distribuição hidrostática de pressão na vertical, e finalmente (7.2) conduz à equação diferencial ordinária

$$\nu \frac{d^2 U}{dz^2} + W_0 \frac{du}{dz} = 0, \quad (7.19)$$

cujas soluções para as condições de contorno em  $U$  é

$$U(z) = U_\infty \left(1 - e^{-\frac{W_0 z}{\nu}}\right). \quad (7.20)$$

Observe que (7.20) é uma solução *laminar*, e em princípio sem utilidade para a solução de problemas reais turbulentos. Ela tem, entretanto, a característica interessante de depender do “número de Reynolds”

$$\text{Re}_z = \frac{W_0 z}{\nu}; \quad (7.21)$$

quanto maior  $\text{Re}_z$ , mais “reto” fica o perfil — em outras palavras, mais delgada se torna a camada-limite viscosa próximo da parede. Este é exatamente o tipo de comportamento que ocorre em escoamentos turbulentos reais. Em retrospecto, o responsável pelo “achatamento” do perfil de velocidade  $u(z)$  é o fluxo advectivo de quantidade de movimento  $-U(z)W_0$ . Em escoamentos turbulentos, a grandeza equivalente será o fluxo turbulento de quantidade de movimento (ou tensão de Reynolds)  $-\langle uw \rangle$ .

## 7.2 – A Solução de Blasius

Considere a figura 7.2.

Desejamos resolver o sistema de equações

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_I + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}}_{II} = 0, \quad (7.22)$$



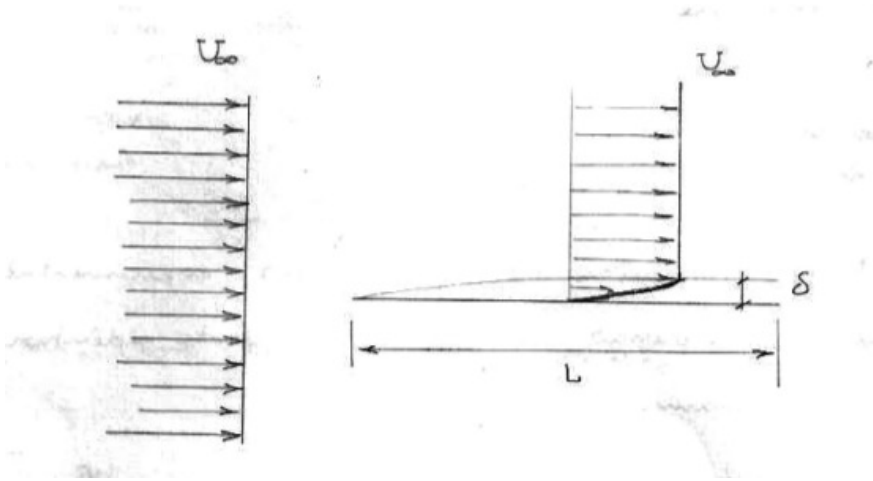


Figura 7.2: A camada-limite laminar

$$\underbrace{U \frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{III}} + \underbrace{V \frac{\partial U}{\partial y}}_{\text{IV}} = - \underbrace{\frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{V}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}_{\text{VI}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}_{\text{VII}}, \quad (7.23)$$

$$\underbrace{U \frac{\partial V}{\partial x}}_{\text{VIII}} + \underbrace{V \frac{\partial V}{\partial y}}_{\text{IX}} = - \underbrace{\frac{1}{\varphi} \frac{\partial P}{\partial y}}_{\text{X}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}_{\text{XI}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\text{XII}} \quad (7.24)$$

1ª Observação: uma análise linear, que não é necessariamente fácil, deve indicar que, devido à presença da derivada segunda em relação a  $y$ ,  $\partial^2 \cdot / \partial y^2$ , este é um sistema elítico, que requer condições de contorno na extremidade direita da placa. Isso é, em um certo sentido, não-natural. O primeiro passo, portanto, é modificar as equações, por meio de uma análise da ordem de grandeza dos termos. A observação fundamental, de natureza experimental, é que a espessura da camada-limite é muito em comparação com as distâncias em  $x$ :

$$\frac{\delta}{L} \ll 1. \quad (7.25)$$

Da equação da continuidade, temos

$$\frac{U_\infty}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \Rightarrow v \sim \frac{\delta}{L} U_\infty. \quad (7.26)$$

Seguem-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\text{I} \sim U_\infty/L, \quad (7.27)$$

$$\text{II} \sim \frac{U_\infty \delta}{L}, \quad (7.28)$$

$$\text{III} \sim U_\infty^2/L, \quad (7.29)$$

$$\text{IV} \sim U_\infty \frac{\delta U_\infty/L}{\delta} = U_\infty^2/L \quad (7.30)$$

Com a hipótese adicional

$$P \sim \varphi U_\infty^2,$$

nós prosseguimos nas estimativas de ordens de grandeza:

$$V \sim U_\infty^2/L, \quad (7.31)$$

$$VI \sim \nu \frac{U_\infty}{L^2} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.32)$$

$$VII \sim \frac{\nu U_\infty}{\delta^2}. \quad (7.33)$$

Claramente, VI é muito menor que todos os demais termos em (7.23). Observe entretanto que VII possui uma escala à primeira vista “independente” das demais. Na região de interesse, entretanto, próximo da parede, VII é o único termo que ressa que inclui os efeitos viscosos. Para que estes efeitos sejam da mesma ordem que a aceleração convectiva dada por III, e IV,

$$\frac{\nu U_\infty}{\delta^2} \sim \frac{U_\infty^2}{L} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}. \quad (7.34)$$

É conveniente observar que

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}}. \quad (7.35)$$

Finalmente, devemos explorar “até o fim” a última equação, de balanço de quantidade de movimento em  $y$  (utilizando em todos os casos (7.34)):

$$VIII \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.36)$$

$$IX \sim \frac{\delta}{L} U_\infty^2/L = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L, \quad (7.37)$$

$$X \sim \frac{L}{\delta} U_\infty^2/L = \sqrt{\text{Re}_L} U_\infty^2/L, \quad (7.38)$$

$$XI \sim \frac{\nu}{L^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{\delta}{L} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\text{Re}_L^{3/2}} U_\infty^2/L, \quad (7.39)$$

$$XII \sim \frac{\nu}{\delta^2} \frac{\delta U_\infty}{L} = \frac{\nu U_\infty}{\delta L} = \frac{\nu}{U_\infty L} \frac{L}{\delta} \frac{U_\infty^2}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} U_\infty^2/L. \quad (7.40)$$

Estes resultados mostram que, em primeira aproximação, nós podemos re-escrever o sistema (7.22)–(7.24) como

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (7.41)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (7.42)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (7.43)$$

Vários pontos são dignos de nota aqui. Em primeiro lugar, nós observamos que (7.43) significa que o gradiente de pressão  $\partial P/\partial x$  observado no escoamento *longe* da placa é “imposto” pelo escoamento sobre a mesma. Em outras palavras, é possível

Figura 7.3: Volume de controle para a definição da espessura de quantidade de movimento  $\theta^*$ .

substituir  $\partial P/\partial x$ , em (7.42), por  $\partial P_\infty/\partial x$ , sendo que este último é a solução do problema invíscido longe da parede.

Em segundo lugar, existe um estranho problema de 2ª ordem (uma perturbação?)

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}. \quad (7.44)$$

Se essa equação é ou não identicamente atendida pela solução de Blasius, que virá a seguir, é motivo de investigação futura.

### 7.2.1 – Espessura de deslocamento

Dada uma distância  $h$  da parede, pode-se definir uma escala de comprimento  $\delta_h^*$  via

$$\begin{aligned} Q_h &= \int_0^h U(y) dy \equiv \int_{\delta_h^*}^h U_\infty dy, \\ &= U_\infty(h - \delta_h^*) \Rightarrow \\ U_\infty \delta_h^* &= \int_0^h (U_\infty - U(y)) dy; \\ \delta_h^* &= \int_0^h \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty}\right) dy. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Note que  $h$  foi necessário, como um “andaime” para construir o resultado (7.45); agora, entretanto, podemos passar ao limite, e definir

$$\delta^* \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty}\right) dy. \quad (7.46)$$

Para definir a espessura de quantidade de movimento  $\theta^*$ , nós precisamos de um volume de controle adequado; tal volume é mostrado na figura 7.3.

A equação de balanço de massa é

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{V}} \varphi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &= \int_1 \varphi(-U_\infty) dy + \int_2 \varphi U(L, y) dy + \int_3 \varphi V(x, h) dx \Rightarrow \\ \dot{M} &= \int_3 \varphi V(x, h) dx = \int_1 \varphi(U_\infty) dy - \int_2 \varphi U(L, y) dy; \\ \varphi \delta_h^* U_\infty &\equiv \dot{M} = \int_0^h \varphi(U_\infty - U(y)) dy. \end{aligned}$$

Disso resulta a mesma expressão já obtida para  $\delta_h^*$ ,

$$\delta_h^* = \int_0^h \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty}\right) dy. \quad (7.47)$$

O balanço de quantidade de movimento é

$$\begin{aligned}
 -D &= \int_{\mathcal{S}} U \wp(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) \, dS \\
 &= \int_1 U_{\infty} \wp(-U_{\infty}) \, dy + \int_2 \wp[U(L, y)]^2 \, dy + \int_3 U_{\infty} \wp V(x, h) \, dx \\
 &= \int_1 U_{\infty} \wp(-U_{\infty}) \, dy + \int_2 \wp[U(L, y)]^2 \, dy + U_{\infty} \int_3 \wp V(x, h) \, dx \\
 &= \int_1 U_{\infty} \wp(-U_{\infty}) \, dy + \int_2 \wp[U(L, y)]^2 \, dy + U_{\infty} \dot{M} \\
 &= \int_1 U_{\infty} \wp(-U_{\infty}) \, dy + \int_2 \wp[U(L, y)]^2 \, dy + U_{\infty} \int_0^h \wp(U_{\infty} - U(L, y)) \, dy \\
 &= \int_0^h \wp[U(L, y)]^2 \, dy - U_{\infty} \int_0^h \wp U(L, y) \, dy \Rightarrow \\
 D &= \int_0^h U(L, y) (U_{\infty} - U(L, y)) \wp \, dy.
 \end{aligned}$$

Defina agora a espessura de *momentum*:

$$D \equiv \wp U_{\infty}^2 \theta^*, \quad (7.48)$$

donde, fazendo  $h \rightarrow \infty$ :

$$\theta^* = \int_0^{\infty} \frac{U}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{U}{U_{\infty}}\right) \, dy. \quad (7.49)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^x \tau_0(\xi) \, d\xi \Rightarrow \\
 \tau_0 &= \frac{dD}{dx}, \\
 \tau_0 &= \wp U_{\infty}^2 \frac{d\theta^*}{dx}.
 \end{aligned} \quad (7.50)$$

### 7.2.2 – A solução de Blasius

Tente

$$\frac{U}{U_{\infty}} = g(\eta), \quad (7.51)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.52)$$

Procure uma solução em termos de uma função-corrente  $\Psi$ :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (7.53)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.54)$$

Segue-se que

$$\Psi = \int_0^y U \, dY \quad (7.55)$$

$$= \delta(x) \int_0^y U \, d\eta = U_\infty \delta(x) \int_0^\eta \frac{U}{U_\infty} \, dH \quad (7.56)$$

$$= U_\infty \delta(x) \int_0^\eta g(H) \, dH, \quad (7.57)$$

onde

$$g(\eta) = \frac{df}{d\eta}. \quad (7.58)$$

Note que a adoção de uma função-corrente faz com que a equação da continuidade (na sua forma incompressível) seja atendida automaticamente (*remember* Lorenz); portanto, restou a equação de momentum em  $x$ , na qual (lembremo-nos)

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.59)$$

A equação diferencial parcial em  $\Psi$  que precisamos resolver é, portanto,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (7.60)$$

Nossa proposta de adimensionalização para  $\Psi$  é

$$\Psi(x, y) = U_\infty \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (7.61)$$

Vamos tentar fazer com Maxima, mas por enquanto temos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right]; \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{U_\infty \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_\infty \frac{df}{d\eta}, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{U_\infty}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_\infty}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}. \quad (7.66)$$

Detalhadamente, para aprendermos a derivar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [U_\infty \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right] \\ &= U_\infty \left[ f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \right] \end{aligned}$$

mas

$$\frac{\partial \eta}{\partial \delta} = -\frac{y}{\delta^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U_{\infty} \left[ f \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{df}{d\eta} \frac{d\delta}{dx} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [U_{\infty} \delta(x) f(\eta)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ U_{\infty} \delta(x) f\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ U_{\infty} \delta \frac{df}{d\eta} \times \frac{1}{\delta} \right] \\ &= U_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{df}{d\eta} \right] \\ &= U_{\infty} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dx} \end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} &= -\frac{\eta}{\delta} \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= -\frac{U_{\infty} \eta}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\delta}{dx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [U_{\infty} \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_{\infty} \frac{df}{d\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} [U_{\infty} \delta(x) f(\eta)] \\ &= U_{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{df}{d\eta} \right] \\ &= U_{\infty} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{U_{\infty}}{\delta} \frac{d^2 f}{d\eta^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \frac{d^3 f}{d\eta^3}.$$

Substituindo-se todos os termos, encontra-se

$$\begin{aligned} U_{\infty} f' \left[ -\frac{U_{\infty} \eta f'''}{\delta} \right] - U_{\infty} [f - f' \eta] \frac{d\delta}{dx} \frac{U_{\infty} f''}{\delta} &= \nu \frac{U_{\infty} f'''}{\delta^2}, \\ \frac{U_{\infty}^2}{\delta} \frac{d\delta}{dx} [-\eta f' f'' - f f'' + \eta f' f''] &= \nu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} f''' \end{aligned}$$

$$-\frac{U_{\infty}\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} [ff''] = f'''.$$

Mas

$$\begin{aligned}\delta &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}, \\ \frac{d\delta}{dx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\nu x}{U_{\infty}} \right)^{-1/2} \frac{\nu}{U_{\infty}}, \\ \frac{U_{\infty}\delta}{\nu} \frac{d\delta}{dx} &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Então,

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0.$$

Agora com Maxima, para verificar:

```
load(pdifff)$
eq : U * (nu*x/U)^(1/2) * F(y/(nu*x/U)^(1/2))$
diff(eq,y) * diff(eq,x,1,y,1) - diff(eq,x)*diff(eq,y,2) - nu*diff(eq,y,3)$
ratsubst(w,y/sqrt((nu*x)/U),%)$
factor(%);
```

resulta em:

```
Maxima 5.22.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.7 (a.k.a. GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) batch(psiblasius.max)
```

```
read and interpret file: #p/home/nldias/work/posgraduacao/tx752-metmatengamb/psiblasius
```

```
(%i2) load(pdifff)
(%i3) eq : U (----) F(-----)
              U      nu x 1/2
                    (----)
                    U
(%i4) - nu diff(eq, y, 3) - diff(eq, x) diff(eq, y, 2)
              + diff(eq, y) diff(eq, x, 1, y, 1)
              y
(%i5) ratsubst(w, -----, %)
              nu x
              sqrt(----)
              U
(%i6) factor(%)
```

$$(\%06) \quad - \frac{(2 F(w) + F(w) F(w)) U^2}{2 x \text{psiblasius.max}}$$

Essa expressão significa

$$-\frac{2f''' + ff''}{2x}U_\infty^2,$$

que é a mesma equação que nós obtivemos “na mão”. Novamente, nós fomos capazes de reduzir um problema em equações diferenciais parciais a um problema em equações diferenciais ordinárias. Mas cuidado: isso nem sempre é possível.

### 7.2.3 – Blasius: solução numérica

Como vimos, uma camada-limite laminar sobre uma placa plana sem gradiente de pressão longitudinal pode ser resolvida com

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (7.67)$$

sujeita às condições de contorno

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (7.68)$$

onde

$$f(\eta) = \frac{\Psi(x, y)}{U_\infty \delta(x)} \quad (7.69)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (7.70)$$

e

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}. \quad (7.71)$$

As condições 7.68 não configuram um problema de valor inicial clássico, mas sim um problema de valor de contorno. Mesmo assim, vale a pena a seguinte abordagem. A mudança de variáveis

$$u_1 = f, \quad u_2 = f', \quad u_3 = f'', \quad (7.72)$$

produz o seguinte sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -\frac{1}{2}u_1u_3 \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

Este sistema pode agora ser resolvido com 3 condições iniciais

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(0) = \gamma \quad (7.74)$$

onde  $\gamma$  é um valor inicial arbitrário para  $f''(0)$ . A solução de 7.73 pode ser obtida com o programa `blasius.py`:



```

#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-
# -----
# blasius.py
# -----
from __future__ import print_function
from numpy import array
from sys import argv
# -----
# por comodidade, a condição inicial é na linha de comando
# -----
gamma = float(argv[1])
h = 0.01
t = [0.0]
x = [array([0.0,0.0,gamma])]
n = int(20.0/h)                # número de passos
# -----
# sistema a ser integrado
# -----
def ff(t,x):
    return array( [ x[1],x[2],-0.5*x[0]*x[2] ] )
def rk4(t,x,h,ff):
    '''
    rk4 implementa um passo do método de Runge-Kutta de ordem 4
    '''
    k1 = h*ff(t,x)
    k2 = h*ff(t+h/2,x+k1/2)
    k3 = h*ff(t+h/2,x+k2/2)
    k4 = h*ff(t+h,x+k3)
    xn = x + k1/6.0 + k2/3.0 + k3/3.0 + k4/6.0
    return xn
for i in range(0,n):            # loop da solução numérica
    tn = (i+1)*h
    xn = rk4(t[i],x[i],h,ff)
    t.append(tn)
    x.append(xn)
fou = open('blasius.out','wt')
for i in range(0,n+1):          # imprime o arquivo de saída
    fou.write( '%12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n' %
        (t[i],x[i][0],x[i][1],x[i][2]) )
print('%12.6f %12.6f' % (xn[1], xn[2]) )
fou.close()

```

Sucessivas rodadas de `blasius.c` produzem a seguinte tabela:

$\gamma$	$f'(\infty)$
0.1	0.449
0.2	0.731
0.3	0.934
0.4	1.132
0.35	1.035
0.32	0.975
0.33	0.995
0.335	1.005
0.334	1.003
0.333	1.001
0.3325	1.0008
0.3322	1.0002
1.0	2.085409

Se o processo todo estiver certo, então a última saída deve ter gerado o perfil de velocidade

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad (7.75)$$

O seguinte *script* de gnuplot deve plotar o resultado:

```
set terminal postscript eps monochrome "Times-Roman" 18
set xlabel 'eta'
set ylabel 'u/Uoo'
set output 'blasius.eps'
set grid
plot 'blasius.out' using 1:3 notitle with lines lt 1 lw 2
exit
```

O resultado pode ser visso na figura [7.4](#)

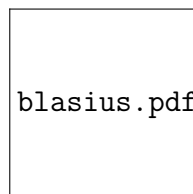


Figura 7.4: Perfil de velocidade adimensional de Blasius.

### 7.2.4 – Uma alternativa

Liggett (1994) sugere a seguinte alternativa para definir condições de contorno em  $\eta = 0$ , e consequentemente produzir um problema de valor inicial desde o início:

$$f = \alpha g, \quad (7.76)$$

$$\xi = \beta \eta \quad (7.77)$$

Agora, em  $\xi = \eta = 0$ , a derivada segunda de  $f$  (que nós acabamos de determinar por tentativa-e-erro acima) é  $f''(0) = \gamma$ . A derivada segunda de  $g$  em relação a  $\xi$  será

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\xi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\xi} \frac{dg}{d\eta} \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{d^2g}{d\eta^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\
&= \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2g}{d\eta^2} \\
&= \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2g}{d\eta^2} \\
&= \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2f}{d\eta^2}.
\end{aligned} \tag{7.78}$$

Então,

$$\left. \frac{d^2g}{d\xi^2} \right|_0 = \left. \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2f}{d\eta^2} \right|_0 = \frac{\gamma}{\alpha\beta^2}. \tag{7.79}$$

Agora, imponha  $\gamma/(\alpha\beta^2) = 1$ , de tal modo que  $d^2g(0)/d\xi^2 = 1$ .

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{d(f/\alpha)}{d(\beta\eta)} = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{df}{d\eta} \tag{7.80}$$

$$\frac{d^2g}{d\xi^2} = \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d^2f}{d\eta^2} \tag{7.81}$$

$$\frac{d^3g}{d\xi^3} = \frac{1}{\alpha\beta^3} \frac{d^3f}{d\eta^3} \tag{7.82}$$

Voltando à equação diferencial original,

$$\begin{aligned}
2f''' + ff'' &= 0, \\
2\alpha\beta^3g''' + \alpha g\alpha\beta^2g'' &= 0
\end{aligned} \tag{7.83}$$

É conveniente agora fazer  $\alpha = \beta$ , de modo que a equação (7.83) torna-se

$$2g''' + gg'' = 0. \tag{7.84}$$

Trata-se evidentemente da *mesma* equação de Blasius, porém com condições iniciais diferentes. A sua solução levará à obtenção do valor de  $\alpha$ : de (7.80),

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{dg}{d\xi} = \frac{1}{\alpha^2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df}{d\eta} = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{7.85}$$

Rodando blasius de novo com  $f''(0) = 1$  (na verdade,  $g''(0) = 1!$ ),  $g'(\infty) = 2.085409$  (veja a última linha da tabela, convenientemente inserida à espera deste momento);  $\alpha = 0.69247544534044858$ , e  $\gamma = \alpha^3 = 0.33205737835621146 = f''(0)$ , o que concorda com nosso resultado anterior obtido por tentativa-e-erro.

# 8

## Camadas-limite turbulentas

### 8.1 – Escoamento turbulento em um duto

Nesta seção estaremos estudando o escoamento sob pressão em um duto seção retangular. Por simplicidade, vamos supor que a densidade  $\wp$  é estritamente constante, e vamos desprezar efeitos de rotação do referencial (ou seja: o termo de Coriolis não existe:  $\varpi = 0$ ). Neste caso, a promediação das equações do movimento (por exemplo, (3.34) ou (3.36)) produz

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (8.1)$$

e

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = g_i - \frac{1}{\wp} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \nu_u \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (8.2)$$

Considere agora essas equações em um duto com seção retangular “infinita” na direção  $y$  e espessura na direção  $z$  dada por  $h = 2\delta$ , para um escoamento plenamente desenvolvido em  $x$ . O “plenamente desenvolvido” significa que as *médias* turbulentas — exceto pela pressão, como vai ficar óbvio — não variam em  $x$ :  $\partial \langle \cdot \rangle / \partial x = 0$ ; da mesma forma, a seção “infinita” em  $y$  implica homogeneidade nessa direção:  $\partial \langle \cdot \rangle / \partial y = 0$ . Substituindo essas condições na equação da continuidade, obtém-se

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial z} = 0 \Rightarrow \langle W \rangle(z) = \text{constante} \Rightarrow \langle W \rangle(z) = 0, \quad (8.3)$$

pois as condições de contorno em  $\langle W \rangle$  são  $\langle W \rangle(0) = \langle W \rangle(h) = 0$ .

A solução obtida  $\langle W \rangle = 0$  e a homogeneidade da turbulência em  $x$  e  $y$  simplificam a equação de *momentum* em  $z$  para

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle ww \rangle = -g - \frac{1}{\wp} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Assim, um dos efeitos da turbulência é *desviar* a distribuição vertical de pressão média do estado hidrostático! Note que a imposição de *homogeneidade* da turbulência em  $x$  e  $y$  significa que  $\langle ww \rangle$  é uma função de  $z$  somente; tendo isso em mente, integre (8.4) entre 0 e  $z$  e imponha  $\langle ww \rangle(0) = 0$  (essa condição de contorno significa que a intensidade da turbulência “morre” na parede), para obter

$$\langle ww \rangle(z) + gz + \frac{1}{\wp} \langle P \rangle(x, z) = \frac{1}{\wp} \langle P \rangle(x, 0) \equiv \frac{1}{\wp} P_0(x), \quad (8.5)$$

Figura 8.1: A distribuição da tensão cisalhante total em um escoamento turbulento em um duto.

onde  $P_0(x)$  significa a pressão média medida na parede do escoamento (teoricamente, também não há flutuações de pressão na parede). Um resultado importante pode ser obtido derivando-se essa última equação em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} = \frac{dP_0}{dx}, \quad (8.6)$$

ou seja:

*O gradiente longitudinal da pressão média em todos os pontos do escoamento é igual ao gradiente de pressão na parede.*

A homogeneidade em  $y$  faz com que a equação de *momentum* na direção  $y$  seja trivial:  $0 = 0$ ; na direção  $x$  teremos

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle = -\frac{1}{\wp} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial z^2}, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle - \nu \frac{d^2 \langle U \rangle}{dz^2} = -\frac{1}{\wp} \frac{dP_0}{dx} \equiv gJ. \quad (8.8)$$

O lado esquerdo dessa equação é uma função só de  $z$ , e o lado direito, uma função só de  $x$ . Os dois portanto devem ser constantes, donde se segue que, assim como no caso do escoamento laminar em um duto, a *perda de carga*  $J$  (para usar uma terminologia de engenheiros) é linear com  $x$  — um fato geralmente apresentado sem muita discussão em cursos de graduação. Note que (7.10) e (8.8) são essencialmente a mesma equação, que portanto se aplica tanto para o regime laminar quanto para o turbulento.

Integrando (8.8) entre 0 e  $z$  (e lembrando que  $\langle uw \rangle(0) = 0$  devido ao fato de que a intensidade da turbulência é nula na parede),

$$-\frac{z}{\wp} \frac{dP_0}{dx} - \langle uw \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0), \quad (8.9)$$

onde

$$\nu \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\wp \nu}{\wp} \frac{d\langle U \rangle}{dz}(0) = \frac{\tau_0}{\wp} \equiv u_*^2, \quad (8.10)$$

e  $\tau_0$  é a tensão cisalhante na parede. Pela primeira vez, aparece explicitamente uma escala de velocidade específica do problema, a *velocidade de atrito*  $u_*$ .

O resultado,

$$-\frac{z}{\wp} \frac{dP_0}{dx} - \underbrace{\langle uw \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz}}_{\tau/\wp} = u_*^2 \quad (8.11)$$

permite determinar *analiticamente* a tensão total  $\tau$  (turbulenta + viscosa) de cisalhamento em função de  $z$ :

$$\tau = \tau_0 + \frac{dP_0}{dx} z, \quad (8.12)$$

com o resultado mostrado na figura 8.1.

A distribuição de tensões  $\tau$  é antisimétrica, com  $\tau(2\delta) = -\tau_0^*$ . Segue-se então que  $\tau(\delta) = 0$ , donde

$$-\frac{\delta}{\rho} \frac{dP_0}{dx} = u_*^2 \Rightarrow \quad (8.13)$$

$$-\langle uw \rangle + \nu \frac{d\langle U \rangle}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{\delta}\right). \quad (8.14)$$

Este resultado é muito importante, pois foi obtido a partir somente da hipótese de estacionariedade e homogeneidade em  $x$  e  $y$  do escoamento. Dividindo por  $u_*^2$ :

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*^2} + \frac{\nu}{u_* \delta} \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)} = 1 - \frac{z}{\delta}. \quad (8.15)$$

Observe o aparecimento do número de Reynolds  $Re_* = u_* \delta / \nu$ . Quando  $Re_* \rightarrow \infty$ , o gradiente

$$\frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{z}{\delta}\right)}$$

desaparece (isto é, anula-se) de (8.15). Para analisarmos o que acontece próximo da parede, devemos encontrar uma forma de “preservar” o gradiente; ei-la:

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*^2} + \frac{d\left(\frac{\langle U \rangle}{u_*}\right)}{d\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)} = 1 - \frac{\nu}{\delta u_*} \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.16)$$

Está claro que nós aplicamos duas adimensionalizações diferentes para o gradiente de velocidade. Em ambas, a velocidade adimensional é  $\langle U \rangle / u_*$ . Na primeira adimensionalização, que corresponde à equação (8.15), a variável adimensional é

$$\eta \equiv z/\delta; \quad (8.17)$$

na segunda, a variável adimensional é

$$z_+ \equiv \frac{zu_*}{\nu}. \quad (8.18)$$

As equações (8.15) e (8.16) nas variáveis acima são

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*^2} + \frac{1}{Re_*} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \eta, \quad (8.19)$$

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*^2} + \frac{d}{dz_+} \left( \frac{\langle U \rangle}{u_*} \right) = 1 - \frac{1}{Re_*} z_+. \quad (8.20)$$

Em *ambas*, além de  $\eta$  ou  $z_+$ , aparece o número de Reynolds  $Re_*$ . Essas adimensionalizações sugerem que tanto  $\langle uw \rangle / u_*^2$  quanto  $\langle U \rangle / u_*$  dependem de  $\eta$  (ou  $z_+$ ) e *também* de  $Re_*$ .

---

\*Tanto em  $z = 0$  quanto em  $z = 2\delta$ , a componente  $x$  do vetor de tensão é  $-\tau_0$ ; em  $z = 0$  o vetor normal ao fluido é  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ , e em  $z = 2\delta$  ele é  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ . Da relação entre o vetor de tensão e o tensor de tensões,  $t_j = n_i T_{ij}$ , para um estado bi-dimensional de tensões deduz-se que  $T_{12}(z) = \tau(z)$  e  $\tau(2\delta) = -\tau_0$ .

Note agora como o efeito de  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$  é diferente em cada uma delas. Obviamente, para  $z/\delta \ll 1$ ,  $\tau \approx \text{constante}$ . Essas condições definem a região *inercial* da camada-limite turbulenta. Por outro lado, para  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$  e  $\eta \sim 1$ , (8.19) produz

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*} = 1 - \eta. \quad (8.21)$$

Tennekes e Lumley (1972) observam que essa equação não pode ser válida em  $\eta = 0$ . Sua região de validade é o *core layer* (camada central).

Alguna espécie de argumento dimensional agora é necessário para que possamos prosseguir. Tennekes e Lumley (1972) usam a equação de balanço de energia cinética da turbulência (6.26) para argumentar que  $d\langle U \rangle/dz \sim u_*/\delta$ ; isso é uma forma particular do argumento mais geral utilizado no capítulo 6, onde mostramos que o termo III (produção por gradiente) da equação para os momentos de 2ª ordem é da ordem de  $\tilde{u}^3/\ell$ .

Alternativamente aos argumentos de Tennekes e Lumley (1972), e talvez de maneira mais direta, observe que, de acordo com (8.19), o gradiente da velocidade adimensionalizada  $\langle U \rangle/u_*$  deve ser uma função de  $\eta$  (embora ele desapareça da equação quando  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$ ). Suponha que a velocidade adimensionalizada também dependa de  $\eta$  nessa região, na forma

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*}, \quad (8.22)$$

onde  $U_\delta$  é o valor de  $\langle U \rangle$  no centro do duto, em  $z = \delta$ . A inclusão de  $U_\delta$  é necessária porque o gradiente de velocidade deve ser integrado do *centro* do duto em direção à parede, uma vez que a relação de similaridade (8.24) não pode valer até a parede porque, em sua proximidade, as escalas de comprimento típicas do escoamento são diferentes de (na verdade, são muito menores do que)  $\delta$  (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). De acordo com Wosnik et al. (2000), a inclusão de  $U_\delta$  elimina a necessidade de levar em consideração efeitos viscosos próximo da parede quando o processo de tomada de limites que se segue for realizado. Isso significa essencialmente que não podemos esperar que a adimensionalização com  $\eta$  seja capaz de “ver” a condição de contorno de não-deslizamento na parede; a sua condição de contorno “natural” é  $\langle U \rangle/u_* = U_\delta/u_*$  em  $\eta = 1$ . Então,

$$\frac{\langle U \rangle - U_\delta}{u_*} = F_{\delta, \text{Re}} \left( \frac{z}{\delta}; \text{Re}_* \right). \quad (8.23)$$

Os argumentos de  $F_{\delta, \text{Re}}$  são sugeridos, obviamente, pela equação (8.19).

Um fato *experimental* amplamente conhecido é que os escoamentos turbulentos tornam-se assintoticamente independentes do número de Reynolds à medida que este cresce. Isso significa que  $F_{\delta, \text{Re}} \left( \frac{z}{\delta}; \text{Re}_* \right)$  em (8.23) deve tornar-se assintoticamente independente de  $\text{Re}_*$ . Chamamos a forma assintótica de  $F_\delta$ , e escrevemos

$$\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.24)$$

onde  $F_\delta(\eta)$ , a “lei da diferença de velocidade” (*velocity defect law*), é uma função adimensional a determinar que só depende, como indica a notação, de  $\eta$ , e não mais de  $\text{Re}_*$ .

De forma totalmente análoga e simétrica, em (8.20) vemos que o gradiente da velocidade adimensionalizada é uma função de  $z_+$ ; dessa vez, é este último que desaparece

da equação quando  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$ . A adimensionalização “natural” para o gradiente de velocidade média agora é

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_{\nu, \text{Re}}(z_+; \text{Re}_*) \Rightarrow \lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_\nu}{dz_+}, \quad (8.25)$$

que é conhecida em Mecânica dos Fluidos como “lei da parede”. Como aconteceu acima com  $F_\delta$ ,  $F_\nu$  é a forma assintótica de  $F_{\nu, \text{Re}}$  para  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$ , que só depende (agora) de  $z_+$ .

As variáveis  $z_+$  e  $\eta$  descrevem o balanço de quantidade de movimento sob duas “ópticas” (na verdade, duas escalas) diferentes:  $z_+$  é a variável adequada próximo da parede, e  $\eta$  a variável adequada na região central do escoamento. A técnica denominada *asymptotic matching* (“ajuste assintótico”) permite utilizar uma análise de múltiplas escalas para obter um resultado analítico adicional. O argumento é que, embora  $F_\nu$  e  $F_\delta$  descrevam a velocidade em regiões diferentes do escoamento, deve haver uma região onde ambas as descrições são válidas. Historicamente, essa abordagem surgiu apenas para o  $\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty}$ ; daí sua presença em (8.24) e (8.25). Na região de “casamento”, ambas as equações devem valer, e essa região deve corresponder aos limites  $z_+ \rightarrow \infty$  e  $\eta \rightarrow 0$ :

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{u_*^2}{\nu} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u_*}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}. \quad (8.26)$$

Multiplicando por  $z$  ambos os lados e rearrumando os termos:

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{zu_*}{\nu} \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{z}{\delta} \frac{dF_\delta}{d\eta}, \quad (8.27)$$

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} z_+ \frac{dF_\nu}{dz_+} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.28)$$

Note que cada lado de (8.28) depende, respectivamente, de  $z_+$  e de  $\eta$ , e por um argumento semelhante ao usado no método de separação de variáveis para a solução de equações diferenciais parciais, os dois devem no limite ser iguais a uma constante, aqui definida como  $1/\kappa$  ( $\kappa$  é a constante de von Kármán). Assim, obtém-se, imediatamente,

$$F_\delta(\eta) = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C_\delta, \quad (8.29)$$

$$F_\nu(z_+) = \frac{1}{\kappa} \ln z_+ + C_\nu. \quad (8.30)$$

Essa região de “casamento” é denominada *região inercial*. Os argumentos aqui utilizados para mostrar que, nessa região, o perfil de velocidade é logarítmico guardam uma semelhança intrigante com os argumentos que levam à “faixa inercial” do espectro na teoria clássica de turbulência de Kolmogorov (que será vista com detalhe no capítulo ?? à frente). Segundo Pope (2000),  $C_\nu = 5,2$ , e, como é bem conhecido, a constante de von Kármán é  $\kappa = 0,4$ . Por consistência com  $\langle U \rangle(\delta) = U_\delta$ , devemos ter  $C_\delta = 0$ , embora valores pequenos e diferentes de zero possam ser encontrados experimentalmente.

Uma região diferente permite também uma integração analítica do perfil de velocidade: em (8.20), quando  $z_+ \rightarrow 0$ , a tensão de Reynolds  $\langle uw \rangle$  tende a zero, donde se segue imediatamente que o perfil adimensional de velocidade é *linear* em  $z_+$ :

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = z_+. \quad (8.31)$$



Essa previsão parece à primeira vista conflitar-se com a previsão de um perfil parabólico no caso do escoamento laminar em dutos (Hagen-Poiseuille) com a mesma geometria. Entretanto, é fácil reescrever o resultado *laminar* na forma

$$\frac{U}{u_*} = z_+ - \frac{1}{2\text{Re}_*} z_+^2 : \quad (8.32)$$

é evidente que, sendo o escoamento para o qual essa equação foi deduzida laminar, é proibido que  $\text{Re}_*$  atinja valores muito altos, ou tenda para o infinito. O  $\lim_{z_+ \rightarrow 0}$  de (8.32) para valores finitos de  $\text{Re}_*$ , por outro lado, reconcilia-a com (8.31).

Considere agora (8.20) com  $\text{Re}_* \rightarrow \infty$ ,  $z_+ \rightarrow \infty$ ; para remover a indeterminação  $z_+/\text{Re}_*$ , note que

$$\lim_{\substack{\text{Re}_* \rightarrow \infty \\ z_+ \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{z_+}{\text{Re}_*} = \frac{\frac{zu_*}{v}}{\frac{u_*\delta}{v}} = \frac{z}{\delta} = \eta = 0. \quad (8.33)$$

Além disso, nessa região, em virtude de (8.28)

$$\lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{dF_v}{dz_+} = \lim_{z_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa z_+} = 0; \quad (8.34)$$

portanto, na região inercial, (8.19) fica

$$-\frac{\langle uw \rangle}{u_*^2} \approx 1 \quad (8.35)$$

ou seja: a tensão de Reynolds nessa região é aproximadamente constante.

Para cumprir um programa semelhante ao realizado com o escoamento laminar em dutos, é preciso integrar o perfil de velocidade ao longo da seção, para então obter uma equação para a perda de carga. O perfil previsto por (8.30) não pode ser integrado desde  $z = 0$ , pois essa equação possui uma singularidade logarítmica aí. Alternativamente, nós podemos usar (8.29), e integrar sobre toda a seção. Naturalmente, a lei da diferença de velocidade não pode ser válida próximo da parede (Tennekes e Lumley, 1972, p. 148). No entanto, para escoamentos turbulentos em dutos, na região próxima à parede onde a lei não se aplica a contribuição para o cálculo da velocidade média é desprezível (Pope, 2000, p. 278). Então, a velocidade média é

$$\bar{U} = \frac{u_*}{\delta} \int_{z=0}^{\delta} \left[ \frac{U_{\delta}}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{\delta} \right] dz = U_{\delta} - \frac{u_*}{\kappa}. \quad (8.36)$$

Para que uma expressão para a perda de carga possa ser encontrada, é preciso ainda eliminar  $U_{\delta}$ . Isso pode ser feito, por exemplo, supondo-se que (8.30) vale até o centro do duto; este ponto, naturalmente, está fora da região de validade de (8.30), porém novamente as diferenças para escoamentos em dutos são relativamente pequenas (Pope, 2000, figura 7.9). Faça portanto

$$U_{\delta} = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_*}{v} + C_v \right] \Rightarrow \quad (8.37)$$

$$\bar{U} = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta u_*}{v} - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.38)$$

Observe que o problema de projeto de engenharia de uma tubulação está essencialmente resolvido: para uma vazão por unidade de largura  $2\bar{U}\delta$ , (8.38) determina o valor correspondente da velocidade de atrito  $u_*$ ; então, o gradiente de pressão que precisa ser impresso ao duto para que se atinja o valor prescrito de  $\bar{U}$  é dado por (8.13).

O procedimento de cálculo para projeto pode ser otimizado da seguinte forma: inicialmente, note que  $J$  pode ser relacionado diretamente com  $u_*$  eliminando-se  $dP_0/dx$  entre (8.8) e (8.13):

$$gJ\delta = u_*^2 \quad (8.39)$$

que, juntamente com (7.13), produz

$$\frac{u_*}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{f}{2}}. \quad (8.40)$$

O uso dessa última equação em (8.38) produz

$$\bar{U} = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.41)$$

Finalmente, levando-se (8.41) de volta em (8.39) e eliminando-se  $u_*$  obtém-se uma equação padrão para o fator de atrito, na mesma forma que (7.13):

$$J = \frac{2}{\underbrace{\left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]^2}_f} \frac{1}{\delta} \frac{\bar{U}^2}{2g} \Rightarrow \quad (8.42)$$

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \left( \text{Re} \sqrt{\frac{f}{2}} \right) - 1 \right) + C_v \right]. \quad (8.43)$$

A equação (8.43) pode ser descrita como uma equação de Prandtl para escoamento turbulento com paredes lisas em dutos de seção retangular e largura infinita. Ela define implicitamente a função  $f = f(\text{Re})$ . Em engenharia, os diagramas que plotam essa função são denominados “diagramas de perda de carga”.

## 8.2 – Escoamentos turbulentos com parede rugosa

Na definição de  $z_+$  em (8.18), está implícita uma escala de comprimento viscosa

$$z_v \equiv \frac{\nu}{u_*}. \quad (8.44)$$

Para o ar a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ; para a água a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 1,0 \times 10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  (Batchelor, 1967, apêndice 1, p. 594). Portanto, se  $u_* \sim 10^{-1} \text{m s}^{-1}$ ,  $z_v \sim 10^{-4}$  a  $10^{-3} \text{m}$ . Tanto em tubulações industriais quanto em escoamentos sobre superfícies naturais, há imperfeições ou “elementos de rugosidade” na superfície cuja ordem de grandeza é  $z_0$ .

A tabela 8.1 ilustra alguns valores típicos de  $z_0$  para diferentes materiais: embora o valor de  $u_*$  que usamos seja uma estimativa que obviamente variará de escoamento para escoamento, fica claro que em muitas situações  $z_0 \sim z_v$ ; de fato, segundo Morris

Tabela 8.1: Rugosidade equivalente de areia. Fonte: (Morris e Wiggert, 1972, Tabela 3-1)

Material	$z_0(\text{m})$
Aço muito corrugado	0,001
Aço pouco corrugado	0,01
Concreto liso	0,0003
Concreto rugoso	0,003
Madeira lisa	0,00018
Madeira rugosa	0,001
Aço laminado	0,00026
Aço galvanizado	0,00015
asphalted castiron	0,00012
Aço comercial novo	0,00004
Aço soldado	0,00004
Vidro	0,0000015

e Wiggert (1972), a maioria dos escoamentos em tubos são deste tipo. É de se esperar que estes sejam os casos mais difíceis para se lidar. Por outro lado, também é de se esperar que existam casos em que  $z_0 \gg z_v$ ; para eles, é possível desenvolver uma teoria de “escoamento turbulento rugoso”. De fato, tudo é uma questão de quão alto é o número de Reynolds  $Re$ : para um valor suficientemente alto, a camada viscosa deve se tornar tão delgada que, no limite, toda a parede de qualquer material se torna “rugosa” no sentido de que seus elementos de rugosidade se estendem além da subcamada viscosa.

Se  $z_0 \gg z_v$ , é natural tentar adimensionalizar (8.14) com  $z_0$ , em vez de  $z_v$ . Portanto, para as variáveis adimensionais

$$Re_0 \equiv \frac{u_* z_0}{\nu} = \frac{z_0}{z_v}, \quad (8.45)$$

$$z_* \equiv \frac{z}{z_0} \quad (8.46)$$

( $Re_0$  é um *número de Reynolds de rugosidade* (Brutsaert, 1982)), (8.14) admite a adimensionalização

$$-\frac{\langle w'u \rangle}{u_*^2} + \frac{1}{Re_0} \frac{d\left(\frac{\langle u \rangle}{u_*}\right)}{dz_*} = 1 - z_* \frac{z_0}{\delta}. \quad (8.47)$$

De forma totalmente análoga aos resultados obtidos anteriormente para paredes lisas, nós esperamos que para uma região relativamente próxima da parede valha uma adimensionalização com a forma

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0(z_*, Re_*) \Rightarrow \lim_{Re_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz_*}. \quad (8.48)$$

Essa equação é análoga ao par (8.24) e (8.25): de fato, desde que  $z_0 \ll \delta$ , basta substituir  $z_v$  por  $z_0$  na análise de ajuste ou casamento assintótico. O argumento padrão que conduz a um resultado análogo a (8.28), portanto, será

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_0\left(\frac{z}{z_0}, Re_*\right) \Rightarrow \quad (8.49)$$

$$\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty} \frac{d\langle U \rangle}{dz} = \frac{u_*}{z_0} \frac{dF_0}{dz} \Rightarrow \quad (8.50)$$

$$\lim_{z_* \rightarrow \infty} z_* \frac{dF_0}{dz_*} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta \frac{dF_\delta}{d\eta} = \frac{1}{\kappa}. \quad (8.51)$$

O perfil na região influenciada pela escala  $z_0$  portanto será novamente logarítmico:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + C_0. \quad (8.52)$$

Para os experimentos clássicos de Nikuradse de perda de carga em tubos muito lisos aos quais uma rugosidade artificial foi adicionada com grãos de areia, o  $\lim_{\text{Re}_* \rightarrow \infty}$  produz  $C_0 = 8.5$ . Não há na literatura (tanto quanto seja de nosso conhecimento) valores específicos para escoamentos em dutos muito largos sob pressão, portanto vamos admitir que este valor também se aplique. Com este valor para  $C_0$ , a previsão de (8.52) para a anulação de  $\langle U \rangle$  é

$$\ln \frac{z}{z_0} = -3,4 \Rightarrow \langle U \rangle (z = 0,0334z_0) = 0. \quad (8.53)$$

O objetivo agora é obter uma equação para o fator de atrito em escoamento plenamente rugoso. Para este fim, vamos usar novamente (8.36) e supor agora que  $u_\delta$  pode ser calculado com a nova lei da parede “rugosa” (8.52); o resultado é

$$\langle U \rangle = u_* \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right] \quad (8.54)$$

— note que não há nenhuma dependência do número de Reynolds  $\text{Re}_*$  — e a equação correspondente para o fator de atrito é

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.55)$$

### 8.3 – O regime de transição

Considere agora o caso “mais complicado”,  $z_0 \sim z_\nu$ ; ambas as escalas podem ser usadas em um ajuste assintótico com a sub-camada externa, e é de se esperar que na camada inercial o perfil de velocidade dependa de ambos. Em termos de variáveis adimensionais:

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, \frac{z_0 u_*}{\nu} \right). \quad (8.56)$$

Note que o segundo argumento, é o número de Reynolds de rugosidade  $\text{Re}_0$ , a razão entre  $z_0$  e  $z_\nu$ : veja a equação (8.45). A idéia é que o regime “liso” seja recuperado quando  $\text{Re}_0 \rightarrow 0$ , e o regime “rugoso” quando  $\text{Re}_0 \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\text{Re}_0 \rightarrow 0} F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, \text{Re}_0 \right) = F_\nu \left( \frac{zu_*}{\nu} \right), \quad (8.57)$$

$$\lim_{\text{Re}_0 \rightarrow \infty} F_{0\nu} \left( \frac{z}{z_0}, \text{Re}_0 \right) = F_0 \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (8.58)$$

Nosso objetivo, portanto, deve ser procurar uma forma analítica para a função das variáveis  $z/z_0$  e  $Re_0$  que “colapse” ambas em  $zu_*/\nu$  no primeiro caso, e que seja assintoticamente independente de  $Re_0$  no segundo. A propriedade do logaritmo do produto sugere que para escoamento liso devemos ter

$$F_{0v} \sim \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} + \ln \frac{z_0 u_*}{\nu} \right] = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{zu_*}{\nu}, \quad (8.59)$$

onde “ $\sim$ ” deve ser lido “comporta-se como ... a menos de uma constante”. Para escoamento rugoso, por outro lado,  $Re_0$  deve desaparecer. Uma forma de obter ambos os comportamentos assintóticos é fazer

$$\begin{aligned} F_{0v} &\sim \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} + \ln \left( \frac{1}{\frac{1}{Re_0} + 1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \ln \left( \frac{1}{Re_0} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.60)$$

De fato, para  $Re_0 \rightarrow 0$ , (8.60) é praticamente igual a (8.59), enquanto que para  $Re_0 \rightarrow \infty$  ela se torna, como desejado, assintoticamente independente de  $Re_0$ . Faltam ainda garantir os valores exatos das constantes  $C_v$  e  $C_0$  em (8.57)–(8.58); isso pode ser obtido com

$$F_{0v} = \frac{1}{\kappa} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \ln \left( \frac{B_{0v}}{Re_0} + 1 \right) \right] + C_0. \quad (8.61)$$

Claramente, (8.61) atende à constante  $C_0$  em (8.58): veja (8.52). Por outro lado, para que (8.61) também atenda à constante  $C_v$ , basta escolher  $B_{0v}$  de tal forma que

$$-\frac{1}{\kappa} \ln B_{0v} + C_0 = C_v, \quad (8.62)$$

donde se obtém, para dutos, que  $B_{0v} = 3,74$ . Um procedimento totalmente análogo ao feito anteriormente para escoamentos lisos e rugosos permite obter uma equação para o cálculo de fatores de atrito em escoamentos em regime de transição:

$$\sqrt{\frac{2}{f}} = \left[ \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{\delta}{z_0} - \ln \left( \sqrt{\frac{2}{f}} \frac{B_{0v}}{Re} \frac{\delta}{z_0} + 1 \right) - 1 \right) + C_0 \right]. \quad (8.63)$$

Em (8.63)  $f$  depende, convenientemente, tanto de  $\delta/z_0$  como de  $Re$ ; em princípio, essa equação pode ser usada para calcular  $f$  em *qualquer* regime. Uma equação totalmente análoga a (8.63) foi obtida pela primeira vez por Colebrook e White para escoamentos transicionais em tubos de seção circular (Morris e Wiggert, 1972, p. 67): os coeficientes numéricos, naturalmente, são diferentes dos fornecidos aqui por conta da geometria diferente da seção; a rugosidade relativa de Colebrook e White é dada na forma  $z_0/D$ , e o número de Reynolds na forma  $UD/\nu$ .

O diagrama de fator de atrito para o escoamento em um duto de seção retangular e largura infinita *versus* o número de Reynolds para  $z_0/\delta = 0,05, 0,005$  e  $0,00005$  está mostrado na figura 8.3.

Figura 8.2: Fator de atrito  $f$  em função de  $Re$  e da rugosidade relativa  $z_0/\delta$  em um escoamento turbulento em um duto

## 8.4 – A fórmula de Manning

A fórmula

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (8.64)$$

foi proposta por Manning em 1889. A menos que se atribua uma dimensão física a  $n$ , ela é dimensionalmente inconsistente. Ela é uma equação “empírica”, ou seja: ela foi proposta sem base em uma dedução a partir de equações mais fundamentais.

Chen (1991) mostrou entretanto que ela pode ser deduzida. A vazão volumétrica através da seção, por definição, é

$$Q = \int_{y=0}^B \int_{z=z_f(y)}^Z \langle U \rangle (y, z) dz dy \quad (8.65)$$

onde  $B$  é a largura da seção,  $z_f(y)$  são as cotas do fundo e  $Z$  é a cota da superfície.

Dedução (Chen, 1991)

$$\langle U \rangle (y, z) = au_*(y) \left( \frac{z - z_f(y)}{z_0} \right)^m, \quad (8.66)$$

$$Q = \int_{y=0}^B \frac{au_*(y)}{m+1} \left( \frac{h(y)}{z_0} \right)^m h(y) dy, \quad (8.67)$$

$$h(y) = Z - z_f(y) \quad (8.68)$$

A velocidade de atrito média ao longo da seção transversal,  $u_*$ , deve satisfazer à relação

$$u_* = \frac{1}{P} \int_{y'=0}^P u_*(y') dy' \approx \frac{1}{B} \int_{y=0}^B u_*(y) dy \quad (8.69)$$

$$\eta = \frac{y}{B}, \quad g(\eta) = \frac{u_*(\eta)}{u_*} \Rightarrow \quad (8.70)$$

$$Q = \frac{au_* R_h^m (R_h P)}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left( \frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta, \quad (8.71)$$

$$u_* = \sqrt{g R_h S_f}, \quad (8.72)$$

$$V = \underbrace{\left[ \frac{a\sqrt{g}}{(m+1)z_0^m} \frac{B}{P} \int_{\eta=0}^1 g(\eta) \left( \frac{h(\eta)}{R_h} \right)^{m+1} d\eta \right]}_{1/n} R_h^{m+1/2} S_f^{1/2} \quad (8.73)$$

que é a fórmula de Manning para  $m = 1/6$ .

Dias (1995) — ajuste de um perfil de velocidade ao longo da seção por mínimos quadrados não-lineares:

$$\langle U \rangle (\eta, z) = \frac{u_* g(\eta)}{\kappa} \ln \left( \frac{z - z_f(\eta)}{z_0} \right), \quad (8.74)$$

$$\frac{u_*}{g(\eta)}\kappa = -a_0\eta(\eta - 1)(\eta^2 - 2a_1\eta + a_2^2) \quad (8.75)$$

$$m = \frac{u_*}{\kappa V} \quad (8.76)$$

Alguns resultados no Iguaçu

Estimativa de  $u_*$  (contra medidas usando a declividade da linha d'água):

Expoente  $m$  da equação de Manning

Funções potência?

Suponha (por pura conjectura) que

$$F_V = A_+ z_+^m, \quad (8.77)$$

$$F_R = \bar{A}\bar{z}^m \Rightarrow \quad (8.78)$$

$$z_+ \frac{dF_V}{dz_+} = \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}}, \text{ se} \quad (8.79)$$

$$\frac{\bar{A}}{A_+} = R_+^m. \quad (8.80)$$

Resultados modernos

De volta aos dutos retangulares sob pressão. Wosnik, Castillo e George (2000) — as equações para os perfis nas variáveis  $z_+$  e  $\bar{z}$  representam o *mesmo* campo de velocidade:

$$F_V - \frac{u_R}{u_*} = F_R, \quad (8.81)$$

$$G(R_+) \equiv \frac{u_*}{u_R}, \quad (8.82)$$

$$F_V(z/z_V, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(z/R, R_+), \quad (8.83)$$

$$\partial/\partial z; \times z \Rightarrow \frac{z}{z_V} \frac{dF_V}{dz_+} = \frac{z}{R} \frac{dF_R}{d\bar{z}}. \quad (8.84)$$

Aproximação assintótica local

Este é o mesmo resultado de casamento de perfis de antes, mas dessa vez para valores *finitos*, ainda que suficientemente altos, de  $R_+$ .

Um resultado *novo e diferente* é obtido do processo de aproximação assintótica local (*near asymptotics*):

$$z_+ = \tilde{z}R_+^n, \quad \bar{z} = \tilde{z}R_+^{n-1} \quad 0 < n < 1 \quad (8.85)$$

$$F_V(R_+^n, \tilde{z}, R_+) - \frac{1}{G(R_+)} = F_R(R_+^{n-1}\tilde{z}, R_+), \quad (8.86)$$

$$\partial/\partial z \Rightarrow \bar{z} \frac{dF_R}{d\bar{z}} = \frac{1}{\kappa(R_+)} - \dots, \quad (8.87)$$

$$\frac{1}{\kappa(R_+)} \equiv \frac{d1/G}{d\ln R_+}. \quad (8.88)$$

Evidências de uma meso-camada

Seja  $y = x + a$ ,  $x, y > 0$ ; então, se  $f = \ln x$ ,

$$x \frac{df}{dx} = x \frac{1}{x} = 1; \quad (8.89)$$

$$y \frac{df}{dy} = (x + a) \frac{1}{(x + a)} = 1 = x \frac{df}{dx}. \quad (8.90)$$

Isso significa que o processo de casamento de perfis de Milikan, que envolve a constante de von Kármán, admite soluções um pouco mais gerais:

$$\frac{\langle U \rangle - u_R}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [\bar{z} + \bar{a}(R_+)] + \bar{C}(R_+), \quad (8.91)$$

$$\frac{\langle U \rangle}{u_*} = \frac{1}{\kappa(R_+)} \ln [z_+ + a_+(R_+)] + C_+(R_+). \quad (8.92)$$

### Conclusões

- Ao contrário do que às vezes se pensa, resultados analíticos *são* possíveis a partir das equações de Navier-Stokes e Reynolds para escoamentos turbulentos.
- Ao longo do século XX e até os dias de hoje, novos resultados analíticos e experimentais continuam a esclarecer diversos pontos sobre “velhos” problemas.
- A equação de Manning, por exemplo, pode ser entendida como o resultado de uma *aproximação* em “lei de potência” para o perfil de velocidade em uma camada-limite turbulenta.
- As teorias analíticas existentes ainda dependem de constantes empíricas, notadamente a “constante” de von Kármán  $\rightarrow$  número de von Kármán:  $\kappa = \kappa(R_+)$ . Obter previsões teóricas diretamente a partir das eqs de N-S é um desafio para os dinamicistas de fluidos.



# A

## Identidades vetoriais

---

Para qualquer função escalar  $\phi(\mathbf{x}, t)$  razoavelmente bem comportada, devemos ter

$$\nabla \times \nabla \phi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} &= \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Para qualquer função vetorial  $\mathbf{u} \dots$

# B

## Difusão em sistemas binários

---

Considere um pequeno volume  $\delta\mathcal{V}$  no qual há instantaneamente  $\mathcal{N}_A$  moléculas da substância  $A$ , e  $\mathcal{N}_B$  moléculas da substância  $B$ . As velocidades macroscópicas de  $A$  e de  $B$ ,  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{v}_B$ , no centro de massa de  $\delta\mathcal{V}$  são definidas como

$$\left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \mathbf{v}_{Ai} \right] \equiv \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \right) \mathbf{v}_A, \quad (\text{B.1})$$

$$\left[ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \mathbf{v}_{Bj} \right] \equiv \left( \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right) \mathbf{v}_B, \quad (\text{B.2})$$

onde  $\mathbf{v}_{Ai}$  é a velocidade individual da  $i$ -ésima molécula de  $A$ , e  $m_A$  é a massa de cada molécula de  $A$ , o mesmo valendo para a substância  $B$ .

A velocidade macroscópica do fluido como um todo no centro de massa de  $\delta\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{u}$ , é

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \mathbf{v}_{Ai} + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \mathbf{v}_{Bj} \right] &\equiv \left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{u}, \\ \left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A \right] \mathbf{v}_A + \left[ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{v}_B &= \left[ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_A} m_A + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_B} m_B \right] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A divisão deste resultado por  $\delta\mathcal{V}$  produz

$$\rho_A \mathbf{v}_A + \rho_B \mathbf{v}_B = (\rho_A + \rho_B) \mathbf{u} \Rightarrow \rho_A [\mathbf{v}_A - \mathbf{u}] + \rho_B [\mathbf{v}_B - \mathbf{u}] = 0. \quad (\text{B.4})$$

Os vetores resultantes representam os fluxos difusivos de massa de  $A$  e de  $B$ :

$$\mathbf{j}_A \equiv \rho_A [\mathbf{v}_A - \mathbf{u}], \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{j}_B \equiv \rho_B [\mathbf{v}_B - \mathbf{u}] \Rightarrow \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{j}_A + \mathbf{j}_B = 0. \quad (\text{B.7})$$

# C

## Constantes físico-químicas

---

1 cal = 4,1868 J.

$$R = 8.3144598(48) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Constante universal dos gases

# D

## Equação de estado para a água

---

A equação de Tumlirz adaptada por [Fischer e Dial \(1975\)](#) é

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_\infty(T) + \frac{\lambda(T)}{\Pi_0(T) + P}, \quad (\text{D.1})$$

onde  $T$  está em °C,  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{V}_\infty$  estão em  $\text{cm}^3, \text{gm}^{-1}$ ;  $\lambda$  está em  $\text{bars cm}^3 \text{gm}^{-1}$ , e  $\Pi_0$  e  $P$  estão em bars.  $\mathcal{V}_\infty$ ,  $\lambda$  e  $\Pi_0$  são função da temperatura de acordo com

$$\begin{aligned} \lambda = & 1788.316 + 21.55053T - 0.4695911T^2 + 3.096363 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 0.7341182 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & 5928.499 + 58.05267T - 1.1253317T^2 + 6.6123869 \times 10^{-3}T^3 \\ & - 1.4661625 \times 10^{-5}T^4, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\infty = & 0.6980547 - 0.7435626 \times 10^{-3}T + 0.3704258 \times 10^{-4}T^2 \\ & - 0.6315724 \times 10^{-6}T^3 + 0.9829576 \times 10^{-8}T^4 - 0.1197269 \times 10^{-9}T^5 \\ & + 0.1005461 \times 10^{-11}T^6 - 0.5437898 \times 10^{-14}T^7 + 0.1699460 \times 10^{-16}T^8 \\ & - 0.2295363 \times 10^{-19}T^9. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

# E

## Soluções dos problemas

---

De  $S_{i,j}(-n) = S_{i,j}^*(n)$  ( $S_{i,j}$  é hermitiano), faça

$$\begin{aligned} S_{i,j}(n) &= a(n) + ib(n), \\ b(-n) &= -b(n), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \int_{n=-\infty}^{+\infty} \Im[S_{i,j}(n)] dn &= \int_{n=-\infty}^0 b(n) dn + \int_{n=0}^{\infty} b(n) dn \\ &= - \int_{m=\infty}^0 b(-m) dm + \int_{n=0}^{\infty} b(n) dn \\ &= \int_{m=0}^{\infty} b(-m) dm + \int_{n=0}^{\infty} b(n) dn \\ &= \int_{n=0}^{\infty} [b(-n) + b(n)] dn \\ &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

---

- Adkins, C. J. (1983). *Equilibrium thermodynamics*. Cambridge University Press, New York.
- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:113–133.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:134–139.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, New York, 2nd<sup>a</sup> edição.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (1960). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere*. D. Reidel, Dordrecht. 309 pp.
- Callen, H. B. (1985). *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Oxford. 657 pp.
- Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer*. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.
- Fischer, F. H. e Dial, Jr., O. E. (1975). Equation of state of pure water and sea water. Relatório técnico, Marine Physical Laboratory, Scripps Institution of Oceanography.
- Fleagle, R. G. e Businger, J. A. (1980). *An introduction to atmospheric physics*. Academic Press, Orlando.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Gerolymos, G. A. e Vallet, I. (2013). Pressure, density, temperature and entropy fluctuations in compressible turbulent plane channel flow. *arXiv*, página 1311.4330v1. compressible turbulence.

- Hauf, T., Finke, U., Neisser, J., Bull, G., e Stangenberg, J.-G. (1996). A ground-based network for atmospheric pressure fluctuations. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 13:1001–1023.
- Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- Iribarne, J. V. e Godson, W. L. (1986). *Atmospheric Thermodynamics*. D. Reidel, Dordrecht.
- James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Kader, B. A. e Yaglom, A. M. (1989). Spectra and correlation functions of surface layer atmospheric turbulence in unstable thermal stratification. Em Métais, O. e Lesieur, M., editores, *Turbulence 89: Organized Structures and Turbulence in Fluid Mechanics*, páginas 387–412. Kluwer Academic Press.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (in Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).
- Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kondepudi, D. e Prigogine, I. (1998). *Modern thermodynamics — From heat engines to dissipative structures*. John Wiley & Sons.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lesieur, M. (1990). *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2nd<sup>a</sup> edição.
- Liggett, J. A. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Müller, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Advanced Publishing Program.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Morris, H. M. e Wiggert, J. M. (1972). *Applied hydraulics in engineering*. John Wiley & Sons, New York, 2<sup>a</sup> edição.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, New York, 3rd<sup>a</sup> edição.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans.*, 186:126–64.

- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Richardson, L. F. (1920). Some measurements of atmospheric turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. A* 221:1–28.
- Rosenthal, J. S. (2008). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Slattery, J. C. (1972). *Momentum, energy, and mass transfer in continua*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- Speziale, C. G. (1991). Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1):107–157.
- Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wosnik, M., Castillo, L., e George, W. K. (2000). A theory for turbulent pipe and channel flows. *J. of Fluid Mech.*, 421:115–146.
- Wyngaard, J. C. (1981). Boundary-layer modeling. Em Nieuwstadt, F. T. M. e van Dop, H., editores, *Atmospheric turbulence and air pollution modelling*, capítulo 3. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Wyngaard, J. C. (2010). *Turbulence in the atmosphere*. Cambridge.