Lições de Teoria Ergódica, Processos Estocásticos e Sistemas Dinâmicos

Nelson Luís Dias

11 de março de 2014

Capítulo 1

Introdução

Em 1895, Osborne Reynolds publicou um artigo sobre escoamentos turbulentos no qual pela primeira vez aparece o que hoje denominamos decomposição de Reynolds: o campo de velocidade $\boldsymbol{U} = U_i \boldsymbol{e}_i$ de um fluido foi decomposto em $U_i = \langle U_i \rangle + u_i$ ("média" e "flutuação"), e equações para as médias $\langle U_i \rangle$, e para o segundo momento $\langle u_i u_i \rangle /2$, foram deduzidas a partir de promediações das equações de Navier-Stokes para U_i (a velocidade do fluido no ponto $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, e no instante t).

Reynolds deu à promediação '$\langle \cdot \rangle$' que ele usou o significado de uma média espacial, num procedimento claramente inspirado pelo trabalho anterior, e pioneiro, de Maxwell sobre a teoria cinética dos gases (Maxwell, 1867).

Imediatamente, percebeu-se que a dedução das equações para os momentos de ordem 1 e 2 (as equações de Reynolds) a partir das equações de Navier-Stokes requeria um conjunto de postulados, *que não aparece explicitamente no artigo de 1895*:

$$\langle u_i \rangle = 0, \tag{1.1}$$

$$\langle \langle U_i \rangle \rangle = 0, \tag{1.2}$$

$$\langle u_i \langle U_j \rangle \rangle = 0, \tag{1.3}$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}, \tag{1.4}$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}. \tag{1.5}$$

Os "postulados" (1.1)–(1.5) aparecem, de uma forma ou de outra, em todos os livros-texto importantes de turbulência. Por exemplo (e a lista não é abrangente): Hinze (1975), Tennekes e Lumley (1972), Monin e Yaglom (1975), Pope (2000).

O significado original da promediação de Reynolds não se manteve: a analogia entre o movimento das moléculas de um gás e o das partículas materiais de um fluido (debaixo da hipótese do contínuo) é essencialmente insustentável (Tennekes e Lumley, 1972, Capítulo 1).

Curiosamente, em nenhum caso os autores acima (ou quaisquer outros que sejam de nosso conhecimento) procuram deduzir matematicamente (1.1)–(1.5), com a possível exceção de Kundu (1990), que o faz para um *ensemble*, supostamente finito, de realizações do escoamento turbulento.

A definição mais comumente encontrada de '$\langle\cdot\rangle$', e que formalizaremos neste texto, é o de uma média probabilística (*ensemble average*), mas mesmo aqui uma definição precisa não pode ser encontrada na literatura.

A abordagem era promissora, e logo Reynolds recebeu a companhia ilustre de Einstein (1905) (movimento browniano), Langevin (1908) (idem), Taylor (1935a,b,c,d), e, naturalmente, Kolmogorov Kolmogorov (1941).

Entretanto, o *significado* de se tomar médias probabilísticas sobre os resultados de um processo determinístico está longe de ser óbvio. Intuitivamente, a motivação é que o processo é suficientemente "complexo" (as velocidades das moléculas de um gás; um escoamento turbulento; o movimento browninao; etc.) para que seja mais fácil lidar apenas com médias e desvios-padrão, ou seja, *estatísticas*, e não com realizações, trajetórias, moléculas, partículas, etc., *individuais*. Ainda assim, do ponto de vista experimental, a tomada de médias sobre realizações é fortemente restrita pela disponibilidade de tais realizações. A saída é supor, debaixo de hipóteses adicionais tais como estacionariedade (mas que por si só não é suficiente), que médias tomadas sobre um número pequeno de realizações (tão pequeno quanto uma única) são capazes de estimar as médias de *ensemble*. Essa é a *hipótese ergódica*.

De todo modo, os procedimentos adotados pelos pioneiros eram necessariamente intuitivos, e tiveram que aguardar, como acontece tantas vezes na história da Física e da Matemática, por formalização posterior. A própria teoria de probabilidade só seria definitivamente formalizada por Kolmogorov em 1933; o teorema ergódico é devido a Birkhoff (1931), e a von Neumann (1932).

Finalmente, as conexões entre processos estocásticos e sistemas dinâmicos, que em última análise justificam o procedimento informal dos pioneiros, parecem ser ainda mais recentes (ver Lebowitz e Penrose, 1973; Collet, 2010).

Neste texto, nós procuramos ao mesmo tempo traçar uma parte da história da abordagem estatística de sistemas dinâmicos, desde Maxwell (1867) até a atualidade, e prover um nível intermediário de formalização.

A formalização aqui não é feita no espírito de "arte pela arte", mas sim no de embasar mais firmemente as análises de caráter probabilístico de sistemas físicos determinísticos, representados matematicamente por sistemas dinâmicos.

Capítulo 2

2014-02-19: Aditividade finita

Como conceitualizamos e formalizamos a propabilidade?

Existem várias abordagens possíveis:

1. Clássica (teórica ou "a priori"):

   Consideramos um processo aleatório com n resultados igualmente prováveis, e um evento A que consiste em m desses resultados. A probabilidade desse evento é então definida por
   $$P(A) \equiv \frac{m}{n}.$$
   Crítica: no termo "igualmente prováveis", já há a suposição de que nós "sabemos" o que é probabilidade antes de defini-la. Trata-se portanto de um argumento circular. (COMO PODEMOS MELHORAR ESSE TEXTO?)

2. Empírica ("a posteriori" ou frequentista):

   Supõe-se que um determinado experimento é repetido n vezes "nas mesmas condições". Se A é um evento identificável no experimento, a probabilidade de A é definida como o limite da razão entre número m de ocorrências de A e o número de repetições n quando $n \to \infty$:
   $$P(A) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

3. Subjetiva:

   Aceita-se que podemos atribuir a diversos eventos uma "probabilidade" de ocorrência. Por exemplo, eu *acho* que a probabilidade de que eu encontre petróleo no terreno de minha casa é (ou deve ser) 10^{-12}.

4. Axiomática (Kolmogorov, 1933).

   Uma tripla de propabilidade é uma tripla formada por $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, sendo Ω um conjunto não vazio, $\mathscr{F}$ um campo sigma (uma σ-álgebra) de subconjuntos de Ω (PRECISAMOS USAR OS TERMOS CORRETOS), e P uma função, com

$$
\begin{aligned}
P &: \mathscr{F} \to [0,1], \\
A &\in \mathscr{F} \mapsto P(A).
\end{aligned}
$$

Axiomas:

$$P(A) \geq 0, \tag{2.1}$$

$$P(\Omega) = 1, \tag{2.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad \text{se} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset. \tag{2.3}$$

Os axiomas funcionam quando Ω é finito. Contudo, há conjuntos maiores/infinitos (?) para os quais a noção de probabilidade não faz sentido. Assim, uma σ-álgebra será um subconjunto de 2^{Ω} com uma certa estrutura, para o qual deverá fazer sentido especificar probabilidades.

Exemplo: Sabendo que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, prove por indução que o axioma (2.3) vale para todo n se ele valer para $n = 2$.

Para $n = 2$,

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i). \tag{2.4}$$

Suponha agora que (2.3) valha para n, e que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \emptyset, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Então,

$$P\left(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}\right) = P(B \cup A_{n+1}), \tag{2.5}$$

fazendo-se

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

A partir de (2.4),

$$P\left(B \cup A_{n+1}\right) = P(B) + P(A_{n+1}). \tag{2.6}$$

Por sua vez, como supusemos a validade de (2.3),

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{2.7}$$

Logo,

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \tag{2.8}$$

Note entretanto que, para que a prova seja válida, precisamos garantir que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \emptyset \Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Faça $C = A_{n+1}$, e considere a igualdade:

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i. \tag{2.9}$$

Se ela for verdadeira, então:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \emptyset &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i = \emptyset \\ &\Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portanto, se (2.9) for verdadeira, a questão está liquidada.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &\Rightarrow (x \in C) \text{ e } \left(x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right), \\ &\Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, (x \in C) \text{ e } (x \in A_j) \\ &\Rightarrow x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i &\Rightarrow \exists j \,|\, x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in C \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i \subseteq C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right].$$

Com isso, (2.9) está provada, e chegamos ao fim (desta prova).

Notas de Aula Professor Paulo Cezar P. de Carvalho - Ailin

Modelos elementares

$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ →espaço amostral

$\mathscr{F} = 2^{\Omega} \rightarrow$é o conjunto potência e inclui todos o subconjuntos de Ω, e, em particular, inclui $\{\omega_1\}$,$\{...\}$,$\{\omega_n\}$, os quais são chamados eventos complementares.

$$P(\{\omega_i\}) = P_i \in [0,1] \mid \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{2.10}$$

Caso equiprovável: $P_i = 1/n, \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo: 3 moedas são lançadas. Qual a probabilidade de sairem 2 caras?

Como defino Ω? Se considerarmos $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, as probabilidades são $1/8$ para 0 e 3, e $3/8$ para 1 e 2. Para $i = 0, 1, 2, 3$, temos

$$P(i) = \left(\frac{1}{8}\right)^{i} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{3-i} \binom{3}{i}, \tag{2.11}$$

distribuição binomial herdada do modelo equiprovável.

Exemplo: Escolher um número no intervalo $[0, 1]$ tal que $P([a, b]) = b - a$ para qualquer intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$.

$\Omega = [0, 1]$

A primeira tentativa seria atribuir $P(\{a\})$. Se for equiprovável com $P \neq 0$ já estaria em contradição com a aditividade.

Com um conjunto enumerável (infinito) não é possível ter equiprobabilidade nem atribuindo probabilidade nula, porque não conseguiremos que a “soma"das $P(\{\})$ seja 1.

Capítulo 3

2014-02-24: Aditividade infinita

(Ou σ–Aditividade)

Passamos agora para casos em que o espaço amostral Ω deixa de ser um conjunto finito. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não-enumerável. Um conjunto enumerável é um conjunto cujos elementos possam ser colocados em uma relação biunívoca com os naturais. Os racionais são um conjunto enumerável (Cantor). Os números reais no intervalo fechado $[0, 1]$ são um conjunto não-enumerável.

Quando Ω é finito, todos os elementos de 2^Ω são eventos: a todos e a cada um deles pode ser atribuída uma probabilidade, e os axiomas (2.1)– (2.3) se aplicam.

Antes de seguir para o infinito, considere o exemplo: n lançamentos de uma moeda, cujos resultados individuais podem ser "cara" (0) ou "coroa" (1). Os eventos elementares com os quais podemos construir um espaço amostral são n-uplas do tipo

$$\begin{gathered}(0, 0, \ldots, 0, 0)\\ (0, 0, \ldots, 0, 1)\\ (0, 0, \ldots, 1, 0)\\ \vdots\\ (1, 1, \ldots, 1, 1).\end{gathered}$$

Existem 2^n casos.

Suponha por exemplo que desejemos calcular a probabilidade de que ocorram k caras (e, consequentemente, $n - k$ coroas). Um evento deste tipo (exatamente k caras e $n - k$ coroas) pode ocorrer de $n!$ maneiras. No entanto, a posição das k caras é imaterial: todos os $k!$ casos aparecem da mesma forma. Idem para os $(n - k)!$ casos de permuta das posições das coroas. Concluímos que há

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

possibilidades de ocorrência de k caras. A sua probabilidade é

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Isso é um caso particular da distribuição binomial. Se 0 tem probabilidade p, e 1 tem probabilidade $1 - p$, a probabilidade de k zeros em n lançamentos é

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exercício: Mostre que
$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = 1.$$
Prova:

$$\begin{aligned}(p+(1-p))^n &= 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(k).\end{aligned}$$

Agora, se $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ for enumerável, precisamos de

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$

e fica evidente que os $P(x_i)$ não podem ser todos iguais. Entretanto, ainda é possível aproveitar os x_i's desde que a soma acima funcione.

Exemplo: Em um jogo, dez bolas numeradas de 0 a 9 podem ser sorteadas. Cada jogador sorteia uma bola, mostra o resultado e retorna a bola. Ganha o primeiro jogador que sortear um 7. O jogo poderia durar para sempre?

Nossa opção para construção do espaço amostral é

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

0 significa que o 7 *nunca* é sorteado; 1 significa que o 7 foi sorteado na primeira rodada; 2 na segunda; e assim por diante. As probabilidades desses eventos não são iguais:

$$\begin{aligned}P(0) &= ?, \\ P(1) &= \frac{1}{10}, \\ P(2) &= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ P(3) &= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ &\vdots \\ P(n) &= \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}\end{aligned}$$

É elementar verificar que $P(n)$, $n \geq 1$, é uma série geométrica com soma 1. Portanto, o evento "o 7 nunca é sorteado", indicado por 0, tem probabilidade complementar à $P(1) + P(2) + \ldots = 1$, e sua probabilidade é zero.

Finalmente, considere o caso em que desejamos atribuir probabilidades dentro do conjunto não-enumerável $\Omega = [0, 1]$. Note que faz sentido atribuir probabilidade zero a um ponto qualquer:
$$P(X = a) = 0$$

e que é muito razoável atribuir probabilidades a intervalos:

$$P([a,b]) = b - a.$$

O problema é que se A é um evento, o seu complemento $\overline{A}$ também tem que ser, com $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, pela propriedade de aditividade finita (2.3). Portanto, se $(a,b] \in \mathscr{F}$, devemos também ter $\overline{(a,b]} \in \mathscr{F}$, onde $\mathscr{F}$ será a classe dos eventos cujas probabilidades podem ser quantificadas.

Entretanto, o complemento de um único intervalo $(a,b]$ *não* é um único intervalo. Desconfiamos que uma criatura desse tipo, $[0,a] \cup (b,1]$, precisa ser definida com as mesmas propriedades genéricas de $(a,b]$, de forma que ambos pertençam a $\mathscr{F}$. O caminho para $\mathscr{F}$, entretanto, é longo.

Uma extensão do que vimos para a binomial é a distribuição multinomial:

$$1 = (p_1 + \ldots + p_n)^n = \sum_{l_1+\ldots+l_k=n} \binom{n}{l_1 \ldots l_k} p_1^{l_1} \ldots p_k^{l_k},$$
$$\binom{n}{l_1 \ldots l_k} = \frac{n!}{l_1! \ldots l_k!}.$$

Capítulo 4

2014-02-26: Semi-anéis, anéis, e outros bichos

Definição

Uma classe $\mathscr{S}$ de conjuntos é um *semi-anel* quando:

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathscr{S}, \\ A, B \in \mathscr{S} &\Rightarrow A \cap B \in \mathscr{S}, \\ A, B \in \mathscr{S} &\Rightarrow A - B = A \cap \overline{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i, \end{aligned}$$

onde $E_i \in \mathscr{S}$. O símbolo $\bigsqcup$ significa "uniões disjuntas".

Seja $\mathscr{S}$ a classe formada por *intervalos* do tipo

$$(a, b] \qquad \text{ou} \qquad \emptyset.$$

1. $\emptyset \in \mathscr{S}$? Sim.
2. A interseção de dois elementos de $\mathscr{S}$ pertence a $\mathscr{S}$?

   Sim: as possibilidades para interseção de $(a, b]$ com $(c, d]$ são

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathscr{S}, \\ (c, b] &\in \mathscr{S}, \\ (c, d] &\in \mathscr{S}, \\ (a, d] &\in \mathscr{S}, \\ (a, b] &\in \mathscr{S}. \end{aligned}$$

   Talvez seja possível resumir:

$$(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)) \qquad \text{ou} \qquad \emptyset?$$

3. $A - B$ (A, B intervalos) é exprimível como uma união finita disjunta de intervalos?

   Sim:

$$\begin{aligned} (a, b] \cap \overline{(c, d]} &= (a, b] \cap \Big[(0, c] \cup (d, 1]\Big] \\ &= \underbrace{(a, b] \cap (0, c]}_{\in \mathscr{S}} \cup \underbrace{(a, b] \cap (d, 1]}_{\in \mathscr{S}} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Portanto, essa classe $\mathscr{S}$ de intervalos é um semi-anel.
Definição:
$\mathscr{R} \subset 2^{\Omega}$ é um *anel* quando:

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathscr{R}, \\ A, B \in \mathscr{R} &\Rightarrow A \cap B \in \mathscr{R}, \\ A, B \in \mathscr{R} &\Rightarrow A \bigtriangleup B \in \mathscr{R}. \end{aligned}$$

Lembre-se:

$$A \bigtriangleup B \equiv (A - B) \cup (B - A).$$

Tivemos uma discussão sobre o motivo de se usar a diferença simétrica nessas definições: alguém gostaria de resumir a discussão em LaTeX?
Anéis triviais são:

$$\{\emptyset, \Omega\} \qquad \text{e} \qquad 2^{\Omega}.$$

É possível mostrar as seguintes propriedades de anéis: se $A, B \in \mathscr{R}$, então:

$$\begin{aligned} A \cap B &\in \mathscr{R}, \\ A \bigtriangleup B &\in \mathscr{R}, \\ A \cup B &\in \mathscr{R}, \\ A - B &\in \mathscr{R}, \\ B - A &\in \mathscr{R}, \\ \emptyset &\in \mathscr{R}. \end{aligned}$$

Mas a última não faz parte da *definição* de $\mathscr{R}$????
Note também que o complemento ainda não apareceu na jogada.
Teorema
A partir de um semi-anel $\mathscr{S}$ é possível construir um anel $\mathscr{R}$ por meio somente de uniões disjuntas finitas de elementos de $\mathscr{S}$, ou seja:

$$\mathscr{R} = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right\}, \; A_i \in \mathscr{S}.$$

Definição
Uma *álgebra* ou um *campo* $\mathscr{A}$ é um anel que contém Ω. Segue-se imediatamente que

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}.$$

Definição Um σ-anel é um anel fechado por uma união enumerável
Comentário: "fechado" significa que uniões enumeráveis de elementos do σ-$\mathscr{R}$ ainda pertencem a ele.
Segue-se imediatamente que o σ-$\mathscr{R}$ também é fechado por interseções enumeráveis.
Definição Uma σ-álgebra ou σ-campo ou campo de Borel é uma álgebra fechada por uniões enumeráveis.
Segue-se imediatamente que uma σ-álgebra também é fechada por interseções enumeráveis.

Definição Dada uma classe $\mathscr{C} \subseteq 2^{\Omega}$, uma sequência monótona de elementos $E_i \in \mathscr{C}$, $i \in \mathbb{N}$, é definida por

$$E_i \subseteq E_{i+1}$$

ou

$$E_i \supseteq E_i.$$

Definição Uma classe $\mathscr{M}$ é dita *monótona* quando todas as suas sequências monótonas atendem a:

$$E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M},$$

ou

$$E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigsqcap_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}.$$

A questão agora é como construir σ-álgebras a partir de álgebras, anéis ou semi-anéis.

Teorema: Para as famílias $\mathscr{R}$, $\mathscr{A}$, σ-$\mathscr{R}$, σ-$\mathscr{A}$, $\mathscr{M}$ de anéis, álgebras, sigma-anéis, sigma-álgebras, e classes monótonas $\mathscr{M}$, interseções arbitrárias produzem famílias de mesmo tipo.

Em resumo: se $\mathscr{F}_i$, $i \in I$, são classes de algum dos tipos acima, então

$$\bigsqcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$$

também é.

Por exemplo: se

$$\mathscr{F}_i, \ i \in I$$

são σ-álgebras, então

$$\bigsqcap_{i \in I} \mathscr{F}_i$$

também é uma σ-álgebra.

4.1 Geração de σ-álgebras

Seja $\mathscr{S}$ um semi-anel que gera o anel $\mathscr{R}$. A *menor* σ-álgebra contendo $\mathscr{S}$ ou gerada por $\mathscr{R}$ é denominada "σ-álgebra de Borel" $\mathscr{B}$.

No caso de $\Omega = [0, 1]$, a σ-álgebra de Borel é a menor σ-álgebra que contém os intervalos $(a, b]$.

Para ela, é possível definir uma medida de probabilidade

$$P : \mathscr{B} \to [0, 1],$$
$$A \in \mathscr{B} \mapsto P(A) \in [0, 1],$$

de tal forma que

$$
\begin{aligned}
P(\emptyset) &= 0, \\
P(\Omega) &= 1, \\
P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

2014-03-10: Existe um conjunto não-mensurável em $(0,1]$

Uma nova operação será usada *ad nauseam* nesta lição. Para $x, y \in (0,1]$:

$$x \boxplus y \equiv \begin{cases} x+y, & x+y \le 1, \\ x+y-1, & x+y > 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Seguem-se imediatamente os seguintes fatos: para $x, y, z \in (0,1]$,

$$x \boxplus y = y \boxplus x, \tag{5.2}$$

$$z = x \boxplus y \Leftrightarrow \exists\, r \in (-1,+1] : z = x + r. \tag{5.3}$$

Agora, para *qualquer* subconjunto E de $(0,1]$, defina um novo conjunto $E(x)$

$$E(x) \equiv \{x \boxplus y,\ y \in E\}\,. \tag{5.4}$$

$E(x)$ é a *translação* (de uma distância x) do conjunto E.

Dúvida: $E \subseteq (0,1]$ ou $E \in \mathscr{B}$?

Dúvida: "translação *em x*" me soa estranho, pois todo $y \in E$ é transladado *de* x.

Suponha que exista uma coisa tal como uma medida "natural" em $(0,1]$. Para o intervalo $(a,b]$ essa medida é

$$|(a,b]| \equiv b - a. \tag{5.5}$$

Vamos supor, sem entrar em muitos detalhes, que para todo $B \in \mathscr{B}$, existe uma $|B|$ compatível com (5.5), *i.e.*, redutível a (5.5) se B for um intervalo.

A notação $E(x)$ é a usada por Taylor (1973).

Agora, se $E \in \mathscr{B}$, então,

$$|E(x)| = |E|. \tag{5.6}$$

Agora, como sempre, $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos racionais. Esse conjunto é enumerável. Consideremos os racionais contidos em $(0,1]$. Esse segundo conjunto é

$$Q \equiv \mathbb{Q} \cap (0,1]. \tag{5.7}$$

Valeria a pena provar que

Q é enumerável.

Com essas definições à mão, estudemos então as propriedades dos conjuntos do tipo $Q(x)$.

1.
$$x \in (0,1] \Rightarrow x \in Q(x). \tag{5.8}$$
Será verdade? Como provar?
$$Q(x) = \{x \boxplus y,\ y \in Q\}$$
Se 0 pertencesse a Q, (5.8) seria trivial. Mas é quase, porque $1 \in Q$. Faça $y = 1$ acima; então,
$$x = x + 1 - 1 = x \boxplus 1 \in Q(x) \blacksquare$$

2.
$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q. \tag{5.9}$$
De fato: para começar, $x, y \in Q \Rightarrow x \boxplus y \in Q$. De fato, $x \boxplus y \in (0,1]$, e tanto $x + y$ quanto $x + y - 1$, conforme for o caso, são números racionais em $(0,1]$. Isso basta!, pois, *neste caso*, $Q(x) = \{x \boxplus y,\ y \in Q\} = Q \blacksquare$

3.
$$x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset, \tag{5.10}$$
$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2). \tag{5.11}$$
Dessa forma, os conjuntos $\{Q(x),\ x \in (0,1]\}$ (que constituem uma *classe*, ou *família*) particionam o intervalo $(0,1]$ em subconjuntos disjuntos cuja união é o próprio $(0,1]$. Há bastante material aqui. Antes das deduções, vamos escrever formalmente essa última observação:
$$\bigcup_{x \in (0,1]} Q(x) = (0,1].$$
Note também que os índices na expressão acima são demasiados, devido a (5.11). Queremos chegar a uma afirmação mais econômica:
$$\bigsqcup_{x \in T} Q(x) = (0,1]$$
(note a disjunção). Na sequência, precisamos provar (5.10)–(5.11) e prosseguir na obtenção do conjunto T. Esse último se revelará um conjunto interessante, e na verdade o ponto final desta lição: T se revelará um conjunto *não mensurável.*

Para provar (5.10): Vamos tentar *reductio ad absurdum.* Seja $z \in Q(x_1)$ e $z \in Q(x_2)$: nesse caso, a interseção $Q(x_1) \cap Q(x_2)$ não seria o conjunto vazio. Porém, debaixo dessa hipótese:
$$z = x_1 \boxplus y,\ y \in Q,$$
$$z = x_2 \boxplus y,\ y \in Q.$$

Agora,

$$\begin{aligned}(x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) &= x_1 - x_2, \text{ ou}\\ &= x_1 - x_2 - 1 \text{ ou}\\ &= x_1 - x_2 + 1.\end{aligned}$$

Portanto, subtraindo (dessa forma) as duas expressões acima,

$$(-1 \text{ ou } 0 \text{ ou } +1) = x_1 - x_2.$$

mas $(-1, 0, +1)$ são racionais, o que contraria a hipótese original sobre $x_1 - x_2$ ∎

Para provar (5.11): Volte acima e escreva a expressão geral:

$$(x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) = x_1 - x_2 + s,$$

onde, como vimos, ou $s = 0$ ou $s = -1$ ou $s = +1$. Reescreva:

$$x_1 \boxplus y = x_2 \boxplus y + (x_1 - x_2) + s.$$

Note agora que é *sempre* possível escrever $x_2 \boxplus y = x_2 + r$ (veja (5.3)), *onde agora r é racional*, e não necessariamente está em Q. Substitua:

$$x_1 \boxplus y = x_2 + r + s + (x_1 - x_2).$$

O lado esquerdo é um número em Q. Portanto, o lado direito é um número em Q:

$$x_2 + p \in Q, \tag{5.12}$$

onde $p = (r + s + (x_1 - x_2))$ e portanto $p \in \mathbb{Q}$ (mas não necessariamente $p \in Q$). Agora, utilizando (5.3), vemos que é possível escrever o lado direito como $x_2 \boxplus z$, onde $z \in Q$. Disso se segue que

$$\{x_1 \boxplus y,\ y \in Q\} = \{x_2 \boxplus z,\ z \in Q\}$$

e portanto $Q(x_1) = Q(x_2)$ ∎

Relembrando:

$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q$$

significa, por exemplo:

$$Q(1/2) = Q(1/3) = Q(1).$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{I} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{3}/2) \cap Q(3/2) = \emptyset.$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2)$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{2}/1000 + 1/8) = Q(\sqrt{2}/1000 + 3/8)$$

Ou seja: as criaturas estão ficando estranhas.

Para fechar esta parte bastante cansativa para a mente:

$$\bigcup_{x \in (0,1]} Q(x) = (0, 1]$$

pois $x \in Q(x)$.

5.1 O axioma da seleção e um conjunto estranho

Seja $\mathscr{C}$ a família dos conjuntos $Q(x)$, $x \in (0,1]$. Escolha um único ponto em $(0,1]$ pertencente a cada $Q(x)$. O conjunto dos pontos assim escolhidos será chamado T, e temos que $T \subset (0,1]$. O que fizemos significa que, *por definição*, não há dois pontos em T pertencendentes ao mesmo $Q(x)$. Segue-se que

$$\bigsqcup_{t \in T} Q(t) = (0,1].$$

Estudemos as propriedades dos conjuntos $T(r_i), r_i \in Q$.

1.
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0,1]. \tag{5.13}$$

   Só precisamos provar que, se $x \in (0,1]$, $\exists i \in Q : x \in T(r_i)$. Mas, de (5.8), segue-se que $x \in (0,1] \Rightarrow x \in Q(x)$. Agora, portanto, se $x \in Q(x)$, escolha $t \in Q(x)$, onde t é o representante de $Q(x)$: $t \in T$.

   Veja:

$$Q(x) = x \boxplus y,\ y \in Q,$$
$$t \in Q(x) \Rightarrow t = x \boxplus y \text{ para algum } y \in Q.$$

   Logo, de (5.3), existe algum $q \in Q$ tal que $t = x + q$; pelo mesmo motivo agora deve existir algum $r \in Q$ tal que $x = t + r$. Mas Q é enumerável (não provamos!), portanto existe um índice i tal que $x = t + r_i$, $i \in \mathbb{N}$, e $Q = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} r_i$. Logo, $x \in T(r_i)$. A união dos $T(r_i)$ gera o $(0,1]$.

2. Os $T(r_i)$ são disjuntos. Lembre-se de que T contém um único representante de cada $Q(x)$. Se houvesse $r_i \neq r_j$ com $y \in [T(r_i) \cap T(r_j)]$, então teríamos

$$y = t_i \boxplus r_i \qquad \text{e}$$
$$y = t_j \boxplus r_j.$$

   “Subtraia”:

$$0 = (t_i - t_j) + q$$

   onde q é racional (novamente, nós usamos (5.3)). Logo, $t_i - t_j$ é racional, donde $Q(t_i) = Q(t_j)$ (devido a (5.11)). Mas isso não é possível, porque $Q(t_i)$ possui um único representante em T. Portanto, a disjunção dos $T(r_i)$'s transforma (5.13) em

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0,1]. \tag{5.14}$$

Finalmente: se T fosse mensurável, haveria $|T| = |T(r_i)|$ para todo i. Agora, pela sigma-aditividade:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T(r_i)| = |(0,1]| = 1.$$

Isso, nós também já vimos em outra lição, é impossível. T não pode ser mensurável ∎

Referências Bibliográficas

Birkhoff, G. D. (1931). Proof of the Ergodic Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12):656–660.

Collet, P. (2010). Dynamical Systems and Stochastic Processes.

Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560.

Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Foundations of the theory of probability)*. Springer, Berlin.

Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).

Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.

Langevin, P. (1908). Sur la théorie du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 146:530–533.

Lebowitz, J. L. e Penrose, O. (1973). Modern ergodic theory. *Physics Today*, 26(2):23–29.

Lemons, D. S. e Gythiel, A. (1997). Paul Langevin's 1908 paper "On the Theory of Brownian Motion"["Sur la théorie du mouvement brownien,"C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, 65(11):1079–1081.

Maxwell, J. C. (1867). On the Dynamical Theory of Gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157:pp. 49–88.

Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1975). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 2. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.

Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.

Taylor, G. I. (1935a). Statistical theory of turbulence. I. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–444.

Taylor, G. I. (1935b). Statistical theory of turbulence. II. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:444–454.

Taylor, G. I. (1935c). Statistical theory of turbulence. III. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:455–464.

Taylor, G. I. (1935d). Statistical theory of turbulence. IV. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:465–478.

Taylor, S. J. (1973). *Introduction to measure and integration.* Cambridge University Press.

Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

von Neumann, J. (1932). Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik. *The Annals of Mathematics*, 33(3):587.