

Lições de Teoria Ergódica, Processos Estocásticos e Sistemas Dinâmicos

Nelson Luís Dias

10 de março de 2014

Capítulo 1

2014-02-19: Aditividade finita

Como conceitualizamos e formalizamos a propabilidade?

Existem várias abordagens possíveis:

1. Clássica (teórica ou “a priori”):

Consideramos um processo aleatório com n resultados igualmente prováveis, e um evento A que consiste em m desses resultados. A probabilidade desse evento é então definida por

$$P(A) \equiv \frac{m}{n}.$$

Crítica: no termo “igualmente prováveis”, já há a suposição de que nós “sabemos” o que é probabilidade antes de defini-la. Trata-se portanto de um argumento circular. (COMO PODEMOS MELHORAR ESSE TEXTO?)

2. Empírica (“a posteriori” ou frequentista):

Supõe-se que um determinado experimento é repetido n vezes “nas mesmas condições”. Se A é um evento identificável no experimento, a probabilidade de A é definida como o limite da razão entre número m de ocorrências de A e o número de repetições n quando $n \rightarrow \infty$:

$$P(A) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

3. Subjetiva:

Aceita-se que podemos atribuir a diversos eventos uma “probabilidade” de ocorrência. Por exemplo, eu *acho* que a probabilidade de que eu encontre petróleo no terreno de minha casa é (ou deve ser) 10^{-12} .

4. Axiomática (Kolmogorov, 1933).

Uma tripla de propabilidade é uma tripla formada por (Ω, \mathcal{F}, P) , sendo Ω um conjunto não vazio, \mathcal{F} um campo sigma (uma σ -álgebra) de subconjuntos de Ω (PRECISAMOS USAR OS TERMOS CORRETOS), e P uma função, com

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A).$$

Axiomas:

$$P(A) \geq 0, \quad (1.1)$$

$$P(\Omega) = 1, \quad (1.2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad \text{se} \quad A_i \cap A_j = \emptyset. \quad (1.3)$$

Os axiomas funcionam quando Ω é finito. Contudo, há conjuntos maiores/infinitos (?) para os quais a noção de probabilidade não faz sentido. Assim, uma σ -álgebra será um subconjunto de 2^Ω com uma certa estrutura, para o qual deverá fazer sentido especificar probabilidades.

Exemplo: Sabendo que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, prove por indução que o axioma (1.3) vale para todo n se ele valer para $n = 2$.

Para $n = 2$,

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = \sum_{i=1}^2 P(A_i). \quad (1.4)$$

Suponha agora que (1.3) valha para n , e que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(B \cup A_{n+1}), \quad (1.5)$$

fazendo-se

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

A partir de (1.4),

$$P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}). \quad (1.6)$$

Por sua vez, como supusemos a validade de (1.3),

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.7)$$

Logo,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \quad (1.8)$$

Note entretanto que, para que a prova seja válida, precisamos garantir que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset \Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \forall i = 1, \dots, n.$$

Faça $C = A_{n+1}$, e considere a igualdade:

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i. \quad (1.9)$$

Se ela for verdadeira, então:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i = \emptyset \\ &\Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto, se (1.9) for verdadeira, a questão está liquidada.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in C \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] &\Rightarrow (x \in C) \text{ e } \left(x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \right), \\ &\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} \mid (x \in C) \text{ e } (x \in A_j) \\ &\Rightarrow x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i &\Rightarrow \exists j \mid x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in C \cap \bigcup_{i=1}^n A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\bigcup_{i=1}^n C \cap A_i \subseteq C \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right].$$

Com isso, (1.9) está provada, e chegamos ao fim (desta prova).

Notas de Aula Professor Paulo Cezar P. de Carvalho - Ailin

Modelos elementares

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \rightarrow \text{espaço amostral}$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ é o conjunto potência e inclui todos os subconjuntos de Ω , e, em particular, inclui $\{\omega_1\}, \{\dots\}, \{\omega_n\}$, os quais são chamados eventos complementares.

$$P(\{\omega_i\}) = P_i \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (1.10)$$

Caso equiprovável: $P_i = 1/n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo: 3 moedas são lançadas. Qual a probabilidade de saírem 2 caras?

Como defino Ω ? Se considerarmos $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, as probabilidades são $1/8$ para 0 e 3, e $3/8$ para 1 e 2. Para $i = 0, 1, 2, 3$, temos

$$P(i) = \left(\frac{1}{8}\right)^i \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{3-i} \binom{3}{i}, \quad (1.11)$$

distribuição binomial herdada do modelo equiprovável.

Exemplo: Escolher um número no intervalo $[0, 1]$ tal que $P([a, b]) = b - a$ para qualquer intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$.

$\Omega = [0, 1]$

A primeira tentativa seria atribuir $P(\{a\})$. Se for equiprovável com $P \neq 0$ já estaria em contradição com a aditividade.

Com um conjunto enumerável (infinito) não é possível ter equiprobabilidade nem atribuindo probabilidade nula, porque não conseguiremos que a “soma” das $P(\{\})$ seja 1.

Capítulo 2

2014-02-24: Aditividade infinita

(Ou σ -Aditividade)

Passamos agora para casos em que o espaço amostral Ω deixa de ser um conjunto finito. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não-enumerável. Um conjunto enumerável é um conjunto cujos elementos possam ser colocados em uma relação biunívoca com os naturais. Os racionais são um conjunto enumerável (Cantor). Os números reais no intervalo fechado $[0, 1]$ são um conjunto não-enumerável.

Quando Ω é finito, todos os elementos de 2^Ω são eventos: a todos e a cada um deles pode ser atribuída uma probabilidade, e os axiomas (1.1)–(1.3) se aplicam.

Antes de seguir para o infinito, considere o exemplo: n lançamentos de uma moeda, cujos resultados individuais podem ser “cara” (0) ou “coroa” (1). Os eventos elementares com os quais podemos construir um espaço amostral são n -uplas do tipo

$$\begin{aligned} &(0, 0, \dots, 0, 0) \\ &(0, 0, \dots, 0, 1) \\ &(0, 0, \dots, 1, 0) \\ &\vdots \\ &(1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Existem 2^n casos.

Suponha por exemplo que desejemos calcular a probabilidade de que ocorram k caras (e, consequentemente, $n - k$ coroas). Um evento deste tipo (exatamente k caras e $n - k$ coroas) pode ocorrer de $n!$ maneiras. No entanto, a posição das k caras é imaterial: todos os $k!$ casos aparecem da mesma forma. Idem para os $(n - k)!$ casos de permuta das posições das coroas. Concluimos que há

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

possibilidades de ocorrência de k caras. A sua probabilidade é

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Isso é um caso particular da distribuição binomial. Se 0 tem probabilidade p , e 1 tem probabilidade $1 - p$, a probabilidade de k zeros em n lançamentos é

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Exercício: Mostre que

$$\sum_{k=0}^n P(k) = 1.$$

Prova:

$$\begin{aligned}(p + (1 - p))^n &= 1 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n P(k).\end{aligned}$$

Agora, se $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ for enumerável, precisamos de

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

e fica evidente que os $P(x_i)$ não podem ser todos iguais. Entretanto, ainda é possível aproveitar os x_i 's desde que a soma acima funcione.

Exemplo: Em um jogo, dez bolas numeradas de 0 a 9 podem ser sorteadas. Cada jogador sorteia uma bola, mostra o resultado e retorna a bola. Ganha o primeiro jogador que sortear um 7. O jogo poderia durar para sempre?

Nossa opção para construção do espaço amostral é

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

0 significa que o 7 *nunca* é sorteado; 1 significa que o 7 foi sorteado na primeira rodada; 2 na segunda; e assim por diante. As probabilidades desses eventos não são iguais:

$$\begin{aligned}P(0) &= ?, \\ P(1) &= \frac{1}{10}, \\ P(2) &= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ P(3) &= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ &\vdots \\ P(n) &= \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}\end{aligned}$$

É elementar verificar que $P(n)$, $n \geq 1$, é uma série geométrica com soma 1. Portanto, o evento “o 7 nunca é sorteado”, indicado por 0, tem probabilidade complementar à $P(1) + P(2) + \dots = 1$, e sua probabilidade é zero.

Finalmente, considere o caso em que desejamos atribuir probabilidades dentro do conjunto não-enumerável $\Omega = [0, 1]$. Note que faz sentido atribuir probabilidade zero a um ponto qualquer:

$$P(X = a) = 0$$

e que é muito razoável atribuir probabilidades a intervalos:

$$P([a, b]) = b - a.$$

O problema é que se A é um evento, o seu complemento \overline{A} também tem que ser, com $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, pela propriedade de aditividade finita (1.3). Portanto, se $(a, b] \in \mathcal{F}$, devemos também ter $\overline{(a, b]} \in \mathcal{F}$, onde \mathcal{F} será a classe dos eventos cujas probabilidades podem ser quantificadas.

Entretanto, o complemento de um único intervalo $(a, b]$ *não* é um único intervalo. Desconfiamos que uma criatura desse tipo, $[0, a] \cup (b, 1]$, precisa ser definida com as mesmas propriedades genéricas de $(a, b]$, de forma que ambos pertençam a \mathcal{F} . O caminho para \mathcal{F} , entretanto, é longo.

Uma extensão do que vimos para a binomial é a distribuição multinomial:

$$1 = (p_1 + \dots + p_n)^n = \sum_{l_1 + \dots + l_k = n} \binom{n}{l_1 \dots l_k} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k},$$

$$\binom{n}{l_1 \dots l_k} = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!}.$$

Capítulo 3

2014-02-26: Semi-anéis, anéis, e outros bichos

Definição

Uma classe \mathcal{S} de conjuntos é um *semi-anel* quando:

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{S}, \\ A, B \in \mathcal{S} &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}, \\ A, B \in \mathcal{S} &\Rightarrow A - B = A \cap \overline{B} = \bigsqcup_{i=1}^n E_i,\end{aligned}$$

onde $E_i \in \mathcal{S}$. O símbolo \bigsqcup significa “uniões disjuntas”.

Seja \mathcal{S} a classe formada por *intervalos* do tipo

$$(a, b] \quad \text{ou} \quad \emptyset.$$

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$? Sim.
2. A interseção de dois elementos de \mathcal{S} pertence a \mathcal{S} ?

Sim: as possibilidades para interseção de $(a, b]$ com $(c, d]$ são

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{S}, \\ (c, b] &\in \mathcal{S}, \\ (c, d] &\in \mathcal{S}, \\ (a, d] &\in \mathcal{S}, \\ (a, b] &\in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Talvez seja possível resumir:

$$(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)) \quad \text{ou} \quad \emptyset?$$

3. $A - B$ (A, B intervalos) é exprimível como uma união finita disjunta de intervalos?

Sim:

$$\begin{aligned}(a, b] \cap \overline{(c, d]} &= (a, b] \cap [(0, c] \cup (d, 1]] \\ &= \underbrace{(a, b] \cap (0, c]}_{\in \mathcal{S}} \cup \underbrace{(a, b] \cap (d, 1]}_{\in \mathcal{S}} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Portanto, essa classe \mathcal{S} de intervalos é um semi-anel.

Definição:

$\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ é um *anel* quando:

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{R}, \\ A, B \in \mathcal{R} &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}, \\ A, B \in \mathcal{R} &\Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Lembre-se:

$$A \Delta B \equiv (A - B) \cup (B - A).$$

Tivemos uma discussão sobre o motivo de se usar a diferença simétrica nessas definições: alguém gostaria de resumir a discussão em L^AT_EX?

Anéis triviais são:

$$\{\emptyset, \Omega\} \quad \text{e} \quad 2^\Omega.$$

É possível mostrar as seguintes propriedades de anéis: se $A, B \in \mathcal{R}$, então:

$$\begin{aligned}A \cap B &\in \mathcal{R}, \\ A \Delta B &\in \mathcal{R}, \\ A \cup B &\in \mathcal{R}, \\ A - B &\in \mathcal{R}, \\ B - A &\in \mathcal{R}, \\ \emptyset &\in \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Mas a última não faz parte da *definição* de \mathcal{R} ???

Note também que o complemento ainda não apareceu na jogada.

Teorema

A partir de um semi-anel \mathcal{S} é possível construir um anel \mathcal{R} por meio somente de uniões disjuntas finitas de elementos de \mathcal{S} , ou seja:

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}, \quad A_i \in \mathcal{S}.$$

Definição

Uma *álgebra* ou um *campo* \mathcal{A} é um anel que contém Ω . Segue-se imediatamente que

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}.$$

Definição Um σ -anel é um anel fechado por uma união enumerável

Comentário: “fechado” significa que uniões enumeráveis de elementos do σ - \mathcal{R} ainda pertencem a ele.

Segue-se imediatamente que o σ - \mathcal{R} também é fechado por interseções enumeráveis.

Definição Uma σ -álgebra ou σ -campo ou campo de Borel é uma álgebra fechada por uniões enumeráveis.

Segue-se imediatamente que uma σ -álgebra também é fechada por interseções enumeráveis.

Definição Dada uma classe $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$, uma sequência monótona de elementos $E_i \in \mathcal{C}$, $i \in \mathbb{N}$, é definida por

$$E_i \subseteq E_{i+1}$$

ou

$$E_i \supseteq E_{i+1}.$$

Definição Uma classe \mathcal{M} é dita *monótona* quando todas as suas sequências monótonas atendem a:

$$E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M},$$

ou

$$E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}.$$

A questão agora é como construir σ -álgebras a partir de álgebras, anéis ou semi-anéis.

Teorema: Para as famílias \mathcal{R} , \mathcal{A} , $\sigma\text{-}\mathcal{R}$, $\sigma\text{-}\mathcal{A}$, \mathcal{M} de anéis, álgebras, sigma-anéis, sigma-álgebras, e classes monótonas \mathcal{M} , interseções arbitrárias produzem famílias de mesmo tipo.

Em resumo: se \mathcal{F}_i , $i \in I$, são classes de algum dos tipos acima, então

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

também é.

Por exemplo: se

$$\mathcal{F}_i, i \in I$$

são σ -álgebras, então

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

também é uma σ -álgebra.

3.1 Geração de σ -álgebras

Seja \mathcal{S} um semi-anel que gera o anel \mathcal{R} . A *menor* σ -álgebra contendo \mathcal{S} ou gerada por \mathcal{R} é denominada “ σ -álgebra de Borel” \mathcal{B} .

No caso de $\Omega = [0, 1]$, a σ -álgebra de Borel é a menor σ -álgebra que contém os intervalos $(a, b]$.

Para ela, é possível definir uma medida de probabilidade

$$\begin{aligned} P : \mathcal{B} &\rightarrow [0, 1], \\ A \in \mathcal{B} &\mapsto P(A) \in [0, 1], \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}P(\emptyset) &= 0, \\P(\Omega) &= 1, \\P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).\end{aligned}$$

Capítulo 4

2014-03-10: Existe um conjunto não-mensurável em $(0, 1]$

Uma nova operação será usada *ad nauseam* nesta lição. Para $x, y \in (0, 1]$:

$$x \boxplus y \equiv \begin{cases} x + y, & x + y \leq 1, \\ x + y - 1, & x + y > 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

(Eu prefiro $\oplus \dots$)

Agora, para *qualquer* subconjunto E de $(0, 1]$, defina um novo conjunto $E(x)$

$$E(x) \equiv \{x \boxplus y, y \in E\}. \quad (4.2)$$

$E(x)$ é a *translação* (de uma distância x) do conjunto E .

Dúvida: $E \subseteq (0, 1]$ ou $E \in \mathcal{B}$?

Dúvida: “translação *em* x ” me soa estranho, pois todo $y \in E$ é transladado *de* x .

Suponha que exista uma coisa tal como uma medida “natural” em $(0, 1]$. Para o intervalo $(a, b]$ essa medida é

$$|(a, b]| \equiv b - a. \quad (4.3)$$

Vamos supor, sem entrar em muitos detalhes, que para todo $B \in \mathcal{B}$, existe uma $|B|$ compatível com (4.3), *i.e.*, redutível a (4.3) se B for um intervalo.

A notação $E(x)$ é a usada por Taylor (1973).

Agora, se $E \in \mathcal{B}$, então,

$$|E(x)| = |E|. \quad (4.4)$$

Agora, como sempre, \mathbb{Q} é o conjunto dos racionais. Esse conjunto é enumerável. Consideremos os racionais contidos em $(0, 1]$. Esse segundo conjunto é

$$Q \equiv \mathbb{Q} \cap (0, 1]. \quad (4.5)$$

Com essas definições à mão, estudemos então as propriedades dos conjuntos do tipo $Q(x)$.

1.

$$x \in (0, 1] \Rightarrow x \in Q(x). \quad (4.6)$$

Será verdade? Como provar?

$$Q(x) = \{x \boxplus y, y \in Q\}$$

Se 0 pertencesse a Q , (4.6) seria trivial. Mas é quase, porque $1 \in Q$. Faça $y = 1$ acima; então,

$$x = x + 1 - 1 = x \boxplus 1 \in Q(x) \blacksquare$$

2.

$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q. \quad (4.7)$$

De fato: para começar, $x, y \in Q \Rightarrow x \boxplus y \in Q$. De fato, $x \boxplus y \in (0, 1]$, e tanto $x + y$ quanto $x + y - 1$, conforme for o caso, são números racionais em $(0, 1]$. Isso basta!, pois, *neste caso*, $Q(x) = \{x \boxplus y, y \in Q\} = Q \blacksquare$ (Ailin, esta dedução é *diferente* de suas notas. Estou tentando tirar o máximo partido de ‘ \boxplus ’! Está certo?)

3.

$$x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset, \quad (4.8)$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2). \quad (4.9)$$

Dessa forma, os conjuntos $\{Q(x), x \in (0, 1]\}$ (que constituem uma *classe*, ou *família*) particionam o intervalo $(0, 1]$ em subconjuntos disjuntos cuja união é o próprio $(0, 1]$. Há bastante material aqui. Antes das deduções, vamos escrever formalmente essa última observação:

$$\bigcup_{x \in (0, 1]} Q(x) = (0, 1].$$

Note também que os índices na expressão acima são demasiados, devido a (4.9). Queremos chegar a uma afirmação mais econômica:

$$\bigsqcup_{x \in T} Q(x) = (0, 1]$$

(note a disjunção). Na sequência, precisamos provar (4.8)–(4.9) e prosseguir na obtenção do conjunto T . Esse último na verdade se revelará um conjunto interessante, e na verdade o ponto final desta lição: T se revelará um conjunto *não mensurável*.

Para provar (4.8): Vamos tentar *reductio ad absurdum*. Seja $z \in Q(x_1)$ e $z \in Q(x_2)$: nesse caso, a interseção $Q(x_1) \cap Q(x_2)$ não seria o conjunto vazio. Porém, debaixo dessa hipótese:

$$z = x_1 \boxplus y, y \in Q,$$

$$z = x_2 \boxplus y, y \in Q.$$

Agora,

$$\begin{aligned} (x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) &= x_1 - x_2, \text{ ou} \\ &= x_1 - x_2 - 1 \text{ ou} \\ &= x_1 - x_2 + 1. \end{aligned}$$

Portanto, subtraindo (dessa forma) as duas expressões acima,

$$(-1 \text{ ou } 0 \text{ ou } +1) = x_1 - x_2.$$

mas $(-1, 0, +1)$ são racionais, o que contraria a hipótese original sobre $x_1 - x_2$ ■

Para provar (4.9): Volte acima e escreva a expressão geral:

$$(x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) = x_1 - x_2 + s,$$

onde, como vimos, ou $s = 0$ ou $s = -1$ ou $s = +1$. Reescreva:

$$x_1 \boxplus y = x_2 \boxplus y + (x_1 - x_2) + s.$$

Note agora que é *sempre* possível escrever $x_2 \boxplus y = x_2 + r$, onde r é racional, e não necessariamente está em Q . Substitua:

$$x_1 \boxplus y = x_2 + r + s + (x_1 - x_2).$$

O lado esquerdo é um número em Q . Portanto, o lado direito é um número em Q e, além disso:

$$\begin{aligned} x_2 &\in Q, \\ x_2 + p &\in Q, \end{aligned}$$

onde $p = (r + s + (x_1 - x_2))$ e portanto $p \in \mathbb{Q}$ (mas não necessariamente $p \in Q$). Portanto, é possível escrever o lado direito como $x_2 \boxplus z$, onde $z \in Q$. Disso se segue que

$$\{x_1 \boxplus y, y \in Q\} = \{x_2 \boxplus z, z \in Q\}$$

e portanto $Q(x_1) = Q(x_2)$ ■

Relembrando:

$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q$$

significa, por exemplo:

$$Q(1/2) = Q(1/3) = Q(1).$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{I} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{3}/2) \cap Q(3/2) = \emptyset.$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2)$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{2}/1000 + 1/8) = Q(\sqrt{2}/1000 + 3/8)$$

Ou seja: as criaturas estão ficando estranhas.

Para fechar esta parte bastante cansativa para a mente:

$$\bigcup_{x \in (0,1]} Q(x) = (0, 1]$$

pois $x \in Q(x)$.

4.1 O axioma da seleção e um conjunto estranho

Seja \mathcal{C} a família dos conjuntos $Q(x)$, $x \in (0, 1]$. Escolha um único ponto em $(0, 1]$ pertencente a cada $Q(x)$. O conjunto dos pontos assim escolhidos será chamado T , e temos que $T \subset (0, 1]$. O que fizemos significa que, *por definição*, não há dois pontos em T pertencentes ao mesmo $Q(x)$. Segue-se que

$$\bigsqcup_{t \in T} Q(t) = (0, 1].$$

Estudemos as propriedades dos conjuntos $T(r_i), r_i \in Q$.

1.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0, 1]. \quad (4.10)$$

Só precisamos provar que, se $x \in (0, 1]$, $\exists i \in \mathbb{N} : x \in T(r_i)$. Mas, de (4.6), segue-se que $x \in (0, 1] \Rightarrow x \in Q(x)$. Agora, portanto, se $x \in Q(x)$, escolha $t \in Q(x)$, onde t é o representante de $Q(x)$: $t \in T$.

Veja:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x \boxplus y, \quad y \in Q, \\ t \in Q(x) &\Rightarrow t = x \boxplus y \text{ para algum } y \in Q. \end{aligned}$$

Logo, existe algum $q \in Q$ tal que $t = x + q$; pelo mesmo motivo agora deve existir algum $r \in Q$ tal que $x = t + r$. Mas Q é enumerável (não provamos!), portanto existe um índice i tal que $x = t + r_i$, $i \in \mathbb{N}$, e $Q = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} r_i$. Logo, $x \in T(r_i)$. A união dos $T(r_i)$ gera o $(0, 1]$.

2. Os $T(r_i)$ são disjuntos. Lembre-se de que T contém um único representante de cada $Q(x)$. Se houvesse $r_i \neq r_j$ com $y \in [T(r_i) \cap T(r_j)]$, então teríamos

$$\begin{aligned} y &= t_i \boxplus r_i & \text{e} \\ y &= t_j \boxplus r_j. \end{aligned}$$

“Subtraia”:

$$0 = (t_i - t_j) + q$$

onde q é racional. Logo, $t_i - t_j$ é racional, donde $Q(t_i) = Q(t_j)$. Mas isso não é possível, porque $Q(t_i)$ possui um único representante em T . Portanto, a disjunção dos $T(r_i)$'s transforma (4.10) em

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0, 1]. \quad (4.11)$$

Finalmente: se T fosse mensurável, haveria $|T| = |T(r_i)|$ para todo i . Agora, pela sigma-aditividade:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T(r_i)| = |(0, 1]| = 1.$$

Isso, nós também já vimos em outra lição, é impossível. T não pode ser mensurável.

Referências Bibliográficas

Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Foundations of the theory of probability)*. Springer, Berlin.

Taylor, S. J. (1973). *Introduction to measure and integration*. Cambridge University Press.