Lições de Teoria Ergódica, Processos Estocásticos e Sistemas Dinâmicos

Nelson Luís Dias

24 de fevereiro de 2014

Capítulo 1

2014-02-19: Aditividade finita

Como conceitualizamos e formalizamos a propabilidade?

Existem várias abordagens possíveis:

1. Clássica (teórica ou "a priori"):

   Consideramos um processo aleatório com n resultados igualmente prováveis, e um evento A que consiste em m desses resultados. A probabilidade desse evento é então definida por
   $$P(A) \equiv \frac{m}{n}.$$
   Crítica: no termo "igualmente prováveis", já há a suposição de que nós "sabemos" o que é probabilidade antes de defini-la. Trata-se portanto de um argumento circular. (COMO PODEMOS MELHORAR ESSE TEXTO?)

2. Empírica ("a posteriori" ou frequentista):

   Supõe-se que um determinado experimento é repetido n vezes "nas mesmas condições". Se A é um evento identificável no experimento, a probabilidade de A é definida como o limite da razão entre número m de ocorrências de A e o número de repetições n quando $n \to \infty$:
   $$P(A) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

3. Subjetiva:

   Aceita-se que podemos atribuir a diversos eventos uma "probabilidade" de ocorrência. Por exemplo, eu *acho* que a probabilidade de que eu encontre petróleo no terreno de minha casa é (ou deve ser) 10^{-12}.

4. Axiomática (**?**).

   Uma tripla de propabilidade é uma tripla formada por $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, sendo Ω um conjunto não vazio, $\mathscr{F}$ um campo sigma (uma σ-álgebra) de subconjuntos de Ω (PRECISAMOS USAR OS TERMOS CORRETOS), e P uma função, com

$$
\begin{aligned}
P : \mathscr{F} &\to [0,1],\\
A \in \mathscr{F} &\mapsto P(A).
\end{aligned}
$$

Axiomas:

$$P(A) \geq 0, \tag{1.1}$$
$$P(\Omega) = 1, \tag{1.2}$$
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad \text{se} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset. \tag{1.3}$$

Os axiomas funcionam quando Ω é finito. Contudo, há conjuntos maiores/infinitos (?) para os quais a noção de probabilidade não faz sentido. Assim, uma σ-álgebra será um subconjunto de 2^{Ω} com uma certa estrutura, para o qual deverá fazer sentido especificar probabilidades.

Exemplo: Sabendo que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, prove por indução que o axioma (1.3) vale para todo n se ele valer para $n = 2$.

Para $n = 2$,

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i). \tag{1.4}$$

Suponha agora que (1.3) valha para n, e que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \emptyset, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Então,

$$P\left(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}\right) = P(B \cup A_{n+1}), \tag{1.5}$$

fazendo-se

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

A partir de (1.4),

$$P\left(B \cup A_{n+1}\right) = P(B) + P(A_{n+1}). \tag{1.6}$$

Por sua vez, como supusemos a validade de (1.3),

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.7}$$

Logo,

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \tag{1.8}$$

Note entretanto que, para que a prova seja válida, precisamos garantir que

$$A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] = \emptyset \Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Faça $C = A_{n+1}$, e considere a igualdade:

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] = \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i. \tag{1.9}$$

Se ela for verdadeira, então:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] = \emptyset &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i = \emptyset \\ &\Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Portanto, se (1.9) for verdadeira, a questão está liquidada.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] &\Rightarrow (x \in C) \text{ e } \left(x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right), \\ &\Rightarrow \exists j \in \{1, \ldots, n\} \,|\, (x \in C) \text{ e } (x \in A_j) \\ &\Rightarrow x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i &\Rightarrow \exists j \,|\, x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in C \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\bigcup_{i=1}^{n} C \cap A_i \subseteq C \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right].$$

Com isso, (1.9) está provada, e chegamos ao fim (desta prova).

Notas de Aula Professor Paulo Cezar P. de Carvalho - Ailin

Modelos elementares

$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ $\rightarrow$espaço amostral

$\mathscr{F} = 2^{\Omega} \rightarrow$é o conjunto potência e inclui todos o subconjuntos de Ω, e, em particular, inclui $\{\omega_1\}$,$\{...\}$,$\{\omega_n\}$, os quais são chamados eventos complementares.

$$P(\{\omega_i\}) = P_i \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 \tag{1.10}$$

Caso equiprovável: $P_i = 1/n, \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo: 3 moedas são lançadas. Qual a probabilidade de sairem 2 caras?

Como defino Ω? Se considerarmos $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, as probabilidades são $1/8$ para 0 e 3, e $3/8$ para 1 e 2. Para $i = 0, 1, 2, 3$, temos

$$P(i) = \left(\frac{1}{8}\right)^{i} \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{3-i} \binom{3}{i}, \tag{1.11}$$

distribuição binomial herdada do modelo equiprovável.

Exemplo: Escolher um número no intervalo $[0, 1]$ tal que $P([a, b]) = b - a$ para qualquer intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$.

$\Omega = [0, 1]$

A primeira tentativa seria atribuir $P(\{a\})$. Se for equiprovável com $P \neq 0$ já estaria em contradição com a aditividade.

Com um conjunto enumerável (infinito) não é possível ter equiprobabilidade nem atribuindo probabilidade nula, porque não conseguiremos que a “soma"das $P(\{\})$ seja 1.

Capítulo 2

2014-02-24: Aditividade infinita

Passamos agora para casos em que o espaço amostral Ω deixa de ser um conjunto finito. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não-enumerável. Um conjunto enumerável é um conjunto cujos elementos possam ser colocados em uma relação biunívoca com os naturais. Os racionais são um conjunto enumerável (Cantor). Os números reais no intervalo fechado $[0, 1]$ são um conjunto não-enumerável.

Quando Ω é finito, todos os elementos de 2^Ω são eventos: a todos e a cada um deles pode ser atribuída uma probabilidade, e os axiomas (1.1)– (1.3) se aplicam.

Antes de seguir para o infinito, considere o exemplo: n lançamentos de uma moeda, cujos resultados individuais podem ser "cara" (0) ou "coroa" (1). Os eventos elementares com os quais podemos construir um espaço amostral são n-uplas do tipo

$$
\begin{gathered}
(0, 0, \ldots, 0, 0)\\
(0, 0, \ldots, 0, 1)\\
(0, 0, \ldots, 1, 0)\\
\vdots\\
(1, 1, \ldots, 1, 1).
\end{gathered}
$$

Existem 2^n casos.

Suponha por exemplo que desejemos calcular a probabilidade de que ocorram k caras (e, consequentemente, $n - k$ coroas). Um evento deste tipo (exatamente k caras e $n - k$ coroas) pode ocorrer de $n!$ maneiras. No entanto, a posição das k caras é imaterial: todos os $k!$ casos aparecem da mesma forma. Idem para os $(n - k)!$ casos de permuta das posições das coroas. Concluímos que há

$$
\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
$$

possibilidades de ocorrência de k caras. A sua probabilidade é

$$
\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.
$$

Isso é um caso particular da distribuição binomial. Se 0 tem probabilidade p, e 1 tem probabilidade $1 - p$, a probabilidade de k zeros em n lançamentos é

$$
P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
$$

Exercício: Mostre que
$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = 1.$$
Prova:
$$\begin{aligned}(p + (1-p))^n &= 1\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} P(k).\end{aligned}$$

Agora, se $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ for enumerável, precisamos de
$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$
e fica evidente que os $P(x_i)$ não podem ser todos iguais. Entretanto, ainda é possível aproveitar os x_i's desde que a soma acima funcione.

Exemplo: Em um jogo, dez bolas numeradas de 0 a 9 podem ser sorteadas. Cada jogador sorteia uma bola, mostra o resultado e retorna a bola. Ganha o primeiro jogador que sortear um 7. O jogo poderia durar para sempre?

Nossa opção para construção do espaço amostral é
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$
1 significa que o 7 foi sorteado na primeira rodada; 2 na segunda; e assim por diante. As probabilidades desses eventos não são iguais:
$$\begin{aligned}P(1) &= \frac{1}{10},\\ P(2) &= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10},\\ P(3) &= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10},\\ &\vdots\\ P(n) &= \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}\end{aligned}$$

É elementar verificar que $P(n)$ é uma série geométrica com soma 1.

Finalmente, considere o caso em que desejamos atribuir probabilidades dentro do conjunto não-enumerável $\Omega = [0, 1]$. Note que faz sentido atribuir probabilidade zero a um ponto qualquer:
$$P(X = a) = 0$$
e que é muito razoável atribuir probabilidades a intervalos:
$$P([a, b]) = b - a.$$

O problema é que se A é um evento, o seu complemento $\overline{A}$ também tem que ser, com $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, pela propriedade de aditividade finita (1.3). Portanto, se $(a, b] \in \mathscr{F}$, devemos também ter $\overline{(a, b]} \in \mathscr{F}$, onde $\mathscr{F}$ será a classe dos eventos cujas probabilidades podem ser quantificadas.

Por exemplo, o complemento de um único intervalo $(a, b]$ *não* é um único intervalo. Desconfiamos que uma criatura desse tipo, $[0, a] \cup (b, 1]$, precisa ser definida com as mesmas propriedades genéricas de $(a, b]$, de forma que ambos pertençam a $\mathscr{F}$.