

# Lições de Teoria Ergódica, Processos Estocásticos e Sistemas Dinâmicos

Nelson Luís Dias

20 de março de 2014

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1895, Osborne Reynolds publicou um artigo sobre escoamentos turbulentos no qual pela primeira vez aparece o que hoje denominamos decomposição de Reynolds: o campo de velocidade  $\mathbf{U} = U_i \mathbf{e}_i$  de um fluido foi decomposto em  $U_i = \langle U_i \rangle + u_i$  (“média” e “flutuação”), e equações para as médias  $\langle U_i \rangle$ , e para o segundo momento  $\langle u_i u_i \rangle / 2$ , foram deduzidas a partir de promediações das equações de Navier-Stokes para  $U_i$  (a velocidade do fluido no ponto  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ , e no instante  $t$ ).

Reynolds deu à promediação ‘ $\langle \cdot \rangle$ ’ que ele usou o significado de uma média espacial, num procedimento claramente inspirado pelo trabalho anterior, e pioneiro, de Maxwell sobre a teoria cinética dos gases (Maxwell, 1867).

Logo, percebeu-se que a dedução das equações para os momentos de ordem 1 e 2 (as equações de Reynolds) a partir das equações de Navier-Stokes requeria um conjunto de postulados, *que não aparece explicitamente no artigo de 1895*:

$$\langle u_i \rangle = 0, \quad (1.1)$$

$$\langle \langle U_i \rangle \rangle = 0, \quad (1.2)$$

$$\langle u_i \langle U_j \rangle \rangle = 0, \quad (1.3)$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}. \quad (1.5)$$

Os “postulados” (1.1)–(1.5) aparecem, de uma forma ou de outra, em todos os livros-texto importantes de turbulência. Por exemplo (e a lista não é abrangente): Hinze (1975), Tennekes e Lumley (1972), Monin e Yaglom (1975), Pope (2000).

O significado original da promediação de Reynolds não se manteve: a analogia entre o movimento das moléculas de um gás e o das partículas materiais de um fluido (debaixo da hipótese do contínuo) é essencialmente insustentável (Tennekes e Lumley, 1972, Capítulo 1).

Curiosamente, em nenhum caso os autores acima (ou quaisquer outros que sejam de nosso conhecimento) procuram deduzir matematicamente (1.1)–(1.5), com a possível exceção de Kundu (1990), que o faz para um *ensemble*, supostamente finito, de realizações do escoamento turbulento.

A definição mais comumente encontrada de ‘ $\langle \cdot \rangle$ ’, e que formalizaremos neste texto, é a de uma média probabilística (*ensemble average*), mas mesmo aqui uma definição precisa não pode ser facilmente encontrada na literatura de turbulência.

De qualquer forma, a abordagem estatística de sistemas complexos era promissora, e logo Reynolds recebeu a companhia ilustre de [Einstein \(1905\)](#) (movimento browniano), [Langevin \(1908\)](#) (idem), [Taylor \(1935a,b,c,d\)](#) (turbulência), e, naturalmente, [Kolmogorov \(1941\)](#) (turbulência).

Entretanto, o *significado* de se tomar médias probabilísticas sobre os resultados de um processo determinístico está longe de ser óbvio. Intuitivamente, a motivação é que o processo é suficientemente “complexo” (as velocidades das moléculas de um gás; um escoamento turbulento; o movimento browniano; etc.) para que seja mais fácil lidar apenas com médias e desvios-padrão, ou seja, *estatísticas*, e não com realizações, trajetórias, moléculas, partículas, etc., *individuais*. Ainda assim, do ponto de vista experimental, a tomada de médias sobre realizações é fortemente restrita pela disponibilidade de tais realizações. A saída é supor, debaixo de hipóteses adicionais tais como estacionariedade (mas que por si só não é suficiente), que médias tomadas sobre um número pequeno de realizações (tão pequeno quanto uma única) são capazes de estimar as médias de *ensemble*. Essa é a *hipótese ergódica*.

De todo modo, os procedimentos adotados pelos pioneiros eram necessariamente intuitivos, e tiveram que aguardar, como acontece tantas vezes na história da Física e da Matemática, por formalização posterior. A própria teoria de probabilidade só seria definitivamente formalizada por [Kolmogorov](#) em 1933; o teorema ergódico é devido a [Birkhoff \(1931\)](#), e a [von Neumann \(1932\)](#).

Finalmente, as conexões entre processos estocásticos e sistemas dinâmicos, que em última análise justificam o procedimento informal dos pioneiros, parecem ser ainda mais recentes (ver [Lebowitz e Penrose, 1973](#); [Collet, 2010](#)).

Neste texto, nós procuramos ao mesmo tempo traçar uma parte da história da abordagem estatística de sistemas dinâmicos, desde [Maxwell \(1867\)](#) até a atualidade, e prover um nível intermediário de formalização.

A formalização aqui não é feita no espírito de “arte pela arte”, mas sim no de embasar mais firmemente as análises de caráter probabilístico de sistemas físicos determinísticos, representados matematicamente por sistemas dinâmicos.

# Capítulo 2

## 2014-02-19: Aditividade finita

### Como conceitualizamos e formalizamos a propabilidade?

Existem várias abordagens possíveis:

1. Clássica (teórica ou “a priori”):

Consideramos um processo aleatório com  $n$  resultados igualmente prováveis, e um evento  $A$  que consiste em  $m$  desses resultados. A probabilidade desse evento é então definida por

$$P(A) \equiv \frac{m}{n}.$$

Crítica: no termo “igualmente prováveis”, já há a suposição de que nós “sabemos” o que é probabilidade antes de defini-la. Trata-se portanto de um argumento circular. (COMO PODEMOS MELHORAR ESSE TEXTO?)

2. Empírica (“a posteriori” ou frequentista):

Supõe-se que um determinado experimento é repetido  $n$  vezes “nas mesmas condições”. Se  $A$  é um evento identificável no experimento, a probabilidade de  $A$  é definida como o limite da razão entre número  $m$  de ocorrências de  $A$  e o número de repetições  $n$  quando  $n \rightarrow \infty$ :

$$P(A) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

3. Subjetiva:

Aceita-se que podemos atribuir a diversos eventos uma “probabilidade” de ocorrência. Por exemplo, eu *acho* que a probabilidade de que eu encontre petróleo no terreno de minha casa é (ou deve ser)  $10^{-12}$ .

4. Axiomática ([Kolmogorov, 1933](#)).

Uma tripla de propabilidade é uma tripla formada por  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , sendo  $\Omega$  um conjunto não vazio,  $\mathcal{F}$  um campo sigma (uma  $\sigma$ -álgebra) de subconjuntos de  $\Omega$  (PRECISAMOS USAR OS TERMOS CORRETOS), e  $P$  uma função, com

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

$$A \in \mathcal{F} \mapsto P(A).$$

Axiomas:

$$P(A) \geq 0, \quad (2.1)$$

$$P(\Omega) = 1, \quad (2.2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad \text{se} \quad A_i \cap A_j = \emptyset. \quad (2.3)$$

Os axiomas funcionam quando  $\Omega$  é finito. Contudo, há conjuntos maiores/infinitos (?) para os quais a noção de probabilidade não faz sentido. Assim, uma  $\sigma$ -álgebra será um subconjunto de  $2^\Omega$  com uma certa estrutura, para o qual deverá fazer sentido especificar probabilidades.

**Exemplo:** Sabendo que  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$ , prove por indução que o axioma (2.3) vale para todo  $n$  se ele valer para  $n = 2$ .

Para  $n = 2$ ,

$$A_1 \cup A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = \sum_{i=1}^2 P(A_i). \quad (2.4)$$

Suponha agora que (2.3) valha para  $n$ , e que

$$A_{n+1} \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(B \cup A_{n+1}), \quad (2.5)$$

fazendo-se

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

A partir de (2.4),

$$P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}). \quad (2.6)$$

Por sua vez, como supusemos a validade de (2.3),

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (2.7)$$

Logo,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^n P(A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i). \quad (2.8)$$

Note entretanto que, para que a prova seja válida, precisamos garantir que

$$A_{n+1} \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset \Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \forall i = 1, \dots, n.$$

Faça  $C = A_{n+1}$ , e considere a igualdade:

$$C \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i. \quad (2.9)$$

Se ela for verdadeira, então:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \emptyset &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i = \emptyset \\ &\Rightarrow A_{n+1} \cap A_i = \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto, se (2.9) for verdadeira, a questão está liquidada.

De fato,

$$\begin{aligned} x \in C \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] &\Rightarrow (x \in C) \text{ e } \left( x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \right), \\ &\Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} \mid (x \in C) \text{ e } (x \in A_j) \\ &\Rightarrow x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$C \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] \subseteq \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^n C \cap A_i &\Rightarrow \exists j \mid x \in C \cap A_j \\ &\Rightarrow x \in C \cap \bigcup_{i=1}^n A_i. \end{aligned}$$

Isso significa que

$$\bigcup_{i=1}^n C \cap A_i \subseteq C \cap \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right].$$

Com isso, (2.9) está provada, e chegamos ao fim (desta prova).

## Notas de Aula Professor Paulo Cezar P. de Carvalho - Ailin

### Modelos elementares

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \rightarrow \text{espaço amostral}$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$  é o conjunto potência e inclui todos os subconjuntos de  $\Omega$ , e, em particular, inclui  $\{\omega_1\}, \{\dots\}, \{\omega_n\}$ , os quais são chamados eventos complementares.

$$P(\{\omega_i\}) = P_i \in [0, 1] \mid \sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad (2.10)$$

Caso equiprovável:  $P_i = 1/n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Exemplo:** 3 moedas são lançadas. Qual a probabilidade de saírem 2 caras?

Como defino  $\Omega$ ? Se considerarmos  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ , as probabilidades são  $1/8$  para 0 e 3, e  $3/8$  para 1 e 2. Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , temos

$$P(i) = \left(\frac{1}{8}\right)^i \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{3-i} \binom{3}{i}, \quad (2.11)$$

distribuição binomial herdada do modelo equiprovável.

**Exemplo:** Escolher um número no intervalo  $[0, 1]$  tal que  $P([a, b]) = b - a$  para qualquer intervalo  $[a, b] \subset [0, 1]$ .

$\Omega = [0, 1]$

A primeira tentativa seria atribuir  $P(\{a\})$ . Se for equiprovável com  $P \neq 0$  já estaria em contradição com a aditividade.

Com um conjunto enumerável (infinito) não é possível ter equiprobabilidade nem atribuindo probabilidade nula, porque não conseguiremos que a “soma” das  $P(\{\})$  seja 1.

# Capítulo 3

## 2014-02-24: Aditividade infinita

(Ou  $\sigma$ -Aditividade)

Passamos agora para casos em que o espaço amostral  $\Omega$  deixa de ser um conjunto finito. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não-enumerável. Um conjunto enumerável é um conjunto cujos elementos possam ser colocados em uma relação biunívoca com os naturais. Os racionais são um conjunto enumerável (Cantor). Os números reais no intervalo fechado  $[0, 1]$  são um conjunto não-enumerável.

Quando  $\Omega$  é finito, todos os elementos de  $2^\Omega$  são eventos: a todos e a cada um deles pode ser atribuída uma probabilidade, e os axiomas (2.1)–(2.3) se aplicam.

---

**Exemplo 3.1** Antes de seguir para o infinito, considere o exemplo:  $n$  lançamentos de uma moeda, cujos resultados individuais podem ser “cara” (0) ou “coroa” (1). Os eventos elementares com os quais podemos construir um espaço amostral são  $n$ -uplas do tipo

$$\begin{aligned}(0, 0, \dots, 0, 0) \\ (0, 0, \dots, 0, 1) \\ (0, 0, \dots, 1, 0) \\ \vdots \\ (1, 1, \dots, 1, 1).\end{aligned}$$

Existem  $2^n$  casos. Portanto, o espaço amostral mais “simples” que podemos imaginar aqui é

$$\Omega = \{\omega_k = (x_1, \dots, x_n), x_i = 0 \text{ ou } 1, k = 1, \dots, 2^n\}$$

Observe que

$$P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{2^n}.$$

Suponha por exemplo que desejemos calcular a probabilidade de que ocorram  $k$  caras (e, conseqüentemente,  $n - k$  coroas). Um evento deste tipo (exatamente  $k$  caras e  $n - k$  coroas) pode ocorrer de  $n!$  maneiras. No entanto, a posição das  $k$  caras é imaterial: todos os  $k!$  casos aparecem da mesma forma. Idem para os  $(n - k)!$  casos de permuta das posições das coroas. Concluímos que há

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

possibilidades de ocorrência de  $k$  caras. A sua probabilidade é

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$



Isso é um caso particular da distribuição binomial. Se 0 tem probabilidade  $p$ , e 1 tem probabilidade  $1 - p$ , a probabilidade de  $k$  zeros em  $n$  lançamentos é

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**Exercício:** Mostre que

$$\sum_{k=0}^n P(k) = 1.$$

Prova:

$$\begin{aligned} (p + (1-p))^n &= 1 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n P(k). \end{aligned}$$

Agora, se  $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  for enumerável, precisamos de

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

e fica evidente que os  $P(x_i)$  não podem ser todos iguais. Entretanto, ainda é possível aproveitar os  $x_i$ 's desde que a soma acima funcione.

**Exemplo:** Em um jogo, dez bolas numeradas de 0 a 9 podem ser sorteadas. Cada jogador sorteia uma bola, mostra o resultado e retorna a bola. Ganha o primeiro jogador que sortear um 7. O jogo poderia durar para sempre?

Nossa opção para construção do espaço amostral é

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

0 significa que o 7 *nunca* é sorteado; 1 significa que o 7 foi sorteado na primeira rodada; 2 na segunda; e assim por diante. As probabilidades desses eventos não são iguais:

$$\begin{aligned} P(0) &= ?, \\ P(1) &= \frac{1}{10}, \\ P(2) &= \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ P(3) &= \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}, \\ &\vdots \\ P(n) &= \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10} \end{aligned}$$

É elementar verificar que  $P(n)$ ,  $n \geq 1$ , é uma série geométrica com soma 1. Portanto, o evento “o 7 nunca é sorteado”, indicado por 0, tem probabilidade complementar à  $P(1) + P(2) + \dots = 1$ , e sua probabilidade é zero.

Finalmente, considere o caso em que desejamos atribuir probabilidades dentro do conjunto não-enumerável  $\Omega = [0, 1]$ . Note que faz sentido atribuir probabilidade zero a um ponto qualquer:

$$P(X = a) = 0$$

e que é muito razoável atribuir probabilidades a intervalos:

$$P([a, b]) = b - a.$$

O problema é que se  $A$  é um evento, o seu complemento  $\bar{A}$  também tem que ser, com  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , pela propriedade de aditividade finita (2.3). Portanto, se  $(a, b] \in \mathcal{F}$ , devemos também ter  $\overline{(a, b]} \in \mathcal{F}$ , onde  $\mathcal{F}$  será a classe dos eventos cujas probabilidades podem ser quantificadas.

Entretanto, o complemento de um único intervalo  $(a, b]$  *não* é um único intervalo. Desconfiamos que uma criatura desse tipo,  $[0, a] \cup (b, 1]$ , precisa ser definida com as mesmas propriedades genéricas de  $(a, b]$ , de forma que ambos pertençam a  $\mathcal{F}$ . O caminho para  $\mathcal{F}$ , entretanto, é longo.

Uma extensão do que vimos para a binomial é a distribuição multinomial:

$$1 = (p_1 + \dots + p_n)^n = \sum_{l_1 + \dots + l_k = n} \binom{n}{l_1 \dots l_k} p_1^{l_1} \dots p_k^{l_k},$$

$$\binom{n}{l_1 \dots l_k} = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!}.$$

# Capítulo 4

## 2014-02-26: Semi-anéis, anéis, e outros bichos

### Definição

Uma classe  $\mathcal{S}$  de conjuntos é um *semi-anel* quando:

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{S}, \\ A, B \in \mathcal{S} &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}, \\ A, B \in \mathcal{S} &\Rightarrow A - B = A \cap \overline{B} = \bigsqcup_{i=1}^n E_i,\end{aligned}$$

onde  $E_i \in \mathcal{S}$ . O símbolo  $\bigsqcup$  significa “uniões disjuntas”.

Seja  $\mathcal{S}$  a classe formada por *intervalos* do tipo

$$(a, b] \quad \text{ou} \quad \emptyset.$$

1.  $\emptyset \in \mathcal{S}$ ? Sim.
2. A interseção de dois elementos de  $\mathcal{S}$  pertence a  $\mathcal{S}$ ?

Sim: as possibilidades para interseção de  $(a, b]$  com  $(c, d]$  são

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{S}, \\ (c, b] &\in \mathcal{S}, \\ (c, d] &\in \mathcal{S}, \\ (a, d] &\in \mathcal{S}, \\ (a, b] &\in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Talvez seja possível resumir:

$$(a, b] \cap (c, d] = (\max(a, c), \min(b, d)) \quad \text{ou} \quad \emptyset?$$

3.  $A - B$  ( $A, B$  intervalos) é exprimível como uma união finita disjunta de intervalos?

Sim:

$$\begin{aligned}(a, b] \cap \overline{(c, d]} &= (a, b] \cap [(0, c] \cup (d, 1]] \\ &= \underbrace{(a, b] \cap (0, c]}_{\in \mathcal{S}} \cup \underbrace{(a, b] \cap (d, 1]}_{\in \mathcal{S}} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Portanto, essa classe  $\mathcal{S}$  de intervalos é um semi-anel.

---

**Definição:**  $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$  é um *anel* quando:

$$\begin{aligned}\emptyset &\in \mathcal{R}, \\ A, B \in \mathcal{R} &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}, \\ A, B \in \mathcal{R} &\Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{R}.\end{aligned}$$

---

Lembre-se:

$$A \Delta B \equiv (A - B) \cup (B - A).$$

**Tivemos uma discussão sobre o motivo de se usar a diferença simétrica nessas definições: alguém gostaria de resumir a discussão em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X?**

Anéis triviais são:

$$\{\emptyset, \Omega\} \quad \text{e} \quad 2^\Omega.$$

É possível mostrar as seguintes propriedades de anéis: se  $A, B \in \mathcal{R}$ , então:

$$\begin{aligned}A \cap B &\in \mathcal{R}, \\ A \Delta B &\in \mathcal{R}, \\ A \cup B &\in \mathcal{R}, \\ A - B &\in \mathcal{R}, \\ B - A &\in \mathcal{R}, \\ \emptyset &\in \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Mas a última não faz parte da *definição* de  $\mathcal{R}$ ????

Note também que o complemento ainda não apareceu na jogada.

### Teorema

A partir de um semi-anel  $\mathcal{S}$  é possível construir um anel  $\mathcal{R}$  por meio somente de uniões disjuntas finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ , ou seja:

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}, \quad A_i \in \mathcal{S}.$$

### Definição

Uma *álgebra* ou um *campo*  $\mathcal{A}$  é um anel que contém  $\Omega$ . Segue-se imediatamente que

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}.$$

**Definição** Um  $\sigma$ -anel é um anel fechado por uma união enumerável

Comentário: “fechado” significa que uniões enumeráveis de elementos do  $\sigma$ - $\mathcal{R}$  ainda pertencem a ele.

Segue-se imediatamente que o  $\sigma$ - $\mathcal{R}$  também é fechado por interseções enumeráveis.

**Definição** Uma  $\sigma$ -álgebra ou  $\sigma$ -campo ou campo de Borel é uma álgebra fechada por uniões enumeráveis.

Segue-se imediatamente que uma  $\sigma$ -álgebra também é fechada por interseções enumeráveis.

**Definição** Dada uma classe  $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ , uma sequência monótona de elementos  $E_i \in \mathcal{C}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , é definida por

$$E_i \subseteq E_{i+1}$$

ou

$$E_i \supseteq E_{i+1}.$$

**Definição** Uma classe  $\mathcal{M}$  é dita *monótona* quando todas as suas sequências monótonas atendem a:

$$E_i \subseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M},$$

ou

$$E_i \supseteq E_{i+1} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}.$$

A questão agora é como construir  $\sigma$ -álgebras a partir de álgebras, anéis ou semi-anéis.

**Teorema:** Para as famílias  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\sigma\text{-}\mathcal{R}$ ,  $\sigma\text{-}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}$  de anéis, álgebras, sigma-anéis, sigma-álgebras, e classes monótonas  $\mathcal{M}$ , interseções arbitrárias produzem famílias de mesmo tipo.

Em resumo: se  $\mathcal{F}_i$ ,  $i \in I$ , são classes de algum dos tipos acima, então

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

também é.

Por exemplo: se

$$\mathcal{F}_i, i \in I$$

são  $\sigma$ -álgebras, então

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

também é uma  $\sigma$ -álgebra.

## 4.1 Geração de $\sigma$ -álgebras

Seja  $\mathcal{S}$  um semi-anel que gera o anel  $\mathcal{R}$ . A *menor*  $\sigma$ -álgebra contendo  $\mathcal{S}$  ou gerada por  $\mathcal{R}$  é denominada “ $\sigma$ -álgebra de Borel”  $\mathcal{B}$ .

No caso de  $\Omega = [0, 1]$ , a  $\sigma$ -álgebra de Borel é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os intervalos  $(a, b]$ .

Para ela, é possível definir uma medida de probabilidade

$$\begin{aligned} P &: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1], \\ A \in \mathcal{B} &\mapsto P(A) \in [0, 1], \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}P(\emptyset) &= 0, \\P(\Omega) &= 1, \\P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).\end{aligned}$$

# Capítulo 5

## 2014-03-10: O conjunto de Vitali: existe um conjunto não-mensurável em $(0, 1]$

### 5.1 A q-soma e resultados preliminares

Uma nova operação será usada *ad nauseam* nesta lição. Para  $x, y \in (0, 1]$ :

$$x \boxplus y \equiv \begin{cases} x + y, & x + y \leq 1, \\ x + y - 1, & x + y > 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Vamos chamar “ $\boxplus$ ” de q-soma, para distingui-la da soma usual em  $\mathbb{R}$ .

O conjunto  $(0, 1]$  juntamente com a operação  $\boxplus$  configura um *grupo abeliano*, uma vez que valem as seguintes propriedades:

1) Fechamento:

$$x \boxplus y \in (0, 1]. \quad (5.2)$$

De fato  $\boxplus$  configura uma função:

$$\begin{aligned} \boxplus : (0, 1] \times (0, 1] &\rightarrow (0, 1], \\ (x, y) &\mapsto z = x \boxplus y. \end{aligned}$$

2) Comutatividade: para  $x, y \in (0, 1]$ ,

$$x \boxplus y = y \boxplus x. \quad (5.3)$$

3) Associatividade:

$$(x \boxplus y) \boxplus z = x \boxplus (y \boxplus z). \quad (5.4)$$

**Precisamos de um voluntário ou voluntária para provar a associatividade.**

4) Elemento neutro:

$$x \boxplus 1 = 1 \boxplus x = x. \quad (5.5)$$

5) Elemento inverso da soma:

$$\forall x \in (0, 1], \exists y \in (0, 1] : x \boxplus y = 1. \quad (5.6)$$

Vamos usar a notação  $(\boxminus x)$  para indicar o inverso da q-soma. É fácil ver que:

$$(\boxminus x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 1 - x, & x < 1. \end{cases}$$

O primeiro caso é trivial, pois  $1 \boxplus 1 = 1$ . No segundo caso,

$$x \boxplus y = x + y = x + (1 - x) = 1, \text{ (pois } x + y \leq 1) \quad \forall x \in (0, 1].$$

A existência do elemento inverso da soma permite que nós definamos a operação “q-diferença”,  $\boxminus$ :

---

**Definição:**  $x \boxminus y \equiv x \boxplus (\boxminus y)$ .

---



---

**Lema 5.1** Para  $x, z \in (0, 1]$ :

$$\exists y \in (0, 1] : z = x \boxplus y \Leftrightarrow \exists r \in (-1, 1) : z = x + r. \quad (5.7)$$


---

**Favor verificar se os limites para o intervalo de  $r$  estão corretos.**

Prova: Se  $x = 1$ ,

$$y = z \boxminus x = z \boxminus 1 = z \in (0, 1] \quad \Leftrightarrow \quad r = y - 1 \in (-1, 1).$$

Se  $x < 1$  e  $z + 1 - x \leq 1$ ,

$$y = z \boxminus x = z + 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad r = y - 1 \in (-1, 1).$$

Se  $x < 1$  e  $z + 1 - x > 1$ ,

$$y = z \boxminus x = z - x \quad \Leftrightarrow \quad r = y \in (-1, 1) \blacksquare$$

Agora, para *qualquer* subconjunto  $E$  de  $(0, 1]$ , defina um novo conjunto  $E(x)$

$$E(x) \equiv \{x \boxplus y, y \in E\}. \quad (5.8)$$

$E(x)$  é a *translação* (de uma distância  $x$ ) do conjunto  $E$ .

**Dúvida:**  $E \subseteq (0, 1]$  ou  $E \in \mathcal{B}$ ?

**Dúvida:** “translação *em*  $x$ ” me soa estranho, pois todo  $y \in E$  é transladado *de*  $x$ .



Suponha que exista uma coisa tal como uma medida “natural” em  $(0, 1]$ . Para o intervalo  $(a, b]$  essa medida é

$$|(a, b]| \equiv b - a. \quad (5.9)$$

Vamos supor, sem entrar em muitos detalhes, que para todo  $B \in \mathcal{B}$ , existe uma  $|B|$  compatível com (5.9), *i.e.*, redutível a (5.9) se  $B$  for um intervalo.

A notação  $E(x)$  é a usada por Taylor (1973).

Agora, se  $E \in \mathcal{B}$ , então,

$$|E(x)| = |E|. \quad (5.10)$$

Agora, como sempre,  $\mathbb{Q}$  é o conjunto dos racionais. Esse conjunto é enumerável. Consideremos os racionais contidos em  $(0, 1]$ . Esse segundo conjunto é

$$Q \equiv \mathbb{Q} \cap (0, 1]. \quad (5.11)$$

Valeria a pena provar que

$Q$  é enumerável.

Com essas definições à mão, estudemos então as propriedades dos conjuntos do tipo  $Q(x)$ .

1.

$$x \in (0, 1] \Rightarrow x \in Q(x). \quad (5.12)$$

Será verdade? Como provar?

$$Q(x) = \{x \boxplus y, y \in Q\}$$

Se 0 pertencesse a  $Q$ , (5.12) seria trivial. Mas é quase, porque  $1 \in Q$ . Faça  $y = 1$  acima; então,

$$x = x + 1 - 1 = x \boxplus 1 \in Q(x) \blacksquare$$

2.

$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q. \quad (5.13)$$

De fato: para começar,  $x, y \in Q \Rightarrow x \boxplus y \in Q$ . De fato,  $x \boxplus y \in (0, 1]$ , e tanto  $x + y$  quanto  $x + y - 1$ , conforme for o caso, são números racionais em  $(0, 1]$ . Isso basta!, pois, *neste caso*,  $Q(x) = \{x \boxplus y, y \in Q\} = Q \blacksquare$

3.

$$x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset, \quad (5.14)$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2). \quad (5.15)$$

Dessa forma, os conjuntos  $\{Q(x), x \in (0, 1]\}$  (que constituem uma *classe*, ou *família*) particionam o intervalo  $(0, 1]$  em subconjuntos disjuntos cuja união é o próprio  $(0, 1]$ . Há bastante material aqui. Antes das deduções, vamos escrever formalmente essa última observação:

$$\bigcup_{x \in (0, 1]} Q(x) = (0, 1].$$

Note também que os índices na expressão acima são demasiados, devido a (5.15). Queremos chegar a uma afirmação mais econômica:

$$\bigsqcup_{x \in T} Q(x) = (0, 1]$$

(note a disjunção). Na sequência, precisamos provar (5.14)–(5.15) e prosseguir na obtenção do conjunto  $T$ . Esse último se revelará um conjunto interessante, e na verdade o ponto final desta lição:  $T$  se revelará um conjunto *não mensurável*.

Para provar (5.14): Vamos tentar *reductio ad absurdum*. Seja  $z \in Q(x_1)$  e  $z \in Q(x_2)$ : nesse caso, a interseção  $Q(x_1) \cap Q(x_2)$  não seria o conjunto vazio. Porém, debaixo dessa hipótese:

$$\begin{aligned} z &= x_1 \boxplus y, \quad y \in Q, \\ z &= x_2 \boxplus y, \quad y \in Q. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) &= x_1 - x_2, \text{ ou} \\ &= x_1 - x_2 - 1 \text{ ou} \\ &= x_1 - x_2 + 1. \end{aligned}$$

Portanto, subtraindo (dessa forma) as duas expressões acima,

$$(-1 \text{ ou } 0 \text{ ou } +1) = x_1 - x_2.$$

mas  $(-1, 0, +1)$  são racionais, o que contraria a hipótese original sobre  $x_1 - x_2$  ■

Para provar (5.15): Volte acima e escreva a expressão geral:

$$(x_1 \boxplus y) - (x_2 \boxplus y) = x_1 - x_2 + s,$$

onde, como vimos, ou  $s = 0$  ou  $s = -1$  ou  $s = +1$ . Reescreva:

$$x_1 \boxplus y = x_2 \boxplus y + (x_1 - x_2) + s.$$

Note agora que é *sempre* possível escrever  $x_2 \boxplus y = x_2 + r$  (veja (5.7)), onde agora  $r$  é racional, e não necessariamente está em  $Q$ . Substitua:

$$x_1 \boxplus y = x_2 + r + s + (x_1 - x_2).$$

O lado esquerdo é um número em  $Q$ . Portanto, o lado direito é um número em  $Q$ :

$$x_2 + p \in Q, \tag{5.16}$$

onde  $p = (r + s + (x_1 - x_2))$  e portanto  $p \in \mathbb{Q}$  (mas não necessariamente  $p \in Q$ ). Agora, utilizando (5.7), vemos que é possível escrever o lado direito como  $x_2 \boxplus z$ , onde  $z \in Q$ . Disso se segue que

$$\{x_1 \boxplus y, \quad y \in Q\} = \{x_2 \boxplus z, \quad z \in Q\}$$

e portanto  $Q(x_1) = Q(x_2)$  ■

Relembrando:

$$x \in Q \Rightarrow Q(x) = Q$$

significa, por exemplo:

$$Q(1/2) = Q(1/3) = Q(1).$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{I} \Rightarrow Q(x_1) \cap Q(x_2) = \emptyset$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{3}/2) \cap Q(3/2) = \emptyset.$$

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2)$$

significa, por exemplo:

$$Q(\sqrt{2}/1000 + 1/8) = Q(\sqrt{2}/1000 + 3/8)$$

Ou seja: as criaturas estão ficando estranhas.

Para fechar esta parte bastante cansativa para a mente:

$$\bigcup_{x \in (0,1]} Q(x) = (0, 1]$$

pois  $x \in Q(x)$ .

## 5.2 O axioma da seleção e um conjunto estranho

Seja  $\mathcal{C}$  a família dos conjuntos  $Q(x)$ ,  $x \in (0, 1]$ . Escolha um único ponto em  $(0, 1]$  pertencente a cada  $Q(x)$ . O conjunto dos pontos assim escolhidos será chamado  $T$ , e temos que  $T \subset (0, 1]$ .  $T$  é um *conjunto de Vitali*. O que fizemos significa que, *por definição*, não há dois pontos em  $T$  pertencentes ao mesmo  $Q(x)$ . Segue-se que

$$\bigsqcup_{t \in T} Q(t) = (0, 1].$$

Estudemos as propriedades dos conjuntos  $T(r_i), r_i \in Q$ .

1.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0, 1]. \quad (5.17)$$

Só precisamos provar que, se  $x \in (0, 1]$ ,  $\exists i \in \mathbb{N} : x \in T(r_i)$ . Mas, de (5.12), segue-se que  $x \in (0, 1] \Rightarrow x \in Q(x)$ . Agora, portanto, se  $x \in Q(x)$ , escolha  $t \in Q(x)$ , onde  $t$  é o representante de  $Q(x)$ :  $t \in T$ .

Veja:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x \boxplus y, \quad y \in Q, \\ t \in Q(x) &\Rightarrow t = x \boxplus y \text{ para algum } y \in Q. \end{aligned}$$

Logo, de (5.7), existe algum  $q \in Q$  tal que  $t = x + q$ ; pelo mesmo motivo agora deve existir algum  $r \in Q$  tal que  $x = t + r$ . Mas  $Q$  é enumerável (não provamos!), portanto existe um índice  $i$  tal que  $x = t + r_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , e  $Q = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} r_i$ . Logo,  $x \in T(r_i)$ . A união dos  $T(r_i)$  gera o  $(0, 1]$ .

2. Os  $T(r_i)$  são disjuntos. Lembre-se de que  $T$  contém um único representante de cada  $Q(x)$ . Se houvesse  $r_i \neq r_j$  com  $y \in [T(r_i) \cap T(r_j)]$ , então teríamos

$$\begin{aligned} y &= t_i \boxplus r_i & \text{e} \\ y &= t_j \boxplus r_j. \end{aligned}$$

“Subtraia”:

$$0 = (t_i - t_j) + q$$

onde  $q$  é racional (novamente, nós usamos (5.7)). Logo,  $t_i - t_j$  é racional, donde  $Q(t_i) = Q(t_j)$  (devido a (5.15)). Mas isso não é possível, porque  $Q(t_i)$  possui um único representante em  $T$ . Portanto, a disjunção dos  $T(r_i)$ 's transforma (5.17) em

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} T(r_i) = (0, 1]. \quad (5.18)$$

Finalmente: se  $T$  fosse mensurável, haveria  $|T| = |T(r_i)|$  para todo  $i$ . Agora, pela sigma-aditividade:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T(r_i)| = |(0, 1]| = 1.$$

Isso, nós também já vimos em outra lição, é impossível.  $T$  não pode ser mensurável ■

# Capítulo 6

## 2014-03-12, 2014-03-17: Teoria de probabilidade e incursões na física e em geociências

### 6.1 Variável aleatória

Este início de seção foi escrito por mim, anteriormente. Entretanto, ele se parece bastante com a exposição da Ailin em 2014-03-17. Seria bom portanto unificar as duas aqui. Aceito sugestões.

Em uma visão moderna de probabilidades e estatística, inventada por Kolmogorov, nós precisamos de:

1. um conjunto  $\Omega$  — responsável por “sorteios”, denominado *Espaço Amostral*;
2. Uma função

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\mapsto x = X(\omega) \end{aligned}$$

A função  $X$  é denominada “variável aleatória”. A função  $X$  tem que ser *mensurável*, e nós vamos gastar algum tempo com isso ainda mais à frente.

3. Uma função

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A \in \mathcal{F} &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

O conjunto  $\mathcal{F}$  é uma *classe* (um conjunto de conjuntos). Como vimos no capítulo 3,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Cada *elemento* de  $\mathcal{F}$  é um sub-conjunto mensurável  $A \in \Omega$ , ao qual nós associamos um número  $P(A)$ . Os elementos de  $\mathcal{F}$  gozam de algumas propriedades

importantes em teoria de probabilidades:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F} \quad (6.1)$$

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F} \quad (6.2)$$

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \quad (6.3)$$

$$\emptyset \in \mathcal{F} \quad (6.4)$$

$$\Omega \in \mathcal{F} \quad (6.5)$$

Nós podemos reconhecer nestas propriedades, imediatamente, que os sub-conjuntos  $A \in \Omega$  são *eventos*. A função  $P$  associa a cada evento uma *probabilidade*. A função  $P$  também deve obedecer a algumas regras. Se  $A_1, \dots, A_n$  são conjuntos *disjuntos*,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , então

$$P(A_i) \geq 0 \quad (6.6)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (6.7)$$

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) \quad (6.8)$$

Esta última é um caso particular da  $\sigma$ -aditividade:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (6.9)$$

É muito importante enfatizar que o espaço amostral é um conceito *abstrato*: ele ajuda a conceituar probabilidades e também ajuda a demonstrar alguns resultados, mas na prática tudo o que vemos no mundo “real”, ou seja, os únicos objetos que podemos manipular em aplicações de teoria de probabilidade, são as *realizações* da variável aleatória:  $x = X(\omega)$ .

Para avaliar a probabilidade de ocorrência de certos níveis de uma variável aleatória nós usamos eventos do tipo  $X(\omega) \leq x$ , que pode ser entendido com o auxílio da figura 6.1.

Diferentes maneiras de escrever o evento  $A$  são:

$$A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$A = \{X(\omega) \leq x\},$$

$$A = \{X \leq x\}.$$

Note que na última forma desapareceu qualquer referência explícita ao espaço amostral.

## 6.2 A conveniência de definir funções de $\Omega$ em $\mathbb{R}$ .

Em princípio, para cada pergunta que nós podemos formular sobre eventos e probabilidades, é possível construir um espaço amostral  $\Omega$  “sob medida” para respondê-la. Junto com esse espaço, é possível, também em princípio, definir uma medida de probabilidade adequada. Nesse caso, tudo o que é necessário, sempre, é a formulação de uma tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  que nos permita medir a probabilidade dos eventos  $A$  de nosso interesse.

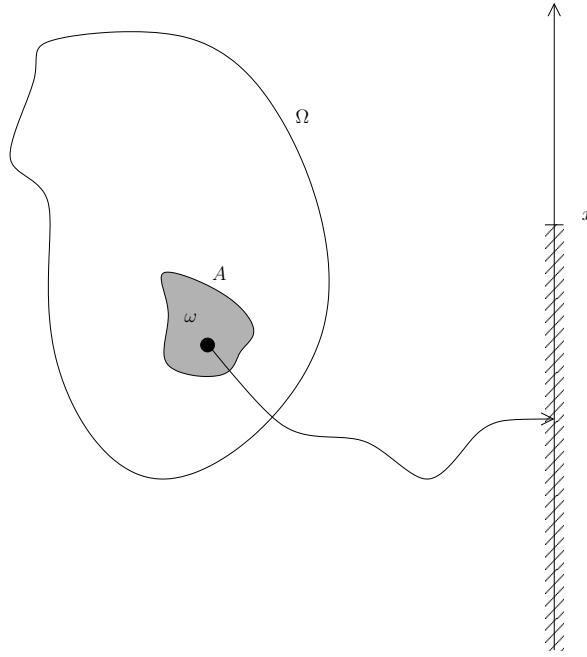


Figura 6.1: Representação gráfica do evento  $X(\omega) \leq x$

Entretanto, isso não é *prático*. O motivo é que, *sempre*, as perguntas que podemos formular a partir de uma dada tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  inicial, podem ser expressas em termos de *funções* cujo domínio é  $\Omega$ . Rapidamente, portanto, nós nos deparamos com a conveniência, e quase que com a imposição, da definição de funções de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ . Tais funções são denominadas *variáveis aleatórias*.

Considere, por exemplo, o lançamento de  $n$  moedas do exemplo 3.1. Se “caras” significa  $x_i = 0$  e “coroa” significa  $x_i = 1$ , a pergunta: qual é o número de coroas obtidas em  $n$  lançamentos pode ser respondida com o auxílio da função

$$X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i.$$

$X$  é uma função. A imagem de  $X$  é

$$\text{Im}X = \{0, 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}.$$

$X$  não é sobrejetiva.

Perguntas similares podem ser respondidas com outras funções, sem que seja necessário redefinir uma nova tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para cada pergunta! Por exemplo, se desejarmos calcular probabilidades associadas ao número de caras obtidas em  $n$  lançamentos, podemos usar:

$$X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega = (x_1, \dots, x_n) \mapsto n - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Ou ainda poderíamos estar interessados no número médio de coroas em  $n$  lançamentos (ou ainda no limite dessa quantidade quando  $n \rightarrow \infty$ ), quando então poderíamos usar a função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right].$$

Esses breves exemplos sugerem que é *econômico* e *útil* trabalhar com funções definidas em  $\Omega$ , em vez de reformular, do zero, um novo  $\Omega$  para cada pergunta relevante que possamos ter sobre eventos relacionados com o  $\Omega$  original. Sob esse ponto de vista, variáveis aleatórias não são, em absoluto, uma necessidade. Elas são apenas uma forma cômoda de responder perguntas sobre probabilidades.

A conveniência de trabalhar com variáveis aleatórias, entretanto, cria um novo conjunto de “problemas” técnicos que agora precisam ser resolvidos. Grosso modo, a questão é a seguinte:

Como é que o contradomínio  $\mathbb{R}$  “percebe” a tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ?

Sucede que o que faz sentido é calcular probabilidades dos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  pertencentes à classe  $\mathcal{B}$ , onde  $\mathcal{B}$  é a sigma-álgebra de Borel.

Lembremo-nos de que  $\mathcal{B}$  é a menor sigma-álgebra que contém os intervalos  $(a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , os intervalos  $(-\infty, b]$ ,  $(a, +\infty)$ , e também os intervalos  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  e suas uniões e interseções, e todos os conjuntos abertos e fechados.

**Não sei o que os conjuntos abertos e fechados estão fazendo aqui. Seria bom explicar sua relação com os intervalos.**

Precisamos, portanto, “ligar”, de alguma forma,  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{F}$ , esta última a sigma-álgebra da tripla de probabilidade “original”. No fim, o que vai funcionar é o seguinte: para qualquer  $B \in \mathcal{B}$ , vamos definir a probabilidade de conjuntos mensuráveis em  $\mathcal{B}$  como

$$\mathcal{P}(B) \equiv P(X^{-1}(B)). \quad (6.10)$$

É claro que é preciso “garantir” que  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Pode-se mostrar que uma condição suficiente para isso é que

$$X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{F}. \quad (6.11)$$

Dizemos que, se  $X$  atende (6.11),  $X$  é uma função *mensurável*. Portanto,

---

**Definição:** Dada uma tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , uma *variável aleatória* é uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega \mapsto x = X(\omega),$$

tal que

$$\forall b \in \mathbb{R}, X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{F}.$$


---



É interessante observar que definição de mensurabilidade de uma função é feita em termos da relação (não necessariamente uma função) *inversa*  $X^{-1}$ . O motivo é técnico: uniões, interseções e complementos *arbitrários* de conjuntos  $B \in \mathcal{B}$  *permanecem em*  $\mathcal{B}$ . Da mesma forma, é preciso garantir que as pré-imagens dessas uniões, interseções e complementos *permaneçam em*  $\mathcal{F}$ . Dadas as propriedades de fechamento de qualquer sigma-álgebra sob essas operações, essa garantia é dada pelas propriedades sempre válidas (dada uma função  $X$  qualquer, não necessariamente mensurável — isso é outra parte de nossos requisitos!):

$$\begin{aligned} X^{-1}(A \cup B) &= X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B), \\ X^{-1}(A \cap B) &= X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B), \\ X^{-1}(\overline{A}) &= \overline{X^{-1}(A)}. \end{aligned}$$

As duas primeiras relações podem ser estendidas para uniões e interseções arbitrárias (não necessariamente enumeráveis, embora isso baste para nossas sigma-álgebras):

$$\begin{aligned} X^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X^{-1}(A_{\lambda}), \\ X^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda}\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X^{-1}(A_{\lambda}). \end{aligned}$$

A necessidade de definir mensurabilidade usando  $X^{-1}$  decorre do fato de que *é falso que*:

$$\begin{aligned} X(A \cap B) &= X(A) \cap X(B), \\ X(\overline{A}) &= \overline{X(A)}. \end{aligned}$$

Para isso, bastam dois contra-exemplos.

**Exemplo 6.1** Sejam  $A = (-\infty, 0)$  e  $B = [0, +\infty)$ . Então,  $\overline{A} = B$  e  $\overline{B} = A$ . Dada a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto 1, \end{aligned}$$

Temos:

$$A \cap B = \emptyset, \quad f(A) = f(B) = \{1\},$$

e

$$f(A) \cap f(B) = \{1\} \neq \emptyset = f(A \cap B).$$

---

**Exemplo 6.2** Sejam  $A = (-\infty, 0)$  e  $B = [0, +\infty)$ . Então,  $\overline{A} = B$  e  $\overline{B} = A$ . Dada a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2, \end{aligned}$$

Temos:

$$f(\overline{A}) = f(B) = [0, \infty) = B \neq [0, -\infty) = \overline{f(A)}.$$


---

Uma função mensurável em  $\Omega$  tem o papel de transferir a estrutura  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  para uma tripla equivalente  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ . A probabilidade de sub-conjuntos de  $\mathbb{R}$  que “fazem sentido” está bem definida por (6.10) (na verdade, nos sub-conjuntos que pertencem a  $\mathcal{B}$  (a sigma-álgebra de Borel) e também possivelmente mais alguns, que pertencem a  $\mathcal{L}$  (a sigma-álgebra de Lebesgue) — mas a diferença entre ambos consiste em conjuntos de medida zero). Seguem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{R}) &= 1, \\ 0 &\leq \mathcal{P}(B) \leq 1, \\ \mathcal{P}\left[\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right] &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(B_i) \quad \sigma\text{-aditividade} \end{aligned}$$

Cabe observar que nem toda função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  é uma variável aleatória. Considere por exemplo a função

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\overline{T}} : (0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1, & \omega \in \overline{T} \cap (0, 1], \\ 0, & \omega \in T. \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $T$  é o conjunto de Vitali definido na seção 5.2. Sabemos que  $T$  é não-mensurável:  $T \notin \mathcal{F}$ . Segue-se que a função  $\mathbb{1}_{\overline{T}}$  não é mensurável:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\overline{T}}^{-1}\left((-\infty, 1/2]\right) &= \left\{\omega \in (0, 1] : \mathbb{1}_{\overline{T}}(\omega) \in (-\infty, 1/2]\right\} \\ &= \left\{\omega : \mathbb{1}_{\overline{T}}(\omega) = 0\right\} \\ &= T \notin \mathcal{F} \blacksquare \end{aligned}$$

## 6.3 2014-03-19: Propriedades de variáveis aleatórias

Exemplos de variáveis aleatórias construídas a partir de outras:

1. Se  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

é uma variável aleatória em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

2. Se  $X, Y$  são duas variáveis aleatórias em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , então

- a)  $X + Y$  é uma variável aleatória;
- b)  $cX$  é uma variável aleatória;
- c)  $X + c$  é uma variável aleatória;
- d)  $X^2$  é uma variável aleatória;
- e)  $XY$  é uma variável aleatória.

3. Se  $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$  é uma sequência de variáveis aleatórias e  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$  existe para cada  $\omega$ , então:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$$

satisfaz

$$X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{F}.$$

A prova é complicada! Rosenthal:

$$X^{-1}((-\infty, b]) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} X_k^{-1}\left(-\infty, x + \frac{1}{m}\right].$$

4.  $\max(X, Y)$ ,  $\min(X, Y)$  e  $|X|$  são variáveis aleatórias. Notando que

$$\max(X, Y) = \frac{1}{2} [X + Y + |X - Y|],$$

$$\min(X, Y) = (X + Y) - \max(X, Y),$$

basta provar para o  $|X|$ .

5.  $\sup_n X_n$ ,  $\inf_n X_n$  são variáveis aleatórias, desde que bem definidos. Vale lembrar que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} r_n = \begin{cases} \min \{r : r_n \leq r, \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ +\infty, \end{cases} \quad \text{se a sequência não for limitada.}$$

6.  $\limsup_n X_n$  e  $\liminf_n X_n$  são variáveis aleatórias.

Forme:

$$Y_n \equiv \sup_{N \geq n} X_N. \quad \textbf{Confirmar índices!!!}$$

Note que  $Y_n(\omega)$  é uma função monótona (não-crescente) de  $n$ , para cada  $\omega$ . Portanto,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \equiv \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Forme:

$$Z_n \equiv \inf_{N \geq n} X_N. \quad \textbf{Confirmar índices!!!}$$

Note que  $Z_n(\omega)$  é uma função monótona (não-decrescente) de  $n$ , para cada  $\omega$ . Portanto,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

7. Qualquer função contínua  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória. Nota: para que o conceito de função contínua faça sentido, é preciso que, no domínio,  $\mathcal{F}$  contenha os conjuntos abertos de  $\Omega$ , ou seja, que  $\mathcal{F}$  seja uma  $\sigma$ -álgebra de Borel em  $\Omega$ .

8. Se:

$$\begin{aligned} X : (\Omega, \mathcal{F}, P) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P}), \\ \omega &\mapsto x = X(\omega), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}, |\cdot|) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, |\cdot|), \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

(ou seja:  $f$  é mensurável), então  $f \circ X$  é uma variável aleatória.

Finalmente, temos uma anotação um pouco solta que precisa ser esclarecida:  $B \in \mathcal{B}$ ,  $|B| = 0$ ,  $D \subset B$ ,  $D$  não necessariamente em  $\mathcal{B}$ ,  $D \in \mathcal{L}$ , a qual é a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue, que é o completamento, por  $|\cdot|$ , da  $\sigma$ -álgebra de Borel.

## 6.4 A FDA

Nós agora vamos definir a função distribuição acumulada (FDA) de probabilidade de uma variável aleatória  $X$ :

$$F_X(x) \equiv P\{X \leq x\}. \quad (6.12)$$

A notação da equação (6.12) é normalmente simplificada para  $F_X(x) \equiv P\{X \leq x\}$ . A FDA nos permite calcular facilmente probabilidade relacionadas a  $X$ . Por exemplo, para obter a probabilidade de que  $X$  ocorra em um intervalo  $[a, b]$ :

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \quad (6.13)$$

$$= F(b) - F(a). \quad (6.14)$$

As propriedades da função distribuição acumulada são:

$$F(-\infty) = 0, \quad (6.15)$$

$$F(+\infty) = 1, \quad (6.16)$$

$$F(b) - F(a) \geq 0, \text{ para } a < b. \quad (6.17)$$

A função densidade de probabilidade (FDP),  $f_X$ , é

$$f_X(x) \equiv \frac{dF_X}{dx}, \quad (6.18)$$

com  $f_X(x) \geq 0$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (6.19)$$

## 6.5 Média e momentos

A média de uma variável aleatória, ou valor esperado de uma variável aleatória, é

$$\langle X \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx. \quad (6.20)$$

De maneira mais geral, seja  $y = q(x)$  uma função de  $x$ ; então para cada sorteio de  $X$  corresponderá um  $Y = q(X)$ , ou seja:  $Y$  será (também) uma variável aleatória. A média de  $Y$  será dada por

$$\langle Y \rangle = \langle q(X) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) f_X(x) dx. \quad (6.21)$$

Momentos centrais desempenham um papel importante em Teoria de Probabilidade. A definição do momento central de ordem  $n$  é

$$c_{Xn} \equiv \langle (x - \langle X \rangle)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^n f_X(x) dx. \quad (6.22)$$

## 6.6 Distribuições conjuntas

Para definirmos distribuições conjuntas de probabilidade, precisamos estender as definições da seção 6.1.

No  $\mathbb{R}^2$ , uma variável aleatória é uma função  $\mathbf{X} = (X, Y)$  função de  $\omega \in \Omega$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \omega &\mapsto \mathbf{x} = \mathbf{X}(\omega). \end{aligned}$$

A função densidade acumulada conjunta será

$$F_{X,Y}(x, y) \equiv P \{ X \leq x \wedge Y \leq y \}, \quad (6.23)$$

e a função densidade de probabilidade será

$$f_{X,Y}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial y \partial x}. \quad (6.24)$$

As funções densidade de probabilidade *marginais* são

$$f_X(x) \equiv \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy, \quad (6.25)$$

$$f_Y(y) \equiv \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx. \quad (6.26)$$

Naturalmente,

$$\iint_{x,y} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1. \quad (6.27)$$

O *valor esperado* de uma função de  $X$  e  $Y$  é

$$\langle g(X, Y) \rangle = \iint_{x,y} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (6.28)$$

Com os resultados acima, nós podemos agora deduzir o seguinte fato: se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias quaisquer,

$$\langle X + Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle. \quad (6.29)$$

- a) *Insight* com matemática finita: seja  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  uma amostra qualquer de  $n$  pares de observações. Então, a *média amostral* da soma é

$$\begin{aligned}\overline{x+y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ &= \bar{x} + \bar{y}.\end{aligned}$$

Note como não foi necessária nenhuma hipótese adicional sobre a natureza dos  $x$ 's e  $y$ 's ou sobre qualquer relação entre eles.

- b) com Teoria de Probabilidade. Seja  $g(x, y) = x + y$ . Então,

$$\begin{aligned}\langle g(X, Y) \rangle &= \langle X + Y \rangle = \iint_{x,y} (x + y) f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \iint_{x,y} x f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx + \iint_{x,y} y f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx \\ &= \iint_{x,y} x \underbrace{[f_{X,Y}(x, y) \, dy]}_{f_X(x)} \, dx + \iint_{x,y} y \underbrace{[f_{X,Y}(x, y) \, dx]}_{f_Y(y)} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \, dy \\ &= \langle X \rangle + \langle Y \rangle.\end{aligned}$$

Já que estamos falando de distribuições conjuntas, devemos tocar no conceito fundamental de independência/dependência. Dados dois eventos  $A$  e  $B$ , a probabilidade de  $B$  condicionada a  $A$  é

$$P(B|A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (6.30)$$

**Definição:**  $B$  e  $A$  são independentes quando

$$P(B|A) = P(B). \quad (6.31)$$

**Corolário:** Se  $A$  e  $B$  são independentes,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (6.32)$$

Isso nos leva imediatamente à definição de independência de variáveis aleatórias:  $X$  e  $Y$  são independentes quando os *eventos*

$$A = \{\omega | X(\omega) \leq x\} \text{ e } B = \{\omega | Y(\omega) \leq y\}$$

são independentes, ou seja:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B), \\ P(X(\omega) \leq x \wedge Y(\omega) \leq y) &= P(X(\omega) \leq x) P(Y(\omega) \leq y), \\ F_{X,Y}(x, y) &= F_X(x)F_Y(y).\end{aligned}$$

Portanto, se  $X$  e  $Y$  são independentes, então a FDA conjunto é igual ao produto das FDA's marginais. Fazendo a 2ª derivada cruzada,

$$\begin{aligned}
 f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial y \partial x} \\
 &= \frac{\partial^2 F_X(x) F_Y(y)}{\partial y \partial x} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial F_X}{\partial x} F_Y(y) \right] \\
 &= f_X(x) \frac{\partial F_Y}{\partial y} \\
 &= f_X(x) f_Y(y).
 \end{aligned}$$

A próxima definição é a densidade de probabilidade de  $y$  *condicionada* à ocorrência de  $x$ :

$$f_{Y|x}(y) \equiv \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}. \quad (6.33)$$

Embora deva ser possível deduzir rigorosamente (6.33) a partir de (6.30), não vou fazê-lo (ainda). Em vez disto, vou procurar um caso particular muito interessante. Primeiramente, note que, por definição, a densidade marginal de  $y$  é dada por

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx \\
 &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{Y|x}(y) f_X(x) dx.
 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Considere agora o caso em que  $y = g(x)$ , ou seja: em que  $Y$  está deterministicamente determinado a partir da observação de  $x$ . A função densidade de probabilidade condicionada é então, simplesmente,

$$f_{Y|x}(y) = \delta(g(x) - y), \quad (6.35)$$

ou seja: dado  $x$ , a probabilidade de que  $Y = g(x)$  é 1 (note as letras maiúscula e minúscula). Note também que (6.35) é uma densidade de probabilidade legítima, já que sua integral em  $y$  é igual a 1. O primeiro resultado que vamos obter a partir daqui é uma fórmula para  $f_Y(y)$ :

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{Y|x}(y) f_X(x) dx \\
 &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(g(x) - y) f_X(x) dx.
 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Essa é uma equação totalmente geral, que permite o cálculo da densidade de probabilidade de *qualquer* variável aleatória definida por uma função,  $Y = g(X)$ , independentemente de ela ser biunívoca ou não! A equação (6.36) pode ser prontamente generalizada para funções de várias variáveis. Em particular, se  $Z = g(X, Y)$ , tem-se

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \delta(g(x, y) - z) f_{X,Y}(x, y) dy dx. \quad (6.37)$$

Considere agora o seguinte exemplo:  $y = x^2$ ,  $-1 \leq X \leq +1$ , com  $f_X(x) = 1/2$ . Essa função *não* é biunívoca. A densidade de probabilidade de  $y$  é

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{+1} \delta(x^2 - y) \frac{1}{2} dx. \quad (6.38)$$

Para calcular a integral acima, é preciso um pouco de cuidado. Primeiramente, note que

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} : \quad (6.39)$$

existem duas raízes, e isto precisa ser levado em consideração pelo ser humano que está resolvendo o problema: a fórmula (6.36) *em si* não vai dizer isso para você! O caminho mais rápido, aparentemente, é recorrer à seguinte propriedade da delta (Butkov, 1988, Cap. 6, p. 231):

$$\delta(x^2 - a^2) = (1/2a) [\delta(x + a) + \delta(x - a)] \quad (a > 0); \quad (6.40)$$

então,

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2\sqrt{y}} [\delta(x + \sqrt{y}) + \delta(x - \sqrt{y})] \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4\sqrt{y}} [1 + 1] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \blacksquare \quad (6.41)$$

Esse é um exemplo simples, porém muito rico. O valor esperado de  $Y$ , para o qual nós vamos usar a notação  $\langle Y \rangle$ , agora é facilmente obtido:

$$\langle Y \rangle = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2} dy = \frac{1}{3}, \quad (6.42)$$

enquanto que, devido à simetria de  $f_X(x)$ ,  $\langle X \rangle = 0$ .

Mais interessante ainda é a seguinte questão: se  $X$  é a variável aleatória com distribuição uniforme entre  $-1/2$  e  $+1/2$ , como acima, e  $Y = X^2$ , qual é a covariância entre  $X$  e  $Y$ ? Por definição, a covariância entre duas variáveis aleatórias é

$$\text{Cov}\{X, Y\} = \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f_{X,Y}(x, y) dy dx. \quad (6.43)$$

Quando duas variáveis aleatórias são independentes, sua covariância é nula:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{X, Y\} &= \iint_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \iint_{x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} (x - \langle X \rangle)(y - \langle Y \rangle) f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \left[ \int_{x \in \mathbb{R}} (x - \langle X \rangle) f_X(x) dx \right] \left[ \int_{y \in \mathbb{R}} (y - \langle Y \rangle) f_Y(y) dy \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$



No nosso caso particular,  $y = x^2$ , a covariância é

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\{X, Y\} &= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 x(y - \frac{1}{3}) \delta(x^2 - y) f_X(x) dy dx \\
&= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^1 x(x^2 - \frac{1}{3}) \delta(x^2 - y) \frac{1}{2} dy dx \\
&= \int_{x=-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3}) \int_{y=0}^1 \delta(x^2 - y) \frac{1}{2} dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3}) \underbrace{\int_{y=0}^1 [\delta(x^2 - y) dy]}_{=1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3}) dx = 0.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Na linha acima de (6.44), note a utilização simultânea de duas propriedades da delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) dx = 1, \tag{6.45}$$

$$\delta(x) = \delta(-x). \tag{6.46}$$

O resultado (6.44) é admirável: ele mostra que, mesmo que a dependência entre duas variáveis aleatórias seja *total*; mesmo que  $Y$  seja *totalmente* dependente de  $X$  na forma  $Y = g(X)$ , é possível que  $\text{Cov}\{X, Y\} = 0$ . Moral da história: a covariância é uma medida de dependência *linear*, e *não* uma medida universal de dependência.

Além da covariância, é usual encontrar o coeficiente de correlação,

$$\varrho_{XY} = \frac{\text{Cov}\{X, Y\}}{[\text{Var}\{X\} \text{Var}\{Y\}]^{1/2}}.$$

Com a desigualdade de Schwarz,

$$-1 \leq \varrho_{XY} \leq +1$$

Considere agora o cálculo da função densidade de probabilidade da variável aleatória  $Z = X + Y$ , *soma* de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  cuja distribuição conjunta de probabilidade,  $f_{X,Y}(x, y)$ , é conhecida. A função densidade de probabilidade de  $Z$  dada a ocorrência de  $x, y$  é

$$f_{Z|x,y} = \frac{f_{Z,X,Y}(z, x, y)}{f_{X,Y}(x, y)} = \delta(z - [x + y]) \tag{6.47}$$

Segue-se que a função densidade de probabilidade marginal de  $Z$  é

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{Z,X,Y}(z, x, y) dy dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \delta(z - x - y) f_{X,Y}(x, y) dy dx
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Lembrando das propriedades da Delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - a) f(y) dy = f(a), \tag{6.49}$$

$$\delta(y - a) = \delta(a - y), \tag{6.50}$$

tem-se

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y, y) dy \blacksquare \quad (6.51)$$

Finalmente, no caso de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  independentes, as integrais acima tornam-se integrais de convolução:

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \quad (6.52)$$

Note que esta é uma convolução no sentido da Teoria de Transformadas de Fourier, e não no sentido da Teoria de Transformadas de Laplace.

Quando, por outro lado, a relação  $Y = g(X)$  é biunívoca, as coisas ficam mais fáceis:

$$\begin{aligned} P\{Y \leq y\} &= P\{X \leq x\}, \\ P\{Y \leq g(x)\} &= P\{X \leq x\}, \\ F_Y(g(x)) &= F_X(x), \\ \frac{d}{dx} F_Y(g(x)) &= \frac{d}{dx} F_X(x), \\ \frac{d}{dy} F_Y(g(x)) \frac{dg}{dx} &= f_X(x), \\ f_Y(y) \frac{dg}{dx} &= f_X(x). \end{aligned}$$

Mudando ligeiramente a notação,  $y = y(x)$  produz

$$f_Y(y) dy = f_X(x) dx$$

cujas interpretações gráficas são óbvias.

Um caso particularmente útil e interessante é o de geração de uma variável aleatória no computador com uma distribuição dada. A resposta é o uso da própria FDA  $F_X(x)$  no lugar de  $g(x)$ . Seja  $U = F_X(X)$  a variável aleatória assim gerada. Nesse caso,

$$\begin{aligned} f_U(u) du &= f_X(x) dx, \\ f_U(u) \frac{du}{dx} &= f_X(x). \end{aligned}$$

mas

$$\frac{du}{dx} = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x);$$

portanto,

$$f_U(u) = 1, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (6.53)$$

A “receita” para gerar uma variável aleatória com FDA  $F_x(x)$  é a seguinte:

- a) gere uma variável  $u$  uniforme em  $[0, 1]$ .
- b) calcule  $x = F_X^{-1}(u)$ .

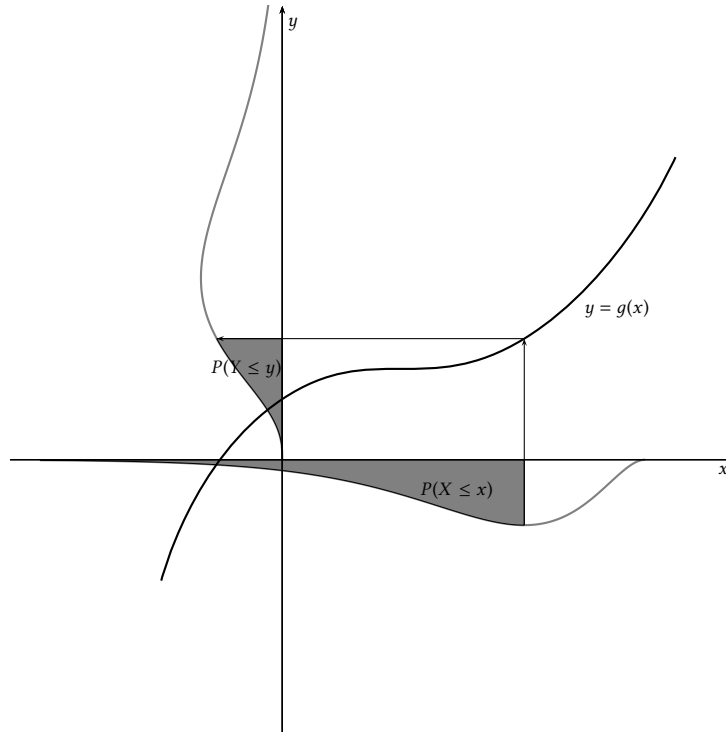


Figura 6.2: Relação entre as distribuições de probabilidade de  $X$  e  $Y$  quando a relação entre ambos é biunívoca.

Quando existe uma dependência linear, do tipo  $Y = aX + b$ , a *forma* da distribuição não muda:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y - b}{a}, \\ \frac{dy}{dx} &= a, \\ f_Y(y)dy &= f_X(x)dx, \\ f_Y(y)\frac{dy}{dx} &= f_X(x), \\ f_Y(y)a &= f_X(x), \\ f_Y(y) &= \frac{1}{a}f_X\left(\frac{y - b}{a}\right). \end{aligned}$$

Seja  $Y$  o estimador de uma variável cujo valor verdadeiro (de população) é  $y$ . No caso mais geral,

$$\langle Y \rangle = y' \neq y. \quad (6.54)$$

A diferença entre o valor médio previsto pelo modelo ( $y'$ ) e o valor verdadeiro ( $y$ ) é denominada o *viés* do modelo.

A figura 6.2 dá uma visão dessas relações.

**Exemplo: soma de exponenciais**

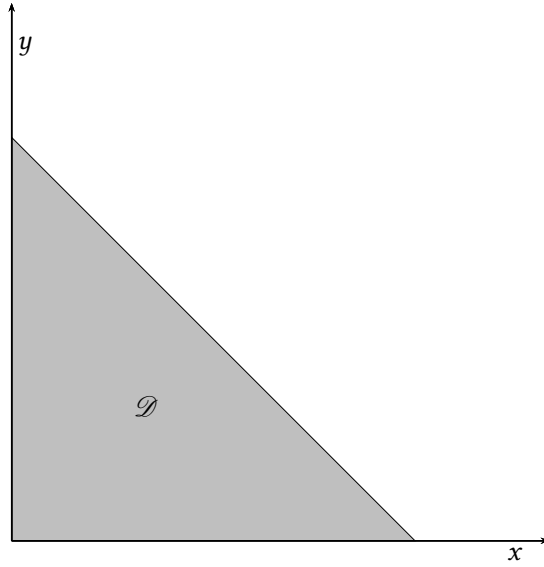


Figura 6.3: Região de integração para cálculo da distribuição da soma de duas variáveis aleatórias exponenciais.

Sejam

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right),$$

ou seja: duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  independentes e igualmente distribuídas com distribuição exponencial. Se  $Z = X + Y$ ,

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z\} &= P\{X + Y \leq z\} \\ &= P\{(X, Y) \in \mathcal{D}\} \\ &= P(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Veja a figura [6.3](#)

Agora,

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq z\} &= \int_{x=0}^z \int_{y=0}^{z-x} \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) dy dx \\ &= \int_{x=0}^z \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \left[ \int_{y=0}^{z-x} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) d\left(\frac{y}{\beta}\right) \right] d\left(\frac{x}{\beta}\right) \\ &= \int_{x=0}^z \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{z-x}{\beta}\right) \right] d\left(\frac{x}{\beta}\right) \\ &= \int_0^z (e^{-x/\beta} - e^{-z/\beta}) d\frac{x}{\beta} \\ &= 1 - e^{-z/\beta} - \frac{z}{\beta} e^{-z/\beta}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_Z(z) = 1 - e^{-z/\beta} - \frac{z}{\beta} e^{-z/\beta},$$
$$f_Z(z) = \frac{z}{\beta^2} e^{-z/\beta}.$$

A fdp tem a forma de distribuição gama, cuja fórmula geral é

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (6.55)$$

Para  $\alpha = 2$ ,  $\Gamma(\alpha) = 1$ , e a fórmula coincide. Esse é uma caso particular do seguinte resultado, mais geral:

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{EXP}(\beta) \Rightarrow Z = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{GAMA}(n, \beta).$$

# Capítulo 7

## Modelos e erros

---

**Exemplo 7.1** Seja  $M$  um modelo de previsão da temperatura da água de um rio. O modelo funciona de acordo com o seguinte esquema:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{M(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})} \longrightarrow y' \neq y.$$

Aqui, o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa os *dados de entrada*; eles podem ser, por exemplo, a radiação solar incidente, a vazão do rio, a temperatura do ar, etc.. O modelo  $M$  em si é composto de elementos tais como a geometria rio (largura, profundidade, comprimento), pelas as equações utilizadas para calcular ou estimar a temperatura  $y$ , etc.. A *natureza* de  $M$  pode ser qualquer. Por exemplo,  $M$  pode ser simplesmente uma regressão linear múltipla

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (7.1)$$

mas também pode ser um modelo físico de balanço de entalpia cuja incógnita seja a temperatura da água (Dias, 2003; Dias et al., 2003). Finalmente note que existe um vetor de *parâmetros*  $\boldsymbol{\theta}$  de  $M$ . No caso da regressão múltipla (7.1), os parâmetros são  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

---

A partir do esquema geral representado pelo Exemplo 7.1, é fácil identificar que numerosos erros podem ocorrer no processo de modelagem. Em geral, nós classificamos os erros em 3 tipos

- A) Erro dos dados: os dados de entrada do modelo geralmente contêm erros. Só isto já faz com que os dados de entrada devam ser considerados como variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e consequentemente a saída do modelo,  $Y$ , também.
- B) Erro do modelo: todo modelo contém imperfeições e limitações, e muitas vezes é extremamente difícil até mesmo identificar inequivocamente um único modelo (por exemplo, é comum que diversas distribuições diferentes de probabilidade representem “igualmente bem” um determinado conjunto de observações).
- C) Erro dos parâmetros. Mesmo que o modelo seja perfeito, a aleatoriedade seja dos dados de entrada seja das próprias observações  $y$  nas quais nos baseamos para “calibrar”  $M$  — o processo de estimativa dos parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  — faz com que estes últimos também carreguem incerteza.

Algumas estatísticas básicas de erros são definidas a seguir.

O vés do modelo é

$$v \equiv \langle Y \rangle - y = y' - y. \quad (7.2)$$

O erro médio quadrático do modelo é

$$\text{EMQ}\{Y\} \equiv \langle (Y - y)^2 \rangle \quad (7.3)$$

e sua raiz quadrada, que tem as mesmas dimensões de  $Y$ , é

$$\text{REMQ}\{Y\} = \sqrt{\text{EMQ}\{Y\}}. \quad (7.4)$$

A variância de  $Y$  é

$$\text{Var}\{Y\} = \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle. \quad (7.5)$$

Muito importante: como em geral  $\langle Y \rangle \neq y$ ,  $\text{EMQ}\{Y\} \neq \text{Var}\{Y\}$ . A relação entre ambas as estatísticas pode ser obtida muito facilmente:

$$\begin{aligned} \text{EMQ}\{Y\} &= \langle (Y - y)^2 \rangle \\ &= \langle [(Y - y') + (y' - y)]^2 \rangle \\ &= \langle (Y - y')^2 + 2(Y - y')(y' - y) + (y' - y)^2 \rangle \\ &= \langle (Y - y')^2 \rangle + 2(y' - y) \underbrace{\langle (Y - y') \rangle}_{=0} + \langle (y' - y)^2 \rangle \\ &= \text{Var}\{Y\} + v^2 \blacksquare \end{aligned} \quad (7.6)$$

Um bom modelo deve combinar duas virtudes:

- ser acurado:  $v \rightarrow 0$ ;
- ser preciso:  $\text{Var}\{Y\} \rightarrow 0$ .

## Capítulo 8

# A difusão de um ponto de vista probabilístico

### 8.1 Um passeio aleatório

Na figura 8.1, uma partícula move-se a partir da origem (com certeza) em passos de tempo  $n$ , dando “saltos” de 1 unidade a cada tempo. A posição da partícula no tempo  $n$  é  $X(n)$ . A *probabilidade* de a partícula estar na posição  $k$  no instante  $n$  é

$$p_k(n) \equiv P\{X(n) = k\}. \quad (8.1)$$

Suponha que uma transição para cima ou para baixo seja igualmente provável, e *independente* do estado atual  $X(n)$ :

$$P\{X(n+1) = X(n) + 1\} = 1/2, \quad (8.2)$$

$$P\{X(n+1) = X(n) - 1\} = 1/2. \quad (8.3)$$

Então o estado  $k$  só pode ser alcançado a partir de  $k+1$  ou de  $k-1$ , e

$$p_k(n+1) = \frac{1}{2}p_{k+1}(n) + \frac{1}{2}p_{k-1}(n). \quad (8.4)$$

Para prosseguirmos, nós vamos necessitar de derivadas numéricas. Veja a figura 8.2: as derivadas numéricas *centradas* em  $x = (i+1/2)\Delta x$ , e  $x = (i-1/2)\Delta x$  são

$$f'_{i+1/2} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad (8.5)$$

$$f'_{i-1/2} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}. \quad (8.6)$$

A derivada numérica é o coeficiente angular da secante entre 2 pontos; a derivada *exata* é o coeficiente angular da tangente geométrica. Na figura 8.2, ambas são mostradas: se você possuir uma vista suficientemente boa, procure identificar visualmente a diferença entre elas.



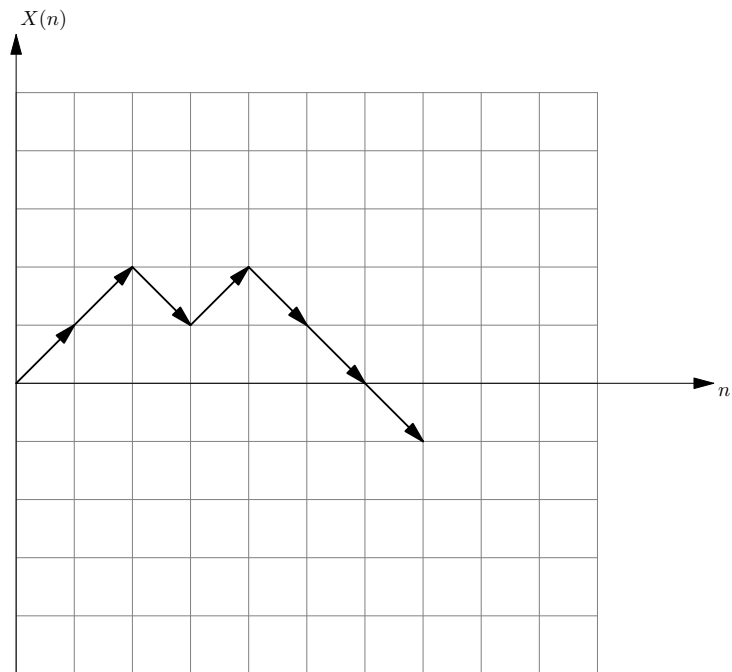


Figura 8.1: Um passeio aleatório simples, começando sempre em  $X = 0$ .

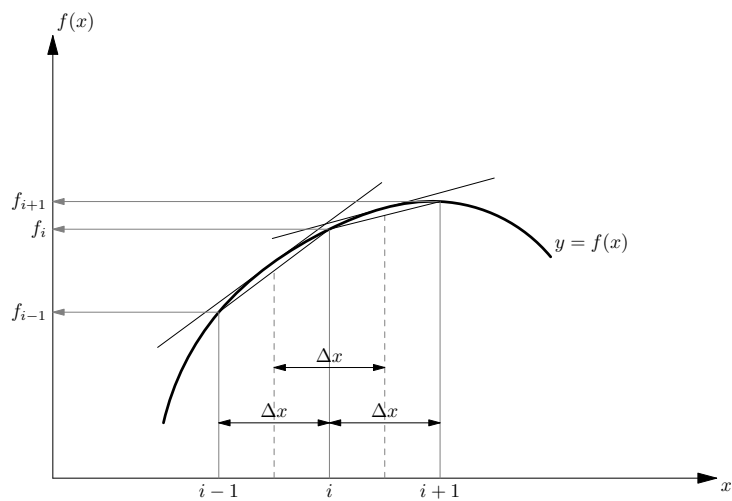


Figura 8.2: Derivadas numéricas de ordem 1 e 2.

A derivada segunda é a derivada da derivada:

$$\begin{aligned}
f_i'' &\approx \frac{f'_{i+1/2} - f'_{i-1/2}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Com isto, nós podemos agora manipular a equação (8.4):

$$\begin{aligned}
p_k(n+1) &= \frac{1}{2} (p_{k+1}(n) + p_{k-1}(n)) \\
2p_k(n+1) &= p_{k+1}(n) + p_{k-1}(n) \\
2(p_k(n+1) - p_k(n)) &= p_{k+1}(n) - 2p_k(n) + p_{k-1}(n) \\
\frac{p_k(n+1) - p_k(n)}{\Delta x^2} &= \frac{1}{2} \frac{p_{k+1}(n) - 2p_k(n) + p_{k-1}(n)}{\Delta x^2} \\
\frac{p_k(n+1) - p_k(n)}{\Delta t} &= \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{p_{k+1}(n) - 2p_k(n) + p_{k-1}(n)}{\Delta x^2}
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Faça agora

$$p_k(n) = p(k\Delta x, n\Delta t) = p(x, t)$$

e mantenha

$$\mathcal{D} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \tag{8.9}$$

constante, enquanto  $\Delta x \rightarrow 0$ . (8.8) torna-se

$$\begin{aligned}
\frac{p(x, t + \Delta t) - p(x, t)}{\Delta t} &= \mathcal{D} \frac{p(x + \Delta x, t) - 2p(x, t) + p(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \rightarrow \\
\frac{\partial p}{\partial t} &= \mathcal{D} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Esta é a mesma equação de difusão que nós resolvemos no capítulo ??! Isto significa que nós podemos dar à concentração de uma substância uma interpretação *probabilística*: ela é (também) a probabilidade de encontrarmos em  $(x, t)$  uma partícula emitida em uma certa posição (digamos,  $\xi$ ) no instante  $t = 0$ . Mas será  $\mathcal{D} = \Delta x^2/(2\Delta t)$  realmente constante? Esta pergunta possui uma resposta *estatística*, encontrada por Albert Einstein em 1905

## 8.2 A solução de Einstein para o movimento Browniano

Suponha que existem partículas movendo-se aleatoriamente dentro de um fluido de viscosidade dinâmica  $\mu$  e com temperatura termodinâmica  $T$ . A força de resistência ao movimento de uma partícula é dada pela lei de Stokes:

$$F_R = -6\pi\mu a \frac{dX}{dt}, \tag{8.11}$$

onde  $X$  é a posição aleatória da partícula, e  $a$  é o seu raio. Em (8.11), note que  $X$  é um escalar: nossa abordagem aqui será *unidimensional*, porque isto é mais fácil algebricamente. Quando fazemos isto, perdemos um pouco do realismo da situação, e muitas pessoas têm dificuldade em raciocinar com situações que, embora matematicamente mais simples, não possuem uma representação concreta no mundo real. Entretanto, esta é uma *excelente* maneira de abordar aquele mundo real: aos poucos, introduzindo as dificuldades matemáticas apenas quando não é mais possível escamoteá-las.

As velocidades das partículas,  $V$ , dependem da temperatura do fluido (e delas mesmas), segundo a Mecânica Estatística, via

$$\left\langle \frac{mV^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}kT, \quad (8.12)$$

onde  $k$  é a constante de Boltzmann.

Além de  $F_R$ , as partículas sofrem a ação de forças aleatórias  $F$ , que são produzidas pelos choques com as moléculas do fluido. A equação de movimento (unidimensional, é claro) de um partícula é

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -6\pi\mu a \frac{dX}{dt} + F. \quad (8.13)$$

Volte agora ao coeficiente de difusão dado por (8.9): se partirmos de  $x = 0$ ,  $t = 0$ , teremos (para cada partícula)

$$X^2 = 2\mathcal{D}t.$$

Suponha que esta relação seja válida na média de todas as partículas; então,

$$\langle X^2 \rangle = 2\mathcal{D}t, \quad (8.14)$$

$$\frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle = 2\mathcal{D}, \quad (8.15)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle X^2 \rangle = 0. \quad (8.16)$$

Lembre-se de que por enquanto (8.14) é apenas uma suposição, que nós devemos ser capazes de provar. Agora,

$$\frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} X^2 \right\rangle = \left\langle 2X \frac{dX}{dt} \right\rangle, \quad (8.17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle X^2 \rangle = 2 \left[ \left\langle \frac{dX}{dt} \right\rangle^2 + \left\langle X \frac{d^2 X}{dt^2} \right\rangle \right]. \quad (8.18)$$

Invocando agora (8.16) (que ainda é apenas uma hipótese que precisa ser provada),

$$\left\langle X \frac{d^2 X}{dt^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{dX}{dt} \right\rangle^2. \quad (8.19)$$

A equação (8.19) será útil em (8.13); multiplicando esta última por  $X$  e utilizando (8.19):

$$\begin{aligned} m \left\langle X \frac{d^2 X}{dt^2} \right\rangle &= -6\pi a \mu \left\langle X \frac{dX}{dt} \right\rangle + \langle XF \rangle, \\ -m \left\langle \frac{dX}{dt} \right\rangle^2 &= -6\pi a \mu \left\langle X \frac{dX}{dt} \right\rangle + \langle XF \rangle. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Raciocine agora probabilisticamente:  $X$  é a posição de uma partícula qualquer, com  $\langle X \rangle = 0$ .  $F$  é a força aleatória sobre uma partícula, com  $\langle F \rangle = 0$ .  $X$  e  $F$  *devem* ser variáveis aleatórias independentes:

$$\text{Cov}\{X, F\} = \langle (X - \langle X \rangle)(F - \langle F \rangle) \rangle = \langle XF \rangle = 0. \quad (8.21)$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} 6\pi a\mu \left\langle X \frac{dX}{dt} \right\rangle &= m \left\langle \frac{dX^2}{dt} \right\rangle = kT, \\ 6\pi a\mu \left\langle 2X \frac{dX}{dt} \right\rangle &= 2kT, \\ 6\pi a\mu \frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle &= 2kT, \\ \frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle &= \frac{kT}{3\pi a\mu} = 2\mathcal{D}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\mathcal{D} = \frac{kT}{6\pi a\mu}. \quad (8.23)$$

Observe que (8.22) é a mesma que (8.15): a hipótese (8.14) é *consistente* com o resultado que obtivemos, e o justifica *a posteriori*.

A relação entre  $k$ , o número de Avogadro  $N_A$ , e a constante universal dos gases pode ser encontrada nos bons livros do ramo:  $R = kN_A$ , ou seja:

$$\frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi a\mu N_A}; \quad (8.24)$$

esta é uma forma de determinar experimentalmente o número de Avogadro 🏴󠁧󠁢󠁥󠁮󠁧󠁿 You should re-read Abraham Pais!

Uma maneira mais formal de deduzir que  $\frac{d^2}{dt^2} \langle X^2 \rangle = 0$  é a seguinte. Suponha que  $X$  seja um processo estocástico com incrementos estacionários:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (X(t) - X(s))^2 \rangle &= 0, \quad \forall t, s, t > s, \\ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{(X(t) - X(s))^2}{t - s} \right\rangle &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left\langle \frac{(\Delta X)^2}{\Delta t} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{(\Delta X)^2}{\Delta t} \right\rangle &= 2\mathcal{D}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Como vimos, a distribuição de probabilidade da posição de uma partícula no passeio aleatório descrito na seção 8.1 possui equação governante (8.10), com

$$p(x, 0) = \delta(x), \quad (8.26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = 1, \quad \forall t. \quad (8.27)$$

É fácil interpretar estas duas últimas equações. (8.26) nos informa que  $X(0) = 0$  com probabilidade 1: a partícula *sempre* sai de  $x = 0$ . (8.27) requer que a densidade de probabilidade possua integral unitária, o que é óbvio. Note que (8.10) juntamente com as condições (8.26)–(8.27) é um problema clássico *que nós já resolvemos*, utilizando transformada de Fourier. A solução que obtivemos é

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{x^2}{4Dt} \right]. \quad (8.28)$$

Se fizermos, de acordo com a teoria do movimento Browniano de Einstein da seção 8.2

$$\sigma^2 \equiv \langle X^2 \rangle = 2Dt \quad (8.29)$$

e substituirmos em (8.28), teremos

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (8.30)$$

Esta é uma velha conhecida nossa: trata-se da distribuição normal, ou gaussiana, de probabilidade. Neste contexto, o *desvio-padrão* da posição da partícula,  $\sigma$ , cresce com a raiz quadrada do tempo  $t$ .

Equações do tipo (8.29) aparecem com frequência em problemas de difusão, e seu surgimento agora deve estar mais claro para você.

## 8.3 Uma introdução informal a processos estocásticos

Primeiro, alguns exemplos: as condições de tempo (tempo bom — sol, ou tempo ruim — chuva), o total de milímetros de chuva precipitados a cada 24 horas, e a vazão em um rio a cada dia, são todos exemplos de fenômenos que podem ser *modelados* como processos estocásticos.

Note o cuidado com as palavras: estes fenômenos podem ser *modelados* como processos estocásticos; eles não *são* processos estocásticos. Tanto quanto sabemos, a natureza não “sabe” o que ela mesma é; somos nós que lhe atribuímos certas propriedades, e a “enfeitamos” com hipóteses e modelos.

*De fato, é totalmente irrelevante o que a natureza realmente “é”: tudo o que devemos nos perguntar é se os modelos que utilizamos são uma boa descrição daqueles aspectos da natureza que consideramos importante modelar, para efeito de compreensão e de previsão*

De volta aos fenômenos que identificamos como passíveis de serem modelados como processos estocásticos, observe que

1. O tempo amanhã é muito parecido com o tempo hoje: se hoje o tempo está bom, é grande a chance de o tempo também estar bom amanhã. Uma boa variável para testar isto é a pressão atmosférica.
2. Uma coisa semelhante acontece — não por coincidência, é claro — com a chuva: se hoje está chovendo, é grande a chance de ainda estar chovendo amanhã.

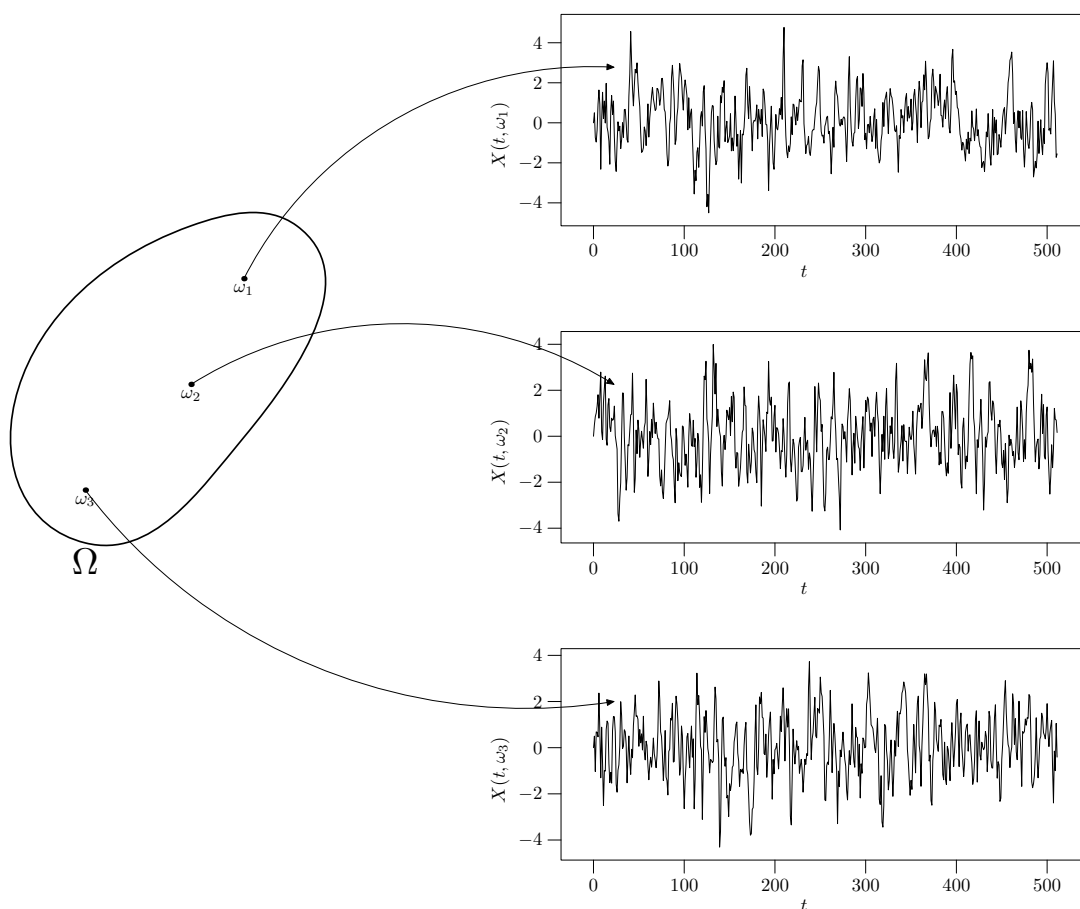


Figura 8.3: Ilustração de um processo estocástico.

3. Idem para a vazão de um rio — de novo você deve notar que estes 3 fenômenos estão intimamente ligados — se hoje a vazão de um rio está baixa (porque não chove na bacia há muitos dias), então é grande a chance de que ela continue baixa amanhã.

Por outro lado, a relação entre o tempo (ou a chuva, ou a vazão) hoje e daqui a 3 meses é praticamente nula: a persistência destes fenômenos não dura — normalmente — mais do alguns dias. Figurativamente, depois de um certo número de dias a natureza “se esquece” de si mesma. A idéia aqui é que muitos fenômenos possuem uma memória “finita”. Nosso trabalho agora é obter uma caracterização matemática razoável do que são processos estocásticos, e do que é a sua “memória”.

---

**Definição:** Um processo estocástico  $X(t, \omega)$  é uma função que leva cada  $\omega \in \Omega$  de um *espaço amostral* em uma função  $x(t) = X(t, \omega)$ .

---

Uma figura vale mais do que mil palavras. A figura 8.3 ilustra a definição de processo estocástico. Nesta figura, 3 valores diferentes de  $\omega$  geram 3 funções  $x(t)$  distintas. Mas não se engane! A *estocasticidade* — isto é, a aleatoriedade — do processo está no sorteio dos  $\omega$ 's, e não na aparência “aleatória” de  $x(t)$ ! De fato, cada um dos 3 gráficos de  $X(t, \omega)$  na figura 8.3 poderia ser uma função perfeitamente suave, e ainda assim o “processo” seria estocástico. A aparência de aleatoriedade de cada um dos gráficos está ligada a

propriedades *adicionais* — e muito úteis na prática — de alguns processos estocásticos. Estas propriedades são a memória finita, e a ergodicidade. Nós agora passamos a descrevê-las.

---

**Definição:** A função de autocovariância de um processo estocástico  $X(t)$  é

$$C(r, s) \equiv \langle (X(r) - \langle X(r) \rangle)(X(s) - \langle X(s) \rangle) \rangle \quad (8.31)$$

---

Quando  $X(t)$  é estacionário, (8.31) simplifica-se consideravelmente. Em processos estacionários, estatísticas calculadas em um instante  $t$  qualquer não dependem do mesmo. Então,

$$\langle X(r) \rangle = \langle X(s) \rangle = \mu_X, \quad (8.32)$$

$$\langle (X(t) - \mu_X)^2 \rangle = \sigma_X^2, \quad (8.33)$$

sendo que  $\mu_X$  e  $\sigma_X^2$  são *constantes* ao longo do tempo.

Em segundo lugar, se  $X(t)$  é estacionário, estatísticas que dependem de *mais de um instante* permanecem inalteradas sob uma translação no tempo. Então,

$$C(r, s) = C(r - s, 0). \quad (8.34)$$

Em outras palavras, *a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário depende apenas da diferença entre os instantes  $r$  e  $s$* . Isto nos dá, agora, uma definição mais simples (porém também mais restrita, porque só vale para processos estocásticos estacionários) para a função de autocovariância:

$$C(\tau) = \langle (X(t) - \mu_X)(X(t + \tau) - \mu_X) \rangle. \quad (8.35)$$

Com  $C(\tau)$  é possível definir uma

Vamos seguir agora para uma introdução informal à Teoria de Difusão Turbulenta de Taylor. Não custa repetir, nossa versão é unidimensional (e portanto demasiadamente simplificada para algumas aplicações).

Vamos agora começar a descrição de uma outra teoria de difusão, que deve muito à de Einstein, e que tentar analisar a difusão turbulenta sob um ponto de vista lagrangeano, ou seja: sob o ponto de vista do passeio aleatório de uma partícula em um fluido em escoamento turbulento.

Da mesma maneira que na seção 8.2, nós vamos estudar o problema em uma dimensão, para simplificar a matemática.

Em primeiro lugar, note que a posição  $X$  de uma partícula no instante  $t$  pode ser interpretada como uma soma de incrementos, como se segue:

$$X(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_k U(\tau_k) \Delta\tau.$$

Em (8.36),  $U$  é a velocidade da partícula em cada instante, e a integral foi re-interpretada como (o limite de) uma soma de Riemman. É muito razoável agora supor que todos os

$U(\tau_k)$ 's são indenticamente distribuídos, e invocar o Teorema Central do Limite. Nós concluimos então, imediatamente, que  $X$  é distribuído normalmente.

Nosso ponto de partida — que já foi dado — é a integral (8.36). Vamos supor que o campo de velocidade  $U$  que transporta a partícula possui média zero:  $\langle U \rangle = 0$ . Segue-se de (8.36) que

$$\langle X(t) \rangle = \left\langle \int_0^t U(\tau) d\tau \right\rangle = \int_0^t \langle U(\tau) \rangle d\tau = 0. \quad (8.36)$$

A função de autocovariância simplifica-se ainda mais:

$$C(\tau) = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle.$$

**Projeto 8.1** Um processo estocástico “clássico” é o modelo AR-2 dado por

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + E \quad (8.37)$$

onde  $E$  é um ruído branco de média zero e variância  $\sigma^2$ . Os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  devem obedecer a (Bras e Rodríguez-Iturbe, 1993, eq. 2.54):

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &< 1, \\ a_2 - a_1 &< 1, \\ -1 &< a_2 < 1. \end{aligned}$$

Por exemplo, podemos ter  $a_1 = 0,8$ , e  $a_2 = -0,2$ .



# Referências Bibliográficas

- Birkhoff, G. D. (1931). Proof of the Ergodic Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(12):656–660.
- Bras, R. L. e Rodríguez-Iturbe, I. (1993). *Random functions and hydrology*. Dover, New York.
- Butkov, E. (1988). *Física matemática*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Collet, P. (2010). *Dynamical Systems and Stochastic Processes*.
- Dias, N. L. (2003). Obtenção de uma solução analítica da equação de difusão-advecção com decaimento de 1ª ordem pelo método da transformação de similaridade generalizada. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:181–188.
- Dias, N. L., Gobbi, M. F., e Gobbi, E. F. (2003). Formulação de um modelo matemático do efeito de efluentes térmicos em rios e suas implicações para a legislação ambiental brasileira. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 8:169–180.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560.
- Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Foundations of the theory of probability)*. Springer, Berlin.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Langevin, P. (1908). Sur la théorie du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 146:530–533.
- Lebowitz, J. L. e Penrose, O. (1973). Modern ergodic theory. *Physics Today*, 26(2):23–29.
- Maxwell, J. C. (1867). On the Dynamical Theory of Gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157:pp. 49–88.

- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1975). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 2. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Taylor, G. I. (1935a). Statistical theory of turbulence. I. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:421–444.
- Taylor, G. I. (1935b). Statistical theory of turbulence. II. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:444–454.
- Taylor, G. I. (1935c). Statistical theory of turbulence. III. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:455–464.
- Taylor, G. I. (1935d). Statistical theory of turbulence. IV. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 151:465–478.
- Taylor, S. J. (1973). *Introduction to measure and integration*. Cambridge University Press.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- von Neumann, J. (1932). Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik. *The Annals of Mathematics*, 33(3):587.