

# Mecânica da Turbulência

Nelson Luís Dias  
(nldias@ufpr.br)  
Departamento de Engenharia Ambiental  
Universidade Federal do Paraná

18 de junho de 2015

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados . . . . .	10
1.2	Processos estocásticos . . . . .	12
1.3	A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds . . . . .	13
1.4	Independência ou morte . . . . .	15
<b>2</b>	<b>As equações diferenciais de transporte</b>	<b>17</b>
2.1	Notação indicial . . . . .	17
2.2	Continuidade . . . . .	17
2.3	Misturas . . . . .	18
2.4	Quantidade de movimento . . . . .	20
2.5	Vorticidade . . . . .	22
2.6	Energia . . . . .	26
2.7	Dissipação viscosa . . . . .	30
2.8	A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas . . . . .	31
2.9	O balanço do semiquadrado da temperatura . . . . .	33
<b>3</b>	<b>As macro e micro escalas da turbulência</b>	<b>35</b>
3.1	Macro e micro escalas: uma apresentação informal . . . . .	35
3.2	Uma definição formal das escalas macroscópicas . . . . .	39
3.3	Uma definição formal das escalas microscópicas . . . . .	41
3.4	A cascata de energia . . . . .	42
3.5	Macro e microescalas de temperatura . . . . .	43
3.6	Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos . . . . .	47
<b>4</b>	<b>As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq</b>	<b>50</b>
4.1	O estado hidrostático de referência . . . . .	50
4.2	O estado de referência na atmosfera . . . . .	53
4.3	Magnitude das flutuações de densidade . . . . .	55
4.4	Conservação de massa . . . . .	56
4.5	Quantidade de movimento . . . . .	57
4.6	A correlação pressão-temperatura . . . . .	62
4.7	As ordens de grandeza da equação para a temperatura . . . . .	63
4.8	A equação para a temperatura potencial . . . . .	69
<b>5</b>	<b>As equações de ordem 2</b>	<b>72</b>
5.1	Um teorema útil . . . . .	72
5.2	A dedução das equações de ordem 2 . . . . .	72
5.3	Energia cinética da turbulência . . . . .	75

## **Lista de Tabelas**

---

# Lista de Figuras

---

1.1	10 minutos de medições de concentração de $\text{CO}_2$ sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40. . . . .	10
1.2	Ilustração de um processo estocástico univariado $U(t; \omega)$ : as unidades de $U$ e $t$ são arbitrárias. . . . .	13
3.1	Expansão súbida em uma tubulação. . . . .	36
3.2	Escoamento clássico em um tubo com perda de carga. . . . .	38
4.1	Dependência da pressão de referência $P_r$ e da densidade de referência $\varphi_r$ em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude $z$ . . . .	55
4.2	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida . . . . .	64
4.3	Dependência de $\beta_p T$ com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C. . . . .	64

# Notação

---

Uma grande dificuldade ao escrever este texto foi a enorme quantidade de grandezas diferentes com as quais é necessário tratar. Nós utilizamos ao mesmo tempo grandezas extensivas (em geral escritas com letras maiúsculas) e intensivas (*idem*); variáveis aleatórias e valores observados (realizações) das mesmas, médias turbulentas e flutuações. Diferentes autores encontraram diferentes soluções para denotar com um número limitado de símbolos romanos e gregos um número muito maior de grandezas físicas e suas interpretações e abordagens matemáticas. As soluções que eu encontrei são, como sempre, um compromisso. A notação que utilizo é em parte original, e segue a idéia de ser tão simples quanto possível e ao mesmo razoavelmente clara. No entanto, alguns conflitos de símbolos são inevitáveis, conflitos os quais só podem ser parcialmente aliviados pela notação utilizada. A seguir, são dadas as principais explicações sobre a notação adotada no texto e sobre como lidar com as suas eventuais ambiguidades.

## Variáveis extensivas e intensivas

Variáveis extensivas dizem respeito a um corpo como um todo. *Em geral*, mas não sempre, elas são denotadas por letras maiúsculas em itálico com um til. Exemplos são

$\dot{\tilde{W}}$ : a taxa de trabalho realizada sobre um corpo,

$\tilde{U}$ : a energia interna total de um corpo,

$\tilde{P}$ : a quantidade de movimento total de um corpo.

Variáveis intensivas (definidas em um ponto) e instantâneas *em geral* são indicadas em maiúsculas em itálico também...ou então em letras gregas maiúsculas:

$\mathcal{U}$ : a energia interna específica (por unidade de massa),

$U$ : a velocidade vetorial do fluido,

$T$ : a temperatura,

$t$ : o vetor de tensões,

$T$ : o tensor de tensões,

$\varphi$ : a densidade,

$\Theta$ : a temperatura potencial.

Observe a exceção para o vetor de tensões  $t$ .

## Médias e flutuações turbulentas

A *decomposição de Reynolds* (Reynolds, 1895) é o procedimento padrão para distinguir grandezas às quais preferimos dar um tratamento determinístico (as “médias” de Reynolds) daquelas que necessitam ser modeladas como variáveis aleatórias ou como processos estocásticos (as “flutuações turbulentas”). Talvez a maneira mais antiga (mas ainda extremamente usada em engenharia) seja

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i,$$

onde a barra indica a média, e a linha indica a flutuação, da grandeza  $u_i$ . A honrosa lista de autores que a utilizam inclui Monin e Yaglom (1971, equações 3.3–3.7, p. 207), Richardson (1920), e Stull (1988, equações 2.4.2k, 2.4.3a–c, p. 40–41). Durante muito tempo ela foi minha preferida, mas o seu efeito quando se trabalha com a transformada de Fourier da flutuação,

$$\widehat{u'_i} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} u'_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{x},$$

é feio e particularmente trabalhoso sempre que se escreve as equações espectrais de turbulência à mão.

Tennekes e Lumley (1972) (equação 2.1.6, p. 28) preferem

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i;$$

Hinze (1975) (p. 4) utiliza

$$U_i = \bar{U}_i + u_i,$$

enquanto que Pope (2000) usa um misto de

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i$$

para a velocidade (equação 4.1, p. 83) e

$$\phi = \langle \phi \rangle + \phi'$$

para um escalar transportado (equação 4.36, p. 91).

Em todos os casos acima, o lado esquerdo é a grandeza intensiva instantânea, para a qual valem as leis de conservação e/ou as equações constitutivas clássicas, e o lado direito é a soma de uma média probabilística e de uma flutuação turbulenta. Talvez o caso mais infeliz seja o da confusão entre densidade e pressão. Utilizando-se por exemplo uma notação uniforme de letras maiúsculas para as grandezas instantâneas, e os símbolos clássicos  $p$  para (flutuação de) pressão e  $\rho$  para (flutuação de) densidade, tem-se

$$\begin{aligned} P &= \langle P \rangle + p, \\ P &= \langle P \rangle + \rho, \end{aligned}$$

onde  $P$ , além de ser um *rô* maiúsculo, infelizmente, é igual (a menos do tipo itálico) ao  $P$  romano maiúsculo. A diferença é demasiadamente sutil para ser aceitável, de forma que nenhum autor ousa na prática usar o símbolo  $P$  para indicar um *rô* maiúsculo. Muitos autores contornam este problema simplesmente utilizando a hipótese de

um escoamento com densidade estritamente constante ou apelando velada ou abertamente para a aproximação de Boussinesq (sobre a qual falaremos com um razoável nível de detalhe neste texto) e utilizando apenas uma densidade de referência constante (digamos,  $\rho_r$ ) nas equações. Por exemplo, [Richardson \(1920\)](#) sabia perfeitamente disto:

Note that there is no need to assume  $\rho$  to be independent of position. REYNOLDS assumed this, but for a reason that does not need concern us. It will be necessary however to assume that  $\rho'$ , the variation of density at a fixed point, is so much smaller in comparison with  $\bar{\rho}$  than is  $v'^*$  in comparison with  $\bar{v}$ , that we may put  $\rho' = 0$ .

O outro problema de notação encontrado em livros de turbulência são as flutuações de temperatura. A notação original de Reynolds,

$$T = \bar{T} + T'$$

funciona bem, mas o uso estrito de maiúsculas-minúsculas preferido por autores mais recentes produziria neste caso

$$T = \langle T \rangle + t,$$

o que é desagradável, já que  $t$  está comprometido com a variável “tempo”.

Minha solução para esses dilemas é utilizar sucedâneos para as letras gregas maiúsculas que estão “faltando”, e letras maiúsculas pequenas (*small caps*) alternativas quando as minúsculas já estiverem “comprometidas”. Em resumo, a notação deste texto para a decomposição de Reynolds é

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i \quad (\text{velocidade}),$$

$$P = \langle P \rangle + p \quad (\text{pressão}),$$

$$T = \langle T \rangle + \mathcal{T} \quad (\text{temperatura}),$$

$$\varrho = \langle \varrho \rangle + \rho \quad (\text{densidade}),$$

etc.. Infelizmente, nem tudo está perfeitamente resolvido; ainda restam dois problemas.

## Conflitos entre símbolos

Muitos símbolos utilizados neste texto possuem significados distintos em termodinâmica e em mecânica, ou mesmo dentro da mecânica. Alguns casos notórios (na notação deste texto) são

- $F$  é a energia livre de Helmholtz;  $f_i$  é uma força de corpo;
- $G$  é a energia livre de Gibbs;  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade;  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração da gravidade, e  $g_i$  é sua  $i$ -ésima componente;
- $t$  é o tempo;  $\mathbf{t}$  é o vetor-tensão;
- $T$  é a temperatura;  $\mathbf{T}$  é o tensor de tensões,

---

\* $v$  é o símbolo de Richardson para a velocidade

etc..

Em lugar de tentar criar um número suficiente de símbolos novos (por exemplo, [Batchelor \(1967\)](#) utiliza  $e$  e não  $u$  para a energia interna específica), o que de qualquer forma terminaria por esgotar o estoque de símbolos antes que todas as grandezas estivessem representadas, eu preferi:

1. procurar separar os símbolos sempre que possível por capítulo ou pelo menos por seção (por exemplo, a maior parte dos símbolos termodinâmicos está utilizada no capítulo sobre termodinâmica); e
2. deixar ao leitor atento a compreensão do significado dos símbolos em seu contexto.

## Variáveis aleatórias e suas realizações

Em teoria de probabilidades, é usual separar uma variável aleatória  $X$  de uma particular realização ou valor de quantil  $x$ ; isto facilita muito escrever coisas do tipo:

$$“P(X \leq x)”$$

é a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  seja menor ou igual que o valor  $x$ . Neste texto, entretanto, as letras maiúsculas representam valores instantâneos. Em particular, as flutuações de velocidade  $u_i$ , variáveis aleatórias extremamente importantes, são denotadas em letras minúsculas. Infelizmente, não parece possível separar de forma “limpa” o símbolo de uma variável aleatória do símbolo de uma particular realização ou de um quantil. O melhor que pode ser feito é utilizar os argumentos da variável para explicitar a diferença. Assim, voltando à decomposição de Reynolds, em geral teremos

$$U(\mathbf{x}, t; \omega) = \langle U \rangle(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Aqui, as variáveis aleatórias são função do elemento  $\omega$  do espaço amostral  $\Omega$ , além de o serem da posição e do tempo. É conveniente imaginar  $\Omega$  como uma urna de sorteio, e  $\omega$  como o particular valor sorteado, que neste caso vai definir uma realização da função aleatória  $U(\mathbf{x}, t; \omega)$  ou  $u(\mathbf{x}, t; \omega)$ .

## “É função de ...”

Neste trabalho, quando uma variável  $\phi$  qualquer é (por hipótese) uma função univariada de uma outra variável  $k$ , nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k).$$

Quando  $\phi$  é uma função (multivariada) de  $k$  entre outras variáveis, nós escrevemos

$$\phi := \text{ff}(k, \dots).$$

Quando  $\phi$  não é função de  $k$  (mas é, possivelmente, função de outras variáveis), dizemos ff:

$$\phi := \text{ff}(k);$$

Finalmente,  $\phi$  pode ser uma constante:

$$\phi := \text{€}$$



# 1

## Introdução

---

Todo autor e todo curso se sente na obrigação de fornecer uma introdução de “largo espectro” ao assunto que vai ser estudado. Este é, efetivamente, o espírito deste primeiro capítulo. O objetivo geral deste curso é estudar os aspectos mais teóricos e matemáticos da Teoria de Turbulência. Este é um desafio formidável.

Para se entender turbulência, é preciso antes de mais nada “vê-la”. Richardson a via como turbilhões, de diversos tamanhos, os maiores “alimentando” os menores num processo “contínuo” até que as flutuações do escoamento fossem amortecidas pela viscosidade. Isto é a essência do processo de *transferência inercial, não-linear, de covariâncias*, conforme veremos neste curso (bem mais à frente).

Portanto os pioneiros, Richardson, Taylor e Kolmogorov, tinham uma clara noção de que existem “estruturas”, “pedaços” ou “entes” num escoamento turbulento em um *continuum* de escalas, e que o próprio conceito de “escala” é essencial para a compreensão da turbulência.

No entanto, *escala* é um conceito “físico” ou “fenomenológico”, cuja exata definição matemática em termos dos campos de velocidade  $U(\mathbf{x}, t)$  ou de escalares tais como a temperatura  $T(\mathbf{x}, t)$  é consideravelmente difícil, senão impossível. Mesmo assim, é possível identificar diferentes escalas com diversas ferramentas matemáticas, tais como:

- Análise espectral (provavelmente a mais antiga).
- Funções empíricas ortogonais.
- Diferentes algoritmos para a identificação de estruturas e sua decomposição.
- Ondeletas (*Wavelets*).

Essas “estruturas” de diversos tamanhos realmente existem em um escoamento turbulento, mas nós devemos ser cuidadosos em não equacioná-las demais (nem de menos!) com uma particular técnica matemática de identificá-las.

Várias fotografias e figuras coloridas interessantes existem no livro sobre turbulência de Lesieur (1990), e também no de Frisch (1995) (que foi professor de Lesieur): dêem uma olhada nelas.

Existem algumas estruturas e alguns problemas clássicos relacionados um pouco à instabilização de escoamentos, que estão relacionados com a questão de turbulência:

- O experimento de Reynolds: a forma “clássica” de apresentar a turbulência em cursos de graduação, ele ainda conserva um considerável charme e didatismo.

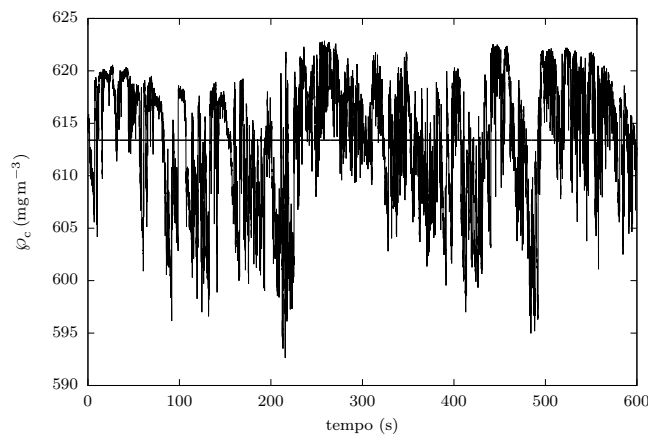


Figura 1.1: 10 minutos de medições de concentração de  $\text{CO}_2$  sobre uma grameira em Tijucas do Sul, PR, em 2011-02-17, 10:30–10:40.

- A “Rua de vórtices de von Kármán” (*Kármán vortex street*).
- Jatós e esteiras
- Turbulência atrás de uma grade em um túnel de vento (*grid turbulence*).

## 1.1 – Probabilidade: variáveis aleatórias e valores esperados

Nós estamos acostumados a identificar diversos fenômenos à nossa volta como “aleatórios”: jogos de azar, envolvendo dados e cartas, e loterias, são talvez os mais comuns. Nós percebemos aleatoriedade também, entretanto, em fenômenos que envolvem *física*: por exemplo, a velocidade de uma molécula em um gás, as condições do tempo, e também em numerosos fenômenos de escoamento de fluidos, tais com a superfície de um mar revolto e, é claro, escoamentos turbulentos.

A figura 1.1 é um exemplo disto: ela mostra a medição da densidade  $\varphi_c$  de  $\text{CO}_2$  a cerca de 2 m acima do solo, durante 10 minutos, sobre um gramado. A natureza errática de  $\varphi_c$  é inegável, e sugere que existe um componente aleatório na turbulência.

Tratar um fenômeno como aleatório em geral é mais simples do que tentar descrevê-lo em todos os seus detalhes, o que pode levar a uma complexidade analítica ou computacional insuperável. Por exemplo, em princípio nós poderíamos usar as equações da dinâmica de corpos rígidos para tentar prever o resultado do lançamento de um dado. Isto entretanto envolve conhecer em detalhes como o lançamento é feito; a resistência do ar durante a sua queda; a natureza da superfície em que ele cai, etc.. Na prática, o esforço para modelar *cada* lançamento individual é injustificável, e é preferível descrever o processo como probabilístico, com 1/6 de probabilidade de ocorrência do número de cada face.

A situação com turbulência é parecida: nós acreditamos que a turbulência é uma manifestação (ou uma *realização*) das equações de Navier-Stokes, as equações diferenciais que regem o escoamento de um fluido. No entanto, os detalhes associados com a definição das condições iniciais e de contorno, assim como com a solução propriamente dita destas equações não-lineares, são tão formidáveis que alternativas a um ataque direto, e infrutífero, são necessárias. A teoria de probabilidade e proces-

sos estocásticos é um elemento essencial de qualquer abordagem minimamente bem-sucedida ao problema de turbulência.

A melhor abordagem, que todos adotamos modernamente, para a teoria de probabilidade é devida a Kolmogorov, sendo chamada de “abordagem axiomática”. Ela é consideravelmente mais elegante do que a alternativa anterior, histórica, de definir probabilidade como um limite da frequência empírica com que um resultado (um “evento”) é observado. Uma abordagem elementar mas muito clara pode ser encontrada em Papoulis (1991, capítulo 2); em ordem crescente de rigor (mas inevitavelmente, também de dificuldade), outras abordagens podem ser encontradas em James (1981), Rosenthal (2008) e Billingsley (1986).

A essência da abordagem axiomática de Kolmogorov é postular a existência de uma *tripla de probabilidade*  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  (Rosenthal, 2008, capítulo 2):

- $\Omega$  é um conjunto, denominado *espaço amostral*.
- $\mathcal{F}$  é um campo, um conjunto formado por sub-conjuntos de  $\Omega$ . Mas não *todos* os subconjuntos! (Mais sobre isto em um instante). Em linguagem matemática muito técnica,  $\mathcal{F}$  é uma álgebra  $\sigma$ , ou um campo  $\sigma$ .
- $P$  é a medida de probabilidade, que dá, para cada  $A \in \mathcal{F}$ , a probabilidade do ocorrência do conjunto — ou melhor, do *evento* —  $A$ . Mais especificamente,  $P$  é uma função do tipo

$$\begin{aligned} P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A \in \mathcal{F} &\mapsto P(A) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

O segredo (e o enorme problema) da coisa é que  $\mathcal{F}$  *não* é, em geral, igual ao conjunto de todos os sub-conjuntos de  $\Omega$ . Ele é formado apenas pelos conjuntos  $A \subseteq \Omega$  para os quais é possível definir  $P(A)$  (para mais detalhes, veja a excelente exposição de Rosenthal (2008, capítulo 1)).

Dentro desta abordagem, uma *variável aleatória*  $VA$  é agora, a função *mensurável*  $U(\omega)$ :

$$\begin{aligned} U : \omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega &\mapsto U = U(\omega). \end{aligned}$$

Por definição, uma função  $U(\omega)$  é mensurável se

$$\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq U^\# \} \in \mathcal{F}, \quad U^\# \in \mathbb{R}$$

(Rosenthal, 2008, capítulo 3).

A pergunta mais importante do ponto de vista prático é: qual é a probabilidade de ocorrência de um certo intervalo de *valores* de  $U(\omega)$ ? A resposta é dada com a definição da *função de distribuição* de  $U$ ,  $F(U^\#)$ :

$$F(U^\#) \equiv P \left( \left\{ \omega \mid U(\omega) \leq U^\# \right\} \right). \quad (1.1)$$

Em particular, fica então evidente que é necessário que  $U(\omega)$  seja mensurável para que  $F(U^\#)$  possa ser definida em termos da medida de probabilidade  $P$ .

Talvez o descritor mais comum de uma VA seja a sua média, ou valor esperado. Ela é dada por uma integral de  $U(\omega)$  sobre  $\Omega$ , a saber

$$\langle U \rangle \equiv \int_{\Omega} U(\omega) dP(\omega). \quad (1.2)$$

A definição das integrais do tipo (1.2) é tecnicamente muito elaborada, e passa por um assunto denominado *Teoria da medida*; talvez um tratado definitivo sobre o tema, em conexão com a teoria de probabilidade, seja Billingsley (1986). Em engenharia, nós estamos normalmente acostumados com o cálculo de integrais sobre intervalos de números reais, e não em conjuntos mais genéricos e abstratos tais como  $\Omega$  (cuja natureza sequer foi definida acima!). Felizmente, vem em nosso auxílio o seguinte teorema, que nós citamos sem prova (Rosenthal, 2008, Teorema 6.1.1):

**Teorema de mudança de variáveis:** Dada uma tripla de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , seja  $U$  uma variável aleatória com medida de probabilidade  $P$  e distribuição  $F$ . Então, para qualquer função mensurável  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(t) dF(t). \quad (1.3)$$

Observações:

1. O teorema (1.3) é também a definição do valor esperado de uma função  $g(U)$ :

$$\langle g(U) \rangle \equiv \int_{\Omega} g(U(\omega)) dP(\omega). \quad (1.4)$$

2. Em particular, quando  $g(t) = t$  (a identidade), nós obtemos a expressão para o valor esperado de  $U$ :

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U dF(U). \quad (1.5)$$

3. Finalmente, se  $F(U)$  for diferenciável, e se existir a *função densidade de probabilidade*

$$f(U) \equiv \frac{dF}{dU}, \quad (1.6)$$

segue-se que

$$\langle U \rangle = \int_{\mathbb{R}} U f(U) dU. \quad (1.7)$$

Esta última definição de  $\langle U \rangle$  talvez seja a mais comum em cursos introdutórios de probabilidade.

## 1.2 – Processos estocásticos

Com as ferramentas da seção anterior, nós agora definimos brevemente o que são

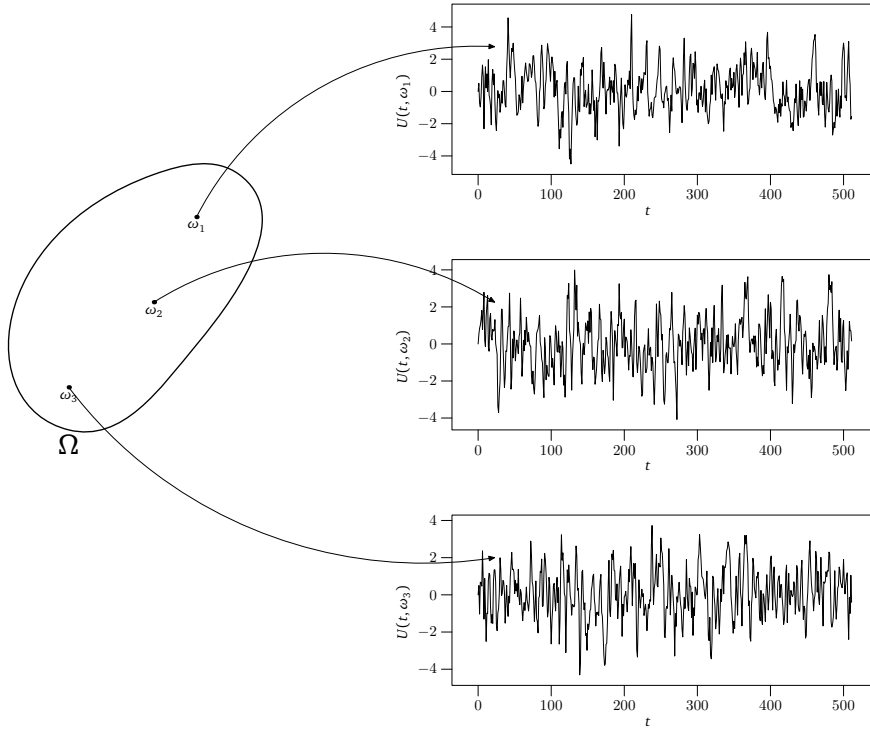


Figura 1.2: Ilustração de um processo estocástico univariado  $U(t; \omega)$ : as unidades de  $U$  e  $t$  são arbitrárias.

**Processo estocásticos:** Seja  $\mathbb{F}$  o espaço das funções de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , e  $t \in \mathbb{R}$ , em  $\mathbb{R}$ . Um processo estocástico é uma função

$$U : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$$

$$\omega \mapsto U(\mathbf{x}, t; \omega).$$

Em outras palavras, a cada “sorteio”  $\omega$ , em vez de o resultado do sorteio ser um número real (que é a definição de VA), o resultado do sorteio agora é uma função completa  $U$  de  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Nós dizemos que  $U$  é uma *função aleatória* (note que não há contradição nesta terminologia!). O significado de um processo estocástico está esboçado graficamente na figura 1.2. Por simplicidade, na figura a função aleatória depende apenas de uma variável ( $t$ ).

A figura 1.2 dá um exemplo da idéia de um *conjunto de realizações* da variável  $U(t)$  (na literatura de língua inglesa, um *ensemble*). Para que as médias de  $U$  façam sentido, é preciso que elas sejam tomadas sobre todos os “membros” do conjunto. Note entretanto que é exatamente isto o que faz a definição de valor esperado (1.2): o papel de um “membro” do conjunto é desempenhado por um particular  $\omega \in \Omega$ .

### 1.3 – A decomposição em média e flutuação, e os postulados de Reynolds

De agora em diante nós vamos postular que em um escoamento turbulento cada variável  $U_i$  é um processo estocástico do tipo

$$U_i = U_i(\mathbf{x}, t; \omega). \quad (1.8)$$

Como vimos na seção 1.2, uma *realização* do processo é uma função de  $\mathbf{x}$  e  $t$  observada para um particular  $\omega$ , ou ainda: cada  $\omega$  corresponde a uma *realização diferente* do processo estocástico subjacente.

Dada uma variável  $U_i$  em um escoamento turbulento, a *decomposição de Reynolds* consiste em escrever

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i. \quad (1.9)$$

Uma das principais utilidades da decomposição de Reynolds é separar o escoamento em uma variável determinística  $\langle U_i \rangle$  (que pode ou não variar no espaço e no tempo) e em uma *flutuação turbulenta*  $u_i$ , que é uma VA com valor esperado nulo. De fato, por definição (ver (1.2)) temos que

$$\langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega). \quad (1.10)$$

Note que  $\langle U_i \rangle$  é determinística *por definição*. A média de população de  $u_i$  então será

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle &= \langle U_i - \langle U_i \rangle \rangle \\ &= \int_{\omega \in \Omega} (U_i(\mathbf{x}, t; \omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t)) dP(\omega) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) - \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Utilizando (1.9) e (1.10), nós provaremos agora os demais “postulados” de Reynolds:

$$\begin{aligned} \langle \langle U_i \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} dP(\omega) \\ &= \langle U_i \rangle(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i \langle U_j \rangle \rangle &= \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle(\mathbf{x}, t) \int_{\omega \in \Omega} u_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \\ &= \langle U_j \rangle \langle u_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Finalmente, as derivadas em relação a  $x_i$  e a  $t$  comutam com a operação de média probabilística:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\rangle &= \int_{\omega \in \Omega} \frac{\partial U_i(\mathbf{x}, t; \omega)}{\partial t} dP(\omega) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\omega \in \Omega} U_i(\mathbf{x}, t; \omega) dP(\omega) \right] \\ &= \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

A prova do resultado para as derivadas parciais em relação a  $x_i$ ,

$$\left\langle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

é similar à prova de (1.14), e deixada para o leitor.

O conjunto de relações (1.11)–(1.15) é usualmente conhecido na literatura com o nome de *postulados de Reynolds*. À luz da sua dedução rigorosa acima, o nome mais adequado talvez fosse *lemas de Reynolds*.

## 1.4 – Independência ou morte

Se duas variáveis  $U$  e  $V$  são independentes, é relativamente fácil provar que

$$\langle UV \rangle = \langle U \rangle \langle V \rangle$$

Também é fácil provar que se um processo estocástico é estacionário:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle U^2 \rangle &= 0, \\ \left\langle U \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\ \langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle &= 0 \blacksquare \end{aligned}$$

É mais difícil mostrar que, se  $u$  e  $v$  são independentes, então

$$\left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Uma forma de chegar perto é

$$\frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\langle u \rangle \langle v \rangle) = \langle u \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} \langle v \rangle \quad (1.16)$$

Se, como eu já estava pensando quando mudei de notação,  $u$  e  $v$  são flutuações turbulentas, entretanto,  $\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0$ ; nesse caso, se  $u$  e  $v$  são independentes, temos o resultado trivial de que

$$\langle uv \rangle = 0, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \langle uv \rangle}{\partial t} = 0. \quad (1.18)$$

Vejamos, alternativamente, onde chegamos com

$$\left\langle \frac{\partial(uv)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \quad (1.19)$$

$$= \left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle + \left\langle v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \quad (1.20)$$

$$\left\langle u \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle = - \left\langle v \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle \quad (1.21)$$

(pois  $u$  e  $v$  são independentes).



# 2

## As equações diferenciais de transporte

---

A turbulência é uma consequência da não-linearidade das equações diferenciais que governam o escoamento de fluidos e o transporte de escalares (vapor d'água, calor, CO<sub>2</sub>, etc.). Neste capítulo nós vamos revisar de maneira breve a dedução destas equações a partir de leis de conservação da física e de equações constitutivas.

### 2.1 – Notação indicial

Uma boa parte de nossas manipulações requer o uso de notação indicial, e dos conceitos de *vetor* e de *tensor*. De maneira extremamente breve, a notação indicial envolve simplesmente a supressão dos símbolos de somatório. Desta forma, um vetor em coordenadas cartesianas na base canônica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ,

$$\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i\mathbf{e}_i, \quad (2.1)$$

é escrito simplesmente como

$$\mathbf{V} = V_i\mathbf{e}_i. \quad (2.2)$$

A regra geral é que o aparecimento de um mesmo índice duas vezes em uma equação indica soma neste índice. Algumas vezes, entretanto, esta regra não se aplica. Por exemplo, eu posso querer me referir a  $V_1\mathbf{e}_1$  ou  $V_2\mathbf{e}_2$  ou  $V_3\mathbf{e}_3$ . Nesse caso, usarei parênteses em torno dos índices, para informar que não há uma soma implícita nestes índices:  $V_{(i)}\mathbf{e}_{(i)}$ .

### 2.2 – Continuidade

Considere um volume  $\mathcal{V}$ , delimitado por uma superfície fechada  $\mathcal{S}$ . O balanço de massa total para  $\mathcal{V}$  é dado pela equação de balanço integral

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS \quad (2.3)$$

onde  $\wp$  é a massa específica, ou densidade, do fluido e  $\mathbf{U}$  é o vetor velocidade do escoamento em cada ponto.

Em (2.3),  $\mathcal{V}$  é um *volume material* (Slattery, 1972), ou seja, o volume de um corpo que ocupa, instantaneamente,  $\mathcal{V}$ . Em Mecânica dos Fluidos básica, frequentemente

as análises se concentram sobre a região do espaço definida por  $\mathcal{V}$ , que é então denominado *volume de controle* (Fox e McDonald, 1981).

A idéia de volume material é talvez um pouco mais rica: se considerarmos que cada ponto de  $\mathcal{V}$  representa um ponto material imerso no campo de velocidade  $\mathbf{U}$  no instante  $t = 0$ , e seguirmos a trajetória de cada uma dessas partículas, o volume ocupado pelas mesmas em um instante posterior é o volume do mesmo corpo nesse último instante.

O vetor unitário normal à superfície de controle em cada ponto é  $\mathbf{n}$ . A integral de superfície acima pode ser transformada em uma integral de volume pelo Teorema da Divergência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \, dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \, dV, \\ 0 &= \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} \right) \, dV. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esboçamos agora o argumento do *Teorema da Localização*: o volume  $\mathcal{V}$  para o qual a equação acima se aplica é totalmente genérico: de fato, (2.4) acima aplica-se a *qualquer* volume dentro de um escoamento. Mas isso só é possível se o *integrando* for identicamente nulo, ou seja:

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.5)$$

Uma outra forma útil da equação da continuidade é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \wp}{\partial t} + U_i \frac{\partial \wp}{\partial x_i} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{D\wp}{Dt} + \wp \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalmente, se utilizarmos o *volume específico*,

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\wp}, \quad (2.7)$$

obteremos uma terceira forma útil da equação da continuidade:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt} \quad \blacksquare \quad (2.8)$$

Fisicamente, (2.8) significa que a divergência do campo de velocidade é igual à taxa temporal de variação do volume de fluido (por unidade de volume!) em cada ponto.

## 2.3 – Misturas

Nesta seção nós vamos seguir a essência da abordagem de Bird et al. (1960, cap. 16): ela permite entender claramente o significado de difusão molecular de uma substância em um fluido, e em nossa opinião evita totalmente confusões comuns a respeito do papel da difusão e da advecção em meios contínuos.

Além disso, nós vamos considerar, por simplicidade, apenas misturas binárias, com um soluto A dissolvido em um solvente B. A generalização para misturas com mais de 2 componentes é óbvia.

Em uma mistura binária nós postulamos a existência em cada ponto de uma densidade para cada componente,  $\wp_A$  e  $\wp_B$ , de tal maneira que as massas totais de A e B em um volume material  $V$  são, respectivamente,

$$M_A = \int_V \wp_A dV, \quad M_B = \int_V \wp_B dV. \quad (2.9)$$

É evidente que, em cada ponto, devemos ter

$$\wp = \wp_A + \wp_B. \quad (2.10)$$

Note que a abordagem postulatória de (2.9) é compatível com a visão tradicional em Mecânica do Contínuo. Prosseguindo, nós também postulamos a existência de campos de velocidade para cada espécie,  $\mathbf{U}_A$  e  $\mathbf{U}_B$ , cujas integrais em um volume material são a quantidade de movimento total de cada espécie, respectivamente  $\mathbf{P}_A$  e  $\mathbf{P}_B$ . Por analogia com (2.9)–(2.10), temos

$$\mathbf{P}_A = \int_{\mathcal{V}} \wp_A \mathbf{U}_A dV, \quad \mathbf{P}_B = \int_{\mathcal{V}} \wp_B \mathbf{U}_B dV. \quad (2.11)$$

Agora, a quantidade de movimento total do corpo que ocupa  $\mathcal{V}$  deve ser

$$\mathbf{P} = \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{U}$  é a velocidade do fluido em cada ponto, de tal forma que devemos ter

$$\wp \mathbf{U} = \wp_A \mathbf{U}_A + \wp_B \mathbf{U}_B. \quad (2.13)$$

O ponto fundamental agora é perceber que é extremamente difícil, senão impossível, medir diretamente  $\mathbf{U}_A$  e  $\mathbf{U}_B$ . Em seu lugar, é muito mais simples trabalhar unicamente com o campo de velocidade  $\mathbf{U}$  do fluido como um todo em cada ponto. Para tanto, nós definimos o vetor fluxo difusivo de massa de A:

$$\mathbf{J}_A = \wp_A [\mathbf{U}_A - \mathbf{U}]. \quad (2.14)$$

A concentração mássica de A é

$$C_A \equiv \frac{\wp_A}{\wp}, \quad (2.15)$$

e vale a lei de Fick em cada ponto:

$$\mathbf{J}_A = -\wp v_A \nabla C, \quad (2.16)$$

onde  $v_A$  é a difusividade molecular de A na mistura. Relações totalmente análogas também valem para o solvente B.

Finalmente, das equações (2.10) e (2.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B &= \wp_A [\mathbf{U}_A - \mathbf{U}] + \wp_B [\mathbf{U}_B - \mathbf{U}] \\ &= \wp_A \mathbf{U}_A + \wp_B \mathbf{U}_B - (\wp_A + \wp_B) \mathbf{U} \\ &= \wp \mathbf{U} - \wp \mathbf{U} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Essa equação é válida em todos os pontos de um fluido, *exceto talvez em uma superfície onde haja um fluxo líquido de A para dentro da massa de fluido.*

Prosseguindo, por analogia com (2.3), o balanço integral de  $A$  é tão simples quanto

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_A) dS \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \rho_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U} + \mathbf{U}]) dS; \\
 - \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{U}_A - \mathbf{U}]) dS &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\
 - \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \wp_A dV + \oint_S \wp_A (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

onde a introdução de  $\mathbf{J}_A$  na última linha segue-se de sua definição (2.14). Uma dedução totalmente análoga vale para  $B$ .

A aplicação dos teoremas da divergência e da localização para  $A$  e para  $B$  produz, agora, duas equações diferenciais de balanço de massa:

$$\frac{\partial \wp_A}{\partial t} + \frac{\partial \wp_A U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{A,i}}{\partial x_i}, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial \wp_B}{\partial t} + \frac{\partial \wp_B U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial J_{B,i}}{\partial x_i}. \tag{2.20}$$

A soma de (2.19) e (2.20) tem que restaurar (2.5); dada a equação (2.10), segue-se necessariamente que

$$\frac{\partial J_{A,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{B,i}}{\partial x_i} \equiv 0. \tag{2.21}$$

(2.21) vale *sempre*; duas coisas podem acontecer. No caso mais geral, qualquer difusão molecular do soluto  $A$  é compensada por difusão molecular, também do solvente  $B$ , de uma certa forma, “no sentido oposto”. Note entretanto que (2.21) estipula que é a soma das *divergências* dos fluxos difusivos de massa que é nula. Uma situação particular que pode ocorrer é o caso em que  $\mathbf{J}_A = \text{const.}$  e  $\mathbf{J}_B = \mathbf{0}$ ; portanto é possível ocorrer fluxo difusivo apenas do soluto, desde que a sua divergência seja nula. É comum a confusão entre um fluxo e sua divergência nas equações de um meio contínuo, e este é um bom exemplo para explicitar sua diferença.

## 2.4 – Quantidade de movimento

O balanço integral geral de quantidade de movimento para um volume material  $\mathcal{V}$  é

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV + \oint_{\mathcal{S}} \wp \mathbf{U} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \tag{2.22}$$

onde  $\mathbf{F}_s$  são as forças de superfície atuando sobre o volume de controle, e  $\mathbf{F}_c$  são as forças de corpo. A equação a seguir,

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} \mathbf{e}_i dS, \tag{2.23}$$

condensa um volume considerável de conhecimento. A força de superfície é dada pela integral de superfície do *vetor-tensão*  $\mathbf{t}$ . Esse por sua vez é escrito na forma  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ , isto é, como o pré-produto do vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  pelo *tensor de tensões*  $\mathbf{T}$ . Finalmente, a *equação constitutiva* para o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  em função do primeiro

coeficiente de viscosidade  $\mu$ , do segundo coeficiente de viscosidade  $\lambda$  e da pressão termodinâmica  $P$  é

$$T_{ji} = \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ji}. \quad (2.24)$$

onde

$$S_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.25)$$

é a taxa de deformação; o delta de Kroenecker é

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (2.26)$$

A integral de superfície correspondente à força de superfície é transformada em uma integral de volume por intermédio do Teorema da divergência:

$$\mathbf{F}_s = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \left( -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ji}) \right) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (2.27)$$

Para obter (2.27), nós supusemos  $\mu$  constante, e o “retiramos” da operação de diferenciação. Embora estritamente isso não seja verdade, é usual desconsiderar as variações de  $\mu$  (e eventualmente de  $\lambda$ ) com a posição na dedução das equações de Navier-Stokes.

A força de corpo num referencial em rotação deve incluir a aceleração de Coriolis:  $\boldsymbol{\omega}$  é a velocidade angular da terra,  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade (o que inclui os demais efeitos de a Terra ser um referencial não-inercial – veja Liggett (1994)), e

$$\mathbf{F}_c = \int_{\mathcal{V}} \wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}] dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (2.28)$$

Os termos do lado direito são

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \wp \mathbf{U} dV = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \wp U_i}{\partial t} dV \right] \mathbf{e}_i, \quad (2.29)$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS = \left[ \oint_{\mathcal{S}} U_i \wp n_j U_j dS \right] \mathbf{e}_i = \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_i U_j) dV \right] \mathbf{e}_i. \quad (2.30)$$

Reunindo todos os termos,

$$\left[ \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}) + \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) - \frac{\partial \wp U_i}{\partial t} - \frac{\partial \wp U_i U_j}{\partial x_j} \right) dV \right] \mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Pelo teorema da localização, o integrando deve ser identicamente nulo; então:

$$\frac{\partial (\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (2.32)$$

Expandindo o lado esquerdo e simplificando-o por meio de (2.5), e explicitando  $T_{ji}$  com (2.24):

$$\wp \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.34)$$

onde nós usamos (2.24) e (2.27), e

$$\wp \nu_u \equiv \mu \quad (2.35)$$

define a viscosidade cinemática  $\nu_u$ .

Embora (2.34) seja provavelmente a forma mais “clássica” de apresentar as equações de Navier-Stokes compressíveis, ela *não* será a mais útil quando precisarmos lançar mão da aproximação de Boussinesq no capítulo 4. Por isso, preferimos escrever a equação para quantidade de movimento na forma totalmente equivalente

$$\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} = \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.36)$$

## 2.5 – Vorticidade

As seguintes identidades serão úteis na sequência: se  $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$  é um campo escalar, então:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}]}_{=0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{u}] &= \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{jkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \delta_{ik} \\ &= \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{jil} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{[\epsilon_{jil} + \epsilon_{ijl}]}_{=0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (2.38)$$

A vorticidade em um ponto de um escoamento é definida como o rotacional da velocidade:

$$\Omega = \nabla \times U, \quad (2.39)$$

ou, em notação indicial:

$$\Omega_k \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} e_k. \quad (2.40)$$

É fácil verificar a identidade:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \Omega_k &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnk} \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial U_n}{\partial x_m} \\ &= \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considere agora o rotacional da equação de *momentum*, pré-condicionada com a identidade (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} - \epsilon_{ijk} U_j \Omega_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} \Omega_j U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k + \frac{1}{2} \frac{\partial (U_j U_j)}{\partial x_i} &= g_i + \frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nosso próximo passo é calcular o rotacional de (2.42). Isso é natural, na medida em que surgirá uma equação para  $D\Omega/Dt$ . Note também a presença de dois gradientes em (2.42),  $\nabla\phi$  e  $\nabla\psi$ , onde

$$\phi = \frac{1}{2} (U_j U_j), \quad (2.43)$$

$$\psi = -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k}. \quad (2.44)$$

O rotacional de ambos é nulo, devido a (2.37). Prosseguimos agora termo a termo. O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (2.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial U_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}. \quad (2.45)$$

O rotacional do segundo termo do lado esquerdo de (2.42) é

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \epsilon_{lim} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= \epsilon_{mli} \epsilon_{jki} \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= [\delta_{mj} \delta_{lk} - \delta_{mk} \delta_{lj}] \frac{\partial}{\partial x_l} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_k) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m).
 \end{aligned}$$

Algumas simplificações ainda são possíveis. Note que a velocidade angular da terra,  $\omega$ , é constante: as suas derivadas espaciais serão nulas. Além disso, note também que, em virtude de (2.38),  $\nabla \cdot \Omega = 0$ . Aplicando essas simplificações,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \epsilon_{ijk} [\Omega_j + 2\omega_j] U_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} ([\Omega_m + 2\omega_m] U_k) - \frac{\partial}{\partial x_j} ([\Omega_j + 2\omega_j] U_m) \\
 &= U_k \frac{\partial [\Omega_m + 2\omega_m]}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\
 &\quad - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - U_m \frac{\partial}{\partial x_j} [\Omega_j + 2\omega_j] \\
 &= U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} + [\Omega_m + 2\omega_m] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} - [\Omega_j + 2\omega_j] \frac{\partial U_m}{\partial x_j}. \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Conforme já havíamos comentado, o rotacional do terceiro termo do lado esquerdo de (2.42) é nulo em virtude de (2.37):

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2} \frac{\partial U_j U_j}{\partial x_i} = \epsilon_{lim} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} = 0. \quad (2.47)$$

O rotacional do primeiro termo do lado esquerdo de (2.42) é nulo:

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial g_i}{\partial x_l} = 0. \quad (2.48)$$

Com a ajuda de (2.44), o rotacional do segundo termo do lado direito de (2.42) é

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{1}{\wp} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right] &= \frac{1}{\wp} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{1}{\wp} \right) \\
 &= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\
 &= -\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P + (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right). \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Finalmente, o rotacional do terceiro termo do lado direito de (2.42) é

$$\epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_l} \nu_u \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu_u \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_{lim} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} = \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.50)$$



Nós agora reunimos os resultados (2.45)–(2.50) na *equação da vorticidade*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} = & \underbrace{\left[ \Omega_j + 2\omega_j \right] \frac{\partial U_m}{\partial x_j}}_{\text{I}} - \underbrace{\left[ \Omega_m + 2\omega_m \right] \frac{\partial U_k}{\partial x_k}}_{\text{II}} \\ & + \underbrace{\frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{\text{III}} + \underbrace{\nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{IV}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O lado esquerdo de (2.51) é a derivada material da vorticidade. O termo I do lado direito é o termo de alongamento de vórtice (*vortex stretching*): existe uma tendência a “esticar” as linhas de velocidade, intensificando a vorticidade ao mesmo tempo em que ela ocupa regiões menores (mais “finas”) do escoamento. O termo II do lado direito de (2.51) só vai ser importante em escoamentos compressíveis. O termo III é o termo baroclínico. É fácil ver que

$$\text{III} = \frac{1}{\wp^2} \nabla \wp \times \nabla \psi;$$

a presença de desalinhamento entre os gradientes de densidade e de pressão altera a vorticidade; finalmente, o termo IV é o termo viscoso.

É possível definir para a vorticidade, uma grandeza análoga ao que é a energia cinética para a velocidade. O nome dessa grandeza é *enstrofia*:

$$Z \equiv \frac{1}{2} \Omega_m \Omega_m.$$

Da mesma forma que ocorre com a energia mecânica, cuja equação pode ser deduzida a partir da equação de momentum fazendo-se o produto interno dessa última com o vetor velocidade (ver seção 2.7), é possível obter uma equação para a enstrofia tomando-se o produto interno de 2.51 com  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t} + \Omega_m U_k \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_k} = & \Omega_m \left[ \Omega_j + 2\omega_j \right] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m \left[ \Omega_m + 2\omega_m \right] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ & + \Omega_m \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \Omega_m \nu_u \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

O lado esquerdo de (2.52) é

$$\frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + U_k \frac{\partial Z}{\partial x_k} \quad (2.53)$$

(a derivada material da enstrofia). O único termo para o qual dedicaremos algum esforço algébrico adicional aqui será o último de (2.52). Note que (esse truque será utilizado repetidamente neste livro):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \right) = \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}; \Rightarrow \\ \nu_u \Omega_m \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_j \partial x_j} &= \nu_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - \nu_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

A *natureza* de cada um dos dois termos do lado direito de (2.54) acima é diferente: o primeiro termo é uma divergência e redistribui enstrofia (por difusão molecular),

enquanto que o segundo termo é *sempre negativo*: na ausência de efeitos de compressibilidade, ele é o termo responsável pela destruição (dissipação) de enstrofia no escoamento. Note também que o termo baroclínico deu origem a um produto triplo entre os vetores  $\nabla\wp$ ,  $\nabla P$  e  $\Omega$ . Nossa equação final para o balanço de enstrofia fica:

$$\begin{aligned} \frac{DZ}{Dt} = & \Omega_m \left[ \Omega_j + 2\omega_j \right] \frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \Omega_m \left[ \Omega_m + 2\omega_m \right] \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ & + \frac{1}{\wp^2} \epsilon_{lim} \frac{\partial \wp}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P - (\lambda + \nu_u) \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \Omega_m + \nu_u \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial x_j} - \nu_u \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j} \quad (2.55) \end{aligned}$$

## 2.6 – Energia

A equação de balanço da energia *total* (ou seja: interna e cinética) para um volume de controle é

$$\dot{\tilde{W}} + \dot{\tilde{Q}} + \dot{\tilde{I}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV + \oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \quad (2.56)$$

onde  $\dot{\tilde{W}}$  é a taxa de trabalho realizada sobre o volume de controle pelas forças de superfície  $e$  de corpo,  $\dot{\tilde{Q}}$  é o fluxo de calor por condução para dentro do volume de controle e  $\dot{\tilde{I}}$  é a taxa de aporte de energia para dentro do volume de controle devido à difusão de massa e consequente mudança relativa de composição química da mistura. Os tís servem para diferenciar valores totais de valores por unidade de massa; assim (por exemplo),  $\tilde{W}$  é o trabalho sobre um corpo, enquanto que  $W$  é o trabalho por unidade de massa. A energia específica (por unidade de massa) é

$$E = \frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U}, \quad (2.57)$$

onde  $\mathcal{U}$  é a energia interna por unidade de massa. Note que nós não incluímos nenhum termo de energia potencial, porque  $\dot{\tilde{W}}$  contabilizará *todas* as forças atuando sobre o volume de controle, incluindo as conservativas. O cálculo de cada um dos termos do lado esquerdo de (2.56) é feito como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{Q}} &= - \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) dS = \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} (\mathbf{n} \cdot \nabla T) dS \\ &= \oint_{\mathcal{S}} \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} n_j \frac{\partial T}{\partial x_j} dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV, \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor fluxo de calor. Em notação indicial, a *equação constitutiva* para a transferência de calor por condução, ou difusão molecular, é

$$q_i = -\wp c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (2.59)$$

onde  $c_p$  é o calor específico a pressão constante do fluido,  $\nu_{\mathcal{T}}$  é a difusividade térmica molecular, e  $T$  é a temperatura termodinâmica.

A taxa de trabalho realizado sobre  $\mathcal{V}$  é

$$\dot{\tilde{W}} = \int_{\mathcal{V}} (\wp [\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}] \cdot \mathbf{U}) dV + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{V}} \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) U_i dV + \oint_{\mathcal{S}} n_j T_{ji} U_i dS \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left( \wp (g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k) U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) \right) dV \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left( \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) U_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} \right) dV. \tag{2.60}
\end{aligned}$$

O lado direito de (2.56) é

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \wp dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial(E\wp)}{\partial t} dV = \int_{\mathcal{V}} \left( E \frac{\partial \wp}{\partial t} + \wp \frac{\partial E}{\partial t} \right) dV \tag{2.61}$$

e

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{S}} E \wp (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS &= \oint_{\mathcal{S}} E \wp n_j U_j dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\wp U_j E) dV = \\
&\int_{\mathcal{V}} \left( E \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} + \wp U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) dV \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Combinando (2.61) e (2.62) acima, tem-se

$$\int_{\mathcal{V}} \left( E \underbrace{\left( \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_j)}{\partial x_j} \right)}_{=0} + \wp \left( \frac{\partial E}{\partial t} + U_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) \right) dV, \tag{2.63}$$

onde o primeiro termo é nulo por força da equação da continuidade. O restante é

$$\int_{\mathcal{V}} \wp \frac{DE}{Dt} dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i + \mathcal{U} \right) dV = \int_{\mathcal{V}} \wp \left( U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) dV. \tag{2.64}$$

Combinando-se todos os termos da equação de energia,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \wp c_p v_\theta \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} + U_i \wp \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. \wp \left( U_i \frac{DU_i}{Dt} + \frac{D\mathcal{U}}{Dt} \right) \right) dV = 0 \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os termos com  $\wp U_i$  em comum,

$$\wp U_i \left[ \frac{DU_i}{Dt} - \left( g_i - 2\epsilon_{ijk}\omega_j U_k + \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right) \right] \equiv 0, \tag{2.66}$$

já que o termo entre parênteses é a própria equação de balanço de quantidade de movimento! O que resta, após aplicarmos o teorema da localização, é

$$\wp \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}, \tag{2.67}$$

onde, de maneira análoga ao que foi feito com a equação de quantidade de movimento quando consideramos  $\mu$  constante, nós consideramos o termo  $\wp c_p v_\theta$  constante e o retiramos da derivada. Novamente, embora não seja estritamente correto, isso é usual.

O termo  $\partial U_i / \partial x_j T_{ji}$  é facilmente calculável:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji} = \left( \left( -P + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + 2\mu S_{ij} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.68)$$

$$= -P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (2.69)$$

Mas pela simetria dos índices  $i$  e  $j$ ,

$$\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad (2.70)$$

donde

$$\begin{aligned} 2S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 = 2S_{ij} S_{ij}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Note que (2.71) é uma soma de 9 termos, todos eles positivos. Finalmente, obtemos

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \lambda \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\mu S_{ij} S_{ij}. \quad (2.72)$$

Os dois últimos termos correspondem à conversão *irreversível* de energia mecânica em energia interna, e é possível mostrar que sua soma é sempre positiva, debaixo da *hipótese de Stokes* (Kundu, 1990, p. 92),

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \quad (2.73)$$

Então, a equação de interação tensor de tensões-gradiente de velocidade fica

$$T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + 2\mu \left( S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \right), \quad (2.74)$$

e podemos completar o quadrado do termo entre parênteses:

$$\begin{aligned} S_{ij} S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 &= S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2 \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \\ &= S_{ij} S_{ij} - 2S_{ij} \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \\ &= \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Finalmente,

$$T_{ji} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2. \quad (2.76)$$

A equação diferencial completa para a energia interna fica

$$\wp \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \underbrace{\wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)}_{\text{I}} - \underbrace{P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{\text{II}} + \underbrace{2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{\Phi=\text{III}}, \quad (2.77)$$

onde I representa o aquecimento/resfriamento de uma partícula de fluido por condução, II representa o trabalho reversível realizado pela pressão, e III, que é sempre positivo, é a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna, e denomina-se *dissipação viscosa*. Em muitos livros, a dissipação viscosa é denotada pela letra grega (minúscula ou maiúscula)  $\Phi$ . Essa última está relacionada com uma grandeza que vai aparecer inúmeras vezes em teoria de turbulência, a *taxa de dissipação de energia cinética por unidade de massa*,  $\mathcal{E}_e$ . As duas relacionam-se simplesmente por

$$\Phi = \wp \mathcal{E}_e. \quad (2.78)$$

Uma forma alternativa a (2.77) é facilmente obtida utilizando a definição de entalpia específica,

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} + P\mathcal{V}.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{P}{\mathcal{V}} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\mathcal{U} + P\mathcal{V}) - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica,  $\beta_p$ , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade,  $\kappa_T$ , são definidos nesse caso por

$$\beta_p \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P, \quad (2.80)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (2.81)$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa)  $\mathcal{H}$  em função de  $T$  e  $P$ , e calculando seu diferencial,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= c_p dT + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP, \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P. \quad (2.83)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP + TdS, \quad (2.84)$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} + T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T; \quad (2.85)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \beta_P \mathcal{V}, \quad (2.86)$$

onde  $S$  é a entalpia específica, donde

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} (1 - \beta_P T). \quad (2.87)$$

Para tanto, partimos de (2.79), e utilizamos (2.83) e (2.87) para exprimir  $D\mathcal{H}/Dt$ :

$$\begin{aligned} \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (2.88)$$

## 2.7 – A dissipação viscosa como perda de energia mecânica e fonte de energia interna

Neste ponto, é muito conveniente nós dedicarmos um pouco mais de atenção à *energia mecânica* do escoamento. Como vimos, utilizando uma série de simplificações baseadas nas leis de conservação de massa e de *momentum*, nós reduzimos o balanço integral que corresponde à conservação *geral* de energia (cinética *mais* interna), (2.56), a uma equação diferencial para a energia interna, (2.77). Na sequência, nós vamos seguir se não passo a passo pelo menos muito de perto a excelente exposição do assunto feita por Kundu (1990). Primeiramente, note de (2.60) que o taxa de trabalho realizado pelas forças de superfície sobre um volume material  $\mathcal{V}$  é:

$$\dot{\tilde{W}}_s = \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U}) dS = \dots = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji} U_i) dV. \quad (2.89)$$

Kundu (1990) denomina  $\partial (T_{ji} U_i) / \partial x_j$  de *trabalho total*, por unidade de volume, das forças de superfície em um ponto. Já o produto escalar de  $\mathbf{U}$  pela equação dinâmica (2.33) é

$$\wp U_i \frac{DU_i}{Dt} = \wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \wp U_i g + U_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ji}). \quad (2.90)$$

Note que o trabalho por unidade de volume das forças de superfície efetivamente responsável pela *variação* da energia cinética,  $U_i \partial T_{ji} / \partial x_j$ , é *diferente* do trabalho total; utilizando a regra da cadeia, entretanto, é elementar que

$$\wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \rho U_i g + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji}) - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} T_{ji}. \quad (2.91)$$

O último termo do lado direito da equação acima é denominado por Kundu *trabalho de deformação*. Ele é dado por (2.76), donde

$$\wp \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} U_i U_i \right) = \underbrace{\wp U_i g}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ji})}_{II} + \underbrace{P \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)}_{III} - \underbrace{2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)^2}_{IV}. \quad (2.92)$$

Nosso quadro de balanço de energia fica, então, completo. O termo I, claro, é o trabalho da força peso. O termo II é um “termo de transporte”. Note que  $U_i T_{ji}$  representa um fluxo advectivo de tensão total  $T_{ji}$ . Esse termo encontra-se sob a forma de uma divergência: a sua integral sobre um volume suficientemente grande envolvendo o escoamento de interesse anula-se. Isso significa que II não pode criar nem destruir energia cinética localmente, mas representa uma *redistribuição* de energia cinética dentro do escoamento. O interessante é o aparecimento de III e IV: eles são os termos II e III de (2.77), com o sinal trocado. Em (2.92), III é a contribuição do trabalho *reversível* da pressão para o aumento da energia cinética (quando  $\partial U_k / \partial x_k > 0$ ), e IV é a conversão *irreversível* de energia cinética em energia interna.

## 2.8 – A decomposição de Reynolds para variáveis quadráticas

Duas quantidades que vimos até aqui aparecem de forma natural como quadrados. Elas são a energia cinética do escoamento (por unidade de massa),

$$E_c = \frac{1}{2} U_i U_i \quad (2.93)$$

e  $\mathcal{E}_e$ , a taxa de dissipação de  $E_c$ :

$$\mathcal{E}_e = 2\nu_u \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ S_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (2.94)$$

Em (2.94), nós utilizamos (2.77) e (2.78) juntamente com (2.35).

Aplicando a decomposição de Reynolds (1.9) a (2.93), temos:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle + u_i] [\langle U_i \rangle + u_i] \\ &= \frac{1}{2} [\langle U_i \rangle \langle U_i \rangle + 2 \langle U_i \rangle u_i + u_i u_i]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.11)–(1.13),

$$\langle E_c \rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \langle U_i \rangle \langle U_i \rangle}_{\langle E_{cm} \rangle} + \underbrace{\frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle}_{\langle E_{ct} \rangle}. \quad (2.96)$$

Note que, por ser definida como um quadrado, a “flutuação” de  $E_c$  (ou seja, o segundo e o terceiro termos do lado direito de (2.95)) *não* é nula.

O primeiro termo do lado direito de (2.96) é a *energia cinética do escoamento médio*,  $\langle E_{cm} \rangle$ . O segundo termo de (2.96) é de grande importância em teoria de turbulência. Ele é, apropriadamente, denominado de *energia cinética da turbulência*,  $\langle E_{ct} \rangle$ , muitas vezes abreviado pela sigla ECT\*. Para registro:

$$\langle E_{ct} \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle. \quad (2.97)$$

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de energia cinética é análogo. Comece notando que, novamente com a ajuda da decomposição de Reynolds (1.9), e de (1.15),

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right] + \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]}_{s_{ij}} \\ &= \langle S_{ij} \rangle + s_{ij}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde  $\langle S_{ij} \rangle$  é a taxa de deformação média, e  $s_{ij}$  é a sua flutuação. Da mesma forma, é imediato que

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (2.99)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= 2\nu_u \left[ \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \times \\ &\quad \left[ \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + s_{ij} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \\ &= 2\nu_u \left\{ \left[ \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right]^2 + 2 \left[ \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[ s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Prosseguimos, com a promediação de (2.100) e (novamente) com o uso dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_e \rangle &= 2\nu_u \left[ \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \langle S_{ij} \rangle \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \delta_{ij} \right] \\ &= 2\nu_u \left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \left\langle s_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\rangle \delta_{ij} + \frac{1}{9} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \delta_{ij} \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

\*Em Inglês, *Turbulence Kinetic Energy* ou TKE.



Mas:

$$\begin{aligned}\langle S_{ij} \rangle \delta_{ij} &= \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k}, \\ s_{ij} \delta_{ij} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \\ \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3,\end{aligned}$$

donde

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = 2\nu_u \underbrace{\left[ \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)^2 \right]}_{\langle \mathcal{E}_{em} \rangle} + 2\nu_u \underbrace{\left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]}_{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle}. \quad (2.102)$$

Da mesma forma que a energia cinética (vide (2.96)), portanto, a taxa de dissipação de energia cinética pode ser decomposta numa taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  (primeiro termo do lado direito de (2.102)), e uma *taxa de dissipação da energia cinética da turbulência*,  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  (segundo termo do lado direito de (2.102)). Essa última é uma grandeza muito importante. Para registro:

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = 2\nu_u \left[ \langle s_{ij} s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]. \quad (2.103)$$

No início da década de 1940, começou a ficar claro que  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  é uma grandeza fundamental em turbulência. No próximo capítulo, nós vamos ver que, com base em alguns argumentos simples e muito razoáveis,  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \gg \langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  quando o número de Reynolds de um escoamento se torna muito grande. Isso por sua vez significa que  $\langle s_{ij} s_{ij} \rangle \gg \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle$ , e que deve existir, no caso escoamentos turbulentos com número de Reynolds muito grande, uma grande separação entre as *escalas macroscópicas* e as *escalas microscópicas* da turbulência. As primeiras estão associadas aos gradientes de velocidade, e taxas de deformação, médios. As segundas estão associadas aos gradientes quadráticos médios (e taxas de deformação quadráticas médias).

## 2.9 – O balanço do semiquadrado da temperatura

É possível obter uma equação de balanço do semi-quadrado da temperatura de forma totalmente análoga à que foi usada para obter a equação para a energia mecânica, (2.91). Isso é feito multiplicando-se (2.88) por  $T$ :

$$\wp c_p T \frac{DT}{Dt} - \beta_p T^2 \frac{DP}{Dt} = \wp c_p \nu_T T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.$$

Mas

$$\begin{aligned}T \frac{DT}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right), \\ T \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j};\end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{T^2}{2} \right) + \frac{\beta_p}{\wp c_p} T^2 \frac{DP}{Dt} = \nu_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) - \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + T \Phi. \quad (2.104)$$

Observamos que, em escoamentos naturais, o segundo termo do lado esquerdo em geral é desprezado com base em argumentos de ordem de grandeza (mais sobre isso depois), e que o primeiro termo do lado direito é a divergência do vetor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{T^2}{2} \right) \mathbf{e}_j;$$

como tal, pelo Teorema da Divergência, esse termo redistribui, mas não cria nem destrói globalmente, a grandeza  $T^2/2$  (observe a analogia com o termo III de (2.92)).

O último segundo do lado direito de (2.104),  $\nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ , é responsável pela dissipação local da grandeza  $T^2/2$ . Como tal, ele é análogo ao último termo (termo de dissipação de energia cinética) em (2.92), dado em destaque em (2.94). Nós definimos portanto a quantidade análoga

$$\mathcal{E}_T \equiv \nu_T \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2.105)$$

O último termo do lado direito de (2.104) é um termo de fonte, geralmente desimportante, devido à dissipação de energia mecânica em energia interna.

Por analogia com o que fizemos com a Energia Cinética da Turbulência, temos:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{2} &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle + \mathcal{T}] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] \\ &= \frac{1}{2} [\langle T \rangle \langle T \rangle + 2 \langle T \rangle \mathcal{T} + \mathcal{T} \mathcal{T}]. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Promediando a equação acima, e utilizando os postulados de Reynolds (1.11)–(1.13),

$$\left\langle \frac{1}{2} T^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle T \rangle \langle T \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle \quad (2.107)$$

O segundo termo do lado direito de (2.107) é a semivariância das flutuações de temperatura. Ele é um termo importante em escoamentos turbulentos em que existem flutuações de temperatura (e de densidade).

O procedimento de decomposição para a taxa de dissipação de  $T^2/2$  se segue.

$$\langle \mathcal{E}_T \rangle = \nu_T \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle T \rangle + \mathcal{T}) \right] \right\rangle \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} &= \nu_T \left\langle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \underbrace{\nu_T \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle} + \underbrace{\nu_T \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle}_{\langle \mathcal{E}_{Ti} \rangle} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Da mesma forma que acontece com  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  e  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ , nós veremos em seguida que  $\langle \mathcal{E}_{Tm} \rangle \ll \langle \mathcal{E}_{Ti} \rangle$ . Esse último, a taxa de dissipação da semivariância das flutuações de temperatura, é um parâmetro fundamental para descrever a dinâmica das flutuações turbulentas de temperatura.

# 3

## As macro e micro escalas da turbulência

---

### 3.1 – Macro e micro escalas: uma apresentação informal

Como observa Davidson (2004, p. 19–20), uma *boa parte* do que nós sabemos sobre turbulência pode ser resumido nas relações

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \sim \tilde{u}^3 / \ell, \quad (3.1)$$

$$\eta_u = \left( \frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4}, \quad (3.2)$$

$$\check{u} = (v_u \langle \mathcal{E}_{et} \rangle)^{1/4}, \quad (3.3)$$

$$\tau_u = \left( \frac{v_u}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

O restante é como se segue:  $\tilde{u}$  e  $\ell$  são macroescalas de velocidade e de comprimento, respectivamente. Elas refletem as velocidades e comprimentos “macroscópicos” que nós “vemos” em um escoamento: o diâmetro da tubulação, a distância da superfície em uma camada-limite, a profundidade do escoamento em um rio, etc. ( $\ell$ ); e as diferenças de velocidade entre duas seções, a intensidade das flutuações turbulentas de velocidade, etc. ( $\tilde{u}$ ).

Para as ordens de grandezas de termos nas equações, nós vamos adotar a notação de Tennekes e Lumley (1972): em (3.1), o símbolo  $\sim$  significa que o coeficiente adimensional que torna a relação uma equação não é maior do que 5, e não é menor do que 1/5.

Já  $\eta_u$  (“eta”, em grego),  $\check{u}$  e  $\tau_u$  (“tau”, em grego) são microescalas de comprimento, velocidade e de tempo; em homenagem ao seu proponente, elas são chamadas atualmente de *microescalas de Kolmogorov* (Kolmogorov, 1941, 1991).  $\check{u}$  e  $\eta_u$  não podem ser “vistas”; elas refletem as diferenças de velocidade e de comprimento que ocorrem em cada ponto de um escoamento turbulento, e que só podem ser estimadas (na média quadrática, como veremos em breve) em função da taxa de dissipação de energia cinética da turbulência,  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ , e da viscosidade cinemática  $\nu_u$ .

Para o estudante que aborda Turbulência pela primeira vez,  $\ell$  e  $\tilde{u}$  são estranhos e difíceis de compreender, enquanto que  $\eta_u$ ,  $\check{u}$ , e  $\tau_u$  são completamente impossíveis. Numa tentativa de aliviar a estranheza, a abordagem que se segue procura dar um pouco de concretude a esses conceitos, por meio de alguns exemplos.

Em lugar de prosseguir com “escalas” arbitrárias  $\tilde{u}$  e  $\ell$ , considere o escoamento clássico de um fluido com densidade  $\varphi$  constante através de uma expansão súbita em

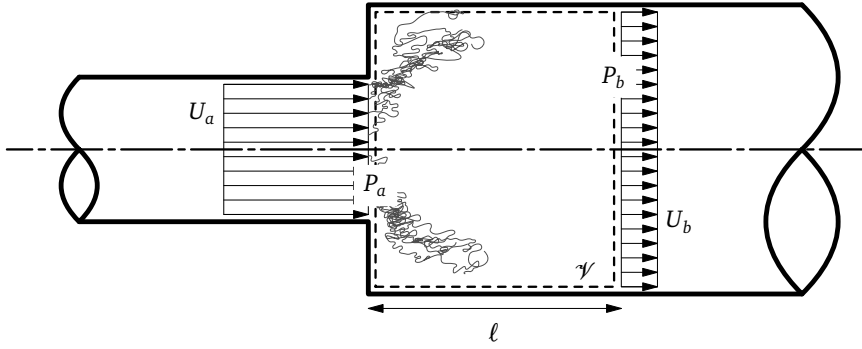


Figura 3.1: Expansão súbita em uma tubulação.

uma tubulação, mostrado na figura 3.1. As áreas das seções transversais antes e depois da expansão são  $A_a$  e  $A_b$ .

Os perfis esboçados na figura 3.1 são idealizações: é bem conhecido que a velocidade (relativa) de um fluido junto a uma parede sólida é zero, que é a “condição de não-deslizamento”. O significado físico da figura 3.1, portanto, é que na maior parte do escoamento “antes”, e “depois”, da expansão súbita de área, a velocidade é *aproximadamente* constante.

Para o volume material  $\mathcal{V}$  (com superfície  $\mathcal{S}$ ) indicado pela linha pontilhada na figura 3.1, as equações macroscópicas de balanço são (2.3) (massa); (2.22) (quantidade de movimento) e (2.56) (energia, com  $\tilde{I} \equiv 0$ ), repetidas aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \varphi dV + \oint_{\mathcal{S}} \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_c &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} \varphi dV + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS, \\ \tilde{W} + \tilde{Q} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} E \varphi dV + \oint_{\mathcal{S}} E \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS. \end{aligned}$$

Suponha agora perfis uniformes de velocidade nas seções de entrada (a) e saída (b),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_a &= U_a \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{U}_b &= U_b \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Para  $\varphi$  constante, a equação macroscópica de conservação de massa em regime permanente produz

$$U_a A_a = U_b A_b. \quad (3.5)$$

Para a conservação de quantidade de movimento, é preciso supor que as forças de atrito têm efeito desprezível, e que as forças de superfície são, preponderantemente, devidas à diferença de pressão entre as sessões  $a$  (entrada) e  $b$  (saída), de tal forma que

$$\mathbf{F}_s = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{t} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot [-P \boldsymbol{\delta}] dS = \oint_{\mathcal{S}} [-P \mathbf{n}] dS.$$

Na entrada,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$ , e na saída  $\mathbf{n} = +\mathbf{e}_1$ , donde (para perfis uniformes de pressão na entrada ( $P_a$ ) e na saída ( $P_b$ )),

$$F_{s1} = (P_a - P_b) A_b.$$

Observe que  $A_b$  é comum, na expressão acima, para  $P_a$  e para  $P_b$ . A interpretação é que, imediatamente após a expansão, a pressão (na seção  $a$ ) *ainda* é  $P_a$ , e age de forma aproximadamente uniforme sobre a face esquerda do volume de controle. Com o termo transiente identicamente nulo, e  $F_c \equiv \mathbf{0}$ , segue-se agora que (na direção longitudinal, que é a única direção relevante para os balanços macroscópicos),

$$(P_a - P_b) A_b = \oint [-U_a^2 A_a + U_b^2 A_b] = \oint [U_b - U_a] (U_a A_a) \quad (3.6)$$

O trabalho realizado sobre a superfície de controle é preponderantemente devido à pressão:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}} &= \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, dS \\ &= \int_{A_a} U_a \mathbf{e}_1 \cdot [-P_a(-\mathbf{e}_1)] \, dS + \int_{A_b} U_b \mathbf{e}_1 \cdot [-P_b(+\mathbf{e}_1)] \, dS \\ &= P_a U_a A_a - P_b U_b A_b. \end{aligned}$$

A equação de balanço de energia, portanto, torna-se

$$(P_a - P_b)(U_a A_a) = \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \underbrace{\oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}}_{\text{Tx. de Dissipação}}. \quad (3.7)$$

Os dois últimos termos do lado direito são o fluxo líquido de energia interna ( $\mathcal{U}_A$  e  $\mathcal{U}_B$  são as energias internas por unidade de massa na entrada e na saída do volume de controle), e a taxa de calor trocada com o volume de controle. Por hipótese, a dissipação de energia mecânica deve fazer com que ambos sejam positivos, ou seja:  $\mathcal{U}_B > \mathcal{U}_A$  (a dissipação aumenta a energia interna específica do fluido) e  $\dot{\tilde{Q}} < 0$  (parte de energia mecânica dissipada flui como calor para fora do volume de controle). Por definição, a sua soma é a taxa total de dissipação de energia. Se  $\overline{\epsilon_e}$  é a dissipação média por unidade de massa dentro do volume de controle, temos

$$\oint A_b \ell \overline{\epsilon_e} = \oint (\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)(U_a A_a) - \dot{\tilde{Q}}.$$

Note primeiramente que a equação (3.7) pode ser reescrita como

$$\left[ (P_a + (1/2)\oint U_a^2) - (P_b + (1/2)\oint U_b^2) \right] (U_a A_a) = \oint A_b \ell \overline{\epsilon_e},$$

ou seja, a “perda de carga” hidráulica entre as seções  $a$  e  $b$  é igual à dissipação de energia. Do ponto de vista de obter uma expressão final para  $\overline{\epsilon_e}$ , entretanto, é mais frutífero primeiro eliminar a diferença de pressão entre as sessões utilizando (3.6):

$$P_a - P_b = \oint (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b},$$

e em seguida substituir na equação (3.7):

$$\begin{aligned} \oint (U_b - U_a) \frac{(U_a A_a)^2}{A_b} &= \frac{\oint}{2} (U_b^2 - U_a^2) (U_a A_a) + \oint A_b \ell \overline{\epsilon_e}, \\ (U_b - U_a) U_a \frac{A_a}{A_b} &= [(1/2)(U_a + U_b)(U_b - U_a)] + \frac{\ell \overline{\epsilon_e} A_a}{U_a A_b}, \end{aligned}$$

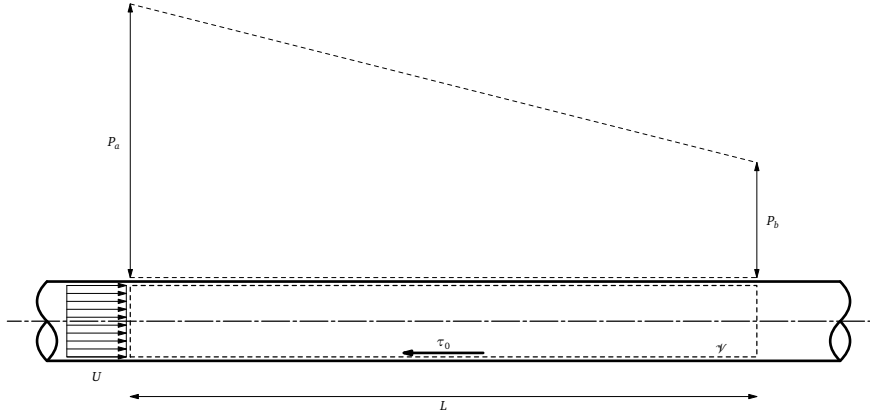


Figura 3.2: Escoamento clássico em um tubo com perda de carga.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(U_a + U_b) - U_a \frac{A_a}{A_b} &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a(U_a - U_b)} \bar{\epsilon}_e, \\
 \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{A_a}{A_b} \right] U_a &= \frac{A_a}{A_b} \frac{\ell}{U_a^2 \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)} \bar{\epsilon}_e, \\
 \bar{\epsilon}_e &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{A_a}{A_b} \right)^2 \frac{A_a}{A_b} \right] \frac{U_a^3}{\ell}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Note que (3.8) tem a mesma forma de (3.1). No entanto, há uma diferença significativa: enquanto que na sequência nós suporemos que (3.1) vale *pontualmente*, (3.8) dá a taxa de dissipação *média* dentro do volume de controle. Um argumento mais “crítico” — no sentido de que de fato não existe nada de excepcional em (3.8) — é que as duas equações têm que ter a mesma forma simplesmente pelo fato de que  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  e  $\bar{\epsilon}_e$  possuem as mesmas dimensões físicas. No entanto, a equação (3.1) aparecerá repetidamente neste livro, e espera-se que a dedução da análoga (3.8) ajude o estudante a compreender a sua motivação.

Nosso segundo exemplo, mostrado na figura 3.2, é o escoamento clássico ao longo de um tubo com perda de carga. Esse problema vai ser estudado detalhadamente do ponto de vista do perfil de velocidade, e de como a perda de carga é calculada, mais à frente neste texto. Por enquanto, vamos supor que há uma perda de carga linear ao longo da tubulação e fazer a mesma aproximação de um perfil constante de velocidade na seção que fizemos no exemplo anterior. Os balanços integrais de massa, quantidade de movimento e energia entre as seções A e B do volume de controle  $\mathcal{V}$  indicado na figura resultam em

$$\begin{aligned}
 U &= \text{constante em } x, \\
 (P_a - P_b)A - \tau_0 \times 2\pi RL &= 0, \\
 (P_a - P_b)UA &= \underbrace{\wp(\mathcal{U}_B - \mathcal{U}_A)UA}_{\wp AL \bar{\epsilon}_e} - \tilde{Q},
 \end{aligned}$$

onde  $A = \pi R^2$  é a área da seção transversal, e  $\tau_0$  é a tensão de cisalhamento entre a parede do tubo e o escoamento. Da equação de balanço de quantidade de movimento,

$$P_a - P_b = \frac{2\tau_0 L}{R},$$

que levada à equação de balanço de energia produz

$$\begin{aligned}\frac{2\tau_0 L}{R} U &= \oint L \overline{\epsilon_e}, \\ 2 \frac{\tau_0}{\oint} \frac{U}{R} &= \overline{\epsilon_e}.\end{aligned}$$

Neste ponto, é conveniente introduzir o *coeficiente de arrasto*  $C_D$  e a *velocidade de atrito*  $u_*$ :

$$\tau_0 \equiv \oint C_D U^2, \quad (3.9)$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\oint}} = u_*^2, \quad (3.10)$$

donde

$$\overline{\epsilon_e} = \frac{2}{\sqrt{C_D}} \frac{u_*^3}{R}. \quad (3.11)$$

Observe que, novamente, (3.11) tem a forma geral de (3.1). Novamente, trata-se de uma taxa de dissipação *média*, e um observador rigoroso poderá também argumentar que em sua essência (3.11) é simplesmente uma consequência das dimensões físicas de  $\overline{\epsilon_e}$ .

No entato, tanto (3.8) quanto (3.11) contam uma “história” importante: a taxa de dissipação de energia mecânica  $\overline{\epsilon_e}$  está sendo *imposta* pelas escalas macroscópicas do escoamento. Observe como o coeficiente de viscosidade cinemática não comparece em nenhuma das duas equações. Em ambos os casos, o escoamento turbulento se “ajustará” a essa taxa imposta pelas escalas macroscópicas.

Hoje conhecemos que o processo pelo qual a energia mecânica injetada no escoamento pelas escalas macroscópicas é dissipada possui dois “estágios”: no primeiro estágio, forma-se uma “cascata” de energia, que se redistribui sob a forma de energia cinética da turbulência em escalas progressivamente menores. O termo responsável por esse estágio nas equações de Navier-Stokes é o termo não-linear,  $U_k \partial U_i / \partial x_k$ . Em geral, supõe-se que esse processo é acompanhado pela geração de turbilhões sucessivamente menores, e ele é bem descrito pelas equações de vorticidade. Em 3 dimensões, o processo de transferência inercial de energia é compreendido como sucessivos alongamentos de vórtices (*vortex stretching*) e entortamentos de vórtices (*vortex tilting*). Em um dado momento, as escalas espaciais que caracterizam esses vórtices são suficientemente pequenas para que a viscosidade do escoamento interaja diretamente com eles.

Esse é o segundo estágio, no qual a energia desses numerosos pequenos vórtices é dissipada. As escalas características da “faixa de dissipação” são  $\eta_u$ ,  $\hat{u}$ , e  $\tau_u$ . Um argumento dimensional simples sugere que  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle \sim \nu (\hat{u} / \eta_u)^2$ . Nessas pequenas escalas o escoamento é “laminar”, no sentido de que o número de Reynolds formado pelas escalas locais de comprimento e de velocidade que caracterizam os menores vórtices do escoamento é da ordem de 1, como veremos em detalhe a seguir.

### 3.2 – Uma definição formal das escalas macroscópicas

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\langle U \rangle$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de “cova-

riâncias turbulentas”, por exemplo de  $\langle u_i u_j \rangle$ . Para o campo de velocidade, nós adotaremos inicialmente as seguintes estimativas:

$$\langle U_i \rangle \sim \tilde{u}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \sim \frac{\tilde{u}}{\ell}, \quad (3.13)$$

$$\langle u_i u_j \rangle \sim \tilde{u}^2. \quad (3.14)$$

Uma dificuldade é que, como muitas vezes a notação de ordem de grandeza será utilizada em conjunto com a notação indicial de Einstein, a “ordem” de um termo envolvendo índices repetidos pode se referir a um ou alguns dos sub-termos, ou à soma de todos os sub-termos. Para evitar qualquer ambiguidade, nós usaremos  $\sim$  para indicar a ordem de grandeza do *maior em módulo* (e possivelmente outros) de todos os sub-termos; e  $\sim\sim$  para indicar explicitamente a *soma* de todos os sub-termos. Portanto,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \sim \tilde{u}/\ell,$$

significa que

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} \left| \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right| \sim \tilde{u}/\ell,$$

enquanto que

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \sim\sim \tilde{u}/\ell$$

significa que

$$\left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} \right) \sim \tilde{u}/\ell.$$

Note que a segunda notação,  $\sim\sim$ , só faz sentido quando houver pelo menos um índice repetido do lado esquerdo. Note também que (3.12)–(3.14) já seguem essa notação, ou seja: em cada uma delas, a ordem de grandeza refere-se a *termos individuais*, ou ao maior em módulo dos termos obtidos variando-se  $i$  e  $j$ .

Apesar de (3.14) não ser necessária nesta seção, nós a incluímos aqui para que a discussão a seguir fique auto-contida. Como vimos acima,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade. As equações (3.12)–(3.14), e suas generalizações óbvias para outras variáveis do escoamento, tais como densidade, pressão, concentração de um escalar e temperatura, constituem-se em um poderoso instrumento de análise das equações que regem um escoamento turbulento. Sua interpretação, entretanto, é difícil. [Tennekes e Lumley \(1972, p. 47\)](#) comentam sobre diversos erros comuns de interpretação de (3.12)–(3.14), e discutem em detalhe suas justificativas.

Além disso, elas não são necessariamente universais! Por exemplo, nada obriga que haja apenas uma escala de velocidade  $\tilde{u}$ , e uma escala de comprimento  $\ell$ , macroscópicas. Dependendo da geometria, e da complexidade do escoamento, várias escalas macroscópicas de velocidade e comprimento (e diversas outras variáveis, é claro) podem surgir.

No entanto, as relações (3.12)–(3.14) tendem a valer em escoamentos com cisalhamento médio que possuem uma única escala característica de velocidade, e uma única escala característica de comprimento ([Tennekes e Lumley, 1972, p. 47–50](#)). O essencial de (3.12)–(3.14) é a suposição de que as mesmas escalas  $\tilde{u}$  e  $\ell$  comparecem



*tanto* na estimativa da ordem de grandeza dos gradientes de grandezas médias *quanto* das covariâncias turbulentas. Veremos mais à frente que  $\ell$  também pode ser associada à *escala integral da turbulência*, que tem uma definição estatística precisa. Como observam [Tennekes e Lumley \(1972\)](#), essa suposição de que as escalas macroscópicas servem a dois papéis reflete o fato de que elas são as únicas escalas características do escoamento; conseqüentemente, seu surgimento (a menos de coeficientes da ordem de 1) é uma exigência da consistência dimensional das expressões envolvidas.

Naturalmente, essa hipótese restringe a complexidade dos escoamentos que podemos analisar utilizando as equações (3.12)–(3.14); mesmo em situações ligeiramente mais complexas, entretanto, idéias similares revelam-se úteis e em geral ajudam a compreender ou modelar melhor o problema.

As equações (3.12)–(3.13) são suficientes para estimarmos a contribuição da taxa de dissipação associada ao escoamento médio  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  para a taxa total de dissipação de energia cinética,  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$ . Levando (3.13) em (2.102), encontramos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{em} \rangle &\sim \nu_u \left( \frac{\tilde{u}}{\ell} \right)^2 \\ &= \nu_u \frac{\tilde{u}^3}{\tilde{u} \ell^2} \\ &= \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \Rightarrow \\ \langle \mathcal{E}_{em} \rangle &\sim \text{Re}_\ell^{-1} \langle \mathcal{E}_e \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Em (3.15), nós encontramos pela primeira vez o número de Reynolds (na escala  $\ell$ ):

$$\text{Re}_\ell \equiv \frac{\tilde{u} \ell}{\nu_u}, \quad (3.16)$$

e usamos a estimativa (3.1) para a taxa total de dissipação.

De fato, se nós admitirmos como vínhamos comentando que a dissipação total é dada por (3.1), (3.15) nos informa que os gradientes do escoamento médio são extremamente ineficazes para produzir essa dissipação em escoamentos turbulentos, nos quais o número de Reynolds em (3.16) é frequentemente da ordem de  $10^3$  ou maior.

A figura simples, porém extremamente útil, que surge é a seguinte: se a taxa de dissipação total de energia cinética é imposta pelas “grandes escalas”  $\tilde{u}$ ,  $\ell$ , do escoamento, essas mesmas escalas produzem gradientes de velocidade (e conseqüentemente taxas de deformação) que são incapazes de dissipar a energia cinética nessa taxa!

Isso significa que devem existir no escoamento gradientes de velocidade, e conseqüentemente taxas de deformação,  *muito maiores* . Para encontrá-las, precisamos obviamente estudar a ordem de grandeza da taxa de dissipação da energia cinética da turbulência,  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$ .

### 3.3 – Uma definição formal das escalas microscópicas

Se tomarmos (formalmente) o limite  $\text{Re}_\ell \rightarrow \infty$ , a contribuição de  $\langle \mathcal{E}_{em} \rangle$  para  $\langle \mathcal{E}_e \rangle$  tende a zero em (3.15). Isso *não é uma mera formalidade*. Na maioria dos escoamentos naturais e industriais, os números de Reynolds são muito altos.

Por exemplo, a  $20^\circ \text{C}$ ,  $\nu_{u[\text{água}]} = 1,005 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , e  $\nu_{u[\text{ar}]} = 1,50 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (à pressão atmosférica padrão ao nível do mar). Então, para um rio com uma velocidade

típica  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  e uma profundidade típica de  $\ell = 1 \text{ m}$ ,  $\text{Re}_\ell = 10^6$ . Da mesma forma, para uma velocidade do vento  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$  a uma altura  $\ell = 10 \text{ m}$ , nós temos  $\text{Re}_\ell = 10^6$ .

A equação (3.15) então nos dá  $\langle \mathcal{E}_e \rangle \approx \langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  nessas condições. Retornando a (2.103), isso só pode significar que a ordem de grandeza de  $\langle s_{ij}s_{ij} \rangle$  (e eventualmente de  $\langle (\partial u_k / \partial x_k)^2 \rangle$ ) deve ser tal que

$$\langle s_{ij}s_{ij} \rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \sim \left( \frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2, \quad (3.17)$$

onde devemos ter

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \nu_u \left( \frac{\tilde{u}}{\eta_u} \right)^2. \quad (3.18)$$

A equação (3.17) mostra claramente que a ordem de grandeza do *gradiente microscópico de velocidade*  $\tilde{u}/\eta_u$  é definida por uma média quadrática. Por sua vez, (3.18) é suficiente para definir esse gradiente, mas é por si só incapaz de “separar” as escalas microscópicas de velocidade,  $\tilde{u}$ , e de comprimento,  $\eta_u$ . Isso pode ser feito de duas maneiras. A primeira é puramente dimensional: se as únicas grandezas disponíveis para definir  $\eta_u$  e  $\tilde{u}$  são  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  e  $\nu_u$ , então (3.2) e (3.3) seguem-se necessariamente do Teorema dos  $\Pi$ 's de Buckingham.

A segunda é encontrar  $\eta_u$ ,  $\tilde{u}$  como a solução de um sistema de duas equações, a primeira das quais é (3.18). A segunda equação é obtida a partir da intuição (*insight*) de que, *localmente*, o escoamento deve ser laminar. O número de Reynolds associado deve ser de ordem 1:

$$\text{Re}_{\eta_u} = \frac{\tilde{u}\eta_u}{\nu_u} = 1. \quad (3.19)$$

A solução do sistema (3.18)–(3.19) produz, novamente, as microescalas de Kolmogorov dadas por (3.2) e (3.3).

### 3.4 – A cascata de energia

Conforme notado pela primeira vez por Kolmogorov (1941), (3.1) não se aplica apenas à escala integral de comprimento  $\ell$ . Com alguma modificação, ela pode ser usada para todas as escalas intermediárias de comprimento  $r$  entre  $\ell$  e  $\eta_u$ . Para ver isso de uma maneira um pouco mais formal, defina a *função de estrutura de ordem 2* da velocidade:

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; \quad (3.20)$$

$$D_{uu}(\mathbf{r}) \equiv \langle [\mathbf{U}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_1)] \cdot [\mathbf{U}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_1)] \rangle \quad (3.21)$$

A definição (3.21) só é possível se os incrementos de velocidade do escoamento forem *homogêneos*; nesse caso,  $D_{uu}$  depende apenas da diferença  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , e não de cada um dos dois vetores.

Se, além disso, o escoamento for *isotrópico*,  $D_{uu} = D_{uu}(r)$  apenas, onde  $r = |\mathbf{r}|$ . Kolmogorov (1941) formulou a hipótese de *isotropia local*: segundo essa hipótese, apenas para  $r \ll \ell$ , o escoamento é isotrópico. Isso sem dúvida é uma analogia com o caso molecular, em que as velocidades das moléculas se distribuem igualmente em todas as direções, e do *Teorema de equipartição de energia*: a energia cinética das moléculas de um gás divide-se igualmente nas 3 direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ . No caso de turbulência, a situação é mais complicada: em escoamentos no mundo real, as “grandes escalas”  $\ell$

quase nunca são homogêneas, uma vez que, como veremos, existem direções preferenciais de produção da energia cinética da turbulência. Nesse sentido, o termo *local* desempenha um papel importante: aqui, a hipótese é que a natureza difusiva da turbulência *tende* a equalizar a distribuição direcional de energia cinética da turbulência apenas para escalas  $r$  muito menores do que  $\ell$ . *Apenas* nessas escalas o escoamento (segundo essa hipótese) é isotrópico. Nesse último caso, escrevemos

$$D_{uu}(r) = \langle [u(r) - u(0)]^2 \rangle \equiv (\delta u_r)^2, \quad (3.22)$$

e definimos uma escala de velocidade  $\delta u_r$  na escala de comprimento  $r$ .

Outra hipótese da teoria de Kolmogorov é que, para  $\eta_u \ll r \ll \ell$ , (3.1) continua valendo na forma

$$\langle \mathcal{E}_{et} \rangle = \alpha^{3/2} \frac{(\delta u_r)^3}{r}. \quad (3.23)$$

Segue-se, imediatamente, a previsão da teoria de Kolmogorov (1941) para a faixa inercial da função de estrutura:

$$D_{uu}(r) = \alpha \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{2/3} r^{2/3}. \quad (3.24)$$

Essencialmente, (3.24) é apenas a afirmativa de que  $(\delta u_r)^3/r$  é invariante para uma faixa de separações  $r$  que correspondem a diferenças de velocidade  $\delta u_r$ . Essa faixa,  $\eta_u \ll r \ll \ell$ , é a *faixa inercial*.

### 3.5 – Macro e microescalas de temperatura

Macro e microescalas adicionais devem ser adicionadas à lista (3.1)–(3.3) quando a temperatura representa um papel importante em um escoamento turbulento. Começamos por notar, sem demonstração (ainda) que existe uma cascata de semi-variância de temperatura da turbulência que é análoga à cascata de energia cinética da turbulência que discutimos na seção 3.4.

Dizer onde isso será feito!

Na seção 2.9, nós obtivemos

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = \nu_T \left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.25)$$

para a taxa de dissipação de semi-variância da temperatura da turbulência. A equação análoga a (3.1) é

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \sim \frac{\tilde{\mathcal{T}}^2 \tilde{u}}{\ell}. \quad (3.26)$$

Em (3.26),  $\tilde{\mathcal{T}}$  é uma macroescala de temperatura, e estamos supondo que a macroescala de comprimento associada à temperatura é o mesmo  $\ell$  já utilizado antes para a energia cinética.

A equação que define a microescala de gradientes de temperatura análoga a (3.18) é

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = \nu_T \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_T^2}. \quad (3.27)$$

onde  $\check{\mathcal{T}}$  é a microescala de temperatura;  $\eta_T$  é a microescala de comprimento para temperatura; e  $\tilde{u}$  é a microescala de velocidade.

Para separar  $\check{\mathcal{T}}$  de  $\eta_{\mathcal{T}}$ , nós podemos recorrer ao Teorema dos Pi's, e escrever

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{c_1}, \quad (3.28)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{b_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{c_2}, \quad (3.29)$$

Note que precisamos *incluir*  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  na lista de variáveis intervenientes. A equação (3.28) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{c_1}, \\ \mathcal{L} &= [\Theta^2 \mathcal{T}^{-1}]^{a_1} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}]^{b_1} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}]^{c_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ b_1 &= -3c_1, \\ 2(b_1 + c_1) &= 1, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 3/4$ ,  $c_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\eta_{\mathcal{T}} = \left( \frac{\nu_{\mathcal{T}}^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4}, \quad (3.30)$$

um resultado totalmente análogo a (3.2), exceto que  $\nu_{\mathcal{T}}$  aparece no lugar de  $\nu_u$ .

Já (3.29) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{b_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{c_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \mathcal{T}^{-1}]^{a_2} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}]^{b_2} [\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}]^{c_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - 3c_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 0$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = -1/4$ . Segue-se que

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} \nu_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4}, \quad (3.31)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{T}}^2 &= \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/2}, \\ \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle &= \check{\mathcal{T}}^2 \nu_{\mathcal{T}}^{-1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/2}, \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 \nu_{\mathcal{T}}^{-3/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/2} \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \check{\mathcal{T}}^2 \left[ \underbrace{\nu_{\mathcal{T}}^{-3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{1/4}}_{\eta_{\mathcal{T}}^{-1}} \right]^2 \\ &= \nu_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \end{aligned}$$

Naturalmente, esse resultado é o mesmo que (3.27): a obtenção de  $\eta_{\mathcal{T}}$  por meio do Teorema dos Pi's em (3.29) é equivalente à definição (3.27).

Esse resultado, representado pelas escalas (3.30) e (3.5), entretanto, é limitado pelas hipóteses que fizemos na aplicação do Teorema dos Pi's em (3.28)–(3.29): note que nós estamos supondo que as microescalas associadas à temperatura *não dependem da viscosidade cinemática*  $\nu_u$ .

Na prática, isso só é verdade se o número de Prandtl do fluido,

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu_u}{\nu_{\mathcal{T}}}, \quad (3.32)$$

for da ordem de 1. De fato, se  $\text{Pr} \sim 1$ , apenas uma das difusividades é necessária em (3.28)–(3.29): a inclusão da outra levaria a um sistema com mais incógnitas do que equações, já que há apenas 3 dimensões subjacentes ( $\Theta$ ,  $L$  e  $T$ ).

Se  $\text{Pr} \ll 1$  ou  $\text{Pr} \gg 1$ , entretanto, (3.30) deixa de ser verdadeira. A teoria envolvida deve, então, necessariamente incluir tanto  $\nu_{\mathcal{T}}$  quando  $\nu_u$ : ela foi desenvolvida por Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959), e prevê que a microescala de comprimento  $\eta_{\mathcal{T}}$  depende de  $\text{Pr}$ .

Para  $\text{Pr} \geq 1$ , Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) obtiveram

$$\frac{\eta_{\mathcal{T}}}{\eta_u} = \text{Pr}^{-1/2}, \quad (3.33)$$

donde

$$\check{\mathcal{T}} = \left( \frac{\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle}{\nu_{\mathcal{T}}} \right)^{1/2} \eta_{\mathcal{T}}. \quad (3.34)$$

Os resultados de Batchelor (1959) e Batchelor et al. (1959) podem ser obtidos com uma relativa facilidade da seguinte maneira. Em primeiro lugar nós incluímos  $\nu_u$  na lista de variáveis que governam a dinâmica da dissipação das flutuações de temperatura. Em segundo lugar, nós incluímos uma nova dimensão  $L_{\theta}$  no problema.

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_{\mathcal{T}}$  e para  $\check{\mathcal{T}}$  agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [\nu_u]^{b_1} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_1}, \quad (3.35)$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [\nu_u]^{b_2} [\nu_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_2}, \quad (3.36)$$

A equação (3.35) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket \nu_u \rrbracket^{b_1} \llbracket \nu_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_1}, \\ L_{\theta} &= [\Theta^2 T^{-1}]^{a_1} [L^2 T^{-1}]^{b_1} [L_{\theta}^2 T^{-1}]^{c_1} [L^2 T^{-3}]^{d_1}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 0, \\ 2(b_1 + d_1) &= 0, \\ 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\eta_{\mathcal{T}} = \nu_u^{1/4} \nu_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4}$$

$$\begin{aligned}
&= v_u^{1/4} v_u^{1/2} v_u^{-1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\
&= v_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \left( \frac{v_{\mathcal{T}}}{v_u} \right)^{1/2} \\
&= \left( \frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{v_u}{v_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\
&= \eta_u \text{Pr}^{-1/2},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

que é o mesmo que (3.33), de Batchelor (1959). Já (3.36) produz

$$\begin{aligned}
\llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket v_u \rrbracket^{b_2} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_2}, \\
\Theta &= [\Theta^2 \text{T}^{-1}]^{a_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_2} [\text{L}_\theta^2 \text{T}^{-1}]^{c_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
2a_2 &= 1, \\
2b_2 + 2d_2 &= 0, \\
2c_2 &= 0, \\
-a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0,
\end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = v_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (3.5) e (3.27). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{Tt}$ .

### O outro caso

A previsão do Teorema dos Pi's para  $\eta_{\mathcal{T}}$  e para  $\check{\mathcal{T}}$  agora é

$$\eta_{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_1} [v_u]^{b_1} [v_{\mathcal{T}}]^{c_1} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_1}, \tag{3.38}$$

$$\check{\mathcal{T}} = [\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle]^{a_2} [v_u]^{b_2} [v_{\mathcal{T}}]^{c_2} [\langle \mathcal{E}_{et} \rangle]^{d_2}, \tag{3.39}$$

mas as dimensões serão diferentes! Em particular,

$$\llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket = \Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_\theta^{-1}$$

A equação (3.38) produz

$$\begin{aligned}
\llbracket \eta_{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_1} \llbracket v_u \rrbracket^{b_1} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_1} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_1}, \\
\text{L}_\theta &= [\Theta^2 \text{L} \text{T}^{-1} \text{L}_\theta^{-1}]^{a_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_1} [\text{L}_\theta^2 \text{T}^{-1}]^{c_1} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_1},
\end{aligned}$$

donde

$$2a_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} 2(a_1 + b_1 + d_1) &= 0, \\ -a_1 + 2c_1 &= 1, \\ -(a_1 + b_1 + c_1) - 3d_1 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1/4$ ,  $c_1 = 1/2$ ,  $d_1 = -1/4$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}} &= v_u^{1/4} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\ &= v_u^{1/4} v_u^{1/2} v_u^{-1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/2} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \\ &= v_u^{3/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4} \left( \frac{v_{\mathcal{T}}}{v_u} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{v_u^3}{\langle \mathcal{E}_{et} \rangle} \right)^{1/4} \left( \frac{v_u}{v_{\mathcal{T}}} \right)^{-1/2} \\ &= \eta_u \text{Pr}^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

que é o mesmo que (3.33), de Batchelor (1959). Já (3.39) produz

$$\begin{aligned} \llbracket \check{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle \rrbracket^{a_2} \llbracket v_u \rrbracket^{b_2} \llbracket v_{\mathcal{T}} \rrbracket^{c_2} \llbracket \langle \mathcal{E}_{et} \rangle \rrbracket^{d_2}, \\ \Theta &= [\Theta^2 \text{T}^{-1}]^{a_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-1}]^{b_2} [\text{L}_0^2 \text{T}^{-1}]^{c_2} [\text{L}^2 \text{T}^{-3}]^{d_2}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1, \\ 2b_2 + 2d_2 &= 0, \\ 2c_2 &= 0, \\ -a_2 - b_2 - c_2 - 3d_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou  $a_2 = 1/2$ ,  $b_2 = 1/4$ ,  $c_2 = 0$ ,  $d_2 = -1/4$ . O resultado para a microescala de temperatura, portanto, não muda:

$$\check{\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle^{1/2} v_{\mathcal{T}}^{1/4} \langle \mathcal{E}_{et} \rangle^{-1/4},$$

ou

$$\langle \mathcal{E}_{Tt} \rangle = v_{\mathcal{T}} \left( \frac{\check{\mathcal{T}}^2}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2.$$

Essas equações são as mesmas que (3.5) e (3.27). Mais uma vez elas são coerentes com a definição da escala dos gradientes de temperatura,  $\check{\mathcal{T}}/\eta_{\mathcal{T}}$ , em função da taxa de dissipação de semivariância das flutuações de temperatura  $\mathcal{E}_{Tt}$ .

### 3.6 – Estimativas consistentes dos gradientes microscópicos

Os gradientes microscópicos de velocidade e de temperatura (e por conseguinte, de densidade, via (3.17) e (3.25) são

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \sim \left( \frac{\check{u}}{\eta_u} \right)^2, \tag{3.41}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \right\rangle \sim \left( \frac{\check{\mathcal{T}}}{\eta_{\mathcal{T}}} \right)^2. \tag{3.42}$$

Esses gradientes microscópicos podem, agora, ser facilmente relacionados com os gradientes macroscópicos (sempre em *ordem de magnitude*), como se segue:

$$\begin{aligned}
 v_u \frac{\check{u}^2}{\eta_u^2} &= \frac{\check{u}^3}{\ell}, \\
 \frac{\check{u}}{\eta_u} &= \left( \frac{\check{u}^3}{v_u \ell} \right)^{1/2} \\
 &= \left( \frac{\check{u}^2}{\ell^2} \frac{\check{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{u}}{\ell} \left( \frac{\check{u} \ell}{v_u} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{u}}{\ell} \text{Re}_\ell^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Para valores típicos na atmosfera próximo à superfície, e supondo, de forma conservadora,  $\ell \sim 1\text{m}$ ,  $\check{u} \sim 1\text{ m s}^{-1}$ ,  $v_u = 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{Re}_\ell = 662690$ ,  $\text{Re}_\ell^{1/2} \sim 1000$ . Os gradientes microscópicos de velocidade são mil vezes maiores que os gradientes macroscópicos.

Além disso, é útil registrar, para uso posterior, o seguinte: de (3.1) e (3.2), segue-se que

$$\begin{aligned}
 \eta_u &= \left( v_u^3 \frac{\ell}{\check{u}^3} \right)^{1/4}, \\
 \eta_u^4 &= \frac{v_u^3 \ell}{\check{u}^3}, \\
 \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \frac{v_u^3}{\ell^3 \check{u}^3}, \\
 \left( \frac{\eta_u}{\ell} \right)^4 &= \text{Re}^{-3}, \\
 \frac{\eta_u}{\ell} &= \text{Re}^{-3/4}.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Analogamente,

$$\frac{\check{u}}{\check{\eta}} = \text{Re}^{-1/4}. \tag{3.45}$$

O mesmo pode ser feito para os gradientes microscópicos de temperatura e, por conseguinte, de densidade:

$$\begin{aligned}
 v_T \frac{\check{T}^2}{\eta_T^2} &= \frac{\check{u} \check{T}^2}{\ell}, \\
 \frac{\check{T}}{\eta_T} &= \left( \frac{\check{u} \check{T}^2}{v_T \ell} \right)^{1/2} \\
 &= \left( \frac{\check{T}^2}{\ell^2} \frac{\check{u} \ell}{v_T} \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\check{T}}{\ell} \left( \frac{\check{u} \ell}{v_T} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$



$$= \frac{\check{\mathcal{T}}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2}. \quad (3.46)$$

(3.46) utiliza um número de Péclet

$$\text{Pe}_\ell = \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} = \text{Re}_\ell \text{Pr} \quad (3.47)$$

que é análogo ao número de Reynolds  $\text{Re}_\ell$  definido em (3.16). Mais uma vez, em analogia com (3.45), a partir de (3.46) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\check{\mathcal{T}}}{\ell} &= \frac{\eta_\mathcal{T}}{\ell} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \frac{\eta_u}{\ell} \frac{\eta_\mathcal{T}}{\eta_u} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \text{Re}_\ell^{-3/4} \text{Pr}^{-1/2} \text{Pe}_\ell^{1/2} \\ &= \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4} \left( \frac{\nu_u}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{-1/2} \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4} \left( \frac{\nu_\mathcal{T}}{\nu_u} \right)^{1/2} \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_\mathcal{T}} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\tilde{u}\ell}{\nu_u} \right)^{-3/4+1/2} \\ &= \text{Re}_\ell^{-1/4}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde usamos (3.44) para  $\eta_u/\ell$  e (3.32)–(3.33) para  $\eta_\mathcal{T}/\eta_u$ .

# 4

## As equações para o escoamento médio, e a aproximação de Boussinesq

---

As equações de Navier-Stokes, e da energia, podem ser consideravelmente simplificadas antes de serem usadas em problemas de interesse físico. As simplificações adotadas são de duas naturezas.

Primeiramente, utilizando-se uma decomposição proposta por Boussinesq para os campos de velocidade, densidade, temperatura e pressão que é baseada em um estado hidrostático de referência, é possível obter um conjunto de equações grandemente simplificadas. As principais simplificações são a substituição da densidade variável por uma densidade de referência (que pode ser variável de acordo com uma distribuição hidrostática, mas que não precisa mais ser *prognosticada*), e a adoção de um campo de velocidade solenoidal. Portanto, uma aproximação de incompressibilidade é obtida, *mesmo em escoamentos com densidade variável*. Nas próximas seções nós vamos mostrar que isso não constituiu nenhum paradoxo.

Em segundo lugar, a equação da energia é essencialmente inútil na variável dependente  $\mathcal{U}$ . É preciso manipular a equação (2.77) e reescrevê-la em termos de variáveis prognósticas “úteis”, isto é, efetivamente mensuráveis ou calculáveis. Via de regra, essas variáveis são ou a temperatura termodinâmica  $T$ , ou a temperatura potencial  $\Theta$ .

Ao final do capítulo, teremos obtido um conjunto de equações para as variáveis dependentes *médias*  $\langle U \rangle$ ,  $\langle P \rangle$ , e  $\langle T \rangle$  (ou  $\langle \Theta \rangle$ ) as quais, por sua vez, nos dão informações úteis sobre os escoamentos do mundo real.

### 4.1 – O estado hidrostático de referência, e a altura de escala

Nesta seção nós obtemos um “estado hidrostático de referência” suficientemente geral para gases perfeitos e líquidos nas condições normalmente encontradas no ambiente. Esse estado será denominado  $(\varphi_r, P_r, T_r)$ , e dependerá somente da altura  $z$ .

Suporemos que o fluido do escoamento pode ser suficientemente bem descrito como uma substância simples, e que o único agente de efeitos de empuxo é a temperatura. O coeficiente isobárico de expansão térmica,  $\beta_P$ , e o coeficiente isotérmico de compressibilidade,  $\kappa_T$ , são definidos nesse caso por

$$\beta_P \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P, \quad (4.1)$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T. \quad (4.2)$$

Escrevendo a entalpia específica (por unidade de massa)  $\mathcal{H}$  em função de  $T$  e  $P$ , e calculando seu diferencial,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= c_p dT + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T dP, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde usamos

$$c_p \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P. \quad (4.4)$$

O segundo termo é obtido com o auxílio das relações de Maxwell:

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP + TdS, \quad (4.5)$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} + T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T; \quad (4.6)$$

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \beta_P \mathcal{V}, \quad (4.7)$$

onde  $S$  é a entalpia específica, donde

$$\left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T = \mathcal{V} (1 - \beta_P T). \quad (4.8)$$

Supondo agora um processo isentrópico ( $dS = 0$ ); levando (4.5) em (4.3); e utilizando (4.8),

$$d\mathcal{H} = \mathcal{V}dP = c_p dT + \mathcal{V} (1 - \beta_P T) dP, \quad (4.9)$$

$$c_p dT = \beta_P T \mathcal{V} dP. \quad (4.10)$$

Utilizando a equação da hidrostática,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{\mathcal{V}} \Rightarrow \mathcal{V}dP = -g dz, \quad (4.11)$$

e substituindo em (4.10), obtemos um resultado central e muito importante:

$$\frac{dT}{dz} = -\beta_P T \frac{g}{c_p} \quad (4.12)$$

O sistema de equações diferenciais (4.11)–(4.12) pode ser resolvido simultaneamente, pois  $\beta_P = \beta_P(P, T)$  e  $1/\wp = \mathcal{V} = \mathcal{V}(P, T)$  (essa última é a equação de estado). Portanto, em princípio, temos, após a integração a partir das condições iniciais  $P_0, T_0, \wp_0$  em  $z = 0$ , os perfis do estado termodinâmico de referência  $P_r(z)$ ,  $T_r(z)$  e  $\wp_r(z)$ .

Um parâmetro essencial para a análise de escala das equações da Mecânica dos Fluidos aplicadas a escoamentos naturais é a “altura de escala”  $D$  (em Inglês, *scale height*). Ela é definida a partir do estado de referência hidrostático de densidade:

$$D \equiv \left| \frac{1}{\wp_0} \frac{d\wp_r(0)}{dz} \right|^{-1}. \quad (4.13)$$

A altura de escala pode ser facilmente obtida usando (4.1), (4.2), (4.11) e (4.12):

$$\begin{aligned}\varrho &= \frac{1}{\mathcal{V}}, \\ d\varrho &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} d\mathcal{V}; \\ d\varrho &= \frac{d\varrho}{d\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P dT + \frac{d\varrho}{d\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T dP \\ &= -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (\mathcal{V}\beta_P) dT + -\frac{1}{\mathcal{V}^2} (-\mathcal{V}\kappa_T) dP \\ &= -\varrho\beta_P dT + \varrho\kappa_T dP \Rightarrow\end{aligned}\quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varrho}{dz} &= -\varrho\beta_P \left( -\beta_P T \frac{g}{c_p} \right) + \varrho\kappa_T (-\varrho g); \\ \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dz} &= \beta_P^2 T \frac{g}{c_p} - \kappa_T \varrho g \Rightarrow \\ D &= \left| \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_r(0)}{dz} \right|^{-1} = \left| \beta_P^2 T_0 \frac{g}{c_p} - \kappa_T \varrho_0 g \right|^{-1}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Para água a  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ , tem-se

$$\begin{aligned}\varrho_0 &= 999,1 \text{ kg m}^{-3}, \\ \beta_P &= 1,5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}, \\ \kappa_T &= 4,9 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.\end{aligned}$$

Portanto,  $D_{\text{água}} = 2,089 \times 10^{+05} \text{ m}$ . Também é conveniente relacionar  $\beta_P$  e  $\kappa_T$  com a pressão e a temperatura ambientes. Para os mesmos valores de referência acima, e  $P_0 = 101325 \text{ Pa}$ ,

$$\kappa_T^{-1} \approx 20000 P_0, \quad (4.16)$$

$$\beta_P^{-1} \approx 23 T_0. \quad (4.17)$$

Para um gás ideal, a equação de estado é

$$P = \varrho RT, \quad \text{ou} \quad P\mathcal{V} = RT, \quad (4.18)$$

onde  $R$  é a constante específica do gás (ou da particular mistura de gases: por exemplo, para o ar seco tem-se  $R = 287$ ,  $c_p = 1005$ , e  $c_v = 718 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ),  $P$  é a pressão termodinâmica, e  $T$  é a temperatura. Diferenciando-se (4.18), obtém-se imediatamente:

$$dP = R\varrho dT + RT d\varrho \quad \text{ou} \quad Pd\mathcal{V} + \mathcal{V}dP = RdT, \quad (4.19)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dT}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}. \quad (4.20)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{RT}{P}, \\ \beta_P &= \frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \right)_P = \frac{R}{P\mathcal{V}} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T},\end{aligned}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{RT}{P^2} = \frac{1}{P},$$

e

$$\begin{aligned} \beta^2 T \frac{g}{c_p} - \frac{\kappa g}{\mathcal{V}} &= \frac{g}{c_p T} - \frac{g}{RT} \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{1}{c_p} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{g}{T} \left( \frac{R - c_p}{c_p R} \right) \\ &= -\frac{c_v}{c_p R} \frac{g}{T}. \end{aligned}$$

Para o ar seco, com  $T_0 = 15^\circ \text{C} = 288.15 \text{K}$ ,  $R = 287$ ,  $c_p = 1005$  e  $c_v = 718 \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ , obtém-se  $D_{\text{ar}} = 1,180 \times 10^{+04} \text{m}$

## 4.2 – O estado de referência em uma atmosfera adiabática seca

O valor da taxa de variação de temperatura em (4.12), com  $\beta_P = 1/T$ , é a *taxa adiabática seca*. Em uma atmosfera adiabática e hidrostática, portanto, a temperatura cai a partir de  $z = 0$  segundo

$$T_r(z) = T_0 - \frac{g}{c_p} z. \quad (4.21)$$

A partir do perfil de temperatura, obtém-se facilmente o perfil de pressão:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\wp g, \\ \frac{dP}{dz} &= -\frac{Pg}{RT}, \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{g dz}{RT} = \frac{c_p}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\ \ln \frac{P_r}{P_0} &= \ln \left[ \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right]^{c_p/R}, \\ P_r(z) &= P_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_p/R} \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.22)$$

Analogamente, fazendo-se  $dT = -g dz / c_p$ , obtém-se, para o perfil de  $\wp$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\wp}{\wp} &= \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\frac{g dz}{RT} - \frac{dT}{T}, \\ &= -\left( -\frac{g}{RT} + \frac{g}{c_p T} \right) dz \\ &= \frac{c_v}{R} \frac{(-g dz)}{c_p T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_v}{R} \frac{-\frac{g}{c_p} dz}{T_0 - \frac{g}{c_p} z}, \\
\wp_r(z) &= \wp_0 \left( \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \right)^{c_v/R} \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Relações diretas entre  $P$ ,  $\wp$  e  $T$  também podem ser obtidas. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} dP &= c_p dT, \\
\frac{RT}{P} dP &= c_p dT, \\
\frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
\ln \frac{T_0}{T} &= \ln \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}, \\
T_0 &= T \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A equação (4.24) relaciona os valores de  $T$  e  $P$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de temperatura e pressão na superfície são  $T_0$  e  $P_0$ . Ela *também* serve para *definir* a temperatura potencial em uma atmosfera qualquer:

$$\Theta \equiv T \left( \frac{P_0}{P} \right)^{R/c_p}. \tag{4.25}$$

Portanto, segue-se a definição “verbal” frequentemente encontrada nos livros, de que a temperatura potencial  $\Theta$  é a temperatura de uma parcela trazida adiabaticamente (e hidrostaticamente) do nível de pressão  $P$  até o nível de pressão  $P_0$  na superfície.

O mesmo pode ser feito com  $\wp$ ,  $P$ , naturalmente:

$$\begin{aligned}
-P d\mathcal{V} &= c_v dT, \\
-\frac{RT}{\mathcal{V}} d\mathcal{V} &= c_v dT, \\
\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} &= -\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} = -\frac{c_v}{R} - \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
&= -\frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}; \\
\frac{d\wp}{\wp} &= \frac{c_v}{c_p} \frac{dP}{P}, \\
\wp_0 &= \wp \left( \frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Novamente, (4.26) relaciona  $\wp$  com  $P$  em uma atmosfera adiabática seca e hidrostática cujos valores de densidade e pressão na superfície são  $\wp_0$  e  $P_0$ . Para uma atmosfera qualquer, ela é usada para definir a *densidade potencial*  $\wp_\Theta$ :

$$\wp_\Theta \equiv \wp \left( \frac{P_0}{P} \right)^{c_v/c_p}. \tag{4.27}$$

A Figura 4.1 mostra os perfis de Pressão (a) e Densidade (b) do estado hidrostático de referência em uma atmosfera seca. Na figura 4.1, a interseção da tangente em  $z = 0$  com o eixo das ordenadas marca a altura de escala  $D$ .

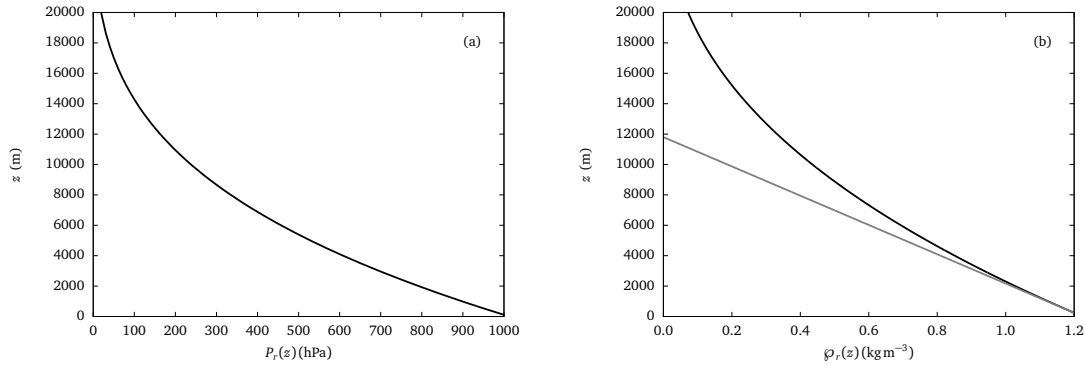


Figura 4.1: Dependência da pressão de referência  $P_r$  e da densidade de referência  $\phi_r$  em uma atmosfera hidrostática e adiabática com a altitude  $z$ .

### 4.3 – Hipóteses para a magnitude das flutuações de densidade

Para um fluido cujo estado hidrostático de referência tem uma altura de escala  $D$ , suponha que o escoamento turbulento de interesse ocorre em uma camada cuja espessura  $\ell$  é tal que  $\ell \ll D$ . Para um ponto qualquer com  $0 \leq z \leq \ell$ , a variação  $\Delta\phi_r = |\phi_r(z) - \phi_r(0)|$  é

$$\Delta\phi_r \leq \left| \int_0^\ell \frac{d\phi_r}{dz} dz \right| \leq \int_0^\ell \left| \frac{d\phi_r}{dz} \right| dz \leq \int_0^\ell \max \left| \frac{d\phi_r}{dz} \right| dz = \phi_0 \frac{\ell}{D}, \quad (4.28)$$

Segue-se que

$$\frac{\Delta\phi_r}{\phi_0} \leq \frac{\ell}{D} \ll 1. \quad (4.29)$$

Faça agora cada um dos campos instantâneos do escoamento ser decomposto na soma de um estado de referência hidrostático e de uma flutuação de Boussinesq (*cuidado: essa **não** é a decomposição de Reynolds, e a flutuação **não** é uma flutuação turbulenta*):

$$U_i = 0 + U'_i, \quad (4.30)$$

$$\phi = \phi_r + \phi', \quad (4.31)$$

$$P = P_r + P', \quad (4.32)$$

$$T = T_r + T', \quad (4.33)$$

etc..

Um nível adicional de formalização pode ser obtido da seguinte forma: na região  $0 \leq z \leq \ell$ , a densidade de referência é muito proximamente igual à expansão de  $\phi_r$  até o primeiro termo de sua série de Taylor; de (4.13),

$$\frac{\phi_r}{\phi_0} \approx 1 - \frac{z}{D}, \quad (4.34)$$

donde

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial z} \sim -\frac{\phi_0}{D}. \quad (4.35)$$

Nós pretendemos avaliar a ordem de grandeza dos termos que comparecem na equação diferencial de conservação de massa (2.6). Para isso, nós precisamos estimar

a ordem de grandeza dos gradientes de densidade,  $\partial\wp/\partial x_i$  e dos gradientes de velocidade,  $\partial U_i/\partial x_i$ . Em ambos os casos, é preciso decompor o escoamento tanto em termos de estado hidrostático/flutuação dinâmica (Boussinesq) quanto em termos de média/flutuação turbulenta (Reynolds). O processo, para densidade, é como se segue:

$$\wp = \wp_r + \wp', \quad (4.36)$$

$$\langle \wp \rangle = \wp_r + \langle \wp' \rangle, \quad (4.37)$$

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho, \quad (4.38)$$

$$\wp = \wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho. \quad (4.39)$$

A aproximação de Boussinesq consiste, primeiramente, em supor

$$\wp' \sim \wp_0 \frac{\ell}{D} \ll \wp_r. \quad (4.40)$$

Em outras palavras, estamos supondo que as flutuações de densidade são, no máximo, da mesma ordem que as variações na densidade de referência.

Conforme vimos acima, entretanto, não basta avaliar a ordem de grandeza das flutuações de densidade; é preciso também estimar a ordem de grandeza dos seus gradientes. Já temos uma estimativa da ordem de grandeza do gradiente vertical de  $\wp_r$  em (4.35).

Na sequência, será necessário fazer uma estimativa de ordem de grandeza de  $\langle \wp' \rangle$  e de seus gradientes. Também será necessário estimar a ordem de grandeza de covariâncias turbulentas, por exemplo de  $\langle u_i \rho \rangle$ . As estimativas que nós adotaremos são análogas às feitas em (3.12)–(3.14): são as seguintes:

$$\langle \wp' \rangle \sim \tilde{\rho}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{\rho}}{\ell}, \quad (4.42)$$

$$\langle u_i \rho \rangle \sim \tilde{u} \tilde{\rho}. \quad (4.43)$$

Como vimos no capítulo 3,  $\tilde{u}$  é uma escala macroscópica de velocidade, e é natural que  $\tilde{\rho}$ , agora, seja uma escala macroscópica de densidade. Note que, de (4.40) e (4.41),

$$\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\ell}{D}. \quad (4.44)$$

Aqui, valem as mesmas considerações feitas na seção 3.2 a respeito da validade das estimativas (4.41)–(4.43), e uma releitura dessa seção é recomendável para que o leitor reforce seu entendimento da utilidade desse tipo de estimativa, mas também de suas limitações.

#### 4.4 – A aproximação de Boussinesq para a conservação de massa

Comece agora com a equação instantânea de conservação de massa, (2.5), e tire a média; então, utilizando a decomposição e os postulados de Reynolds, obtém-se

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial (\wp U_i)}{\partial x_i} = 0,$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \wp U_i \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle + \rho][\langle U_i \rangle + u_i] \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle &= 0, \\
\frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle] + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

A equação (4.45) é a equação de conservação de massa *exata* para as médias. Note o aparecimento das covariâncias  $\langle \rho u_i \rangle$ : a primeira lição é que em um escoamento com flutuações de densidade a equação da continuidade *média* contém um termo envolvendo as covariâncias de densidade com a velocidade. Aplicando agora (4.39),

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_i}}_{\text{II}} + \underbrace{\langle U_i \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_i}}_{\text{III}} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_{\text{IV}} + \underbrace{\langle \wp' \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i}}_{\text{V}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_i}}_{\text{VI}} = 0. \tag{4.46}$$

A ordem de grandeza de cada termo pode ser facilmente estabelecida:

$$\begin{aligned}
\text{I} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
\text{II} &\sim \frac{\wp_0 \tilde{u}}{D} \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
\text{III} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}; \\
\text{IV} &\sim \frac{\wp_0 \tilde{u}}{\ell} \\
\text{V} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell} \\
\text{VI} &\sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}}{\ell}
\end{aligned}$$

Em II, usamos (4.44). Em função de que  $\ell/D \ll 1$ ,  $\tilde{\rho}/\wp_0 \ll 1$ , é evidente que o termo IV é muito maior do que todos os outros; nesse sentido, podemos escrever

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} \right) \approx 0. \tag{4.47}$$

Portanto, uma primeira consequência das hipóteses da aproximação de Boussinesq para as macroescalas é que o escoamento médio  $\langle U \rangle$  é *aproximadamente* solenoidal, ou seja:  $\nabla \cdot U \approx 0$ .

## 4.5 – A aproximação de Boussinesq para a equação de quantidade de movimento

Em notação indicial, a equação da hidrostática (4.11) pode ser escrita

$$\wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} = 0. \tag{4.48}$$

Introduza agora a decomposição de Boussinesq na forma de (4.31) e (4.32), por enquanto apenas nos termos envolvendo a pressão e a aceleração da gravidade, na equação para a quantidade de movimento, (2.34), e simplifique utilizando (4.40) e (4.48):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= (\wp_r + \wp') \left[ g_i - 2\epsilon_{ijk} \omega_j U_k \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -(P_r + P') + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &= \underbrace{\left[ \wp_r g_i - \frac{\partial P_r}{\partial x_i} \right]}_{\equiv 0} + \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(\wp U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp U_i U_j)}{\partial x_j} &\approx \wp' g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j U_k \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -P' + \lambda \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

A hipótese fundamental da *aproximação de Boussinesq* para a equação de quantidade de movimento consiste no seguinte: em (4.49), nós fazemos

$$\wp_r + \wp' \approx \wp_r \tag{4.50}$$

em todos os termos em que  $\wp$  aparece *fora* das derivadas, com base em (4.40), *exceto no caso do termo de empuxo*  $\wp' g_i$ . Esse último fica como está. A justificativa para esse procedimento tem base na física que estamos querendo representar (e, num sentido matemático muito concreto, *preservar!*). Em escoamentos com estratificação de densidade, esse é justamente o termo que produz convecção: é mais ou menos óbvio que, se o desprezarmos, a equação resultante não será mais capaz de representar *nenhum* efeito de empuxo devido a variações de densidade dentro do fluido.

Além disso, a substituição de  $\wp$  por  $\wp_r$  apenas nos termos fora de derivadas é um outro ponto crucial, já que  $\wp' \ll \wp_r$  não implica  $\partial \wp' / \partial x_k \ll \partial \wp_r / \partial x_k$ ! Isso significa que não podemos fazer essa aproximação *ainda* no lado esquerdo de (4.49). Muito pelo contrário, como  $\wp'$  inclui as flutuações turbulentas, seus gradientes incluem também os gradientes locais dessas flutuações, os quais, conforme vimos no capítulo 3, são muito maiores que os gradientes das grandezas médias.

Portanto, a equação (4.49), nessa forma, é pouco útil, já que todos os gradientes que aparecem na equação envolvem tanto as macro quanto as microescalas que foram introduzidas no capítulo 3: não é possível fazer uma análise de escalas de (4.49). O próximo passo é promediá-la:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\langle P' \rangle + \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Os termos do lado direito de (4.51) estão prontos para uma análise de escalas, mas o lado esquerdo precisa ser “aberto”, com o uso, como sempre, da decomposição e dos postulados de Reynolds:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp U_i \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle U_i \rangle + u_i] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \wp \rangle u_i + \rho \langle U_i \rangle + \rho u_i] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle + \langle \rho u_i \rangle];\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp U_i U_j \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle U_i \rangle + u_i] [\langle U_j \rangle + u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle u_j + \langle \wp \rangle u_i \langle U_j \rangle + \rho \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle] \rangle \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle u_i u_j + \langle U_i \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho u_i + \rho u_i u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle + \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle + \langle \rho u_i u_j \rangle]\end{aligned}$$

Substituindo em (4.51),

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \\ &\frac{\partial \langle \wp \rangle \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_i \rangle \langle \rho u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\ &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}. \quad (4.52)\end{aligned}$$

É possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (4.45):

$$\begin{aligned}&\langle \wp \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\ &\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\ &= \langle \wp' \rangle g_i - 2\wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2\wp_r \nu_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\langle \wp \rangle$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (4.50) (na forma promediada, que utiliza (4.37)):

$$\begin{aligned}
& \wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} + \\
& \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \\
& = \langle \wp \rangle g_i - 2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right) + 2 \wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Finalmente, expandimos  $\partial \langle \wp \rangle / \partial x_j$  usando mais uma vez (4.37):

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{\wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\
& \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{\frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho u_i \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{\frac{\partial \langle \rho u_i u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\
& = \underbrace{\langle \wp \rangle g_i}_{\text{IX}} - \underbrace{2 \wp_r \epsilon_{ijk} \omega_j \langle U_k \rangle}_{\text{X}} - \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i}}_{\text{XI}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} \right)}_{\text{XII}} + \underbrace{2 \wp_r v_u \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j}}_{\text{XIII}}. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Se estendermos as estimativas de ordem de grandeza que já fizemos para velocidades e densidades para as pressões (em analogia, por exemplo, a (4.41)–(4.43)), devemos ter:

$$\langle P' \rangle \sim \tilde{p}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} \sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \quad (4.55)$$

$$\langle u_i p \rangle \sim \tilde{u} \tilde{p}. \quad (4.56)$$

As ordens de grandeza de cada termo se seguem:

$$\begin{aligned}
\text{I} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{II} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{III} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IV} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{V} & \sim \frac{\wp_0}{D} \tilde{u}^2 = \wp_0 \frac{\ell}{D} \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \sim \tilde{\rho} \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VI} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{VII} & \sim \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\ell},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{VIII} &\sim \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{IX} &\sim \tilde{\rho}g, \\
\text{X} &\sim \wp_0 f \tilde{u} = \frac{\wp_0}{l} \frac{f l}{\tilde{u}} \tilde{u}^2 \sim \frac{1}{\text{Ro}} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XI} &\sim \frac{\tilde{p}}{\ell}, \\
\text{XII} &\sim \wp_0 \nu \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu}{\tilde{u}\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\text{XIII} &\sim \wp_0 \nu \frac{\tilde{u}}{\ell^2} = \frac{\nu}{\tilde{u}\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} = \frac{1}{\text{Re}_\ell} \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}.
\end{aligned}$$

Os termos de maior ordem são I, III e IV (todos os três da mesma ordem), IX, e XI. Esses dois últimos são os “forçantes” da equação de quantidade de movimento, e consequentemente *têm* que produzir a ordem de magnitude observada em I, III e IV. Em X,  $f = 2\omega \sin(\phi)$  é o parâmetro, ou frequência, de Coriolis;  $\phi$  é a latitude; e

$$\text{Ro} \equiv \frac{\tilde{u}}{f\ell} \quad (4.57)$$

é o número de Rossby. Na escala  $\ell$  do escoamento, o número de Rossby é muito grande, e podemos desprezar X *vis-à-vis* I, III e IV. Da mesma forma, em escoamentos turbulentos na natureza,  $\text{Re}_\ell$  é muito grande, e podemos desprezar XII e XIII *vis-à-vis* I, III e IV.

A equação aproximada de quantidade de movimento resultante é

$$\wp_r \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (4.58)$$

Uma última simplificação é possível abrindo a derivada do 2º termo à esquerda e tomando ordens de grandeza:

$$\wp_r \frac{\partial (\langle U_i \rangle \langle U_j \rangle)}{\partial x_j} = \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j}$$

Utilizando (4.47),

$$\begin{aligned}
\wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \\
\wp_r \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j} &\sim \wp_0 \tilde{u} \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{u}}{\ell} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \ll \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\wp_r \left[ \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} \right] = \langle \wp' \rangle g_i - \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_i} + \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}\tilde{u}^2}{\ell} \right). \quad (4.59)$$

Ficamos então com as seguintes relações de ordens de grandeza em (4.58) ou (4.59):

$$g\tilde{\rho} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell}, \quad (4.60)$$

$$\frac{\tilde{p}}{\ell} \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^2}{\ell} \Rightarrow \quad (4.61)$$

$$\tilde{p} \sim \tilde{\rho} g \ell. \quad (4.62)$$

Flutuações de pressão são extremamente difíceis de medir na atmosfera. [Wynngaard \(2010\)](#) dá a estimativa  $p \sim \wp_0 \tilde{u}^2$  para escoamentos com densidade  $\wp$  constante (segundo o autor): note que isso é o mesmo que (4.61), que foi obtida sem exigência de constância da densidade do escoamento. [Hauf et al. \(1996\)](#) observaram valores de  $p$  da ordem de 2,5 Pa, ou seja: da mesma ordem que a estimativa de Wynngaard e de (4.61). Esses dados observacionais reforçam as conclusões desta seção de que é razoável desprezar os efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações (tanto no sentido de Boussinesq quanto no de Reynolds) de densidade.

Levando (4.62) em (4.14), obtém-se as seguintes ordens de grandeza:

$$\frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \sim \underbrace{\beta_P \tilde{T}}_I + \underbrace{\kappa_T \tilde{p}}_{II}, \quad (4.63)$$

onde I representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de temperatura sobre as flutuações de densidade, e II representa a ordem de grandeza dos efeitos das flutuações de pressão sobre as flutuações de densidade. Utilizando os valores listados nas páginas 52 e 53 para  $\beta_P$ ,  $\kappa_T$ ,  $T_0$ ,  $\wp_0$ ,  $P_0$ ;  $\tilde{u} = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\ell = 10 \text{ m}$ ,  $\tilde{T} = 1 \text{ K}$ , e (4.60)–(4.62), obtemos as seguintes estimativas:

água:  $I \sim 1,500 \times 10^{-04}$ ,  $II \sim 4,900 \times 10^{-07}$ ;

ar:  $I \sim 3,470 \times 10^{-03}$ ,  $II \sim 1,184 \times 10^{-05}$ .

O efeito das flutuações de pressão sobre as de densidade é cerca de 100 vezes (no ar) a 1000 vezes (na água) menor do que o efeito das flutuações de temperatura. Isso permite simplificar (4.14) com (4.63) para

$$\wp' \approx -\wp_r \beta_{P_r} T', \quad (4.64)$$

$$\langle \wp' \rangle \approx -\wp_r \beta_{P_r} \langle T' \rangle, \quad (4.65)$$

$$\rho \approx -\langle \wp \rangle \beta_{P_m} T. \quad (4.66)$$

Em (4.64)–(4.65), o coeficiente isobárico de expansão térmica é calculado em  $(T_r, P_r)$ :

$$\beta_{P_r} = \beta_P(T_r, P_r),$$

porque se trata das flutuações em torno do estado de referência; em (4.66), ele é calculado em  $(\langle T \rangle, \langle P \rangle)$ :

$$\beta_{P_m} = \beta_P(\langle T \rangle, \langle P \rangle),$$

porque se trata das flutuações turbulentas. Uma notação análoga vale para  $\kappa_T$ .

## 4.6 – A correlação pressão-temperatura

Ainda de (4.14), obtém-se

$$\frac{\rho}{\langle \wp \rangle} = -\beta_{P_m} T + \kappa_{T_m} p, \quad (4.67)$$

onde

$$|\kappa_{Tm} p| \ll |\beta_{Pm} \mathcal{T}|. \quad (4.68)$$

Multiplicando-se (4.67) por  $\mathcal{T}/\langle T \rangle$  e promediando-se,

$$\frac{\langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\langle \rho \rangle \langle T \rangle} = -\beta_{Pm} \frac{\langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle} + \kappa_{Tm} \frac{\langle p \mathcal{T} \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (4.69)$$

e pelos mesmos argumentos de ordens de grandeza de  $p$  e  $\mathcal{T}$ ,

$$|\kappa_{Tm} \langle p \mathcal{T} \rangle| \ll |\beta_{Pm} \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle|. \quad (4.70)$$

Utilizando (4.16)–(4.17), e os valores respectivos utilizados para estimar ordens de grandeza,

$$|\langle p \mathcal{T} \rangle| \ll \frac{1000 \langle \mathcal{T} \mathcal{T} \rangle}{T_0^2} P_0 T_0 \approx \frac{P_0 T_0}{100}. \quad (4.71)$$

Sob a validade da hipótese de Boussinesq, pressão e temperatura são muito fracamente correlacionadas (em termos das ordens de grandeza em (4.70); as flutuações de densidade respondem basicamente às flutuações de temperatura (densidade e temperatura são quase que perfeitamente anti-correlacionadas), e as flutuações de pressão respondem essencialmente ao campo de flutuações de velocidades, apenas.

## 4.7 – As ordens de grandeza da equação para a temperatura

Inicialmente, procuraremos escrever a equação da energia em uma forma que atenda a dois requisitos importantes:

1. Ser expressa em termos de grandezas mensuráveis *em princípio* (note que tanto (2.77) quanto (2.79) estão dadas em termos de funções termodinâmicas ( $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$ ) que não são diretamente mensuráveis).
2. Ter validade tanto para líquidos quanto para gases.

Para tanto, partimos de (2.79), e utilizamos (4.4) e (4.8) para exprimir  $D\mathcal{H}/Dt$ :

$$\begin{aligned} \wp \frac{D\mathcal{H}}{Dt} - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ c_p \frac{DT}{Dt} + \mathcal{V}(1 - \beta_P T) \frac{DP}{Dt} \right] - \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi, \\ \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &= \wp c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Daqui para a frente, uma *primeira* aproximação (no sentido da aproximação de Boussinesq) consistirá em supor que  $c_p$  é avaliado no estado hidrostático de referência. Com isso, poderemos supor  $c_p$  “constante” e mantê-lo fora das derivadas.

Para um gás ideal,  $\beta_P T \equiv 1$ , o que simplifica bastante a análise subsequente de (4.72); para água, entretanto,  $\beta_P T$  varia consideravelmente com a temperatura. Isso pode ser visto nas figuras 4.2 and 4.3, onde essa função está plotada para água à pressão atmosférica (<http://www.physchem.kfunigraz.ac.at/sm/Service/Water/H2Othermexp.htm>).

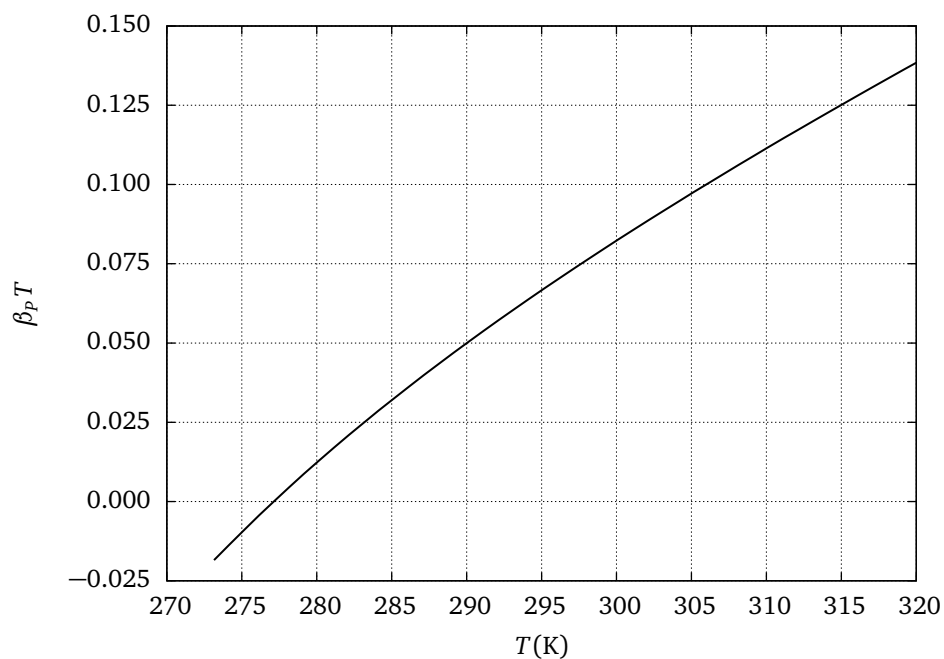


Figura 4.2: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida

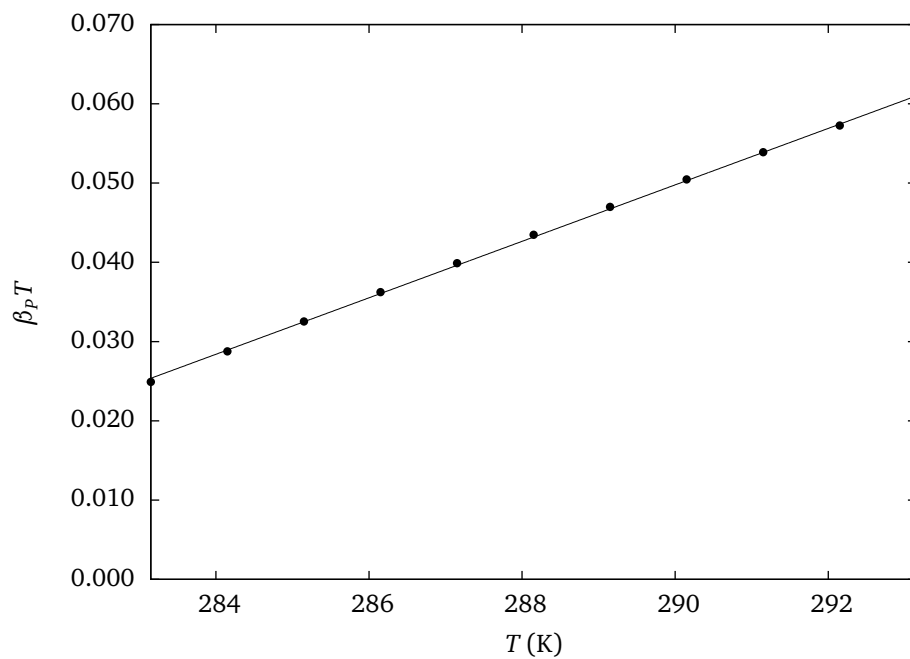


Figura 4.3: Dependência de  $\beta_P T$  com a temperatura para água líquida na faixa 10–20° C.



Para  $T_r$  na faixa 10–20° C (que é um exemplo razoável de condições encontradas em escoamentos de água líquida no ambiente), tem-se

$$\begin{aligned}
 (\beta_P T) &\equiv \phi(T) = \phi(T_r) + bT' \\
 &= \phi(T_r) + b\langle T' \rangle + b\mathcal{T} \\
 &= \phi(\langle T \rangle) + b\mathcal{T} \\
 &\approx \langle \phi(T) \rangle + b\mathcal{T} \\
 &= \langle \beta_P T \rangle + b\mathcal{T}.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

(pois  $\phi$  é aproximadamente linear), onde  $b = 0.00356 \text{ K}^{-1}$  é obtido por regressão linear através dos pontos na figura 4.3. O único objetivo de (4.73) é proporcionar uma base concreta sobre a qual estimativas de ordem de grandeza podem ser feitas.

Em seguida, nós aproximamos a densidade do lado direito por  $\wp_r$  (novamente, uma aproximação de Boussinesq) e utilizamos a equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
 \wp c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + T c_p \left[ \frac{\partial \wp}{\partial t} + \frac{\partial \wp U_j}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi; \\
 c_p \left[ \frac{\partial(\wp T)}{\partial t} + \frac{\partial(\wp T U_j)}{\partial x_j} \right] - \beta_P T \frac{DP}{Dt} &\approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi.
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Prosseguimos para promediar. A hipótese fundamental que simplificará extraordinariamente a álgebra é a ausência de correlação entre a temperatura e a pressão. Como acabamos de ver, para um gás  $\beta_P T \equiv 1$ , e nesse caso ficamos simplesmente com  $\frac{D\langle P \rangle}{Dt}$  no termo correspondente. Para água, devido à dependência de  $\beta_P$  com  $T$ , temos formalmente:

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle = \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle + b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle. \tag{4.75}$$

Estimativas da ordem de grandeza das correlações entre as flutuações de temperatura  $\mathcal{T}$  e os *gradientes* de pressão não estão diretamente disponíveis, mas parece muito razoável supor que elas não devem exceder as correlações entre pressão e temperatura, das quais temos uma excelente estimativa em (4.71) em termos dos valores ambientes (*i.e.*, “médios”) de  $P$  e  $T$ . Adotando essas estimativas em (4.75), devemos agora ter:

$$\begin{aligned}
 b &\sim \beta_P/10, \\
 \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle T \rangle}{100} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle, \\
 b \left\langle \mathcal{T} \frac{Dp}{Dt} \right\rangle &\ll \frac{\langle \beta_P T \rangle}{1000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \frac{1}{23000} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Os efeitos da correlação temperatura-(gradiente de pressão) na água são portanto desprezíveis, e adotamos

$$\left\langle \beta_P T \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle. \tag{4.76}$$

Com (4.76) em mãos, retornamos agora a (4.74) e promediamos:

$$c_p \left[ \frac{\partial \langle \wp T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \wp T U_j \rangle}{\partial x_j} \right] - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle; \tag{4.77}$$

Os termos do lado esquerdo são expandidos da maneira usual:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp T \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \wp \rangle \mathcal{T} + \rho \langle T \rangle + \rho \mathcal{T}] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle + \langle \rho \mathcal{T} \rangle];\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \wp T U_j \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle + \rho] [\langle T \rangle + \mathcal{T}] [\langle U_j \rangle + u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle T \rangle u_j + \langle \wp \rangle \mathcal{T} \langle U_j \rangle + \rho \langle T \rangle \langle U_j \rangle] \rangle \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle [\langle \wp \rangle \mathcal{T} u_j + \langle T \rangle \rho u_j + \langle U_j \rangle \rho \mathcal{T} + \rho \mathcal{T} u_j] \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle + \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle + \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle + \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle + \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle]\end{aligned}$$

Substituindo em (4.77),

$$\begin{aligned}c_p \left[ \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \right. \\ \left. \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle T \rangle \langle U_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \wp \rangle \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle T \rangle \langle \rho u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \right] \\ - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.\end{aligned}$$

Novamente, é possível simplificar essa expressão utilizando a equação da continuidade promediada, (4.45):

$$\begin{aligned}c_p \left[ \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right. \\ \left. \langle \wp \rangle \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \langle \wp \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \right] \\ - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p \nu_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle.\end{aligned}$$

O surgimento de vários termos envolvendo  $\langle \wp \rangle$  fora de derivadas permite, mais uma vez, usar (4.50) (na forma promediada, que utiliza (4.37)):

$$c_p \left[ \wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t} + \langle T \rangle \underbrace{\left\{ \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle \wp \rangle \langle U_j \rangle + \langle \rho u_j \rangle] \right\}}_{\equiv 0} \right] +$$

$$\begin{aligned} \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} + \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle)}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} \Big] \\ - \langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle \approx \wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right) + \langle \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Mais uma vez, expandimos  $\partial \langle \wp \rangle / \partial x_j$  usando (4.37):

$$\begin{aligned} \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\ \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \langle \mathcal{T} u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \mathcal{T} \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\ - \underbrace{\langle \beta_P T \rangle \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle}_{\text{IX}} \approx \underbrace{\wp_r c_p v_{\mathcal{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{X}} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_{\text{XI}}. \quad (4.78) \end{aligned}$$

Todos os termos de (4.78) estão prontos para uma análise de ordem de grandeza, exceto pelo ainda ligeiramente problemático termo IX. Aqui, observe que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DP}{Dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{D(P_r + P')}{Dt} \right\rangle \\ &= \left\langle U_j \frac{\partial P_r}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial P'}{\partial t} + U_j \frac{\partial P'}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial P_r}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t} + \left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j} + \left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \underbrace{\langle W \rangle \frac{\partial P_r}{\partial z}}_{\text{i}} + \underbrace{\frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial t}}_{\text{ii}} + \underbrace{\left\langle U_j \right\rangle \frac{\partial \langle P' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{iii}} + \underbrace{\left\langle u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right\rangle}_{\text{iv}} \quad (4.79) \end{aligned}$$

Em primeira aproximação,  $\langle W \rangle \approx 0$ . Uma análise de ordem de grandeza mais consistente com o que é feito usualmente em camadas-limite, utilizando a equação da continuidade (4.47), é supor  $\partial \langle U \rangle / \partial x \ll \partial \langle W \rangle / \partial z$ ; mais especificamente, utilizaremos a altura de escala  $D$  para estimar os gradientes horizontais de velocidade média (isso é, infelizmente, uma hipótese adicional):

$$\frac{\langle U \rangle}{D} \sim \frac{\langle W \rangle}{\ell} \Rightarrow \langle W \rangle \sim \frac{\ell}{D} \tilde{u} = \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u}.$$

Retornando a (4.79), descobrimos que todos os termos são da mesma ordem:

$$\begin{aligned} \text{i} &\sim \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 g = \frac{\tilde{p}}{\wp_0} \tilde{u} \wp_0 \frac{\tilde{p}}{\rho \ell} = \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\ \text{ii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \\ \text{iii} &\sim \frac{\tilde{p} \tilde{u}}{\ell}; \end{aligned}$$

$$\text{iv} \sim \frac{\tilde{p}\tilde{u}}{\ell} = \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}.$$

Em (i), usamos (4.62); (ii) e (iii) são simples. (iv) é obtido supondo-se que as flutuações turbulentas de velocidade e do gradiente de pressão são bem correlacionadas. À luz da equação não-promediada da quantidade de movimento (por exemplo, (4.49)), isso parece razoável e bastante natural, já que os gradientes de pressão por unidade de volume devem ser da mesma ordem que as acelerações. Na segunda igualdade de (iv), usamos (4.61).

Com isso, as ordens de magnitude de todos os termos de (4.78) estão estabelecidos:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{II} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{III} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{IV} &\sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{V} &\sim \tilde{T}\tilde{u} \frac{\wp_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VI} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{VIII} &\sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} \\ \text{IX} &\sim (\beta_{P_0} T_0) \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell} \\ \text{X} &\sim \wp_0 c_p \nu_T \frac{\tilde{T}}{\ell^2} = \wp_0 c_p \frac{\nu_T}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u}\ell} \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{PrRe}_\ell} \wp_0 c_p \frac{\tilde{T}\tilde{u}}{\ell}, \\ \text{XI} &\sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \end{aligned}$$

O parâmetro adimensional

$$\text{Ga}_0 \equiv \beta_{P_0} T_0 \quad (4.80)$$

é o número de Gay-Lussac; para o ar (como já vimos),  $\text{Ga}_0 \equiv 1$ ; para a água, um valor conservador para sua ordem de magnitude (vide Figura 4.2) é  $\beta_{P_0} T_0 \sim 0,1$ .

Claramente, I, III e IV são os termos dominantes; II, V, VI, VII, VIII, são todos da mesma ordem de magnitude, e bem menores; assim como X, uma vez que o número de Reynolds  $\text{Re}_\ell$  em escoamentos turbulentos é muito grande. IX e XI podem ser comparados com (I,II,IV) por meio do número turbulento de Eckart,

$$\text{Ec} \equiv \frac{\tilde{u}^2}{c_p \tilde{\tau}}; \quad (4.81)$$

obtemos

$$\text{I,III,IV} \sim \frac{1}{\text{Ec}} \wp_0 \tilde{u}^3 / \ell,$$

onde  $Ec = \mathcal{O}(10^{-3})$  tanto para ar quanto para água. Portanto,

$$I, II, IV \gg IX, XI.$$

Tanto para ar quanto para água, a equação simplificada para a temperatura termodinâmica  $T$  que se obtém com a aproximação de Boussinesq é

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \mathcal{T} u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\tilde{\mathcal{T}} \tilde{u}}{\ell} \right). \quad (4.82)$$

Observe que não houve necessidade, ainda, de introduzir a temperatura potencial: na região onde supomos que a aproximação de Boussinesq é estritamente válida,  $\ell/D \ll 1$ , é suficiente trabalhar com a temperatura termodinâmica  $T$ , mesmo no caso do ar.

#### 4.8 – A equação para a temperatura potencial

Uma formulação alternativa para a equação da energia utiliza o conceito de temperatura potencial. Para um gás ideal,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ , e (2.79) com (4.3) torna-se

$$\wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (4.83)$$

Utilizando a temperatura potencial introduzida em (4.25) e diferenciando,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{R}{c_p} \frac{dP}{P}, \\ \frac{1}{\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R}{c_p P} \frac{DP}{Dt}, \\ \frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} &= \wp c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{DP}{Dt}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Comparando (4.84) com (4.83), chegamos finalmente à equação para a energia interna em termos da temperatura potencial,

$$\frac{c_p P}{R\Theta} \frac{D\Theta}{Dt} = \wp c_p v_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (4.85)$$

O termo

$$\frac{c_p P}{R\Theta} = \frac{c_p P}{RT} \frac{T}{\Theta}$$

é muito proximamente igual a

$$\frac{c_p P}{RT} = c_p \wp;$$

de fato,

$$\frac{T}{\Theta} = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p} = \frac{T_0 - \frac{g}{c_p} z}{T_0} \approx \frac{287.15}{288.15} = 0.9966,$$

para  $T_0 = 288.15 \text{ K}$ ,  $g = 9.81 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $c_p = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  e  $z = 100 \text{ m}$ . Para  $z = 1000 \text{ m}$ , que é a ordem de grandeza da altura da camada-limite atmosférica, o valor acima muda

para 0.9661: ainda próximo de 1, mas com diferenças maiores do que 1%. Debaixo das hipóteses da aproximação de Boussinesq, portanto, podemos aproximar (4.85) por

$$\wp c_p \frac{D\Theta}{Dt} = \wp_r c_p \nu_\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi. \quad (4.86)$$

Podemos agora manipular o lado esquerdo de (4.86) exatamente como fizemos para ir de (4.74) até (4.78), só que com  $\Theta$  no lugar de  $T$ . Basta, portanto, copiar os termos dessa última com  $\Theta$  em lugar de  $T$ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta \rangle}{\partial t}}_{\text{II}} + \underbrace{c_p \wp_r \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{c_p \wp_r \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{IV}} + \\ & \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \wp_r}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{c_p \langle \theta u_j \rangle \frac{\partial \langle \wp' \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VI}} + \underbrace{c_p \frac{\partial (\langle U_j \rangle \langle \rho \theta \rangle)}{\partial x_j}}_{\text{VII}} + \underbrace{c_p \frac{\partial \langle \rho \theta u_j \rangle}{\partial x_j}}_{\text{VIII}} \\ & \approx \underbrace{\wp_r c_p \nu_\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} \right)}_{\text{IX}} + \underbrace{\langle \Phi \rangle}_{\text{X}}. \quad (4.87) \end{aligned}$$

Claramente, as mesmas escalas macroscópicas  $\tilde{\tau}$  e  $\ell$  aplicam-se a (4.87); as ordens de magnitude são:

$$\begin{aligned} \text{I} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ \text{II} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ \text{III} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ \text{IV} & \sim \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ \text{V} & \sim \tilde{\tau} \tilde{u} \frac{\wp_0}{D} = \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ \text{VI} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ \text{VII} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ \text{VIII} & \sim \tilde{\rho} c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \\ \text{IX} & \sim \wp_0 c_p \nu_\tau \frac{\tilde{\tau}}{\ell^2} = \wp_0 c_p \frac{\nu_\tau}{\nu_u} \frac{\nu_u}{\tilde{u} \ell} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} = \frac{1}{\text{PrRe}_\ell} \wp_0 c_p \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell}, \\ \text{X} & \sim \wp_0 \frac{\tilde{u}^3}{\ell}. \end{aligned}$$

Mantendo-se apenas os termos de maior ordem de magnitude, o resultado é uma equação análoga a (4.82):

$$\frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle \Theta \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \theta u_j \rangle}{\partial x_j} = \mathcal{O} \left( \frac{\tilde{\rho}}{\wp_0} \frac{\tilde{\tau} \tilde{u}}{\ell} \right). \quad (4.88)$$

A equação (4.88) é um pouco mais robusta e parcimoniosa de hipóteses do que (4.82): em particular, não precisamos nos preocupar com a interação entre os gradientes de pressão  $\partial P_r / \partial z$  e a velocidade vertical média  $\langle W \rangle$ : não precisamos supor portanto que  $\langle W \rangle \ll \langle U \rangle$ , e (4.88) é aplicável mesmo em regiões de alta velocidade vertical, como por exemplo dentro de térmicas. Por outro lado, continuamos restritos a  $\ell \ll D$ : na análise de escalas que estamos fazendo aqui, para a atmosfera,  $\ell \sim 1000$  m já está claramente violando aquela condição, e não há garantia (sob esse aspecto) de que as equações para as médias obtidas com a aproximação de Boussinesq valham para toda a camada-limite atmosférica.

# 5

## As equações de ordem 2

---

### 5.1 – Um teorema útil

**Teorema 1** Se  $u(\mathbf{x}, t; \omega)$  é um processo estocástico estacionário, então

$$\left\langle u \frac{du}{dt} \right\rangle = 0. \quad (5.1)$$

Prova: como o processo é estacionário,

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u^2 \right\rangle = 2 \left\langle u \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle. \quad (5.2)$$

A mesma dedução vale para as derivadas parciais em relação a  $x_i$ , donde

$$\left\langle u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (5.3)$$

### 5.2 – A dedução das equações de ordem 2

A partir de agora, nós vamos supor válidos a decomposição e os postulados de Reynolds:

$$U_i = \langle U_i \rangle + u_i, \quad (5.4)$$

$$\langle U_i U_j \rangle = \langle U_i \rangle \langle U_j \rangle + \langle u_i u_j \rangle, \quad (5.5)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial s}, \quad (5.6)$$

onde  $f$  é qualquer momento central e  $s$  é  $x_k$  ou  $t$ . A aproximação de Boussinesq complica a decomposição de Reynolds para  $\wp$ ,  $T$  (ou  $\Theta$ ) e  $P$ . Como antes,

$$\wp = \langle \wp \rangle + \rho, \quad (5.7)$$

$$P = \langle P \rangle + p, \quad (5.8)$$

porém agora vale também a decomposição de Boussinesq (4.30), (4.31), (4.32), (4.33), de modo que

$$\wp = \wp_r + \wp' = \langle \wp_r + \wp' \rangle + \rho = \wp_r + \langle \wp' \rangle + \rho \quad (5.9)$$



$$P = P_r + P' = \langle P_r + P' \rangle + p = P_r + \langle P' \rangle + p \quad (5.10)$$

$$T = T_r + T' = \langle T_r + T' \rangle + \mathcal{T} = T_r + \langle T' \rangle + \mathcal{T} \quad (5.11)$$

Subtraindo-se  $\wp_r$ ,  $P_r$  e  $T_r$  das equações acima, vê-se que as flutuações turbulentas são as flutuações *em relação às médias das flutuações dinâmicas*,  $\wp' = \langle \wp' \rangle + \rho$ ,  $P' = \langle P' \rangle + p$ ,  $T' = \langle T' \rangle + \mathcal{T}$ .

As equações com que vamos trabalhar são as equações de Navier-Stokes com a aproximação de Boussinesq :

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_k U_i}{\partial x_k} = -\delta_{i3} g \frac{\wp'}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l U_k - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k}. \quad (5.13)$$

Nessa última, o  $i$  entre parênteses significa “não somar em  $i$ ”. Ele também tem a estranha utilidade de que as equações deduzidas, devidamente interpretadas, também se aplicarão a escalares, seguindo uma notação utilizada por [Dias \(1994\)](#).

É importante notar que, estritamente falando, nós não mostramos que (5.12) se aplica a escoamentos naturais (por exemplo, na atmosfera, em rios, lagos e oceanos). O que nós realmente mostramos foi que  $\partial \langle U_k \rangle / \partial x_k \approx 0$ . No entanto, o que todo mundo faz em turbulência é utilizar (5.12); é o que faremos na sequência, mas com a advertência de que a realidade talvez seja mais complicada do que isso

Note que, em virtude de (5.12),

$$U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_i \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \frac{\partial (U_i U_k)}{\partial x_k}. \quad (5.14)$$

A média da equação da continuidade produz

$$\frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (5.15)$$

Substituindo a decomposição de Reynolds na equação dinâmica,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] = \\ & -\delta_{i3} g \frac{\langle \wp' \rangle + \rho}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l [\langle U \rangle_k + u_k] - \frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Note que a *média* de (5.16) destrói todos os termos que dependem linearmente de uma flutuação. O único “problema” é com os termos não-lineares:

$$\langle [(\langle U_i \rangle + u_i)(\langle U_k \rangle + u_k)] \rangle = \langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle, \quad (5.17)$$

donde se deduz de uma vez por todas as equações para as médias,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle U_i \rangle \langle U_k \rangle + \langle u_i u_k \rangle] = -\delta_{i3} g \frac{\langle \wp' \rangle}{\wp_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle U_k \rangle - \frac{1}{\wp_r} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle S_{ik} \rangle}{\partial x_k}. \quad (5.18)$$

O único termo “novo” é o fluxo cinemático turbulento  $\langle u_i u_k \rangle$ . Subtraindo (5.18) de (5.16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i \langle u_k \rangle + \langle U_i \rangle u_k + u_i u_k - \langle u_i u_k \rangle] = \\ - \delta_{i3} g \frac{\rho}{\varphi_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_k - \frac{1}{\varphi_r} \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

cujá pré-multiplicação por  $u_j$  dá

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle u_k \rangle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \delta_{i3} g \frac{u_j \rho}{\varphi_r} - 2\epsilon_{ilk} \omega_l u_j u_k - \frac{1}{\varphi_r} u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

É óbvio que uma equação igual a (5.20) vale se trocarmos os índices. Essas duas equações irmãs devem ser combinadas agora. Note que

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i u_j u_k}{\partial x_k} &= u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ &= u_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_j u_k}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j p}{\partial x_i} &= u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Rightarrow \\ \frac{\partial u_j p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i p}{\partial x_j} &= u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \\ u_j \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \frac{\partial (u_j p)}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_j} - p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

O trabalho com o termo viscoso é um pouco mais sofisticado; note que

$$\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j s_{ik}) = \nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \nu_{(i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} s_{ik}; \quad (5.24)$$

por simetria,

$$\nu_{(j)} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i s_{jk}) = \nu_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} + \nu_{(j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s_{jk}; \quad (5.25)$$

somando-se as duas, obtém-se o resultado importante:

$$\nu_{(i)} u_j \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \nu_{(j)} u_i \frac{\partial s_{jk}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu_{(i)} u_j s_{ik} + \nu_{(j)} u_i s_{jk}) - \left[ \nu_{(i)} s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \nu_{(j)} s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]. \quad (5.26)$$

A equação para os momentos de segunda ordem fica

$$\underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k}}_{\text{II}} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \underbrace{\langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k}}_{\text{V}} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{g}{\wp_r} (\delta_{i3} \langle u_j \rho \rangle + \delta_{j3} \langle u_i \rho \rangle)}_{\text{VI}} - \underbrace{2\omega_l [\epsilon_{ilk} \langle u_j u_k \rangle + \epsilon_{jlk} \langle u_i u_k \rangle]}_{\text{VII}} \\
& - \underbrace{\frac{1}{\wp_r} \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_j p \rangle \delta_{ik} + \langle u_i p \rangle \delta_{jk}]}_{\text{VIII}} + \underbrace{\left\langle \frac{p}{\wp_r} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle}_{\text{IX}} + \\
& \underbrace{2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu_{(i)} \langle u_j s_{ik} \rangle + \nu_{(j)} \langle u_i s_{jk} \rangle)}_{\text{X}} - \underbrace{2 \left[ \nu_{(i)} \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle + \nu_{(j)} \left\langle s_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]}_{\text{XI}}. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

### 5.3 – Energia cinética da turbulência

A contração de (5.27) produz a equação de transporte de (duas vezes a) energia cinética da turbulência,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_i \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k} = \\
- \frac{2g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle - 2\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle - \frac{2}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right] \\
+ 2\nu_{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_i s_{ik} \rangle + \langle u_i s_{ik} \rangle) - 2\nu_{(i)} \left[ \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle s_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Dividindo por 2 e utilizando (2.71) para o último termo acima,

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\langle U_k \rangle \frac{\partial \langle E_{ct} \rangle}{\partial x_k}}_{\text{II}} + \underbrace{\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_k}}_{\text{III}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \langle u_i u_i u_k \rangle}{\partial x_k}}_{\text{IV}} = \\
- \underbrace{\frac{g}{\wp_r} \langle u_3 \rho \rangle}_{\text{V}} - \underbrace{\epsilon_{ilk} \omega_l \langle u_i u_k \rangle}_{\text{VI}} - \underbrace{\frac{1}{\wp_r} \left[ \frac{\partial \langle u_i p \rangle}{\partial x_i} \right]}_{\text{VII}} \\
+ \underbrace{2\nu_{(i)} \frac{\partial \langle u_i s_{ik} \rangle}{\partial x_k}}_{\text{VIII}} - \underbrace{2\nu_{(i)} \langle s_{ik} s_{ik} \rangle}_{\text{IX}}. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Agora,

- I. é a derivada local de  $\langle E_{ct} \rangle$ ;
- II. é a derivada advectiva de  $\langle E_{ct} \rangle$ ;
- III. é (menos) o termo de produção por gradiente;
- IV. é (menos) o transporte turbulento de ECT;
- V. é a produção pelo fluxo de flutuabilidade,  $\langle u_3 \rho \rangle$ ;
- VI. é o efeito (sem nome) da rotação do referencial (em geral isso é desprezado);
- VII. é o termo de pressão (muito difícil de medir e de modelar)

- VIII. é o termo de transporte difusivo (nulo em uma integral sobre todo o escoamento, da mesma maneira que IV, mas de ordem de grandeza muito menor;
- IX. é  $\langle \mathcal{E}_{et} \rangle$  (em um escoamento incompressível).

## Referências Bibliográficas

---

- Batchelor, G. K. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:113–133.
- Batchelor, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Batchelor, G. K., Howells, I. D., e Townsend, A. A. (1959). Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 2. The case of large conductivity. *J. of Fluid Mech.*, 5:134–139.
- Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure*. John Wiley and Sons, New York, 2nd<sup>a</sup> edição.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (1960). *Transport phenomena*. John Wiley and Sons, New York.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, Oxford. 657 pp.
- Dias, N. L. (1994). *The structure of temperature and humidity turbulent fluctuations in the stable surface layer*. Tese de Doutorado, Cornell University, Ithaca, NY.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T. (1981). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Hauf, T., Finke, U., Neisser, J., Bull, G., e Stangenberg, J.-G. (1996). A ground-based network for atmospheric pressure fluctuations. *J. Atmos. and Ocean. Technol.*, 13:1001–1023.
- Hinze, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- James, B. R. (1981). *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers (in Russian). *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 30(299–303).

- Kolmogorov, A. N. (1991). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. Em Hunt, J. C. R., Phillips, O. M., e Williams, D., editores, *Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on*, volume 434 de *Proceedings A*, páginas 9–13. The Royal Society.
- Kundu, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- Lesieur, M. (1990). *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2nd<sup>a</sup> edição.
- Liggett, J. A. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Monin, A. S. e Yaglom, A. M. (1971). *Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence*, volume 1. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, New York, 3rd<sup>a</sup> edição.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds, O. (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186:123–164.
- Richardson, L. F. (1920). Some measurements of atmospheric turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. A* 221:1–28.
- Rosenthal, J. S. (2008). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Slattery, J. C. (1972). *Momentum, energy, and mass transfer in continua*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- Stull, R. (1988). *An Introduction to Boundary-Layer Meteorology*. Kluwer, Dordrecht.
- Tennekes, H. e Lumley, J. L. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Wyngaard, J. C. (2010). *Turbulence in the atmosphere*. Cambridge.