Exercices maths epitech

NICOLAS

TABLE DES MATIÈRES

1 PROBABILITÉS

1.1 1B

1.1.1 *Enoncé*

Le système occidental contient 12 notes. La gamme de do majeur contient 7 notes.

1) Si je joue un nombre n de notes au hasard, au bout de combien de notes ai-je joué au moins une note hors de do majeur avec une probabilité supérieure à 0.9 ? (toutes les notes sont équiprobables).

2) Soit X_n la variable aléatoire représentant le nombre de notes appartenant à do majeur parmi les n notes jouées. Quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

1.1.2 *Solution*

1) La probabilité d'avoir joué uniquement des notes de do majeur au bout de n notes jouées est $(\frac{7}{12})^n$. On appelle cet événement A_n.

L'événement B_n "avoir fait au moins une fausse note parmi les n notes jouées" est le complémentaire de l'événement A_n.

Sa probabilité est donc

$$P(B_n) = 1 - (\frac{7}{12})^n \tag{1}$$

On cherche donc n tel que $(\frac{7}{12})^n \leqslant 0.1$. On obtient que c'est vrai à partir de $n = 5$.

resultats.txt

```
i   p_no_error  p_error
1 : 0.5833333333333334  0.41666666666666663
2 : 0.34027777777777785  0.6597222222222221
3 : 0.1984953703703704  0.8015046296296295
4 : 0.11578896604938274  0.8842110339506173
5 : 0.06754356352880661  0.9324564364711934
6 : 0.03940041205847052  0.9605995879415294
7 : 0.022983573700774473  0.9770164262992256
8 : 0.01340708465878511  0.9865929153412148
9 : 0.007820799384291314  0.9921792006157086
```

2) C'est une loi binômiale de paramètre $p = \frac{7}{12}$, d'espérance np et de variance $np(1-p)$.

On peut vérifier le résultat manuellement sur les premières valeurs, $n = 1$, $n = 2$ par exemple.

1.2 1C

1.2.1 *Enoncé*

Une mesure contient 4 temps. On est en binaire. On place 3 croches dans la mesure. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes sur un temps ? on est équiprobable.

1.2.2 *Solution*

Pour mettre toutes les croches sur des temps il y a $\binom{4}{3}$ possibilités.

Or il y a $\binom{8}{3}$ façons de placer les croches dans la mesure.

Donc la probabilité est

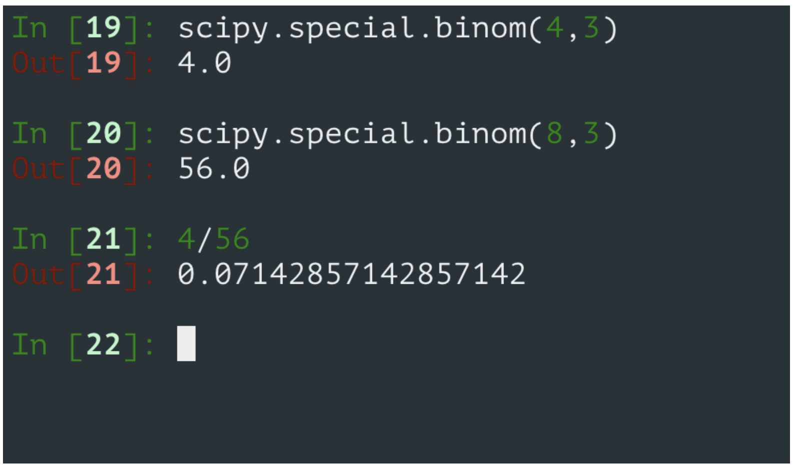

FIGURE 1 – croches

1.3 2C

1.3.1 *Enoncé*

Un ordinateur transmet un messsage avec un taux d'erreur de p. Un message est successivement transmis par n ordinateurs. Ce message est binaire, c'est donc 1 ou 0. S'il y a erreur dans la transmission, l'ordinateur $k+1$ reçoit l'inverse de ce qui avait été envoyé.

On suppose que le premier ordinateur veut transmettre 1. Quelle est la probabilité que l'ordinateur n reçoive 1 ?

1.3.2 *Solution*

On résout le problème par récurrence. Notons A_n l'événement "l'ordinateur n reçoit 1". Avec la formule des probabilités totales, on peut écrire $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(A_n)$, vu que A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de Ω.

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}|A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}|\overline{A_n})p(\overline{A_n}) \tag{2}$$

Ce qui donne

$$p_{n+1} = (1-2p)p_n + p \tag{3}$$

C'est une suite arithmético-géométrique. On peut étudier la suite $u_n + \frac{1}{2}$ qui vérifie :

$$u_{n+1} = (1-2p)u_n \tag{4}$$

Donc $\forall n \geqslant 1, u_n = (1-2p)^n u_0$.

Ce qui donne :

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n \tag{5}$$

2 DÉNOMBREMENTS

2.1 1A

2.1.1 *Enoncé*

1) Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \tag{6}$$

2) Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\} \tag{7}$$

2.1.2 *Solution*

Soit A cet ensemble.

On divise l'ensemble des couples quelconques d'entiers $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, noté D en trois groupes.

— $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$

— $B = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant i = j \leqslant n\}$

— $C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant i > j \leqslant n\}$

A et C on même cardinal. D est de cardinal n^2. B est de cardinal n. Comme A, B et C sont disjoints, $2|A| + n = n^2$.

Donc

$$|A| = \frac{n(n-1)}{2} \tag{8}$$

Remarque : on peut obtenir le résultat en considérant $\binom{n}{2}$ ou avec une sommation directe.

2) Il suffit de rajouter le cardinal de B, vu qu'il sont bien disjoints. ça donne :

$$\frac{n(n+1)}{2} \tag{9}$$

2.2 1C

2.2.1 *Enoncé*

On considère le quart de plan $\mathbb{N}^2$. On veut aller du point $(0,0)$ au point (p,q) en se déplaçant seulement d'une unité vers le haut ou vers la droite. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

2.2.2 *Solution*

On fait nécessairement $p+q$ mouvements, puisqu'on se déplace p fois vers la droite et q fois vers le haut.

Pour compter le nombre de possibilités, il suffit de choisir à quels moments on se déplace vers le haut (par exemple). Il faut donc choisir q mouvements parmi $p+q$ possibles.

Le résultat est donc

$$\binom{p+q}{p} \tag{10}$$

De façon équivalente on aurait pu prendre vers la droite, le résultat aurait été identique.

2.3 3A

2.3.1 *Enoncé*

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a+b+c = n$?

2.3.2 *Solution*

1) On représente un triplet solution par :

$$(.....) + (....) + (........) \tag{11}$$

La première parenthèse contient a points, la deuxième b, la troisième c. Le nombre de possibilité est le nombre possible de placement des signes $+$ dans $n+2$ places possibles.

Il y a donc $\binom{n+2}{2}$ possibilités.