Eine Formel zur Berechnung des Extremalpunkts des Graphen einer quadratischen Funktion in Normalform

N. Blunier

21. Juli 2022

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird eine Formel vorgestellt, mit der man die Extremstelle und den Extremwert des Graphen einer quadratischen Funktion in Normalform berechnen kann. Diese Formel wird hier hergeleitet.

1 Einleitung

Als momentan 16-jähriger Kantonsschüler hat man selbstverständlich nicht so viele Berührungspunkte mit Mathematik wie jemand, der sie studiert und über Jahre hinweg erforscht. Ich persönlich interessiere mich sehr für Mathematik und beschäftige mich damit entsprechendermassen mit ihr. Ich bin vor einigen Wochen darauf gekommen, wie man eine generelle Formel herleiten kann, mit der man die Extremstelle und den Extremwert einer berechnen kann. Das Ziel dieses dilettantischen Artikels ist, diese Formel und ihre Herleitung aufzuzeigen.

Dieser Artikel wird mit grösster Sicherheit einige Formfehler enthalten. Entschuldigung.

2 Herleitung der Formel

2.1 Zahlenbeispiel

Als Beispiel für eine quadratische Funktion in Normalform nehme ich

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$$

Ich isoliere die Konstante folgendermassen:

$$f(x) = (-\frac{1}{2}x^2 - 2x) - 3$$

Jetzt klammere ich den Koeffizienten von x^2 aus

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x) - 3$$

Mithilfe der ersten binomischen Formel kann ich schliessen, dass

$$f(x) = -\frac{1}{2}((x+2)^2 - 4) - 3$$

$$\iff f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 - 3$$

$$\iff f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$$

Somit habe ich die quadrtische Funktion, welche bisher in Normalform war, in Scheitelpunktform umgeformt. Man weiss also, dass Punkt $P(-2|-1)$ der Extremalpunkt des Graphen von f ist.

2.2 Übertragung auf allgemeine Funktionsgleichung

Als allgemeine quadratische Funktion in Normalform nehme man

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Man wendet nun dasselbe Verfahren wie beim Zahlenbeispiel von **2.1** an.

$$f(x) = (ax^2 + bx) + c$$

$$\iff f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$\iff f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}) + c$$

$$\iff f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Somit weiss man, dass der Punkt $P(-\frac{b}{2a}| - \frac{b^2}{4a} + c)$ der Extremalpunkt von f ist.

3 Schlussfolgerung

Für jede Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbf{R}$ und $a \neq 0$ gilt, dass ihr Extremalpunkt $P_f = P(-\frac{b}{2a}| - \frac{b^2}{4a} + c)$.