Investigação empírica dos comportamentos de um conjunto de autômatos finitos adaptativos

(21 Janeiro 2010)

Nicolau Leal Werneck

***Resumo*— Este artigo relata um experimento realizado com autômatos finitos adaptativos. Realizou-se uma varredura em um conjunto destes autômatos onde seus comportamentos individuais foram analisados. Cada autômato produziu uma sequência de números, e estas foram classificadas de acordo com suas regras de produção aritméticas. As estatísticas revelam quais comportamentos são os mais comuns neste conjunto, e quais são os mais complexos. Especial atenção foi dada para uma série específica que aparenta não possuir uma fórmula fechada, e possui apenas uma relação de recursão relativamente complexa. O artigo conclui com a proposta de pontos de partida para novos estudos, como a investigação dedicada de autômatos finitos adaptativos com máquinas anulares, e buscar responder questões mais teóricas, como a da possibilidade de prever-se o comportamento de um autômato sem executar sua simulação.**

***Palavras chave*— Autômatos finitos adaptativos (*adaptive finite automata*), séries numéricas, teoria dos números, sistemas dinâmicos.**

I. Introdução

ESTE artigo apresenta resultados de uma investigação empírica das possibilidades oferecidas por autômatos finitos adaptativos (AFAs). Este é um estudo realizado de um ponto de vista próximo ao de sistemas dinâmicos e teoria dos números, similar ao que também é feito no estudo de outros temas da ciência da computação, como os autômatos celulares.

Uma grande inspiração para esta pesquisa foi justamente o estudo de autômatos celulares realizado por Stephen Wolfram nos anos 1980. Uma das investigações realizadas por este pesquisador foi a varredura de todas as possíveis regras para autômatos celulares unidimensionais, binários, e com vizinhança de uma única célula para cada direção. Foram realizados testes para cada um dos autômatos possíveis, e a análise dos dados produzidos permitiu identificar o comportamento causado por cada diferente regra [1].

Muitos autômatos apresentaram apenas um comportamento trivial ou pouco interessante, como regimes estacionários ou ciclos muito curtos, porém alguns autômatos como as regras nomeadas 110 e 90 possuem comportamentos de características notáveis. Em 2004 foi apresentada uma prova de que a regra 110 possui poder de computação universal [2]. Este autômato é uma das entidades mais simples que se conhece a apresentar esta característica.

N. Werneck é membro do LTI da Escola Politécnica da USP, e recebe bolsa de doutorado da CAPES (e-mail: nwerneck@gmail.com).

Este artigo apresenta resultados de uma investigação semelhante realizada com autômatos finitos adaptativos. Assim como nos trabalhos de Wolfram e outros similares, foi criada uma forma de associar definições de AFAs com números inteiros, de forma que a seqüência de zero até um limite varresse um conjunto de máquinas com características semelhantes. O resultado da execução da máquina partindo de uma mesma configuração inicial foi então investigado para revelar que tipos de comportamentos podem ser encontrados, e com que frequência.

O alfabeto de entrada dos autômatos estudados é constituído por um único símbolo. Conforme a cadeia vai sendo consumida, uma máquina pode retornar ou não para o estado final, reconhecendo a cadeia naquele ponto. Se olharmos para o número de símbolos consumidos a cada momento que a máquina reconhece a entrada, podemos considerar que a máquina está reconhecendo números que pertencem a uma série, que estão sendo escritos em base unária na entrada da máquina.

Estas séries de números reconhecidas por cada máquina são o alvo principal das análises neste trabalho. Entre estas séries encontramos basicamente polinômios, expressões com exponenciais, e ainda séries periódicas. Algumas séries, no entanto, não podem ser descritas de maneira trivial. Apresentaremos com detalhes uma destas séries, para a qual foi determinada uma expressão apenas para a função de sua geração por recursão.

II. Metodologia

Os testes foram realizados com um programa criado a partir da biblioteca Adaptóide [3]. Os autômatos que esta biblioteca é capaz de simular possuem as seguintes características:

i. Transições da máquina podem ou não possuir uma função adaptativa associada, ativada no momento em que se verificam as condições para a transição.

ii. Cada função adaptativa pode ser aplicada antes ou depois da transição se realizar. Ou seja, podem ser definidas como do tipo "pré" ou "pós".

iii. Funções adaptativas são seqüências de ações adaptativas realizadas em ordem e de efeito imediato.

iv. Cada ação adaptativa comum é uma redefinição do destino de uma certa transição da máquina, e da função associada a esta transição.

v. Os estados só podem ser referenciados pelas ações adaptativas de forma relativa ao estado atual da execução da máquina. Para isto utiliza-se a máquina como um autômato finito comum. Listas de símbolos especificadas são consumidas partindo-se do estado atual da máquina, e o estado atingido ao final da lista é o estado referenciado.

vi. A criação de um novo estado é a segunda forma de função adaptativa. O último estado criado também pode ser referenciado nas ações adaptativas.

Estas características dos autômatos que podem ser simulados pela biblioteca Adaptóide foram ainda complementadas por mais restrições criadas para a realização dos testes. Os programas que foram estudados são todos os que possuem as seguintes características:

i. Exatamente duas funções adaptativas são definidas, rotuladas como 'F' e 'G'. Elas podem ser tanto de aplicação anterior quanto posterior à transição. Suas ações adaptativas são a criação de um estado novo ao princípio, seguida de duas definições de transição.

ii. Apenas quatro estados diferentes podem ser referenciados pelas ações adaptativas: o estado recém criado, o estado da máquina onde a função foi ativada, ou ainda os estados atingidos a partir deste por uma ou duas transições. As novas transições definidas podem ainda ser ou não associadas a uma das duas funções adaptativas.

iii. A execução principia com uma máquina de apenas um estado, que é um estado de aceitação, com uma transição para si mesmo associada à função adaptativa 'F'.

Existem no total $4 \times 4 \times 3$ ações adaptativas que podem ser realizadas. O quadrado deste número multiplicado por dois é o número de funções adaptativas possíveis, e o quadrado deste é o número de máquinas analisadas nesta pesquisa: 21.233.664. Em teste realizado com um computador de mesa moderno de potência considerável foi possível realizar uma análise superficial das máquinas a uma taxa de aproximadamente 40 por segundo. A varredura de todas as máquinas possíveis levaria portanto em torno de uma semana de execução ininterrupta.

III. Comportamentos observados

Nesta seção serão descritos os diferentes tipos de comportamento observados na análise das séries numéricas produzidas pelas máquinas estudadas.

A. *Regimes estacionários*

Um grande número das máquinas estudadas converge rapidamente para o estado inicial, aceitando assim todos os números ao menos a partir de um limite inferior, ou ainda deixa de retornar ao estado inicial, e não parece aceitar novamente qualquer outra entrada. Foram observadas nos testes apenas 100 transições, porém não há ainda prova formal de que este valor seria o suficiente para determinar com certeza se estas máquinas realmente entraram em estado estacionário apesar de não se observarem mais mudanças.

Algumas máquinas apresentaram transitórios relativamente longos antes de entrar em estado estacionário. Foram encontradas 4.787 máquinas em que o estado inicial foi visitado pela última vez após 10 transições, e antes de 20. Por outro lado, todas as máquinas encontradas que convergem para o estado inicial o fizeram em no máximo 10 transições.

B. *Osciladores*

Um grande número de máquinas oscila entre o estado inicial e outros, criando reconhecedores de números pares ou ímpares. Note que estamos sempre desconsiderando um possível período transitório inicial. Osciladores de três tempos também são bastante comuns, tanto com uma visita ao estado final a cada período, quanto com duas.

Máquinas estacionárias e osciladores de 2 e 3 tempos formam uma boa parte das máquinas estudadas. De todos os milhões de máquinas estudadas, menos de 215.000 não eram nem estacionárias nem osciladores de 2 ou 3 transições por período.

Foram encontrados ainda osciladores de 4 até 8 tempos, e ainda alguns de 10 e 16 tempos. A Tab. 1 apresenta quantas máquinas periódicas foram encontradas para cada período de oscilação, e em quantos diferentes tipos.

Período	Tipos	Quantidade
4	3	28.177
5	3	4.815
6	4	1.803
7	3	700
8	1	533
10	2	90
16	1	49

Tab. 1. Distribuição de osciladores encontrados.

A Fig. 1 apresenta o funcionamento do oscilador de 8 tempos. O quadrado pontilhado indica o estado atual da máquina em cada instante. Note como no quinto e no nono instantes um par de estados acaba sendo desligado da máquina. Estes estados permanecem na memória, mas jamais são acessados novamente. O nono instante corresponde ao primeiro, porém os estados excedentes sendo desligados no primeiro instante foram omitidos na Fig. 1 para fins didáticos.

C. *Sequências polinomiais*

Todas as máquinas encontradas que reconhecem séries aperiódicas funcionam de uma maneira semelhante. Após um período inicial as máquinas adquirem uma estrutura circular, e novos estados vão sendo acrescidos a este laço com o passar do tempo. Cada vez que a máquina retorna ao estado inicial, um número é reconhecido, que é o número de transições que ocorreram. A Fig. 2 ilustra a estrutura circular destas máquinas.

Uma técnica que se mostra sempre útil no estudo de séries numéricas é analisar as diferenças progressivas entre os números, ou os incrementos necessários para formar os números sucessores a partir de cada número da série. Nestes autômatos estudados estas diferenças muitas vezes possuem uma contrapartida digna de nota: elas se relacionam com tamanho em que se encontra a máquina ao fim de cada volta.

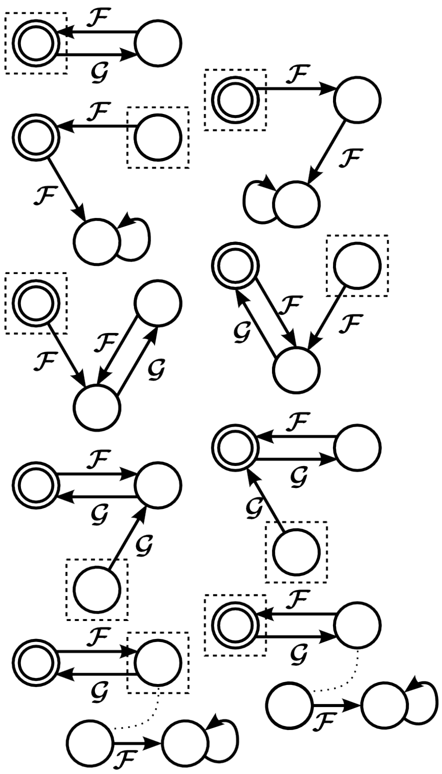

Fig. 1. Funcionamento do AFA oscilador de 8 tempos.

A classe de séries numéricas aperiódicas mais simples que foram encontradas foi a de polinômios. Uma das máquinas mais comuns é a capaz de reconhecer números triangulares, caracterizados por $f(n)=(n^2+n)/2$, ou $f(n)=f(n-1)+n$. A cada volta completa, ocorre nestas máquinas apenas o acréscimo de um único estado ao anel. Foram encontradas 69.366 máquinas que reconhecem séries triangulares, ou com variações simples tal como a adição de um valor constante.

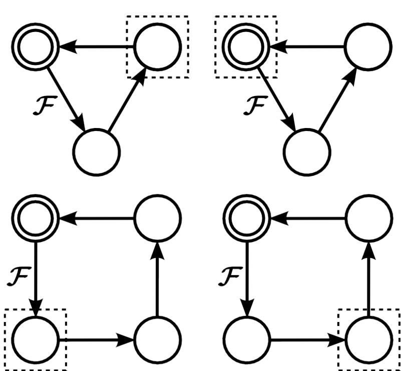

Fig. 2. Exemplo de AFA ligado a séries polinomiais. Um reconhecimento devido ao número triangular 6 ocorre no segundo momento.

Outras duas máquinas reconhecedoras de séries polinomiais foram também encontradas. Uma única máquina foi encontrada que reconhece os números da série dada por $f(n)=(n^2+7n)/2$. Ela também reconhece adicionalmente o número 1. Três máquinas também foram encontradas que reconhecem valores de polinômios de terceira ordem. Duas reconhecem o polinômio $(n^3+5n)/6$, e uma variante reconhece os valores subtraídos por 1.

D. *Seqüências exponenciais*

Outra classe de séries de números inteiros que foi encontrada com bastante frequência nesta pesquisa foi a de expressões envolvendo exponenciais. Máquinas que reconhecem as potências de 2 são bastante comuns, tendo sido encontradas 67.939 vezes na varredura. Algumas outras séries exponenciais encontradas foram séries como a integração dupla de 2^n acrescida de constantes, exponenciais na base 2 com cofatores como 3 e 10, e ainda exponenciais acrescidas de termos polinomiais.

Duas interessantes séries exponenciais encontradas merecem destaque. Uma delas é reconhecida por duas máquinas, que diferem pela função G ser do tipo pós em uma e pré em outra. Ela é dada pela fórmula

$$\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}\right]\Big/\sqrt{2}-1$$

Outras séries exponenciais interessantes encontradas foram $F(n)-n$ onde $F(n)$ indica a série de Fibonacci [4], e ainda esta mesma série com os valores incrementados por 1 [5].

E. *Seqüências inexatas*

Algumas das séries encontradas possuem valores que se aproximam de funções polinomiais ou exponenciais, porém são construídas de maneiras que impedem que valores exatos possam ser calculados. Dois tipos de séries com fórmulas inexatas foram encontrados.

O tipo mais comum são séries que possuem similaridades com máquinas de séries exponenciais ou polinomiais, porém há uma espécie de chaveamento que alternadamente habilita e desabilita o comportamento que fabricaria uma série correta. Isto pode ser verificado analizando-se as diferenças sucessivas dos valores da série. Ao invés de encontrar valores típicos, encontramos os valores típicos com repetições.

Uma outra classe de séries inexatas encontrada possui valores que se aproximam muito de uma função exponencial, porém o erro de arredondamento encontrado possui um aspecto errático, e não pode ser pré-determinado facilmente. Foram encontrados alguns milhares de máquinas que produzem tal tipo de comportamento, porém apenas uma foi estudada de forma mais aprofundada até o momento.

A Fig. 3 apresenta algumas das transições da máquina estudada. Cada cadeia nesta figura representa um instante de desenvolvimento da máquina. A estrutura é sempre circular, e a cadeia mostra a máquina aberta a partir do estado atual. Os quadrados indicam a função adaptativa associada a cada transição, e as arestas entre eles são os estados da máquina. O estado de aceitação é representado por uma aresta cortada.

A série correspondente a este AFA inicia com os valores:

0 2 5 9 15 24 38 59 90 137 207 312 470 707 1062...

Suas diferenças sucessivas são dadas por:

2 3 4 6 9 14 21 31 47 70 105 158 237 355

É possível ajustar uma função exponencial para aproximar estes valores, obtendo-se a fórmula $73/40\times(3/2)^n$. Os valores obtidos precisam porém ser arredondados para efetivamente produzir os valores de interesse.

Até o momento não foi encontrada uma fórmula fechada para realizar o cálculo dos números aceitos pela máquina, mas apenas relações de recursão. Pode-se apenas calcular o tamanho da máquina pela exponencial com arredondamento para todas iterações até o ponto de interesse, e então somar.

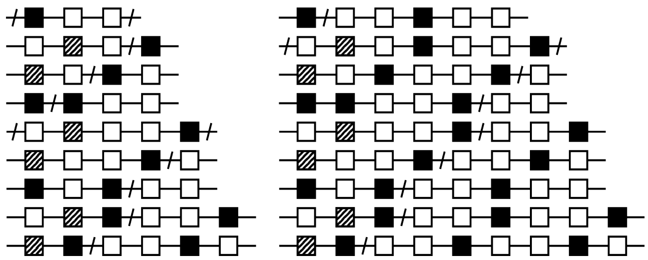

Fig. 3. Funcionamento da máquina exponencial inexata estudada. Os quadrados representam as funções adaptativas de cada transição. A aresta cortada indica um estado final.

O programa a seguir em Python calcula o tamanho da máquina a cada ciclo utilizando apenas com números naturais:

```
len,knot,n,k=(3, 3, 0, 0)
while True:
    if (len==knot):
        print len
        k+=1
    if (n%3==0): len+=1
    if (knot==1): knot = len
    elif (n%3!=0 ): knot-=1
    n+=1
```

Apenas incrementos e testes simples com álgebra modular são utilizados neste algoritmo. Apesar de ser mais sólida e possuir um aspecto mais elegante do que a fórmula com exponenciação e arredondamento, esta técnica exige não só que todos os valores do tamanho da máquina em cada volta sejam calculados para calcular a série, mas exige também que sejam calculados em ordem.

IV. Conclusões

Este artigo apresentou análises do comportamento de um grande grupo de autômatos finitos adaptativos que está sendo estudado exaustivamente. As máquinas foram geradas a partir de um gabarito em comum, variando-se parâmetros dentro de todas suas possibilidades. Cada máquina foi simulada a partir de um mesmo estado inicial, até a centésima transição, produzindo uma série de números inteiros característica que são os números das transições em que a máquina retornou ao estado inicial.

As séries encontradas até o momento puderam ser classificadas entre classes tradicionais que se estudam em Teoria dos Números, como séries periódicas, polinomiais e exponenciais. Foram ainda encontradas séries que não possuem fórmulas fechadas para seu cálculo, mas apenas fórmulas recursivas. Algumas destas fórmulas recursivas ainda se mostraram bastante complexas.

Entre as máquinas estudadas encontra-se um grande número poderiam ser facilmente reconhecidas como equivalentes. Por exemplo, toda a família de máquinas em que a função F jamais cria transições atreladas à função G independe da definição de G. Esta forma de independência se reflete justamente no número de máquinas diferentes que implementam um mesmo comportamento, dando uma noção do quão complexo aquele comportamento é. Máquinas mais simples podem ser implementadas de mais maneiras diferentes. Funções com poucas possibilidades de implementação possuem menos parâmetros independentes, e estão portanto explorando mais as possibilidades oferecidas pelo gabarito.

As análises realizadas aqui podem servir de ponto de partida para estudos maiores, com outras formas de gabarito, ou ainda estudos mais aprofundados das máquinas já avaliadas. O formato típico dos autômatos aperiódicos com anéis que crescem ao longo do tempo foi algo evidenciado nesta pesquisa e que poderia receber agora um estudo dedicado. Para tal seria útil determinar uma forma de gabarito que produza apenas máquinas com este comportamento, ou ainda um teste que determine *a priori* se uma a máquina é desta classe.

Outras melhorias ainda podem ser feitas nos próprios programas utilizados nas análises desta pesquisa. É preciso automatizar a classificação das séries entre estacionárias, periódicas, polinomiais, exponenciais e séries inexatas, e buscar igualmente maneiras de tentar prever este comportamento sem efetivamente emular o funcionamento do autômato. Estes desejos ainda suscitam naturalmente questionamentos de cunho teórico, como da própria possibilidade de se realizar este tipo de classificação *a priori*, e ainda da possibilidade de se construir automaticamente máquinas para reconhecer séries encomendadas.

Referencias

[1] S. Wolfram, "Statistical Mechanics of Cellular Automata.", Rev. Mod. Phys. 55, 601-644, 1983.

[2] M. Cook, "Universality in Elementary Cellular Automata", Complex Systems 15 (1) : p.1-40, 2004.

[3] N. Werneck, "Biblioteca para autômatos adaptativos com regras de transição armazenadas em objetos feita em C++", Segundo Workshop de Tecnologia Adaptativa, pp. 22–26, 2008.

[4] N. J. A. Sloane, Ed. (2008), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at www.research.att.com/~njas/sequences/, Sequence A001924

[5] N. J. A. Sloane, Ed. (2008), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Disponível em: http://www.research.att.com/~njas/sequences/, Sequence A065220