

Обзор статей про восстановление размытых изображений

Процесс искажения изображений можно представить в виде формулы

$$G(u,v)=H(u,v)*F(u,v)+N(u,v)$$

Где:

$G(u,v)$ - искаженное изображение

$H(u,v)$ -искажающая функция

$F(u,v)$ -искажаемое изображение

$N(u,v)$ -адаптивный шум

*-операция свертки

Некоторые модели шумов

1) Гауссов шум

Функция плотности распределения гауссовой случайной величины z задается выражением

$$p(z)= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Где: z – значение яркости

μ - среднее значение случайно величины z

σ -ее среднеквадратичное отклонение

2)Шум Релея

функция плотности распределения вероятностей шума Релея задается выражением

$$p(z)=\begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & \text{при } z \geq a \\ 0 & \text{при } z < a \end{cases}$$

где среднее и дисперсия имеют вид

$$\mu = a + \sqrt{\pi b/4}$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$

3)Шум Эрланга

$$p(z)=\begin{cases} \frac{a^b z^{(b-1)}}{(b-1)!} & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

где $a > 0$, b -положительное целое число

$$\mu = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

4)Экспоненциальный шум

$$p(z)=\begin{cases} a * e^{-az} & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

где $a > 0$

и среднее и дисперсия имеют вид

$$\mu = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

По сути, это распределение Эрланга с $b=1$

5)Равномерный шум

$$p(z)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ при } a \leq z \leq b \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

среднее значение и дисперсия равны

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

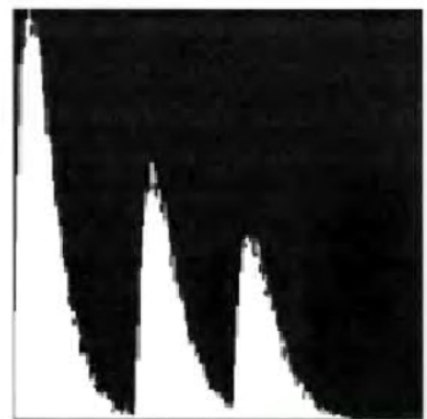
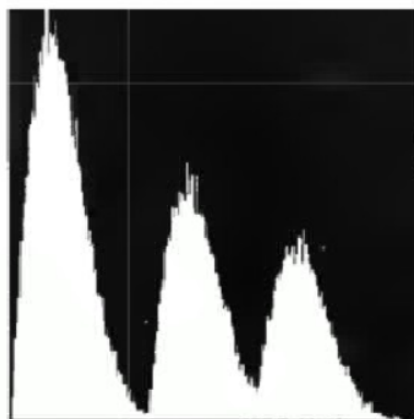
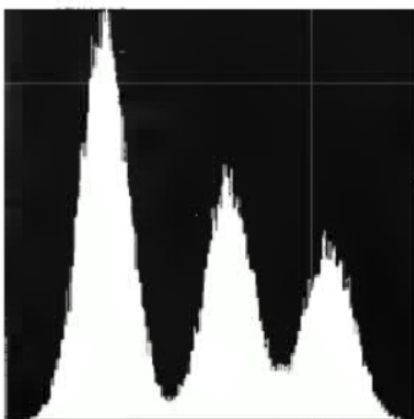
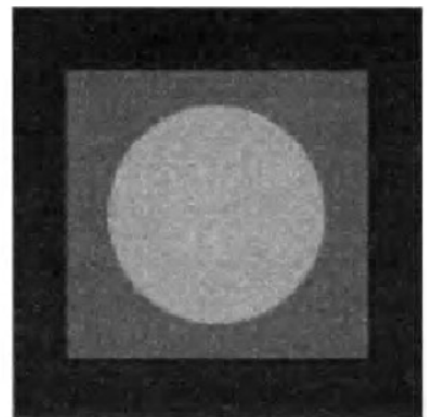
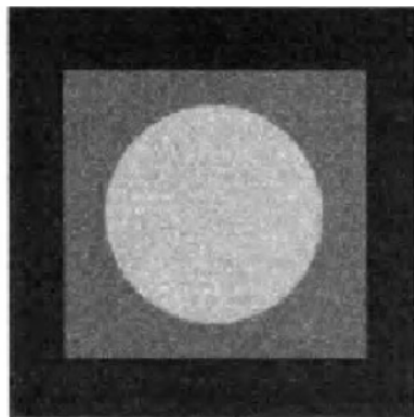
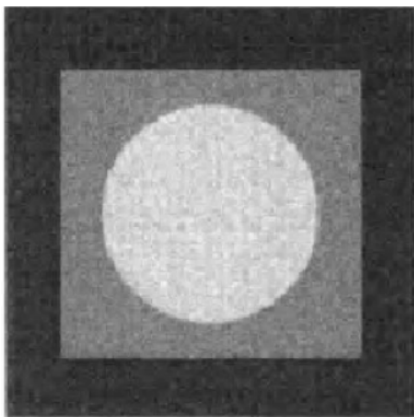
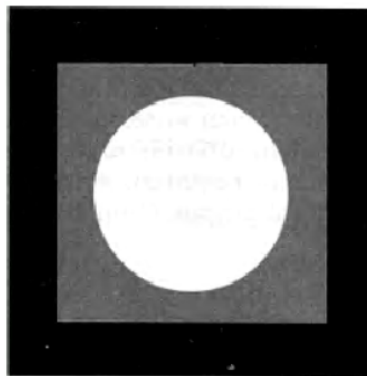
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

6)Импульсный шум

$$p(z)=\begin{cases} P_a, z=a \\ P_b, z=b \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Эти распределения представляют собой средства для моделирования искажений

Исходное изображение:



Гауссов шум

Релеевский шум

Гамма шум

Экспоненциальный шум

Равномерный шум

Импульсный шум

Если изображение искажалось только шумами, то его вид следующий

$$g(x) = f(x, y) + n(x, y)$$
$$G(u, v) = F(u, v) + N(u, v)$$

Для подавления шумов существуют разные фильтры, основанные на порядковых статистиках, т. е. В этих фильтрах считаются среднее, дисперсия, медиана и еще необходимые данные, и в зависимости от них изменяются значения согласно тому или иному фильтру.

Адаптивные фильтры

Существуют так же адаптивные фильтры, они так называются, т. к. их поведение меняется в зависимости от статистических свойств изображения внутри прямоугольной области $m \times n$ в окрестности S_{xy} .

Рассмотрим следующий фильтр:

$$\hat{f} = g(x, y) - \frac{\sigma_n^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L]$$

где

\hat{f} - восстановленное изображение
 $g(x, y)$ - искаженное изображение
 σ_n^2 - дисперсия по всему изображению
 σ_L^2 - дисперсия по окрестности S_{xy}
 m_L - среднее по окрестности S_{xy}

если дисперсия по окрестности больше дисперсии по всему изображению, то это отношение равно 1

Попытка реализовать этот фильтр на Python

```
def addapt_loc_filter():
    im=plb.imread("shema.jpg")
    bwi=make_black_white_im(im)
    n=7
    h=len(im[:])
    w=len(im[0,:])
    bw=np.zeros((h,w,3))
    bw[:, :, 0]=bwi
    bw[:, :, 1]=bwi
    bw[:, :, 2]=bwi
    plb.imsave("shema_wb.jpg", bw)
    d_gl=disp(bwi)
    print h,w
    for i in range(n/2, h-n/2):
        for j in range(n/2, w-n/2):
            m=mean(bwi[i-n//2:i+n//2+1, j-n//2:j+n//2+1])
            d=disp(bwi[i-n//2:i+n//2+1, j-n//2:j+n//2+1])
            k=0
            if (d< d_gl):
                k = 1
            else:
                k = float(d_gl)/d
            bw[i,j,0]=bwi[i,j]-k*(bwi[i,j]-m)
            bw[i, j, 1] = bwi[i, j] - k * (bwi[i, j] - m)
            bw[i, j, 2] = bwi[i, j] - k * (bwi[i, j] - m)
    plb.imsave("addapt_loc_filter/res6.jpg", bw)
```

Вычисление среднего

```
def mean(pix):
    a=np.sum(pix)
```

```
a/=float(pix.size)
return a
```

Вычисление дисперсии

def disp(pix):

```
m=mean(pix)
res=np.sum((m-pix)**2)
res=res*(1./pix.size)
return res
```

Оценка искажающей функции

Существует 3 основных методов оценки искажающей функции(ядра искажающего оператора)

- 1) визуальный анализ
- 2) эксперимент
- 3) математическое моделирование

1)Рассмотрим оценку на основе визуального анализа изображения

Предположим, что есть искаженное изображение, но информация об искажающей функции H отсутствует. Идея в том, чтобы оценить эту функцию непосредственно из изображения. Мы можем (наверное) рассмотреть ту область изображения, которая содержит полезный сигнал большой амплитуды. Используя яркости объекта и фона, мы приблизительно можем построить неразмытое изображение (наверное, но я такого не делал)

обозначим рассматриваемую область $g_{(x,y)}$ а построенное изображение как $\hat{f}_s(x, y)$

Тогда, предположив, что влияние шума пренебрежительно мало, с большим полезным сигналом, имеем

$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$

исходя из свойств функции $H_s(u, v)$ мы можем сделать вывод о полной искажающей функции $H(u, v)$, если использовать тот факт, что искажения предполагаются трансляционно-инвариантными

2) оценка на основе эксперимента

Если доступно такое же оборудование, которое использовалось при получении изображения, то, в принципе, можно получить точную оценку искажающей функции

Для начала надо подобрать параметры системы, чтобы искажения на получаемых с ее помощью изображениях как можно лучше соответствовали искажениям на изображении. Далее идя в том, чтобы сформировать импульсный отклик (ядро искажающего оператора), для чего надо получить изображение импульса, используя систему с подобранными операторами. Импульс симулируется яркой световой точкой. Чтобы уменьшить влияние шума, яркость должна как можно больше. Затем, учитывая, что фурье-преобразование импульса есть константа, получаем

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

Где $G(u, v)$ - фурье-преобразование полученного изображения

A- константа, описывающая величину яркости импульса

3) Оценка на основе моделирования

Модель искажения, возникающей при из-за турбулентности атмосферы

$$H(u, v) = \exp(-k(u^2 + v^2)^{5/6})$$

Где k - константа, описывающая турбулентное свойства атмосферы

Это выражение с точность до коэффициента $5/6$ совпадает по форме с выражением гауссова низкочастотного фильтра

Модель размытия, возникающей в результате равномерного поступательного движения изображения фотоаппарата или другого устройства.

Предположим, что $f(x, y)$ участвует в плоском движении и что функции $x_0(t), y_0(t)$ определяют закон движения в направлениях x и y соответственно. Полная экспозиция в любой точке записывающего устройства- это интеграл по времени от величины мгновенной экспозиции

$$g(x, y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt$$

где $g(x, y)$ – смазанное изображение

Фурье преобразование имеет вид

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt \right] e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Изменив порядок интегрирования

$$G(u, v) = \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0(t), y - y_0(t)) e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dx dy \right] dt = \int_0^T F(u, v) e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$
$$G(u, v) = F(u, v) \int_0^T e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

Используя ранее известную формулу $G(u, v) = F(u, v) H(u, v)$

Получим

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

Если нам известны функции $x_0(t), y_0(t)$, то мы можем легко вычислить искажающую функцию

Фильтрация методом минимизация среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)

Фильтр Винера является методом, соединяющий в себе учет свойств искажающей функции и статистических свойств шума в процессе восстановления. Метод основан на рассмотрении изображений и шума как случайных процессов, и задача ставится следующим образом: найти такую оценку \hat{f} для неискаженного изображения f чтобы среднеквадратичное отклонение этих величин было минимальным. Стандартное отклонение задается следующей формулой:

$$\sigma^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

Предполагается, что выполнены условия:

- 1) шум и неискаженное изображение некоррелированы между собой
- 2) либо шум, либо неискаженное изображение имеют нулевое среднее значение
- 3) оценка линейно зависит от искаженного изображения. При выполнении этих условий минимум среднеквадратичного отклонения достигается на функции, которая задается в частотной области выражением

$$\hat{F}(u, v) = \left(\frac{H'(u, v) S_f(u, v)}{S_f(u, v) |H(u, v)|^2 + S_n(u, v)} \right) G(u, v) = \left(\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_n(u, v) / S_f(u, v)} \right) G(u, v)$$

Где:

$H(u, v)$ - искажающая функция (ее частотное представление)

$H'(u, v)$ - комплексное сопряженное искажающей функции

$|H(u, v)|^2 = H'(u, v) H(u, v)$

$S_n = |N(i, v)|^2$ - энергетический спектр шума

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$ - энергетический спектр неискаженного изображения

$G(u, v)$ - фурье-преобразование искаженного изображения

Последнее равенство имеет место, из-за того, что произведение комплексного числа на комплексно-сопряженное равно квадрату модуля

Этот результат был получен Винером, и этот результат известен как оптимальная фильтрация по Винеру. Фильтр внутри скобок часто называют фильтром среднеквадратического отклонения или винеровским фильтром.

Когда спектр шума и неискаженного изображения неизвестно и не могут быть оценены, часто пользуются подходом, состоящий в предыдущего выражения следующим

$$\hat{F}(u, v) = \left(\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right) G(u, v)$$

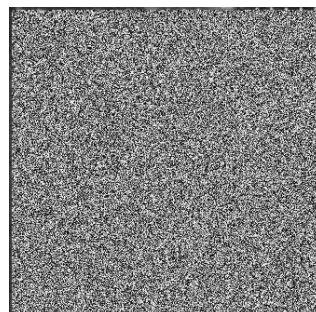
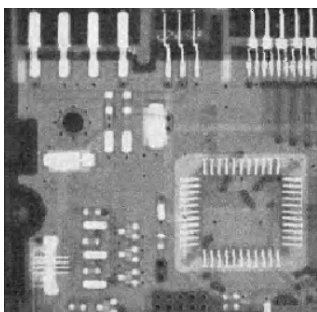
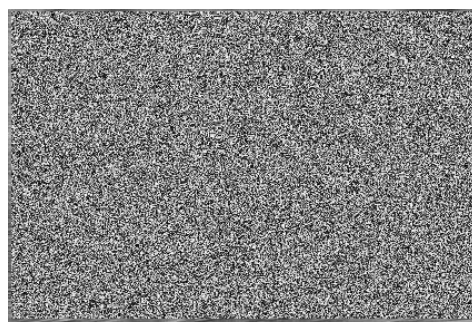
где K- определенная константа.

Регуляризация по Тихонову

Для этого метода надо знать среднее и дисперсию шума. Так же этот метод обладает тем свойством, что позволяет получить оптимальный результат для каждого конкретного изображения, к которому применяется.

$$\hat{F}(u, v) = \left(\frac{H'(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right) G(u, v)$$

// Кода еще нет, т. к. я не очень понял как все-таки получить оценку искажающей функции. А локальный адаптивный алгоритм работает мягко говоря, не очень



слева исходные изображения, справа «восстановленные»

Используемая литература

Вудс Р., Гонсалес Р. -Цифровая обработка изображений

<https://habrahabr.ru/post/136853/>

<https://habrahabr.ru/post/147828/>

<https://habrahabr.ru/post/152885/>

<https://habrahabr.ru/post/175717/>

http://courses.graphicon.ru/files/courses/vision/2010/cv_2010_02.pdf