

## Обзор статей про восстановление размытых изображений

Процесс искажения изображений можно представить в виде формулы

$$G(u,v)=H(u,v)*F(u,v)+N(u,v)$$

Где:

$G(u,v)$ - искаженное изображение

$H(u,v)$ -искажающая функция

$F(u,v)$  -искажаемое изображение

$N(u,v)$ -адаптивный шум

\*-операция свертки

### Некоторые модели шумов

#### 1) Гауссов шум

Функция плотности распределения гауссовой случайной величины  $z$  задается выражением

$$p(z)= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Где:  $z$  – значение яркости

$\mu$  - среднее значение случайно величины  $z$

$\sigma$  -ее среднеквадратичное отклонение

#### 2)Шум Релея

функция плотности распределения вероятностей шума Релея задается выражением

$$p(z)=\begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} & \text{при } z \geq a \\ 0 & \text{при } z < a \end{cases}$$

где среднее и дисперсия имеют вид

$$\mu = a + \sqrt{\pi b/4}$$

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$

#### 3)Шум Эрланга

$$p(z)=\begin{cases} \frac{a^b z^{(b-1)}}{(b-1)!} & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

где  $a>0$ ,  $b$  -положительное целое число

$$\mu = \frac{b}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$

#### 4)Экспоненциальный шум

$$p(z)=\begin{cases} a * e^{-az} & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

где  $a>0$

и среднее и дисперсия имеют вид

$$\mu = \frac{1}{a}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$

По сути, это распределение Эрланга с  $b=1$

### 5)Равномерный шум

$$p(z)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ при } a \leq z \leq b \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

среднее значение и дисперсия равны

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

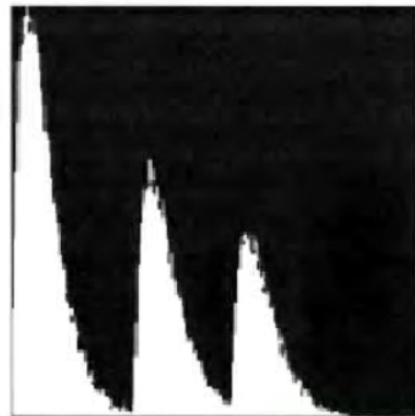
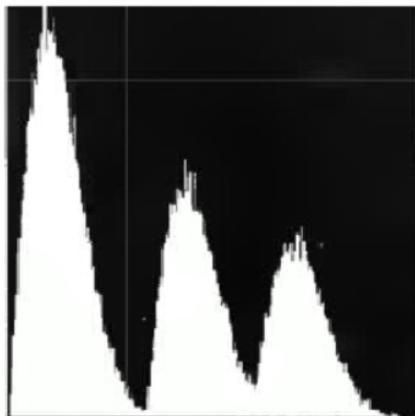
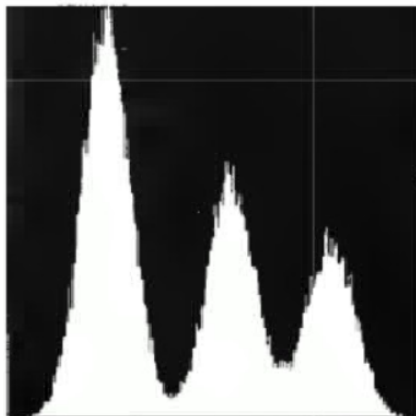
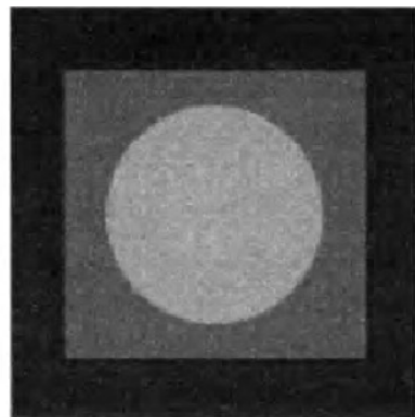
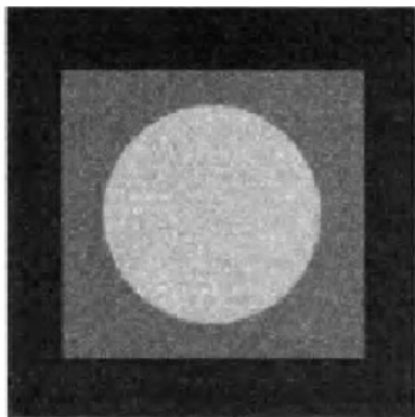
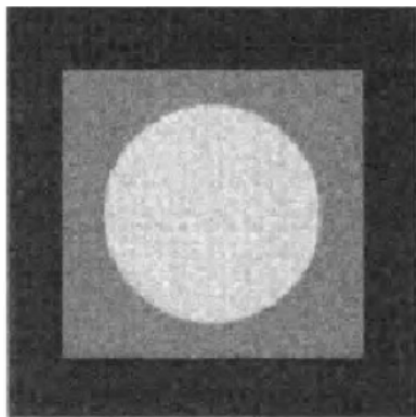
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 6)Импульсный шум

$$p(z)=\begin{cases} P_a, z=a \\ P_b, z=b \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Эти распределения представляют собой средства для моделирования искажений

Исходное изображение:



Гауссов шум

Релеевский шум

Гамма шум

Экспоненциальный шум

Равномерный шум

Импульсный шум

Если изображение искажалось только шумами, то его вид следующий

$$g(x,y)=f(x,y)+n(x,y)$$
$$G(u,v)=F(u,v)+N(u,v)$$

Для подавления шумов существуют разные фильтры, основанные на порядковых статистиках, т. е. В этих фильтрах считаются среднее, дисперсия, медиана и еще необходимые данные, и в зависимости от них изменяются значения согласно тому или иному фильтру.

## Адаптивные фильтры

Существуют так же адаптивные фильтры, они так называются, т. к. их поведение меняется в зависимости от статистических свойств изображения внутри прямоугольной области  $m \times n$  в окрестности  $S_{xy}$ .

Рассмотрим следующий фильтр:

$$\hat{f}=g(x,y)-\frac{\sigma_n^2}{\sigma_L^2}[g(x,y)-m_L]$$

где

$\hat{f}$  - восстановленное изображение  
 $g(x,y)$  – искаженное изображение  
 $\sigma_n^2$  - дисперсия по всему изображению  
 $\sigma_L^2$  - дисперсия по окрестности  $S_{xy}$   
 $m_L$  - среднее по окрестности  $S_{xy}$

если дисперсия по окрестности больше дисперсии по всему изображению, то это отношение равно 1

Попытка реализовать этот фильтр на Python

```
def addapt_loc_filter():
    im=plb.imread("olen.jpg")
    bwi=make_black_white_im(im)
    n=7
    h=len(im[:])
    w=len(im[0,:])
    bw=np.zeros((h,w,3))
    bw[:, :, 0]=bwi
    bw[:, :, 1]=bwi
    bw[:, :, 2]=bwi
    plb.imsave("olen_wb.jpg",bw)
    d_gl=np.var(bwi)
    for i in range(n/2,h-n/2):
        for j in range(n/2,w-n/2):
            m=np.mean(bwi[i-n//2:i+n//2+1,j-n//2:j+n//2+1])
            d=np.var(bwi[i-n//2:i+n//2+1,j-n//2:j+n//2+1])
            k=0
            if (d_gl>d):
                k = 1
            else:
                k = float(d_gl)/d
            bw[i,j,0]=bwi[i,j]-k*(bwi[i,j]-m)
            bw[i, j, 1] = bwi[i, j] - k * (bwi[i, j] - m)
            bw[i, j, 2] = bwi[i, j] - k * (bwi[i, j] - m)
    bw = np.uint8(bw)
    plb.imsave("addapt_loc_filter/res9.jpg",bw)
```

## Оценка искажающей функции

Существует 3 основных методов оценки искажающей функции (ядра искажающего оператора)

- 1) визуальный анализ
- 2) эксперимент
- 3) математическое моделирование

### 1) Рассмотрим оценку на основе визуального анализа изображения

Предположим, что есть искаженное изображение, но информация об искажающей функции  $H$  отсутствует. Идея в том, чтобы оценить эту функцию непосредственно из изображения. Мы можем (наверное) рассмотреть ту область изображения, которая содержит полезный сигнал большой амплитуды. Используя яркости объекта и фона, мы приблизительно можем построить неразмытое изображение (наверное, но я такого не делал)

обозначим рассматриваемую область  $g_{(x,y)}$  а построенное изображение как  $\hat{f}_s(x,y)$

Тогда, предположив, что влияние шума пренебрежительно мало, с большим полезным сигналом, имеем

$$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\hat{F}_s(u,v)}$$

исходя из свойств функции  $H_s(u,v)$  мы можем сделать вывод о полной искажающей функции  $H(u,v)$ , если использовать тот факт, что искажения предполагаются трансляционно-инвариантными

### 2) оценка на основе эксперимента

Если доступно такое же оборудование, которое использовалось при получении изображения, то, в принципе, можно получить точную оценку искажающей функции

Для начала надо подобрать параметры системы, чтобы искажения на получаемых с ее помощью изображениях как можно лучше соответствовали искажениям на изображении. Далее идея в том, чтобы сформировать импульсный отклик (ядро искажающего оператора), для чего надо получить изображение импульса, используя систему с подобранными операторами. Импульс симулируется яркой световой точкой. Чтобы уменьшить влияние шума, яркость должна как можно больше. Затем, учитывая, что фурье-преобразование импульса есть константа, получаем

$$H(u,v) = \frac{G(u,v)}{A}$$

Где  $G(u,v)$  - фурье-преобразование полученного изображения

$A$  - константа, описывающая величину яркости импульса

### 3) Оценка на основе моделирования

Модель искажения, возникающей при из-за турбулентности атмосферы

$$H(u,v) = \exp(-k(u^2 + v^2)^{5/6})$$

Где  $k$  - константа, описывающая турбулентные свойства атмосферы

Это выражение с точностью до коэффициента  $5/6$  совпадает по форме с выражением гауссова низкочастотного фильтра

Модель размытия, возникающей в результате равномерного поступательного движения изображения фотоаппарата или другого устройства.

Предположим, что  $f(x,y)$  участвует в плоском движении и что функции  $x_0(t), y_0(t)$

определяют закон движения в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Полная экспозиция в любой точке записывающего устройства - это интеграл по времени от величины мгновенной экспозиции

$$g(x,y) = \int_0^T f(x - x_0(t), y - y_0(t)) dt$$

где  $g(x,y)$  - смазанное изображение

Фурье преобразование имеет вид

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^T f(x-x_0(t), y-y_0(t)) dt \right] e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

Изменив порядок интегрирования

$$G(u, v) = \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0(t), y-y_0(t)) e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dx dy \right] dt = \int_0^T F(u, v) e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

$$G(u, v) = F(u, v) \int_0^T e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

Используя ранее известную формулу  $G(u, v) = F(u, v) H(u, v)$

Получим

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-i2\pi(ux_0(t)+vy_0(t))} dt$$

Если нам известны функции  $x_0(t), y_0(t)$ , то мы можем легко вычислить искажающую функцию

**Фильтрация методом минимизация среднеквадратического отклонения (винеровская фильтрация)**

Фильтр Винера является методом, соединяющий в себе учет свойств искажающей функции и статистических свойств шума в процессе восстановления. Метод основан на рассмотрении изображений и шума как случайных процессов, и задача ставится следующим образом: найти такую оценку  $\hat{f}$  для неискаженного изображения  $f$  чтобы среднеквадратичное отклонение этих величин было минимальным. Стандартное отклонение задается следующей формулой:

$$\sigma^2 = E\{(f - \hat{f})^2\}$$

Предполагается, что выполнены условия:

- 1) шум и неискаженное изображение некоррелированы между собой
- 2) либо шум, либо неискаженное изображение имеют нулевое среднее значение
- 3) оценка линейно зависит от искаженного изображения. При выполнении этих условий минимум среднеквадратичного отклонения достигается на функции, которая задается в частотной области выражением

$$\hat{F}(u, v) = \left( \frac{H'(u, v) S_f(u, v)}{S_f(u, v) |H(u, v)|^2 + S_n(u, v)} \right) G(u, v) = \left( \frac{1}{H(u, v) \frac{|H(u, v)|^2}{S_f(u, v)} + S_n(u, v)/S_f(u, v)} \right) G(u, v)$$

Где:

$H(u, v)$  - искажающая функция (ее частотное представление)

$H'(u, v)$  - комплексное сопряженное искажающей функции

$|H(u, v)|^2 = H'(u, v) H(u, v)$

$S_n = |N(u, v)|^2$  - энергетический спектр шума

$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$  - энергетический спектр неискаженного изображения

$G(u, v)$  - фурье-преобразование искаженного изображения

Последнее равенство имеет место, из-за того, что произведение комплексного числа на комплексно-сопряженное равно квадрату модуля

Этот результат был получен Винером, и этот результат известен как оптимальная фильтрация по Винеру. Фильтр внутри скобок часто называют фильтром среднеквадратического отклонения или винеровским фильтром.

Когда спектр шума и неискаженного изображения неизвестно и не могут быть оценены, часто пользуются подходом, состоящий в предыдущего выражения следующим

$$\hat{F}(u, v) = \left( \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right) G(u, v)$$

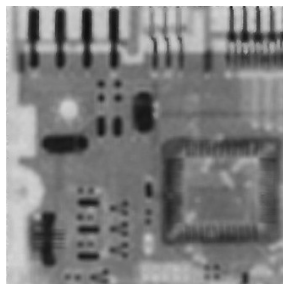
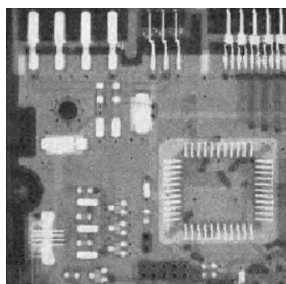
где K- определенная константа.

### Регуляризация по Тихонову

Для этого метода надо знать среднее и дисперсию шума. Так же этот метод обладает тем свойством, что позволяет получить оптимальный результат для каждого конкретного изображения, к которому применяется.

$$\hat{F}(u, v) = \left( \frac{H'(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right) G(u, v)$$

// Кода еще нет, т. к. я не очень понял как все-таки получить оценку искажающей функции. А локальный адаптивный алгоритм работает мягко говоря, не очень



слева исходные изображения, справа «восстановленные»

### Частотные методы улучшения

Хоть, по логике, эта тема должна была быть до обзора фильтра Винера, регуляризации по Тихонову, но так получилось, это не в моих силах. И чтобы лучше попробовать понять преобразования Фурье, на эту тему я так же решил попробовать написать, обзор, чтобы пропустить всю информацию сначала через мозг, а потом через руки.

После этого лирического отступления, хотелось бы сказать пару слов, формул о преобразованиях Фурье.

1) Прямое фурье-преобразование (фурье-образ)  $F(u)$  непрерывной функции одной переменной  $f(x)$  определяется равенством

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

где  $i$  - мнимая единица, ( $i^2 = -1$ )

Также по заданному фурье-преобразованию  $F(u)$  можно получить исходную функцию  $f(x)$  при помощи обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

Эти преобразования составляют **пару преобразований Фурье**, а входящие в них функции образуют **фурье-пару**.

Эти преобразования можно распространить и на функции от двух переменных

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

и аналогично для обратного преобразования

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv$$

Но т. к. изображения — это все-таки дискретные функции, нас интересуют именно они Фурье-преобразование дискретной функции одной переменной

$f(x)$ ,  $x=0, 1, 2, \dots, M-1$  задаются равенством

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-i2\pi ux/M}, u=0, 1, 2, \dots, M-1$$

Это **(прямое) дискретное преобразование Фурье (ДПФ)**

Также можно восстановить исходную функцию по заданному фурье-преобразованию при помощи **обратного ДПФ**

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{i2\pi ux/M}, x=0, 1, \dots, M-1$$

Множитель  $\frac{1}{M}$  часто ставится в формуле, определяющей обратное, а не прямое

преобразование Фурье. Реже оба равенства содержат  $\frac{1}{\sqrt{M}}$

Местоположение множителя не имеет значения. Единственное требование при

использовании двух множителей состоит в том, чтобы их произведение было равно  $\frac{1}{M}$

Эти формулы, хоть и просты, но очень важны

Используемая литература

Вудс Р., Гонсалес Р. -Цифровая обработка изображений

<https://habrahabr.ru/post/136853/>

<https://habrahabr.ru/post/147828/>

<https://habrahabr.ru/post/152885/>

<https://habrahabr.ru/post/175717/>

[http://courses.graphicon.ru/files/courses/vision/2010/cv\\_2010\\_02.pdf](http://courses.graphicon.ru/files/courses/vision/2010/cv_2010_02.pdf)