Nicolas Maldonado Baracaldo
201423809
n.maldonado10@uniandes.edu.co

Introducción a los Modelos Matemáticos en Gestión Financiera (MATE2714)

Rene Joaquin Meziat Velez

Proyecto 2

30 de noviembre de 2020

1. *Considere un activo cuyo precio sigue un camino aleatorio dado por: $dS = \mu S dt + \sigma S dX$ donde dX es una variable aleatoria con distribución normal de media nula y varianza dt (proceso de Wiener). Utilice un entorno computacional para simular este camino aleatorio con diferentes valores de la tendencia μ y de la desviación estándar σ, a partir de un precio inicial S_0. Usted debe realizar un programa que le permita al usuario cambiar estos parámetros y ejecutar la simulación para obtener otros posibles resultados.*

   Sol. Se escribió en `Wolfram Mathematica 12.1` la siguiente función que genera contenido dinámico

   $\textbf{Manipulate}\,[\textbf{If}\,[\sigma == 0, \textbf{Abort}[], S = \{S_0\}\,; i = 1;\ \textbf{SeedRandom}[2248];$

   $\textbf{While}[i < t/\textbf{dt}, \textbf{dX} = \textbf{RandomVariate}[\textbf{NormalDistribution}[0, \textbf{dt}]];\textbf{dS} = \mu S[[-1]]\textbf{dt} + \sigma S[[-1]]\textbf{dX};$

   $\textbf{AppendTo}[S, S[[-1]] + \textbf{dS}];i{+}{+}];$

   $\textbf{ListLinePlot}[S, \textbf{Frame} \to \textbf{True}, \textbf{Axes} \to \textbf{False}, \textbf{FrameLabel} \to \{\textbf{t}, \textbf{S}\}, \textbf{ImageSize} \to \textbf{Full}]],$

   $\{\mu, 0\}, \{\sigma, 1\}, \{S_0, 100\}\,, \{\{t, 20\}, 10, 1000\}, \{\{\textbf{dt}, 0{,}1\}, 0{,}01, 1\}]$

   cuyo resultado es una ventana que permite modificar todos los parámetros (algunos como entrada de texto directamente y otros mediante un slider dentro de un intervalo) y genera la gráfica resultante de dicho proceso. El estado inicial puede observarse en la figura 1

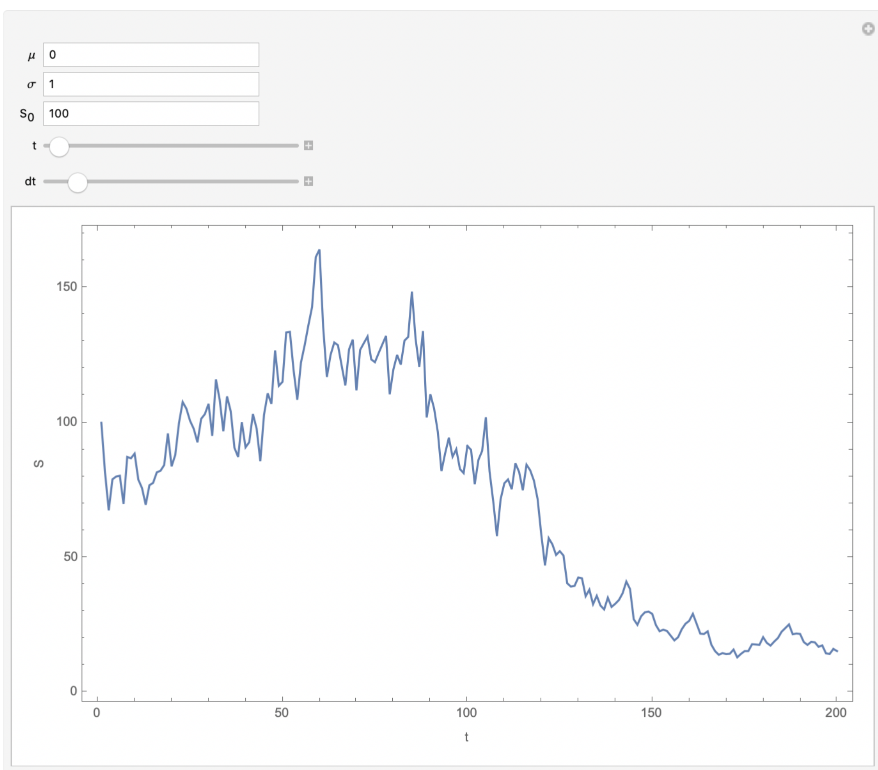

Figura 1: Estado inicial de la visualización del proceso de Wiener. Puede verse cómo los distintos parámetros son modificables por el usuario así como la gráfica que se genera.

2. *En un mercado bursátil se acuerda crear una opción llamada "call ventana", la cual funciona como una opción call europea que se puede ejercer solamente cuando el precio del activo S está en un rango de valores: $E_1 \leq S(T) \leq E_2$ al momento de la madurez (vencimiento) T, con un precio strike E, incluido en este intervalo. El precio S del activo subyacente se comporta como en el modelo de camino aleatorio dado en el ejercicio 1). Usted debe encontrar la fórmula de valoración $C = C(S,t)$ para valorar una opción ventana con parámetros T, E, E_1 y E_2. Para ello siga los siguientes pasos:*

   a) *Plantee la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes que rige el precio C. Esto hágalo paso a paso y en detalle riguroso, en términos de cálculo estocástico.*

   Sol. Tenemos que el precio S del activo obedecerá la ecuación de un camino aleatorio, $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, mientras que el precio C es una función de S y t, luego expandiendo en series de Taylor tenemos

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2,$$

   y en particular tenemos que dS está dado como antes y para el término dS^2 consideramos que $dt^2 \to 0$ y $dtdX \to 0$ pero $dX^2 = \mathcal{O}(dt)$, entonces podemos escribir

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dX) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt,$$

   y reordenando un poco los términos tenemos finalmente

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dX,$$

   esto sencillamente es el lema de Itô.
   Ahora queremos eliminar la aleatoriedad, para lo cual consideramos un portafolio $\Pi = C - \Delta S$ sin riesgo, es decir, queremos que su diferencial $d\Pi$ no tenga parte estocástica, vemos entonces la forma de este diferencial

$$\begin{aligned} d\Pi &= dC - \Delta dS \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dX - \Delta\left(\mu S dt + \sigma S dX\right) \\ &= \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \mu S\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]dt + \sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S} - \Delta\right)dX, \end{aligned}$$

   y es claro que para eliminar la parte estocástica sencillamente requerimos $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$, con lo cual

$$d\Pi = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt.$$

   Por otra parte, dado que por definición Π es un portafolio libre de riesgo, también debe ser que $d\Pi = r\Pi dt$ para una tasa libre de riesgo r, así

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC - rS\frac{\partial C}{\partial S},$$

   cosa que podemos reordenar en la forma más conocida de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

b) *Proponga las condiciones de frontera para C.*

Sol. Para imponer condiciones de frontera consideramos primero el mecanismo mediante el cual se ejerce la opción, i.e., si en el tiempo T se tiene $S(T) < E_1$ o $S(T) > E_2$ no se ejerce e inmediatamente tenemos $C(S,T) = 0$, mientras que si en el tiempo T se tiene $E_1 \leq S(T) \leq E_2$ se ejerce la opción y $C(S,T) = S(T) - E$. Luego consideramos lo que ocurre cuando $S(t) = 0$ y cuando $S(t) \to \infty$, si el valor del subyacente se anula, naturalmente tenemos $C(0,t) = 0$, mientras que si el valor del subyacente sobrepasa el valor de referencia E_2, debemos también escribir $C(S_\infty, t) = 0$. En resumen, tenemos las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} C(S,T) &= \begin{cases} 0, & S(T) < E_1 \\ S(T) - E, & E_1 \leq S(T) \leq E_2 \\ 0, & E_2 < S(T) \end{cases} \\ C(0,t) &= 0 \\ C(S_\infty, t) &= 0. \end{aligned}$$

c) *Transforme la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes para C en una ecuación de difusión y resuélvala analíticamente si es posible. Utilice la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar.*

Sol. Realizamos ahora un cambio de variables según

$$\begin{aligned} S &= Ee^x, \\ t &= T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}, \\ C(S,t) &= Ec(x,\tau), \end{aligned}$$

con lo cual tendremos los diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= E\frac{\partial c}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= -\frac{E\sigma^2}{2}\frac{\partial c}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= E\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} \\ &= \frac{E}{S}\frac{\partial c}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\frac{E}{S}\frac{\partial c}{\partial x} \\ &= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{E}{S}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial S} \\ &= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \\ &= \frac{E}{S^2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

y podemos reescribir la ecuación diferencial parcial como

$$-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) + r\frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0,$$

finalmente definiendo $k = \frac{r}{\sigma^2/2}$ podemos tenerla en la forma

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial c}{\partial x} - kc.$$

Habiendo realizado estas primeras transformaciones, realizamos una nueva transformación según

$$c(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau),$$

con la cual la ecuación será inicialmente más complicada

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u\right) + (k-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right) - ku,$$

pero puede ordenarse como

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + k - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\alpha^2 + \alpha(k-1) - \beta - k\right) u,$$

lo cual permite la estratégica escogencia de los parámetros α y β como

$$\alpha = \frac{1-k}{2},$$
$$\beta = -\frac{(k+1)^2}{4},$$

y así la ecuación no será más que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

la famosa ecuación del calor en una dimensión.

Por su parte las condiciones de frontera también han de transformarse según se transformó la ecuación, tenemos entonces

$$c(x,0) = \begin{cases} 0, & x < \log \frac{E_1}{E} \\ e^x - 1, & \log \frac{E_1}{E} \leq x \leq \log \frac{E_2}{E} \\ 0, & \log \frac{E_2}{E} < x \end{cases}$$

para la primera transformación y luego

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < \log \frac{E_1}{E} \\ e^{x-\alpha x} - e^{-\alpha x}, & \log \frac{E_1}{E} \leq x \leq \log \frac{E_2}{E} \\ 0, & \log \frac{E_2}{E} < x \end{cases}$$

para la segunda.

Una solución general de la ecuación de calor es la fdp de una variable aleatoria con distribución normal

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}},$$

y luego para satisfacer las condiciones de frontera buscamos que $u(x,0) = g(x)$ con $g(x)$ definida a trozos como se escribió antes. Notamos que para $\tau \to 0$ la fdp que tenemos se volverá una delta de Dirac por lo que finalmente tendremos la solución

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} g(s)ds,$$

que no es más que el valor esperado de $g(x)$ respecto a la distribución normal descrita anteriormente. Por último realizamos la integración aprovechando que $g(x)$ se anula en gran parte de la recta real,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \int_{\log\frac{E_1}{E}}^{\log\frac{E_2}{E}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} (e^{s-\alpha s} - e^{-\alpha s})ds \\
&= \int_{0}^{\log\frac{E_2}{E}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} (e^{s-\alpha s} - e^{-\alpha s})ds \\
&\quad - \int_{0}^{\log\frac{E_1}{E}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} (e^{s-\alpha s} - e^{-\alpha s})ds,
\end{aligned}$$

y simplificando mediante la transformación $s = x + \sqrt{2\tau}y$ tenemos

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (e^{x+\sqrt{2\tau}y-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)} - e^{-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)})dy \\
&\quad - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (e^{x+\sqrt{2\tau}y-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)} - e^{-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)})dy \\
&= \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{x+\sqrt{2\tau}y-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)}dy \\
&\quad - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)}dy \\
&\quad - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{x+\sqrt{2\tau}y-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)}dy \\
&\quad + \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\alpha(x+\sqrt{2\tau}y)}dy \\
&= \frac{e^{x-\alpha x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\sqrt{2\tau}y-\alpha\sqrt{2\tau}y}dy \\
&\quad - \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y}dy \\
&\quad - \frac{e^{x-\alpha x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{\sqrt{2\tau}y-\alpha\sqrt{2\tau}y}dy \\
&\quad + \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y}dy,
\end{aligned}$$

una última transformación análoga a la anterior nos da

$$
\begin{aligned}
u(x,\tau) = {} & \frac{e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-1)\sqrt{2\tau}-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw \\
& - \frac{e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\sqrt{2\tau}-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_2}{E}-x\right)+\alpha\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw \\
& - \frac{e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-1)\sqrt{2\tau}-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw \\
& + \frac{e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha\sqrt{2\tau}-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\log\frac{E_1}{E}-x\right)+\alpha\sqrt{2\tau}} e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw,
\end{aligned}
$$

lo cual nos permite escribir todo en términos de la fdc F de una normal estándar como

$$
\begin{aligned}
u(x,\tau) = {} & e^{-(\alpha-1)x+(\alpha-1)^2\tau}\left[F\left(\frac{\log\frac{E_2}{E}-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)-F\left(\frac{\log\frac{E_1}{E}-x}{\sqrt{2\tau}}+(\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right)\right] \\
& - e^{-\alpha x+\alpha^2\tau}\left[F\left(\frac{\log\frac{E_2}{E}-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)-F\left(\frac{\log\frac{E_1}{E}-x}{\sqrt{2\tau}}+\alpha\sqrt{2\tau}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Por último reversamos todas las transformaciones que se aplicaron a la ecuación diferencial parcial original para llegar a una solución de ésta

$$
\begin{aligned}
C(S,t) = {} & S\left[F\left(\frac{\log\frac{E_2}{S}-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F\left(\frac{\log\frac{E_1}{S}-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right] \\
& - Ee^{-r(T-t)}\left[F\left(\frac{\log\frac{E_2}{S}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-F\left(\frac{\log\frac{E_1}{S}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

d) *Dibuje claramente la superficie de la función $C = C(S,t)$ para diferentes valores de la tasa libre de riesgo y la volatilidad (sigma).*

   Sol. Se dibujó la superficie correspondiente a la función $C = C(S,t)$ para algunos valores distintos de σ y de r, las gráficas resultantes pueden verse en la figura 2.

3. *Utilizando la función de valoración $C = C(S,t)$ para opciones ventana sobre el subyacente S que usted calculó, componga un portafolio que incluya activos sin riesgo (a la tasa libre de riesgo), inversiones en el activo S e inversiones en la opción ventana sobre el subyacente representado por S. Para la composición de su portafolio, simule la evolución del valor de éste, empleando el módulo de simulación para S del problema 1) y la fórmula de valoración de la opción ventana. Considere diferentes valores para los parámetros de tasa libre de riesgo y volatilidad. Demuestre que esto hace el portafolio más seguro en general con varias simulaciones.*

   Sol.

4. *Enuncie y demuestre rigurosamente la fórmula de paridad call-put acorde a las lecturas.*

   Sol.

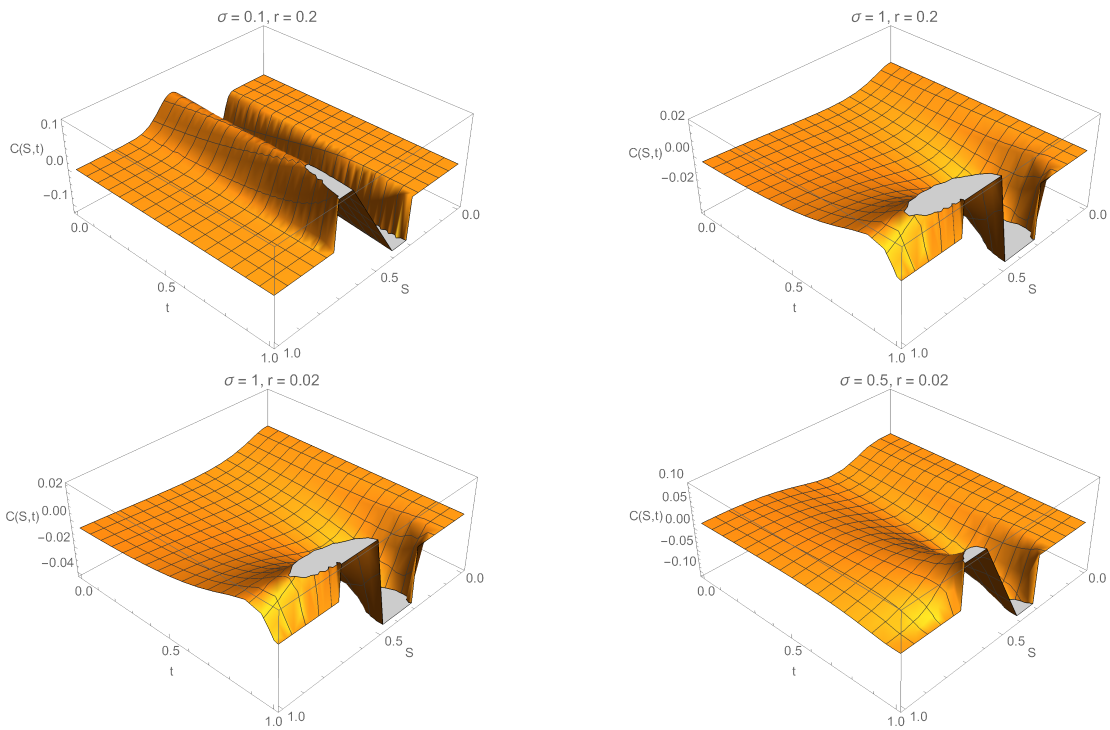

Figura 2: Superficies de la función $C = C(S, t)$.