



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μη-Γραμμικός Έλεγχος Στηριζόμενος σε
Δυναμικό Πρότυπο Τρικοπτέρου**

Συγγραφείς:
ΦΑΙΔΩΝ ΤΣΑΜΗΣ
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΑΝΘΑΤΗΣ

Επιβλέπων:
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΕΦΕΡΛΗΣ
Καθηγητής Α.Π.Θ



ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2020

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου, για την παρακολούθηση τροχιάς αναφοράς ύψους και προσανατολισμού ενός τρικόπτερου αεροχώματος κεκλιμένου στροφείου σε λειτουργία αιώρωσης.

Το πρώτο βήμα για την επίτευξη του παραπάνω στόχου αποτέλεσε η μοντελοποίηση των εξωτερικών δυνάμεων των ελικών που δρούν στο αερόχώμα, ενώ καταστρώθηκαν και οι κινηματικές εξισώσεις που το περιγράφουν. Επιπλέον, έγινε μία βασική μοντελοποίηση των κινητήρων με τους οποίους είναι εξοπλισμένο το τρικόπτερο. Στην συνέχεια, σχεδιάστηκε ένας αρχικός ελεγκτής, ο οποίος βασίζεται στην γραμμικοποίηση με ανάδραση, για την επίτευξη των επιθυμητών αποκλίσεων των μεταβλητές εξόδου με τις τροχιές αναφοράς. Αφού παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με την συγκεκριμένη μέθοδο, μοντελοποιούνται δύο είδη διαταραχών. Έτσι, συγκρίνεται η επίδοση του ελεγκτή με την παρουσία και μη, των διαταραχών. Για την εξασθένιση των διαταραχών, συντίθεται ένας γ- υποβέλτιστος ελεγκτής βασισμένος στο Bounded Real Lemma. Με αυτήν την διαδικασία ελαχιστοποιήθηκαν τα μόνιμα σφάλματα, ενώ ενισχύθηκε η ευρωστία του ελεγκτή.

Στα αποτελέσματα, μετά από μία σειρά προσομοιώσεων, επιβεβαιώνεται η επίδοση του ελεγκτή και η επιτυχία του ως προς την αντιμετώπιση των διαταραχών. Επιπλέον, παρουσιάζεται και η πειραματική διάταξη, που κατασκευάστηκε για την εκτέλεση αρχικών πειραμάτων, τα οποία, δυστυχώς, συμπίπτουν χρονικά με την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας και δεν παρουσιάζονται.

Abstract

The subject of the present diploma thesis is the design of a control system, for the trajectory tracking of the altitude and the orientation of a tilt-rotor tricopter at the state of hovering.

The first step towards the above goal was the modelling of all external forces of the propellers applied on the tricopter, followed by the derivation of the kinematic equations that describe the vehicle's motion. Furthermore, the dynamic behavior of the motors with which the tricopter is equipped, was also characterized. Then, an initial control system was developed, which is based on the feedback linearization technique, to achieve the desired error dynamics of the output states. After the presentation of the results of the specific methodology, two types of disturbances are modelled and their impact is presented, in comparison with the previous results. For the disturbance cancellation, the initial control is expanded with the construction of a γ -suboptimal controller based on the Bounded Real Lemma. With the complete controller, minimization of the trajectory tracking error and increase of the robustness of the controller is achieved.

On the results chapter, after a series of simulations, the theoretical performance of the controller and its success on cancelling disturbances is verified. Moreover, the experimental platform is presented, that was construct for future implementations of the developed control system.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σεφερλή, που ενθαρρύνοντας μας να ασχοληθούμε με το συγκεκριμένο αντικείμενο, μας έδωσε την ευκαιρία να έρθουμε σε επαφή με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Επίσης, ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη οφείλουμε στον Υποψήφιο Διδάκτορα κ. Κώστα Γερμακόπουλο, από τον οποίο δεχθήκαμε σημαντική υποστήριξη σε ό,τι αφορά την θεωρία καθώς και την υλοποίηση της. Ακόμη, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Υποψήφιο Διδάκτορα κ. Παύλο Καπαρό-Τσάφο, από την ερευνητική ομάδα Μη-Επανδρωμένων Αεροχημάτων (UAV-iRC), για την συνεχή προθυμία του για βοήθεια. Τέλος, οι αληθινές ευχαριστίες οφείλονται στις οικογένειές μας, που υπήρξαν στήριγμα σε όλη την φοιτητική μας πορεία.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	1
Διατύπωση Προβλήματος και Στόχοι	2
Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	2
2 Μοντελοποίηση Τρικόπτερου	4
2.1 Εισαγωγή	4
2.2 Κινηματική	4
Γωνίες Euler	4
Μπτρώα Περιστροφής	7
2.3 Κινητική	8
2.4 Απεικόνιση Μεταβλητών Ελέγχου - Δυνάμεων	10
2.5 Αφινική Δομή Συστήματος	12
2.6 Μοντελοποίηση Φορτίων Ελίκων	13
2.7 Μοντελοποίηση Κινητήρων	18
3 Πειραματική Διάταξη	20
3.1 Σχεδιασμός	20
3.2 Ανάλυση ζεύγους Κινητήρων - Ελίκων	23
4 Σχεδιασμός Ελεγκτή	27
4.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο	27
4.2 Μη-Γραμμικός Ελεγκτής	30
Στάθμιση Ελεγκτή	32
Αποτελέσματα	33
4.3 Εισαγωγή Διαταραχών	36
Μόνιμες Διαταραχές	36
Διαταραχές στην Έλικα	36
4.4 Εξασθένιση Διαταραχών	37
Σύνθεση Ελεγκτή	42
5 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	44
6 Συμπεράσματα & Μελλοντικές Προεκτάσεις	49
Βιβλιογραφία	49

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι τεχνολογικές εξελίξεις, που παρατηρούνται τα τελευταία έτη, έχουν οδηγήσει στην ευρεία διάθεση παλαιοτέρα απρόσιτων προϊόντων. Συγκεκριμένο παράδειγμα αποτελεί η τεχνολογία των εναέριων ρομποτικών συστημάτων και, ειδικότερα, των μη-επανδρωμένων αεροχημάτων (MEA), η οποία συνιστούσε προνόμιο των πολεμικών βιομηχανιών μέχρι πριν μερικά χρόνια. Πλέον, αποτελεί μία από τις πιο έντονα αναπτυσσόμενες αγορές παγκοσμίως, με συνεχώς εντονότερο ενδιαφέρον και από τους ακαδημαϊκούς χώρους.

Το ενδιαφέρον αυτό, δικαιολογείται από την πληθώρα εφαρμογών, που μπορούν να ικανοποιήσουν τα MEA, εφαρμογές όπως χαρτογράφηση και αεροβιντεοσκόπηση, περιβαλλοντικές και κλιματικές μετρήσεις, αποστολές ανθρωπιστικού χαρακτήρα, γεωργία ακριβείας καθώς και εφαρμογές ασφάλειας και παρακολούθησης.

Τα MEA συναντώνται σε διάφορες διατάξεις, με κύριες τα πολυκόπτερα (MultiCopters), τα σταθερής πτέρυγας (Fixed-Wing) και τα υβριδικά. Τα πολυκόπτερα αεροχήματα δίνουν την δυνατότητα κίνησης μεγάλης ακρίβειας, καθώς και την δυνατότητα εκτέλεσης πολύπλοκων ελιγμών. Υστερούν, ωστόσο, σε οικονομική κατανάλωση, με αποτέλεσμα την μειωμένη αυτονομία. Τα MEA σταθερής πτέρυγας, εκμεταλλευόμενα τον αεροδυναμικό τους σχεδιασμό, επιτυγχάνουν μικρή κατανάλωση ενέργειας και συνεπώς μεγάλη αυτονομία. Ωστόσο, παρουσιάζουν μειωμένες δυνατότητες σε ελιγμούς σε σύγκριση με τα πολυκόπτερα. Τέλος τα υβριδικά συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά των δύο παραπάνω διατάξεων, επιτυγχάνοντας μεγάλους χρόνους πτήσης και σημαντική ευελιξία.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος "Αυτόνομο φορητό σύστημα μη-επανδρωμένου αεροχήματος πολλαπλών ρόλων, MULTIROLE PORTABLE UAS "MPU""". Το συγκεκριμένο ερευνητικό πρόγραμμα έχει ως στόχο την μελέτη και κατασκευή ενός μη-επανδρωμένου αεροχήματος, υβριδικής διάταξης VTOL (Vertical Takeoff and Landing), το οποίο εκτελεί την κύρια πτήση του ως αερόχημα σταθερής πτέρυγας, ενώ λειτουργεί ως τρικόπτερο για τις διαδικασίες προσγείωσης και απογείωσης.



Σχήμα 1.1 Αυτόνομο φορητό σύστημα μη-επανδρωμένου αεροχήματος πολλαπλών ρόλων, (MPU)

Διατύπωση Προβλήματος και Στόχοι

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής είναι ο σχεδιασμός και η υλοποίηση ενός συστήματος ελέγχου, για την αυτόματη καθοδήγηση του προαναφερόμενου αεροχήματος, σε μία προδιαγραμμένη τροχιά, με επιθυμητή ευστάθεια και σθεναρότητα, για την αιώρηση του ως τρικόπτερο.

Για την επίτευξη των παραπάνω στόχων, ακολουθείται η εξής διαδικασία

- Κινηματική και κινητική ανάλυση του τρικόπτερου στο χώρο για την μοντελοποίηση της δυναμικής του συμπεριφοράς.
- Ανάπτυξη και εφαρμογή ενός συστήματος μη-γραμμικού ελέγχου για την ικανοποίηση των στόχων.
- Σχεδιασμός και κατασκευή πειραματικής διάταξης.
- Πειραματική εφαρμογή και ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Το τρικόπτερο, που εξετάζεται σε αυτήν την εργασία, είναι εξοπλισμένο στους δύο από τους τρεις κινητήρες, με υπχανισμό, ο οποίος επιτρέπει την περιστροφή του συστήματος έλικα-κινητήρας ως προς το κύριο σώμα του αεροχήματος. Συνήθως, επιλέγεται άρτιος αριθμός ελίκων, με σκοπό την αλληλοαναίρεση των αναπτυσσόμενων ροπών αντίδρασης. Στην περίπτωση μας, λόγω περιπτού αριθμού ελίκων, οι υπχανισμοί περιστροφής επιτυγχάνουν την εξάλειψη εναπομεινάντων ροπών. Η συγκεκριμένη διάταξη στην βιβλιογραφία αναφέρεται ως αερόχημα κεκλιμένου στροφείου (tiltrotor).

Το αντικείμενο των πολυκοπτέρων κεκλιμένου στροφείου, λόγω της χρησιμότητας που παρουσιάζουν έχουν προσελκύσει το ενδιαφέρον του επιχειρηματικού και του ακαδημαϊκού κόσμου. Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορες θεωρίες ελέγχου που εφαρμόζονται.

Στην εργασία [12], το σύστημα γραμμικοποιείται γύρω από ένα σημείο αιώρησης για ενα τρικόπτερο με δύο κεκλιμένα στροφεία. Ο έλεγχος πραγματοποιείται σε δύο στάδια αρχικά στις μεταφορικές συντεταγμένες, οι οποίες θεωρούνται αποσυμπλεγμένες μεταξύ τους γύρω από το σημείο αιώρησης, εφαρμόζεται γραμμικός τετραγωνικός ελεγκτής (LQR), που παράγει τις τιμές αναφοράς για τις περιστροφικές συντεταγμένες. Για τις περιστροφικές συντεταγμένες χρησιμοποιείται ένας αναλογικός-διαφορικός ελεγκτής για την εξαγωγή των δράσεων ελέγχου.

Στην [13], εφαρμόζεται μη-γραμμικός έλεγχος, χρησιμοποιώντας δυναμική γραμμικοποίηση με ανάδραση και στη συνέχεια, έναν ισοδύναμο νόμο ελέγχου, ο οποίος επιβάλλει τα επιθυμητά δυναμικά (error dynamics) σε ένα τετρακόπτερο με 4 κεκλιμένα στροφεία. Επιπλέον, λόγω των πλεοναζόντων βαθμών ελευθερίας, γίνεται μονοσήμαντος ορισμός των μεταβλητών ελέγχου μέσω βελτιστοποίησης με κριτήριο την εξοικονόμηση ενέργειας. Στην [9], για ένα τρικόπτερο με τρία κεκλιμένα στροφεία, εφαρμόζεται μη-γραμμικός έλεγχος για τον προσανατολισμό (attitude control) θέτοντας τα επιθυμητά δυναμικά απόκλισης των μεταβλητών προσανατολισμού. Η παραμέτρων που προσανατολισμού έγινε με πίνακες περιστροφής, για την αποφυγή ιδιαζόντων σημείων. Για την παραγωγή του νόμου ελέγχου χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο στερεού σώματος για το αερόχημα. Τέλος, παρουσιάζεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων από τα δοκιμαστικά πτήσης κι από την προσομοίωση, όπου η μοντελοποίηση έγινε σαν σύστημα στερεών σωμάτων. Ένα συμπέρασμα που προέκυψε είναι ότι η απλοποίηση στερεού σώματος, που έγινε, είχε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Στην [6], εξετάζεται η μετάβαση ενός αεροχήματος κεκλιμένου στροφείου από την αιώρηση στην συμβατική πτήση. Το σύστημα είναι κατά τόπους γραμμικό με παραμέτρους μεταβλητών (Linear Parameter Varying). Η τεχνική ελέγχου, που εφαρμόζεται, είναι H-Infinity προκαθορισμένων κερδών (gain-scheduled). Ένα ελικόπτερο μεταφοράς φορτίων εξετάζεται στην [17]. Κι εδώ, έχει αποσυντεθεί η μεταφορική με την περιστροφική συνιστώσα, θεωρώντας 'γρήγορα' δυναμικά αυτά της περιστροφικής κίνησης και 'αργά' τις μεταφορικής. Έτσι, ένας υποβέλτιστος H-Infinity χρησιμοποιείται για τη σθεναρό έλεγχο των περιστροφικών μεταβλητών. Στις μεταφορικές συνιστώσες εφαρμόζεται ένας σθεναρός έλεγχος τέλειας παρακολούθησης (Perfect Tracking).

Οι ελεγκτές πτήσης (Flight Controllers) είναι ενσωματωμένα πλεκτρονικά συστήματα και αποτελούν τον πυρήνα των εναέριων ρυμποτοικών συστημάτων. Είναι υπεύθυνοι για τις βασικές λειτουργίες των αεροχημάτων (πχ πλοιήγηση, αυτόνομο έλεγχο). Στην αγορά συναντώνται δύο είδη ελεγκτών πτήσης: ελεγκτής λογισμικού κλειστού κώδικα (closed source), όπου δεν επιτρέπει

την ελευθερία τροποποίησης του ελεγκτή παρά μερικών παραμέτρων. Ωστόσο, συνοδεύονται από υψηλής ποιότητας λογισμικά και τεχνική υποστήριξη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο ελεγκτής πτήσης N3 της εταιρίας DJI, ο οποίος διαθέτει εύρωστο αλγόριθμο ελέγχου και ανεπτυγμένο σύστημα συγχώνευσης αισθητήρων. Το δεύτερο είδος είναι ο ελεγκτής πτήσης λογισμικού ανοιχτού κώδικα (open source), ο οποίος προσφέρει ελευθερία τροποποίησης των αλγορίθμων του ελεγκτή. Ο ελεγκτής Phenix Pro, της εταιρίας Robsense, αποτελεί τέτοιου είδους ελεγκτή, ο οποίος είναι βασισμένος σε συστοιχία επιτόπια προγραμματιζόμενων πυλών (FPGA) και επιτρέπει την ανάπτυξη νευρωνικών δικτύων. Ένα ακόμη παράδειγμα αποτελεί ο OcPoC της εταιρίας Aerotenna Company, ο οποίος επεκτείνει της δυνατότητες εισόδου εξόδου σημάτων, συμπεριλαμβάνοντας ελευθερία προγραμματισμού των εισόδων PWM, PPM, GPIO με σκοπό την επίτευξη σύνδεσης πληθώρας διαφορετικών αισθητήρων. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται ο ελεγκτής πτήσης ανοιχτού κώδικα Pixhawk Cube με λογισμικό PX4, το οποίο έχει αναπτυχθεί από το Πανεπιστήμιο ETH της Ζυρίχης, ενώ ο σχεδιασμός και η κατασκευή του ελεγκτή πραγματοποιήθηκε από την ProfiCNC και την Hex Technology, αντίστοιχα. Η ανάλυση του συγκεκριμένου ελεγκτή γίνεται μετέπειτα στα πλαίσια της συγκεκριμένης εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Μοντελοποίηση Τρικόπτερου

2.1 Εισαγωγή

Στόχος του κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη των μαθηματικών εξισώσεων, που περιγράφουν την κίνηση του τρικόπτερου. Συγκεκριμένα, γίνεται ο ορισμός των κινηματικών εξισώσεων του οχήματος, μοντελοποίηση των ασκούμενων δυνάμεων και εν τέλει η σύνθεση των εξισώσεων κίνησης.

Το τρικόπτερο διαθέτει 5 ενεργοποιητές, 3 από τους οποίους είναι οι έλικες, ενώ οι υπόλοιποι είναι οι 2 σερβομηχανισμοί. Οι έλικες έχουν στόχο την παραγωγή δυνάμεων ώθησης, με παράπλευρη συνέπεια την παραγωγή ροπών αντίστασης. Οι σερβομηχανισμοί αποτελούν τους μηχανισμούς κεκλιμένου στροφέιου και επιτυγχάνουν την περιστροφή των διανυσμάτων των δυνάμεων ώθησης και ροπών αντίστασης, για τους δύο εμπρόσθιους κινητήρες.

Στην ανάλυση, που ακολουθεί, έχουν γίνει κάποιες παραδοχές. Το τρικόπτερο θεωρείται ως ένα στερεό απαραμόρφωτο σώμα. Έτσι, οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, που ασκούνται τόσο στους κινητήρες όσο κι από το μηχανισμό κεκλιμένου στροφέιου δεν λήφθηκαν υπόψιν. Ακόμη, παραλήφθηκαν οι αεροδυναμικές δυνάμεις κατά τη λειτουργία αιώρωπης καθώς δεν αναπτύσσονται σημαντικές ταχύτητες.

2.2 Κινηματική

Η κίνηση του τρικόπτερου ορίζεται πλήρως από το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του και από τον προσανατολισμό του ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, η παραμέτρηση του προσανατολισμού έγινε με γωνίες Euler.

Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς Ε : $OXYZ$ Το σύστημα αναφοράς Ε βρίσκεται σταθερά δεμένο στην επιφάνεια της Γης και θεωρείται αδρανειακό. Το επίπεδο XY συμπίπτει με το έδαφος και ο άξονας Z έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του βάρους.

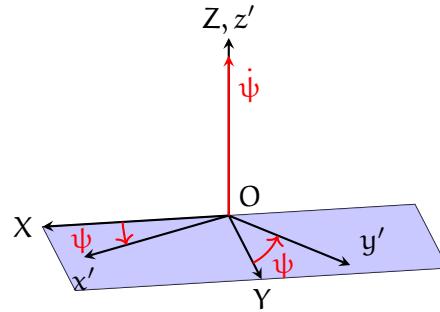
Κεντροβαρικό Σύστημα Αναφοράς Β : $Gxyz$ Το σύστημα αναφοράς Β είναι σταθερά δεμένο στο κέντρο μάζας G του στερεού σώματος, μεταφέρεται και περιστρέφεται μαζί με αυτό. Οι διευθύνσεις των διανυσμάτων βάσης του συστήματος αυτού, συμπίπτουν με τους άξονες ενασθησίας των μετρητικών οργάνων. Επομένως, κάθε μέτρηση είναι εκφρασμένη σε αυτήν την βάση.

Γωνίες Euler

Σε αντίθεση με την γραμμική μετατόπιση, η συνολική περιστροφική μετατόπιση ενός στερεού σώματος δεν μπορεί να προέλθει με απλή ολοκλήρωση του διανύσματος γωνιακής ταχύτητας ως προς ένα σύστημα αναφοράς [7]. Για τον προσδιορισμό λοιπόν του προσανατολισμού ενός στερεού σώματος γίνεται χρήση των γωνιών Euler.

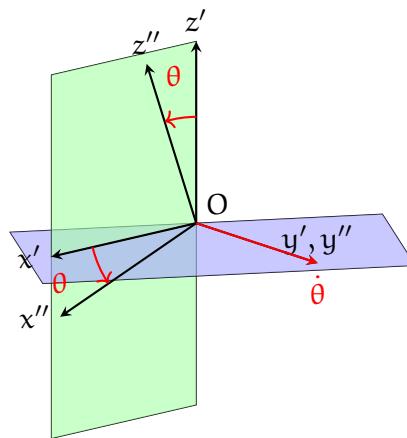
Για τον ορισμό των γωνιών Euler, θεωρείται το σύστημα αναφοράς $f(Oxyz)$, το οποίο είναι σταθερά δεμένο στο στερεό σώμα και περιστρέφεται μαζί με αυτό ως προς την αρχή των αξόνων O , και το σύστημα $F(OXYZ)$, το οποίο παραμένει ακίνητο. Ο προσανατολισμός του συστήματος αναφοράς f (και άρα του στερεού σώματος) ως προς το σύστημα F μπορεί να επιτευχθεί με τρεις διαδοχικές γωνιακές μετατοπίσεις, με περιορισμό ότι δύο διαδοχικές περιστροφές δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν γύρω από ίδιο ή παράλληλο άξονα. Η αλληλουχία των περιστροφών, που επιλέχθηκε, φαίνεται στα σχήματα (2.1), (2.2), (2.3).

- Περιστροφή του συστήματος αναφοράς f κατά γωνία εκτροπής ψ (yaw angle) γύρω από το σταθερό άξονα OZ ($F \rightarrow f'$). Με μπλέ χρώμα απεικονίζεται το επίπεδο περιστροφής.



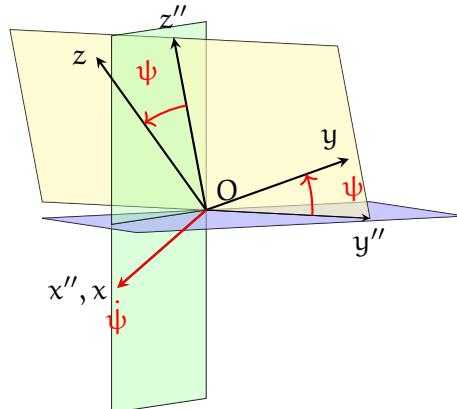
Σχήμα 2.1 Περιστροφή Συστήματος προς άξονα OZ .

- Περιστροφή του συστήματος αναφοράς f' κατά γωνία πρόνευσης θ (pitch angle) γύρω από τον τρέχων άξονα Oy' ($f' \rightarrow f''$). Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται το επίπεδο περιστροφής.



Σχήμα 2.2 Περιστροφή Συστήματος προς άξονα Oy' .

- Περιστροφή του συστήματος αναφοράς f'' κατά γωνία διατοίχισης ϕ (roll angle) γύρω από τον τρέχων άξονα Ox'' ($f'' \rightarrow f$). Με κίτρινο χρώμα απεικονίζεται το επίπεδο περιστροφής.



Σχήμα 2.3 Περιστροφή Συστήματος προς άξονα Ox'' .

Οι αντιστοιχίες των συστημάτων αναφοράς με τα συστήματα που ορίστηκαν στην εισαγωγή του κεφαλαίου είναι $F \rightarrow E$ και $f \rightarrow B$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της πρόσθεσης, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος προκύπτει ως

$$\omega_{B/F} = \omega_{f/F} = \omega_{f/f''} + \omega_{f''/f'} + \omega_{f'/F} = \dot{\phi}e_x + \dot{\theta}e_y + \dot{\psi}e_z.$$

Έχει ιδιαίτερη πρακτική σημασία η έκφραση των συνιστώσεων του διανύσματος $\omega_{f/F}$ στο σύστημα f , το οποίο βρίσκεται στερεά δεμένο στο στερεό σώμα, λόγω της παροχής των μετρήσεων από τους αισθητήρες στο κεντροβαρικό σύστημα B .

$$(1) \quad \begin{aligned} \omega_x &= \omega_{f/F} \cdot e_x = \dot{\phi}(e_x \cdot e_x) + \dot{\theta}(e_y \cdot e_x) + \dot{\psi}(e_z \cdot e_x) \\ \omega_y &= \omega_{f/F} \cdot e_y = \dot{\phi}(e_x \cdot e_y) + \dot{\theta}(e_y \cdot e_y) + \dot{\psi}(e_z \cdot e_y) \\ \omega_z &= \omega_{f/F} \cdot e_z = \dot{\phi}(e_x \cdot e_z) + \dot{\theta}(e_y \cdot e_z) + \dot{\psi}(e_z \cdot e_z). \end{aligned}$$

Ο προσανατολισμός του συστήματος f' ως προς το σύστημα f καθορίζεται πλήρως από τις τιμές των συνημιτόνων των γωνιών, τις οποίες σχηματίζουν οι άξονες Oi' με $i' = \{x', y', z'\}$ του συστήματος f' ως προς τους άξονες Oi με $i = \{x, y, z\}$. Δηλαδή, $a_{i',i} = e_{i'} \cdot e_i = \cos(e_{i'}, e_i)$.

Άρα, δεδομένου των παραπάνω σχημάτων, εξάγονται τα εξής

$$\begin{aligned} e_x \cdot e_x &= 1 \quad \text{λόγω παραλληλίας} \\ e_x \cdot e_y &= e_x \cdot e_z = e_x \cdot e_{y'} = 0 \quad \text{λόγω καθετότητας} \\ e_{z'} \cdot e_x &= \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta \\ e_{y'} \cdot e_z &= \cos(\pi/2 + \phi) = -\sin \phi \\ e_{y'} \cdot e_y &= \cos \phi \\ e_{z'} \cdot e_y &= (e_{x'} \times e_{y'}) \cdot e_y = (e_{y'} \times e_y) \cdot e_{x'} = \sin \phi (e_x \cdot e_{x'}) = \sin \phi \cos \theta \\ e_{z'} \cdot e_z &= (e_{y'} \times e_{x'}) \cdot e_z = (e_z \times e_{y'}) \cdot e_{x'} = (e_x \cdot e_{x'}) \cos \phi = \cos \theta \cos \phi. \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες (1) λαμβάνουν την μορφή

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta. \end{aligned}$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων ως προς τις χρονικές παραγώγους των γωνιών Euler οδηγεί στο σύστημα μπτρωϊκής μορφής

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = R_{eul} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν σύστημα μη-γραμμικών κανονικών διαφορικών εξισώσεων και, συνεπώς, η αναλυτική τους λύση δεν είναι γνωστή. Η επίλυση του γίνεται μέσω αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης, έχοντας μετρήσει το διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας του στερεού σώματος. Προκύπτει από την λύση ο προσανατολισμός του στερεού σώματος στον χώρο.

Το σύστημα παρουσιάζει πρόβλημα ορισμού για γωνίες $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι γωνίες ϕ και ψ περιγράφουν την ίδια περιστροφή και χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας, καθιστώντας τον πίνακα ιδιάζων. Γίνεται αναγκαίος, λοιπόν, ο περιορισμός των γωνιών ως εξής

$$\begin{aligned} \phi &\in (-\pi, \pi] \\ \theta &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \psi &\in (-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Ορίζοντας το διάνυσμα $\mathbf{e} = (\phi \ \theta \ \psi)^T$, το πεδίο ορισμού των γωνιών Euler γράφεται στην εξής μορφή

$$\mathbf{e} \in \mathcal{U} \quad \text{όπου} \quad \mathcal{U} = (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi].$$

Το σύστημα (2) αποτελεί τη βασική κινηματική σχέση, η οποία συνδέει την παράγωγο των γωνιών Euler με τις περιστροφικές ταχύτητες του αεροχώματος.

Μπτρώα Περιστροφής

Κρίνεται σημαντικό να αναπτυχθεί μία μέθοδος για τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

Ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ παραμένει το ίδιο ανεξαρτήτως του συστήματος συντεταγμένων στο οποίο εκφράζεται, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = X \mathbf{e}_X + Y \mathbf{e}_Y + Z \mathbf{e}_Z,$$

όπου $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ και \mathbf{e}_z είναι τα διανύσματα βάσης του κεντροβαρικού συστήματος B, ενώ $\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y$ και \mathbf{e}_Z είναι τα διανύσματα βάσης του αδρανειακού συστήματος E. Για ευκολία κατανόησης, χρησιμοποιείται ο δείκτης B ή E για τον χαρακτηρισμό του συστήματος αναφοράς, που χρησιμοποιείται στην έκφραση του διανύσματος. Οι σχέσεις των συντεταγμένων των δύο συστημάτων, όπως αναφέρθηκε και στην ανάλυση των περιστροφικών κινηματικών σχέσεων, προκύπτουν με τον εξής τρόπο

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{e}_X = x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_X + y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_X + z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_X \\ Y &= \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{e}_Y = x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_Y + y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Y + z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_Y \\ Z &= \mathbf{r}_B \cdot \mathbf{e}_Z = x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_Z + y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Z + z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_Z. \end{aligned}$$

Σε μπτρωική μορφή, λοιπόν, η έκφραση των συντεταγμένων του διανύσματος \mathbf{r} στο αδρανειακό σύστημα γίνεται

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_X & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_X & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_Y & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Y & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_Z & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_Z & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ή, σε συμπαγέστερη μορφή,

$$(3) \quad \mathbf{r}_E = R \mathbf{r}_B,$$

όπου R είναι το μπτρώο περιστροφής, το οποίο καθορίζει τις συντεταγμένες του τυχαίου διανύσματος \mathbf{r} ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του \mathbf{r} στο κεντροβαρικό.

Παρόμοια, για την αντίστροφη έκφραση

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{e}_x = X \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_x + Z \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_x \\ y &= \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{e}_y = X \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_y + Y \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_y + Z \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_y \\ z &= \mathbf{r}_E \cdot \mathbf{e}_z = X \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_z + Y \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_z + Z \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

καταλήγουμε στην μπτρωική μορφή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_Z \cdot \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ή σε συμπαγέστερη μορφή

$$(4) \quad \mathbf{r}_B = R^T \mathbf{r}_E,$$

όπου πίνακας R^T είναι ο ανάστροφος του R , εφόσον ισχύει συμμετρία γινομένου στον διανυσματικό χώρο που ορίζονται τα συστήματα αναφοράς. Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\mathbf{r}_E = R(R^T \mathbf{r}_E) = (RR^T)\mathbf{r}_E$$

και, επειδή το διάνυσμα \mathbf{r} είναι τυχαίο, θα ισχύει

$$(5) \quad RR^T = I_{3 \times 3} \quad \text{όπου } I_{3 \times 3} \text{ μοναδιαίος πίνακας.}$$

Άρα το μπτρώο περιστροφής R είναι ορθογώνιος πίνακας. Τα παραπάνω επιτρέπουν την εύκολη μετατροπή των συντεταγμένων από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο με απλή αναστροφή του πίνακα.

Η ιδιότητα (5) είναι η φυσική συνέπεια του ότι το μήκος του διανύσματος \mathbf{r} παραμένει αμετάβλητο κατά την περιστροφή των αξόνων.

Αναλύοντας τα συνημίτονα κατεύθυνσης που απαρτίζεται το μπτρώο περιστροφής R , από το σύστημα αναφοράς B στο σύστημα E , καταλήγουμε στην οναλυτική μορφή του

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Για την ολοκλήρωση των κινηματικών εξισώσεων, απαιτείται η διατύπωση της σχέσης, που συνδέει την έκφραση της μεταφορικής ταχύτητας του κέντρου μάζας (\mathbf{v}_G) του στερεού σώματος ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς. Έτσι, σύμφωνα με τον ορισμό του μπτρώο περιστροφής

$$(6) \quad \dot{\mathbf{p}} = R(\mathbf{v}_G)_B = (\mathbf{v}_G)_E,$$

ορίζοντας τα μεγέθη $\mathbf{p} = [x_E \ y_E \ z_E]^T$, $(\mathbf{v}_G)_E = [\dot{x}_E \ \dot{y}_E \ \dot{z}_E]^T$ και $(\mathbf{v}_G)_B = [u \ v \ w]^T$ προκύπτει η μεταφορική κινηματική σχέση.

2.3 Κινητική

Η εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης έγινε με την εφαρμογή των νόμων του Euler [7] για στερεό σώμα τόσο για τις μεταφορικές όσο και για τις περιστροφικές συνιστώσες του αεροχώματος. Οι εξισώσεις διατυπώνονται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως

$$(7) \quad \mathbf{F} = (\dot{\mathbf{L}})_E = m(\dot{\mathbf{v}}_G)_E$$

$$(8) \quad \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_E,$$

όπου \mathbf{F} η συνισταμένη εξωτερική δύναμη, που ασκείται στο σώμα, \mathbf{L} η ορμή, m η συνολική μάζα του τρικοπτέρου και \mathbf{v}_G , η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αεροχώματος. \mathbf{M}_G , η συνολική εξωτερική ροπή, που ασκείται στο σώμα, και \mathbf{H}_G , η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας G . Από εδώ κι στο εξής, η μεταφορική ταχύτητα του κέντρο μάζας ως προς το αδρανειακό σύστημα $(\mathbf{v}_G)_E$ θα σημειώνεται απλώς ως \mathbf{v} και η γωνιακή ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς ως προς το κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς, εκφρασμένη στο κεντροβαρικό σύστημα $(\omega_{B/E})_B$ σημειώνεται απλώς ως ω .

Οι παραγώγιση της εξίσωσης (8) επιλέγεται να γίνει στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς καθώς προκύπτουν ορισμένα οφέλη. Ο τανυστής αδρανειας του σώματος παραμένει αμετάβλητος στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς και, όπως αναφέρθηκε, οι άξονες των μετρητικών οργάνων συμπίπτουν με τους άξονες του συστήματος αναφοράς. Επιπλέον, το σύστημα κυρίων αξόνων του σώματος συμπίπτει με αυτό του κεντροβαρικού συστήματος αναφοράς πράγμα, που σημαίνει ότι τα μαζικά γινόμενα αδρανειας προκύπτουν αμελητέα σε σχέση με τις κύριες τιμές.

Η παραγώγος ενός διανύσματος \mathbf{q} εκφρασμένη σε ένα σύστημα f το οποίο περιστρέφεται ως προς ένα σύστημα f' είναι

$$(9) \quad (\dot{\mathbf{q}})_f = (\dot{\mathbf{q}})_{f'} + \omega_{f'/f} \times \mathbf{q},$$

όπου $\omega_{f'/f}$ η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος f' ως προς το f . Έτσι, παίρνουμε

$$\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G.$$

Η στροφορμή του σώματος ως προς το κεντροβαρικό σύστημα $(\mathbf{H}_G)_B = I_G \boldsymbol{\omega}$. Μιας και ο τανυστής αδράνειας παραμένει σταθερός, όντας υπολογισμένος στο κεντροβαρικό σύστημα, παίρνουμε

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_B = I_G \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Στο σχήμα (2.4), που ακολουθεί, παρουσιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του τρικοπτέρου. Εκεί, παρουσιάζονται τα φορτία που προκύπτουν από τις έλικες καθώς και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αεροχώματος. Οι δείκτες l , r , b αναφέρονται στον εμπρόσθιο αριστερά ($x > 0, y < 0$)_B, εμπρόσθιο δεξιά ($x > 0, y > 0$)_B και οπίσθιο κινητήρα ($x < 0, y = 0$)_B αντίστοιχα. Ο ορισμός των εκφράσεων των φορτίων των ελίκων γίνεται σε ξεχωριστή ενότητα μετέπειτα.

Οι δυνάμεις ώθησης \mathbf{T}_i , για $i \in \{l, r, b\}$, ορίζονται στο κεντροβαρικό σύστημα συντεταγμένων κι έτσι, θα πρέπει να περιστραφούν για να εκφραστούν στο αδρανειακό σύστημα. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας \mathbf{g} είναι εκφρασμένο εξαρχής στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, έτσι η συνισταμένη δύναμη παίρνει τη μορφή

$$(10) \quad \mathbf{F} = R \sum \mathbf{T}_i + m\mathbf{g}.$$

Ορίζονται τα διανύσματα θέσης \mathbf{r}_i για $i \in \{l, r, b\}$ των σημείων άσκησης των φορτίων των προπελών ως προς το κέντρο μάζας εκφρασμένα στο κεντροβαρικό σύστημα. Οι διατυπώσεις, που προκύπτουν σύμφωνα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σχήματος 2.4, είναι

$$\mathbf{r}_l = \begin{pmatrix} l_1 - l_4 \sin(\theta_l) \\ -l_3 \\ -l_4 \cos(\theta_l) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_r = \begin{pmatrix} l_1 - l_4 \sin(\theta_r) \\ l_3 \\ -l_4 \cos(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_b = \begin{pmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

όπου οι θ_l , θ_r είναι οι γωνίες κεκλιμένου στροφείου, οι οποίες αποτελούν και μεταβλητές ελέγχου. Η θετική φορά των γωνιών είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα (2.4) και είναι στη διεύθυνση του άξονα e_y .

Οι ροπές αντίδρασης \mathbf{N}_i , για $i \in \{l, r, b\}$ έχουν φορά αντίθετη από αυτή της περιστροφής των κινητήρων. Η κατεύθυνση τους φαίνεται στο σχήμα (2.4). Όπως παρατηρεί κανείς, η φορά των δύο εμπρόσθιων κινητήρων είναι αντίθετη από την φορά του οπίσθιου. Η επιλογή αυτή έγινε ούτως ώστε η παραγόμενη συνισταμένη ροπή αντίδρασης να έχει το ελάχιστο μέτρο. Η συνεισφορά του κάθε κινητήρα στην συνισταμένη ροπή αποτελείται από τη ροπή, που δημιουργεί η δύναμη ώθησης και από την ροπή αντίδρασης. Η συνισταμένη ροπή ως προς το κέντρο μάζας του κινητήρα υπολογίζεται

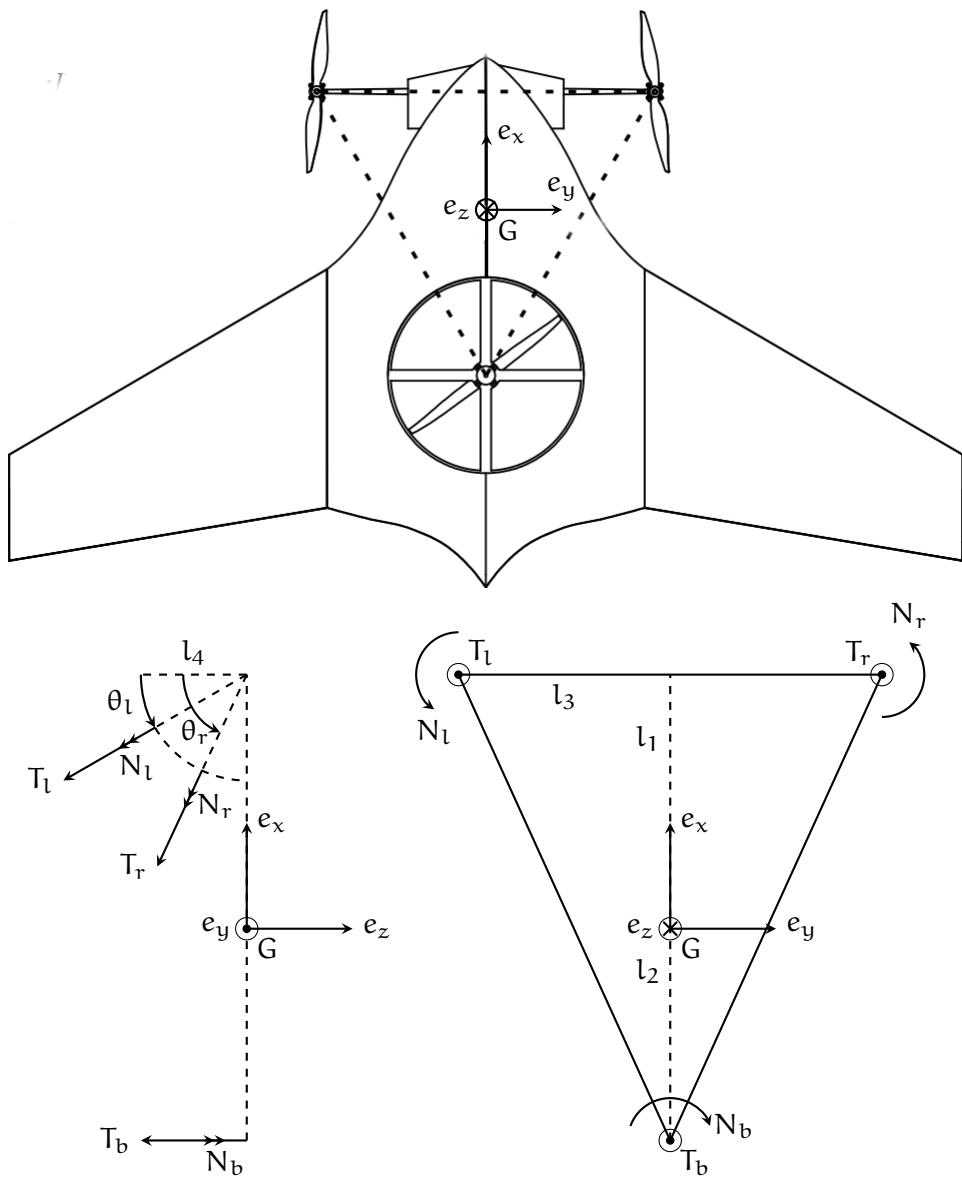
$$(11) \quad \mathbf{M}_G = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{T}_i + \mathbf{N}_i).$$

Οι εξισώσεις κίνησης, που προκύπτουν, είναι

$$(12) \quad m\dot{\mathbf{v}} = R \sum \mathbf{T}_i + m\mathbf{g}$$

$$(13) \quad I_G \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_G - \boldsymbol{\omega} \times I_G \boldsymbol{\omega}.$$

Στο σχήμα που ακολουθεί, παρουσιάζεται το διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Η γεωμετρία του τρικοπτέρου περιγράφεται πλήρως με ένα τρίγωνο του οποίου οι ακμές είναι οι αρχικές θέσεις των κινητήρων. Έτσι, το διάγραμμα ελευθέρου σώματος έγινε σε αυτό το τρίγωνο για την αποφυγή περιττής πληροφορίας.



Σχήμα 2.4 Διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

2.4 Απεικόνιση Μεταβλητών Ελέγχου - Δυνάμεων

Οι δυνάμεις ώθησης, που ασκούνται στο όχημα από το εκάστοτε σετ έλικα-κινητήρας, είναι

$$\mathbf{T}_l = \begin{pmatrix} -p_T(\omega_l) \sin(\theta_l) \\ 0 \\ -p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_r = \begin{pmatrix} -p_T(\omega_r) \sin(\theta_r) \\ 0 \\ -p_T(\omega_r) \cos(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_T(\omega_b) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, η συνολική δύναμη ώθησης που ασκείται στο σώμα από τους κινητήρες, παραλείποντας την μηδενική συνιστώσα στην διεύθυνση y, είναι

$$\mathbf{T} = \sum \mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} -p_T(\omega_l) \sin(\theta_l) - p_T(\omega_r) \sin(\theta_r) \\ -p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) - p_T(\omega_r) \cos(\theta_r) - q_T(\omega_b) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ροπές αντίδρασης, που ασκούνται στο όχημα, είναι

$$\mathbf{N}_l = \begin{pmatrix} -p_N(\omega_l) \sin(\theta_l) \\ 0 \\ -p_N(\omega_l) \cos(\theta_l) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_r = \begin{pmatrix} -p_N(\omega_r) \sin(\theta_r) \\ 0 \\ -p_N(\omega_r) \cos(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_N(\omega_b) \end{pmatrix}.$$

Η συνολική ροπή, που ασκείται από τον εμπρόσθιο-αριστερά κινητήρα, είναι

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{r}_l \times \mathbf{T}_l + \mathbf{N}_l = \begin{pmatrix} l_1 - l_4 \sin(\theta_l) \\ -l_3 \\ -l_4 \cos(\theta_l) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -p_T(\omega_l) \sin(\theta_l) \\ 0 \\ -p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_N(\omega_l) \sin(\theta_l) \\ 0 \\ -p_N(\omega_l) \cos(\theta_l) \end{pmatrix}$$

έτσι, προκύπτει $\mathbf{M}_l = \begin{pmatrix} l_3 p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) - p_N(\omega_l) \sin(\theta_l) \\ l_1 p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) \\ -l_3 p_T(\omega_l) \sin(\theta_l) - p_N(\omega_l) \cos(\theta_l) \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχα, για τους άλλους δύο κινητήρες υπολογίζεται

$$\mathbf{M}_r = \begin{pmatrix} -l_3 p_T(\omega_r) \cos(\theta_r) - p_N(\omega_r) \sin(\theta_r) \\ l_1 p_T(\omega_r) \cos(\theta_r) \\ l_3 p_T(\omega_r) \sin(\theta_r) - p_N(\omega_r) \cos(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -l_2 q_T(\omega_b) \\ q_N(\omega_b) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, η συνολική ροπή, που ασκείται στο σώμα, είναι

$$\mathbf{M}_G = \sum \mathbf{M}_i =$$

$$= \begin{pmatrix} l_3 [p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) - p_T(\omega_r) \cos(\theta_r)] - p_N(\omega_l) \sin(\theta_l) - p_N(\omega_r) \sin(\theta_r) \\ l_1 [p_T(\omega_l) \cos(\theta_l) + p_T(\omega_r) \cos(\theta_r)] - l_2 q_T(\omega_b) \\ l_3 [p_T(\omega_r) \sin(\theta_r) - p_T(\omega_l) \sin(\theta_l)] - p_N(\omega_l) \cos(\theta_l) - p_N(\omega_r) \cos(\theta_r) + q_N(\omega_b) \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια εξάγεται μια 1-1 απεικόνιση των μεταβλητών ελέγχου $\mathbf{u} = ((\omega_{i \in \{l, r, b\}}), (\theta_{j \in \{l, r\}}))$ με τις δυνάμεις T και τις ροπές \mathbf{M}_G , που ασκούνται στο αερόχημα. Καθάντο τον τρόπο, γνωρίζοντας τις απαιτούμενες δυνάμεις για την κίνηση του τρικοπτέρου, μπορούν να υπολογιστούν απευθείας οι δράσεις ελέγχου. Ορίζεται η απεικόνιση $\bar{f} : [0, \infty)^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ με

$$\bar{f}((\omega_i), (\theta_j)) = (p_T(\omega_r) \sin(\theta_r), p_T(\omega_l) \sin(\theta_l), p_T(\omega_r) \cos(\theta_r), p_T(\omega_l) \cos(\theta_l), q_T(\omega_b)).$$

Οι τετραγωνικές συναρτήσεις, που περιγράφουν τα φορτία των ελίκων, είναι 1-1 στο σύνολο $[0, \infty)$ και έχουν τη μορφή

$$p_T(\omega) = p_1 \omega^2, \quad p_N(\omega) = p_2 \omega^2, \quad q_T(\omega) = p_3 \omega^2, \quad q_N(\omega) = p_4 \omega^2.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$p_N(\omega) = c_1 p_T(\omega), \quad q_N(\omega) = c_2 q_T(\omega)$$

$$\text{με } c_1 = p_2/p_1 \quad \text{και} \quad c_2 = p_4/p_3.$$

Ορίζεται η απεικόνιση $f : [0, \infty)^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ με $f((\omega_i), (\theta_j)) = (Q \circ \bar{f})((\omega_i), (\theta_j))$, όπου $Q : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ γραμμική αντιστρέψιμη απεικόνιση της μορφής

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -c_1 & -c_1 & -l_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & l_1 & -l_2 \\ l_3 & -l_3 & -c_1 & -c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Ορίζονται

$$W = \mathbb{R}^4 - (\{(y_i) \in \mathbb{R}^4 \mid y_2 = y_4 = 0\} \cup \{(y_i) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 = y_3 = 0\})$$

$$B = \bar{f}^{-1}(W \times [0, \infty))$$

και η απεικόνιση $\bar{h} : W \times [0, \infty) \rightarrow \bar{h}(W)$ με

$$\bar{h}((y_i), (z)) = \begin{pmatrix} (p_T|_{[0, \infty)})^{-1}((y_2^2 + y_4^2)^{1/2}) \\ (p_T|_{[0, \infty)})^{-1}((y_1^2 + y_3^2)^{1/2}) \\ (q_T|_{[0, \infty)})^{-1}(z) \\ \arcsin\left(\left(\frac{y_2^2}{(y_2^2 + y_4^2)}\right)^{1/2}\right) \\ \arcsin\left(\left(\frac{y_1^2}{(y_1^2 + y_3^2)}\right)^{1/2}\right) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε το συνολικό διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^5$ με

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = f((\omega_i), (\theta_j)).$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε ότι $\bar{h} \circ \bar{f}|_B = i_B$, όπου i_B η ταυτοική συνάρτηση. Έτσι, προκύπτει ότι η απεικόνιση \bar{f} είναι 1-1 στο B και η απεικόνιση \bar{h} είναι η αντίστροφη απεικόνιση της \bar{f} . Τώρα, μπορούν να υπολογιστούν μονοσήμαντα οι δράσεις ελέγχου

$$\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{d}) = (Q \circ \bar{f})^{-1}(\mathbf{d}) = (\bar{f}^{-1} \circ Q^{-1})(\mathbf{d}) \quad \text{δηλαδή} \quad \mathbf{u} = (\bar{h} \circ Q^{-1})(\mathbf{d}).$$

2.5 Αφινική Δομή Συστήματος

Οι κινηματικές σχέσεις (2), (6) γράφονται ως

$$(14) \quad \dot{\mathbf{e}} = R_{eul} \boldsymbol{\omega}$$

$$(15) \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}.$$

Μετασχηματίζοντας τις κινητικές σχέσεις (13), (12) προκύπτει

$$(16) \quad \dot{\mathbf{v}} = m^{-1} R \sum T_i + \mathbf{g}$$

$$(17) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = I_G^{-1} (M_G - \boldsymbol{\omega} \times I_G \boldsymbol{\omega}).$$

Ορίζεται το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^9 \times U$ και το $m \times 1$ διάνυσμα μεταβλητών ελέγχου $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)^3$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \theta_l \\ \theta_r \\ \omega_l \\ \omega_r \\ \omega_b \end{pmatrix}.$$

Οι σχέσεις (2), (6), (12), (13) μπορούν να γραφούν ομαδοποιημένα ως $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Όπως εδείχθη στην προηγουμένη υποενότητα, οι δυνάμεις \mathbf{d} είναι 1-1 με τις δράσεις ελέγχου \mathbf{u} , έτσι, είναι ισοδύναμο να γραφούν οι εξισώσεις ως προς \mathbf{d} . Πλέον, το διάνυσμα εισόδου είναι οι δυνάμεις \mathbf{d} και το σύστημα γράφεται σε αφινική δομή ως προς το διάνυσμα εισόδου ως

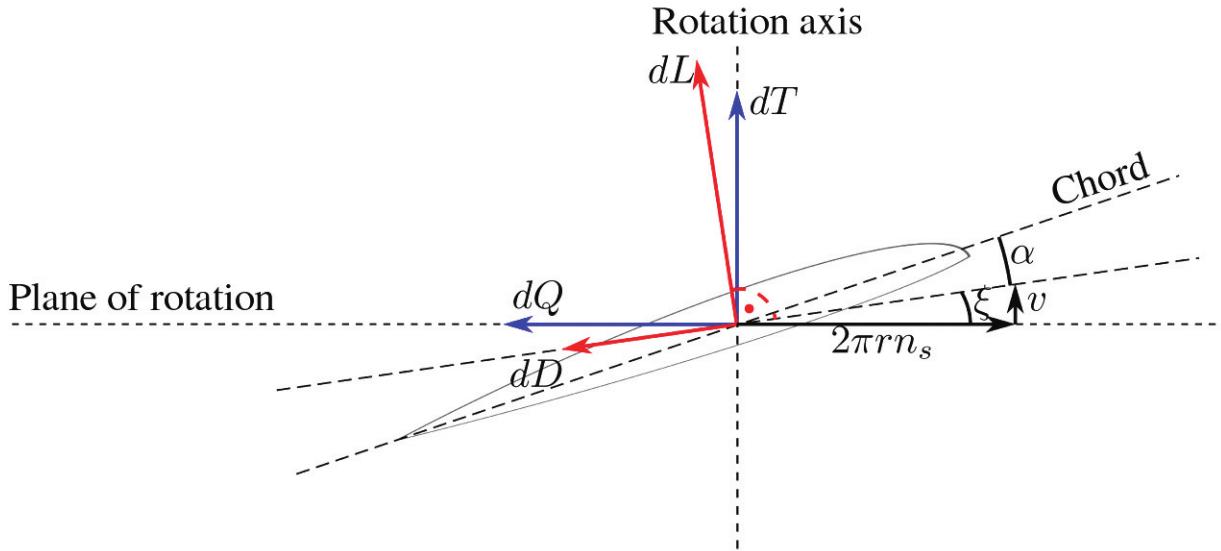
$$\dot{\mathbf{x}} = f_0(\mathbf{x}) + G(\mathbf{e})\mathbf{d},$$

όπου $f_0 : \mathbb{R}^9 \times U \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ και $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{12}$, με

$$f_0 = \begin{pmatrix} m^{-1} \mathbf{g} \\ I_G^{-1} (\boldsymbol{\omega} \times I_G \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{v} \\ R_{eul} \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad G = \begin{pmatrix} m^{-1} R & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_G^{-1} \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \end{pmatrix}.$$

2.6 Μοντελοποίηση Φορτίων Ελίκων

Για την μοντελοποίηση των φορτίων της έλικας, αρχικά υποθέτουμε μία έλικα διαμέτρου D , και με γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω . Η περιστροφική κίνηση, που εκτελεί η έλικα, παράγει μία δύναμη ώθησης T , η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο περιστροφής της έλικας, και μία ροπή N , που επιδρά στον άξονα περιστροφής της έλικας. Για τον υπολογισμό των παραπάνω μεγεθών ακολουθείται η θεωρία στοιχειωδών πτερυγίων (Blade Element Theory) [3]. Σύμφωνα με το θεώρημα, τα πτερυγία της έλικας αποτελούνται από άπειρα, λεπτόταχα, ανεξάρτητα, αεροδυναμικά στοιχεία, τα οποία είναι τοποθετημένα διαμίκους της ακτίνας της έλικας. Παίρνουμε μία αεροτομή πάχους dr , με r απόσταση από τον άξονα περιστροφής της έλικας. Στο σχήμα (2.5) φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στην αεροτομή: οπισθέλκουσα dD , άντωση dL . Η γωνία, που σχηματίζεται μεταξύ των ζευγών δυνάμεων dT , dQ και dL , dD , ονομάζεται ολική γωνία κατωρεύματος ξ .



Σχήμα 2.5 Διάγραμμα Blade Element Theory [18].

Σύμφωνα με το σχήμα (2.5), η στοιχειώδης δύναμη ώθησης dT και η στοιχειώδης δύναμη αντίστασης dQ υπολογίζονται βάσει της άντωσης και οπισθέλκουσας ως εξής

$$dT = dL \cos(\xi) - dD \cos(\xi)$$

$$dQ = dL \sin(\xi) + dD \sin(\xi),$$

όπου οι δυνάμεις dL και dD εκφράζονται από τις σχέσεις

$$dL = \frac{1}{2} \rho V_e^2 l c_L dr$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho V_e^2 l c_D dr$$

με V_e την ενεργό ακτινική ταχύτητα

l το μέσο μήκος χορδής

c_D το συντελεστή οπισθέλκουσας

c_L το συντελεστή άντωσης

ρ την πυκνότητα αέρα.

Για να υπολογιστούν οι T και N για όλη την έλικα, παίρνουμε τα ολοκληρώματα σε όλη την επιφάνεια των πτερυγίων της ως

$$T = n_P \int_0^R dT dr$$

$$N = n_P \int_0^R r dQ dr$$

με n_p τον αριθμό πτερυγίων έλικας
 R την ακτίνα έλικας.

Η ολοκλήρωση των παραπάνω δύο σχέσεων διατυπώνεται αναλυτικά στο [3]. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι

$$T = C_T \rho D^4 n^2$$

$$N = C_N \rho D^5 n^2 \quad \text{με } n \text{ ταχύτητα περιστροφής σε Hz.}$$

Οι συντελεστές C_T, C_N ονομάζονται συντελεστής άθησης και ροπής αντίστασης αντίστοιχα και είναι συνάρτηση της γεωμετρίας της έλικας, και των αδιάστατων αριθμών Reynolds (Re), Mach (Ma) και του Λόγου Μετατόπισης (Advance Ratio, J).

$$C_T = f(Re, Ma, J, \text{geometry}), \quad C_N = f(Re, Ma, J, \text{geometry}).$$

Ωστόσο, η εξάρτηση των προαναφερθέντων συντελεστών ως προς τον αριθμό Mach είναι μηδαμινή, εφόσον η ταχύτητα πτήσης είναι σημαντικά μικρότερη της ταχύτητας του ήχου και έτσι, δεν αναπτύσσονται φαινόμενα συμπιεστότητας. Επιπλέον, η επίδραση του αριθμού Reynolds στις συνθήκες πτήσης του αεροχώματος είναι αμελητέα σε σχέση με αυτήν του J.

Ο Λόγος Μετατόπισης ορίζεται ως

$$J = \frac{V}{nD}$$

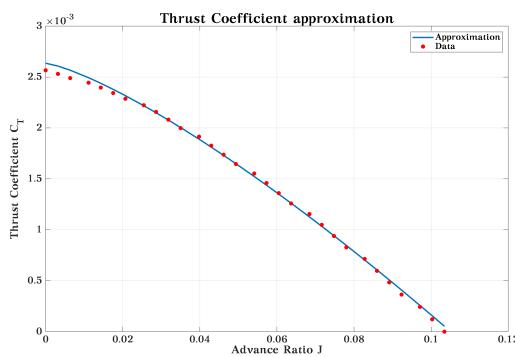
με V την κάθετη συνιστώσα σχετικής ταχύτητας του ανέμου ως προς το δίσκο της έλικας.

Οι κατασκευαστές ελίκων στα πειραματικά αποτελέσματα, αντί του συντελεστή ροπής, παρέχουν το συντελεστή ισχύος C_P . Η εύρεση της σχέσης ανάμεσα στους δύο συντελεστές, γίνεται μέσω του ορισμού της μηχανικής ισχύος

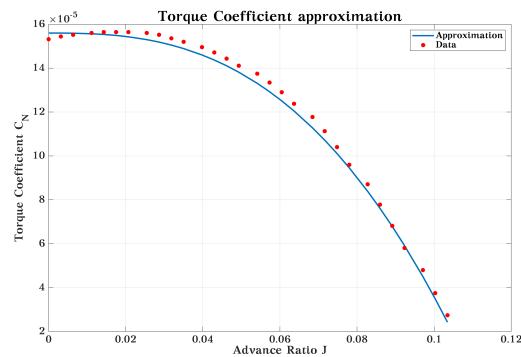
$$P = N \omega = C_N \rho D^5 n^2 \omega = 2\pi C_N \rho D^5 n^3$$

και ορίζεται ο συντελεστής ισχύος ως $C_P = 2\pi C_N$.

Για την προσέγγιση των αναλυτικών συναρτήσεων των συντελεστών C_T, C_N , ως προς τον λόγο μετατόπισης J, έγινε χρήση των πειραματικών δεδομένων που παρέχονται από τον κατασκευαστή [4]. Προσεγγίστηκαν ως πολυώνυμα μέσω μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Στα διαγράμματα (2.6), (2.7) γίνεται η σύγκριση των πειραματικών δεδομένων, με τις προκύπτουσες συναρτήσεις.



Σχήμα 2.6 Σύγκριση Συντελεστή Όθησης



Σχήμα 2.7 Σύγκριση Συντελεστή Ροπής

Οι προσεγγιστικές σχέσεις των συντελεστών άθησης και ροπής έχουν μορφή

$$C_T = \alpha_T J^{d_T} + \beta_T$$

$$C_N = \alpha_N J^{d_N} + \beta_N.$$

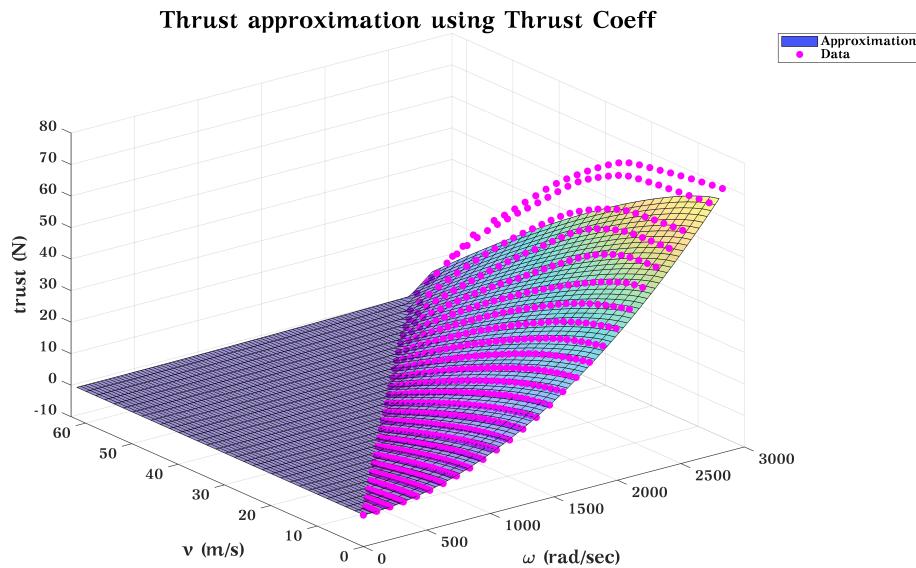
Με την εύρεση των προσεγγιστικών σχέσεων, μπορεί να υπολογιστεί η δύναμη πρόσθιας και η ροπή αντίστασης των ελίκων (χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της μοντελοποίησης), γνωρίζοντας την

γωνιακή τους ταχύτητα και την σχετική ταχύτητα του αεροχώματος προς τον άνεμο. Οι εξισώσεις μοντελοποίησης παίρνουν μορφή

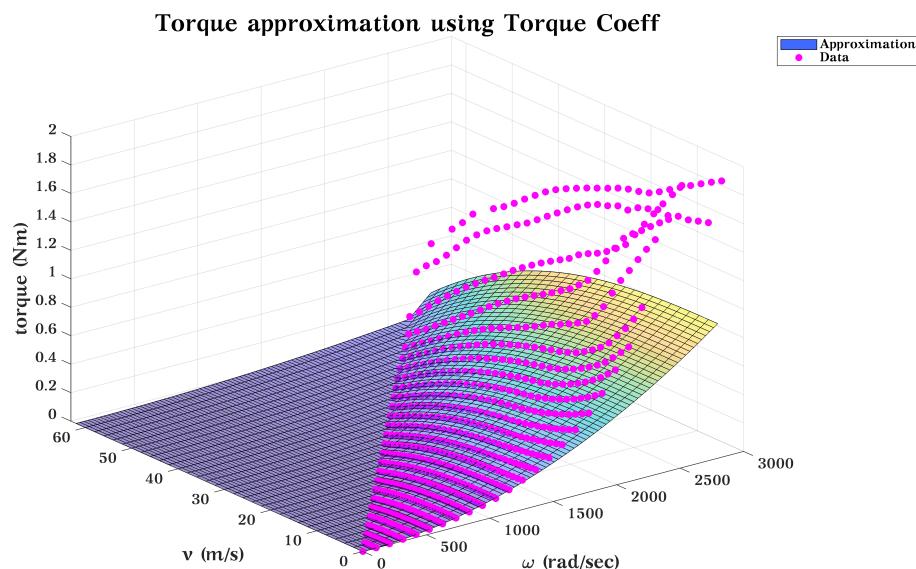
$$T = \alpha_T \rho D^{4-d_t} n^{2-d_t} V^{d_T} + \beta_T \rho D^4 n^2$$

$$N = \alpha_N \rho D^{5-d_N} n^{2-d_N} V^{d_N} + \beta_N \rho D^5 n^2.$$

Στα τρισδιάστατα διαγράμματα (2.8), (2.9) παρουσιάζεται η σύγκριση των δεδομένων της δύναμης πρόωσης και ροπής των ελίκων που παρέχονται από τον κατασκευαστή και τα αποτελέσματα από την μοντελοποίηση. Τα αποτελέσματα δίνονται για διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες και σχετικές ταχύτητες του αεροχώματος. Οι γωνιακές ταχύτητες που θα λειτουργούν οι κινητήρες δεν θα ξεπερνάνε τα 1500 rad/s και όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, σε εκείνη την περιοχή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική.



Σχήμα 2.8 Σύγκριση Δύναμης Όθησης



Σχήμα 2.9 Σύγκριση Ροπής Αντίδρασης

Χαρακτηρισμός Φορτίου Έλικας

Στόχος της ενότητας είναι ο χαρακτηρισμός των παραγόμενων δυνάμεων T , N , που, σε αντίθεση με την προηγούμενη αναλυτική μοντελοποίηση, θέτει τις δυνάμεις σε μορφή διαχειρίσιμη για την σύνθεση της αφινικής δομής. Για το χαρακτηρισμό του παραγόμενου φορτίου μιας έλικας απαιτούνται δεδομένα, που περιγράφουν τη δύναμη ώθησης καθώς και τη ροπή αντίδρασης συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας του κινητήρα και την ταχύτητα ανέμου

$$T(\omega, V) = \alpha\omega^2 + \beta V^2$$

$$N(\omega, V) = \gamma\omega^2 + \delta V^2.$$

Όσον αφορά τη δύναμη ώθησης, ορίζεται η απεικόνιση $T : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με $T(\omega, V) = \alpha\omega^2 + \beta V^2$. Για την ροπή αντίδρασης ορίζεται $N : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με $N(\omega, V) = \gamma\omega^2 + \delta V^2$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ σταθεροί συντελεστές. Η μορφή αυτή των απεικονίσεων αποτελεί κοινή πρακτική στις προπέλες μικρού μεγέθους στη βιβλιογραφία. Μέλημα, τώρα, είναι να βρεθούν οι συντελεστές αυτοί οι οποίοι περιγράφουν βέλτιστα τα δεδομένα. Αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Το πρόβλημα που τίθεται προς λύση είναι

$$Ax = b,$$

όπου το μπτρό $A \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ περιέχει τα τετράγωνα των ω, V , το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ περιέχει τους συντελεστές α, β και το διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^n$ περιέχει τη δύναμη ώθησης. Όπου n το πλήθος των δεδομένων. Δηλαδή,

$$A = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & V_1^2 \\ \omega_2^2 & V_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_n^2 & V_n^2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}.$$

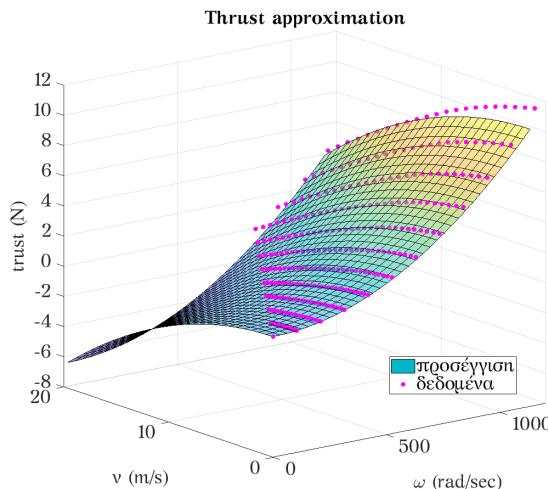
Το πρόβλημα αυτό όμως δεν έχει λύση, γι' αυτό αναζητείται το \hat{x} , για το οποίο θα ισχύει

$$\text{dist}(b, Ax) \leq \text{dist}(b, A\hat{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Το \hat{x} υπολογίζεται, έτσι ώστε το διάνυσμα $A\hat{x}$ να είναι η προβολή του διανύσματος b στο χώρο στηλών του μπτρώου A . Με αυτόν τον τρόπο

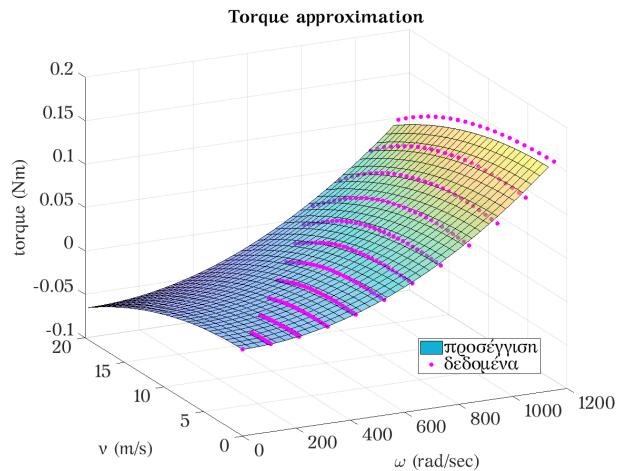
$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Το διάνυσμα \hat{x} επιστρέφει τις τιμές των α, β που προσέγγιζουν βέλτιστα τα δεδομένα του κατασκευαστή. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για τη δύναμη ώθησης φαίνονται στο σχήμα (2.10).



Σχήμα 2.10 Προσέγγιση δύναμης ώθησης

Αντίστοιχα για την προσέγγιση της ροπής αντίδρασης μέσω της ίδιας μεθόδου προκύπτει το αποτέλεσμα του σχήματος (2.11).



Σχήμα 2.11 Προσέγγιση ροπής αντίδρασης

Καθώς η αιώρηση του αεροχώματος περιορίζεται σε χαμηλές ταχύτητες πτήσης, ο όρος που επηρεάζει σημαντικά τα φορτία είναι αυτός της γωνιακής ταχύτητας. Έτσι, είναι δόκιμο να απολειφθεί ο όρος που σχετίζεται με την ταχύτητα ανέμου, δηλαδή ως απεικόνιση των φορτίων να χρησιμοποιηθεί η προβολή των συναρτήσεων T, N στη γωνιακή ταχύτητα. Οι προβολές που προκύπτουν θα έχουν το μορφή $\hat{T} = \alpha\omega^2$ και $\hat{N} = \gamma\omega^2$. Στο αερόχημα, όπου χρησιμοποιούνται δύο είδη ελίκων, αυτή η διαδικασία γίνεται δύο φορές, έτσι ορίζονται οι συναρτήσεις της δύναμης ώθησης και της ροπής αντίδρασης για τις δύο έλικες. Για την έλικα, που χρησιμοποιείται στους ευπρόσθιους κινητήρες, ορίζονται οι απεικονίσεις $p_T : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ και $p_N : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με $p_T = p_1\omega^2$ και $p_N = p_2\omega^2$. Για την οπίσθια έλικα ορίζονται $q_T : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ και $q_N : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με $q_T = p_3\omega^2$ και $q_N = p_4\omega^2$.

Οι έλικες, οι οποίες επιλέχθηκαν στην παρούσα εργασία, είναι οι Master AirScrew διάστασης 9×4 για τους δύο ευπρόσθιους κινητήρες, ενώ για τον πισινό κινητήρα επιλέχθηκε η έλικα APCProp διάστασης 10×4.5 .

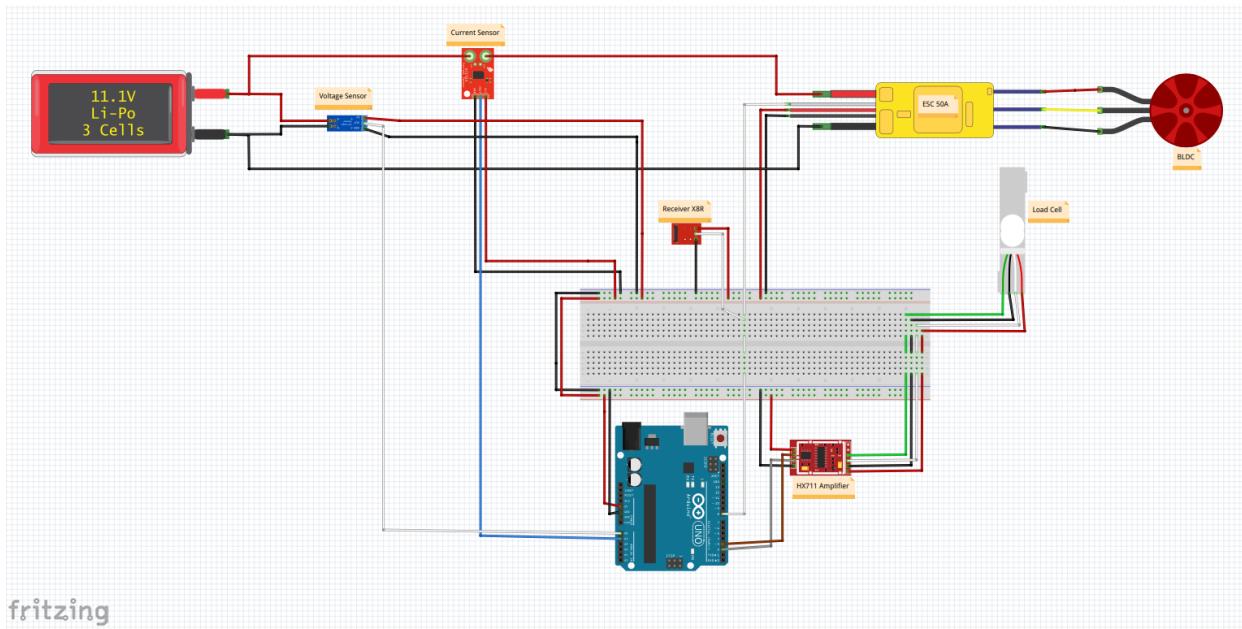


(α') Master Airscrew 9x4

(β') APC Propellers 10x4.5

Σχήμα 2.12 Έλικες

Τέλος για την επιβεβαίωση των στοιχείων που προσφέρει ο κατασκευαστής πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις της παραγόμενης ώθησης για τις έλικες που χρησιμοποιούνται. Οι μετρήσεις έγιναν υπό στατικές συνθήκες (μηδενική σχετική ταχύτητα ανέμου) και τα αποτελέσματα έδειξαν σύγκλιση στις τιμές του κατασκευαστή. Για τις ανάγκες των μετρήσεων χρησιμοποιήθηκε το ζυγιστικό όργανο Load-Cell 10kg (TAL220), ο μικροελεγκτής Arduino UNO καθώς και το απαιτούμενο σύστημα για την οδήγηση ενός κινητήρα στις απαιτούμενες στροφές. Ο μικροελεγκτής προγραμματίστηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C/C++.



Σχήμα 2.13 Σχηματική αναπαράσταση μετριτικής διάταξης

2.7 Μοντελοποίηση Κινητήρων

Η μοντελοποίηση των κινητήρων είναι σημαντική για την εφαρμογή του ελεγκτή στον μικροελεγκτή PIXHAWK. Ως σήμα δράσης, χρησιμοποιούνται οι τάσεις εισόδου του κάθε κινητήρα κινητήρα. Απαιτείται, λοιπόν, η σύνδεση τους με τις αντίστοιχες γωνιακές ταχύτητες των κινητήρων, οι οποίες αποτελούν μεταβλητές δράσης για τον ελεγκτή.

Οι δύο εμπρόσθιοι κινητήρες, που είναι συνδεδεμένοι στο αερόχημα, είναι οι AXI 2200/12 V2 Long Gold Line, ενώ επιλέχθηκε ως οπίσθιος κινητήρας ο AXI 2826/10 Gold Line. Οι συγκεκριμένοι κινητήρες είναι πλεκτρικοί κινητήρες συνεχούς ρεύματος χωρίς ψήκτρες (BLDC).



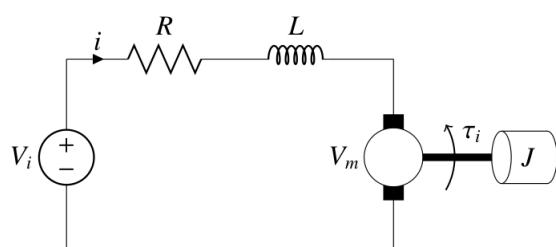
(α') AXI 2826/10 Gold Line



(β') AXI 2200/10 V2 Long Gold Line

Σχήμα 2.14 BLDC Κινητήρες

Το ισοδύναμο μοντέλο τέτοιου είδους κινητήρων φαίνεται στο σχήμα (2.15). Περιλαμβάνει την πηγή τάσης V_i , μία ισοδύναμη αντίσταση R και επαγωγή L και την τάση v_m , που αναπτύσσεται στο εσωτερικό του κινητήρα.



Σχήμα 2.15 Ηλεκτρονικό Κύκλωμα Κινητήρα

Εφαρμόζεται στο πλεκτρικό κύκλωμα ο νόμος της τάσης του Kirchoff και προκύπτει

$$v - Ri - L \frac{di}{dt} - v_m = 0.$$

Η συνεισφορά του επαγωγικού όρου θεωρείται αμελητέα, εφόσον τα δυναμικά χαρακτηριστικά της πλεκτρικής συνιστώσας είναι αρκετά ταχύτερα από αυτά της μηχανικής. Επομένως

$$(18) \quad v - Ri - v_m = 0.$$

Οι συγκεκριμένοι κινητήρες επιπλέον χαρακτηρίζονται από την γραμμική σχέση ανάμεσα στην περιστροφική ταχύτητα και την εσωτερική τάση, καθώς και ανάμεσα στην ροπή και το ρεύμα του κυκλώματος. Οι σχέσεις αυτές είναι

$$\begin{aligned} \omega &= K_v v_m \\ Q &= K_t (i - i_0) \end{aligned}$$

- με K_v χαρακτηριστική σταθερά του κινητήρα ($\frac{\text{rad/s}}{\text{v}}$)
- K_t χαρακτηριστική σταθερά του κινητήρα ($\frac{\text{rad/s}}{Q}$)
- i_0 σταθερό ρεύμα κινητήρα χωρίς φορτίο (σταθερά του κινητήρα).

Αντικαθιστώντας τις γραμμικές σχέσεις στον νόμο τάσης του Kirchoff, συντίθεται η σχέση

$$v = K_v \omega + \frac{QR}{K_t} + i_0 R.$$

Ωστόσο, στην μοντελοποίηση των ελίκων, ορίστηκε τετραγωνική σχέση της ροπής με την γωνιακή ταχύτητα. Στη μόνιμη κατάσταση, η ροπή, που προσδίδει ο κινητήρας, είναι ίση με την ροπή αντίστασης της έλικας $Q = N = \beta \omega^2$. Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$v = K_v \omega + \frac{\beta R}{K_t} \omega^2 + i_0 R.$$

Οι σταθερές K_v, K_t, R, i_0 αποτελούν κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του κινητήρα και δίνονται από τον κατασκευαστή. Επιπλέον ισχύει $K_v = \frac{1}{K_t}$.

Κεφάλαιο 3

Πειραματική Διάταξη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η κατασκευή μιας πειραματικής διάταξης τρικοπτέρου. Ο λόγος που οδήγησε στην υλοποίηση μιας τέτοιας διάταξης είναι κυρίως η ανάγκη δοκιμής της θεωρίας ελέγχου στον πραγματικό κόσμο. Επίσης, το κόστος καθώς και η προσπάθεια που απαιτούνται για την ανάπτυξη του πρωτότυπου αεροχώματος MPU είναι απαγορευτικά για τις πρώτες δοκιμές σε αυτό. Κατά τη διαδικασία σχεδίασης δόθηκε έμφαση στη χρήση οικονομικών τεμαχίων (π.χ. τυποποιημένες ράβδοι αλουμινίου) καθώς και εύκολα κατασκευάσιμων τεμαχίων από πολυμερή υλικά (3D-printed PLA). Η σχεδίαση της πειραματικής διάταξης έγινε στον σχεδιαστικό πρόγραμμα Autodesk Inventor.

3.1 Σχεδιασμός

Βασικός γνώμονας σχεδίασης της διάταξης είναι η ισοδυναμία της ως προς τον τρόπο λειτουργίας σε σχέση με το MPU. Η πειραματική διάταξη, που προέκυψε από το σχεδιασμό παρουσιάζεται στο σχήμα (3.1).



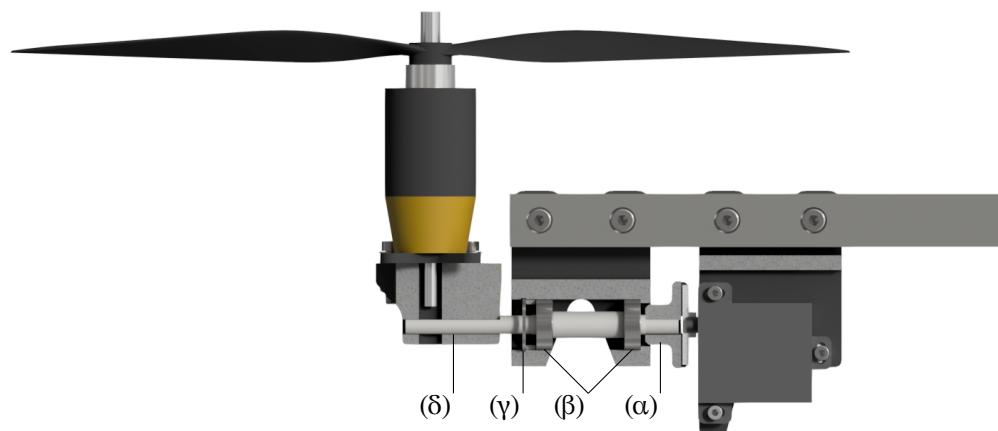
Σχήμα 3.1 Πειραματική διάταξη Τρικοπτέρου.

Ο απλούστερος τρόπος για να δημιουργηθεί ένα τρίκόπτερο είναι η σύνδεση δύο ράβδων σε διάταξη "Τ". Στο παρακάτω σχήμα (3.2), παρουσιάζεται το βασικό πλαίσιο σε ανάπτυγμα. Οι δύο ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με τη βοήθεια των πολυμερών τεμαχίων (μαύρο χρώμα) με χρήση κοχλιών σύσφιξης. Τα κυλινδρικά τεμάχια, που απεικονίζονται στο σχήμα, τοποθετήθηκαν για να αποτρέπουν την πλαστική παραμόρφωση των αλουμινένιων ράβδων κατά τη σύσφιξη των κοχλιοσυνδέσεων.

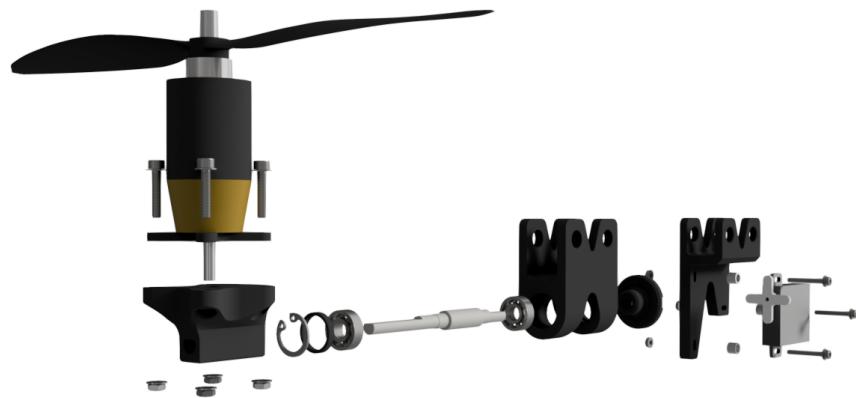


Σχήμα 3.2 Πλαίσιο Τρικοπτέρου.

Κρισιμότερο στοιχείο του τρικοπτέρου αποτελεί ο μηχανισμός του κεκλιμένου στροφείου, αφού επιτρέπει την περιστροφή του συστήματος έλικα-κινητήρας μεταφέροντας τις δυνάμεις και ροπές των κινητήρων στο πλαίσιο. Στο σχήμα (3.5), παρουσιάζεται μια τομή του μηχανισμού. Απαρτίζεται από τρία μέλη, το σερβομηχανισμό, την έδραση του άξονα περιστροφής και τον κινητήρα. Ο σερβομηχανισμός παράγει την απαραίμενη ροτόντη για την περιστροφή της βάσης του κινητήρα. Ο άξονας συνδέεται κινηματικά με την πλήνη του σερβομηχανισμού μέσω του συνδέσμου (α), με τον οποίο συνδέεται με σύνδεση μιορφής. Η έδραση εξασφαλίζει την ομαλή περιστροφή αποτρέποντας την καταπόνηση του σερβομηχανισμού. Για την έδραση χρησιμοποιήθηκαν δύο ένσφαιρα έδρανα κυλίσεως (β) και μία εσωτερική ασφάλεια ατράκτου (γ) για την αξονική στήριξη του άξονα. Τέλος ο άξονας συνδέεται με τη βάση του κινητήρα με σύνδεση μιορφής (δ). Στο σχήμα (3.4) παρουσιάζεται το ανάπτυγμα του μηχανισμού.



Σχήμα 3.3 Τομή Μηχανισμού Κεκλιμένου Στροφείου.



Σχήμα 3.4 Ανάπτυγμα Μηχανισμού Κεκλιμένου Στροφείου.

Για την στίριξη του μικροελεγκτή PixHawk, μια βάση προσδέθηκε στο πλαίσιο του τρικοπτέρου. Επιπλέον, κατασκευάστηκε ένα δικτύωμα από δοκούς αλουμινίου και κόμβους πολυμερούς PLA για την προστασία του από πτώσεις. Για την στίριξη του σταθερού οπίσθιου κινητήρα σχεδιάστηκε βάση με γνώμονα την αντοχή σε κάμψη. Στο σχήμα παρουσιάζονται σε ανάπτυγμα τα προαναφερθέντα τεμάχια.



Βάση PixHawk

Βάση Οπίσθιου Κινητήρα

Σχήμα 3.5

Η τελική μορφή της πειραματικής διάταξης, παρουσιάζεται στο σχήμα (3.6).



Σχήμα 3.6 Φωτογραφία τελικής διάταξης

Επιπρόσθετα, περιλαμβάνονται οι πλεκτρονικοί ελεγκτές ταχύτητας (ESC) των κινητήρων, JETI MASTERSPIN 55 PRO (2x) και JETI MASTERSPIN 66 PRO. Η μπαταρία Gens ace LiPo battery 6500mAh 3s1p και οι σερβομηχανισμοί Corona DS-239MG (2x).

3.2 Ανάλυση ζεύγους Κινητήρων - Ελίκων

Η επιλογή κινητήρων και ελίκων πραγματοποιήθηκε, με κύριο γνώμονα, την μέγιστη απόδοση του οχήματος MPU κατά την πτήση του ως αερόχημα σταθερής πτέρυγας, η οποία αποτελεί και το μεγαλύτερο χρονικά τμήμα της πτήσης. Η συγκεκριμένη διαδικασία βασίζεται στην αρχή ότι η ροπή που αποδίδει ο κινητήρας είναι ίση με την ροπή αντίστασης της έλικας σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Στο σημείο αυτό, υπολογίζεται η απόδοση του κινητήρα και της έλικας και εκτιμάται αν είναι ικανοποιητική.

Με την μοντελοποίηση του κινητήρα, έχουν ήδη περιγραφεί οι σχέσεις της ροπής με τη γωνιακή ταχύτητα και η ανάλυση βασίζεται σε αυτές. Από τον νόμο του Kirchoff (18), η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\omega = (v - iR)K_v$$

Ορίζεται επιπλέον η μηχανική αποδιδόμενη ισχύς του κινητήρα ως

$$(1) \quad P_{mech} = Q\omega = K_t(i - i_0)(v - iR)K_v = (i - i_0)(v - iR)$$

ενώ η προσδιδόμενη πλεκτρική ισχύς περιγράφεται από την σχέση

$$(2) \quad P_{elec} = vi$$

Από τον ορισμό της απόδοσης, η απόδοση του κινητήρα είναι το κλάσμα της ισχύς εξόδου του κινητήρα προς την ισχύ εισόδου.

$$(3) \quad \eta_m = \frac{P_{mech}}{P_{elec}} = \left(1 - \frac{i_0}{i}\right) \left(1 - \frac{iR}{v}\right)$$

Έπειτα, λύνοντας ως προς την ένταση του ρεύματος τον νόμο του Kirchoff, εξάγεται η σχέση

$$(4) \quad i = \left(v - \frac{\omega}{K_v} \right) \frac{1}{R}.$$

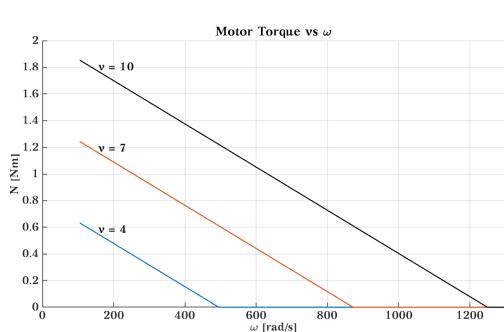
Αντικαθιστώντας, λοιπόν, την (4) στις σχέσεις (1), (2), (3) η απόδοση, η ροπή και η αποδιδόμενη ισχύς του κινητήρα εκφράζονται από σχέσεις που εξαρτώνται από την τάση εισόδου και την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής.

$$Q(\omega, v) = K_t \left[\left(v - \frac{\omega}{K_v} \right) \frac{1}{R} - i_0 \right]$$

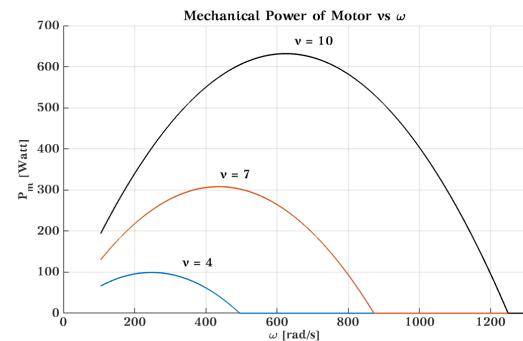
$$P_{\text{mech}}(\omega, v) = \left[\left(v - \frac{\omega}{K_v} \right) \frac{1}{R} - i_0 \right] \frac{\omega}{K_v}$$

$$\eta_m(\omega, v) = \left[1 - \frac{i_0 R}{v - \omega/K_v} \right] \frac{\omega}{v K_v}.$$

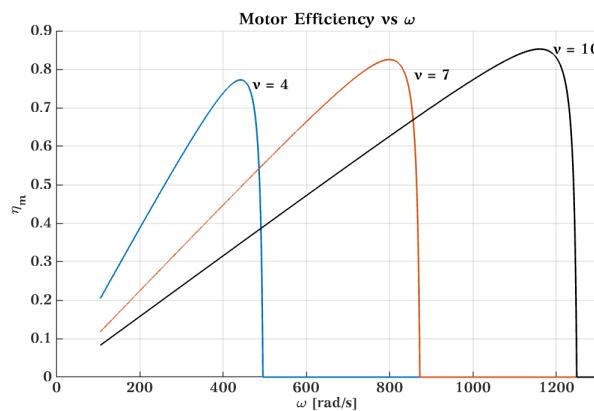
Οι παραπάνω εξισώσεις παράγουν τα διαγράμματα (3.7), (3.8), (3.9), για τρεις διαφορετικές τιμές τάσης εισόδου



Σχήμα 3.7 Ροπή κινητήρα



Σχήμα 3.8 Μηχανική Ισχύς κινητήρα

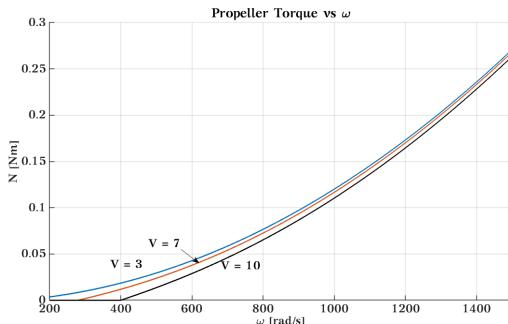


Σχήμα 3.9 Απόδοση κινητήρα

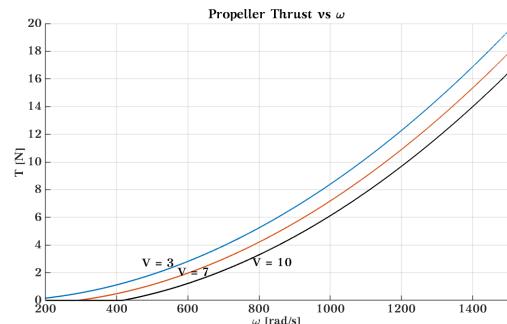
Όσον αναφορά την δύναμη πρόωσης και την ροπή αντίστασης της έλικας, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις που εξήχθησαν στην μοντελοποίηση των έλικων. Για τη μηχανική απόδοση της έλικας ακολουθείται ο ορισμός που χρησιμοποιήθηκε για την απόδοση του κινητήρα. Έτσι, η απόδοση είναι το κλάσμα της ισχύς εξόδου της έλικας προς την μηχανική ισχύ που παραλαμβάνει από τον κινητήρα και εκφράζεται ως

$$\eta_p = \frac{TV}{N\omega} = \frac{C_T}{2\pi C_N} J.$$

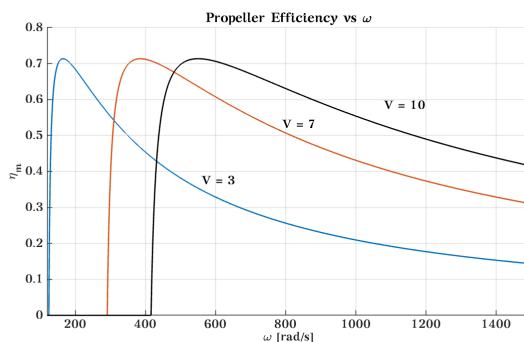
Οι σχέσεις των δυνάμεων με τη μηχανική απόδοση της έλικας παράγουν τα διαγράμματα (3.10), (3.11), (3.12), για τρεις διαφορετικές τιμές ταχύτητας πτήσης.



Σχήμα 3.10 Ροπή έλικας



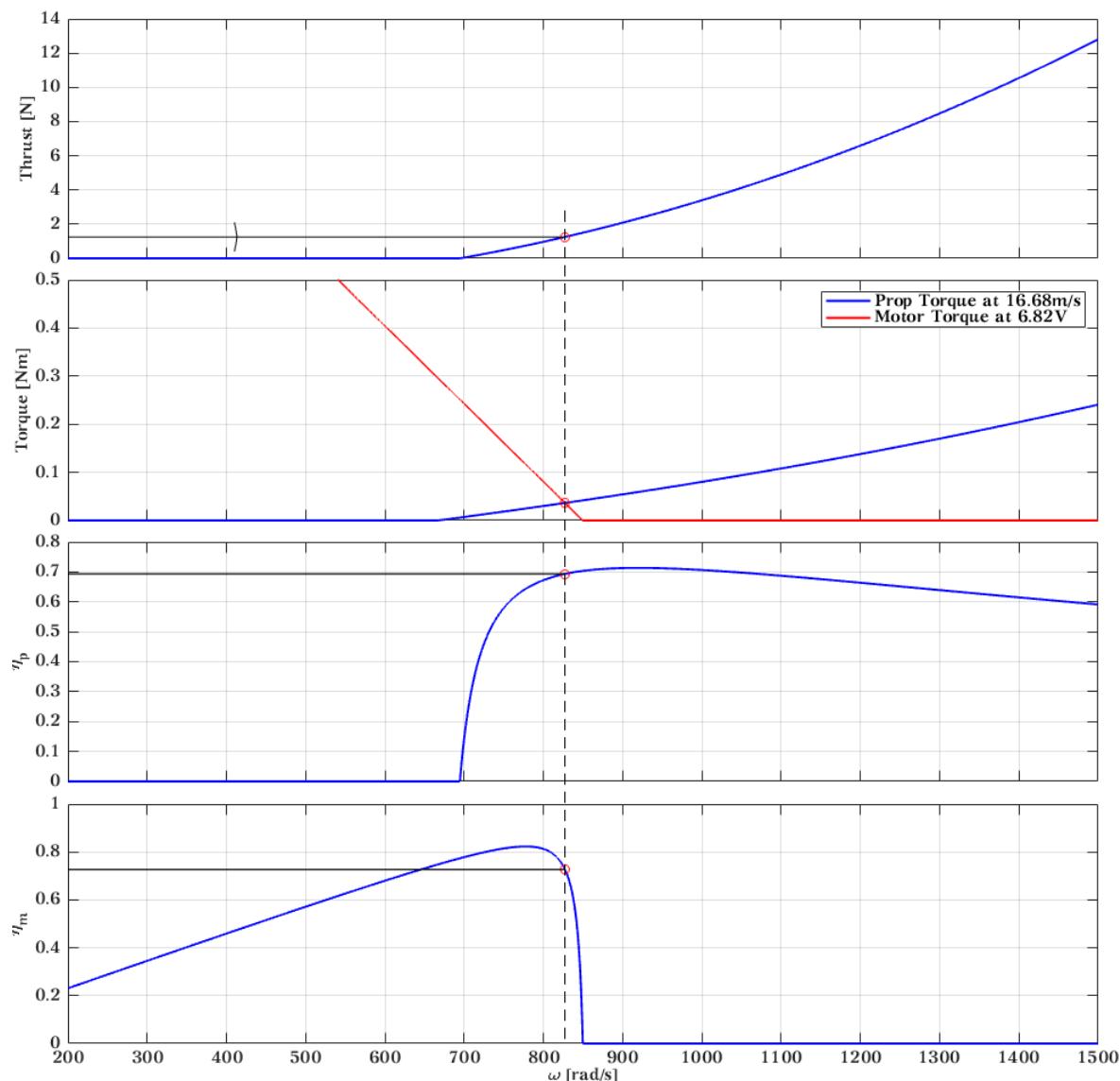
Σχήμα 3.11 Δύναμη Όθυσης



Σχήμα 3.12 Απόδοση έλικας

Με τις παραπάνω πληροφορίες, γίνεται δυνατή η ανάλυση του ζεύγους κινητήρα έλικας. Συγκεκριμένα, για κατάσταση πτήσης με παράμετρο την επιθυμητή δύναμη πρόσωσης και την επιθυμητή ταχύτητα πτήσης, βρίσκεται η ταχύτητα περιστροφής ισορροπίας, όπου η ροπή αντίστασης της έλικας είναι ίση με την ροπή του κινητήρα $Q = N$. Έχοντας βρει το συγκεκριμένο σημείο, εκτιμάται η απόδοση του κινητήρα και της έλικας.

Η ανάλυση, όπως προαναφέρθηκε, γίνεται για πτήση του αεροχώματος ως σταθερή πτέρυγα για μία μέση κατάσταση λειτουργίας με ταχύτητα πτήσης $V = 60 \text{ km/h} (= 16.67 \text{ m/s})$ και με αεροδυναμική οπισθέλκουσα $\text{Drag} = 2.5 \text{ N}$. Για λειτουργία μόνιμης κατάστασης, η δύναμη πρόσωσης των δύο εμπρόσθιων ελίκων πρέπει να ισούται με την αεροδυναμική αντίσταση. Έτσι, απαιτείται δύναμη πρόσωσης από κάθε έλικα $T = 1.25 \text{ N}$. Στο διάγραμμα (3.13) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.



Σχήμα 3.13 Διαδικασία εύρεσης αποδόσεων και ταχύτητας περιστροφής

Από την παραπάνω διαδικασία εκτιμάται η απόδοση της έλικας είναι $\eta_p = 69.33\%$ και η απόδοση του κινητήρα είναι $\eta_m = 72.67\%$, ενώ η ταχύτητα περιστροφής της έλικας είναι $\omega = 827.2 \text{ rad/s}$ και η τάση εισόδου που απαιτείται είναι $v = 6.82 \text{ Volt}$.

Οι δύο αποδόσεις είναι ικανοποιητικές, εφόσον η μέγιστη απόδοση του κινητήρα σύμφωνα με τον κατασκευαστή είναι $\eta_{m,\max} = 82\%$ ενώ από γενική θεωρία, οι έλικες δεν μπορούν να ξεπεράσουν τα $\eta_{p,\max} = 80\%$.

Τέλος, είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν τα φυσικά όρια λειτουργίας των ενεργοποιητών. Η ισχύς που απαιτεί μία έλικα για την παραγωγή δεδομένης ώθησης, πρέπει να καλύπτεται από τη διαθέσιμη ισχύ του κινητήρα. Εκεί, λαμβάνονται υπόψιν οι μέγιστες επιτρεπόμενες εντάσεις ρεύματος. Σύμφωνα με την συγκεκριμένη διαδικασία προκύπτουν $\omega_{b,\max} = 11000 \text{ rpm}$, $\omega_{l,r,\max} = 13000 \text{ rpm}$.

Κεφάλαιο 4

Σχεδιασμός Ελεγκτή

Ο στόχος του κεφαλαίου είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου για την αυτόνομη αιώροπη και παρακολούθηση τροχιάς αναφοράς για το τρικόπτερο. Στο πρώτο στάδιο γίνεται σύνθεση ενός υπ-γραμμικού ελεγκτή, ο οποίος χρησιμοποιεί δυναμική γραμμικοποίηση με ανάδραση και επιβάλλει τα επιθυμητά δυναμικά απόκλισης των μεταβλητών κατάστασης από τις τροχιές αναφοράς (error dynamics). Έπειτα, λαμβάνοντας υπόψιν δυναμικές και μόνιμες διαταραχές του συστήματος, γίνεται χρήση του γ-υποβέλτιστου ελέγχου.

4.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο

4.1.1 Συμβολισμοί Έστω A_1, \dots, A_k σύνολα. Συμβολίζουμε $\prod_1^k A_i$ το γινόμενο τους $A_1 \times \dots \times A_k$. Δηλαδή, $\prod_1^k A_i$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $x : \{1, \dots, k\} \rightarrow \cup_1^k A_i$ με $x(i) \in A_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$.

Αν $x \in \prod_1^k A_i$, συχνά συμβολίζουμε την τιμή της x στο i με x_i και τη x με (x_1, \dots, x_k) ή $(x_i)_1^k$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συχνά παραλείπουμε τους δείκτες, δηλαδή γράφουμε $\prod A_i$ αντί $\prod_i^k A_i$ και (x_i) αντί $(x_i)_1^k$. Αν $A_i = A$ για κάθε i , τότε συμβολίζουμε το $\prod A_i$ και ως A^k .

4.1.2 Ορισμοί Έστω X, Y σύνολα, $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση και τα σύνολα $A \subset X, B \subset Y$. Τότε το σύνολο $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ ονομάζεται **η εικόνα** του A και συμβολίζεται με $\text{im } A$. Επίσης το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$ ονομάζεται **η αντίστροφη εικόνα** του B .

Η f λέγεται **επίρρωψη** αν $f(X) = Y$. Δηλαδή, αν για κάθε $y \in Y$, υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$. Η f λέγεται **ένριψη** αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$, με $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Η f λέγεται **αμφίρρωψη**, αν είναι ένριψη και επίρρωψη. Δηλαδή, αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in X$ ώστε $f(x) = y$.

4.1.3 Ορισμοί Έστω οι γραμμικοί χώροι V και W επί του \mathbb{R} και $A : V \rightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε το σύνολο $A^{-1}(\{0\})$ ονομάζεται **πυρήνας** της A και συμβολίζεται με $\ker A$.

Παρατηρήσεις Στην περίπτωση που $\ker A = 0$, αποδεικνύεται εύκολα ότι η A είναι ενριπτική. [8]

4.1.4 Ορισμοί Υποθέτουμε ότι $S \subset \mathbb{R}$, $E \subset S$ και ότι το E είναι άνω φραγμένο. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha \in S$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το α είναι άνω φράγμα του E .
2. Έαν το γ είναι στοιχείο στο S , με $\gamma < \alpha$, τότε το γ δεν είναι άνω φράγμα του E .

Τότε, και μόνον τότε, το α ονομάζεται το **ελάχιστο άνω φράγμα** του E ή αλλιώς το **supremum** του E και γράφουμε

$$\alpha = \sup E.$$

Το **μέγιστο κάτω φράγμα** ή αλλιώς το **infimum** ενός κάτω φραγμένου συνόλου E ορίζεται με ανάλογο τρόπο και συμβολίζεται ως

$$\alpha = \inf E.$$

4.1.5 Ορισμοί Έστω X, Y γραμμικοί χώροι. Για κάθε $j \in \{1, \dots, k\}$, η επιφαντική απεικόνιση $\pi_j : \prod X_i \rightarrow X_j$ με $\pi_j((x_i)) = x_j$ ονομάζεται η **προβολή** του $\prod X_i$ επί του παράγοντα X_j .

Για κάθε $j \in \{1, \dots, k\}$, η ενφαντική απεικόνιση $\theta_j : X_j \rightarrow \prod X_i$ με $\theta_j(y) = (x_i)$, όπου $x_i = 0$ όταν $i \neq j$ και $x_j = y$, ονομάζεται **συνήθης ένθεση** του παράγοντα X_j εντός του $\prod X_i$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι X, Y είναι χώροι με νόρμα και $\Lambda : X \rightarrow Y$ γραμμική απεικόνιση. Αν η Λ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή είναι αμφιφραγτική, συνεχής και η αντίστροφη απεικόνιση $\Lambda^{-1} : Y \rightarrow X$, είναι συνεχής, τότε λέμε ότι η Λ είναι **ισομορφισμός**.

Στην ειδική περίπτωση που $Y = X$, λέμε ότι η Λ είναι **αυτομορφισμός**.

Στην περίπτωση που υπάρχει ισομορφισμός $\Lambda : X \rightarrow Y$, λέμε ότι οι χώροι X, Y είναι **ισομορφικοί** ή ότι ο X είναι **ισομορφικός** με τον Y .

Αν οι χώροι X, Y είναι ισομορφικοί τότε συμβολίζουμε με $GL(X, Y)$ το σύνολο όλων των ισομορφισμών του X επί του Y .

4.1.6 Ορισμοί Έστω V πραγματικός διανυσματικός χώρος. Ένα εσωτερικό γινόμενο στο V είναι μία απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Διγραμμικότητα: για κάθε $x, y, z \in V$ και $a \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \text{και} \quad \langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle.$$

- Συμμετρία: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ για κάθε $x, y \in V$.
- Θετικότητα: $\langle x, x \rangle > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Ως **ευκλείδειος χώρος** ορίζεται το ζεύγος $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Η **νόρμα που επάγεται στο V από το εσωτερικό του γινόμενο** είναι η απεικόνιση $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty)$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

4.1.7 Λίμπα Έστω V ευκλείδειος χώρος, $\{v_1, \dots, v_r\}$ ορθοκανονική βάση του V και

$$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$$

ο υποχώρος που παράγεται από την $\{v_i\}$. Κάθε $v \in V$ μπορεί να εκφρασθεί μοναδικά ως άθροισμα $v = u + w$ με $u \in U$ και w ανίκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα U^\perp της U . [8]

4.1.8 Ορισμός Μια διαφορίσιμη απεικόνιση f ενός ανοιχτού συνόλου $E \subset \mathbb{R}^n$ στον \mathbb{R}^m ονομάζεται **συνεχώς διαφορίσιμη** ή **C^1 -απεικόνιση** αν η f' είναι συνεχής απεικόνιση του E στο $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Αν $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι C^1 -απεικόνιση τότε γράφουμε $f \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^m)$.

4.1.9 Ορισμοί Έστω X_1, \dots, X_k, Y γραμμικοί χώροι. Μια απεικόνιση $\Lambda : \prod_i^k X_i \rightarrow Y$ ονομάζεται **πολυγραμμική** ή **k -γραμμική** αν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά, δηλαδή για κάθε $j \in \{1, \dots, k\}$ και $x_i \in X_i$ για $i \neq j$, η απεικόνιση

$$X_j \ni x \mapsto \Lambda(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_k) \in Y$$

είναι γραμμική ως προς x . Αν $k = 2$ ή $k = 3$, η Λ ονομάζεται **διγραμμική** και τριγραμμική αντίστοιχα. Επίσης το σύνολο των πολυγραμμικών απεικονίσεων από το $\prod X_i$ στο Y συμβολίζεται με $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$. Αν $X = X_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$ τότε γράφουμε $\mathcal{L}_k(X, Y)$ αντί του $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$. Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων του X στο Y είναι το $\mathcal{L}_1(X, Y)$ και συχνά συμβολίζεται απλώς ως $\mathcal{L}(X, Y)$. Αν $Y = X$ τότε γράφουμε $\mathcal{L}_k(X)$ αντί του $\mathcal{L}_k(X, Y)$ και $\mathcal{L}(X)$ αντί του $\mathcal{L}(X, Y)$. Για κάθε $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$, θέτουμε

$$\|\Lambda\| = \inf \left\{ c > 0 \mid \|\Lambda((x_i))\| \leq c \|x_1\| \dots \|x_k\| \quad \text{για κάθε } (x_i) \in \prod X_i \right\}.$$

4.1.10 Θεώρημα Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\Lambda : V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε η εικόνα της Λ είναι διανυσματικός υποχώρος πεπερασμένης διάστασης και ισχύει

$$\dim V = \dim \ker \Lambda + \dim \text{im } \Lambda.$$

Αναλυτικότερα στο [11].

Παρατηρήσεις Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει πως αν μια γραμμική απεικόνιση είναι ενοιπτική τότε είναι και επιοριπτική, άρα αμφίρροιψη.

4.1.11 Πρόταση Για μια γραμμική απεικόνιση $T : V \rightarrow W$ ισχύει $\dim \text{im } T^* = \dim(\ker T)^\perp$.
Βλέπε απόδειξη [16].

4.1.12 Θεώρημα Έστω X_1, \dots, X_k και Y χώροι με νόρμα, $B_i = \{x \in X_i \mid \|x\| \leq 1\}$ n μοναδιαία κλειστή μπάλα στο X_i και $\Lambda : \prod X_i \rightarrow Y$ μια πολυγραμμική απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $H \Lambda$ είναι συνεχής.
2. $H \Lambda$ είναι συνεχής στο $0 \in \prod X_i$.
3. Ο περιορισμός της Λ στο $\prod B_i$ είναι φραγμένη συνάρτηση.
4. Υπάρχει μια σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\Lambda(x_i)\| \leq c \|x_1\| \dots \|x_k\| \text{ για κάθε } (x_i) \in \prod X_i.$$

Βλέπε απόδειξη [5].

Παρατηρήσεις Είναι σαφές ότι το σύνολο $\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_k; Y)$, με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι γραμμικός χώρος.

Αν $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$, τότε $\|\Lambda((x_i))\| \leq \|\Lambda\| \|x_1\| \dots \|x_k\|$ για $(x_i) \in \prod X_i$: για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $c < \|\Lambda\| + \epsilon$ και $\|\Lambda((x_i))\| \leq c \|x_1\| \dots \|x_k\|$ για $(x_i) \in \prod X_i$. Επομένως $\|\Lambda((x_i))\| \leq (\|\Lambda\| + \epsilon) \|x_1\| \dots \|x_k\|$ για κάθε $x_i \in \prod X_i$ και $\epsilon > 0$.

Αν $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$, τότε

$$\|\Lambda\| = \sup \{\|\Lambda((x_i))\| \mid \|x_i\| = 1 \leq i \leq k\} = \sup \{\|\Lambda((x_i))\| \mid \|x_i\| \leq 1 \leq i \leq k\}.$$

Πράγματι, αν a είναι το πρώτο supremum στην παραπάνω σχέση και b το δεύτερο, τότε προφανώς $a \leq b \leq \|\Lambda\|$. Επίσης για τυχόν $(x_i) \in \prod X_i$, αν $x_i \neq 0$ για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$, τότε

$$(\|x_1\| \dots \|x_k\|)^{-1} \|\Lambda((x_i))\| = \|\Lambda((x_i / \|x_i\|))\| \leq a,$$

άρα $\|\Lambda((x_i))\| \leq a \|x_1\| \dots \|x_k\|$. Επομένως $\|\Lambda\| \leq a$.

4.1.13 Πρόταση Έστω X_1, \dots, X_k και Y χώροι με νόρμα και $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y)$. Τότε n Λ είναι λεία και ισχύει

$$\Lambda'((x_i))((h_i)) = \Lambda(h_1, x_2, \dots, x_k) + \Lambda(x_1, h_2, x_3, \dots, x_k) + \dots + \Lambda(x_1, \dots, x_{k-1}, h_k)$$

για κάθε $(x_i), (h_i) \in \prod X_i$.

Βλέπε απόδειξη [1], [5].

4.1.14 Πρόταση Έστω X, Y γραμμικοί χώροι ίδιας πεπερασμένης διάστασης. Τότε

1. Το $\text{GL}(X, Y)$ είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. Η απεικόνιση $f : \text{GL}(X, Y) \rightarrow \text{GL}(X, Y)$ με $f(A) = A^{-1}$ είναι λεία.
3. Ισχύει ότι $f'(A) \Lambda = -A^{-1} \circ \Lambda \circ A^{-1}$ για $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Βλέπε απόδειξη [1], [5].

4.2 Μη-Γραμμικός Ελεγκτής

Στην αυτόνομη καθοδήγηση αιώροσης του αεροχώματος, οι συντεταγμένες x και y δεν αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας. Από το αφινικό σύστημα διαφαίνεται ότι οι μεταβλητές κατάστασης που απευθύνονται στις κινήσεις στους συγκεκριμένους άξονες, είναι αποσυμπλεγμένες από τις υπόλοιπες και μπορούν να απαλειφθούν από το σύστημα.

Σημειώνεται πως για την απλούστευση των εκφράσεων, πλέον, τα διανύσματα $(x_i), (y_i)$ κλπ θα συμβολίζονται απλώς ως x, y .

Επιπλέον, πριν την αρχική σχεδίαση του μη-γραμμικού ελεγκτή γίνεται διαχωρισμός του δυναμικού συστήματος αφινικής δομής σε δύο υποσυστήματα, με το πρώτο να περιέχει τις εξισώσεις κινητικής και κατ' επέκταση τις δράσεις ελέγχου, και το δεύτερο τις εξισώσεις κινηματικής. Εξάγεται λοιπόν η μορφή

$$(1) \quad \dot{x} = f_0(x, y) + \sum_i^m d_i f_i(x, y)$$

$$(2) \quad \dot{y} = A(y)x$$

όπου

$$(3) \quad f_0 : \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_0 = \begin{pmatrix} g \\ -I_G^{-1}(\omega \times I_G \omega) \end{pmatrix}$$

$f_i : \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ λείες απεικονίσεις που συνθέτουν πίνακα

$$G = (f_1, \dots, f_m) = \begin{pmatrix} m^{-1}(R_{3,1}, R_{3,3}) & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & I_G^{-1} \end{pmatrix}$$

και την λεία απεικόνιση $A : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & R_{eul} \end{pmatrix}$$

με τις μεταβλητές

$$\begin{aligned} x &= (v_z \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)^T \in \mathbb{R}^n \\ y &= (z_E \quad e^r)^T \in V \\ d &= (T_x \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z)^T \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

ενώ $n = 4, m = 5$.

Από το σύστημα παρατηρείται ότι το ανοιχτό σύνολο $V = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$. Επίσης το $\text{span}\{f_i(x, y)\} = \mathbb{R}^n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n, y \in V$, δηλαδή ο πίνακας G είναι πλήρης τάξης- n που σημαίνει ότι το διάνυσμα εισόδου μπορεί να παράξει όλο τον χώρο των μεταβλητών x . Ακόμη, $A(V) \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή η $A(y)$ είναι αυτομορφισμός για κάθε $y \in V$.

Σταθεροποιούμε τυχόντα $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in V$, θέτουμε την γραμμική απεικόνιση

$$\Lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^m \ni d \mapsto \sum_i^m d_i f_i(x, y) \in \mathbb{R}^n.$$

Από το γεγονός ότι $\text{span}\{f_i(x, y)\} = \mathbb{R}^n$, λαμβάνουμε ότι

$$\dim \ker \Lambda^* = n - \dim \text{im} \Lambda^* = n - \dim \text{im} \Lambda = 0,$$

δηλαδή Λ^* είναι ενριπτική (από 4.1.3).

Από την ισότητα $\langle \Lambda^* x, \Lambda^* x \rangle = \langle (\Lambda \circ \Lambda^*) x, x \rangle$ συνεπάγεται ότι $\ker \Lambda \circ \Lambda^* = \{0\}$ και άρα η $\Lambda \circ \Lambda^*$ αυτομορφισμός. (Βλ. 4.1.10)

Το σύνολο λύσεων S για σύστημα $\Lambda x = z$ με $z \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Lambda x = z\} = \{x_0 + x \mid x \in \ker \Lambda, \Lambda x_0 = z\}.$$

Βλ. 4.1.7.

Μία λύση x_0 αποτελεί η

$$x_0 = (\Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1}) z$$

έτσι ώστε

$$\Lambda x_0 = z \Rightarrow \Lambda \circ (\Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1}) z = z \Rightarrow z = z.$$

Επιπλέον η λύση x_0 αποτελεί στοιχείο του S με ελάχιστη νόρμα. Πράγματι έχουμε ότι $x_0 \in \text{im } \Lambda^* = \ker \Lambda^\perp$ (από 4.1.11). Επίσης, αν $x_1 \in S$ με $x_1 \neq x_0$ τότε $(x_1 - x_0) \in \ker \Lambda$. Συνεπώς από Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι

$$\|x_1\|^2 = \|(x_1 - x_0) + x_0\|^2 = \|x_1 - x_0\|^2 + \|x_0\|^2 > \|x_0\|^2.$$

Η απεικόνιση $(x, y) \mapsto \Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1}$ του $\mathbb{R}^n \times V$ στο $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, (\mathbb{R})^m)$ είναι λεία και συμπεριφέρεται από τον ακόλουθο συλλογισμό: Έστω B , η απεικόνιση, που αντιστοιχίζει σε κάθε $(x_i)_1^m \in (\mathbb{R}^n)^m$ την γραμμική απεικόνιση $(u_i)_1^m \mapsto \sum u_i x_i$. Η B είναι ισομορφισμός του $(\mathbb{R}^n)^m$ επί του $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ και άρα η $(x, y) \mapsto \Lambda$ είναι λεία, διότι είναι σύνθεση της B με την απεικόνιση $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$ η οποία είναι λεία διότι, όπως αναφέρθηκε, οι f_i είναι λείες. Επιπλέον, η $\Lambda \mapsto \Lambda^*$ είναι γραμμική, άρα είναι λεία και το ίδιο ισχύει για τη σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων $(A, B) \mapsto A \circ B$. Επειδή και η απεικόνιση $A \mapsto A^{-1}$ του $GL(\mathbb{R}^n)$ επί του $GL(\mathbb{R}^n)$ είναι λεία, καταλήγουμε, λοιπόν, ότι η $(x, y) \mapsto \Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1}$ είναι λεία ως σύνθεση λείων απεικονίσεων. Υποθέτουμε λεία απεικόνιση $\bar{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ και θέτουμε τις απεικονίσεις:

$$w : \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad (x, y) \mapsto \Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1},$$

$$d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_i(t, x, y) = \pi_i((w(x, y))(\bar{v}(t, x, y))) \quad \text{για } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Κάθε προβολή π_i είναι λεία απεικόνιση και το ίδιο ισχύει για την απεικόνιση $(A, x) \mapsto Ax$ του $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n$ στο \mathbb{R}^m , γιατί είναι διγραμμική. Επομένως, κάθε d_i είναι λεία απεικόνιση ως σύνθεση λείων απεικονίσεων. Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum d_i(t, x, y) f_i(x, y) &= \sum \pi_i((w(x, y))(\bar{v}(t, x, y))) f_i(x, y) = \Lambda((w(x, y))\bar{v}(t, x, y)) = \\ &= \Lambda((\Lambda^* \circ (\Lambda \circ \Lambda^*)^{-1})\bar{v}(t, x, y)) = \bar{v}(t, x, y). \end{aligned}$$

Θέτοντας μια ακόμη λεία απεικόνιση $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ και αν $\bar{v}(t, x, y) = -f_0(x, y) + v(t, x, y)$ το σύστημα (1,2) μετασχηματίζεται σε

$$(4) \quad \dot{x} = v(t, x, y)$$

$$(5) \quad \dot{y} = A(y)x.$$

Έτσι, καταφέρνουμε να απορρίπτουμε το μη-γραμμικό διανυσματικό πεδίο f_0 από τις κινητικές εξισώσεις για κάθε x, y . Αυτό στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως γραμμικοποίηση με ανάδραση (feedback linearization).

Αντικείμενο του ελέγχου είναι η ακολούθηση μιας τροχιάς αναφοράς από τις μεταβλητές εξόδου y . Ορίζεται η δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση $y_r : \mathbb{R} \rightarrow V$, η οποία αποτελεί το σήμα αναφοράς των μεταβλητών y . Ορίζεται επιπλέον η απεικόνιση $\alpha : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\alpha(t, y) = K_1(y - y_r(t)) + \dot{y}_r(t)$, όπου $K_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ γραμμικός μετασχηματισμός με ιδιοτιμές το αρνητικό ημιεπίπεδο. Η α είναι λεία ως σύνθεση λείων απεικονίσεων. Έαν ταυτιστεί το διάνυσμα \dot{y} με την απεικόνιση α τότε θα έχουμε

$$\dot{y} = a(t, y) \Rightarrow \dot{y} = K_1(y - y_r(t)) + \dot{y}_r(t) \Rightarrow \dot{y} - \dot{y}_r(t) = K_1(y - y_r(t)),$$

θέτοντας τη μεταβλητή απόκλισης $\tilde{y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\tilde{y} = y - y_r(t)$ παίρνουμε τη διαφορική εξίσωσης πρώτης τάξης $\dot{\tilde{y}} = K_1 \tilde{y}$, λύση της οποίας είναι $\tilde{y} = e^{t K_1} \tilde{y}_0$ δηλαδή η μεταβλητή απόκλισης \tilde{y} τείνει εκθετικά στο 0 και ταυτόχρονα η μεταβλητή εξόδου y τείνει στο σήμα αναφοράς y_r . Όμως, η δράση ελέγχου δε δρα απευθείας στις μεταβλητές εξόδου αλλά μέσω των μεταβλητών x .

Θέτουμε $f : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ με $f(A) = A^{-1}$ και $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\phi(t) = ((f \circ A)(y(t))) \alpha(t)$. Όπως δείξαμε στην πρόταση (4.1.14) για την απεικόνιση $\phi(t)$ θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= ((f \circ A)(y))' \alpha + ((f \circ A)(y)) \dot{\alpha} = (f'(A(y))(A'(y)\dot{y})) \alpha + ((f \circ A)(y)) \dot{\alpha} \\ &= -(A(y)^{-1} \circ (A'(y)\dot{y})) (A(y)^{-1} \alpha) + A(y)^{-1} \dot{\alpha} \\ \text{που συνεπάγεται ότι} \quad \dot{\phi} &= -(A(y)^{-1} \circ (A'(y)\dot{y})) \phi + A(y)^{-1} \dot{\alpha}.\end{aligned}$$

Η ταύτιση $\dot{y} = \alpha$ ισοδυναμεί με $x = A(y)^{-1} \alpha$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$(6) \quad \dot{x} = A(y)^{-1} (\dot{\alpha} - A'(y)\dot{y}x).$$

Έτσι, η απεικόνιση θ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του λείου διανυσματικού πεδίου

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto A(y(t))^{-1} (\dot{\alpha}(t) - A'(y(t)) \dot{y}(t)x) \in \mathbb{R}^n$$

το οποίο για τυχαίο $t_0 \in \mathbb{R}$ διέρχεται από το $(t_0, A(y(t_0))^{-1} \alpha(t_0))$. Καθώς οι δράσεις ελέγχου ασκούνται στις μεταβλητές \dot{x} , πρέπει να κατασκευαστεί μια έκφραση για τις \dot{x} η οποία θα οδηγεί την x στο $A(y)^{-1} \alpha$. Όπως δείξαμε, δεν αρκεί απλώς να ικανοποιηθεί η σχέση (6) καθώς η ολοκληρωτική καμπύλη θ καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Επιλέγεται ένας $K_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ με όλες τις ιδιοτιμές του K_2 να βρίσκονται στο αριστερό ημεπίπεδο. Θέτουμε $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $b(t, x, \phi) = K_2(x - \phi(t)) + \dot{\phi}(t)$. Εάν $\dot{x} = b$ τότε θα έχουμε

$$\dot{x} = b(t, x, \phi) = K_2(x - \phi(t)) + \dot{\phi}(t), \quad \text{που συνεπάγεται} \quad \dot{x} - \dot{\phi}(t) = K_2(x - \phi(t)).$$

Έτσι, θέτοντας την μεταβλητή απόκλισης $\tilde{x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\tilde{x} = x - \phi(t)$. Παίρνουμε λοιπόν $\dot{\tilde{x}} = K_2 \tilde{x}$, η λύση της οποίας είναι $\tilde{x}(t) = e^{t K_2} \tilde{x}_0$ η οποία τείνει εκθετικά την μεταβλητή απόκλισης \tilde{x} στο 0. Έτσι επιλέγεται $v(t, x, y) = b(t, x, \phi)$ δηλαδή ότι

$$(7) \quad \begin{aligned}\bar{v}(t, x, y) &= -f_0(x, y) + b(t, x, \phi) \\ &\quad \text{ή ισοδύναμα} \\ \bar{v}(t, x, y) &= -f_0(x, y) + A(y)^{-1} (\dot{\alpha}(t) - (A'(y)(A(y)x)) A(y)^{-1} \alpha(t)) + K_2(x - A(y)^{-1} \alpha(t)).\end{aligned}$$

Με την εισαγωγή του όρου $K_2(x - A(y)^{-1} \alpha(t))$ επιτυγχάνεται η σύγκλιση του όρου x στο $A(y)^{-1} \alpha$ ανεξαρτήτων αρχικών συνθηκών. Με τη σειρά τους και οι μεταβλητές εξόδου y συγκλίνουν στο επιθυμητό σήμα.

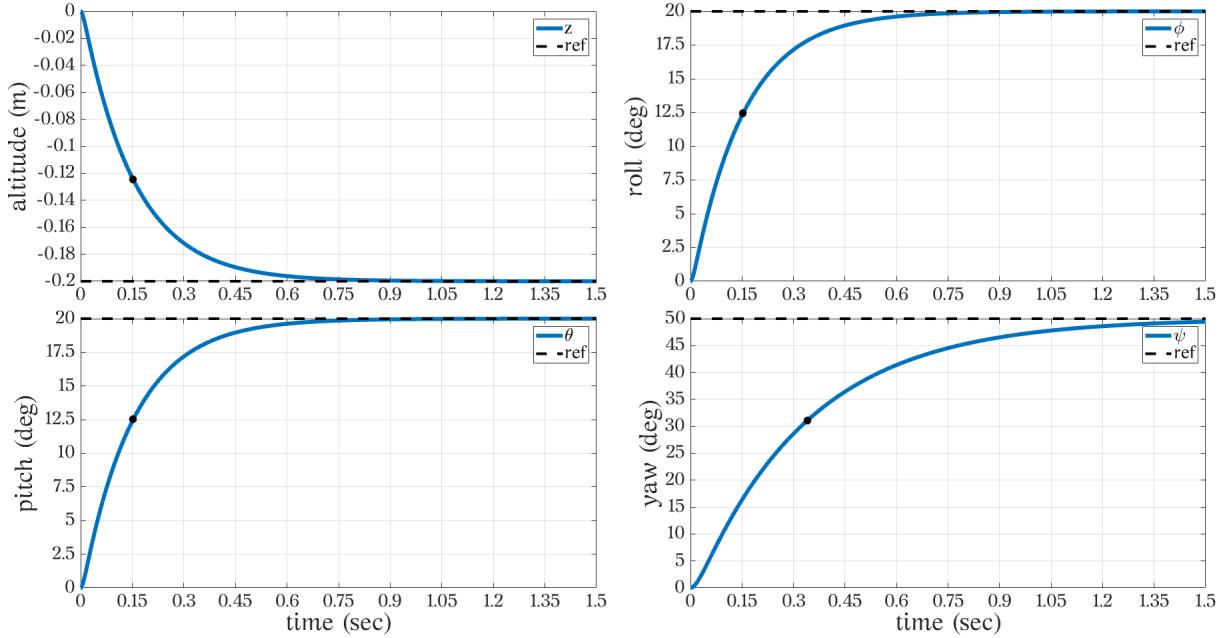
Στάθμιση Ελεγκτή

Οι παραμέτροι στάθμισης σε αυτόν τον ελεγκτή είναι τα μπτρώα K_1, K_2 τα οποία επιλέγονται να είναι διαγώνια. Έτσι, οι ιδιοτιμές των μπτρώων αυτών είναι τα διαγώνια στοιχεία των. Η ιδιαιτερότητα του συστήματος μας είναι ότι η σύγκλιση των μεταβλητών εξόδου y στο σήμα αναφοράς $y(t)$ περνάει μέσα από τη σύγκλιση των μεταβλητών x στη συνάρτηση $\phi(t)$. Η διαδικασία στάθμισης των μπτρώων που θα ακολουθήσει έχει ως εξής, θεωρώντας την σύγκλιση των x ακαριαία, θέτουμε τις επιθυμητές σταθερές χρόνου για τις μεταβλητές εξόδου. Στη συνέχεια επιλέγονται και οι ιδιοτιμές του μπτρώου K_2 , ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι φυσικοί περιορισμοί των ενεργοποιητών. Οι φυσικοί περιορισμοί προκύπτουν από τις προδιαγραφές των κατασκευαστών.

Στάθμιση K_1 Το μπτρώο $K_1 = -\text{diag}(1/\tau_z, 1/\tau_\phi, 1/\tau_\theta, 1/\tau_\psi)$ όπου τ_i η σταθερά χρόνου σε απόκριση βιβατικής μεταβολής συστήματος πρώτης τάξης για $i \in \{z, \phi, \theta, \psi\}$. Η σταθερά χρόνου ισοδύναμεί με το χρόνο που απαιτείται από ένα σύστημα πρώτης τάξης να φθάσει στο 63,2% της τιμής αναφοράς. Για την μετατόπιση z επιλέγεται μια σταθερά χρόνου $\tau_z = 0.15s$, για την γωνία ϕ (roll) επιλέγεται $\tau_\phi = 0.15s$, για την γωνία θ (pitch) επιλέγεται $\tau_\theta = 0.15s$ και για την γωνία ψ επιλέγεται $\tau_\psi = 0.33s$. Το μπτρώο που προκύπτει είναι

$$K_1 = - \begin{pmatrix} 6.67 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Η απόκριση σε βηματικές μεταβολές του διανύσματος εξόδου γ φαίνεται παρακάτω.



Σχήμα 4.1 Βηματικές μεταβολές μεταβλητών εξόδου.

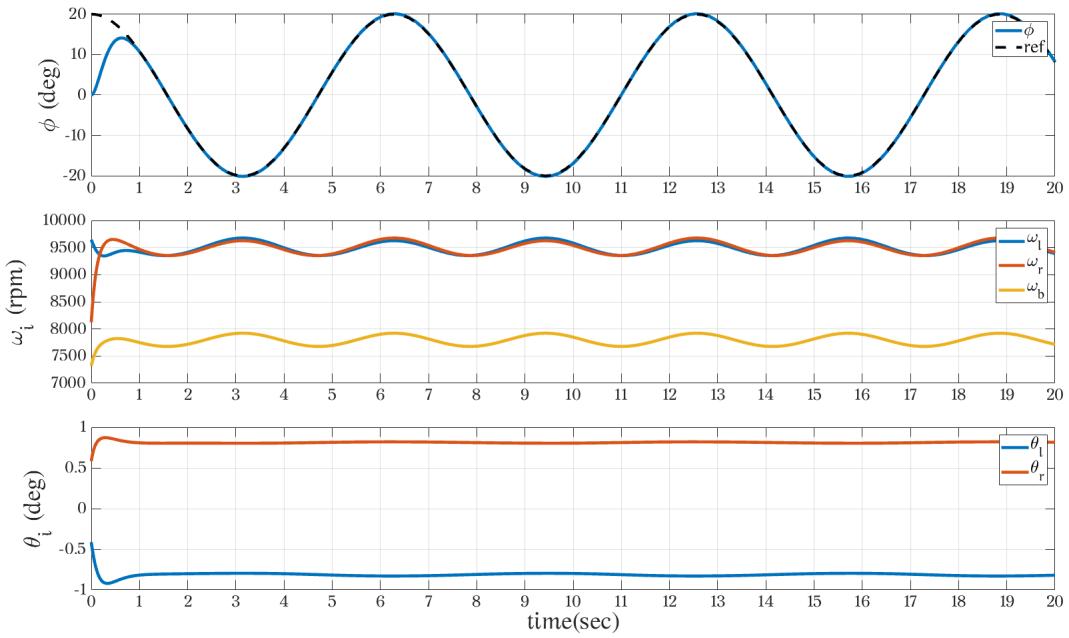
Στα άνωθεν διαγράμματα σημειώνεται με μαύρη βιούλα το σημείο όπου πετυχαίνουμε την επιθυμητή σταθερά χρόνου. Ενδεικτικά για το διάγραμμα του ύψους z , η βιούλα βρίσκεται στο σημείο $t = 0.15s$ και $z = -0.1247m$ δηλαδή στο $\frac{-0.1247}{-0.20} = 62.35\%$. (Σημείωση: η z διεύθυνση στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι στραμμένη προς το κέντρο της γης, δηλαδή η βηματική μεταβολή του γραφήματος αντιπροσωπεύει μια αύξηση του ύψους του τρικοπτέρου κατά 20 cm.) Οι τιμές που απαιτήθηκαν για το διάνυσμα εξόδου είναι αντιπροσωπευτικές για τη λειτουργία του τρικοπτέρου με την έννοια ότι είναι ρεαλιστικές τιμές που μπορεί να ζητηθούν από μια καμπύλη σύμπατης αναφοράς ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς χρόνους.

Στάθμιση K_2 Η διαδικασία που προηγήθηκε θεωρούσε τα δυναμικά των μεταβλητών x ακαριαία. Για να προσδιοριστούν τα στοιχεία του διαγώνιου μπτρώου $K_2 = -\text{diag}(1/\tau_{v_z}, 1/\tau_{\dot{\phi}}, 1/\tau_{\dot{\theta}}, 1/\tau_{\dot{\psi}})$ θεωρούμε μια αρχική δομή του μπτρώου ως $K_2 = -\text{diag}(1/0.1, 1/0.1, 1/0.1, 1/0.3)$. Όπως φαίνεται η δομή αυτή ομοιάζει με τη στάθμιση του μπτρώου K_1 πράγμα λογικό αφού τα στοιχεία τους αναφέρονται στην επίτευξη του ίδιου σκοπού. Δοκιμάζοντας την αρχική εικασία K_2 παρατηρήθηκε πως βρισκόμαστε κοντά στα όρια των ενεργοποιητών. Έτσι μετακινήθηκαν όλες οι ιδιοτιμές πλησιέστερα στο μηδέν. Η τελική μιαρφή του μπτρώου K_2 είναι

$$K_2 = - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.66 \end{pmatrix}.$$

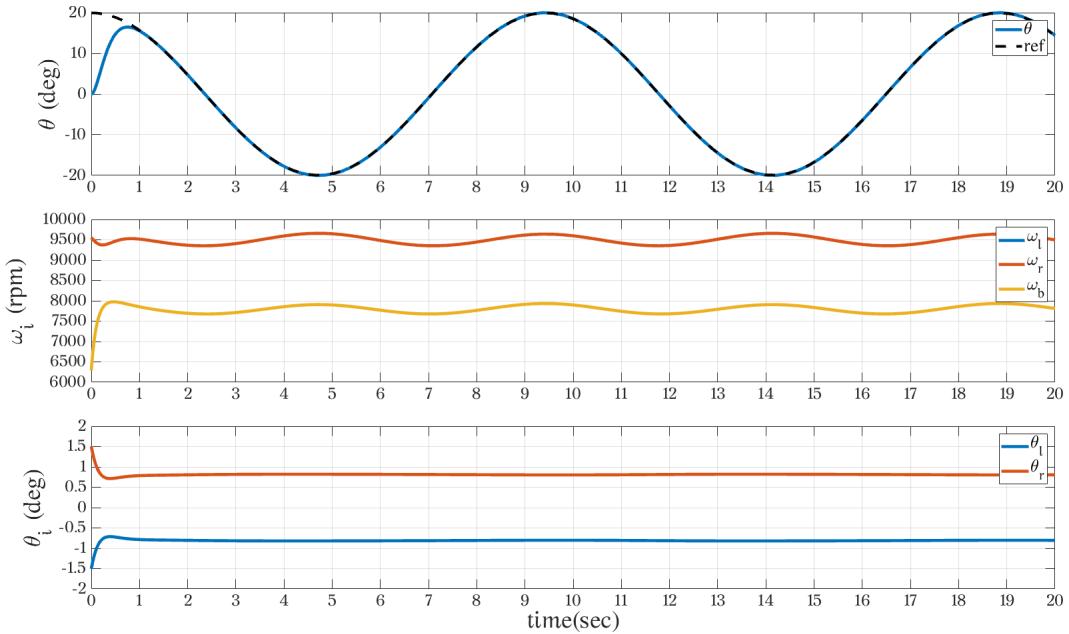
Αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα αποτελέσματα. Αρχικά, απαιτείται από τη γωνία ϕ να ακολουθήσει ένα ημιτονοειδές σήμα αναφοράς $\phi_r(t) = 0.349 \cos(t)$, δηλαδή εύρος 20° και συχνότητα $1/2\pi$ Hz. Όπως φαίνεται, οι αρχικές συνθήκες της γωνίας ϕ δεν συμπίπτουν με την τιμή $\phi_r(0)$, πράγμα που αντιλαμβάνεται ο ελεγκτής και 'στέλνει' εκθετικά τη γωνία ϕ στο σήμα αναφοράς, όπως φαίνεται και στις αρχικές δράσεις ελέγχου.



Σχήμα 4.2 Ακολούθηση σήματος αναφοράς γωνίας ϕ .

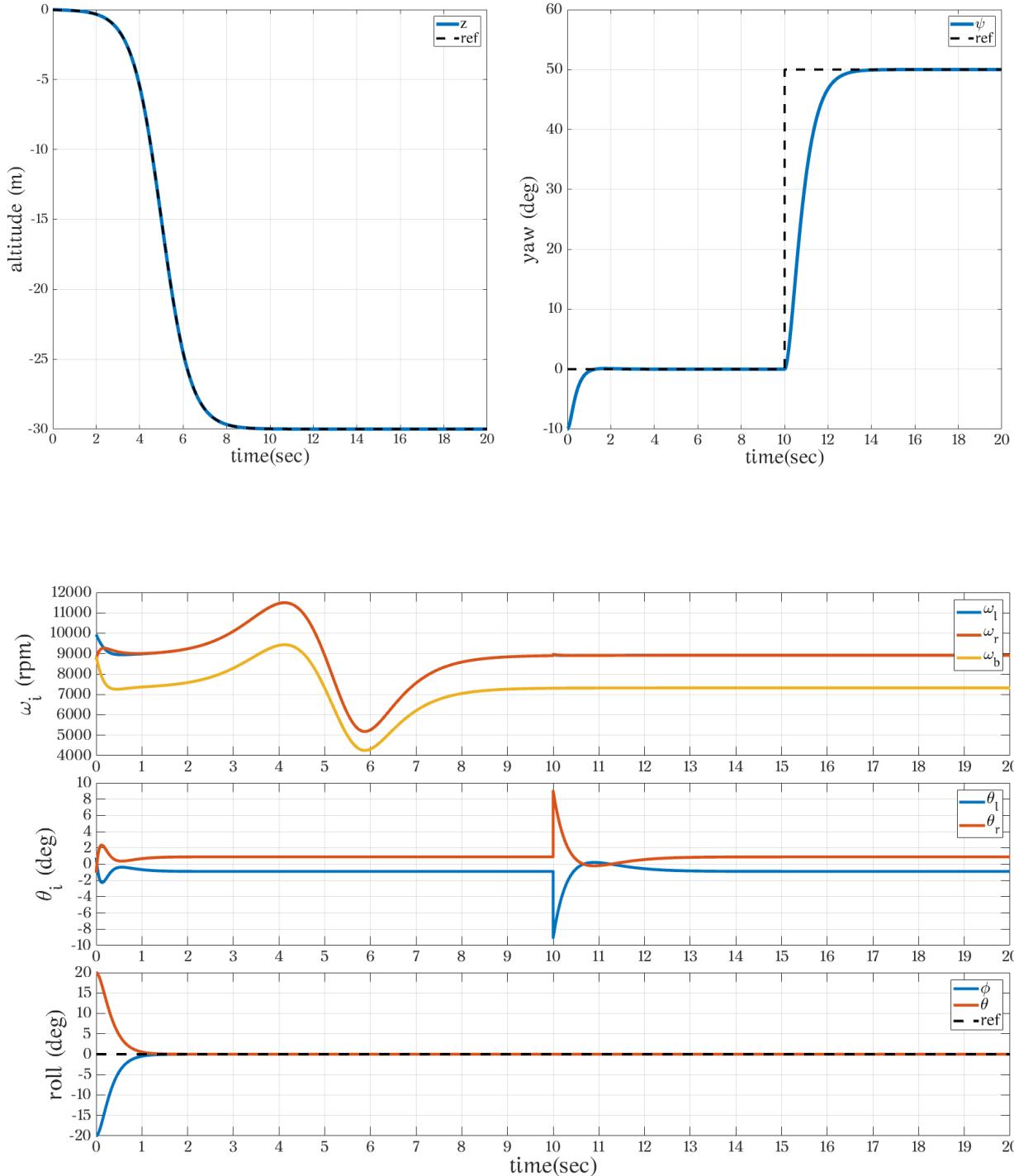
Στη συνέχεια ζητείται από το τρικόπτερο να ακολουθήσει ένα σήμα αναφοράς για τη γωνία θ . Το σήμα αναφοράς είναι $\theta_r(t) = 0.349 \cos(t/1.5)$ με εύρος 20° και συχνότητα 0.1 Hz . Τα αποτελέσματα για την γωνία θ παρουσιάζουν παρουσιάζουν αντίστοιχη σύγκλιση στο σήμα αναφοράς.



Σχήμα 4.3 Ακολούθηση σήματος αναφοράς γωνίας θ .

Ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο πτήσης είναι αυτό που παρουσιάζεται παρακάτω. Η πτήση ως τρικόπτερο χρησιμεύει κυρίως για την κάθετη απογείωση και την προετοιμασία του αεροχώματος για την πτήση ως αερόχημα σταθερής πτέρυγας. Έτσι, απαιτείται από το τρικόπτερο να ανυψωθεί ως ένα ύψος $30m$ σε χρόνο $10s$, ικανό για την μετάβαση σε συμβατική πτήση. Έπειτα, μόλις φθάσει σε αυτό το ύψος ζητείται από το τρικόπτερο να μεταβεί στον επιθυμητό προσανατολισμό (yaw) που στην περίπτωση μας είναι 50° σχετικά με το Βορρά. Σε πραγματικές συνθήκες πτήσης είναι πιθανό, στην αρχική τοποθέτηση του αεροχώματος στο έδαφος, να υπάρχουν μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες στις γωνίες. Στην περίπτωση που μελετάται, το αερόχημα ξεκινάει από αρχικό προσανατολισμό

$(\phi, \theta, \psi)_0 = (-20^\circ, 20^\circ, -10^\circ)$. Η καμπύλη που χρησιμοποιείται για το σήμα αναφοράς στο ύψος είναι η σιγμοειδής καμπύλη. Τα αποτελέσματα αυτού του σεναρίου παρουσιάζονται εδώ.



Σχήμα 4.4 Απογείωση τρικοπτέρου σε συγκεκριμένο ύψος και επίτευξη επιθυμητού προσανατολισμού.

Παρατηρούμε, στα παραπάνω διαγράμματα, ότι ο ελεγκτής εκτελεί επιτυχώς το ζητούμενο σενάριο, χωρίς να εξωθούνται οι ενεργοποιητές να λειτουργήσουν στις μέγιστες επιτρεπόμενες τιμές τους. Συγκεκριμένα, η ακολούθηση της επιθυμητής τροχιάς του ύψους είναι απόλυτη, πράγμα που δικαιολογείται εν μέρει από την ταύτιση των αρχικών συνθηκών με το σήμα αναφοράς στο μηδενικό χρόνο.

4.3 Εισαγωγή Διαταραχών

Μόνιμες Διαταραχές

Το δυναμικό μοντέλο του αεροχώματος δεν λαμβάνει υπόψιν πιθανές αποκλίσεις που προκύπτουν κατά την κατασκευή του. Μεγέθη που επηρεάζονται από αυτές τις αποκλίσεις είναι η μάζα και η ροπή αδράνειας του τρικοπτέρου καθώς και γεωμετρικά μεγέθη που το χαρακτηρίζουν. Οι συγκεκριμένες αποκλίσεις μπορούν να θεωρηθούν μόνιμες εφόσον δεν επηρεάζονται από την λειτουργία του τρικοπτέρου. Τα μεγέθη αυτά είναι η μάζα m , η ροπή αδράνειας I καθώς και τα χαρακτηριστικά μήκη του τρικοπτέρου $l_i, i \in \{1, \dots, 4\}$. Για την προσομοίωση τους, προστίθεται μία ποσοστιαία απόκλιση στην αρχική εκτίμηση των μεγεθών αυτών. Έτσι, τα μεγέθη που προκύπτουν θα είναι

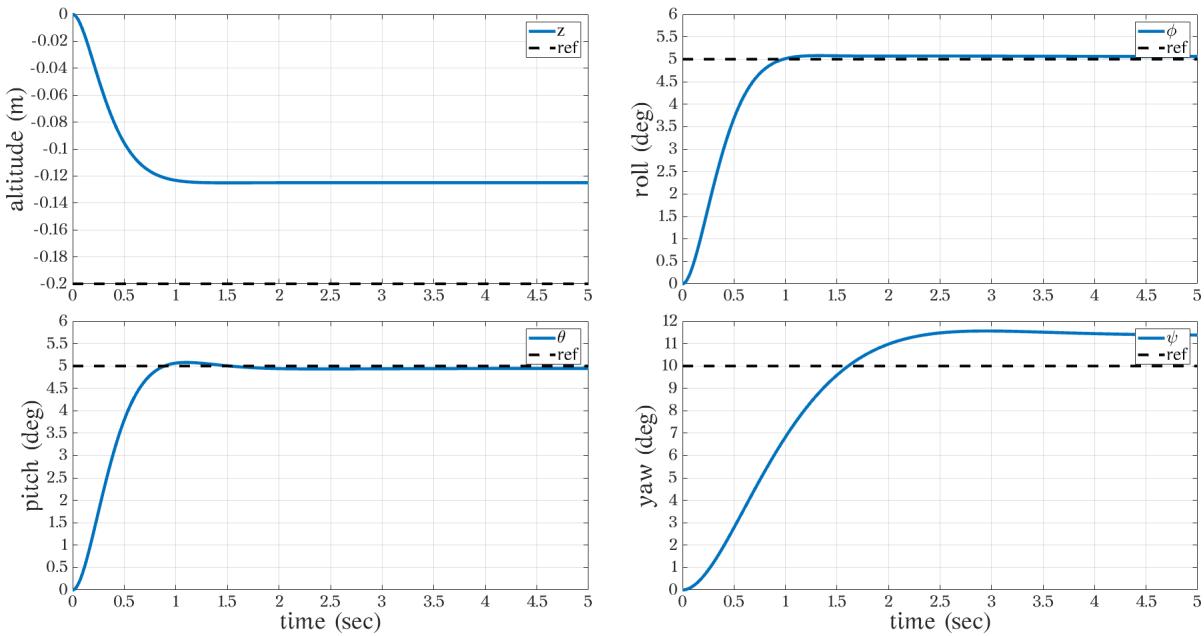
$$\hat{m} = m + p_m m \Rightarrow \hat{m} = (1 + p_m)m$$

$$\hat{I} = I + p_I I \Rightarrow \hat{I} = (1 + p_I)I$$

$$\hat{l}_i = l_i + p_{l_i} l_i \Rightarrow \hat{l}_i = (1 + p_{l_i})l_i$$

όπου μεταβλητή με $\hat{\cdot}$ συμβολίζεται η προκύπτουσα μεταβλητή και p_j το ποσοστό απόκλισης επί της αρχικής τιμής για $j \in \{m, I, l_i\}$.

Εφαρμόζονται οι αποκλίνουσες μεταβλητές στο δυναμικό μοντέλο, με ποσοστά απόκλισης $p_m = 0.1, p_I = 0.2, p_{l_i} = 0.1$, πραγματοποιείται προσομοίωση για βηματικές μεταβολές των μεταβλητών εξόδου του συστήματος. Οι αποκρίσεις παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



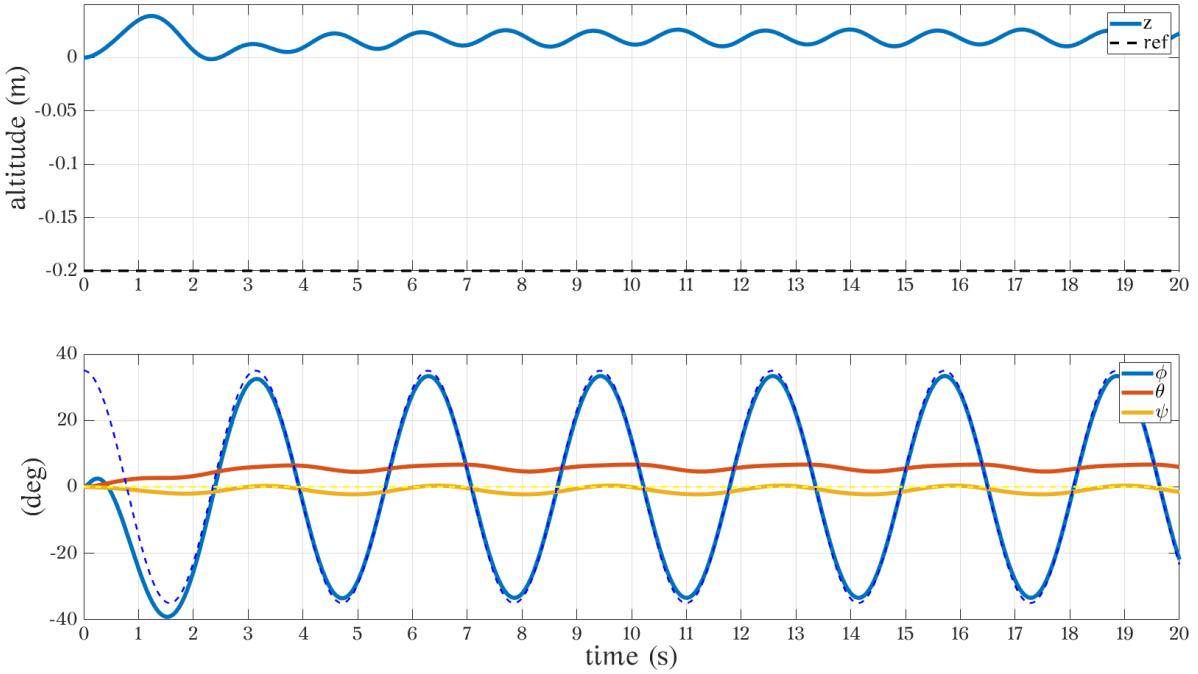
Σχήμα 4.5 Βηματικές μεταβολές μεταβλητών εξόδου με μόνιμες διαταραχές.

Οι δράσεις του ελεγκτή υπολογίζονται με βάση τις ονομαστικές τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων του συστήματος. Έτσι, όταν εισάγονται διαταραχές σε αυτά τα μεγέθη, προκαλούνται τα μόνιμα σφάλματα που παρατηρούνται στις παραπάνω αποκρίσεις.

Διαταραχές στην Έλικα

Εκτός από τις μόνιμες διαταραχές, υπάρχουν διαταραχές που αναφέρονται στην πραγματική συμπεριφορά των ελίκων, όσον αφορά τα φορτία. Τέτοιες διαταραχές προκύπτουν από την μεταβολή της πυκνότητας του αέρα ως προς το υψόμετρο πτήσης καθώς και την ταχύτητα του σχετικού ανέμου ως προς την έλικα.

Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η απόκριση του τρικοπτέρου όταν έχουν συμπεριληφθεί οι μη-μόνιμες διαταραχές που προκύπτουν από το μοντέλο των φορτίων της έλικας. Δίνεται ένα αριθμητικό σήμα αναφοράς στη γωνία ϕ και μία τιμή αναφοράς στο ύψος. Εισάγεται, επίσης, διαταραχή ανέμου μέτρου 2 στην κλίμακα Beaufort με κατεύθυνση προς το έδαφος.



Σχήμα 4.6 Ακολούθηση σήματος αναφοράς υπό διαταραχές.

Η ακολούθηση μιας ημιτονοειδούς καμπύλης αναφοράς στο ϕ επιλέχθηκε έτσι ώστε να φανεί η επίδραση της ταχύτητας στο μοντέλο της έλικας. Καθώς το αερόχημα ταλαντεύεται γύρω από τον άξονα x , η σχετική ταχύτητα ανέμου που προσπίπτει κάθετα στην έλικα μεταβάλλεται αρμονικά. Έτσι, κυρίως η παραγόμενη ώθηση αλλά και η ροπή αντίδρασης μεταβάλλονται, γεγονός που φέρει ως αποτέλεσμα την ταλάντωση που βλέπουμε στην απόκριση του ύψους καθώς και την αδυναμία σύγκλισης των υπόλοιπων γωνιών euler στην επιθυμητή τιμή. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αδυναμία σύγκλισης στην τιμή αναφοράς στο ύψος έγκειται στη υψηλή ταχύτητα ανέμου που δέχονται οι έλικες, καθιστώντας τες λιγότερο ισχυρές.

Σε συνδυασμό με τα δύο προαναφερθέντα είδη διαταραχών, υπάρχει μια πληθώρα διαφορετικών διαταραχών που επιδρούν στο σύστημα στον πραγματικό κόσμο. Επιγραμματικά, η ταχύτητα του ανέμου, αποκλίσεις μετρητικών οργάνων και τα λοιπά. Για την επίτευξη ικανοποιητικής απόδοσης του συστήματος ελέγχου, παρουσία διαταραχών, ο ελεγκτής πρέπει να διαθέτει την ικανότητα απόρριψης διαταραχών.

4.4 Εξασθένιση Διαταραχών

Στο σύστημα (1)-(2) προστίθεται η απεικόνιση $\bar{w} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times V, \mathbb{R})$, η οποία αντιπροσωπεύει το σύνολο των διαταραχών που επιδρούν σε αυτό. Προκύπτει το σύστημα

$$(8) \quad \dot{x} = f_0(x, y) + \sum_i^m d_i f_i(x, y) + \bar{w}(t, x, y)$$

$$(9) \quad \dot{y} = A(y)x.$$

Επίσης, στον όρο της δράσης ελέγχου (7) προστίθεται μία ακόμη δράση, $\hat{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, έστω $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times V$ ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου κλειστού βρόχου που διέρχεται από το $(t_0, (x_0, y_0))$. Θέτουμε $y_{r0} = y_r(t_0)$, $v_0 = \dot{y}_r(t_0)$, $\phi_1 = \pi_1 \circ \phi$ και $\phi_2 = \pi_2 \circ \phi$. Για τις καμπύλες ϕ_1 , ϕ_2 ισχύει

$$(10) \quad (\phi_1 - A(\phi_2)^{-1} (\dot{K}_1(\phi_2 - y_r) + \dot{y}_r)) = K_2 (\phi_1 - A(\phi_2)^{-1} (K_1(\phi_2 - y_r) + \dot{y}_r)) + \hat{v} + \bar{w}$$

$$(11) \quad \dot{\phi}_2 = A(\phi_2)\phi_1.$$

Από την πρώτη έπεται ότι

(12)

$$5717652 (\phi_1 - A(\phi_2)^{-1} (K_1(\phi_2 - y_r) + \dot{y}_r)) = e^{(t-t_0)K_2} (x_0 - A(y_0)^{-1} (K_1(y_0 - y_{r0}) + v_0)) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)K_2} \hat{v}(s) ds + \int_{t_0}^t e^{(t-s)K_2} \bar{w}(s) ds.$$

Οι πρώτοι όροι στο δεξί μέλος είναι η ολοκληρωτική καμπύλη ϕ_3 του

$$(t, x) \mapsto K_2 x + \hat{v}$$

η οποία διέρχεται από το $(t_0, x_0 - A(y_0)^{-1} (K_1(y_0 - y_{r0}) + v_0))$.

Αντικαθιστώντας την (12) στην (11) προκύπτει

$$(13) \quad (\dot{\phi}_2 - y_r) = K_1(\phi_2 - y_r) + A(\phi_2)\phi_3 + A(\phi_2) \int_{t_0}^t e^{(t-s)K_2} \bar{w}(s) ds.$$

Καταλήγουμε ότι $t \mapsto (\phi_2(t) - y_r(t), \phi_3(t))$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου

$$(t, (y, z)) \mapsto \left(K_1 y + A(y + y_r) z + A(y + y_r) \int_{t_0}^t e^{(t-s)K_2} \bar{w}(s) ds, K_2 z + \hat{v} \right)$$

που διέρχεται από το $(t_0, (y_0 - y_{r0}, x_0 - A(y_0)^{-1} (K_1(y_0 - y_{r0}) + v_0)))$.

Επιθυμούμε να γραμμικοποιήσουμε τον μη-γραμμικό όρο $A(y + y_r)z$. Στο $A(y + y_r)$, η γωνία ψ εισέρχεται γραμμικά. Επιπλέον, για τον έλεγχο της αιώρησης, στόχος είναι η διατήρηση των αποκλίσεων γωνιών ϕ και θ από τις τροχιές αναφοράς σε μπδενικές τιμές. Έτσι επιλέγεται ως σημείο γραμμικοποίησης το $(0, 0)$, το οποίο αποτελεί κέντρον του ανοιχτού συνόλου V . Θέτουμε $g : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $g(y, z) = A(y)z$ με στόχο την γραμμικοποίηση. Ισχύει ότι

$$g'(y, z)(h_1, h_2) = A(y)h_2 + (A'(y)h_1)z.$$

Άρα,

$$g(y, z) = g(0, 0) + g'(0, 0)(h_1, h_2) + o((h_1, h_2)) = A(0)h_2.$$

Πλέον το διανυσματικό πεδίο γράφεται ως

$$(t, (y, z)) \mapsto (K_1 y + A(0)z + w, K_2 z + \hat{v})$$

και καταλήγουμε σε μπτρωική μορφή

$$(14) \quad \dot{x}_1 = A_1 x_1 + E w + B_1 u_1$$

με

$$A_1 = \begin{pmatrix} K_1 & A(0) \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$$

και $x_1 = (\phi_2 - y_r, \phi_3)^\top$, $w = A(0) \int_{t_0}^t e^{(t-s)K_2} \bar{w}(s) ds$ και $u_1 = \hat{v}$.

Διαθέτοντας πλέον γραμμική έκφραση του συστήματος, στοχεύουμε στην εξασθένιση των διαταραχών του. Είναι σημαντικό να βρεθεί τρόπος ποσοτικοποίησης της δράσης των διαταραχών επί του συστήματος.

4.4.1 Συμβολισμοί Έστω X χώρος Banach. Δηλαδή, ένας χώρος με νόρμα, ο οποίος είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική d που επάγεται από τη νόρμα του. Αυτό σημαίνει ότι κάθε Cauchy (ως προς d) ακολουθία σημείων του χώρου συγκλίνει (ως προς d) σε ένα σημείο του χώρου. Παραδείγματα χώρων Banach είναι οι γραμμικοί χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, διότι είναι ισομορφικοί με κάποιο \mathbb{R}^n .

Η πληρότητα του χώρου μας επιτρέπει να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα για τυπικά συνεχείς (και άρα συνεχείς) συναρτήσεις με τιμές στο X , το οποίο έχει παρόμοιες ιδιότητες με το ολοκλήρωμα Riemann πραγματικών συναρτήσεων.

Έστω X χώρος Banach, τότε αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, συμβολίζουμε με $\mathcal{C}([a, b], X)$ το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων $f : [a, \infty) \rightarrow X$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_a^\infty \|f(t)\|^2 dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \|f(t)\|^2 dt < \infty.$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται και το σύνολο $L^2((-\infty, a], X)$.

Για περισσότερες πληροφορίες στα [2], [10]

(α) Κάθε χώρος $L^2([0, \infty), X)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, αν $f, g \in L^2([0, \infty), X)$, τότε η $f + g$ είναι συνεχής και επειδή $2\gamma\delta \leq \gamma^2 + \delta^2$ για κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\int_a^t \|f + g\|^2 \leq \int_a^t (\|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2) \leq 2 \int_a^t \|f\|^2 + 2 \int_a^t \|g\|^2 \leq 2 \int_a^\infty \|f\|^2 + 2 \int_a^\infty \|g\|^2$$

για $t \in \mathbb{R}$ με $a < t$.

Παίρνοντας το όριο καθώς $t \rightarrow \infty$ προκύπτει ότι

$$\int_a^\infty \|f + g\|^2 \leq 2 \int_a^\infty \|f\|^2 + 2 \int_a^\infty \|g\|^2$$

και άρα $f + g \in L^2([a, \infty), X)$.

Προφανώς, αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $cf \in L^2([0, \infty), X)$. Επομένως, ο $L^2([0, \infty), X)$, με τις κατά σημείο πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι γραμμικός χώρος.

(β) Η απεικόνιση

$$\|\cdot\| : L^2([0, \infty), X) \rightarrow [0, +\infty) \quad \text{με} \quad \|f\| = \left(\int_a^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

είναι νόρμα στο $L^2([a, \infty), X)$. Προφανώς $\|af\| = |a|\|f\|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Επίσης, αν $g : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο $x \in [c, d]$ με $g(x) > 0$, τότε $\int_c^d g > 0$. Η $\|\cdot\| \circ f$ είναι συνεχής συνάρτηση ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και έτσι ολοκληρώσιμη. Έπειτα άμεσα ότι $\|f\| = 0$, αν και μόνο αν $f = 0$.

Απομένει να δείξουμε την τριγωνική ιδιότητα. Πρώτα, θα αποδειχτεί ότι

$$\int_a^\infty \|f(t)\| \|g(t)\| dt \leq \|f\| \|g\| \quad \text{για} \quad f, g \in L^2([a, \infty), X).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να δείξουμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για $f, g \in L^2([a, \infty), X)$ με $\|f\| = \|g\| = 1$. Για $t \in \mathbb{R}$ με $a < t$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_a^t \|f(s)\| \|g(s)\| ds &\leq \frac{1}{2} \left(\int_a^t \|f(s)\|^2 ds + \int_a^t \|g(s)\|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_a^\infty \|f(s)\|^2 ds + \int_a^\infty \|g(s)\|^2 ds \right) = 1 = \|f\| \|g\|. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας το όριο καθώς $t \rightarrow \infty$

Τέλος, για $f, g \in L^2([a, \infty), X)$ με $f + g \neq 0$, ισχύει

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \int_0^\infty \|f(t) + g(t)\|^2 dt = \int_0^\infty \|f(t) + g(t)\| \|f(t) + g(t)\| dt \\ &\leq \int_0^\infty \|f(t)\| \|f(t) + g(t)\| dt + \int_0^\infty \|g(t)\| \|f(t) + g(t)\| dt, \end{aligned}$$

το οποίο προκύπτει από την τριγωνική ιδιότητα της νόμιμας $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$. Επομένως

$$\|f + g\|^2 \leq \|f\| \|f + g\| + \|g\| \|f + g\|.$$

Διαιρώντας με $\|f + g\|$ καταλήγουμε ότι

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

(γ) Αν ο $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert (δηλαδί, ο X είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος είναι χώρος Banach με τη νόμιμα που επάγεται από το $\langle \cdot, \cdot \rangle$), τότε η απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([a, \infty), X)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \langle f, g \rangle = \int_a^\infty \langle f(t), g(t) \rangle$$

είναι εσωτερικό γινόμενο στο $L^2([a, \infty), X)$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την πρώτη ανισότητα που αποδείχθηκε στο (β), προκύπτει ότι

$$\int_a^\infty \langle f(t), g(t) \rangle \leq \int_a^\infty \|f(t)\| \|g(t)\| \leq \|f(t)\| \|g(t)\| < \infty.$$

Η θετικότητα της $\langle \cdot, \cdot \rangle$ έχει αποδειχθεί στο (β). Οι υπόλοιπες ιδιότητες (διγραμμικότητα, συμμετρία) είναι προφανείς.

4.4.2 Θεώρημα Lyapunov Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο και $A \in \mathcal{L}(X)$. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του A (στο \mathbb{C}) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, αν και μόνο αν για κάθε $B \in \mathcal{L}(X)$ υπάρχει μοναδική λύση Λ της εξίσωσης $A^* \circ \Lambda + \Lambda \circ A = B$ και αν $B < 0$, τότε $\Lambda > 0$.

Επιπλέον, ισχύει ότι $\Lambda = -\int_0^\infty e^{tA^*} \circ B \circ e^{tA}$.

Απόδειξη. Βλ. [11], [15] ■

Υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ και όλες οι ιδιοτιμές του A (στο \mathbb{C}) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $w \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα

$$(15) \quad \dot{x} = Ax + Bw \quad \text{με} \quad x(0) = z, \quad y = Cx + Dw.$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$x(t) = e^{tA}z + \int_0^t e^{(t-s)A}Bw(s)ds.$$

Έτσι για την έξοδο του συστήματος ισχύει

$$(16) \quad y(t) = Ce^{tA}z + C \int_0^t e^{(t-s)A}Bw(s)ds + Dw(t) \\ \text{με} \quad x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q, w \in \mathbb{R}^r.$$

Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές της A βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, σύμφωνα με το θεώρημα Lyapunov υπάρχει μοναδική $\Lambda > 0$ με $\Lambda = \Lambda^*$, ώστε

$$(17) \quad A^* \circ \Lambda + \Lambda \circ A = -I.$$

Θέτουμε $g(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}Bw(s)ds$ και $\alpha(t) = \langle \Lambda g(t), g(t) \rangle$. Προφανώς ισχύει $\dot{g} = Ag + Bw$. Τότε η α είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \langle \Lambda \dot{g}, g \rangle + \langle \Lambda g, \dot{g} \rangle = \langle \Lambda (Ag + Bw), g \rangle + \langle \Lambda g, Ag + Bw \rangle \\ &= \langle \Lambda Ag, g \rangle + \langle \Lambda Bw, g \rangle + \langle \Lambda g, Ag \rangle + \langle \Lambda g, Bw \rangle \\ &= \langle \Lambda Ag, g \rangle + \langle A^* \Lambda g, g \rangle + \langle w, B^* \Lambda^* g \rangle + \langle B^* \Lambda g, w \rangle \\ &= \langle (A^* \Lambda + \Lambda A) g, g \rangle + 2 \langle B^* \Lambda g, w \rangle. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (17) και επιλέγοντας τυχαία σταθερά c η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\|g\|^2 + c^2\langle w, w \rangle + 2\langle B^* \Lambda g, w \rangle - c^2\langle w, w \rangle \\ &= -\|g\|^2 + c^2\langle w, w \rangle - c^2\langle w - c^{-2}B^* \Lambda g, w - c^{-2}B^* \Lambda g \rangle + c^{-2}\langle B^* \Lambda g, B^* \Lambda g \rangle \\ &= -\|g\|^2 + c^2\|w\|^2 - c^2\|w - c^{-2}B^* \Lambda g\|^2 + c^{-2}\|B^* \Lambda g\|^2.\end{aligned}$$

Επειδή ο τρίτος όρος της παραπάνω ισότητας είναι μη θετικός, έπειτα ότι

$$\dot{\alpha} \leq (c^{-2}\|B^*\|^2\|\Lambda\|^2 - 1)\|g\|^2 + c^2\|w\|^2.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα, παίρνουμε

$$\alpha(t) - \alpha(0) \leq \int_0^t ((c^{-2}\|B^*\|^2\|\Lambda\|^2 - 1)\|g\|^2 + c^2\|w\|^2).$$

Από το γεγονός ότι $\Lambda > 0$, συμπεραίνεται ότι $\alpha(t) \geq 0$ για $t \in [0, \infty)$. Το $\alpha(0) = 0$, αφού $g(0) = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}0 &\leq (c^{-2}\|B^*\|^2\|\Lambda\|^2 - 1) \int_0^t \|g\|^2 + c^2 \int_0^t \|w\|^2 \\ (1 - c^{-2}\|B^*\|^2\|\Lambda\|^2) \int_0^t \|g\|^2 &\leq c^2 \int_0^t \|w\|^2 \leq c^2 \int_0^\infty \|w\|^2.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας αρκούντως μεγάλο c ώστε $(1 - c^{-2}\|B^*\|^2\|\Lambda\|^2) > 0$ και παίρνοντας το όριο, υπάρχει $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|g\|^2 = \int_0^\infty \|g\|^2 \leq \gamma^2 \int_0^\infty \|w\|^2 = \gamma^2 \|w\|^2 < \infty.$$

Έτσι, έχουμε δείξει πως και η απεικόνιση g ανήκει στο χώρο $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$. Στην διαδικασία που προηγήθηκε, είναι σημαντικό να τονισθεί, ότι η επιλογή της c δεν γίνεται βάσει υποθέσεων για τις w , αλλά εξαρτάται μόνο από ενδογενή χαρακτηριστικά του συστήματος.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι και η απεικόνιση w , όπως ορίζεται στην (14), ανήκει στο χώρο $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ καθώς η απεικόνιση \bar{w} , όπως έχουμε υποθέσει εξαρχής (8), ανήκει στο χώρο $L^2([0, \infty), \mathbb{R}^n)$.

Στην μόνη κατάσταση, η έξοδος του συστήματος επηρεάζεται μόνο από τους όρους που εμπεριέχουν τις διαταραχές. Αυτό συμβαίνει, διότι ο πρώτος όρος της (16) εξασθενεί στην μόνη κατάσταση λόγω αρνητικών ιδιοτιμών του Λ .

Ορίζεται η απεικόνιση $T: L^2 \rightarrow L^2$ με $w \mapsto Cg + Dw = y$ η οποία είναι γραμμική ως πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων.

Από την τριγωνική ανισότητα της νόρμας στο L^2 ισχύει

$$\|Tw\| \leq \|C\|\|g\| + \|D\| + \|w\| \leq (\|C\|\gamma + \|D\|) \|w\|$$

άρα η απεικόνιση T είναι γραμμική και συνεχής. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι φραγμένη αν και η είσοδος είναι φραγμένη.

4.4.3 Πρόταση *Bounded Real Lemma*

Έστω Λ γραμμική απεικόνιση με αρνητικές ιδιοτιμές και $\gamma > 0$. Τότε οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες.

- $\|T\| < \gamma$
- υπάρχει λύση $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\top$ στην γραμμική ανισότητα πινάκων (LMI)

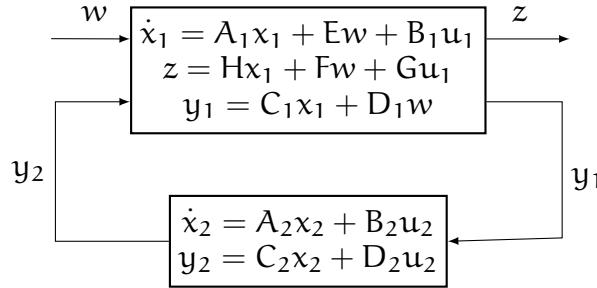
$$(18) \quad \begin{pmatrix} A^\top \mathcal{K} + \mathcal{K} A & \mathcal{K} B & C^\top \\ B^\top \mathcal{K} & -\gamma I & D^\top \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0. \quad \mathcal{K} > 0$$

Απόδειξη. βλέπε [14] ■

Σύνθεση Ελεγκτή

Στόχος μας είναι η εξασθένιση της επίδρασης των διαταραχών στην έξοδο, δηλαδή να επιτευχθεί $\|T\| < \gamma$. Ορίζοντας κατάλληλα τον ελεγκτικό όρο u_1 , μπορούμε να οδηγηθούμε στο σύστημα κλειστού βρόχου της μορφής (14) και να εφαρμοστεί το 4.4.3.

Έτσι, επιλέγεται ένας δυναμικός γραμμικός ελεγκτής ο οποίος παρουσιάζεται στο διάγραμμα βαθμίδων στο σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7 Διάγραμμα Βαθμίδων

Οι διαστάσεις του συστήματος είναι οι εξής

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, E \in \mathbb{R}^{n \times k}, B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$H \in \mathbb{R}^{p \times n}, F \in \mathbb{R}^{p \times k}, G \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$C_1 \in \mathbb{R}^{q \times n}, D_1 \in \mathbb{R}^{q \times k}$$

και

$$A_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}, B_2 \in \mathbb{R}^{r \times q}$$

$$C_2 \in \mathbb{R}^{m \times r}, D_2 \in \mathbb{R}^{m \times q}.$$

Επιδιώκεται, τώρα, ο σηματισμός του γραμμικού συστήματος κλειστού βρόγχου. Για $y_2 = u_1$ και $y_1 = u_2$ προκύπτει

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + Ew + B_1C_2x_2 + B_1D_2u_2 \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1w \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + Ew + B_1C_2x_2 + B_1D_2C_1x_1 + B_1D_2D_1w \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1w \end{cases}$$

το οποίο γράφεται σε μπτρωική μορφή ως

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1D_2C_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E + B_1D_2D_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} w.$$

Για την έξοδο του συστήματος έχουμε

$$\begin{aligned} z &= Hx_1 + Fw + Gu_1 = Hx_1 + Fw + GC_2x_2 + GD_2u_2 \Rightarrow \\ z &= Hx_1 + Fw + GC_2x_2 + GD_2C_1x_1 + GD_2D_1w \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται σε μπτρωική μορφή

$$z = (H + GD_2C_1 \quad GC_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (F + GD_2D_1) w.$$

Καταλήγουμε στην τελική μορφή του συστήματος κλειστού βρόγχου

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$z = Cx + Dw.$$

Για το σύστημα κλειστού βρόχου ισχύει

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} A_1 + B_1 D_2 C_1 & B_1 C_2 & E + B_1 D_2 D_1 \\ B_2 C_1 & A_2 & B_2 D_1 \\ \hline H + G D_2 C_1 & G C_2 & F + G D_2 D_1 \end{array} \right).$$

Για να επιτευχθεί η συνθήκη $\|T\| < \gamma$ ή $\|y\| < \gamma \|w\|$, από το λήμμα (4.4.3) θα πρέπει για το κλειστό σύστημα A, B, C, D να ικανοποιούνται οι LMI (18). οι αναζητούμενοι παραμέτροι του ελεγκτή A_2, B_2, C_2, D_2 υπολογίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι LMI.

Προφανώς ο πίνακας A εξαρτάται από τις παραμέτρους του ελεγκτή. Επιπλέον ο πίνακας K αποτελεί και αυτός μεταβλητή που αναζητούμε. Συνεπάγεται από (18), ότι ο όρος AK είναι μη γραμμικός ως προς τις ζητούμενες μεταβλητές, καθιστώντας την ανισότητα μη-γραμμική (διγραμμική).

Τα υπολογιστικά εργαλεία που επιλύουν γραμμικές ανισότητες πινάκων, όπως υπονοεί και η ονομασία τους, απαιτούν γραμμική μορφή ως προς τις ζητούμενες μεταβλητές. Απαιτείται, λοιπόν, μετασχηματισμός των μεταβλητών με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μετασχηματισμένες μεταβλητές να εισάγονται γραμμικά. Συγκεκριμένα εισάγεται η μη-γραμμική απεικόνιση

$$(K, A_2, B_2, C_2, D_2) \mapsto v = (X, Y, K, L, M, N)$$

η οποία μετατρέπει τις μεταβλητές σε μία εξάδα νέων μεταβλητών v και ορίζονται οι μητρωικές συναρτήσεις

$$\left(\begin{array}{c|c} A(v) & B(v) \\ \hline C(v) & D(v) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} A_1 Y + B_1 M & A_1 + B_1 N C_1 & E + B_1 N D_1 \\ K & A_1 X + L C_1 & X E + L D_1 \\ \hline H Y + G M & H + G N C_1 & F + G N D_1 \end{array} \right)$$

$$X(v) = \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα γραμμικών ανισοτήτων πινάκων που προκύπτει είναι ισοδύναμο με την (18) και γράφεται

$$X(v) > 0$$

(19)

$$\begin{pmatrix} A^\top + A & B & C^\top \\ B^\top & -\gamma I & D^\top \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0.$$

4.4.4 Θεώρημα Υπάρχουν παραμέτροι ελεγκτή A_2, B_2, C_2, D_2 και ένας πίνακας K που ικανοποιούν την (18), αν και μόνο αν υπάρχει η οποία αποτελεί λύση της (19). Αν η ικανοποιεί την ανισότητα, τότε $I - XY$ είναι μη ιδιάζων πίνακας και υπάρχουν τετραγωνικοί μη ιδιάζοντες πίνακες U, V που ικανοποιούν $I - XY = UV^\top$. Για κάθε U, V

$$K = \begin{pmatrix} Y & V \\ I & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & X B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K - X A_1 Y & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^\top & 0 \\ C_1 Y & I \end{pmatrix}^{-1}$$

ικανοποιούν την (19) και γίνεται η εύρεση των ζητούμενων παραμέτρων.

Απόδειξη. βλέπε [14].

Όλη η παραπάνω υπολογιστική διαδικασία περιγράφεται αναλυτικότερα στο [14].

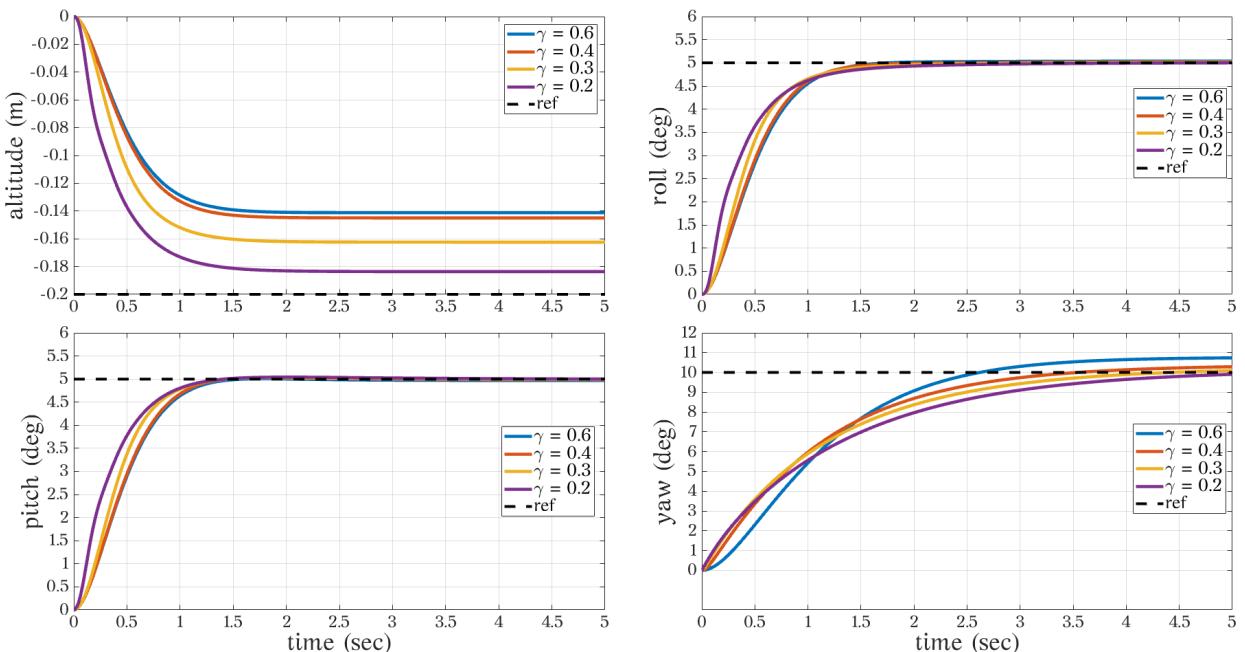
Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Το παρόν κεφάλαιο έχει ως στόχο την εξαγωγή αποτελεσμάτων της επίδοσης του ελεγκτή. Οι προσομοιώσεις του δυναμικού συστήματος πραγματοποιείται μέσω κώδικα που έχει συντεθεί στην προγραμματιστική γλώσσα MATLAB.

Η στάθμιση των ιδιοτιμών του συστήματος έχει πραγματοποιηθεί στην αντίστοιχη ενότητα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα του ονομαστικού ελεγκτή για ακολουθία τροχιών αναφοράς και με επιβολή διαταραχών παρουσιάζονται στην προαναφερθείσα ενότητα. Για τις διάφορες περιπτώσεις που προσομοιώθηκαν, θα εξεταστεί η επίδοση του συνολικού ελεγκτή.

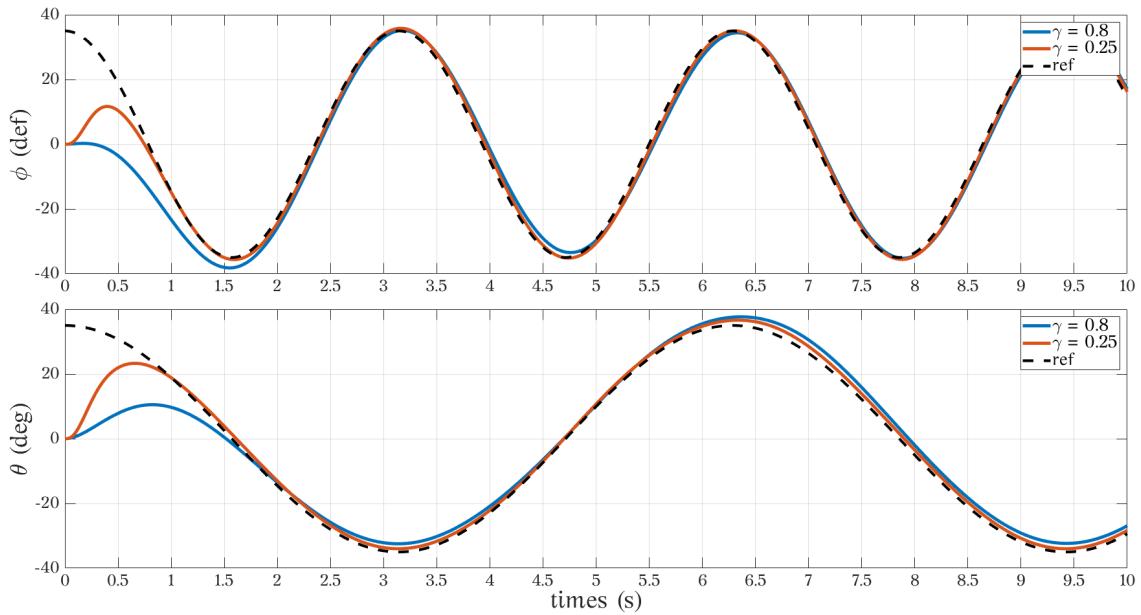
Αρχικά, η αξιολόγηση της δυνατότητας εξασθένισης διαταραχών από τον ελεγκτή γίνεται βάσει της παραμέτρου γ . Μειώνοντας την τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου, αναμένουμε μείωση της επιρροής των διαταραχών στην έξοδο του συστήματος. Σε σύγκριση με τις βηματικές μεταβολές που επιβλήθηκαν στον ονομαστικό ελεγκτή, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των μεταβλητών εξόδου για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου γ .



Σχήμα 5.1 Βηματικές Μεταβλητών Εξόδου

Από το σχήμα (5.1), επιβεβαιώνεται η θεώρηση ότι με μείωση της παραμέτρου γ , το μόνιμο σφάλμα μειώνεται. Επιπλέον με αύξηση της γ πάνω από μία τιμή δεν παρατηρείται σημαντική διαφορά στην επίδοση του ελεγκτή, εφόσον η συνεισφορά του αρχικού ελεγκτή γίνεται ισχυρότερη.

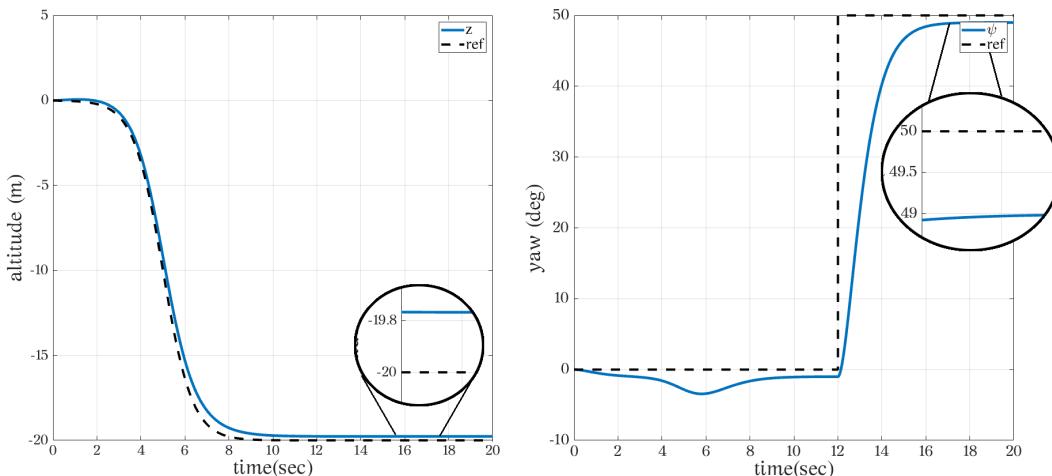
Η σύγκριση των τιμών γ πρέπει να πραγματωθεί και για ακολουθία τροχιών αναφοράς. Απαιτείται από τον ελεγκτή να πετύχει πιστονοειδείς τροχιές αναφοράς στις γωνίες θ και ψ . Όπως φαίνεται στο σχήμα (5.2) και στις δύο περιπτώσεις η απόκριση βελτιώνεται αισθητά με τη μείωση της γ . Αρχικά και στις δύο περιπτώσεις η απόκλιση από την επιθυμητή τιμή είναι μικρότερη όταν



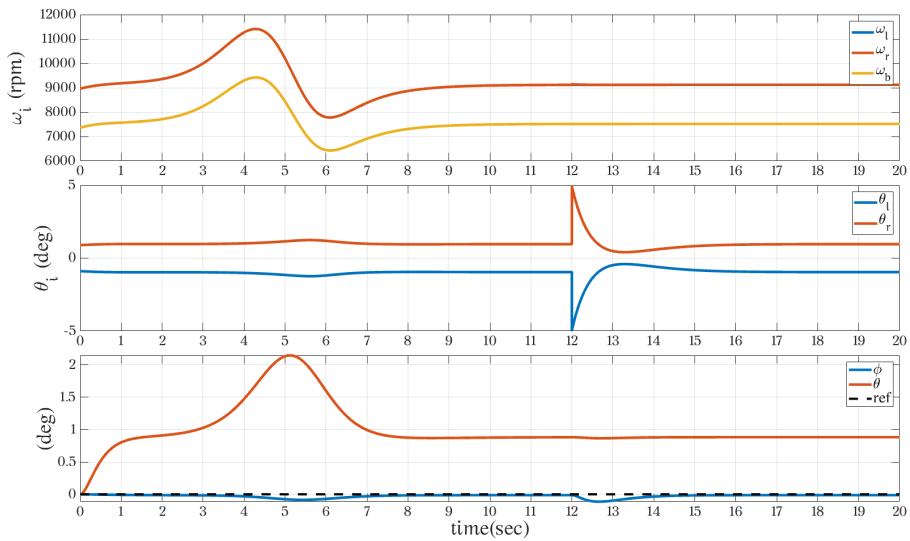
Σχήμα 5.2 Ακολούθηση σήματος αναφοράς γωνιών θ και ψ .

γ μικρότερο. Ένα συμπέρασμα, που προκύπτει εδώ σε σχέση με την ακολούθηση σταθερών σημάτων, είναι πως η μείωση της παραμέτρου γ κάνει την επίδοση γρηγορότερη, όπως παρατηρείται στα πρώτα δευτερόλεπτα τις συγκεκριμένης προσομοίωσης.

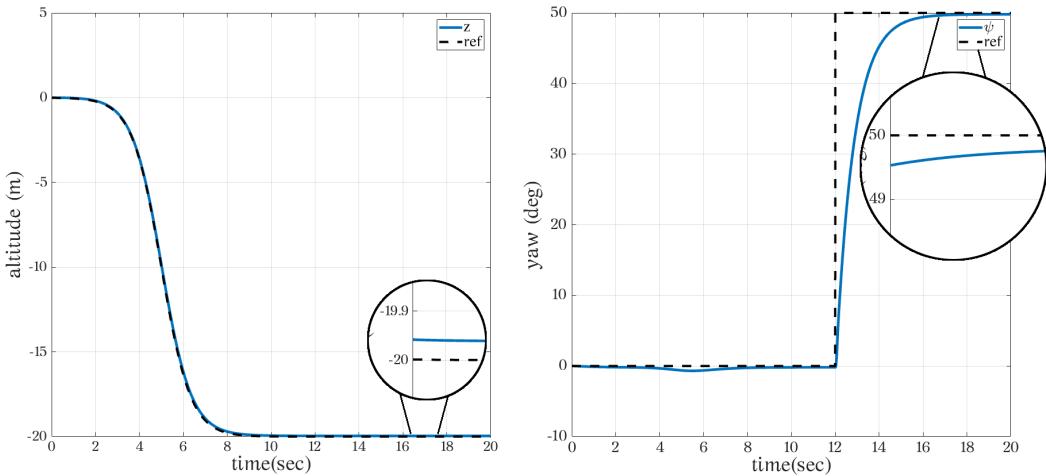
Τέλος, γίνεται σύγκριση της περίπτωσης απογείωσης του τρικοπτέρου και ανύψωση του μέχρι τα 20m και έπειτα την περιστροφή του γύρω από τον z άξονα του αεροχώματος για την επίτευξη του ζητούμενου προσανατολισμού. Στην πρώτη περίπτωση (σχήματα 5.3, 5.4) παρατηρούμε τον ονομαστικό ελεγκτή να αντιδράει σε μόνιμες διαταραχές και διαταραχές που προκύπτουν από την σχετική ταχύτητα του ανέμου με την έλικα. Στην δεύτερη περίπτωση (σχήματα 5.5, 5.6), ο ελεγκτής λειτουργεί με εξασθένιση διαταραχών, με επιλεγμένη παράμετρο $\gamma = 0.3$.



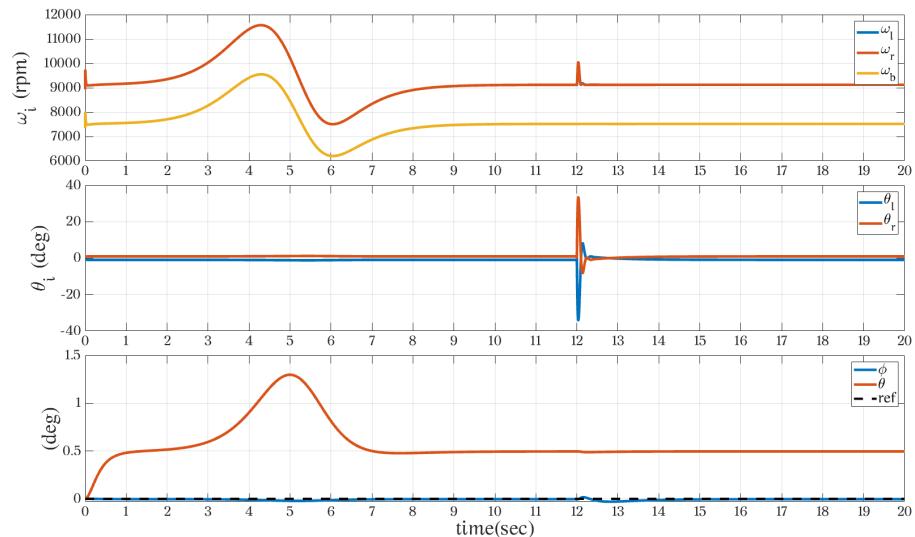
Σχήμα 5.3 Ύψος και προσανατολισμός χωρίς εξασθένιση διαταραχών για αιώροπον.



Σχήμα 5.4 Ενεργοποιητές, γωνίες euler χωρίς εξασθένιση διαταραχών για αιώρηση.



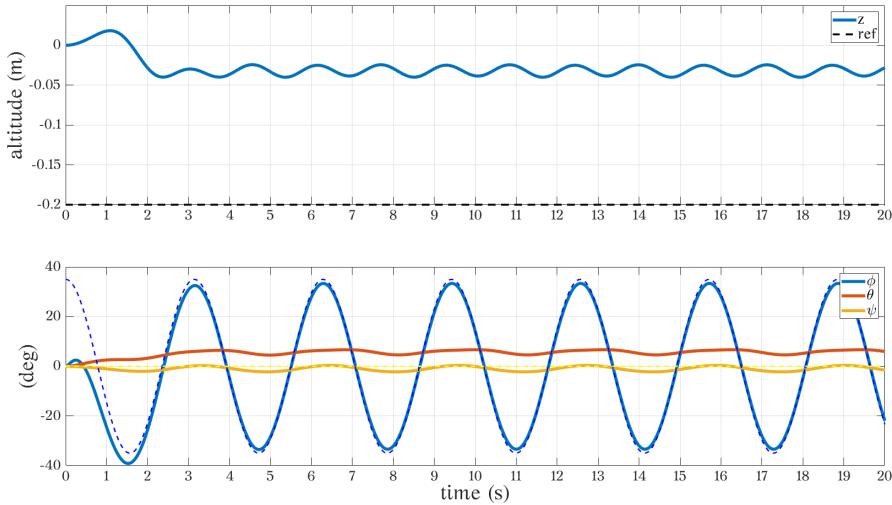
Σχήμα 5.5 Ύψος και προσανατολισμός με εξασθένιση διαταραχών για αιώρηση.



Σχήμα 5.6 Ενεργοποιητές, γωνίες euler με εξασθένιση διαταραχών για αιώρηση.

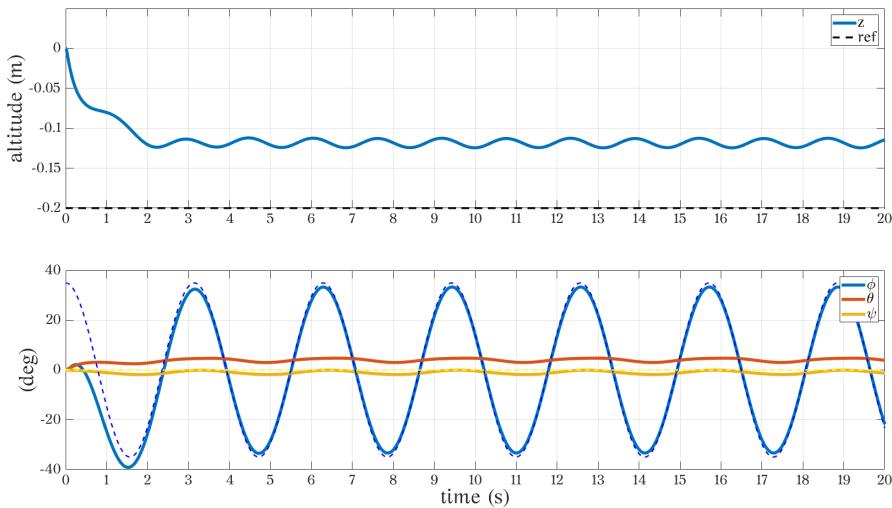
Από τα παραπάνω διαγράμματα, παρατηρείται στις μεταβλητές εξόδου μείωση άνω του 50% των μόνιμων αποκλίσεων. Επιπλέον, ενώ στον ονομαστικό ελεγκτή παρατηρούνται μικρές γωνίες δράσης των σερβομηχανισμών αλλά για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για τον συνολικό ελεγκτή οι αντίστοιχες γωνίες είναι μεγαλύτερες αλλά ακαριαίες. Αυτό συμβαίνει διότι ως στόχος του ελεγκτή είναι η απόσβεση της δράσης των διαταραχών, χωρίς την βέλτιστη ενεργειακά λύση για τις δράσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η δράση της εξασθένισης διαταραχών για το σενάριο του σχήματος 4.6. Στόχος εδώ είναι να περιορισθεί η απόκλιση που προκαλείται παραπλεύρως στο ύψος ζ καθώς και των γωνιών $euler$, μιάς και η διαταραχή που προκαλείται από τον σχετικό άνεμο στις προπέλες αποτελεί σημαντική μη σταθερή διαταραχή που αλλοιώνει αρκετά την επίδοση. Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζεται ελεγκτής με $\gamma = 0.8$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στο 5.7.



Σχήμα 5.7 $\gamma = 0.8$.

Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζεται ελεγκτής με $\gamma = 0.3$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8 $\gamma = 0.3$.

Όπως παρατηρεί κανείς, οι αποκλίσεις από την επιθυμητή τιμή μειώνονται αναλόγως την τιμή της παραμέτρου γ . Με αυτό το σενάριο, μπορεί να αντιληφθεί κανείς ότι ο ελεγκτής δρα κατά των δυναμικών διαταραχών αποτελεσματικά. Αξίζει να σημειωθεί πως το σενάριο που ασχολούμαστε αποτελεί ακραία συνθήκη λειτουργίας, κι έτσι η απόκλιση του ύψους είναι αποδεκτή. Σε πιό ομαλές συνθήκες, η απόκλιση του z θα είναι χαμηλότερη από την τάξη μεγέθους των 10cm, η

οποία αποτελεί ικανοποιητική απόκλιση για τις απαιτήσεις του συστήματος.

Από τις προσομοιώσεις καθώς και από την σύνθεση του ελεγκτή, είναι φανερό ότι η παραμετροποίηση του κατασκευασμένου ελεγκτή γίνεται μόνο με τον ορισμό επιθυμητών ιδιοτιμών των πινάκων K_1 , K_2 και την επιλογή επιθυμητής μείωσης διαταραχών γ. Έτσι, επιτυγχάνονται ικανοποιητικές αποκρίσεις χωρίς την σύγχυση που προκαλείται από την ύπαρξη πολλών παραμέτρων.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα & Μελλοντικές Προεκτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναπτύχθηκε ένας μη-γραμμικός ελεγκτής για την ακολούθηση τροχιών αναφοράς όσον αφορά την αιώρηση ενός τρικοπτέρου. Αρχικά, εφαρμόσθηκε γραμμικοποίηση με ανάδραση στο σύστημα για την απόρριψη της μη-γραμμικότητας βάσει ενός προτύπου των δυναμικών του αεροχίματος. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν τα δυναμικά απόκλισης (error dynamics) και το σύστημα πήρε γραμμική μορφή. Σε αυτό το σημείο έγινε η στάθιμηση του ελεγκτή με γνώμονα τις σταθερές χρόνου του συστήματος και τα διαθέσιμα όρια των ενεργοτοιπότων. Επί αυτού, για την απόρριψη των διαταραχών, χρησιμοποιήθηκε το Bounded Real Lemma για την κατασκευή ενός ελεγκτή ο οποίος φράζει την επίδραση των διαταραχών στην έξοδο του συστήματος.

Εισήχθησαν διαταραχές στο σύστημα όσον αφορά τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του αεροχίματος καθώς και τον τρόπο με τον οποίο παράγονται τα φορτία των ελίκων. Στη συνέχεια, έγιναν προσομοιώσεις με διάφορα ζεαλιστικά σενάρια πτήσης του τρικοπτέρου. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, ο τελικός ελεγκτής συμπεριφέρεται ικανοποιητικά για τις απαιτήσεις της εφαρμογής. Η στάθιμηση του ελεγκτή παράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα διατηρώντας σε ανεκτά επίπεδα τις δράσεις των ενεργοτοιπότων.

Σχετικά με την εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο, η πλατφόρμα που κατασκευάστηκε είναι πλήρως λειτουργική. Ο αλγόριθμος για τον ελεγκτή πτήσης Rixhawk Cube έχει ήδη αναπτυχθεί σε γλώσσα προγραμματισμού C. Δυστυχώς, η χρονική περίοδος εκπόνησης αυτής της εργασίας συμπίπτει με τα πρώτα δοκιμαστικά για το τρικόπτερο. Μέχρι στιγμής έχουν γίνει κάποιες πρώτες ανεπιτυχείς προσπάθειες πτήσης καθώς παρατηρούνται διάφορα σφάλματα που αναγκαστικά δημιουργούνται κατά τη μετάβαση από τη θεωρία στην πράξη.

Για το άμεσα κοντινό μέλλον, προτεραιότητα έχει να πραγματοποιηθεί μια πρώτη επιτυχής αιώρηση του τρικοπτέρου. Τότε, σε δεύτερο χρόνο θα μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την επίδοση του ελεγκτή και να σταθμίσουμε τις παραμέτρους του. Εάν κριθεί αναγκαίο να προστεθεί κάποια ιδιότητα στον ελεγκτή μας η ακόμη να αντικατασταθεί.

Για τη περαιτέρω ανάπτυξη του ελεγκτή πτήσης θα πρέπει να συμπεριληφθεί ο έλεγχος όλων των μεταφορικών συντεταγμένων του αεροχίματος. Μπορούν, επίσης, να εισαχθούν μοντέλα διαταραχών για τις μετρήσεις των αισθητήρων καθώς και των αεροδυναμικών δυνάμεων που επιδρούν κατά την αιώρηση. Μία ακόμη διαταραχή αποτελεί η μοντελοποίηση του τρικοπτέρου ως στερεό σώμα, έτσι μπορεί κατά την πτήση να ενεργοποιούνται μη-μοντελοποιημένα δυναμικά κατά την λειτουργία του κεκλιμένου στροφείου. Έπειτα, για την ικανοποίηση των απαιτήσεων λειτουργίας του MPU, θα πρέπει να αναπτυχθεί μια λειτουργία για την μετάβαση από την κατάσταση αιώρησης στην πτήση ώς αερόχημα σταθερής πτέρυγας καθώς και την σύνθεση ενός ελεγκτή πτήσης για την κατάσταση σταθερής πτέρυγας του αεροχίματος.

Βιβλιογραφία

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Applied Mathematical Sciences. New York, NY: Springer, 1988.
- [2] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis I*. Birkhäuser Basel, 2005. doi: 10.1007/b137107. url: <https://doi.org/10.1007/b137107>.
- [3] Tarit Bose. *Airbreathing Propulsion*. Springer New York, 2012.
- [4] John Brandt and Michael Selig. «Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers». In: (Jan. 2011). doi: 10.2514/6.2011-1255.
- [5] H. Cartan. *Differential calculus*. Paris: Hermann, 1971.
- [6] J. J. Dickeson et al. «Linear quadratic optimal trajectory-tracking control of a longitudinal thrust vectoring-enabled unmanned Tri-TiltRotor». In: *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. 2007, pp. 2773–2778.
- [7] Νατσίαβας, Σ. *Εφαρμοσμένη δυναμική : θεωρία , εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη, 1994. ISBN: 9789604312566.
- [8] Klaus Jänich. *Linear Algebra*. Springer New York, 1994.
- [9] D. Kastelan, M. Konz, and J. Rudolph. *Fully Actuated Tricopter with Pilot-Supporting Control. This work is supported in part by the German Research Foundation (DFG) in the framework of project “Regelung von Trikoptern beim gemeinsamen Transport von an Seilen aufgehängten Lasten”*. 1st IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles ACNAAV'15. 2015.
- [10] Serge Lang. *Undergraduate Analysis*. Springer New York, 1997. doi: 10.1007/978-1-4757-2698-5. url: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2698-5>.
- [11] P. D. Lax. *Linear Algebra and Its Applications*. 2nd ed. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs, and Tracts. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [12] C. Papachristos, K. Alexis, and A. Tzes. «Robust LPV H-inf gain-scheduled hover-to-cruise conversion for a tilt-wing rotorcraft in the presence of CG variations». In: *IECON 2013 - 39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. 2013, pp. 4174–4179.
- [13] M. Ryll, H. H. Bühlhoff, and P. R. Giordano. «First flight tests for a quadrotor UAV with tilting propellers». In: *2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2013.
- [14] C.W. Scherer and S. Weiland. «Linear matrix inequalities in control». In: *The Control Systems Handbook, Second Edition: Control System Advanced Methods*. Ed. by W.S. Levine. CRC Press, 2011. ISBN: 978-1420073645.
- [15] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer New York, 1998.
- [16] G. Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson, Brooks/Cole, 2006. url: <https://books.google.gr/books?id=8QVdcRJyL2oC>.
- [17] F. Wang et al. «Guidance, navigation and control of an unmanned helicopter for automatic cargo transportation». In: *Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*. 2014, pp. 1013–1020.
- [18] Jakub Źrebiec. «Modelling of unmanned aerial vehicle – tricopter: Modelowanie bezzałogowego statku latającego typu tricopter». In: vol. 20. Jan. 2016, p. 7.