

Thèse présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR de SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité
Mathématiques

École doctorale
Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)

**Équivalences de Fontaine multivariables pour les corps
locaux p -adiques**

Nataniel Marquis

Soutenue publiquement le : *17 juin 2025*

Devant un jury composé de :

Benjamin SCHRAEN , Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1	<i>Rapporteur</i>
Gergely ZÁBRÁDI , Professeur, Eötvös Loránd University	<i>Rapporteur</i>
Christine HUYGHE , Directrice de Recherche, Université Franche-Comté	<i>Présidente</i>
Antoine DUCROS , Professeur, Sorbonne Université	<i>Directeur de thèse</i>
Pierre COLMEZ , Directeur de Recherche, Sorbonne Université	<i>Directeur de thèse</i>

*À toustes les dragons qui m'entourent,
pour leur sang froid, leur sang chaud et leur magie.*



Copyright :

Except where otherwise noted, this work is licensed under
[https ://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Remerciements

À l'instant de clore cette thèse en écrivant ses remerciements, il me vient le sentiment d'en écrire par la même occasion un épilogue¹. Dans un roman, on remercie en deux temps : d'un côté les personnages qui ont culbuté joyeusement dans votre monde, de l'autre ceux qui vous ont soutenu dans le récit de ces culbuteries. Pour une thèse, les deux sont intriqués avec une étroitesse qui confine à la symbiose. Alors, j'espère remercier toutes celles qui m'ont accompagné.e pendant ces trois années (et pour la plupart avant voire bien avant) en parlant également de vos manières d'être si précieuses.

Je veux commencer par remercier **Pierre Colmez** pour son accompagnement depuis plus de quatre années ; pour son recul phénoménal qui, je l'espère, a infusé suffisamment dans ma vision du domaine ; pour ces quelques phrases bien pesées que l'on comprend sur le moment, ou bien des mois après ; pour m'avoir fait confiance au sortir des confinements, dans une période où mon rapport aux mathématiques était bien amoché ; pour m'avoir permis une quantité déraisonnable d'expériences et de rencontres ; pour ses chemises colorées ; pour sa manière d'encadrer sans tenter d'imposer un rythme ; pour toutes ses répliques et ses actions légendaires² souvent accompagnées d'un haussement d'épaules. Je veux également remercier **Antoine Ducros** pour son soutien depuis sept ans, si l'on compte déjà Algèbre 1 et les e-mails sur les TD pendant le premier confinement ; pour la quantité de discussions mathématiques, techniques ou non, que nous avons eues ; pour m'avoir inclus.e quand tu as commencé à apprendre les maths condensées ; pour les restaurants à parler de politique, de maths, de rapport à la recherche, des périodes de vie traversées, de voyages, etc ; pour la charge administrative dont tu t'es emparée dans ma thèse et qui m'a évité bon nombre d'inconforts voire d'ennuis ; pour ta manière franche de dire les choses et pour m'avoir averti.e que "danser nu sur une table" pouvait s'opposer au bon déroulement de ma soutenance. Merci pour ces facettes si multiples.

Le tableau de ces soutiens les plus proches pendant mon Master et ma thèse ne serait pas complet sans **Ariane Mézard**. Je te remercie pour avoir organisé deux groupes de travail sur Fargues-Fontaine et sur les perfectoides pendant le premier

¹Et cette fois, je ne mentionnerai aucune meringue.

²J'ose espérer que la charge administrative s'est vraiment vue attribuer une quantité négative de temps dans un rapport au CNRS.

confinement : sans avoir vraiment compris ce qu'il s'y passait à l'époque³, ils m'ont accompagné dans cette période à vide et m'ont lancé dans une magnifique direction. Je te remercie pour le temps consacré cette année à m'écouter parler ou à me faire répéter mes entretiens d'embauche. Je te remercie surtout sans borne pour ton temps que je n'ai aucune raison administrative de mériter, pour ton écoute, ton humanité si profonde, ta course dans les escaliers de l'IHP, ta manière d'avoir toujours des solutions. J'espère t'avoir offert des macarons quand tu liras ces mots.

Je tiens à remercier mes rapporteurs **Benjamin Schraen** et **Gergely Zábrádi** pour la relecture minutieuse de mon manuscrit. Je vous remercie également pour les discussions à Lyon et Budapest qui m'ont ouvert d'immenses pans de réflexion, pour les quelques séminaires ou repas à partager la bonhomie comme du pain. Je remercie chaleureusement **Christine Huyghe** d'avoir accepté de présider dans mon jury.

Je tiens à remercier **Gaëtan Chenevier** pour ce fourmillement dans la préparation des TDs pour ton cours. Il m'a remis sur une pente de travail pendant ma première année de thèse. Merci pour les quelques parties de flipper et la découverte de l'icositétrachore, pour les discussions en vrac et ta patience quand j'entrebaille ta porte avec "juste une question". Merci à **Olivier Benoist**, **Muriel Livernet** et **Sylvain Rideau** pour les questions impromptues sur les toits du DMA. Merci à **Wiesława Nizioł** pour les discussions par mails, pour celles à Princeton ou à Będlewo, qui m'ont permis de raconter moins de bêtises et d'avoir davantage de références. Merci aussi pour l'enthousiasme concernant Babine. Merci à **Arthur-César Le Bras** pour m'avoir fait faire mes premiers pas sérieux de théorie des nombres en M1 et pour toutes les réponses aux épisodiques e-mails que j'envoie. Merci à **Gabriel Dospinescu** pour les conseils à Lyon et les quelques midis à Padoue. Merci à **Otmar Venjakob** pour l'accueil, l'enthousiasme et les discussions fructueuses à Heidelberg. Merci à toutes les autres mathématiciens et mathématiciennes qui ont pris quelques e-mails, quelques phrases ou quelques heures à m'expliquer une idée. Je pense notamment à **Ramla Abdellatif** ou **Laurent Berger** mais j'en oublie nécessairement.

Je tiens également à remercier l'équipe du DMA pour son accueil sans faille et cet environnement de travail si chaleureux. J'ai une pensée particulière pour **Marion**, **Yue**, **Fabienne**, **Isabelle** et **Cyril** qui ont fait ou font beaucoup pour l'ambiance du lieu.

Pour le bureau partagé pendant la thèse, pour le bureau partagé en amphi Galois, la persévérance à te laisser traquenard par mes discussions, pour n'être jamais surpris de me voir débarquer à un horaire aléatoire alors que je t'ai dit "À dieu" la veille, merci à **Paul**.

³C'était le début d'une chouette infusion !

Un remerciement immense à mon grand frère de thèse **Arnaud**. On a commencé par des discussions très personnelles en Pasteur ou au Val de Grâce pour finir par deux semaines de cohabitation incroyables à Princeton, un projet d'article ensemble, une soirée mémorable à New-York et l'Izzet qui m'a lavé.e à Padoue. Merci pour tes idées qui fusent, pour les Guinness qui n'ont pas moins fusé et pour les partages de nos vulnérabilités.

Une petite cohorte de mathématiciens et mathématiciennes m'ont donné le sourire par des excursions en séminaires, une boîte de craies utilisée ou des discussions animées autour d'un repas. Je remercie également tout particulièrement **Tess** pour le passage de flambeau du RéGA, les leçons d'humilité que tu dispenses sans t'en rendre compte et une conversation bien spécifique autour d'une bouteille à Luminy, au milieu d'une mauvaise passe pour nous deux. Je remercie **Thibault** pour la co-organisation du RéGA mais surtout pour les anecdotes folles autour de Bo Buns et les salopettes si reconnaissables.

L'épilogue va s'allonger un peu plus, comme un ours préparant son hibernation. Il me faut nommer tous ces endroits qui m'ont donné de la légèreté. Merci à toutes les membres des **pom-poms** et de la **choré-choré** que j'ai croisé.e.s au fil des générations. Merci pour l'environnement si bienveillant. Merci pour les rires en cascade et la possibilité de déhancher avec des bruits d'animaux. J'ai une pensée toute nostalgique pour le petit groupe de mon chefftenat et particulièrement à ma cocheffe **Tiffany**. Merci à l'**atelier chorégraphique** pour le mélange de sérieux et de clownerie. Merci à la **pôle** pour les figures desquelles je ne me croyais pas capable et les bleus en farandole. Merci à l'**équipe du Pôt** pour votre gentillesse et pour les deuxièmes assiettes qui m'ont permis de tenir jusqu'à minuit.

Il me faut tendrement remercier la troupe précieuse de ceux qui ont rythmé par leurs projets et leur proximité ces trois années. Nommer toute cette assemblée que j'aime et qui palabre dans ma vie. Les rires communiqués ont été ma vaillance. Les émotions racontées ou partagées mes trésors⁴. Merci aux **malins** individuellement et collectivement : **Samuel** pour ce mélange de café, de grommellements et d'une subtile touche de burlesque ; **Roméo** pour tes prouesses de mauvaise foi et ta fraternité sans égale ; **JD** pour tes merveilles d'humour noir et ton affection si visible. J'espère passer encore tout un tas de soirées avec vous à lancer des bêtises à travers la pièce comme des avions en papier. Merci **Guillaume** pour les rabbit holes en pagaille, pour les Star Realms en tous lieux et pour ne pas t'être enfui après l'escargot tueur. Merci **Fleur** pour ta manière si méthodique de secouer les discussions et ta manière si peu méthodique de secouer ton boule, pour les maths en répète pom-pom et les pom-poms aux horaires de maths. Merci **Jeanne** pour ton emploi du temps

⁴Pour une fois j'accepte qu'il y ait moins de dragons et plus de trésors.

plus chargé que le mien, les répliques aussi clairsemées que cultes et les discussions au soleil. Merci **Garance** pour ces week-ends dépliés en Normandie, pour mon grand écart et pour toutes tes tournures formelles qui veulent dire tant d'émotions. Merci **Perrine** pour mes transformations en eucalyptus, pour l'enthousiasme irradié partout et le Momo assoupi dans mon lit.

Il y a aussi ceux avec qui j'ai tant partagé qu'ils ont teinté mon regard. Les confectionneurs et confectionneuses de tendresse, dont Bourvil dit qu'il n'est pas question de vivre sans. Nous nous sommes tant dit le fond de nos doutes, de nos éclats et de nos sourires. Quand je songe, juste avant de dormir, à pourquoi le jour était heureux, c'est d'abord à ma famille et à vous que je pense⁵. Merci **Nathan** d'être là depuis si longtemps, dans les moments où nos cernes noircissaient et dans ceux où les Alpes nous élevaient. Merci de me transmettre tant de tenacité, entre autres pour cette thèse. Que la mozzarella pleuve sur toi ! Merci **Lou** pour le chapardage de sable que nous ne saurions expliquer. Les manières communes de voir l'avenir et les obsessions partagées sans lesquelles mon pas serait moins incarné. Merci pour ta détermination à rester si près et pour ta manière de chérir. Merci **Martin** de ne jamais t'arrêter de poser des questions profondes au détour d'une discussion. Merci pour les premiers vocaux à des milliers de kilomètres, ta capacité à rendre heureux autour de toi, à écouter sans juger ni broser dans le sens du poil. Merci pour la portée⁶ de notre relation. Merci **Orane** pour ta manière de *me cueillir dans tes bras*⁷. Ta manière d'être heureuse pour un rien m'a tant appris. Ta manière d'avoir tes idées fixes et d'en éclabousser le monde m'est si précieuse. Merci d'avoir tissé doucement cette relation avec moi, d'avoir entre autres bercé toute cette thèse. À toutes les quatre : j'espère vous rendre la pareille. Je vais tâcher de vous la rendre encore longtemps.

Je finis par remercier sans bornes toute ma famille, ceux qui ont toujours fait partie de ma vie⁸. À **Manou** pour ta tolérance, pour ne pas hausser les sourcils devant les maths que je fais alors que tu détestais celles que tu faisais. À **Patou** pour ta gentillesse et tes fous rires. À **Bon Papa** pour les dialogues fournis et le partage des expériences. J'ai une pensée câline pour **Mamisse** et **Papi Gérard** auxquels je tenais fort. À **mon parrain, ma marraine, toute la famille en Bretagne et Normandie** pour la si jolie ponctuation d'une vie. À **tonton Dadou, Estelle et Alice** pour votre accueil quand je suis arrivé.e à Paris et les dimanches d'une douce tranquillité. À **Aliona et Angeline** pour la fierté que j'ai à être votre frère, les jeux et les films à Antibes et tout ce que l'on créera à l'avenir. Pour mes **parents**, enfin. Vous m'avez permis de tracer mon chemin peu importe les obstacles. Vous vous êtes battus pour.

⁵Bon et aux immenses bouchées de nourriture engloutis, je confesse.

⁶Quelle est la première carte d'araignée à laquelle tu as pensé ?

⁷"Les oiseaux", Pomme.

⁸Alio et la Tchoupinette, je m'accorde l'approximation de quelques années pour vous y inclure.

Merci pour votre amour sans concessions et sans questions, pour avoir rendu notre relation si simple, si évidente, si belle.

Ces remerciements se sont peut-être éternisés. Il me semble que chaque once de bonheur⁹ a participé à ma thèse. Et j'en ai probablement oublié tout un tas.

⁹Dont celui plus diffus de faire des mathématiques, de chercher et de voir de jolis diagrammes ou de jolis formulations émerger.

Abstract

In this thesis, we prove several multivariable Fontaine equivalences. For a finite set Δ , we adapt the techniques of Carter-Kedlaya-Zábrádi to obtain a multivariable Fontaine equivalence which relates continuous finite dimensional representations of $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{F}_q((X))}$ over \mathbb{F}_q to multivariable φ -modules over a \mathbb{F}_q -algebra, which is a domain. From this, we derive a multivariable Lubin-Tate Fontaine equivalence for continuous finite type representations of $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_K$ over \mathcal{O}_K , where $K|\mathbb{Q}_p$ is a finite extension. We also obtain a plectic Fontaine equivalence and two equivalences for the subgroup $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ of the plectic Galois group. Since Drinfeld's lemma for diamonds over \mathbb{F}_q is a core input of this strategy, we devote a chapter to writing down a complete proof of such a result.

In order to automate the construction of Fontaine-type functors and steps in the proof of a Fontaine-type equivalence (such as dévissage and passing to the limit), we develop a general framework for such constructions. Functors involved in Fontaine-type equivalences, between full subcategories of modules over a topological ring equipped with semi-linear continuous action of a topological monoid, decompose as extension of scalars followed by taking of invariants. We define the categories of étale projective \mathcal{S} -modules over R , which correspond by Fontaine-type equivalences to finite free representations of a group. We study their preservation by base change, taking of invariants by a normal submonoid of \mathcal{S} and coinduction to a bigger monoid. We define and study categories corresponding to finite type continuous representations over \mathbb{Z}_p by introducing the notions of finite projective (r, μ) -dévissage and of topological étale \mathcal{S} -modules over R .

Keywords: p -adic number theory, (φ, Γ) -modules, multivariable Fontaine equivalence, Lubin-Tate laws, plectic

Résumé

Dans cette thèse, nous prouvons plusieurs équivalences de Fontaine multivariables. Pour un ensemble fini Δ , nous adaptons les techniques de Carter-Kedlaya-Zábrádi pour obtenir une équivalence de Fontaine multivariable qui relie les représentations continues de dimension finie de $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}((X))$ sur \mathbb{F}_q à des φ -modules multivariables sur une \mathbb{F}_q -algèbre intègre. Nous en déduisons une équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable pour les représentations continues de type fini de $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_K$ sur \mathcal{O}_K , où $K|\mathbb{Q}_p$ est une extension finie. Nous obtenons également une équivalence de Fontaine plectique et deux équivalences pour le sous-groupe $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ du groupe de Galois plectique. Le lemme de Drinfeld pour les diamants sur \mathbb{F}_q étant un élément central de cette stratégie, nous consacrons un chapitre à en écrire une preuve complète.

Afin d'automatiser la construction de foncteurs de type Fontaine et les étapes de la preuve d'une équivalence de type Fontaine (comme le dévissage et le passage à la limite), nous développons un cadre général pour de telles constructions. Les foncteurs impliqués dans les équivalences de Fontaine, entre sous-catégories pleines de modules sur un anneau topologique équipés d'une action semi-linéaire continue d'un monoïde topologique, s'expriment comme composée d'extension des scalaires et de prise d'invariants. Nous définissons les catégories des \mathcal{S} -modules étales projectifs sur R , qui correspondent par des équivalences de type Fontaine à des représentations galoisiennes sur des \mathbb{F}_p - ou \mathbb{Z}_p -modules libres de type fini. Nous étudions leur préservation par changement de base, prise d'invariants par un sous-monoïde distingué de \mathcal{S} et coinduction vers un monoïde plus grand. Nous définissons et étudions les catégories correspondant aux représentations continues de type fini sur \mathbb{Z}_p en introduisant les notions de (r, μ) -dévissage projectif et de \mathcal{S} -modules topologiques étales sur R .

Mots-clés : théorie des nombres p -adique, (φ, Γ) -modules, équivalence de Fontaine multivariable, lois de Lubin-Tate, plectique

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	L'équivalence de Fontaine	1
1.2	Quelques utilisations de l'équivalence de Fontaine	3
1.3	La variante Lubin-Tate	6
1.4	La variante multivariable de Zábrádi	10
1.5	Un formalisme pour englober les variantes	11
1.6	Les équivalences de Fontaine multivariées	16
1	Introduction (english version)	23
1.1	Fontaine equivalence	23
1.2	Some uses of Fontaine equivalence	25
1.3	The Lubin-Tate variant	28
1.4	The multivariable variant of Zábrádi	31
1.5	A formalism to encompass variants	33
1.6	Multivariable Fontaine equivalences	37
2	Subcategories of \mathcal{S}-modules over R	43
2.1	The category of \mathcal{S} -modules over R	43
2.2	The subcategories of étale and étale projective \mathcal{S} -modules over R . .	47
2.3	Three crucial operations	52
2.3.1	Base change	52
2.3.2	Invariants by a normal submonoid	55
2.3.3	Coinduction	58
2.4	Taking dévissage into account	63
2.4.1	Modules with projective r -dévissage	63
2.4.2	The category of \mathcal{S} -modules over R with projective r -dévissage	76
2.4.3	Preservation by the previous operations	81
2.5	Adding topology	88
2.5.1	The initial topology	88
2.5.2	Topological \mathcal{S} -modules over R	90
2.5.3	Preservation by the previous operations	98

3	L'équivalence de Fontaine, version Lubin-Tate	105
3.1	Modules formels de Lubin-Tate	105
3.2	Corps de normes imparfait Lubin-Tate	109
3.3	Preuve de l'équivalence	113
3.4	Quelques calculs explicites	120
3.5	Automatiques continuités	128
4	Le lemme de Drinfeld pour des diamants sur \mathbb{F}_q	135
4.1	Espaces perfectoides et diamants	135
4.2	Groupe fondamental fini étale	140
4.2.1	Catégories galoisiennes	140
4.2.2	Existence du groupe fondamental d'un diamant	142
4.2.3	Propriétés du groupe fondamental étale	148
4.3	Le lemme de Drinfeld	151
5	Équivalences de Fontaine multivariables pour certains corps perfectoides de caractéristique p	161
5.1	Construction du foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ modulo p	162
5.1.1	Définition des anneaux perfectoides multivariables	162
5.1.2	Propriétés desdits anneaux	166
5.1.3	Le foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$	182
5.2	L'équivalence multivariable perfectoïde modulo p	184
5.2.1	Le foncteur $V_{\tilde{E}, \Delta}$	185
5.2.2	L'isomorphisme de comparaison pour \tilde{V}_Δ	195
5.3	Lien entre les deux foncteurs	198
5.4	L'équivalence pour les perfectisés de corps locaux de caractéristique p	201
5.4.1	L'équivalence modulo p	201
5.4.2	Déviage vers des coefficients de caractéristique mixte	211
5.5	L'équivalence de Carter-Kedlaya-Zábrádi	216
6	Bestiaire d'équivalences de Fontaine multivariables pour des corps locaux p-adiques	221
6.1	L'équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable	221
6.2	Quelques calculs explicites	229
6.3	L'équivalence de Fontaine plectique	232
6.3.1	Le groupe de Galois plectique	232
6.3.2	Preuve de l'équivalence plectique	234
6.4	Les équivalences de Fontaine glectique	237
6.4.1	Variables cachées dans \tilde{A}_K	237
6.4.2	Le groupe de Galois glectique	239

6.4.3	L'équivalence de Fontaine glectique semi-linéaire pour des extensions galoisiennes de \mathbb{Q}_p	240
6.4.4	Deux équivalences de Fontaine glectiques	247
Bibliographie		251
A	Monoïdes topologiques	257
A.1	Constructions dans les monoïdes topologiques	257
A.2	Cohomologie d'Eilenberg-Mac Lane des monoïdes topologiques . . .	262

Introduction

1.1 L'équivalence de Fontaine

Soit p un nombre premier qui est fixé tout au long de cette thèse¹ et K un corps local p -adique, i.e. une extension finie du corps des nombres p -adiques \mathbb{Q}_p . On note \mathcal{G}_K son groupe de Galois absolu muni de la topologie profinie. Après un long cheminement², la théorie des nombres s'est intéressée aux représentations continues de \mathcal{G}_K sur des \mathbb{Z}_p -modules de type fini. Un exemple typique, de rang 2, est donné par le module de Tate d'une courbe elliptique sur un corps de nombres ayant K comme complété en une place au-dessus de p .

Pour comprendre ces représentations, nous pouvons tenter d'étudier directement le groupe \mathcal{G}_K . On peut effectivement décrire \mathcal{G}_K par générateurs topologiques et relations [Jak68] [Jw82], mais sans retrouver la filtration de ramification³. Or, [JR79] montre que la donnée de \mathcal{G}_K comme groupe topologique équivaut à celles de $[K : \mathbb{Q}_p]$ et des racines de l'unité dans K . La filtration de ramification est ainsi nécessaire⁴ pour caractériser le corps.

D'autres stratégies en théorie de Hodge p -adique, développées par J.-M. Fontaine, s'attaquent directement aux catégories de représentations. Ces stratégies coulent sur deux versants : une partie dévale vers les anneaux de périodes (elfiques⁵) pour comprendre les représentations venant de la géométrie⁶, une autre partie fournit une description algébrique de toutes les représentations sans distinction. L'aube de ces idées et l'éclaircissement progressif du versant géométrique sont exposés dans [Col19]. Dans cette thèse, nous longerons plutôt le sentier algébrique.

¹Un ami m'a dit, il y a peu, que ce genre de phrase était inutile. Elle ne l'est pas plus que la mention "fantasy" au dos du cinquième tome de *Game of Thrones* ou de *The Lightbringer*. Elle est là pour donner à tout p -adicien et toute p -adicienne sa petite dose de sérotonine.

²Voir [Col13] pour une introduction preste et éclairante. Les lecteurs et lectrices souhaitant repartir de la théorie de Galois peuvent tenter mon introduction au domaine de recherche [Mar22a, §1.1-3 et §2.1].

³On peut toutefois noter que le quotient par l'inertie sauvage est connu (voir Proposition 3.1.11). Pour compléter le tableau, on trouvera une description par générateurs et relations de l'inertie sauvage dans [Ser94, §5.6].

⁴Et suffisante [Moc97].

⁵Voir les premières phrases de [Col19].

⁶Elles aboutissent également à relier différentes théories cohomologiques des variétés sur K (voir [Col19, §1.4.4]).

La première incarnation de cette description algébrique apparaît dans [Fon07], où J.-M. Fontaine introduit la catégorie des (φ, Γ_K) -modules étales, constituée d'objets d'algèbre semi-linéaire, et construit une équivalence explicite avec la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$ des représentations continues de \mathcal{G}_K sur des \mathbb{Z}_p -modules de type fini. Nous notons q le cardinal du corps résiduel de K , qui est une puissance de p .

Définissons l'anneau

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \left(\mathbb{Z}_q[[X]] [X^{-1}] \right)^{\wedge p}$$

muni d'une topologie que nous appelons *topologie faible*, d'un relevé \mathbb{Z}_p -linéaire et continu du Frobenius absolu⁷ et d'une action \mathbb{Z}_q -linéaire et continue du groupe de Galois de l'extension cyclotomique $\Gamma_K := \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})|K)$ qui commute au Frobenius⁸. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante p et de corps résiduel $E := \mathbb{F}_q((X))$. Les (φ, Γ_K) -modules étales sont les $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules D munis d'une action semi-linéaire continue⁹ de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_K)$ telle que $\varphi(D)$ engendre D . On note $\text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_K, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ cette catégorie¹⁰.

Pour démontrer l'équivalence pour des représentations de \mathcal{G}_K , Fontaine commence par prouver une équivalence similaire entre représentations de groupes de Galois de corps de caractéristique p et φ -modules étales. Il construit un anneau de comparaison $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}}$. Ce dernier est de valuation discrète, d'uniformisante p et de corps résiduel E^{sep} . Il est muni de relevés à la fois du Frobenius et de l'action de \mathcal{G}_E sur E^{sep} . L'équivalence est alors donnée par :

Théorème 1.1.1 ([Fon07]). *Les foncteurs suivants sont quasi-inverses l'un de l'autre*¹¹.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} : & \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_E & \xleftrightarrow{\quad} \text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}) : \mathbb{V} \\ & V \mapsto & \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V \right)^{\mathcal{G}_E} \\ & \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D \right)^{\varphi=\text{Id}} & \longleftarrow D \end{array}$$

Le point délicat est de démontrer, pour $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$, que le *morphisme de comparaison*

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) \xrightarrow{z \otimes (z' \otimes v) \mapsto zz' \otimes v} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$$

⁷Lorsque $K|\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, c'est l'unique application de ce type qui vérifie $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$.

⁸Lorsque $K|\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, il s'agit de l'unique action vérifiant $\gamma \cdot X = (1+X)^\gamma - 1$ (on a identifié Γ_K à un sous-groupe de \mathbb{Z}_p^\times).

⁹Une discussion plus précise sur cet adjectif est menée au §1.5.

¹⁰Tout au long de l'introduction, nous utilisons ce style de notations assez librement, en supposant que les décorations sont assez explicites. N'hésitez pas à vous référer au Chapitre 2 pour y trouver les définitions précises.

¹¹Il faut certes prouver que les propriétés de finitude et/ou d'étalement sont préservées pour atterrir dans la bonne catégorie. Avant cela, il est instructif de demander quelles propriétés de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}}$ permettent de définir les foncteurs entre catégories de modules sur les anneaux requis avec les actions des monoides requises.

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D) \xrightarrow{z \otimes (z' \otimes d) \mapsto zz' \otimes d} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$$

sont des isomorphismes. Il n'est pas difficile de voir qu'ils sont injectifs mais il se pourrait que \mathbb{D} et \mathbb{V} produisent des objets trop petits.

La deuxième étape consiste à identifier \mathcal{G}_E à un sous-groupe de \mathcal{G}_K . Pour cela, J.-M. Fontaine identifie le corps de normes imparfait associé à $K(\mu_{p^\infty})$ dans [Win83] au corps E pour en déduire une identification des théories de Galois de $K(\mu_{p^\infty})$ et de E . Il lui reste alors à munir $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ d'une action de \mathcal{G}_K qui étende celle de $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_{K(\mu_{p^\infty})}$. Il plonge pour cela $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ dans un anneau de périodes (gnomique). Soit \mathbb{C}_p le corps perfectoïde défini comme la complétion de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Soit \mathbb{C}_p^\flat son basculé. Pour $K|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, on peut choisir le plongement

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ \hookrightarrow \tilde{A} := W(\mathbb{C}_p^\flat), \quad X \mapsto [\varepsilon] - 1$$

où $\varepsilon \in \mathbb{C}_p^\flat$ est une suite compatible de racines primitives p^n -ièmes de l'unité. Fontaine définit ce plongement de manière à ce que l'image soit stable par \mathcal{G}_K et par le Frobenius, et que les actions induites sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ soient le Frobenius et l'action de Γ_K prescrites. Compte tenu de ces actions, appliquer les formules du Théorème 1.1.1 à des représentations de \mathcal{G}_K fournit une action supplémentaire de $\mathcal{G}_K/\mathcal{G}_E = \Gamma_K$ côté φ -modules.

1.2 Quelques utilisations de l'équivalence de Fontaine

Un premier intérêt de l'équivalence de Fontaine est qu'elle troque le groupe \mathcal{G}_K et sa complexité contre un monoïde plus facile à saisir et un anneau plus tarabiscoté. Pour $K = \mathbb{Q}_p$, le sous-anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ := \mathbb{Z}_p[[X]]$ avec son action de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ a toutefois le mérite d'être isomorphe à l'espace de mesures¹² $\mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p)$, ce qui nous ouvre les outils de l'analyse fonctionnelle p -adique. Mentionnons également que $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ s'interprète comme l'anneau des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{Q}_p sur un cercle fantôme " $|X| < 1$ et $|X| \geq 1$ ". Cela justifie le nom des (φ, Γ) -modules surconvergentes [CC98], qui vivent sur le sous-anneau \mathcal{E}^\dagger des fonctions convergeant sur une couronne $\rho < |X| < 1$ pour un certain ρ , bornées à valeurs dans \mathbb{Q}_p . Interpréter nos anneaux de coefficients comme des anneaux de fonctions permet d'autres variations, comme ceux sur l'anneau de Robba [KL15] : l'anneau des fonctions surconvergentes à valeurs dans \mathbb{Q}_p . Cette dernière variante permet de reconstruire l'espace $\Pi(\rho)^{\text{an}}$ des vecteurs analytiques de la représentation banachique de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à une

¹²Ici, l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ dans \mathbb{Z}_p . Voir [Col10, p. I.1] pour plus de détails.

représentation de dimension 2 de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur \mathbb{Q}_p par la correspondance de Langlands (voir [Col16]).

Puisque l'analyse fonctionnelle p -adique et les interprétations géométriques permettent de manipuler les (φ, Γ_K) -modules étales, on peut essayer d'étudier les représentations galoisiennes uniquement avec l'aide des modules associés. L. Herr a par exemple expliqué comment retrouver la cohomologie galoisienne grâce aux (φ, Γ_K) -modules.

Théorème 1.2.1 ([Her98a]). *Supposons que Γ_K est procyclique¹³ et fixons γ un générateur topologique. Pour tout objet V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$, le complexe*

$$0 \rightarrow \mathbb{D}(V) \xrightarrow{(\varphi - \text{Id}) \times (\gamma - \text{Id})} \mathbb{D}(V) \oplus \mathbb{D}(V) \xrightarrow{(\gamma - \text{Id}) \oplus (\text{Id} - \varphi)} \mathbb{D}(V) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

est isomorphe à $\text{R}\Gamma_{\text{cont}}(\mathcal{G}_K, V)$ dans la catégorie dérivée des \mathbb{Z}_p -modules.

Les familles de représentations se manifestent également dans la théorie des (φ, Γ_K) -modules. Une généralisation de l'équivalence de Fontaine dans [Dee01] démontre que les familles de représentations galoisiennes paramétrées par une \mathbb{Z}_p -algèbre complète locale noethérienne R dont le corps résiduel est fini correspondent exactement aux familles de (φ, Γ_K) -modules étales paramétrées par cette même algèbre, compatible sur les fibres avec l'équivalence de Fontaine classique. Plus généralement, les familles de représentations se plongent dans les familles de (φ, Γ_K) -modules étales ce qui motive en partie l'introduction dans [Eme] du champ des (φ, Γ) -modules. De nouvelles familles intéressantes de (φ, Γ) -modules apparaissent alors : les composantes irréductibles du sous-champ réduit sont des familles de représentations génériquement réductibles et se recollent sur les lieux où elles sont irréductibles / les lieux où elles sont scindées (voir [EGH23, Prop. 7.2.11]).

Pour motiver l'introduction des (φ, Γ) -modules multivariés, nous effleurons l'utilisation des (φ, Γ) -modules pour la correspondance de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. C. Breuil résume cette correspondance dans [Bre10] par la question : peut-on faire correspondre certaines représentations linéaires continues de \mathcal{G}_K sur des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension n avec certaines représentations linéaires continues $\hat{\pi}$ de $\text{GL}_n(K)$ sur des espaces de Banach p -adiques, d'une manière compatible avec la réduction modulo p , avec la cohomologie et aussi avec les « familles p -adiques » ?

¹³Par exemple si $p \neq 2$ ou si $p = 2$ et K contient $\sqrt{-1}$.

Pour $n = 1$, la réponse est donnée par la théorie du corps de classes locale¹⁴. Toutes les représentations de dimension 1 sur \mathbb{Q}_p se factorisent par l'abélianisé $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$, que ladite théorie du corps de classes décrit comme le complété profini de K^\times .

Proposition 1.2.2. *L'application*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{caractères unitaires de} \\ \text{GL}_1(K) = K^\times \text{ sur } K \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \text{caractères continus de } \mathcal{G}_K^{\text{ab}} \text{ sur } K \right\} \\ \chi &\mapsto \begin{array}{l} \text{prolongement par continuité} \\ \text{de } \chi \text{ à } \widehat{K^\times} \cong \mathcal{G}_K^{\text{ab}} \end{array} \end{aligned}$$

fournit la correspondance bijective pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, une piste démarre avec le foncteur \mathbf{V} construit par P. Colmez dans [Col10]. À partir d'une représentation lisse admissible Π de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur \mathbb{F}_p , de longueur finie et à caractère central, P. Colmez construit fonctoriellement un (φ, Γ) -module étale, donc une représentation galoisienne via l'équivalence de Fontaine. Pour construire ce foncteur, il est crucial de comprendre comment retrouver le corps résiduel

$$E := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cong \mathbb{F}_p((X))$$

et son action de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ à partir du groupe $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Considérons la \mathbb{F}_p -algèbre d'Iwasawa des matrices unipotentes entières

$$\mathbb{F}_p \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] := \varprojlim_{U \text{ sous-groupe ouvert}} \mathbb{F}_p \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) / U \right].$$

Le morphisme \mathbb{F}_p -linéaire continue tel que $X \mapsto \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] - 1$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{F}_p[[X]]$ et cette algèbre d'Iwasawa. De plus, le sous-monoïde $\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ agit continûment par conjugaison sur $\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ce qui fournit une action sur l'algèbre d'Iwasawa. Cette action vérifie $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X^p$ et $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = (1 + X)^\gamma - 1$ pour $\gamma \in \mathbb{Z}_p^\times$. On retrouve le Frobenius et l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ prescrits par Fontaine. L'action lisse de $\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ sur Π fournit alors une structure de $\mathbb{F}_p[[X]]$ -module de torsion sur Π , puis de $\mathbb{F}_p[[X]]$ -module sur Π^\vee . À certaines sous- $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -représentations de longueur finie $W \subset \Pi$, [Col10, §4.1] associe des sous- $\mathbb{F}_p[[X]]$ -modules $\mathbf{D}^+(W) \subset \Pi^\vee$ stables par l'action de $\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, puis démontre que

$$\mathbf{D}^+(W) [X^{-1}] \in \text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}, E) \text{ et ne dépend pas de } W.$$

¹⁴Voir la section 3.1 pour une exposition concise, ou [Yos06] pour une exposition détaillée.

La localisation en X est cruciale pour démontrer l'étalité¹⁵. Pour la condition de finitude, la stratégie de [Col10, §IV.2] repose sur l'exactitude du foncteur \mathbf{V} qui permet de se ramener au cas où Π est irréductible. Dans ce cas, la classification des représentations absolument irréductibles de Barthel-Livné [BL94] et Breuil [Bre03] permet une étude exhaustive.

La correspondance pour les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ peut alors s'exprimer comme suit.

Théorème 1.2.3. 1. Le foncteur \mathbf{V} s'annule sur les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie.

2. Pour tous caractères $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \mapsto \overline{\mathbb{F}_p}^\times$, on a

$$\mathbf{V} \left(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1} \right) = \overline{\mathbb{F}_p}(\delta_2)$$

où $B(\mathbb{Q}_p)$ est le Borel des matrices triangulaires supérieures, où l'induite est lisse, où δ_2 est vu comme caractère de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ par la théorie du corps de classes, où $\omega(x) = x \mapsto x|_p$ et où

$$(\delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \delta_1(a)(\delta_2 \omega^{-1})(d).$$

De plus, pour¹⁶ $\delta_1 \notin \{\delta_2, \delta_2 \omega, \delta_2 \omega^{-1}\}$, le foncteur \mathbf{V} induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1 \left(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1} \right) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\overline{\mathbb{F}_p}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]}^1(\delta_1, \delta_2).$$

3. Les représentations irréductibles supersingulières, i.e. qui n'apparaissent pas comme facteur de Jordan-Hölder d'une des induites ci-dessus, correspondent bijectivement par \mathbf{V} aux représentations irréductibles de dimension 2.

1.3 La variante Lubin-Tate

Pour démontrer l'équivalence de Fontaine, l'identification des théories de Galois de $K(\mu_{p^\infty})$ et du corps $E = \mathbb{F}_q((X))$ ainsi que la définition d'un plongement adéquat de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\mathrm{nr}}}}$ dans \tilde{A} pour le munir d'une action de \mathcal{G}_K sont deux étapes clés. La théorie du corps de normes dans [Win83] illustre que la première étape fonctionne encore dans le cadre plus général des extensions infinies arithmétiquement profinies¹⁷.

¹⁵Et pour l'indépendance vis-à-vis du choix de W .

¹⁶Un énoncé moins agréable existe également dans les autres situations. Ces situations plus complexes contiennent le cas où les induites ne sont pas irréductibles.

¹⁷e.g. les extensions dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p -adique dont l'inertie sauvage est un sous-groupe ouvert.

Un autre éclairage vient de la théorie des corps perfectoides de P. Scholze : à tout corps perfectoïde est associé un corps perfectoïde de caractéristique p et de même théorie de Galois (voir [Sch12, §3]). En appliquant ce procédé aux complétés de certains extensions $L|K$ considérées par Fontaine-Wintenberger, on obtient $\widehat{E^{\text{rad}}}$ et l'on identifie ainsi les théories de Galois de L et de E .

J.-M. Fontaine évoque déjà dans l'introduction de [Fon07] des espoirs de généralisations des (φ, Γ) -modules en dévissant par ces extensions. Si la construction précédente fournit également un plongement de E^{sep} dans \mathbb{C}_p^b et obtient une équivalence pour les représentations modulo p , obtenir le plongement en caractéristique mixte s'avère plus délicat. Le cas des extensions Lubin-Tate a été évoqué dans [Fou05], puis traité par [KR09] et détaillé dans [Sch17].

Avant d'énoncer cette équivalence, décrivons les extensions Lubin-Tate introduites dans [LT65]. Pour une uniformisante π de K , un polynôme de Lubin-Tate est un polynôme $f \in \mathcal{O}_K[[T]]$ tel que

$$f \equiv \pi T + T^q \pmod{\pi T^2}.$$

Deux exemples importants sont à retenir : le polynôme $\pi T + T^q$ qui fonctionne toujours et, pour $K = \mathbb{Q}_p$, le polynôme $(1 + T)^p - 1$. À un tel polynôme est associé un \mathcal{O}_K -module formel. On peut y penser à la fois comme une famille de séries

$$+_{\text{LT}, f} \in \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]] \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}_K, [a]_{\text{LT}, f} \in T\mathcal{O}_K[[T]]$$

avec les relations adéquates, ou comme une structure de \mathcal{O}_K -module naturelle sur les éléments topologiquement nilpotents des \mathcal{O}_K -algèbres topologiques complètes. En particulier, on obtient une structure de \mathcal{O}_K -module sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$. Les points de torsion correspondent aux racines des $f^{\circ n}$ et engendrent donc une extension algébrique que l'on appelle *extension Lubin-Tate* et que l'on note¹⁸ $K_{\text{LT}, \pi}$. Elle est abélienne, de groupe de Galois isomorphe à \mathcal{O}_K^\times par

$$\chi_{\text{LT}} : \text{Gal}(K_{\text{LT}, \pi}|K) \rightarrow \mathcal{O}_K^\times \text{ tq } \forall x \text{ de torsion, } g(x) = [\chi_{\text{LT}}(g)]_{\text{LT}, f}(x).$$

L'extension maximale abélienne est alors $K_{\text{LT}, \pi} K^{\text{ur}}$. C'est une version constructive du corps de classes local dont une exposition auto-contenue est présentée dans [Yos06]. Elle rend explicites les caractères de $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$. Dans le cas de $K = \mathbb{Q}_p$ et $f = (1 + T)^p - 1$, le \mathbb{Z}_p -module formel associé correspond au groupe multiplicatif et on retrouve Kronecker-Weber :

$$\mathbb{Q}_p^{\text{ab}} = \mathbb{Q}_p^{\text{cycl}} = \mathbb{Q}_p^{\text{nr}} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}).$$

¹⁸Elle ne dépend que du choix de π .

Nous pouvons voir cette théorie comme un analogue de la multiplication complexe : pour les corps quadratiques imaginaires F , l'extension F^{ab} est engendrée par les points de torsion d'une courbe elliptique à multiplication complexe par \mathcal{O}_F et par son invariant j [Sil94, II Th 5.6].

Décrivons à présent l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate pour un polynôme de Lubin-Tate f fixé. Soit

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} := \left(\mathcal{O}_K[[X]] [X^{-1}] \right)^{\wedge \pi}$$

toujours muni de la *topologie faible*, de l'unique relevé \mathcal{O}_K -linéaire et continu du q -Frobenius qui vérifie $\varphi_q(X) = f(X)$ et de l'unique action \mathcal{O}_K -linéaire et continue de $\Gamma_{K,LT} := \text{Gal}(K_{LT,\pi}|K)$ vérifiant $g \cdot X = [\chi_{LT}(g)]_{LT,f}(X)$; les deux actions commutent. Plus généralement, soit $L|\mathbb{Q}_p$ une extension finie dont le corps résiduel a même cardinal que celui de K , les extensions $K_\infty|K$ pour lesquelles le plongement de E dans \mathbb{C}_p^\flat se relève en un plongement de $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vérifiant $\varphi(X) \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ sont contenues dans une extension Lubin-Tate d'une sous-extension de K (voir [Ber14] [Poy19]).

Avec ces définitions, l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate énonce qu'il existe une équivalence de catégories¹⁹

$$\mathbb{D}_{LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) : \mathbb{V}_{LT}.$$

On remarque que le relevé de E en caractéristique mixte est une \mathcal{O}_K -algèbre (c'est obligatoire, les coefficients des séries donnant l'action de $\Gamma_{K,LT}$ sont dans \mathcal{O}_K) avec un relevé linéaire du q -Frobenius. Pour une représentation V sur \mathbb{Z}_p , cette machinerie ne nous permet de comprendre que les propriétés de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$. Ce n'est pas une grande perte : il est courant de considérer des classes d'isomorphismes de représentations sur des corps p -adiques assez grands afin d'obtenir des représentants canoniques. Par exemple, l'espace d'extensions du caractère trivial par lui-même $\text{Ext}_{L[\mathcal{G}_K]}^1(L, L) \cong \text{Hom}_{\text{cont}}(K^\times, L)$ est de dimension $[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ sur L , peu importe le corps local p -adique L choisi ; les $\sigma \circ \log \circ \chi_{LT}$ pour $\sigma : K \rightarrow L$ et la valuation en fournissent une base²⁰ dès que L contient tous les conjugués de K . Les $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules étales associés à ces représentants canoniques s'écrivent également aisément. Similairement, la classification des représentations de dimensions 2 semi-stables non cristallines à poids de Hodge-Tate non dégénérés dans [Sch10] est simplifiée lorsque L contient tous les conjugués de K et quelques autres extensions explicites de degré divisant $2[K : \mathbb{Q}_p]$.

¹⁹Donnée par des formules similaires à l'équivalence classique.

²⁰Voir la Remarque 3.1.10.

Cette équivalence a pour premier avantage de rendre explicite le corps de classes local. Une représentation de \mathcal{G}_K sur un \mathcal{O}_K -module libre de rang 1 correspond par la théorie du corps de classes à un caractère δ de K^\times . On peut montrer que le $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -module libre de rang 1 correspondant possède une base $\{e\}$ dans laquelle

$$\varphi_q(e) = \delta(\pi)e$$

$$\forall a \in \Gamma_{K,LT}, a \cdot e = \delta(a)e$$

avec certaines relations. Prouver ce résultat de structure directement sur les $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules de rang 1 semble assez délicat. Nous effectuerons ce calcul et quelques autres, rendus aisés par le choix de l'équivalence Lubin-Tate, dans la Section 3.4.

Les deux premières applications que nous avons mentionnées fonctionnent encore dans le cadre Lubin-Tate.

Théorème 1.3.1 ([KV22]). *Les actions de φ_q et de $\Gamma_{K,LT}$ commutent pour un $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -module D , le complexe $R\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, D)$ est muni d'un q -Frobenius.*

Pour toute représentation V dans $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$,

$$\text{Cône} \left[R\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, \mathbb{D}_{LT}(V)) \xrightarrow{\varphi_q - \text{Id}} R\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, \mathbb{D}_{LT}(V)) \right]$$

est isomorphe à $R\Gamma_{\text{cont}}(\mathcal{G}_K, V)$ dans la catégorie dérivée des \mathcal{O}_K -modules.

Un champ des $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules a également été étudié par [Pha23].

Regardons à présent ce que donnerait la stratégie de Colmez pour $\text{GL}_2(K)$. Nous pouvons encore considérer l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{F}_q \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right]$ avec les actions par conjugaison de $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathcal{O}_K^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Malheureusement, en fixant une \mathbb{Z}_p -base $(x_i)_{1 \leq i \leq [K:\mathbb{Q}_p]}$ de \mathcal{O}_K , c'est une algèbre de série formelles sur les $[K:\mathbb{Q}_p]$ variables $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right] - 1$. Cette algèbre d'Iwasawa est le point de départ de M.-F. Vigneras dans [Vig11]. Cependant, elle post-compose par l'application entre algèbres d'Iwasawa induite par

$$\text{Tr}_{K|\mathbb{Q}_p} : \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et obtient donc un $(\varphi, \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ -module univariable, plutôt qu'une version Lubin-Tate. Nous perdons l'action de \mathcal{O}_K^\times , qui semble pratique pour une version du foncteur de Colmez dans le cas de $\text{GL}_2(K)$, au profit d'une action de \mathbb{Z}_p^\times . Une version perfectoïde de cette algèbre est un point de départ pour [Bre+25] pour produire des objets galoisiens multivariés Lubin-Tate à partir de représentations de $\text{GL}_2(K)$ venant

d'un cadre global. Je compte explorer les liens de leur stratégie avec le travail de cette thèse.

1.4 La variante multivariable de Zábrádi

Plusieurs travaux font émerger des anneaux multivariables, à l'instar de l'anneau $\mathbb{F}_q \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right]$, mais où des Frobenii et des actions de différentes copies de Γ_K agissent "variable par variable".

G. Zábrádi a construit dans [Zá18a] et étudié avec G. Jacovác dans [JZ25] un foncteur pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en s'inspirant de la méthode de P. Colmez²¹. Notons Δ une base d'un système de racines du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ pour le tore des matrices diagonales. Il est de cardinal $(n - 1)$. Il existe un isomorphisme

$$\mathbb{F}_p[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]] \cong \mathbb{F}_p[[N_0/H_{\Delta,0}]]$$

où N_0 est formé des matrices unipotentes à coefficients entiers, $H_{\Delta,0}$ celles à surdiagonale nulle et où $X_\alpha + 1$ est envoyé sur l'exponentielle d'un générateur de l'espace propre associé à α dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{Z}_p)$. Les éléments du tore dont les valuations p -adiques décroissent sur la diagonale agissent par conjugaison et le noyau de l'action est constitué des matrices diagonales. Zábrádi introduit l'anneau multivariable

$$E_\Delta = \mathbb{F}_p[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\alpha^{-1} \mid \alpha \in \Delta]$$

et le munit d'une action de

$$\Phi_{\Delta,p} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha,p}^{\mathbb{N}} \times \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\alpha}$$

où l'action de $(\varphi_\alpha^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\alpha})$ imite sur X_α l'action sur X dans E et laisse les autres variables fixes. En identifiant Δ à $[1, n - 1]$,

$$\mathrm{Diag}(\underbrace{p, \dots, p}_\alpha, 1, \dots, 1) \text{ (resp. } \mathrm{Diag}(\underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_\alpha, 1, \dots, 1) \text{ pour } \gamma \in \mathbb{Z}_p^\times).$$

agit comme $\varphi_{\alpha,p}$ (resp. comme $\gamma_\alpha \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$). Zábrádi construit en suivant la stratégie de P. Colmez un foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee vérifiant :

Théorème 1.4.1 ([Zá18a] et [JZ25]). 1. Le foncteur \mathbf{D}_Δ^\vee est contravariant et exact à droite depuis les \mathbb{F}_p -représentations lisses de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ vers $\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_\Delta \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\Delta}, E_\Delta)$.

²¹ [Zá18a] construit même un foncteur pour tout groupe connexe réductif déployé sur \mathbb{Q}_p .

2. *Il est compatible aux produits tensoriels et aux induites paraboliques.*

Pour faire le lien avec des représentations galoisiennes, G. Zábrádi a établi dans [Zá18b] ce que l'on qualifie d'équivalence de Fontaine multivariable cyclotomique²² et les deux auteurs de [JZ25] l'utilisent pour retrouver certaines des propriétés attendues d'un foncteur de Colmez.

Théorème 1.4.2 ([Zá18b] et [JZ25]). 1. *Il existe une équivalence de catégories explicite*

$$\mathbb{D}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p, \Delta} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p} \times \Gamma_\Delta, E_\Delta) : \mathbb{V}_\Delta$$

où $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p, \Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Les foncteurs \mathbb{D}_Δ et \mathbb{V}_Δ commutent naturellement à la formation du dual.

2. *Le foncteur $\mathbb{V}_\Delta := \mathbb{V}_\Delta^\vee \circ \mathbb{D}_\Delta^\vee$, restreint à la sous-catégorie des représentations irréductibles lisses sur lesquelles il ne s'annule pas, est à valeurs dans les représentations irréductibles et est conservatif. Cette sous-catégorie est constituée de représentations admissibles.*

Ces résultats vont dans le sens des conjectures de [Bre+21], dans lequel certaines représentations de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ correspondent à un produit tensoriel de $(n-1)$ représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Les résultats de Zábrádi pourraient retrouver le box product de ces représentations.

La démonstration de l'équivalence multivariable cyclotomique dans [Zá18b] ne passe pas par une équivalence pour des corps de caractéristique p . Une autre démonstration donnée dans [CKZ21] suit davantage les étapes de démonstration de Fontaine et se prête mieux aux généralisations que cette thèse démontre : une variante multivariable Lubin-Tate que conjecture l'introduction de [CKZ21] et plusieurs variantes plectiques.

1.5 Un formalisme pour englober les variantes

Les foncteurs \mathbb{D} et \mathbb{V} s'expriment comme composées d'extensions des scalaires et de prises d'invariants par un sous-monoïde distingué entre catégories de représentations semi-linéaires de monoïdes. Notons au passage que les deux foncteurs transitent par une catégorie de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ -modules avec action de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$. De plus, la preuve de l'équivalence de Fontaine se ramène au cas des modules de p -torsion par dévissage. Dans les généralisations multivariables [Zá18b] [CKZ21], ce dévissage cache des subtilités algébriques et topologiques.

²²Notons également que le complexe de Herr et les résultats de surconvergence de [CC98] ont été généralisés au contexte multivariable dans [PZ21].

Nous proposons un cadre permettant d’englober différentes théories de (φ, Γ) -modules, d’introduire plus aisément d’autres variantes, et d’automatiser la construction des foncteurs ainsi que l’étape de dévissage. Pour \mathcal{S} un monoïde agissant sur un anneau commutatif R , nos objets vivent dans la catégorie des \mathcal{S} -modules sur R , notée $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, i.e. celle des R -modules munis d’une action semi-linéaire de \mathcal{S} . Pour \mathcal{G}_K agissant trivialement sur \mathbb{Z}_p , nous voyons $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ comme une sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p)$. Pour $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma)$ agissant sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, nous voyons la catégorie des (φ, Γ) -modules étales comme une sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. Reste à comprendre quelles sous-catégories pleines de $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ contiennent toujours l’image essentielle d’un foncteur de Fontaine depuis une catégorie de représentations p -adiques de corps locaux p -adiques. Concernant les (φ, Γ) -modules modulo p , les articles travaillant sur des anneaux compliqués [Zá18b] [CKZ21], [Bre+21] [EG23] imposent que les modules soient finis projectifs. C’est une propriété qui était automatique pour les représentations sur \mathbb{F}_p .

Cette thèse exhibe des propriétés similaires des représentations sur \mathbb{Z}_p . La littérature, à ma connaissance, se débrouille pour contourner cette question dans les preuves : G. Zábrádi commence par démontrer dans [Zá18b, Prop. 2.2] qu’une action de Γ_{Δ} rend automatiquement les E_{Δ} -modules finis projectifs, tandis que [CKZ21] donne principalement des arguments pour les $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ -représentations libres. Le formalisme de cette thèse parvient à des résultat du même acabit que [Zá18b] mais propose une autre stratégie : démontrer une équivalence entre représentations et modules avec conditions additionnelles sur leur structures²³, puis démontrer que ces conditions ne sont pas restrictives. Revenons aux \mathbb{Z}_p -représentations de type fini. Pour une telle représentation V , on a

$$\forall n, \quad p^n V / p^{n+1} V \text{ est un } \mathbb{F}_p\text{-espace vectoriel de dimension finie.}$$

De plus, l’action est continue pour la topologie p -adique sur V .

Les questions de topologie sont parfois éludées dans les travaux sur les (φ, Γ) -modules, par exemple dans [Fon07] ou [Dee01]. Ici, un module D de type fini sur un anneau topologique R sera toujours muni de la *topologie initiale*, i.e. la topologie quotient induite par n’importe quel épimorphisme $R^k \twoheadrightarrow D$. Cette topologie est déjà utilisée dans [Sch17], [SV23], etc. Notons que si D est fini projectif, que \mathcal{S} est un monoïde topologique agissant sur R tel que

$$\mathcal{S} \times R \rightarrow R, \quad (s, r) \mapsto s \cdot r$$

²³Condition qui sont cruciales pour la preuve.

est continue, dire qu'une action semi-linéaire de \mathcal{S} sur D est continue s'exprime plus intuitivement. On choisit une présentation $D \oplus D' = R^k$ et on étend l'action par zéro sur D' . Cela fournit une application

$$\mathcal{S} \rightarrow M_k(R)$$

dont la continuité équivaut à celle de l'action sur D .

On peut à présent définir la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ adaptée aux foncteurs de type Fontaine.

Définition 1.5.1. Soient \mathcal{S} un monoïde topologique, un anneau R muni d'une topologie d'anneau \mathcal{T} et d'une action de \mathcal{S} continue pour \mathcal{T} . Soient également $\mathcal{S}' \triangleleft \mathcal{S}$ un sous-monoïde distingué et \mathcal{T}' une topologie d'anneau sur R pour laquelle l'action de \mathcal{S}' est continue. Soit $r \in R^{\mathcal{S}'}$ tel que R est r -adiquement séparé, complet et sans r -torsion et tel que

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \varphi_s(r)R = rR.$$

La catégorie $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ est la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ ayant pour objets les \mathcal{S} -modules sur R dont le module sous-jacent D vérifie que

1. Pour tout $s \in \mathcal{S}$, l'image de D par l'action de s engendre D comme R -module²⁴.
2. Le R -module D est de présentation finie et de r^∞ -torsion bornée²⁵.
3. Le module D est à (r, μ) -dévissage²⁶ fini projectif, i.e. $\forall n, \quad r^n D / r^{n+1} D$ est fini projectif sur R/r , de rang constant (dépendant de n).
4. L'action de \mathcal{S} sur D est continue pour la topologie initiale associée à \mathcal{T} .
5. L'action de \mathcal{S}' sur D est continue pour la topologie initiale associée à \mathcal{T}' .

La catégorie $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R/r)$ est définie de même en remplaçant les deuxième et troisième conditions par "le R/r -module sous-jacent est fini projectif".

On omet la mention de \mathcal{S}' et \mathcal{T}' lorsque $\mathcal{S}' = \{1\}$.

²⁴C'est en réalité une condition légèrement plus forte que nous imposons pour traiter le cas général. Nous nous autorisons ce petit mensonge pour contrôler la profusion de notations.

²⁵I.e. $D[r^\infty] = D[r^N]$ pour un certain N .

²⁶Ici la lettre μ signifie "multiplicatif" par opposition à τ qui sera utilisée pour le dévissage par la torsion.

Dans ce langage, démontrer que le foncteur \mathbb{D} crache des modules étales revient à démontrer que la composée suivante est bien définie, i.e. que les objets donnés par le foncteur à chaque étape tombent bien dans les catégories annoncées

$$\mathbb{D} : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} -} \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}) \xrightarrow{D \mapsto D^{\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}}} \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}),$$

où les deux topologies sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$ sont respectivement la topologie faible et la p -adique et où la topologie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est la topologie faible. Dans les cas ci-dessus, les catégories de module étales topologiques et de modules étales topologiques à π -dévissage projectif coïncident. La démonstration repose donc sur les deux résultats suivants.

Proposition 1.5.2 (cf. Proposition 2.5.24). *Soit \mathcal{S} un monoïde topologique et $f : A \rightarrow R$ un morphisme d'anneaux topologiques munis d'actions continues de \mathcal{S} . Soit $a \in A$ tel que*

- *L'anneau A (resp. R) est a -adiquement (resp. $f(a)$ -adiquement) séparé, complet et sans a -torsion (resp. sans $f(a)$ -torsion).*
- *L'anneau A vérifie*

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \varphi_s(a)A = aA.$$

Alors, le foncteur

$$D \mapsto R \otimes_A D$$

envoie $\mathcal{M}\text{od}_{a\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, A)$ dans $\mathcal{M}\text{od}_{f(a)\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Théorème 1.5.3 (Version faible du Théorème 2.5.1). *On se place dans le cadre de la Définition 1.5.1. Supposons que*

- *Nous avons $K_0(R^{\mathcal{S}'}/r) = \mathbb{Z}$.*
- *La topologie \mathcal{T}' est une topologie linéaire, plus grossière que la topologie r -adique. Pour tout R -module à (r, μ) -dévissage projectif, la topologie initiale sur D induit la topologie initiale sur rD et $D[r]$.*
- *L'inclusion $R^{\mathcal{S}'}/r \subset R/r$ est fidèlement plate.*
- *Nous avons $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{S}', R/r) = \{0\}$ pour la topologie \mathcal{T}' .*
- *Pour D dans $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R/r)$, le morphisme de comparaison*

$$R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} D^{\mathcal{S}'} \rightarrow D, \quad r \otimes d \mapsto rd$$

est un isomorphisme.

Alors, le morphisme de comparaison est un isomorphisme pour tout objet de $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ et le foncteur $D \mapsto D^{S'}$ envoie $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ dans $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{S'})$.

Bien que le formalisme ressemble à un marteau-pilon dans le cas de l'équivalence de Fontaine, il permet de comprendre exactement pourquoi la construction fonctionne. Les trois dernières conditions pourraient se résumer par "les invariants par \mathcal{S}' se comportent comme de la descente sur les objets modulo r ". Les deux autres conditions servent respectivement à descendre la continuité à partir de l'isomorphisme de comparaison et à garantir que les suites exactes de dévissage sont strictes. Le formalisme souligne que l'on peut et qu'il faut distinguer la topologie pour laquelle l'on fait le dévissage et celle pour laquelle on transmet la continuité : pour la topologie sur E^{sep} correspondant à la topologie faible, la condition $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_E, E^{\text{sep}}) = \{0\}$ tombe en défaut. Nous verrons que ce formalisme donne également de nouvelles stratégies pour démontrer l'automaticité des conditions de continuité comme celle de [Sch17].

Bien que la version générale du Théorème 1.5.1 autorise une autre condition à la place de $K_0(R^{S'}/r) = \mathbb{Z}$, cette dernière implique un résultat de structure sur les $R^{S'}$ -modules à (r, μ) -dévissage projectif.

Théorème 1.5.4 (Version tronquée du Théorème 2.4.2). *Soit R un anneau et $r \in R$ tel que R est r -adiquement séparé, complet et sans r -torsion et que $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$. Pour tout R -module D , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le module D est de présentation finie, à (r, μ) -dévissage fini projectif et r^∞ -torsion bornée.*
- (ii) *Il existe $N \geq 1$ et un isomorphisme*

$$D \cong D_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} D_n$$

où D_∞ est un R -module fini projectif de rang constant et où chaque D_n est un R/r^n -module fini projectif de rang constant.

La condition (ii) est une extension du théorème de structure des modules de type fini sur un anneau de valuation discrète. Combinée par exemple avec le résultat de G. Zábrádi dans [Zá18b, Prop. 2.2], ce théorème fournit un résultat de rigidité pour $(\varphi_\Delta, \Gamma_\Delta)$ -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$: leur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ -module sous-jacent vérifie la condition (ii).

Notre formalisme capture également d'autres aspects que nous ne développons pas dans l'introduction : des variantes pour des modules projectifs et/ou sans topologie,

l'existence de structure symétriques monoïdales fermées sur les catégories en jeu et le comportement de la coinduction.

1.6 Les équivalences de Fontaine multivariables

Un point de départ de la présente thèse consistait à généraliser [CKZ21] pour obtenir une équivalence de Fontaine multivariables Lubin-Tate. Ce dernier article commence par obtenir une équivalence pour les représentations modulo p de corps perfectoides. Partons d'un corps perfectoïde \tilde{E} tel que $\overline{\mathbb{F}_p} \cap \tilde{E}$ est fini de cardinal q . Dans [CKZ21, Th. 4.6], les auteurs et autrices démontrent une équivalence pour les représentations de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ sur \mathbb{F}_p avec une catégorie de φ -modules multivariables sur une $(\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q)$ -algèbre. Si cette algèbre se relève en une $(\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_q)$ -algèbre adaptée pour une équivalence multivariable cyclotomique, la construction d'une \mathcal{O}_K -algèbre adapté à une équivalence Lubin-Tate n'est pas limpide. Nous reprenons donc la stratégie de Carter-Kedlaya-Zábrádi en s'attachant à conserver toutes nos constructions sur \mathbb{F}_q .

Définition 1.6.1. On pose $q = p^f$. Soit Δ un ensemble fini. On définit le sous-monoïde $\Phi_{\Delta, q, p}$ de $\prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha, p}^{\mathbb{N}}$, engendré par chaque $\varphi_{\alpha, q} := \varphi_{\alpha, p}^{\circ f}$ et par $\varphi_{\Delta, p} := \prod \varphi_{\alpha, p}$.

Soit X une pseudo-uniformisante de \tilde{E} et \tilde{E}_α des copies de \tilde{E} indexées par Δ . Nous définissons les anneaux

$$\tilde{E}_\Delta^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ \right)^{\wedge (X_\alpha \mid \alpha \in \Delta)} \quad \text{et} \quad \tilde{E}_\Delta := \tilde{E}_\Delta^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right]$$

où la complétion se fait par rapport à l'idéal engendré par la famille des pseudo-uniformisantes et où $X_\Delta := \prod X_\alpha$.

Il existe une unique action du monoïde $\Phi_{\Delta, q, p}$ sur la \mathbb{F}_q -algèbre \tilde{E}_Δ^+ par morphismes $(X_\alpha \mid \alpha \in \Delta)$ -adiquement continus telle que $\varphi_{\Delta, p}$ est le Frobenius absolu et que

$$\varphi_{\alpha, q}(X_\alpha) = X_\alpha^q \text{ et } \forall \beta \neq \alpha, \varphi_{\alpha, q}(X_\beta) = X_\beta.$$

Cette action s'étend à \tilde{E}_Δ .

Théorème 1.6.2 (cf. Théorème 5.2.13). *Il existe une équivalence de catégories symétriques monoïdales fermées*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : \quad \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} &\rightleftarrows \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, p}, \tilde{E}_{\Delta}) : \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} \\ V &\longmapsto (\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \\ (\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}} D)^{\Phi_{\Delta, q, p}} &\longleftarrow D \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de Fontaine, l'un des points délicats est de prouver que $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ produit des objets assez gros. Pour ce faire, on reconstruit²⁷ $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ en utilisant les perfectoides de la manière suivante. On munit \tilde{E}_{Δ}^{+} de la topologie X_{Δ} -adique. Pour tout objet $D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, p}, \tilde{E}_{\Delta})$, le foncteur

$$\text{Spa}(R, R^{+}) \mapsto (R \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_p = \text{Id}}$$

est représentable par un objet en \mathbb{F}_p -espaces vectoriels dans la catégorie des recouvrements finis étales de $\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{+})$. Il possède aussi une action de $\Phi_{\Delta, q}$ telle que $\varphi_{\Delta, q}$ agit comme le q -Frobenius. Il se trouve que l'espace perfectoïde $\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{+})$ a un ouvert Stein

$$X_{\tilde{E}} \cong \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spa}(\tilde{E}_{\alpha}, \tilde{E}_{\alpha}^{+}).$$

En restreignant le recouvrement précédent, on obtient donc un objet dans la catégorie des recouvrement finis étales de $X_{\tilde{E}}$ avec action de $\Phi_{\Delta, q}$ tel que $\varphi_{\Delta, q}$ agit comme le q -Frobenius, et telle que le morphisme structural vers $X_{\tilde{E}}$ est équivariant. Par le lemme de Drinfeld pour les diamants, cette catégorie est galoisienne de groupe fondamental $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$. Ainsi, on a obtenu un objet $V_{\tilde{E}, \Delta}(D)$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$. Dans le présent travail, nous démontrons et utilisons abondamment que \tilde{E}_{Δ} est intègre, ce qui était faux dans la version de [CKZ21], pour en contourner certains arguments délicats.

Pour $\tilde{E} = \mathbb{F}_q((X^{1/p^{\infty}}))$, nous avons une version imparfaite de l'anneau de complétion

$$E_{\Delta} := \mathbb{F}_q[[X_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta]][X_{\Delta}^{-1}].$$

En utilisant une autre topologie appelée *topologie colimite*, nous déduisons une équivalence pour les représentations de caractéristique p de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ dont les φ -modules correspondants sont à coefficients dans E_{Δ} (cf. Théorème 5.4.16). Puis en appliquant notre formalisme pour dévisser, nous déduisons une équivalence pour les représenta-

²⁷Nous prouvons dans cette thèse qu'il s'agit effectivement du même foncteur et pas d'un foncteur auxiliaire.

tions de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ sur n'importe quel anneau d'entiers de corps local p -adique [Théorème 5.4.22]. Enfin, nous retrouvons les équivalences de [CKZ21] par coinduction.

Pour un corps local p -adique K et un ensemble fini Δ , nous voulons déduire une équivalence pour les représentations de $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ de l'équivalence pour les représentations de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Grâce à notre formalisme, le travail pour obtenir l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable est quasiment achevé. Il reste à construire une action de $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ sur l'anneau de comparaison, continue pour une topologie raisonnable. Il est important de noter que, comme dans le cas classique, cette topologie ne peut être la π -adique : l'action de \mathcal{G}_K sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$ n'est pas π -adiquement continue.

Définition 1.6.3. Nous conservons notre corps local p -adique K , l'ensemble fini Δ et nous choisissons une uniformisante π et un polynôme de Lubin-Tate f associé. Nous définissons les monoïdes topologiques $\Phi_{\Delta,q} := \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha,q}^{\mathbb{N}}$ avec la topologie discrète et $\Gamma_{K,\text{LT},\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_K^\times$ avec la topologie produit.

Nous définissons l'anneau

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} := \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}] \right)^{\wedge p}$$

muni de trois topologies appelées *topologie adique faible*, *topologie colimite* et *topologie faible*. Nous le munissons d'une action \mathcal{O}_K -linéaire du monoïde $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta})$ continue pour chacune des trois topologies. L'action de $\Phi_{\Delta,q}$ vérifie

$$\varphi_{\alpha,q}(X_\alpha) = X_\alpha^q \text{ et } \forall \beta \neq \alpha, \varphi_{\alpha,q}(X_\beta) = X_\beta.$$

L'action de $\Gamma_{K,\text{LT},\Delta}$ vérifie

$$\forall x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \forall \alpha \in \Delta, x \cdot (X_\alpha) = [x_\alpha]_{\text{LT},f}(X_\alpha).$$

Théorème 1.6.4 (Cas particulier du Théorème 6.1.6 et Théorème 6.1.7). *Il existe une équivalence de catégories symétriques monoïdales fermées explicite*

$$\mathbb{D}_{\Delta,\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) : \mathbb{V}_{\Delta,\text{LT}}$$

pour n'importe laquelle des trois topologies sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$.

De plus, les sous-catégories pleines de $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ pour chacune des trois topologies coïncident entre elles et avec $\text{Mod}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$.

J'ai récemment été averti par P. Schneider qu'une telle équivalence avait été obtenue dans la thèse [Pup21]. L'auteur y utilise les méthodes de [Zá18b] sans passer par nos résultats intermédiaires pour des corps de caractéristique p . Nous

retrouvons son résultat et notre formalisme permet d'obtenir un choix de topologies plus varié²⁸.

Pour parachever l'idée selon laquelle il suffit à présent de construire un anneau de comparaison avec les bonnes actions, nous établissons une équivalence de Fontaine plectique et deux équivalences que nous qualifions de *glectiques*. Le groupe de Galois plectique est défini par

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} := \text{Aut}_K \left(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \right).$$

Il apparaît dans le travail de J. Nekovář et T. Scholl, [NS16] et [NS17] : pour des données de Shimura globales associées à la restriction $\text{Res}_{\mathbb{Q}}^F(H)$ d'un groupe algébrique H sur une extension finie $F|\mathbb{Q}$ ou d'un quotient arithmétique d'un produit de demi-plans de Poincaré indexé par les plongements, ils remarquent que les groupes de cohomologie étale sont munis d'une action ad hoc de $\mathcal{G}_{F,\text{plec}}$ (et pas seulement d'une action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$). Ils conjecturent que cette action peut-être construite dans la catégorie dérivée. En choisissant (π, f) comme dans le cas Lubin-Tate-multivariable, nous obtenons une équivalence de Fontaine pour ce groupe de Galois dans le cas local p -adique.

Théorème 1.6.5 (Voir Théorème 6.3.10). *Il existe une équivalence explicite de catégories symétriques monoïdales fermées*

$$\mathbb{D}_{\text{plec,LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(T_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}) : \mathbb{V}_{\text{plec,LT}}.$$

Soit $\mathcal{P} := \{\tau : K \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$ qui est de cardinal $[K:\mathbb{Q}_p]$. Dans le théorème qui précède, le monoïde topologique $T_{K,\text{plec}}$ s'écrit

$$T_{K,\text{plec}} \cong (\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

où $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ agit sur le facteur de gauche en permutant les copies de $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ et de $\Gamma_{K,\text{LT}}$. En écrivant également $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ comme un produit en couronne

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} \cong \prod_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_K \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

on peut comprendre grossièrement cette équivalence comme l'équivalence Lubin-Tate pour \mathcal{P} variables, où l'on a ajouté une action de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ qui permute les variables et les copies de \mathcal{G}_K . Ces objets rappellent certaines constructions de [Bre+25] et la construction géométrique du foncteur $\widetilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ donne espoir de rendre ce lien précis.

²⁸La topologie faible est celle utilisée par [Pup21].

Je me suis également intéressé à un sous-groupe du groupe de Galois plectique, le groupe de Galois glectique, et nous obtenons également dans cet article plusieurs équivalences de Fontaine pour ce dernier. Énonçons nos résultats dans le cas où $K|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne. Le groupe glectique $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ est défini par

$$\mathcal{G}_{K,\text{glect}} := \mathcal{G}_{K,\text{plec}} \times_{\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}} \text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$$

où le morphisme $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est donnée par l'action de composition à droite sur les plongements. Nous établissons deux équivalences glectiques.

Théorème 1.6.6 (Voir Théorèmes 6.4.20 et 6.4.26). *Il existe deux équivalences explicites de catégories symétriques monoïdales fermées*

$$\mathbb{D}_{\text{sglect},\text{LT}} : s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glect}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathbb{T}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{sglect}}}) : \mathbb{V}_{\text{sglect},\text{LT}}.$$

$$\mathbb{D}_{\text{glect},\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glect}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathbb{T}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}) : \mathbb{V}_{\text{glect},\text{LT}}.$$

Ici, la catégorie $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ est celle des \mathcal{O}_K -représentations semi-linéaires continues de type fini où $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ agit sur \mathcal{O}_K via son quotient $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$. Le monoïde $\mathbb{T}_{K,\text{glect}}$ possède deux sous-monoïdes isomorphes respectivement à $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+/\mathbb{I}_K$. Les anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{sglect}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}$ avec leur action de $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ coïncident avec l'anneau Lubin-Tate $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$; on lui ajoute une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+/\mathbb{I}_K$ qui permute les variables et se souvient des degrés des plongements. Pour $K = \mathbb{Q}_{p^f}$ par exemple, les variables sont indexées par $\llbracket 0, f-1 \rrbracket$. On a

$$\mathbb{T}_{K,\text{glect}} \cong \Gamma_{K,\text{LT},f} \rtimes \Phi_{f,q,p}$$

où $\varphi_{f,p}$ permute circulairement les f -plongements, correspond au générateur $\text{Frob} \in W_{\mathbb{Q}_p}^+/\mathbb{I}_{\mathbb{Q}_{p^f}}$ et vérifie que $\varphi_{f,p}(X_i) = X_{i+1}$ et $\varphi_{f,p}(X_{f-1}) = f(X_0)$. Obtenir une représentation glectique à partir d'une représentation de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ revient à préciser l'action d'un sous-groupe canonique $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{G}_{K,\text{glect}}$, or ce genre d'action existe sur la cohomologie étale de $\text{Res}_{\mathbb{Q}_p}^K X$ où X est un K -espace rigide.

Structure du manuscrit

Le présent manuscrit contient 6 chapitres, introduction bilingue incluse.

Le Chapitre 2 présente le formalisme des \mathcal{S} -modules sur R . Il commence par présenter les sous-catégories de $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ correspondant aux modules étales et étales projectifs, puis construit les structures symétriques monoïdales fermées éventuelles. Dans un second temps, il étudie la stabilité de ces sous-catégories par changement

de base, prise d'invariants et coinduction. S'ensuit une discussion algébrique sur les modules à r -dévissage projectif pour reprendre ensuite l'étude précédente pour la sous-catégorie correspondante. Enfin, nous introduisons les questions topologiques et reprenons l'étude des sous-catégories ainsi découpées.

Le Chapitre 3 propose une introduction à l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate. Nous donnons une exposition brève de la construction de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$, ce qui donne à la fois un résumé des résultats que nous utiliserons par la suite et fixe un certain nombre de notations. Le chapitre continue en présentant une preuve de l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate dans le langage du Chapitre 2. Puis, nous effectuons des calculs explicites sur quelques représentations galoisiennes. Le chapitre finit en retrouvant les résultats d'automatique continuité de [Sch17], à la fois par une stratégie similaire à [Sch17] et par une autre méthode utilisant le Chapitre 2.

Le Chapitre 4 donne une exposition minimaliste des espaces perfectoides, des diamants et du lemme de Drinfeld dans ce cadre. J'ai essayé d'y inclure autant que le temps me permet certaines preuves que je n'ai pas trouvées écrites d'un seul trait dans la littérature, en particulier une preuve complète du lemme de Drinfeld pour les diamants. Nous renvoyons aux textes de P. Scholze pour une introduction plus complète.

Le Chapitre 5 établit les différentes équivalences pour les corps perfectoides de caractéristique p . On commence par construire les foncteurs pour la version perfectoid de l'équivalence modulo p . Nous avertissons le lecteur ou la lectrice que la sous-section 5.1.2 est très technique ; elle démontre en toute généralité les propriétés de \tilde{E}_Δ et est assez indépendante du reste de ce chapitre. Ne pas hésiter à la prendre comme boîte noire. Nous utilisons ensuite le lemme de Drinfeld pour reconstruire \tilde{V}_Δ et démontrer la première équivalence. La fin de la section effectue la déperfectisation, le dévissage qui mène à une version de caractéristique mixte de l'équivalence, puis retrouve des résultats de [CKZ21].

Le Chapitre 6 construit les anneaux de comparaison Lubin-Tate multivariés, plectique et glectiques et démontre les équivalences associées. Nous nous arrêtons également à la Section 6.2 pour démontrer la compatibilité des versions univariée et multivariée et faire un calcul explicite. Avant de démontrer l'équivalence glectique semi-linéaire, nous justifierons son apparition en exhibant des variables cachées dans $\tilde{A}_K := W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^\flat)$.

Introduction (english version)

1.1 Fontaine equivalence

Let p be a prime number that is fixed throughout this thesis¹ and K a p -adic local field, i.e. a finite extension of the p -adic number field \mathbb{Q}_p . Let \mathcal{G}_K be its absolute Galois group with profinite topology. After a long journey², number theorists have become interested in continuous representations of \mathcal{G}_K on finite type \mathbb{Z}_p -modules. A typical example, of rank 2, is given by the Tate module of an elliptic curve over a number field with K as completion at one place above p .

To understand these representations, we can try to study the group \mathcal{G}_K directly. We can indeed describe \mathcal{G}_K by topological generators and relations [Jak68] [Jw82], but without encoding the ramification groups³. In addition, [JR79] shows that the datum of \mathcal{G}_K as a topological group is equivalent to the data of $[K:\mathbb{Q}_p]$ and of the roots of unity in K . The ramification filtration is thus necessary⁴ to characterise the field.

Other strategies in p -adic Hodge theory, developed by J.-M. Fontaine, deal directly with categories of representations. These strategies run in two directions: one towards the (elven⁵) rings of periods in order to understand the representations coming from geometry⁶, another towards an algebraic description of all the representations involved. The dawn of these ideas and the progressive brightening of the geometric side are explained in [Col19]. In this thesis, we will rather follow the algebraic path.

The first incarnation of this algebraic description appears in [Fon07], where J.-M. Fontaine introduces the category of étale (φ, Γ_K) -modules, consisting of semilinear

¹A friend told me not long ago that this kind of sentence was useless. It's no more useless than the word 'fantasy' on the back of the fifth volume of *Game of Thrones* or *The Lightbringer*. It is there to give every p -adician their little dose of serotonin.

²See [Col13] for a quick and enlightening introduction. Readers wishing to start from Galois theory can try my IDR [Mar22a, §1.1-3 and §2.1].

³We notice, however, that the quotient by wild inertia is known (see Proposition 3.1.11). To complete the picture, a description by generators and relations of the wild inertia can be found in [Ser94, §5.6].

⁴And sufficient [Moc97].

⁵See the first lines of [Col19].

⁶They also lead to relationships between different cohomological theories of varieties over K (see [Col19, §1.4.4]).

algebra objects, and constructs an explicit equivalence with the category $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$ of continuous \mathcal{G}_K -representations on \mathbb{Z}_p -modules of finite type. We denote by q the cardinality of the residue field of K which is a power of p .

We define the ring

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \left(\mathbb{Z}_q[[X]] [X^{-1}] \right)^{\wedge p}$$

equipped with a topology called *the weak topology*, a \mathbb{Z}_p -linear and continuous lift of the absolute Frobenius⁷ and a \mathbb{Z}_q -linear and continuous action of the Galois group of the cyclotomic extension $\Gamma_K := \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})|K)$ which commutes to the Frobenius⁸. The ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ is a discrete valuation ring of residue field $E := \mathbb{F}_q((X))$ and uniformiser p . The étale (φ, Γ_K) -modules are the $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules D with a continuous⁹ semilinear action of $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_K)$ such that $\varphi(D)$ generates D . We denote this category¹⁰ by $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_K, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$.

To prove the equivalence for representations of \mathcal{G}_K , Fontaine begins by proving a similar equivalence between representations of Galois groups of characteristic p fields and étale φ -modules. He constructs a comparison ring $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}}$. The latter is a discrete valuation ring with residue field E^{sep} and uniformiser p . It comes with a lift of both the Frobenius and the action of \mathcal{G}_E on E^{sep} . The equivalence is then given by :

Theorem 1.1.1 ([Fon07]). *The following functors form a pair of quasi-inverse functors*¹¹.

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : \quad \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_E &\rightleftarrows \text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}) & : \quad \mathbb{V} \\ V &\longmapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\mathcal{G}_E} \\ (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D)^{\varphi=\text{Id}} &\longleftarrow D \end{aligned}$$

The tricky point is to show, for $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$, that the *comparison morphisms*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathbb{D}(V) &\xrightarrow{z \otimes (z' \otimes v) \mapsto zz' \otimes v} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V \\ \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{V}(D) &\xrightarrow{z \otimes (z' \otimes d) \mapsto zz' \otimes d} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D \end{aligned}$$

⁷When $K|\mathbb{Q}_p$ is unramified, it is the only such map that verifies $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$.

⁸When $K|\mathbb{Q}_p$ is unramified, this is the only action verifying $\gamma \cdot X = (1+X)^\gamma - 1$ (we have identified Γ_K with a subgroup of \mathbb{Z}_p^\times).

⁹A more precise discussion about this adjective is given in §1.5 of this introduction.

¹⁰Throughout the introduction, we use this style of notation quite freely, assuming that the decorations are fairly self-explanatory. One might refer to Chapter 2 for precise definitions.

¹¹It is necessary to prove that the finiteness and/or étaleness properties are preserved so that the functors land in the correct category. Before doing so, it is instructive to wonder what properties of $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}}$ make it possible to define functors between categories of modules on the required rings with the actions of the required monoids.

are isomorphisms. These morphisms are easily seen to be injective but it could happen that \mathbb{D} and \mathbb{V} produce objects that are too small.

The second step is to identify \mathcal{G}_E as a subgroup of \mathcal{G}_K . To do this, J.-M. Fontaine identifies the imperfect field of norms associated to $K(\mu_{p^\infty})$ in [Win83] with the field E ; he deduces an identification of the Galois theories of $K(\mu_{p^\infty})$ and E . It then remains to equip $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ with an action of \mathcal{G}_K which extends the action of $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_{K(\mu_{p^\infty})}$. To do this, he embeds $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ into a (gnomic) ring of periods. Let \mathbb{C}_p be the perfectoid field defined as the completion of $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Let \mathbb{C}_p^\flat be its tilt. For unramified $K|\mathbb{Q}_p$, we can choose the embedding

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ \hookrightarrow \tilde{A} := W(\mathbb{C}_p^\flat), \quad X \mapsto [\varepsilon] - 1$$

where $\varepsilon \in \mathbb{C}_p^\flat$ is a compatible sequence of p^n -th primitive roots of unity. Fontaine defines this embedding in such a way that the image is stable by \mathcal{G}_K and by the Frobenius, and that the actions induced on $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ are the prescribed Frobenius and Γ_K -action. Given these actions, applying the formula of Theorem 1.1.1 to representations of \mathcal{G}_K yields an additional action of $\mathcal{G}_K/\mathcal{G}_E = \Gamma_K$ on the φ -modules side.

1.2 Some uses of Fontaine equivalence

The first feature of Fontaine's equivalence is that it swaps the group \mathcal{G}_K and its complexity for an easier-to-grasp monoid and a more complex ring. For $K = \mathbb{Q}_p$, the subring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ := \mathbb{Z}_p[[X]]$ with its action of $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ has however the merit of being isomorphic to the space of measures¹² $\mathcal{D}_0(\mathbb{Z}_p)$, which unlocks the tools of p -adic functional analysis. Let us also mention that $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ is interpreted as the ring of bounded functions with values in \mathbb{Q}_p on a phantom circle " $|X| < 1$ and $|X| \geq 1$ ". This justifies the name of (φ, Γ) -overconvergent modules [CC98], which live on the subring \mathcal{E}^\dagger of functions converging on a ring $\rho < |X| < 1$ for a certain ρ , bounded with values in \mathbb{Q}_p . Interpreting our coefficients rings as rings of functions allows other variants, such as those on the Robba's ring [KL15]: the ring of overconvergent functions with values in \mathbb{Q}_p . This last variant allows to reconstruct the space $\Pi(\rho)^{\text{an}}$ of analytic vectors of the representation of $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ on a Banach associated by the Langlands correspondence to a 2-dimensional representation of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ on \mathbb{Q}_p (see [Col16]).

Since p -adic functional analysis and the geometrical interpretations allow to manipulate étale (φ, Γ_K) -modules, we can try to study Galois representations purely

¹²Here, the space of continuous linear maps from $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ in \mathbb{Z}_p . See [Col10, p. I.1] for more details.

in terms of their associated modules. L. Herr, for example, has explained how to recover Galois cohomology using (φ, Γ_K) -modules.

Theorem 1.2.1 ([Her98a]). *Suppose that Γ_K is procyclic¹³ and let γ be a topological generator. For any object V of $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K$, the complex*

$$0 \rightarrow \mathbb{D}(V) \xrightarrow{(\varphi - \text{Id}) \times (\gamma - \text{Id})} \mathbb{D}(V) \oplus \mathbb{D}(V) \xrightarrow{(\gamma - \text{Id}) \oplus (\text{Id} - \varphi)} \mathbb{D}(V) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

is isomorphic to $R\Gamma_{\text{cont}}(\mathcal{G}_K, V)$ in the derived category of \mathbb{Z}_p -modules.

Families of representations also appear in the theory of (φ, Γ_K) -modules. A generalisation of Fontaine's equivalence in [Dee01] shows that families of Galois representations parametrised by a local noetherian \mathbb{Z}_p -complete algebra R whose residue field is finite correspond exactly to families of étale (φ, Γ_K) -modules parametrised by this same algebra, compatible fibre by fibre with the classical Fontaine equivalence. More generally, families of representations are embedded into families of étale (φ, Γ_K) -modules, which partly motivates the introduction in [Eme] of the stack of (φ, Γ) -modules. Interesting new families of (φ, Γ) -modules appear: the irreducible components of the reduced substack are families of generically reducible representations and are glued on the locus where they are irreducible / the locus where they are split (see [EGH23, Prop. 7.2.11]).

To motivate the introduction of multivariable (φ, Γ) -modules, we skim over the use of (φ, Γ) -modules for Langlands p -adic correspondence for $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. C. Breuil summarises this correspondence in [Bre10] with the question: can we map certain \mathcal{G}_K -continuous linear representations on \mathbb{Q}_p -vector spaces of dimension n to certain continuous linear representations $\hat{\pi}$ of $\text{GL}_n(K)$ on p -adic Banach spaces, in a way compatible with reduction modulo p , with cohomology and also with " p -adic families"?

For $n=1$, the answer is given by the local class field theory¹⁴. All 1-dimensional representations over \mathbb{Q}_p factorise through the abelianisation $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$, which the local class field theory describes as the profinite completion of K^\times .

Proposition 1.2.1. *The map*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unitary characters of} \\ \text{GL}_1(K) = K^\times \text{ over } K \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{continuous characters of } \mathcal{G}_K^{\text{ab}} \text{ over } K \end{array} \right\}$$

$$\chi \mapsto \begin{array}{l} \text{continuous extension} \\ \text{of } \chi \text{ to } \widehat{K^\times} \cong \mathcal{G}_K^{\text{ab}} \end{array}$$

¹³For example if $p \neq 2$ or if $p = 2$ and K contains $\sqrt{-1}$.

¹⁴See section 3.1 for a concise exposition, or [Yos06] for a detailed exposition.

provides the correspondence for $n = 1$.

For $n = 2$, one starting point is the functor \mathbf{V} constructed by P. Colmez in [Col10]. From an admissible smooth representation Π of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ on \mathbb{F}_p , of finite length and central character, P. Colmez functorially constructs an étale (φ, Γ) -module, hence a Galois representation via Fontaine's equivalence. To construct this functor, it is crucial to understand how to recover the residual field

$$E := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}/p\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cong \mathbb{F}_p((X))$$

and its $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ -action from the group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Consider the Iwasawa algebra of integer unipotent matrices

$$\mathbb{F}_p \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] := \varprojlim_{U \text{ open subgroup}} \mathbb{F}_p \left[\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) / U \right].$$

The continuous \mathbb{F}_p -linear morphism such that $X \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] - 1$ induces an isomorphism between $\mathbb{F}_p[[X]]$ and this Iwasawa algebra. Moreover, the submonoid $\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ acts continuously by conjugation on $\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ which provides an action on the Iwasawa algebra. This action verifies $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X^p$ and $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = (1+X)^{\gamma} - 1$ for $\gamma \in \mathbb{Z}_p^{\times}$. We recover the Frobenius and the $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ -action prescribed by Fontaine. The smooth action of $\left(\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ on Π then provides a structure of torsion $\mathbb{F}_p[[X]]$ -module on Π , then of $\mathbb{F}_p[[X]]$ -module on Π^{\vee} . To certain sub- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -representations of finite length $W \subset \Pi$, [Col10, §4. 1] associates sub- $\mathbb{F}_p[[X]]$ -modules $\mathbf{D}^+(W) \subset \Pi^{\vee}$ stable by the action of $\left(\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, then shows that

$$\mathbf{D}^+(W) [X^{-1}] \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}, E) \text{ and does not depend on } W.$$

The localisation at X is crucial to obtain etality¹⁵. For the finiteness condition, the strategy of [Col10, §IV.2] relies on the exactness of the functor \mathbf{V} to reduce to the case where Π is irreducible. In this case, the classification of absolutely irreducible representations of Barthel-Livné [BL94] and Breuil [Bre03] allows an exhaustive study.

The correspondence for representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ over $\overline{\mathbb{F}_p}$ can be expressed as follows.

Theorem 1.2.2. 1. *The functor \mathbf{V} cancels on finite dimensional representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

¹⁵And showing that the choice of W doesn't matter.

2. For all characters $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \mapsto \overline{\mathbb{F}_p}^\times$, we have

$$\mathbf{V} \left(\text{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1} \right) = \overline{\mathbb{F}_p}(\delta_2)$$

where $B(\mathbb{Q}_p)$ is the Borel of upper triangular matrices, where the induction is smooth one, where δ_2 is seen as a character of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ by class field theory, where $\omega(x) = x \mapsto x|_p$ and where

$$(\delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}) \left(\begin{pmatrix} a & b & 0 & d \end{pmatrix} \right) = \delta_1(a)(\delta_2 \omega^{-1})(d).$$

Moreover, for¹⁶ $\delta_1 \notin \{\delta_2, \delta_2 \omega, \delta_2 \omega^{-1}\}$, the functor \mathbf{V} induces an isomorphism

$$\text{Ext}^1 \left(\text{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1} \right) \rightarrow \text{Ext}_{\overline{\mathbb{F}_p}[\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}]}^1(\delta_1, \delta_2).$$

1.3 The Lubin-Tate variant

To prove Fontaine's equivalence, identifying the Galois theories of $K(\mu_{p^\infty})$ and $E = \mathbb{F}_q((X))$ and defining a suitable embedding of $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ into \tilde{A} are two key steps. The fields of norms of [Win83] illustrate that the first step still works in the more general framework of infinite arithmetically profinite extensions¹⁷. Another insight comes from P. Scholze's theory of perfectoid fields: to each perfectoid field is associated a perfectoid field of characteristic p with same Galois theory (see [Sch12, §3]). Applying this procedure to the completions of some extensions $L|K$ considered by Fontaine-Wintenberger, we obtain $\widehat{E^{\text{rad}}}$ and thus identify the Galois theories of L and E .

In the introduction of [Fon07], J.-M. Fontaine already mentions generalizations of (φ, Γ) -modules by unscrewing through more various extensions. While the previous construction also provides an embedding of E^{sep} into \mathbb{C}_p^b and obtains equivalence for representations modulo p , obtaining the embedding in mixed characteristic is trickier. The case of Lubin-Tate extensions was evoked in [Fou05], then treated by [KR09] and detailed in [Sch17].

Before stating this equivalence, let's describe the Lubin-Tate extensions introduced in [LT65]. For a uniformizer π of K , a Lubin-Tate polynomial is a polynomial $f \in \mathcal{O}_K[[T]]$ such that

$$f \equiv \pi T + T^q \pmod{\pi T^2}.$$

¹⁶A less pleasant statement also exists in the other situations. These more complex situations contain the case where the inductions are not irreducible.

¹⁷e.g. extensions whose Galois group is a p -adic Lie group and whose wild inertia is an open subgroup.

Two important examples are the polynomial $\pi T + T^q$, which always works, and, for $K = \mathbb{Q}_p$, the polynomial $(1 + T)^p - 1$. Associated with such a polynomial is a \mathcal{O}_K -formal module. We can think of it as a family of series

$$+_{\text{LT},f} \in \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]] \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}_K, [a]_{\text{LT},f} \in T\mathcal{O}_K[[T]]$$

with suitable relations, or as a natural \mathcal{O}_K -module structure on the topologically nilpotent elements of \mathcal{O}_K -complete topological algebras. In particular, we obtain a \mathcal{O}_K -module structure on $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$. The torsion points correspond to the roots of f^{on} and thus generates an algebraic extension which we call the *Lubin-Tate extension* and denote¹⁸ by $K_{\text{LT},\pi}$. It is abelian, with Galois group isomorphic to \mathcal{O}_K^\times via

$$\chi_{\text{LT}} : \text{Gal}(K_{\text{LT},\pi}|K) \rightarrow \mathcal{O}_K^\times \text{ s.t. } g(x) = [\chi_{\text{LT}}(g)]_{\text{LT},f}(x).$$

The maximal abelian extension is then $K_{\text{LT},\pi}K^{\text{ur}}$. This is a constructive version of the local class body, a self-contained exposition of which is presented in [Yos06]. It explicits the characters of $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$. In the case of $K = \mathbb{Q}_p$ and $f = (1 + T)^p - 1$, the associated \mathbb{Z}_p -formal module corresponds to the multiplicative group and we recover Kronecker-Weber:

$$\mathbb{Q}_p^{\text{ab}} = \mathbb{Q}_p^{\text{cycl}} = \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}).$$

We can see this theory as an analogue of complex multiplication: for imaginary quadratic fields F , the extension F^{ab} is generated by the torsion points of an elliptic curve with complex multiplication by \mathcal{O}_F and by its j invariant [Sil94, II Th 5.6].

Let's now describe the Lubin-Tate Fontaine equivalence for a fixed Lubin-Tate polynomial f . Let

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} := \left(\mathcal{O}_K[[X]] [X^{-1}] \right)^{\wedge \pi}$$

still equipped with the *weak topology*, the unique \mathcal{O}_K -linear and continuous q -Frobenius lift that verifies $\varphi_q(X) = f(X)$ and the unique \mathcal{O}_K -linear and continuous action of $\Gamma_{K,\text{LT}} := \text{Gal}(K_{\text{LT},\pi}|K)$ verifying $g \cdot X = [\chi_{\text{LT}}(g)]_{\text{LT},f}(X)$; the two actions commute. More generally, let $L|\mathbb{Q}_p$ be a finite extension whose residue field has the same cardinal as the one of K , the extensions $K_\infty|K$ for which the embedding of E into \mathbb{C}_p^\flat lifts to an embedding of $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ such that $\varphi(X) \in \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ are contained in a Lubin-Tate extension of a subextension of K (see [Ber14] [Poy19]).

With these definitions, the Fontaine Lubin-Tate equivalence states that there exists an equivalence of categories

$$\mathbb{D}_{\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) : \mathbb{V}_{\text{LT}}.$$

¹⁸It depends only on the choice of π .

Note that the mixed-characteristic lift of E is a \mathcal{O}_K -algebra (it's mandatory, the coefficients of the series giving the action of $\Gamma_{K,LT}$ are in \mathcal{O}_K) with a linear q -Frobenius lift. For a representation V on \mathbb{Z}_p , this machinery only allows to understand the properties of $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$. This is no great loss: it's usual to consider isomorphism classes of representations on large enough p -adic fields to obtain canonical representatives. For example, the space of extensions of the trivial character by itself $\text{Ext}_{L[\mathcal{G}_K]}^1(L, L) \cong \text{Hom}_{\text{cont}}(K^\times, L)$ is of dimension $[K:\mathbb{Q}_p] + 1$ on L , no matter which p -adic L local field is chosen; the $\sigma \circ \log \circ \chi_{LT}$ for $\sigma : K \rightarrow L$ and the valuation provide a basis¹⁹ as soon as L contains all the conjugates of K . These canonical representatives' associated étale $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules are also easily expressed. Similarly, the classification of 2-dimensional semistable non crystalline representations with non degenerate Hodge-Tate weights in [Sch10] is simplified when L contains all conjugates of K and some other explicit extensions of degree dividing $2[K:\mathbb{Q}_p]$.

The first advantage of this equivalence is that it makes the local class field explicit. A representation of \mathcal{G}_K on a \mathcal{O}_K -free module of rank 1 corresponds by class field theory to a character δ of K^\times . It can be shown that the corresponding free $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -module of rank 1 has a basis $\{e\}$ in which

$$\varphi_q(e) = \delta(\pi)e$$

$$\forall a \in \Gamma_{K,LT}, \quad a \cdot e = \delta(a)e$$

with certain relations. Proving this structure result directly on $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules of rank 1 seems rather tricky. In the section 3.4, we will detail this computation and a few others, made easy by our choice of Lubin-Tate equivalence.

The first two applications we mentioned still work within the Lubin-Tate framework.

Theorem 1.3.1 ([KV22]). *Since the actions of φ_q and $\Gamma_{K,LT}$ commute for a $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -module D , the complex $\text{R}\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, D)$ comes with a q -Frobenius.*

For any representation V in $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$,

$$\text{Cone} \left[\text{R}\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, \mathbb{D}_{LT}(V)) \xrightarrow{\varphi_q - \text{Id}} \text{R}\Gamma_{\text{cont}}(\Gamma_{K,LT}, \mathbb{D}_{LT}(V)) \right]$$

is isomorphic to $\text{R}\Gamma_{\text{cont}}(\mathcal{G}_K, V)$ in the derived category of \mathcal{O}_K -modules.

A stack of $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules has also been studied by [Pha23].

¹⁹See Remark 3.1.10.

Let's now take a look at Colmez's strategy for $\mathrm{GL}_2(K)$. We can still consider the Iwasawa algebra $\mathbb{F}_q \llbracket \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rrbracket$ with action of $\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ by conjugation and $\begin{pmatrix} \mathcal{O}_K^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Unfortunately, this is a ring of formal power series over the variables $[(\begin{smallmatrix} 1 & x_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})] - 1$ for any \mathbb{Z}_p -base $(x_i)_{1 \leq i \leq [K:\mathbb{Q}_p]}$ of \mathcal{O}_K . This Iwasawa algebra is the starting point of M.-F. Vigneras in [Vig11]. However, it is post-composed by the application between Iwasawa algebras induced by

$$\mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}_p} : \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and thus obtains an univariable $(\varphi, \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ -module, rather than a Lubin-Tate version. We lose the action of \mathcal{O}_K^\times , which seems convenient for a version of the Colmez functor for $\mathrm{GL}_2(K)$, in favor of an action of \mathbb{Z}_p^\times .

1.4 The multivariable variant of Zábrádi

Several articles point to multivariable rings, such as $\mathbb{F}_q \llbracket \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O}_K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rrbracket$, but where Frobenii and actions of different copies of Γ_K act "variable by variable".

G. Zábrádi has constructed in [Z  18a] and studied with G. Jacov  c in [JZ25] a functor for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ inspired by P. Colmez²⁰. Let Δ be a basis of a root system of the Lie group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ for the torus of diagonal matrices. It has cardinal $(n - 1)$. There is an isomorphism

$$\mathbb{F}_p \llbracket X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rrbracket \cong \mathbb{F}_p \llbracket N_0/H_{\Delta,0} \rrbracket$$

where N_0 is formed by unipotent matrices with integral coefficients, $H_{\Delta,0}$ by those with zero overdiagonal and $X_\alpha + 1$ is sent to the exponential of a generator of the eigenspace associated with α in $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{Z}_p)$. The elements of the torus whose p -adic valuations decrease on the diagonal act by conjugation, and the kernel of the action consists of the diagonal matrices. Zábrádi introduces the multivariable ring

$$E_\Delta = \mathbb{F}_p \llbracket X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rrbracket [X_\alpha^{-1} \mid \alpha \in \Delta]$$

and equips it with an action of

$$\Phi_{\Delta,p} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha,p}^{\mathbb{N}} \times \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\mathbb{Q}_p,\alpha}$$

²⁰[Z  18a] even constructs a functor for any \mathbb{Q}_p -split reductive connected group.

where the action of $(\varphi_\alpha^\mathbb{N} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p, \alpha})$ mimics the action on X_α the action on X in E and leaves the other variables fixed. By identifying Δ with $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\text{Diag}(\underbrace{p, \dots, p}_\alpha, 1, \dots, 1) \quad (\text{resp. for } \underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_\alpha, 1, \dots, 1)$$

acts like $\varphi_{\alpha, p}$ (resp. like $\gamma_\alpha \in \Gamma_{\mathbb{Q}_p, \Delta}$). Following P. Colmez's strategy, Zabradi constructs a functor \mathbf{D}_Δ^\vee verifying:

Theorem 1.4.1 ([Z18a] et [JZ25]). *1. The functor \mathbf{D}_Δ^\vee is contravariant and right exact from \mathbb{F}_p -smooth representations of finite length of $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ to $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{et}}(\Phi_\Delta \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p, \Delta}, E_\Delta)$.*

2. It is compatible with tensor products and parabolic inductions.

To make the connection with Galois representations, G. Zabradi established in [Z18b] what we call a cyclotomic multivariable Fontaine equivalence²¹, and both authors of [JZ25] use it to recover some of the expected properties of a Colmez functor.

Theorem 1.4.2 ([Z18b] et [JZ25]). *1. There is an explicit equivalence of categories*

$$\mathbb{D}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p, \Delta} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{et}}(\Phi_{\Delta, p} \times \Gamma_\Delta, E_\Delta) : \mathbb{V}_\Delta$$

where $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p, \Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. The functors \mathbb{D}_Δ and \mathbb{V}_Δ naturally commute to the formation of dual.

2. The functor $\mathbf{V}_\Delta := \mathbb{V}_\Delta^\vee \circ \mathbf{D}_\Delta^\vee$, restricted to the subcategory of smooth irreducible representations on which it does not cancel, has values in irreducible representations and is conservative. This subcategory consists of admissible representations.

These results are coherent with the computations and conjectures of [Bre+21], in which some representations of $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ correspond to a tensor product of $(n-1)$ representations of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Zabradi's results could help to recover the box product of these representations.

The demonstration of multivariable cyclotomic equivalence in [Z18b] does not pass via an equivalence for fields of characteristic p . Another proof given in [CKZ21] follows Fontaine's steps more closely and is better suited for the generalizations this thesis demonstrates: a multivariable Lubin-Tate variant conjectured by the introduction of [CKZ21] and several plectic variants.

²¹Note also that the Herr complex and overconvergence results of [CC98] have been generalized to the multivariable context in [PZ21].

1.5 A formalism to encompass variants

The functors \mathbb{D} and \mathbb{V} are compositions of scalar extensions and taking of invariants by a distinguished submonoid between categories of semilinear representations of monoids. Note that both functors pass through a category of $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ -modules with action of $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$. Moreover, the proof of Fontaine equivalence reduces to the case of p -torsion modules by dévissage. In multivariable generalizations [Zá18b] [CKZ21], this dévissage hides algebraic and topological subtleties.

We propose a framework to encompass different theories of (φ, Γ) -modules, to introduce other variants more easily, and to automate the construction of functors as well as the dévissage step. For a monoid S acting on a commutative ring R , the category in which our objects live is the category of S -modules on R , denoted $\text{Mod}(S, R)$, i.e. the category of R -modules equipped with a semilinear action of S . For \mathcal{G}_K acting trivially on \mathbb{Z}_p , we see $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ as a full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p)$. For $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma)$ acting on $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, we see the category of étale (φ, Γ) -modules as a full subcategory of $\text{Mod}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$. It remains to understand which full subcategories of $\text{Mod}(S, R)$ still contain the essential image of a Fontaine functor from a category of p -adic representations of p -adic local fields. For modulo p (φ, Γ) -modules, papers working on complicated rings [Zá18b] [CKZ21], [Bre+21] [EG23] require modules to be finite projective. This is a property that was automatic for representations on \mathbb{F}_p .

This thesis exhibits similar properties of representations on \mathbb{Z}_p . The literature, as far as I know, manages to circumvent this issue in the proofs: G. Zábrádi begins by proving in [Zá18b, Prop. 2. 2] that an action of Γ_{Δ} automatically makes E_{Δ} -modules finite projective, while [CKZ21] gives arguments mainly for free representations over $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. This thesis' formalism suggests an alternative strategy: proving an equivalence between representations and modules with additional conditions on their structures²², then showing that these conditions are not restrictive (for the cases treated by this thesis at least). Let's return to \mathbb{Z}_p -representations of finite type. For such a representation V , we have

$$\forall n, \quad p^n V / p^{n+1} V \text{ is a } \mathbb{F}_p\text{-vector space of finite dimension.}$$

Moreover, the action is continuous for the p -adic topology on V .

Questions of topology are sometimes sidestepped in the literature about (φ, Γ) -modules, for example in [Fon07] or [Dee01]. Here, a D -module of finite type over a topological ring R will always be equipped with the *initial topology*, i.e. the quotient topology induced by any epimorphism $R^k \twoheadrightarrow D$. This topology is already

²²Conditions that are crucial for the proof.

used in [Sch17], [SV23], etc. Note that if D is finite projective, and \mathcal{S} is a topological monoid acting on R such that

$$\mathcal{S} \times R \rightarrow R, \quad (s, r) \mapsto s \cdot r$$

is continuous, then saying that a semilinear action of \mathcal{S} on D is continuous is more intuitive. We choose a presentation $D \oplus D' = R^k$ and extend the action by zero on D' . This provides an application

$$\mathcal{S} \rightarrow M_k(R)$$

whose continuity is equivalent to the continuity of the action on D .

We can now define the full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ adapted to Fontaine-type functors.

Definition 1.5.1. Let \mathcal{S} be a topological monoid, a ring R with a ring topology \mathcal{T} and an action of \mathcal{S} continuous for \mathcal{T} . Let also $\mathcal{S}' \triangleleft \mathcal{S}$ a distinguished submonoid and \mathcal{T}' a ring topology on R for which the action of \mathcal{S}' is continuous. Let $r \in R^{\mathcal{S}'}$ be such that R is r -adically separated, complete and r -torsion free and such that

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \varphi_s(r)R = rR.$$

The category $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ is the full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ having as objects the \mathcal{S} -modules over R verifying that

1. For any $s \in \mathcal{S}$, the image of D by the action of s generates D as a R -module²³.
2. The R -module D is finitely presented with bounded r^∞ -torsion²⁴.
3. The R -module D has finite projective (r, μ) -dévissage²⁵, i.e. $\forall n, \quad r^n D / r^{n+1} D$ is a finite projective R/r -module, of constant rank (depending on n).
4. The action of \mathcal{S} on D is continuous for the initial topology associated with \mathcal{T} .
5. The action of \mathcal{S}' on D is continuous for the initial topology associated with \mathcal{T}' .

The category $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R/r)$ is similarly defined by replacing the second and third conditions by "the underlying R/r -module is finite projective".

We omit writing \mathcal{S}' and \mathcal{T}' when $\mathcal{S}' = \{1\}$.

²³Actually, we need a slightly stronger version in whole generality. To avoid further notations, we allow ourselves this little lie in the introduction.

²⁴I.e. $D[r^\infty] = D[r^N]$ for some N .

²⁵Here the letter μ stands for "multiplicative" as opposed to τ which will be used for the dévissage by torsion.

In this language, proving that \mathbb{D} of Fontaine's equivalence produces étale modules is equivalent to proving that the following composition is well defined, i.e. that the objects given by the functor at each step do lie into the stated categories

$$\mathbb{D} : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} -} \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}) \xrightarrow{D \mapsto D^{\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}}} \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}),$$

where the two topologies on $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ are the weak and p -adic topologies, and the topology on $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ is the weak topology. In the above situations, the categories of étale topological modules and étale topological module with projective π -dévissage coincide. Hence, the proof is based on the following two results.

Proposition 1.5.2 (cf. Proposition 2.5.24). *Let \mathcal{S} be a topological monoid and $f : A \rightarrow R$ a morphism of topological rings with continuous actions of \mathcal{S} . Let $a \in A$ be such that*

- *The ring A (resp. R) is a -adically (resp. $f(a)$ -adically) separated, complete and without a -torsion (resp. without $f(a)$ -torsion).*
- *The ring A verifies*

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \varphi_s(a)A = aA.$$

Then the functor

$$D \mapsto R \otimes_A D$$

sends $\mathcal{M}\text{od}_{a\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, A)$ to $\mathcal{M}\text{od}_{f(a)\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Theorem 1.5.1 (Short version of Theorem 2.5.1). *In the context of Definition 1.5.1, suppose that*

- *We have $K_0(R^{S'}/r) = \mathbb{Z}$.*
- *The topology \mathcal{T}' is a linear topology, coarser than the r -adic topology. For any R -module with projective (r, μ) -dévissage, the initial topology on D induces the initial topology on rD and $D[r]$.*
- *The inclusion $R^{S'}/r \subset R/r$ is faithfully flat.*
- *We have $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{S}', R/r) = \{0\}$ for the topology \mathcal{T}' .*
- *For D in $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, S', R/r)$, the comparison morphism*

$$R \otimes_{R^{S'}} D^{S'} \rightarrow D, \quad r \otimes d \mapsto rd$$

is an isomorphism.

Then, the comparison morphism is an isomorphism for any object in $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ and the functor $D \mapsto D^{\mathcal{S}'}$ sends $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ to $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{\mathcal{S}'})$.

Although the formalism feels like overkill in the case of Fontaine equivalence, it allows us to understand exactly why the construction works. The last three conditions could be summarized as “invariants by \mathcal{S}' behave like descent on objects modulo r ”. The other two conditions are respectively used to descend continuity from the comparison isomorphism and to guarantee that the dévissage exact sequences are strict. The formalism emphasises that a distinction can and must be made between the topology for which we do the dévissage and the one for which continuity is transmitted: for the topology on E^{sep} corresponding to the weak topology, the condition $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_E, E^{\text{sep}}) = \{0\}$ breaks. This formalism also provides new strategies to prove the automaticity of continuity conditions such as [Sch17].

Although the general version of Theorem 1.5.1 allows another condition than $K_0(R^{\mathcal{S}'}/r) = \mathbb{Z}$, the latter implies a structural result on $R^{\mathcal{S}'}$ -modules with projective (r, μ) -dévissage.

Theorem 1.5.2 (Short version of Theorem 2.4.2). *Let R be a ring and $r \in R$ such that R is r -adically separated, complete and r -torsion free and $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$. For any R -module D , the following conditions are equivalent:*

- (i) *The module D is finitely presented, with projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion.*
- (ii) *There exists $N \geq 1$ and an isomorphism*

$$D \cong D_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} D_n$$

where D_∞ is a finite projective R -module of constant rank and each D_n is a finite projective R/r^n -module of constant rank (depending on n).

The condition (ii) is an extension of the structure theorem for finite type modules over a discrete valuation ring. Combined, for example, with G. Zábrádi’s result in [Zá18b, Prop. 2.2], this theorem provides a rigidity result for étale $(\varphi_\Delta, \Gamma_\Delta)$ -modules over $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$: they can be written as in (ii).

Our formalism also captures other aspects that we do not develop in the introduction: variants for projective and/or non topological modules, the existence of closed symmetric monoidal structures on the categories involved and the behaviour of coinduction.

1.6 Multivariable Fontaine equivalences

A starting point of this thesis was to generalise [CKZ21] to obtain a Lubin-Tate multivariable Fontaine equivalence. That article obtains as a first step an equivalence for modulo p representations of perfectoid fields. Let's start with a perfectoid field \tilde{E} such that $\overline{\mathbb{F}_p} \cap \tilde{E}$ is finite of cardinal q . In [CKZ21, Th. 4. 6], the authors establish an equivalence for representations of $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ over \mathbb{F}_p with a category of multivariable φ -modules over a $(\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q)$ -algebra. If this algebra can be lifted to a $(\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_q)$ -algebra suitable for a cyclotomic multivariable equivalence, it is not clear how to obtain a \mathcal{O}_K -algebra for a Lubin-Tate equivalence. We therefore follow the strategy of Carter-Kedlaya-Zábrádi and try to make all our constructions over \mathbb{F}_q .

Definition 1.6.1. Let $q = p^f$. Let Δ be a finite set. We define $\Phi_{\Delta, q, p}$ to be the submonoid of $\prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha, p}^{\mathbb{N}}$ generated by each $\varphi_{\alpha, q} := \varphi_{\alpha, p}^{\circ f}$ and by $\varphi_{\Delta, p} := \prod \varphi_{\alpha, p}$.

Let X be a pseudo-uniformiser of \tilde{E} and \tilde{E}_{α} be copies of \tilde{E} indexed by Δ . We define the rings

$$\tilde{E}_{\Delta}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_{\alpha}^+ \right)^{\wedge (X_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta)} \quad \text{and} \quad \tilde{E}_{\Delta} := \tilde{E}_{\Delta}^+ \left[\frac{1}{X_{\Delta}} \right]$$

where we complete with respect to the ideal generated by the family of pseudo-uniformisers and where $X_{\Delta} := \prod X_{\alpha}$.

There exists a unique action of the monoid $\Phi_{\Delta, q, p}$ on the \mathbb{F}_q -algebra \tilde{E}_{Δ}^+ by $(X_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$ -adically continuous morphisms such that $\varphi_{\Delta, p}$ is the absolute Frobenius and that

$$\varphi_{\alpha, q}(X_{\alpha}) = X_{\alpha}^q \text{ and, } \forall \beta \neq \alpha, \varphi_{\alpha, q}(X_{\beta}) = X_{\beta}.$$

This action extends to \tilde{E}_{Δ} .

Theorem 1.6.1 (cf. Theorem 5.2.13). *There is an equivalence of closed symmetric monoidal categories*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : \quad \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} &\rightleftarrows \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta, q, p}, \tilde{E}_{\Delta} \right) : \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} \\ V &\longmapsto \left(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \\ \left(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}} D \right)^{\Phi_{\Delta, q, p}} &\longleftarrow D \end{aligned}$$

As in Fontaine's article, one of the tricky points is to prove that $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ produces large enough objects. To do this, we reconstruct $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ using perfectoid spaces in

the following way. Equip \tilde{E}_Δ^+ with the X_Δ -adic topology. For any object D of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,p}, \tilde{E}_\Delta)$, the functor

$$\text{Spa}(R, R^+) \mapsto (R \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_p = \text{Id}}$$

is representable by an object in \mathbb{F}_p -vector spaces in the category of finite étale coverings of $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. It also has an action of $\Phi_{\Delta,q}$ such that $\varphi_{\Delta,q}$ acts like the q -Frobenius. It turns out that the perfectoid space $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ has a Stein open

$$X_{\tilde{E}} \cong \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spa}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+).$$

By restricting the previous covering, we obtain an object in the category of finite étale coverings of $X_{\tilde{E}}$ with an action of $\Phi_{\Delta,q}$ such that $\varphi_{\Delta,q}$ acts like the q -Frobenius, and such that the structural morphism to $X_{\tilde{E}}$ is equivariant. By Drinfeld's lemma for diamonds, this category is Galois with fundamental group $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Thus, we obtain an object of $V_{\tilde{E},\Delta}(D)$ in $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. In the present work, we prove and use extensively that \tilde{E}_Δ is a domain, which was false in the version of [CKZ21], to bypass some arguments.

Pour $\tilde{E} = \mathbb{F}_q((X^{1/p^\infty}))$, we have an imperfect version of the coefficient ring :

$$E_\Delta := \mathbb{F}_q[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}].$$

Using another topology called the *colimit topology*, we deduce an equivalence for representations of characteristic p of $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ whose corresponding φ -modules have coefficients in E_Δ (cf. Theorem 5.4.16). Then by applying our formalism to the dévissage, we deduce an equivalence for representations of $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ on any ring of integers of a p -adic local field [Theorem 5.4.22]. Finally, we recover the equivalences of [CKZ21] by coinduction.

For a p -adic local field K and a finite set Δ , we want to deduce an equivalence for representations of $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ from the equivalence for representations of $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Thanks to our formalism, the work to obtain the multivariable Fontaine Lubin-Tate equivalence is almost done. It remains to construct an action of $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ on the comparison ring, continuous for a reasonable topology. It is important to note that, as in the classical case, this topology cannot be the π -adic: the action of \mathcal{G}_K on $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$ is not continuous for the π -adic topology.

Definition 1.6.2. We keep our p -adic local field K , the finite set Δ and we choose a uniformiser π and an associated Lubin-Tate polynomial f . We define the topological

monoids $\Phi_{\Delta,q} := \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha,q}^{\mathbb{N}}$ with discrete topology and $\Gamma_{K,LT,\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_K^\times$ with product topology.

We define the ring

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} := \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta][X_\Delta^{-1}]] \right)^{\wedge p}$$

with three topologies called the *weak adic topology*, the *colimit topology* and the *weak topology*. We equip it with a \mathcal{O}_K -linear action of the monoid $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta})$ continuous for each of the three topologies. The action of $\Phi_{\Delta,q}$ verifies

$$\varphi_{\alpha,q}(X_\alpha) = X_\alpha^q \text{ and, } \forall \beta \neq \alpha, \varphi_{\alpha,q}(X_\beta) = X_\beta.$$

The action of $\Gamma_{K,LT,\Delta}$ verifies

$$\forall x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \Gamma_{K,LT,\Delta}, \forall \alpha \in \Delta, x \cdot (X_\alpha) = [x_\alpha]_{LT,f}(X_\alpha).$$

Theorem 1.6.2 (Special case of Theorem 6.1.6 and Theorem 6.1.7). *There is an explicit equivalence of closed symmetric monoidal categories*

$$\mathbb{D}_{\Delta,LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) : \mathbb{V}_{\Delta,LT}$$

for any of the three topologies on $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$.

Moreover, the full subcategories of $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ for each of the three topologies coincide with each other and with $\text{Mod}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$.

I was recently informed by P. Schneider that such an equivalence had been obtained in the thesis [Pup21]. The author uses the methods of [Zá18b] without going through our intermediate results for fields of characteristic p . We recover his result and our formalism allows a more diverse choice of topologies²⁶.

At this point of the thesis, it is sufficient to construct a comparison ring with good actions to obtain a Fontaine style equivalence. We push further by establishing a plectic Fontaine equivalence and two equivalences we call *glectic*. The plectic Galois group is defined by

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} := \text{Aut}_K \left(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \right).$$

It appears in the work of J. Nekovář and T. Scholl, [NS16] and [NS17]: for global Shimura data associated with the restriction $\text{Res}_{\mathbb{Q}}^F(H)$ of an algebraic group H over a finite extension $F|\mathbb{Q}$, or with an arithmetic quotient of a product of Poincaré half-planes indexed by the embeddings, they notice that the étale cohomology groups have an ad hoc action of $\mathcal{G}_{F,\text{plec}}$ (and not just an action of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$). They conjecture

²⁶The weak topology is the one used by [Pup21].

that this action can be constructed in the derived category. Choosing (π, f) as in the Lubin-Tate-multivariable case, we obtain a Fontaine equivalence for this Galois group in the local p -adic case.

Theorem 1.6.3 (See Theorem 6.3.10). *There exists an explicit equivalence of closed symmetric monoidal categories*

$$\mathbb{D}_{\text{plec}, \text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{plec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}}) : \mathbb{V}_{\text{plec}, \text{LT}}.$$

Let $\mathcal{P} := \{\tau : K \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$ which is of cardinal $[K : \mathbb{Q}_p]$. In the above theorem, the topological monoid $T_{K, \text{plec}}$ is written

$$T_{K, \text{plec}} \cong (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

where $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ acts on the left factor by permuting the copies of $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ and $\Gamma_{K, \text{LT}}$. Also writing $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ as a wreath product

$$\mathcal{G}_{K, \text{plec}} \cong \prod_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_K \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

the construction can be roughly understood as the multivariable Lubin-Tate one for \mathcal{P} variables, where we added an action of $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ that permutes the variables and the copies of \mathcal{G}_K . These objects resembles certain constructions in [Bre+25] and the geometric construction of the functor $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ gives hope to formalise a link.

I have also been interested in a subgroup of the plectic Galois group, the glectic Galois group, and in this thesis we also obtain Fontaine equivalences for the latter. Let's state our results when $K|\mathbb{Q}_p$ is Galois. The glectic group $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ is defined by

$$\mathcal{G}_{K, \text{glec}} := \mathcal{G}_{K, \text{plec}} \times_{\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}} \text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$$

where the morphism $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ is given by the right-hand composition action on embeddings. We establish two glectic equivalences.

Theorem 1.6.4 (See Theorems 6.4.20 and 6.4.26). *There exists an explicit equivalence of closed symmetric monoidal categories*

$$\mathbb{D}_{\text{sglec}, \text{LT}} : s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}) : \mathbb{V}_{\text{sglec}, \text{LT}}.$$

$$\mathbb{D}_{\text{glec}, \text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{glec}}}) : \mathbb{V}_{\text{glec}, \text{LT}}.$$

Here, the category $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ is that of continuous semilinear representations of finite type over \mathcal{O}_K where $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ acts on \mathcal{O}_K via its quotient $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$. The

monoid $T_{K,\text{glec}}$ has two submonoids respectively isomorphic to $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ and $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K$. The $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{sglec}}}$ and $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{sglec}}}$ rings with their $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ -actions coincide with the Lubin-Tate ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$; we add an action of $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K$ which permutes the variables and remembers the degrees of the embeddings. For $K = \mathbb{Q}_{p^f}$, variables are indexed by $\llbracket 0, f-1 \rrbracket$. We have

$$T_{K,\text{glec}} \cong \Gamma_{K,\text{LT},f} \rtimes \Phi_{f,q,p}$$

where $\varphi_{f,p}$ circularly permutes the f -embeddings, corresponds to the generator Frob of $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{\mathbb{Q}_{p^f}}$ and verifies $\varphi_{f,p}(X_i) = X_{i+1}$ and $\varphi_{f,p}(X_{f-1}) = f(X_0)$. Obtaining a glectic representation from a representation of $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ means specifying the action of a canonical subgroup $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{G}_{K,\text{glec}}$, and this kind of action exists on the étale cohomology of $\text{Res}_{\mathbb{Q}_p}^K X$ where X is a K -rigid space.

Structure of the manuscript

The present manuscript contains 6 chapters, bilingual introduction included.

Chapter 2 presents the formalism of \mathcal{S} -modules over R . It begins by presenting the subcategories of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ corresponding to étale projective and étale modules, and then constructs the eventual closed symmetric monoidal structures. Then, it studies the stability of these subcategories by base change, taking of invariants and coinduction. This is followed by an algebraic discussion about modules with projective r -dévissage, before resuming the previous study for the corresponding subcategory. Finally, we introduce topological issues and take up once again the study of the associated subcategories.

Chapter 3 provides an introduction to the Lubin-Tate Fontaine equivalence. We give a brief exposition of the construction of $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ and $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$, giving both a summary of the results we'll use later and setting a number of notations. The chapter continues with a proof of the Lubin-Tate Fontaine equivalence in the language of Chapter 2. We then carry out explicit computations on certain Galois representations. The chapter ends by explaining how to recover the automatic continuity results of [Sch17], both by a strategy similar to [Sch17] and by another method using Chapter 2.

Chapter 4 gives a minimalist exposition of perfectoid spaces, diamonds and Drinfeld's lemma within this framework. I have tried to include as much as deadlines allow certain proofs that I haven't found written in one stroke in the literature, in particular a complete proof of Drinfeld's lemma for diamonds. We refer to P. Scholze's texts for a more complete introduction.

Chapter 5 establishes the various equivalences for perfectoid fields of characteristic p . We begin by constructing functors for the perfectoid modulo p equivalence. We

warn the reader that the subsection 5.1.2 is very technical; it proves in all generality the properties of \tilde{E}_Δ and is quite independent of the rest of this chapter. Don't hesitate to use it as a black box. We then use Drinfeld's lemma to reconstruct $\tilde{\mathbb{V}}_\Delta$ and prove the first equivalence. The end of the section carries out deperfectionisation, dévissage and recovers results from [CKZ21].

Chapter 6 constructs the Lubin-Tate multivariable, plectic and glectic comparison rings and proves the associated equivalences. Section 6.2 is then devoted to the compatibility between the univariable and multivariable versions and to explicit computations. Before proving the semilinear glectic equivalence, we justify its introduction by exhibiting hidden variables in $\tilde{A}_K := W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^b)$.

Subcategories of \mathcal{S} -modules over R

2.1 The category of \mathcal{S} -modules over R

Definition 2.1.1. Let \mathcal{S} be a monoid. An \mathcal{S} -ring R is a pair formed by a ring, which we will also denote by R , and a morphism of monoids from \mathcal{S} to $\text{End}_{\text{Ring}}(R)$, denoted by $s \mapsto \varphi_s$.

Example 2.1.2. For every monoid \mathcal{S} and every ring R , the trivial action equips R with a structure of \mathcal{S} -ring we call the *trivial structure*.

Each ring R in which $p = 0$ is equipped with a structure of $\varphi^{\mathbb{N}}$ -ring where the action is given by iterating the p -th power.

In the introduction, we equipped the ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ := \mathbb{Z}_p[[X]]$ with a structure of $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ -ring.

Without additional precision, \mathcal{S} will always be a monoid and R will always denote an \mathcal{S} -ring. We now define the category which will contain all our objects.

Definition 2.1.3. Define the category $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ of \mathcal{S} -modules over R . Its objects are the pairs $(D, \varphi_{-,D})$ where D is an R -module and

$$\varphi_{-,D} : \mathcal{S} \rightarrow \text{End}_{\text{Ab}}(D), \quad s \mapsto \varphi_{s,D}$$

is a monoid morphism such that each $\varphi_{s,D}$ is φ_s -semilinear, i.e.

$$\forall r \in R, d \in D, \quad \varphi_{s,D}(rd) = \varphi_s(r)\varphi_{s,D}(d).$$

Its morphisms are the R -linear morphisms $f : D_1 \rightarrow D_2$ such that

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad f \circ \varphi_{s,D_1} = \varphi_{s,D_2} \circ f.$$

Remark 2.1.4. We can give an equivalent definition using only linear algebra.

For any R -module D and any $s \in \mathcal{S}$, define the φ_s -linearisation of D as

$$\varphi_s^* D = R \otimes_{\varphi_{s,R}} D$$

seen as an R -module via the left factor. Since $s \mapsto \varphi_s$ is a morphism of monoids,

$$\forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, \forall D \in R\text{-Mod}, \exists \varphi_s^*(\varphi_{s'}^* D) \cong \varphi_{ss'}^* D$$

natural in D .

For any R -linear morphism f , we write $\varphi_s^* f$ for its base change along φ_s . For any φ_s -semilinear endomorphism of R -modules $f_s : D_1 \rightarrow D_2$, the following map is a correctly defined morphism of R -modules:

$$f_s^* : \varphi_s^* D_1 \mapsto D_2, \quad r \otimes d \mapsto r f_s(d).$$

Any such linear map f_s^* is obtained this way from $f_s : d \mapsto f_s^*(1 \otimes d)$.

Let's define a category $\mathcal{LMod}(\mathcal{S}, R)$. Its objects are the pairs $(D, \varphi_{\cdot, D}^*)$ where D is an R -module and $\varphi_{\cdot, D}^*$ is a family of R -linear morphisms $\varphi_{s, D}^* : \varphi_s^* D \rightarrow D$ such that

$$\forall (s, s') \in \mathcal{S}^2, \quad \begin{array}{ccc} \varphi_{ss'}^* D & \xrightarrow{\varphi_{ss', D}^*} & D \\ \searrow \sim & & \nearrow \varphi_{s, D}^* \\ & \varphi_s^*(\varphi_{s'}^* D) \xrightarrow{\varphi_s^*(\varphi_{s', D}^*)} \varphi_s^* D & \end{array} \quad \text{commutes.}$$

Its morphisms are the R -linear morphisms $f : D_1 \rightarrow D_2$ such that

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \begin{array}{ccc} \varphi_s^* D_1 & \xrightarrow{\varphi_s^* f} & \varphi_s^* D_2 \\ \varphi_{s, D_1}^* \downarrow & & \downarrow \varphi_{s, D_2}^* \\ D_1 & \xrightarrow{f} & D_2 \end{array} \quad \text{commutes}^1.$$

The linearisation functor, defined as $(D, \varphi_{\cdot, D}^*) \mapsto (D, \varphi_{\cdot, D}^*)$ on objects and as identity on the morphisms is an equivalence of categories between $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ and $\mathcal{LMod}(\mathcal{S}, R)$. A quasi-inverse is given by the above delinearisation.

Example 2.1.5. The R -module R with $\varphi_{s, R} := \varphi_s$ belongs to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

Remark 2.1.6. For any group \mathcal{G} and ring R , the category of R -linear representations of \mathcal{G} is precisely $\text{Mod}(\mathcal{G}, R)$, for \mathcal{G} acting trivially on R .

In [Fon07], keeping the notations of the introduction, the category of étale (φ, Γ) -modules is a full subcategory of $\text{Mod}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$.

Lemma 2.1.7. *The category $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ is abelian.*

¹Note that the commutation of the trapezoid above is a property, not a datum. So there's no need to impose the commutation of additional diagrams: all those you can reasonably think of are commutative as soon as the above squares are.

Proof. It is the category of left modules over the non-commutative R -algebra $R[\varphi_s \mid s \in \mathcal{S}]$, where

$$\forall s \in \mathcal{S}, r \in R, \varphi_s \times r = \varphi_s(r) \times \varphi_s. \quad \square$$

This category also has a symmetric monoidal structure.

Proposition 2.1.8. *Let D_1, D_2 be two objects of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.*

1. *For each $s \in \mathcal{S}$ the map*

$$\varphi_{s,D_1} \times \varphi_{s,D_2} : D_1 \times D_2 \rightarrow D_1 \otimes_R D_2, \quad (d_1, d_2) \mapsto \varphi_{s,D_1}(d_1) \otimes \varphi_{s,D_2}(d_2)$$

factors through $D_1 \otimes_R D_2$ as a φ_s -semilinear morphism, which we call $\varphi_{s,(D_1 \otimes_R D_2)}$.

2. *The map $[s \mapsto \varphi_{s,D_1 \otimes_R D_2}]$ endows $(D_1 \otimes_R D_2)$ with a structure of an \mathcal{S} -module over R . It represents the functor*

$$\text{Mod}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Set}, \quad D \mapsto \left\{ f : D_1 \times D_2 \rightarrow D \mid \begin{array}{l} f \text{ is } R\text{-bilinear} \\ \forall s, f \circ (\varphi_{s,D_1} \times \varphi_{s,D_2}) = \varphi_{s,D} \circ f \end{array} \right\}.$$

Proof. 1. We give a proof so as to highlight the back and forth between semilinear morphisms and their linearisations. Since φ_{s,D_1}^* and φ_{s,D_2}^* are R -linear, their tensor product is well defined. So we can consider the R -linear composition

$$f_s^* : \varphi_s^* \left(D_1 \otimes_R D_2 \right) \xrightarrow{\sim} \varphi_s^* D_1 \otimes_R \varphi_s^* D_2 \xrightarrow{\varphi_{s,D_1}^* \otimes \varphi_{s,D_2}^*} D_1 \otimes_R D_2,$$

where the first isomorphism is a tensor product identity. The image of $d_1 \otimes d_2$ under its delinearisation can be computed as

$$f_s^*(1 \otimes (d_1 \otimes d_2)) = [\varphi_{s,D_1}^* \otimes \varphi_{s,D_2}^*]((1 \otimes d_1) \otimes (1 \otimes d_2)) = \varphi_{s,D_1}(d_1) \otimes \varphi_{s,D_2}(d_2).$$

This proves that $(\varphi_{s,D_1} \times \varphi_{s,D_2})$ factors as a φ_s -semilinear morphism.

2. It remains to check that $[s \mapsto \varphi_{s,(D_1 \otimes_R D_2)}]$ is a morphism of monoid. For this, the delinearised setup is convenient. It is obvious using the property for D_1 and D_2 for pure tensors, then true by semilinearity.

For the universal property, show first that the domain and codomain of the usual bijection between $\{f : D_1 \times D_2 \rightarrow D \mid f \text{ is } R\text{-bilinear}\}$ and $\text{Hom}_R(D_1 \otimes_R D_2, D)$, natural in D , can be restricted to a bijection between the functor we want to represent at D and $\text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{S}, R)}(D_1 \otimes_R D_2, D)$. From

now on, we call "restrict-corestrict" the operation of restricting both domain and codomain. Then the natural commuting squares of the usual bijection for morphisms in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ restrict-corestrict on the previous subsets, giving naturality of our transformation (then at the end naturality of the tensor product in D_1 and D_2). \square

Remark 2.1.9. Seeing $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ as the category of left $R[\phi_s \mid s \in \mathcal{S}]$ -modules, it's possible to reinterpret this tensor product. An \mathcal{S} -module D_1 over R is a $(R[\phi_s \mid s \in \mathcal{S}], R)$ -bimodule. Furthermore, another modulus D_2 can be seen as $(R, R[\phi_s \mid s \in \mathcal{S}]^{\text{op}})$ -bimodule. The tensor product $D_1 \otimes_R D_2$ then makes sense in non-commutative algebra and has a $(R[\phi_s \mid s \in \mathcal{S}], R[\phi_s \mid s \in \mathcal{S}]^{\text{op}})$ -bimodule structure. The map $d \mapsto sds$ then corresponds to $\varphi_{s, (D_1 \otimes_R D_2)}$.

Proposition 2.1.10. 1. Let (D_1, D_2, D'_1, D'_2) be a quadruplet of \mathcal{S} -modules over R . For any pair of morphisms $f_i : D_i \rightarrow D'_i$, the map

$$f_1 \otimes f_2 : D_1 \otimes_R D_2 \rightarrow D'_1 \otimes_R D'_2$$

is a morphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. This makes $- \otimes_R -$ a bifunctor. By construction, it commutes to the forgetful functor towards R -modules.

2. Consider the bifunctor $- \otimes_R -$ on $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, the object R , associators, left and right unitors and braiding morphisms given by the symmetric monoidal structure on $R\text{-Mod}$. This data equips $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ with a structure of symmetric monoidal category.

Proof. 1. The computations are not detailed here.

2. These data give a symmetric monoidal structure on $R\text{-Mod}$. It is therefore sufficient to check that, for objects in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, the associators, left and right unitors, and braiding morphisms live in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. \square

Unfortunately, this abelian category generally has far too many objects to be equivalent to a category of group representations. First of all, galois representations are assumed to be of finite type in Fontaine equivalences' setups. We would also like to eliminate objects for which the action does not seem to respect the regularity of the monoid. Indeed, for any regular commutative monoid \mathcal{S} and any R -module D , making each invertible element of \mathcal{S} act by the identity and the others by the zero endomorphism still provides an object of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

2.2 The subcategories of étale and étale projective \mathcal{S} -modules over R

A Fontaine-type functor decomposes as a scalar extension to a bigger ring, followed by a taking of invariants. Let's take a closer look at representations of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ of finite type over \mathbb{Z}_p as subobjects of $\text{Mod}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z}_p)$. Since $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ is a group, the linearisations of the action are isomorphisms². The underlying \mathbb{Z}_p -modules are also of finite presentation. These two conditions are preserved by base change and taking of invariants (see Propositions 2.3.3 and 2.3.7) for precise statements) and cut out a natural subcategory $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. In the case of $\text{Mod}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, this category is effectively the one introduced by Fontaine to capture the essential image of his functor: the étale (φ, Γ) -modules. We give a general definition.

Definition 2.2.1. The category of étale \mathcal{S} -modules over R , denoted by $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, is the full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ whose objects are the finitely presented R -modules D such that $\varphi_{s,D}^*$ is a R -linear isomorphism for any $s \in \mathcal{S}$.

Remark 2.2.2. Although Fontaine's definition only requires the modules to be of finite type, he works with discrete valuation rings. For these, finite type modules and finitely presented modules coincide. The following results show that being finitely presented, which is automatic for finite type \mathbb{Z}_p -representations, is preserved by Fontaine-type functors. In particular, when the base ring is not noetherian (cf. [CKZ21]), it is the right condition.

Let's mention that, with noetherian and flatness properties, $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is again abelian.

Proposition 2.2.3 (Propositions 1.1.5 and 1.1.6 in [Fon07]). *Suppose that R is noetherian and that the endomorphisms φ_s are flat.*

1. *The category $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is abelian. More precisely, kernels and cokernels in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ of morphisms between objects of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ are objects of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.*
2. *Suppose in addition that R is a domain of Krull dimension ≤ 1 and that for every pair $(s, \mathfrak{m}) \in \mathcal{S} \times \text{Spm}(R)$, the ideal $\varphi_s(\mathfrak{m})$ is maximal. Then a finitely presented object of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ lies in $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ if and only if the linearisations are surjective, i.e. every image of $\varphi_{s,D}$ generates D as an R -module.*

²The fact that the linearisation of the action of an element is an isomorphism is always true in $\text{Mod}(\mathcal{G}, R)$, even if the action of the group \mathcal{G} on R is non-trivial. This will later translate into an equivalence between the category of (possibly semilinear) finite type representations of \mathcal{G} on a \mathcal{G} -ring R and $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{G}, R)$.

Moreover, an extension of two S -modules over R is étale if and only if its defining subobject and quotient are étales.

Remark 2.2.4. In order to study modulo p representations, Fontaine only uses the rings \mathbb{F}_p , E and E^{sep} , which all happens to be fields. This greatly simplify their module theories. More recently, variants of (φ, Γ) -modules for which the ring are not fields anymore have appeared in the literature: see [Bre+25], [Zá18b], [Zá18a] and [CKZ21] for multivariable variants, see [EG23] for variants in families. [CKZ21] even considers perfectoid rings which are neither noetherian nor domains. Keep in mind that for these ring, the abelianity of $\text{Mod}^{\text{ét}}(S, R)$ does not hold a priori.

To understand the introduction of étale projective modules, let's look closer at the multivariable (φ, Γ) -modules of characteristic p in [Zá18b]. Their underlying ring is E_{Δ} (see the introduction). It is not a field which leads to a projectivity condition (see [Zá18b, Prop. 2.2] and [CKZ21, Th. 4.6]). This condition can be understood as a traduction of the projectivity of \mathbb{F}_p -modules underlying representations of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. We will see in Propositions 2.3.3 and 2.3.7 that projectivity is preserved by a Fontaine-type functor.

Definition 2.2.5. The category of étale projective S -modules over R , denoted by $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$, is the full subcategory of $\text{Mod}^{\text{ét}}(S, R)$ whose objects have an underlying R -module (finite) projective of constant rank.

Example 2.2.6. The R -module R equipped with the $\varphi_{s,R}$ is an object of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$ even when the φ_s are not injectives.

Remark 2.2.7. For a group \mathcal{G} acting on a ring R , the category $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}, R)$ is the category of R -semilinear representations of \mathcal{G} on finite projective modules of constant rank.

If R is a field, then $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$ and $\text{Mod}^{\text{ét}}(S, R)$ coincide.

The previous symmetric monoidal structure induces one on these subcategories.

Proposition 2.2.8. 1. If D_1 and D_2 are objects of $\text{Mod}^{\text{ét}}(S, R)$, then $(D_1 \otimes_R D_2)$ is also étale and represents the restriction of the functor in Proposition 2.1.8 to $\text{Mod}^{\text{ét}}(S, R)$.

2. If D_1 and D_2 are objects of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$, then $(D_1 \otimes_R D_2)$ is also étale projective and represents the restriction of the functor in Proposition 2.1.8 to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$.

Proof. 1. Being of finite presentation is preserved by tensor product. In the first point, we had an explicit description of $\varphi_{s, (D_1 \otimes_R D_2)}^*$, which exhibits that it is

an isomorphism as soon as φ_{s,D_1}^* and φ_{s,D_2}^* are. It proves that $(D_1 \otimes_R D_2)$ is étale as soon as D_1 and D_2 are.

The representability follows from the fact that $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is a full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

2. It remains to show that $D_1 \otimes_R D_2$ is finite projective of constant rank if D_1 and D_2 are. This follows from the fact that finite projectivity is equivalent to being finite free locally on $\text{Spec}(R)$ (cf. [Sta18, Tag 00NX]).

The representability follows from the fact that $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is a full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. \square

Now that the tensor product is constructed, we can move on to constructing the internal Hom. While the tensor product was already defined on $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, the internal Hom needs an étality condition.

Lemma 2.2.9. *Let A be a ring, let M_1 and M_2 be two A -modules. Let $f : A \rightarrow B$ be a ring morphism.*

1. *There exists a morphism of B -modules natural in both M_1 and M_2*

$$\begin{aligned} \iota_{M_1, M_2, f} : B \otimes_A \text{Hom}_A(M_1, M_2) &\rightarrow \text{Hom}_A(M_1, B \otimes_A M_2) \\ b \otimes f &\mapsto [m_1 \mapsto b \otimes f(m_1)] \end{aligned}$$

Moreover, the target is naturally isomorphic $\text{Hom}_B(B \otimes_A M_1, B \otimes_A M_2)$ and $\iota_{M_1, M_2, f}$ can be rewritten $(b \otimes f) \mapsto (b \text{Id}_B \otimes f)$.

2. *If M_1 is finite projective, the previous morphism is an isomorphism.*
3. *If M_1 is of finite presentation and f is flat, the previous morphism is an isomorphism.*
4. *If M_1 and M_2 are finite projective, then so is $\text{Hom}_A(M_1, M_2)$.*

Proof. 1. Left to the reader.

2. Proof can be found in [Sta18, Tag 0DBV].

3. Fix a presentation of M_1 , i.e. an exact sequence $A^p \rightarrow A^d \rightarrow M_1 \rightarrow 0$. By left exactness of $\text{Hom}_A(-, M_2)$, left exactness of $\text{Hom}_A(-, B \otimes_A M_2)$ and flatness of f , we obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) & \longrightarrow & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(A^d, M_2) & \longrightarrow & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) \\
& \downarrow \iota_{M_1, M_2, f} & & \downarrow \iota_{A^d, M_2, f} & \downarrow \iota_{A^p, M_2, f} \\
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, B \otimes_A M_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^d, B \otimes_A M_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(A^p, B \otimes_A M_2)
\end{array}$$

The previous point proves that the last two vertical morphisms are isomorphisms. The five lemma concludes.

4. By applying the previous point to the localisations (which are flat), we prove that the $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ -modules $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}}(\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2})$ and $\mathrm{Hom}_A(\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2})$ coincide on principal opens, hence are isomorphic. Because the modules M_1 and M_2 are locally free of finite type (resp. and of constant rank), the left $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$ -module is locally free of finite type (resp. and of rank the product of the ranks), hence so is $\mathrm{Hom}_R(M_1, M_2)$. \square

Corollary 2.2.10. *Let D_1, D_2 be two objects of $\mathrm{Mod}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{\acute{e}t}}(S, R)$, the following maps are isomorphisms of R -modules:*

$$\forall s \in S, \quad \iota_{D_1, D_2, \varphi_s} : \varphi_s^* \mathrm{Hom}_R(D_1, D_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2), \quad 1 \otimes f \mapsto \mathrm{Id}_R \otimes f.$$

The same result holds if each φ_s is flat, for D_1 in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{\acute{e}t}}(S, R)$ and D_2 in $\mathrm{Mod}(S, R)$.

Definition/Proposition 2.2.11. Let D_1 belong to $\mathrm{Mod}^{\mathrm{\acute{e}t}}(S, R)$ and D_2 to $\mathrm{Mod}(S, R)$.

1. The R -module $\mathrm{Hom}_R(D_1, D_2)$ endowed with the linearisations $\varphi_{s, \underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)}^*$ defined as

$$\varphi_s^*(\mathrm{Hom}_R(D_1, D_2)) \xrightarrow{\iota_{D_1, D_2, \varphi_s}} \mathrm{Hom}_R(\varphi_s^* D_1, \varphi_s^* D_2) \xrightarrow{\varphi_{s, D_2}^* \circ \circ(\varphi_{s, D_1}^*)^{-1}} \mathrm{Hom}_R(D_1, D_2)$$

is an S -module over R . We call it the *internal Hom* and write it $\underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)$.

2. If both D_1 and D_2 belong $\mathrm{Mod}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{\acute{e}t}}(S, R)$, then so do $\underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)$.
3. If the ring R is noetherian and each φ_s is flat, this holds in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{\acute{e}t}}(S, R)$.

Proof. 1. For the correct definition, it only remains to prove for all $(s, s') \in S^2$ that:

$$\varphi_{ss', \underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)} = \varphi_{s, \underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)} \circ \varphi_{s', \underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)}.$$

For $f \in \text{Hom}_R(D_1, D_2)$, we compute $\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f)$. By delinearisation and description of $\iota_{D_1, D_2, \varphi_s}$, it is equal to $\varphi_{s, D_2}^* \circ (\text{Id} \otimes f) \circ (\varphi_{s, D_1}^*)^{-1}$. Explicitly,

$$\begin{aligned} \varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f) \left(\sum r_i \varphi_{s, D_1}(d_i) \right) &= (\varphi_{s, D_2}^* \circ (\text{Id} \otimes f)) \left(\sum r_i \otimes d_i \right) \\ &= \varphi_{s, D_2}^* \left(\sum r_i \otimes f(d_i) \right) \\ &= \sum r_i \varphi_{s, D_2}(f(d_i)) \end{aligned}$$

As D_1 is étale, its elements can be written as $\sum r_i \varphi_{ss', D_1}(d_i)$. The above computations show that $\varphi_{ss', \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f)$ and $\left[\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)} \circ \varphi_{s', \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f) \right]$ coincide on such sums, hence on D_1 .

2. Corollary 2.2.10 shows that $\iota_{D_1, D_2, \varphi_s}$ is an isomorphism, implying that the linearisations $\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}^*$ also are. The fourth point of Lemma 2.2.9 shows that $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ is finite projective.
3. The étale case of Corollary 2.2.10 proves again that the $\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}^*$ are isomorphisms. Moreover, if we take an epimorphism $R^k \rightarrow D_1$, the deduced map

$$\text{Hom}_R(D_1, D_2) \rightarrow D_2^k$$

is injective. Then, the noetherianity of R implies that $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ is of finite presentation. \square

Remark 2.2.12. We crucially used that D_1 is étale to define the internal Hom. This already happens in the construction of internal Hom for group representations through the use of inverse to define the action.

These constructions can be translated in the language of symmetric monoidal categories.

- Proposition 2.2.13.** 1. Consider the bifunctor $- \otimes_R -$ on $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, the object R , coherence and swap maps coming from the tensor product on $R\text{-Mod}$. They endow $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ with the structure of a symmetric monoidal category. The same holds for the full subcategory $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.
2. The full subcategory $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ with the same structure is closed symmetric monoidal. The right adjoint to $(- \otimes_R D)$ is $\underline{\text{Hom}}_R(D, -)$.
 3. The previous point holds for the full subcategory $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ if R is noetherian and each φ_s is flat.

Proof. 1. The category $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is a full subcategory of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

2. We notice that the formation of internal Hom commutes to the forgetful functor towards R -modules. As in Proposition 2.1.8, we verify that, for objects of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, the adjunction bijections between morphisms in $R\text{-Mod}$ restrict-corestrict to morphisms in $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. We use the definition/proposition above to show that $\underline{\text{Hom}}_R(-, D)$ lands in $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.
3. Similar. □

We conclude this study of internal Hom by recovering morphisms in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

Proposition 2.2.14. *Let D_1 belongs $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and D_2 to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. The \mathcal{S} -module $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ verifies that*

$$\bigcap_{s \in \mathcal{S}} \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)^{\varphi_s = \text{Id}} = \text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{S}, R)}(D_1, D_2).$$

Proof. Let $s \in \mathcal{S}$. We use the expression of $\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f)$ that we got while proving Proposition 2.2.11. Applied to $\varphi_{s, D_1}(d)$, it proves that $\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f) = f$ implies $f \circ \varphi_{s, D_1} = \varphi_{s, D_2} \circ f$. Conversely, if the second equality holds, for every $d = \sum r_i \varphi_{s, D_1}(d_i)$, we have

$$\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f)(d) = \sum r_i \varphi_{s, D_2}(f(d_i)) = \sum r_i f(\varphi_{s, D_1}(d_i)) = f(d).$$

The etality guarantees that every element has such expression. □

2.3 Three crucial operations

A Fontaine-type functor is decomposed as an extension of scalars followed by a taking of invariants. This chapter introduces such operations on \mathcal{S} -modules over R and its full subcategories.

2.3.1 Base change

First, we study the change of base ring.

Definition 2.3.1. The category $\mathcal{S}\text{-Ring}$ has the \mathcal{S} -rings introduced in Definition 2.1.3 for objects and the \mathcal{S} -equivariant ring morphisms $a : R \rightarrow T$ for morphisms.

When considering two \mathcal{S} -rings R and T , we will note $s \mapsto \varphi_s$ the structural monoid morphism for R and $s \mapsto \varphi'_s$ the structural monoid morphism for T to avoid ambiguity.

Definition 2.3.2. Let $a : R \rightarrow T$ be a morphism of \mathcal{S} -rings. Let D belongs to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. We define

$$\forall s \in \mathcal{S}, \varphi_{s, \text{Ex}(D)}'^* : \varphi_s'^* \left(T \otimes_R D \right) \xrightarrow{\sim} T \otimes_R (\varphi_s^* D) \xrightarrow{\text{Id}_T \otimes \varphi_{s, D}^*} T \otimes_R D.$$

With these data, the module $(T \otimes_R D)$ belongs to $\text{Mod}(\mathcal{S}, T)$.

We define the functor

$$\text{Ex} : \text{Mod}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{S}, T), \quad D \mapsto (T \otimes_R D), \quad f \mapsto \text{Id}_T \otimes f.$$

Proposition 2.3.3. For any \mathcal{S} -rings morphism $a : R \rightarrow T$, the functor Ex has the following interactions with the subcategories of étale and étale projective modules.

1. The functor Ex restricts-corestricts to étale (resp. étale projective) \mathcal{S} -modules as follows

$$\text{Ex} : \text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$$

and

$$\text{Ex} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T).$$

2. The functor Ex is strong symmetric monoidal. Thus, its restrictions to étale (resp. étale projective) modules is too.
3. For all objects D_1 of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and D_2 of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$, there is a morphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, T)$

$$\text{Ex}(\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_T(\text{Ex}(D_1), \text{Ex}(D_2)),$$

given by the setup of a lax monoidal functor between two closed monoidal categories. The underlying morphism of T -modules coincides with $\iota_{D_1, D_2, a}$ from Lemma 2.2.9.

If D_1 belongs to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, it is an isomorphism³.

4. It is also an isomorphism if a is flat.

Proof. 1. Base change preserves both the finite presentation property, the finite projectiveness and the constant rank. Moreover, the definition of $\varphi_{s, \text{Ex}(D)}'^*$ makes it an isomorphism as soon as $\varphi_{s, D}^*$ is one.

2. The base change on categories of modules is strong symmetric monoidal. We only need to check that coherence maps for the underlying modules live in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

³In other terms, Ex is closed monoidal on $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

3. Recall how we get this morphism. By adjonction, we have a morphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$

$$h : \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2) \otimes_R D_1 \rightarrow D_2.$$

The composition

$$\text{Ex}(\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)) \otimes_R \text{Ex}(D_1) \rightarrow \text{Ex}(\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2) \otimes_R D_1) \xrightarrow{\text{Ex}(h)} \text{Ex}(D_2),$$

whose first term is the coherence map for Ex , gives us the desired morphism by adjunction. In our context, we know that h is set-theoretically given by $f \otimes d_1 \mapsto f(d_1)$ and a computation identify the obtained morphism with $\iota_{D_1, D_2, a}$.

If both modules are projective, the second point of Lemma 2.2.9 tells us that $\iota_{D_1, D_2, a}$ is an isomorphism.

4. Identical to point 3 with the third point of Lemma 2.2.9. □

Remark 2.3.4. The forgetful functor from $\text{Mod}(\mathcal{S}, T)$ to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ is a right adjoint to Ex . In fact, let D belongs to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ and Δ to $\text{Mod}(\mathcal{S}, T)$. The adjunction bijection in $R\text{-Mod}$ and $T\text{-Mod}$

$$\text{Hom}_R(D, \Delta) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_T(T \otimes_R D, \Delta), \quad f \mapsto [t \otimes d \mapsto t f(d)]$$

restricts-corestricts to the maps in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ and $\text{Mod}(\mathcal{S}, T)$.

For $\Delta = \text{Ex}(D)$, the identity gives rise to the morphism

$$D \rightarrow \text{Ex}(D), \quad d \mapsto 1 \otimes d$$

in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. The definition of $\varphi'_{s, \text{Ex}}$ allows to take invariants and obtain a map

$$\bigcap_{s \in \mathcal{S}} D^{\varphi_s = \text{Id}} \rightarrow \bigcap_{s \in \mathcal{S}} \text{Ex}(D)^{\varphi'_s = \text{Id}}.$$

Proposition 2.3.5. *Let D_1 be an object of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and D_2 of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.*

1. *The map*

$$\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2) \rightarrow \text{Ex}(\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)) \xrightarrow{\iota_{D_1, D_2, a}} \underline{\text{Hom}}_T(\text{Ex}(D_1), \text{Ex}(D_2)).$$

given by functoriality of Ex can be obtained in the following way. By the previous remark applied to $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ and the third point of Proposition 2.3.3 gives a morphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$

$$\text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{S}, R)}(D_1, D_2) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}(\mathcal{S}, T)}(\text{Ex}(D_1), \text{Ex}(D_2)).$$

Then we take invariants and use Proposition 2.2.14.

2. Suppose that a is injective. Then, the functor Ex is faithful from $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Proof. 1. Follow the image of f . It goes to $1 \otimes f$, then to $\text{Id}_T \otimes f$ which is exactly $\text{Ex}(f)$.

2. From the identification of Ex on morphisms, as soon as D_1 and D_2 are étale projective, the second point of Lemma 2.2.9 implies that $\iota_{D_1, D_2, a}$ is an isomorphism. We already proved that $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ is again finite projective, hence flat. Together with injectivity of a , it proves that the composition's first part is injective. The composition itself is injective and remains injective after taking invariants. It is precisely the faithfulness condition. \square

2.3.2 Invariants by a normal submonoid

In this section, we move towards the second step of Fontaine-type functors: taking invariants. In the Appendix A there is a discussion about the notion of normal submonoids, because it is not as obvious as in the group setup that we only want to quotient by normal submonoids. Nonetheless, this notion will be sufficient for all the situations of chapters 5 and 6. We stick with an \mathcal{S} -ring R and add the datum of a normal submonoid \mathcal{S}' of \mathcal{S} . The subring $R^{\mathcal{S}'}$ is endowed with a structure of \mathcal{S}/\mathcal{S}' -ring via the restriction-corestriction of each φ_s . The inclusion $R^{\mathcal{S}'} \subset R$ is a morphism of \mathcal{S} -rings.

Definition/Proposition 2.3.6. Let D be an object of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$. Each $\varphi_{s, D}$ restricts-corestricts to $D^{\mathcal{S}'}$ and these restrictions endow it with the structure of object in $\text{Mod}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{\mathcal{S}'})$.

The functor $\text{Inv} : \text{Mod}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{\mathcal{S}'})$ is defined by $D \mapsto D^{\mathcal{S}'}$ and by restriction-corestriction of the maps.

In the same setup, we call *comparison morphism for D* the composition

$$R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} \text{Inv}(D) \rightarrow R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} D \rightarrow D,$$

where the first map is the base change of the inclusion, and the second one is $r \otimes d \mapsto rd$.

Proposition 2.3.7. *Suppose that $R^{S'} \subseteq R$ is faithfully flat and that the comparison morphism for D*

$$R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism.

If D belongs to $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ (resp. to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$), then $\text{Inv}(D)$ belongs to $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/S', R^{S'})$ (resp. to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/S', R^{S'})$).

Proof. According to [Sta18, Tag 03C4] the fact that $\text{Inv}(D)$ is of finite presentation (resp. finite projective) can be checked after base change to R , i.e. on D thanks to the comparison isomorphism. The étaleness condition can also be checked after base change to R . Because $R^{S'} \subset R$ is \mathcal{S} -equivariant, the base change of $\varphi_{sS', \text{Inv}(D)}$ is identified to $\varphi_{s,D}$ via the comparison morphism. \square

Corollary 2.3.8. *Suppose that $R^{S'} \subset R$ is faithfully flat and that the comparison morphism is an isomorphism for every (resp. étale, resp. étale projective) \mathcal{S} -module over R . Then Inv is a strong symmetric monoidal functor from $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ (resp. $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, resp. $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$).*

Proof. Let D_1, D_2 be (resp. étale, resp. and étale projective \mathcal{S} -modules over R . There is a natural morphism of \mathcal{S}/S' -modules over $R^{S'}$:

$$\text{Inv}(D_1) \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_2) \rightarrow \text{Inv}(D_1 \otimes_R D_2), \quad d_1 \otimes d_2 \mapsto (d_1 \otimes d_2).$$

We check that it is an isomorphism after base change to R . The module $(D_1 \otimes_R D_2)$ is still an (resp. étale, resp. étale projective) \mathcal{S} -module over R so its comparison morphism is an isomorphism. Moreover, naturally

$$R \otimes_{R^{S'}} (\text{Inv}(D_1) \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_2)) \cong (R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_1)) \otimes_R (R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_2)).$$

We conclude by using the comparison morphisms for D_1 and D_2 . \square

Proposition 2.3.9. *Suppose that $R^{S'} \subset R$ is faithfully flat. For every étale D_1 and D_2 in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ for which comparison morphisms are isomorphisms, there is a natural isomorphism of \mathcal{S}/S' -modules over $R^{S'}$*

$$\underline{\text{Hom}}_{R^{S'}}(\text{Inv}(D_1), \text{Inv}(D_2)) \rightarrow \text{Inv}(\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)).$$

In particular, if the comparison morphism is an isomorphism for every object in $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, then the functor Inv from this category is closed monoidal.

Proof. Thanks to Propositions 2.2.11 and 2.3.7, the internal Hom do exist. The map is defined by taking a morphism $f : \text{Inv}(D_1) \rightarrow \text{Inv}(D_2)$ and identifying $\text{Id}_R \otimes f$ with a map from D_1 to D_2 thanks to the comparison isomorphisms.

Showing that it is an isomorphism can be checked after base change to R . Because the $\text{Inv}(D_i)$ are étale projective, the fourth point of 2.3.3 applied to $R^{S'} \subset R$ identifies

$$R \otimes_{R^{S'}} \underline{\text{Hom}}_{R^{S'}}(\text{Inv}(D_1), \text{Inv}(D_2))$$

to

$$\underline{\text{Hom}}_R(R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_1), R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D_2))$$

and then to $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ by the comparison isomorphisms. We check that this composition is the base change of our map. \square

I don't see how to weaken the hypotheses of these Propositions. The invariant step of a Fontaine equivalence behaves like descent (when it isn't exactly descent). Hence, studying these comparison morphisms is the difficult part⁴ (see [Zá18b] or [CKZ21]). Even in the basic case which we will detail in Chapter 3, it relies either on Galois descent or on counting points on an étale variety over an algebraically closed field, both of which are rather deep results. Requiring this condition as a black box seems quite reasonable for a general setting.

We finish by a proposition that will be useful in section 2.4.

Proposition 2.3.10. *Let D be a finite projective module over $R^{S'}$. Suppose that*

$$\forall r \in R^{S'}, \exists n \geq 1, R[r^\infty] = R[r^n]$$

Then, the map

$$c : D \rightarrow \text{Inv}\left(R \otimes_{R^{S'}} D\right)$$

is an isomorphism of $R^{S'}$ -modules. If D was an S/S' -module over $R^{S'}$, then c is an isomorphism of S/S' -modules over $R^{S'}$.

Proof. If D is free, the isomorphism

$$R \otimes_{R^{S'}} D \cong R^d$$

⁴Once the rings in play are constructed, which can be tricky.

in $\text{Mod}(\mathcal{S}', R)$ concludes. In general, the module D is locally free. Choose $r \in R^{\mathcal{S}'}$ such that $D[r^{-1}]$ is free over $R^{\mathcal{S}'}[r^{-1}]$. As $r \in R^{\mathcal{S}'}$, the \mathcal{S}' -ring structure on R extends to an \mathcal{S}' -ring structure on $R[r^{-1}]$. According to the free case, the map

$$D[r^{-1}] \rightarrow \text{Inv}\left(R[r^{-1}] \otimes_{R^{\mathcal{S}'}[r^{-1}]} D[r^{-1}]\right)$$

is an isomorphism. Using that R has bounded r^∞ -torsion and that the $R^{\mathcal{S}'}$ -module D is flat, we identify the target of this isomorphism with $\text{Inv}(R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} D)[r^{-1}]$ and the isomorphism itself with $c[r^{-1}]$. The map c is an isomorphism locally on $\text{Spec}(R^{\mathcal{S}'})$, hence an isomorphism.

We let the reader check the equivariance when we have an \mathcal{S}/\mathcal{S}' -action. \square

2.3.3 Coinduction

The previous section showed how to deal with taking of invariants and quotienting the considered monoid. This section considers the adjoint construction: inflating the monoid, which will be used in section 5.5. Coinduction for monoids mimics its analogue for groups. In the setting of groups, the reader might refer to [Wei94, §6.1 and §6.3].

Let \mathcal{S} be a submonoid of a bigger monoid \mathcal{T} . The forgetful functor from \mathcal{T} -Set to \mathcal{S} -Set has a right adjoint: the coinduction denoted by $\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}$. Explicitly,

$$\forall X \in \mathcal{S}\text{-Set}, \quad \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(X) := \{f : \mathcal{T} \rightarrow X \mid \forall s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}, f(st) = s \cdot f(t)\}$$

with \mathcal{T} -action given by $t \cdot f = [s \mapsto f(st)]$. The coinduction commutes to limits. Moreover, the evaluation at the identity element of \mathcal{T} induces a bijection

$$\left[\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(X)\right]^{\mathcal{T}} \xrightarrow{\sim} X^{\mathcal{S}} \quad (*)$$

Proposition 2.3.11. 1) For any monoid \mathcal{S} , the category of rings objects in \mathcal{S} -Set is equivalent to \mathcal{S} -Ring.

The coinduction induces a functor from \mathcal{S} -Ring to \mathcal{T} -Ring, for which the ring structure on $\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R)$ is the termwise structure on functions from \mathcal{T} to R .

2) For every \mathcal{S} -ring R , the category of R -modules objects⁵ in \mathcal{S} -Set is equivalent to $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$.

⁵See for instance [Mar23a, Definition 1.3].

The coinduction induces a functor from $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ to $\text{Mod}(\mathcal{T}, \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R))$: if the map $[\lambda : R \times D \rightarrow D]$ is the external multiplication on D , the multiplication on $\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(D)$ is given by

$$\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R) \times \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(D) \xrightarrow{\sim} \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R \times D) \xrightarrow{\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(\lambda)} \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(D).$$

Proof. 1) A ring object in $\mathcal{S}\text{-Set}$ corresponds to an addition map, a neutral element, an opposite map and a multiplication map which are \mathcal{S} -equivariant and make the suitable diagrams commute. They give a ring structure, and \mathcal{S} acts by ring endomorphisms thanks to the equivariance of the diagrams.

Because coinduction naturally commutes with fiber products, the previous paragraph and [Mar23a, Lemma 1.4] provide the desired promotion. The same lemma gives the description of the ring structure; for instance, the multiplication is given by

$$\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R) \times \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R) \xrightarrow{\sim} \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R \times R) \xrightarrow{\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(\mu_R)} \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R)$$

and we check that it corresponds to the pointwise multiplication on $R^{\mathcal{T}}$.

2) Similar. □

Remark 2.3.12. The upgraded functor $\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}$ from $\text{Mod}(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$ to $\text{Mod}(\mathcal{T}, \mathbb{Z})$ is a right adjoint to the forgetful functor. The identity $(^*1)$ and the fact that the coinduction is right adjoint to a left exact functor provides natural isomorphism $R(M \mapsto M^{\mathcal{T}}) \circ R\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}} \cong R(M \mapsto M^{\mathcal{S}})$.

After this rough setup, we give a certain number of useful results for groups then try to adapt them for monoids.

Lemma 2.3.13. *Let \mathcal{H} be subgroup of a group \mathcal{G} .*

1. *For any \mathcal{G} -ring R , the map*

$$R \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R), \quad r \mapsto [g \mapsto \varphi_g(r)]$$

is a morphism of \mathcal{G} -rings.

2. *Suppose that \mathcal{H} is of finite index in \mathcal{G} . Let R be a \mathcal{G} -ring, A an \mathcal{H} -ring and $i : R \rightarrow A$ a morphism of \mathcal{H} -rings. The first point produces a morphism of \mathcal{G} -rings*

$$j : R \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R) \xrightarrow{\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(i)} \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A).$$

For every D in $\text{Mod}(\mathcal{G}, R)$, the following map is an isomorphism in $\text{Mod}(\mathcal{G}, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A))$:

$$\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A) \otimes_R D \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A \otimes_R D), \quad f \otimes d \mapsto [g \mapsto f(g) \otimes \varphi_{g,D}(d)].$$

Proof. 1) Left to the reader.

2) We leave it to the reader to check that it is a well-defined additive \mathcal{G} -equivariant $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A)$ -linear morphism and move on to the second morphism. Fix a system of distinct representatives \mathcal{R} of $\mathcal{H} \backslash \mathcal{G}$. Left cosets form a partition of \mathcal{G} hence for an \mathcal{H} -abelian group (resp. an \mathcal{H} -ring) M , the map

$$\text{ev}_M : \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(M) \xrightarrow{f \mapsto (f(g))_{g \in \mathcal{R}}} \prod_{\mathcal{R}} M$$

is an isomorphism of \mathcal{G} -abelian groups (resp. of \mathcal{G} -rings). The action of $g' \in \mathcal{G}$ on the right is defined by sending $(m_g)_{g \in \mathcal{R}}$ to $(\varphi_{h_{g',g}}(m_{k_{g',g}}))_{g \in \mathcal{R}}$ where $k_{g',g}$ is the representative of $g'^{-1}g$ and $g'^{-1}g = h_{g',g}k_{g',g}$.

For our \mathcal{H} -ring A , the R -algebra structure given by j identify to $\prod_{g \in \mathcal{R}} i \circ \varphi_g$. Because $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] < +\infty$, the product over \mathcal{R} is also a direct sum. It is possible to express the studied map for D as the composition of the following bijections:

$$\begin{array}{ccc} \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A) \otimes_R D & \xrightarrow{\text{ev}_A \otimes \text{Id}_D} & \left(\bigoplus_{g \in \mathcal{R}, R} A \right) \bigoplus_{\substack{g \in \mathcal{R} \\ i \circ \varphi_g, R}} \bigotimes_{\substack{g \in \mathcal{R} \\ i \circ \varphi_g, R}} D & \xrightarrow{(\oplus a_g) \otimes d \mapsto \oplus (a_g \otimes d)} & \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} \left(A \bigotimes_{i \circ \varphi_g, R} D \right) \\ & & \downarrow & & \\ \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(A \otimes_R D) & \xleftarrow{\text{ev}_{(A \otimes_R D)}^{-1}} & \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} (A \otimes_R D) & \xleftarrow{\oplus (\text{Id}_A \otimes \varphi_{g,D}^*)} & \bigoplus_{g \in \mathcal{R}} (A \otimes_R \varphi_g^* D) \end{array}$$

This concludes. \square

Proposition 2.3.14. *Let \mathcal{H} be a finite index subgroup of a group \mathcal{G} . Let R be an \mathcal{H} -ring. The functor $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}$ from $\text{Mod}(\mathcal{H}, R)$ to $\text{Mod}(\mathcal{G}, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R))$ satisfies the following properties:*

1. *It is essentially surjective.*
2. *It sends $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{H}, R)$ to $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{G}, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R))$ and its restriction-corestriction is essentially surjective.*
3. *It sends $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{H}, R)$ to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R))$ and its restriction-corestriction is essentially surjective.*

Proof. 1. Apply the second point of the Lemma 2.3.13 to the \mathcal{H} -ring morphism

$$i : \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R) \rightarrow R, \quad f \mapsto f(1_G).$$

The corresponding morphism j is the identity on $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)$ and thus exhibits D in $\text{Mod}(\mathcal{G}, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R))$ as the coinduction of $R \otimes_{i, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)} D$.

2. Étalness is automatic for groups. In this setup with $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] < \infty$, the coinduction coincides with the induction, which is left adjoint to the forgetful functor. Hence, coinduction is right exact and commutes to finite products. Applying coinduction on a finite presentation of D produces a finite presentation of $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)$.

Moreover, any D is the coinduction of $R \otimes_{i, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)} D$, which is finitely presented as soon as D is.

3. It remains to show that being locally finite free of constant rank is preserved by coinduction. Let D be an étale projective module. Let $(r_i)_{i \in I} \in R^I$ be a finite family whose non-vanishing loci cover $\text{Spec}(R)$ and such that each $D[r_i^{-1}]$ is free. For all $g \in \mathcal{R}$ and $i \in I$, call $r_{i,g}$ the function in $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)$ with support on $\mathcal{H}g$ such that $r_{i,g}(g) = r_i$. The localisation of $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)$ at $r_{i,g}$ is isomorphic to $R[r_i^{-1}]$ and $\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(D)[r_{i,g}^{-1}]$ to $D[r_i^{-1}]$. Moreover, the non-vanishing loci of the $r_{i,g}$ cover⁶ $\text{Spec}(\text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R))$.

Moreover, any D is the coinduction of $R \otimes_{i, \text{Coind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(R)} D$, which is finite projective as soon as D is. \square

Remark 2.3.15. We should be able to prove in this setup that the coinduction is strong symmetric monoidal and commutes with internal Hom when it is defined. For monoids, finding the right setup seems more difficult.

The finite index is crucial in Lemma 2.3.13 to allow the commutation of tensor product with the limit defining the coinduction.

To deal with submonoids $\mathcal{S} < \mathcal{T}$, we want tensor product and coinduction to commute again. Imposing the finiteness of the index, defined as the cardinality of the set of the left cosets, is far too strong: the monoid \mathbb{N} doesn't even have a finite index in itself, because the left cosets are strictly contained in one another. As a first attempt, replace it by the existence of a finite family of left cosets which is cofinal for the inclusion⁷. Something worse happens since the left cosets can be neither disjoint nor included in one another; for instance, if we take Δ to be the diagonal of \mathbb{N}^2 , the elements $(0, 1)$ and $(1, 0)$ correspond to two distinct maximal cosets whose intersection contains $(1, 2)$. The coinduction is not the product over the maximal

⁶The original covering hypothesis provides (r'_i) such that $\sum_i r_i r'_i = 1$. Thus, $\sum_{i,g} r_{i,g} r'_{i,g} = 1$.

⁷This is equivalent to imposing that there are finitely many maximal elements and that they are cofinal.

left cosets but a subobject. Choose \mathcal{R}_{\min} a system of distinct representatives⁸. For the maximal left cosets and define

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}) := \{(s_1, s_2, t_1, t_2) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{R}_{\min}^2 \mid s_1 t_1 = s_2 t_2\}.$$

The set $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$ becomes a poset by fixing that

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall (s_1, s_2, t_1, t_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}), (ss_1, ss_2, t_1, t_2) \leq (s_1, s_2, t_1, t_2).$$

Then,

$$\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(X) \cong \left\{ (x_t) \in \prod_{t \in \mathcal{R}_{\min}} X \mid \forall (s'_1, s'_2, s_1, s_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}), \varphi_{s'_1}(x_{s_1}) = \varphi_{s'_2}(x_{s_2}) \right\}.$$

The condition $\varphi_{s'_1}(x_{s_1}) = \varphi_{s'_2}(x_{s_2})$ can be restricted to a cofinal family in $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$. Note that the poset $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$ doesn't depend on the chosen representatives up to isomorphism; we call it \mathcal{L} . This leads to the following definition.

Definition 2.3.16. A submonoid \mathcal{S} is of *finite subtle index* in another monoid \mathcal{T} if there are finitely many maximal left cosets for the inclusion, if these are cofinal, and if the maximal quadruples of \mathcal{L} are finitely many and cofinal.

Remark 2.3.17. For Fontaine equivalences, monoids appear because of Frobenii on imperfect rings. In [CKZ21], we encounter monoids like $(f\mathbb{N})^d < \mathbb{N}^d$, and I even stumbled upon $(f\mathbb{N})^d + \text{Diag} < \mathbb{N}^d$ myself, where Diag is the diagonal copy of \mathbb{N} . We could first prove results for coinduction in a perfect setting then try to recover an imperfect version. However, this can be more technical than introducing this monoidal setting.

Lemma 2.3.18. Let $\mathcal{S} < \mathcal{T}$.

1. Let R be a \mathcal{T} -ring. The map

$$R \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(R), \quad r \mapsto [t \mapsto \varphi_t(r)]$$

is a morphism of \mathcal{T} -rings.

2. Suppose that \mathcal{S} is of finite subtle index inside \mathcal{T} . Let R be a \mathcal{T} -ring, let T be an \mathcal{S} -ring and $i : R \rightarrow T$ an \mathcal{S} -ring morphism. As in Lemma 2.3.13, we obtain a morphism of \mathcal{T} -rings $R \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(T)$. For any object D of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$, the following map is an isomorphism in $\text{Mod}(\mathcal{T}, \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(T))$

$$\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(T) \otimes_R D \rightarrow \text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(T \otimes_R D), \quad f \otimes d \mapsto [s \mapsto f(s) \otimes \varphi_{s,D}(d)].$$

⁸Be careful that being a representative of t of $t_0\mathcal{S}$ means that $t\mathcal{S} = t_0\mathcal{S}$ and not merely $t \in t_0\mathcal{S}$.

Proof. Similar to Lemma 2.3.13, with one little change: the finite subtle index implies that $\text{Coind}_S^\mathcal{T}$ is a finite limit and not anymore a direct sum. Hence, we must use the flatness of D to ensure that the tensor product by D commutes with finite limits, in particular with coinduction. \square

Proposition 2.3.19. *Let \mathcal{S} be a submonoid of \mathcal{T} of finite subtle index. Let R be an \mathcal{S} -ring. The essential image of*

$$\text{Coind}_S^\mathcal{T} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{T}, \text{Coind}_S^\mathcal{T}(R))$$

contains $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{T}, \text{Coind}_S^\mathcal{T}(R))$.

Proof. Similar to Proposition 2.3.14 using Lemma 2.3.18. \square

Remark 2.3.20. It seems difficult to find a condition guaranteeing an equivalent of Proposition 2.3.14. The étalness of coinduced modules is hard to grasp; having non-empty intersections of cosets tends to make the evaluation functions from the coinduction to the base module not surjective. We encounter such problem (and bypass it) in the proof of Proposition 5.5.3. It also seems difficult to have an equivalent of Proposition 2.3.19 for étale modules as flatness is crucially used. For the upcoming modules with projective r -dévissage though, it remains true.

2.4 Taking dévissage into account

This chapter introduces a the subcategory of étale modules generalizing the category of finite type \mathbb{Z}_p -representations.

We wonder which formulation of finite type \mathbb{Z}_p -representations' properties are preserved by Fontaine-type functors. As mentionned in the introduction, we remark that for representations, each subquotient $p^n V / p^{n+1} V$ is a finite \mathbb{F}_p -vector space, hence finite projective of constant rank. It appears (see Theorems 2.4.1 and 2.4.2) that for reasonable rings R , imposing finite presentation and the projectivity of this dévissage have many consequences. This allows to deal simultaneously with torsion-free representations, torsion representations and their extensions. In addition, we highlight that such conditions suit dévissage strategies (see Theorem 2.4.3).

2.4.1 Modules with projective r -dévissage

This subsection is devoted to establish two strong theorems about the structure of R -modules with finite projective (r, μ) -dévissage, prior to the additional monoid actions this thesis studies.

Definition 2.4.1. A *dévissage setup* is a pair (R, r) where R is a ring and $r \in R$ such that R is r -torsion-free, r -adically complete and separated.

Definition 2.4.2. Let M be an R -module and $r \in R$. We say that M has *finite projective (r, μ) -dévissage* if each subquotient $r^n M / r^{n+1} M$ is a finite projective R/r -module, of constant rank (depending on n).

We say that M has finite projective (r, τ) -dévissage⁹ if each $M[r^{n+1}]/M[r^n]$ is a finite projective R/r -module, of constant rank (depending on n).

Theorem 2.4.1. Let (R, r) be a *dévissage setup*. Then for every R -module M the following are equivalent:

- i) M is r -adically complete and separated with finite projective (r, μ) -dévissage.
- ii) M is finitely presented with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion.
- iii) There exists $N \geq 1$, a finite projective R -module of constant rank M_∞ and an r^N -torsion R -module with finite projective (r, μ) -dévissage M_{tors} such that

$$M \cong M_\infty \oplus M_{\text{tors}}.$$

Proof. iii) \implies ii): any finitely presented R/r -module is finitely presented as an R -module. Any extension of finitely presented R -modules is finitely presented. Because each $r^n M_{\text{tors}} / r^{n+1} M_{\text{tors}}$ is finite projective over R/r , hence finitely presented, this implies that M_{tors} is finitely presented. Both terms are finitely presented, so M is also.

The (r, μ) -dévissage commutes with direct sums so it only remains to prove that M_∞ has finite projective (r, μ) -dévissage. The first term $M_\infty / r M_\infty \cong R/r \otimes_R M_\infty$ is finite projective. Because M_∞ is flat and R is r -torsion-free, the module M_∞ is also r -torsion-free. We obtain that each $r^n M_\infty$ is isomorphic to M_∞ and conclude for the other terms of the (r, μ) -dévissage.

Finally, as M_{tors} is finitely generated, it has bounded r^∞ -torsion. As M_∞ is r -torsion free, M has bounded r^∞ -torsion.

ii) \implies i): we first consider a finite type module M with a surjection $f : R^a \twoheadrightarrow M$. We obtain an exact sequence of projective systems

$$0 \rightarrow (\text{Ker}(f \bmod r^n))_{n \geq 1} \rightarrow ((R/r^n)^a)_{n \geq 1} \rightarrow (M/r^n M)_{n \geq 1} \rightarrow 0.$$

⁹This is only a condition on $M[r^\infty]$.

Passing to the limit and using the completion and separatedness of R , we obtain an exact sequence

$$R^a \rightarrow \varprojlim M/r^n M \rightarrow R^1 \varprojlim \text{Ker}(f \bmod r^n).$$

As f is surjective,

$$\text{Ker}(f \bmod r^n) = (\text{Ker}(f) + r^n R^a)/r^n R^a \cong \text{Ker}(f)/\text{Ker}(f) \cap r^n R^a$$

and the transition maps between these kernels identify to the quotient maps. The projective system of kernels is therefore Mittag-Leffler, which implies the vanishing of $R^1 \varprojlim$.

Now fix a presentation $R^b \xrightarrow{g} R^a \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$. Using the previous paragraph on both $R^a \xrightarrow{f} M$ and $R^b \xrightarrow{g} \text{Ker}(f)$, we obtain two exact sequences

$$\varprojlim \text{Ker}(f \bmod r^n) \rightarrow R^a \rightarrow \varprojlim M/r^n M \rightarrow 0$$

$$R^b \rightarrow \varprojlim \text{Ker}(f)/r^n \text{Ker}(f) \rightarrow 0.$$

If we had $\varprojlim \text{Ker}(f)/r^n \text{Ker}(f) = \varprojlim \text{Ker}(f \bmod r^n)$, it would show that $\varprojlim M/r^n M$ have the same presentation than M , hence that the latter is r -adically complete and separated.

Using the long Tor-exact sequence for R/r^n and the short exact sequence given by f , we have

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(R/r^n, M) \rightarrow R/r^n \otimes_R \text{Ker}(f) \rightarrow \text{Ker}(f \bmod r^n) \rightarrow 0.$$

As R is r -torsion free, R/r^n has a free resolution by $\cdots 0 \rightarrow R \xrightarrow{r^n \times} R$ which gives $\text{Tor}_1(R/r^n, M) \cong M[r^n]$. We also have maps of resolutions

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{r^{n+1} \times} & R \longrightarrow R/r^{n+1} \\ & & & & \downarrow r \times & & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{r^n \times} & R \longrightarrow R/r^n \end{array}$$

which, associated with the naturality of long Tor-exact sequences, provide an exact sequence of projective systems

$$0 \rightarrow \varprojlim_{m \mapsto rm} M[r^n] \rightarrow \varprojlim \text{Ker}(f)/r^n \text{Ker}(f) \rightarrow \varprojlim \text{Ker}(f \bmod r^n) \rightarrow R^1 \varprojlim_{m \mapsto rm} M[r^n].$$

Say that M has bounded r^∞ -torsion, say by r^N . Hence all computations of the projective system $(M[r^n])_{n \geq 1, m \mapsto rm}$ can be done with $(M[r^{nN}])_{n \geq 1, m \mapsto r^N m}$ hence

with $(M[r^N])_{n \geq 1, m \mapsto 0}$. The \varprojlim of this last system vanishes and we obtain $\varprojlim \text{Ker}(f)/r^n \text{Ker}(f) = \varprojlim \text{Ker}(f \bmod r^n)$ as required.

$i) \implies iii)$: because all maps $r^n M/r^{n+1} M \xrightarrow{r \times} r^{n+1} M/r^{n+2} M$ are surjective, the rank of $r^n M/r^{n+1} M$ is decreasing thus stabilises for $n \gg 0$. Take N such that it stabilises. First, suppose it has been proven that $r^N M$ is finite projective of constant rank over R . The exact sequence

$$0 \rightarrow M[r^N] \rightarrow M \xrightarrow{r^N \times} r^N M \rightarrow 0$$

splits, which first proves that $M[r^N]$ has finite projective dévissage, then the required decomposition.

We only need to prove that $r^N M$ is finite projective of constant rank. It verifies the hypothesis of $i)$ with dévissage subquotients being of the same rank. To lighten the notations, we denote by M such module and prove that it is finite projective of constant rank in the end of the proof.

We first prove by induction that $M/r^n M$ is finite projective of constant rank over R/r^n . Because our dévissage subquotients are finite projective with same rank functions, every surjective arrow

$$r^n M/r^{n+1} M \xrightarrow{r \times} r^{n+1} M/r^{n+2} M$$

is an isomorphism. We obtain the following exact sequence:

$$0 \rightarrow M/rM \xrightarrow{f_n := (r \times) \bmod r^n} M/r^{n+1} M \rightarrow M/r^n M \rightarrow 0.$$

Suppose it is proved that $M/r^n M$ is finite projective as an R/r^n -module. Take $t \in R/r^{n+1}$ such that the localisation of $M/r^n M$ at $(t \bmod r^n)$ is free over $(R/r^n)_{(t \bmod r^n)}$ and a basis $(e_i)_{1 \leq i \leq b}$. Fix $(\tilde{e}_i)_{1 \leq i \leq b}$ any lifting to $M/r^{n+1} M$. Because M is finitely generated, we can apply Nakayama lemma to the ring $(R/r^n)_t$, the module $(M/r^{n+1} M)_t$ and the element r in the Jacobson radical to prove that (\tilde{e}_i) is a generating family. Take a relation $\sum t_i \tilde{e}_i = 0$. By reducing modulo r^n , we can prove that each t_i is a multiple of r^n ; write $t_i = r^n t'_i$. The map

$$(M/rM)_t \xrightarrow{(f_n)_t} (M/r^{n+1} M)_t, \quad [m] \mapsto [r^n m]$$

is an injection onto $(r^n M/r^{n+1} M)_t$. Hence, we obtain that

$$(f_n)_t^{-1} \left(\left[\sum_i r^n t'_i \tilde{e}_i \right] \right) = \left[\sum_i t'_i \tilde{e}_i \right]$$

is zero thanks to injectivity. Each $(t'_i \bmod r)$ is zero, hence so are the t'_i 's. We proved that $M/r^{n+1}M$ is locally free with same local rank than $M/r^n M$, hence of constant rank.

Now, fix an expression as direct summand $\iota_1 : (R/r)^q \xrightarrow{\sim} M/rM \oplus M'_1$. We construct by induction a sequence of R/r^n -modules M'_n and of isomorphisms $\iota_n : (R/r^n)^q \xrightarrow{\sim} M/r^n M \oplus M'_n$ such that each composition

$$M/r^{n+1}M \oplus M'_{n+1} \xrightarrow{\iota_{n+1}^{-1}} (R/r^{n+1})^q \rightarrow (R/r^n)^q \xrightarrow{\iota_n} M/r^n M \oplus M'_n$$

sends M'_{n+1} to M'_n and coincide with the reduction on $M/r^{n+1}M$.

Suppose that ι_n is constructed. Fix a lift $a_{n+1} : (R/r^{n+1})^q \rightarrow M/r^{n+1}M$ of the projection

$$a_n : (R/r^n)^q \xrightarrow{\iota_n} M/r^n M \oplus M'_n \rightarrow M/r^n M,$$

which is still surjective by Nakayama. By splitting this surjection thanks to the projectivity of $(M/r^{n+1}M)$, we obtain an isomorphism

$$j : (R/r^{n+1})^q \cong (M/r^{n+1}M) \oplus M'_{n+1}$$

where $M'_{n+1} = \text{Ker}(a_{n+1})$. The module M'_{n+1} is sent to M'_n by construction, and is even sent unto. Take $(m, m') \in (M/r^{n+1}M) \oplus M'_{n+1}$ sent to a fixed $m'_0 \in M'_n$. Because a_{n+1} lifts a_n , the element m belongs to $r^n M/r^{n+1}M$. Hence, its image in $(M/r^n M) \oplus M'_n$ is zero and m' is also sent to m'_0 .

By construction, we write the can write the composition

$$M/r^{n+1}M \subset M/r^{n+1}M \oplus M'_{n+1} \xrightarrow{j^{-1}} (R/(r^{n+1}))^q \rightarrow (R/(r^n))^q \xrightarrow{\iota_n} M/r^n M \oplus M'_n$$

as $(\bmod r^n, h)$.

By projectivity of $M/r^{n+1}M$, we are able to lift h to a map $H : M/r^{n+1}M \rightarrow M'_{n+1}$. The morphism

$$\iota_{n+1} : (R/r^{n+1})^q \xrightarrow{j} M/r^{n+1}M \oplus M'_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ -H & \text{Id} \end{pmatrix}} M/r^{n+1}M \oplus M'_{n+1}$$

is one lift we looked for.

Taking the limit of the ι_n , we obtain an isomorphism

$$\left(\varprojlim R/r^n R\right)^q \xrightarrow{\sim} \left(\varprojlim M/r^n M\right) \oplus \left(\varprojlim M'_n\right)$$

which is an expression of M as direct summand of a free R -module because R and M are both r -adically complete and separated. Thanks to r -adic completion of R , we have $r \in \text{Jac}(R)$. Hence, for each closed point $x \in \text{Spec}(R)$,

$$\kappa(x) \otimes_R M \cong \kappa(x) \otimes_{R/r} M/rM.$$

As we knew that M/rM is of constant rank and because M is locally free, M is also of constant rank. \square

Remark 2.4.3. One could also show that this is equivalent to M being finitely presented with finite projective (r, μ) -dévissage and r -adically separated.

We also notice that, for R noetherian, the condition on the r^∞ -torsion is automatic.

I do not know in general whether the condition is automatic for finitely presented R modules with finite projective (r, μ) -torsion when (R, r) is a dévissage setup. After quick manipulations, we realise the existence of a finitely presented module with unbounded r^∞ -torsion is equivalent to the existence of a finitely generated submodule $M \subset R^d$ such that the r -adic topology on R^d do not induce the r -adic topology on M . We also encountered this kind of issue in the topological section (see Proposition 2.5.5).

These finitely presented modules with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion also have nice behavior with respect to the Tor functor and nice (r, τ) -dévissage.

Lemma 2.4.4. *Let (R, r) be a dévissage setup. Let $N \geq 1$ and M be a R -module of r^N -torsion with finite projective (r, μ) -dévissage. Let P be a r -torsion-free R -module, we have*

$$\forall i \geq 1, \quad \text{Tor}_i^R(M, P) = \{0\}.$$

Proof. The r -torsion case: in this case, M is in particular a flat R/r -module. Use the Tor spectral sequence (cf. [Sta18, Tag 068F]) to obtain a convergent spectral sequence whose second page is

$$\text{Tor}_i^{R/r} \left(M, \text{Tor}_j^R(R/r, P) \right) \Rightarrow \text{Tor}_{i+j}^R(M, P).$$

Because M is flat, it degenerates with non zero terms lying at $i = 0$, which means that

$$\text{Tor}_\bullet^R(M, P) = \text{H}_\bullet \left(M \otimes_{R/r} \text{Tor}_\bullet^R(R/r, P) \right).$$

Use the projective resolution of R/r

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{r \times} R$$

to compute that $\mathrm{Tor}_i^R(R/r, P) = \{0\}$ for $i \geq 2$ and $\mathrm{Tor}_1^R(R/r, P) = P[r]$, which is zero because P is r -torsion-free.

General case: it is obtained by induction on N , and devissage by rM . \square

Proposition 2.4.5. *Let (R, r) be a dévissage setup.*

1. *For any finitely presented R -module M with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion, for any r -torsion-free R -module P , the group $\mathrm{Tor}_1^R(M, P)$ vanishes.*
2. *Any finitely presented R -module with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion has finite projective (r, τ) -dévissage.*

Proof. 1. Fix an expression $M = M_\infty \oplus M_{\mathrm{tors}}$ such that M_∞ is finite projective of constant rank over R and M_{tors} is of r^N -torsion with finite projective (r, μ) -dévissage. Let P be a r -torsion-free R -module. Thanks to Lemma 2.4.4, we have that $\mathrm{Tor}_1^R(M_{\mathrm{tors}}, P)$ vanishes. Moreover $\mathrm{Tor}_1^R(M_\infty, P)$ vanishes thanks to M_∞ 's flatness.

2. We first prove that for any R -module Q such that Q/rQ is finite projective as an R/r -module and any R/r -module L , we have

$$\mathrm{Ext}_R^2(Q, L) = \mathrm{Ext}_{R/r}^1(Q[r], L).$$

Remark that $\mathrm{Hom}_R(-, L) = \mathrm{Hom}_{R/r}(R/r \otimes_R -, L)$ and that the tensor product sends projective modules to projective modules. The Grothendieck spectral sequence (see [Sta18, Tag 015N]) produces a spectral sequence converging to $\mathrm{Ext}_R^\bullet(Q, L)$ whose second page is

$$E_2^{i,j} := \mathrm{Ext}_{R/r}^i(\mathrm{Tor}_j^R(R/r, Q), L).$$

Because R is r -torsion-free, $(\cdots \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{r} R)$ is a projective resolution of R/r ; it implies that $\mathrm{Tor}_j^R(R/r, Q) = 0$ for $j \geq 2$ and that

$$\mathrm{Tor}_0^R(R/r, Q) = Q/rQ \text{ and } \mathrm{Tor}_1^R(R/r, Q) = Q[r].$$

At this point, we use that Q/rQ is finite projective to deduce that $E_2^{i,j}$ is concentrated in degrees $(0, 0)$ and $\mathbb{Z} \times \{1\}$. Thus, the spectral sequence degenerates on the second page and we get our result.

Applying this with Q ranging over all subquotients in the (r, μ) -dévissage of M , we obtain

$$\forall n \geq 1, \forall L \in R/r\text{-Mod}, \mathrm{Ext}_R^2(r^n M / r^{n+1} M, L) = \mathrm{Ext}_{R/r}^1(r^n M / r^{n+1} M, L),$$

which vanishes thanks to the projectivity of the (r, μ) -dévissage. By long exact sequences of Ext_R^\bullet , we obtain

$$\forall n \geq 1, \forall L \in R/r\text{-Mod}, \quad \text{Ext}_R^2(M/r^n M, L) = \{0\}.$$

Using again our result for $Q = M/r^n M$, we obtain

$$\forall L \in R/r\text{-Mod}, \quad \text{Ext}_{R/r}^1((M/r^n M)[r], L) = \{0\},$$

i.e that $(M/r^n M)[r]$ is a projective R/r -module. Thanks to the exact sequence

$$0 \rightarrow (M/r^n M)[r] \rightarrow M/r^n M \xrightarrow{r \times} rM/r^n M \rightarrow 0$$

where the last two terms are finitely presented R -modules, we deduce that $(M/r^n M)[r]$ is a finite type R -module, then finite projective over R/r .

Pick N such that $r^N M/r^{N+1} M \xrightarrow[r \times]{\sim} r^{N+1} M/r^{N+2} M$ as in $i) \Rightarrow iii)$ of Theorem 2.4.1. Using from this theorem that M is r -adically separated, we deduce that $r^N M$ is torsion-free. It implies that $M[r] \rightarrow (M/r^{N+1} M)[r]$ is an injection, for which $r^N M/r^{N+1} M$ is a complement of the image. We showed that $M[r]$ is direct summand of a finite projective R/r -module of constant rank, with a complement of constant rank. Hence $M[r]$ is also finite projective of constant rank.

From M being complete and separated with finite projective (r, μ) -dévissage, we deduce the same properties for $r^n M$. Because the map

$$M[r^{n+1}] \xrightarrow{r^n \times} r^n M[r^{n+1}] = (r^n M)[r]$$

has $M[r^n]$ for kernel, the projectivity of $M[r^{n+1}]/M[r^n]$ is obtained from the projectivity of $r^n M$'s r -torsion.

□

Our second theorem is more restrictive. For a discrete valuation ring A with uniformiser a , the structure theorem for finitely generated modules over principal ideal domains decomposes such modules as a finite sum of a free module over A/a , a free module over A/a^2 , etc, and a free module over A . Fontaine's rings for classical (φ, Γ) -modules are indeed discrete valuation rings, but not their multivariable variants. As evoked in [Zá18b, Lemma 2.3], for his ring $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ with residual ring E_Δ

at p , it is not clear whether all finite projective module over E_Δ are free¹⁰. However, the zeroth algebraic K -group of E_Δ vanishes and I found out that it is sufficient to guarantee a similar decomposition for our modules with finite projective dévissage.

Lemma 2.4.6. *Let (R, r) be a dévissage setup.*

1. *Let $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$ and M be a projective R/r^n -module¹¹. For each integer $k < n$, the epimorphism*

$$M/rM \xrightarrow{r^k \times} r^k M/r^{k+1} M$$

is an isomorphism.

2. *Let $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$ and M be a projective R/r^n -module. For each integer $k < n$, we have*

$$M[r^k] = r^{n-k} M.$$

3. *For every stably free finite projective R/r -module M and $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$, there exists a unique up to isomorphism finite projective R/r^n -module $M_{(n)}$ such that $M_{(n)}/rM_{(n)} \cong M$. If M is of constant rank, then so is $M_{(n)}$.*

Proof. 1. Because R is r -torsion-free, this is true for $M = R$, hence for any free R/r^n -module. Moreover, each functor $M \mapsto r^k M/r^{k+1} M$ commutes to direct sums, which concludes for general projective modules.

2. Same reasoning using that both functors $M \mapsto M[r^k]$ and $M \mapsto r^{n-k} M$ commute to direct sums.

3. Let M be a finite projective R/r -module, which is stably free. Fix a presentation $M \oplus (R/r)^k = (R/r)^d$. The module M can be expressed as the kernel of the projection $\pi : (R/r)^d \twoheadrightarrow (R/r)^k$, which can easily be lifted. Choose a lift $\pi_{(n)} : (R/r^n)^d \twoheadrightarrow (R/r^n)^k$. The restriction-corestriction of $\pi_{(n)}$ fits in the following commutative diagram with exact rows:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (rR/r^n R)^d & \longrightarrow & (R/r^n)^d & \xrightarrow{\text{mod } r} & (R/r)^d \longrightarrow 0 \\ & & \text{restriction of } \pi_{(n)} \downarrow & & \pi_{(n)} \downarrow & & \pi \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (rR/r^n R)^k & \longrightarrow & (R/r^n)^k & \xrightarrow{\text{mod } r} & (R/r)^k \longrightarrow 0 \end{array}$$

The snake lemma then proves that $M_{(n)} := \text{Ker}(\pi_{(n)})$ surjects on M by reducing modulo r . Moreover it is finite projective as kernel of an epimorphism between finite projective modules. For any $n \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$, the rank of finite projective

¹⁰Browse [Če22], [BR83] and [Rao85] for more details about these problems. I thank K. Česnavičius for these references.

¹¹By convention $R/r^\infty := R$.

R/r^n -modules can be checked¹² on the reduction modulo r . Hence, we obtain that $M_{(n)}$ is of constant rank if M is also.

Take $M_{(n)}$ and $M'_{(n)}$ two lifts of M . By projectivity of $M_{(n)}$ applied to

$$M_{(n)} \rightarrow M_{(n)}/rM_{(n)} \xrightarrow[\iota]{\sim} M'_{(n)}/rM'_{(n)},$$

we lift it to a morphism $f : M_{(n)} \rightarrow M'_{(n)}$ such that $(f \bmod r) = \iota$. For each $k < n$, let f_k be the restriction-corestriction to $r^k M_{(n)}$ and $r^k M'_{(n)}$. Consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 M_{(n)} & \xrightarrow{\quad f \quad} & & & M'_{(n)} \\
 & \searrow & & & \swarrow \\
 & M_{(n)}/rM_{(n)} & \xrightarrow[\sim]{\quad \iota \quad} & & M'_{(n)}/rM'_{(n)} \\
 & \downarrow \wr \downarrow r^k \times & & & \downarrow \wr \downarrow r^k \times \\
 & r^k M_{(n)}/r^{k+1} M_{(n)} & & & r^k M'_{(n)}/r^{k+1} M'_{(n)} \\
 & \swarrow & & & \swarrow \\
 r^k M_{(n)} & \xrightarrow{\quad f_k \quad} & & & r^k M'_{(n)}
 \end{array}$$

$\downarrow r^k \times$ on the left, $\downarrow r^k \times$ on the right, $\downarrow r^k \times$ on the far left, $\downarrow r^k \times$ on the far right.

where the envelopping square commutes (check it, this is not by definition), and the three trapezes commute. Consider the remaining component. We invert its vertical arrows and want to check that it commutes; this can be done after precomposition by left vertical arrow (labelled as epimorphism) and then it's diagram chase using the commutations highlighted just before.

It proves that $(f_k \bmod r)$ identifies to ι . All $(f_k \bmod r)$ are isomorphisms so f is an isomorphism. \square

Lemma 2.4.7. *Let (R, r) be a dévissage setup. Let $n \geq k \geq 1$ be integers, let N be a finite projective R/r^n -module and M a finite projective R/r^k -module. The group $\text{Ext}_{R/r^n}^1(M, N)$ vanishes.*

Proof. We note that

$$\text{Hom}_{R/r^n}(M, -) = \text{Hom}_{R/r^k}(M, -[r^k]) = \text{Hom}_{R/r^k}\left(M, \text{Hom}_{R/r^n}(R/r^k, -)\right).$$

Moreover, the functor $\text{Hom}_{R/r^n}(R/r^k, -)$ sends injectives to injectives: we have bijections

$$\text{Hom}_{R/r^k}\left(-, \text{Hom}_{R/r^n}(R/r^k, I)\right) = \text{Hom}_{R/r^n}\left(R/r^k \otimes_{R/r^n} -, I\right)$$

¹²For $n = \infty$, consider that we can check the rank on closed points, on which r vanish because R is r -adically complete.

and the second expression underlines the vanishing on r^k -torsion complexes.

By Grothendieck spectral sequence, we obtain a converging spectral sequence whose second term is

$$E_2^{i,j} = \text{Ext}_{R/r^k}^i \left(M, \text{Ext}_{R/r^n}^j (R/r^k, N) \right) \Rightarrow \text{Ext}_{R/r^n}^{i+j} (M, N).$$

Using that R is r -torsion-free, we obtain a projective resolution of R/r^k

$$\dots \xrightarrow{r^k \times} R/r^n \xrightarrow{r^{n-k} \times} R/r^n \xrightarrow{r^k \times} R/r^n$$

which computes that

$$\text{Ext}_{R/r^n}^j (R/r^k, N) = \begin{cases} N[r^k] & \text{if } j = 0 \\ N[r^{n-k}]/r^k N & \text{if } j = 2l + 1 \\ N[r^k]/r^{n-k} N & \text{if } j = 2l + 2. \end{cases}$$

The second point of Lemma 2.4.6 says that these groups vanish for N projective and $j > 1$. The spectral sequence degenerates and we obtain that

$$\text{Ext}_{R/r^n}^1 (M, N) = \text{Ext}_{R/r^k}^1 (M, N[r^k])$$

which vanishes thanks to the projectivity of M . □

Theorem 2.4.2. *Let (R, r) be a dévissage setup such that $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$. Then the three conditions of Theorem 2.4.1 on a R -module M are also equivalent to*

iv) There exists $N \geq 1$ and an isomorphism

$$M \cong M_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} M_n$$

where M_∞ is a finite projective R -module of constant rank and each M_n is a finite projective R/r^n -module of constant rank.

Proof. iv) \rightarrow iii): fix a decomposition given by iv). We only need to prove that each M_n has finite projective (r, μ) -dévissage. By base change, M_n/rM_n is finite projective of constant rank over R/r . Moreover, the second point of Lemma 2.4.6 tells that $M_n/rM_n \xrightarrow{r^n \times} r^k M_n/r^{k+1} M_n$ are isomorphisms.

iii) \Rightarrow iv): as this direction is more difficult, we begin by an example. Consider the dévissage setting (\mathbb{Z}_p, p) and the \mathbb{Z}_p -module $M = \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{F}_p$. It has finite projective p -dévissage with

$$M/pM = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p^2 \text{ and } pM/p^2M = p\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p.$$

Moreover, the second term of M/pM is naturally seen as the kernel of $M/pM \xrightarrow{p \times} pM/p^2M$ or as $(M[p] + pM)/pM$. Nonetheless, there is no natural lift of $(M[p] + pM)/pM \subset M/pM$ to M , nor is there a natural embedding $\mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p \hookrightarrow M$. In this specific case, such lift and embedding always exist thanks to the structure of finite type \mathbb{Z}_p -modules. In general, we must work harder as the lifts we look for won't be given solely from the (r, μ) -dévissages.

This example gives a direction: each

$$r^n M / r^{n+1} M \xrightarrow{r \times} r^{n+1} M / r^{n+2} M$$

splits, giving us a (non canonical) decomposition of M/rM that we might want to lift. Moreover, if M is exactly r^{N+1} -torsion, the splitting of $r^N M / r^{N+1} M$ should lift to M_N (this can also be obtained by analysis).

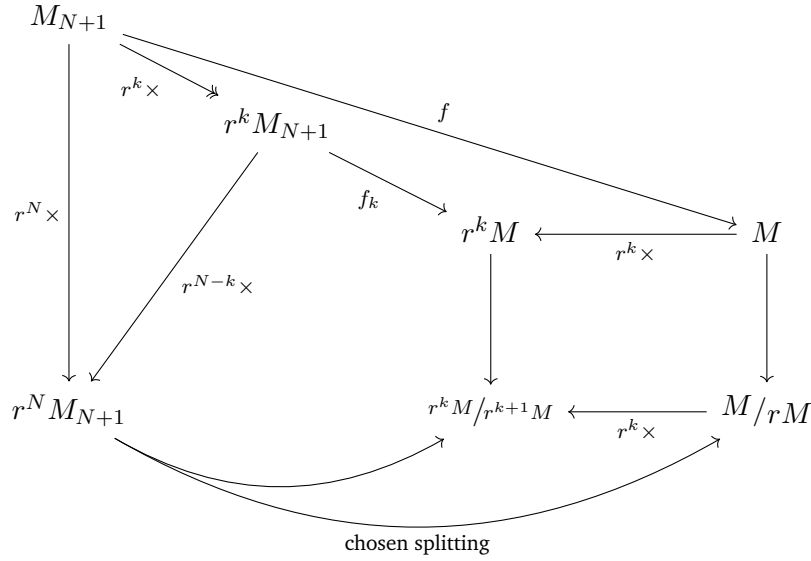
Let's begin the proof. We first decompose the torsion part. We In this case we work by induction on N such that M is r^N -torsion with finite projective (r, μ) -dévissage. For $N=1$, the module M is its first dévissage subquotient hence is finite projective of constant rank. Suppose that we have the result for some N and fix M of r^{N+1} -torsion. The last (possibly) non zero term of the (r, μ) -dévissage is $r^N M$ which is finite projective of constant rank over R/r . Because $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$, $r^N M$ is a stably free R/r -module. The third point of Lemma 2.4.6 allows to define $M_{N+1} := (r^N M)_{(N+1)}$. We also fix splittings of each arrow in

$$M/rM \xrightarrow{r \times} rM/r^2M \xrightarrow{r \times} \dots \xrightarrow{r \times} r^N M.$$

By the first point of Lemma 2.4.6, we have $r^N M_{N+1} \cong M_{N+1}/r^N M_{N+1} \cong r^N M$. By projectivity we can complete the following diagram with an arrow f

$$\begin{array}{ccc} M_{N+1} & \xrightarrow{\quad f \quad} & M \\ \downarrow r^N \times & & \downarrow \\ r^N M_{N+1} \cong r^N M & \xrightarrow{\text{chosen splitting}} & M/rM \end{array}$$

Because the kernel of $r^N \times$ on M_{N+1} is exactly rM_{N+1} (see the second point of Lemma 2.4.6), the map $(f \bmod r)$ identifies to the chosen splitting, hence is injective. Moreover, let $k \leq N$. The restriction-corestriction of f to $r^k M_{N+1}$ and $r^k M$, denoted by f_k , fits into the following diagram.



where the small bended arrow is the composition making the bottom triangle commutes; it is therefore a splitting of $r^k M/r^{k+1} M \rightarrow r^N M$. The square, the left and the bottom triangles commute for obvious reasons, the upper quadrilateral commutes (check it) and the envelop of the diagram commutes by construction of f . Determining whether the central quadrilateral commutes can be checked after precomposition by the two-headed arrow, then with careful use of the previously highlighted commutations. The restriction-corestriction f_k is therefore obtained using the same construction as f , but for $r^k M$ rather than M . For the similar reasons, the map $(f_k \bmod r)$ identifies to the chosen splitting of $r^k M/r^{k+1} M \rightarrow r^N M$ and is injective. Altogether, we obtain that f is injective. We have obtained an exact sequence

$$0 \rightarrow M_{N+1} \rightarrow M \rightarrow \text{Coker}(f) \rightarrow 0$$

which invites to look closer to this cokernel. First, the snake lemma applied to

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{N+1} & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & \text{Coker}(f) \longrightarrow 0 \\ & & r \times \downarrow & & r \times \downarrow & & r \times \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_{N+1} & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & \text{Coker}(f) \longrightarrow 0 \end{array}$$

illustrates that $\text{Coker}(f)/r\text{Coker}(f)$ is isomorphic to $\text{Coker}(f \bmod r)$ which is the cokernel of the chosen splitting. Hence this quotient is finite projective of constant rank over R/r . Similarly for $k \geq 1$, the quotient $r^k \text{Coker}(f)/r^{k+1} \text{Coker}(f)$ identifies to $\text{Coker}(f_k)/r\text{Coker}(f_k)$, then to the cokernel of the chosen splitting of $r^k M/r^{k+1} M \xrightarrow{r^{N-k} \times} r^N M$. It is also finite projective of constant rank and the mod-

ule $\text{Coker}(f)$ is of r^N -torsion with finite projective (r, μ) -dévissage. We apply the heredity hypothesis to obtain an isomorphism

$$\text{Coker}(f) \cong \bigoplus_{1 \leq n \leq N} M_n$$

with each M_n being finite projective of constant rank over R/r^n . Finally, the exact sequence

$$0 \rightarrow M_{N+1} \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{1 \leq n \leq N} M_n \rightarrow 0$$

splits because $\text{Ext}_{R/(r^{N+1})}^1(\bigoplus_{1 \leq n \leq N} M_n, M_{N+1})$ vanishes thanks to Lemma 2.4.7. \square

2.4.2 The category of \mathcal{S} -modules over R with projective r -dévissage

We add some monoid action. Fix a monoid \mathcal{S} for the rest of this subsection.

Definition 2.4.8. An \mathcal{S} -dévissage setup is a pair (R, r) where R is an \mathcal{S} -ring, where $r \in R$, such that (R, r) is a dévissage setup and that the element r verifies¹³

$$\forall s \in \mathcal{S}, \varphi_s(r)R = rR.$$

For an \mathcal{S} -dévissage setup (R, r) , the morphisms $(\varphi_s)_{s \in \mathcal{S}}$ restrict-corestrict to an \mathcal{S} -ring structure on R/r . The quotient map $R \rightarrow R/r$ is a morphism of \mathcal{S} -rings.

Definition 2.4.9. Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup. The category $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, called the *étale \mathcal{S} -modules over R with projective r -dévissage*, is the full subcategory of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ whose objects have an underlying R -module with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion.

Remark 2.4.10. The condition $\varphi_s(R) \in rR$ alone would be sufficient to define a structure of \mathcal{S} -ring on R/r . Here, we impose $\varphi_s(r)R = rR$ to transmit the \mathcal{S} -action from D to its two dévissages. Without this hypothesis, $\varphi_{s,D}$ sends $D[r]$ to $D[\varphi_s(r)]$ which might be a lot bigger. For similar reasons, even if $\varphi_s(R) \in rR$ alone implies that $\varphi_{s,D}$ restricts to $r^n D$, it might be zero modulo $r^{n+1} D$ and lose étaleness of the action.

Remark 2.4.11. In every application to Fontaine-type functors I can think of, the ring R will be a \mathcal{O}_K -algebra, r will be a uniformiser of \mathcal{O}_K and the φ_s will be \mathcal{O}_K -linear at best, semilinear with respect to some Galois action on K at worst. In any case, the condition $rR = \varphi_s(r)R$ is verified.

¹³As R is r -torsion free, it is equivalent to $\varphi_s(r)$ being associated with r for all $s \in \mathcal{S}$.

Our introduction of such dévissage setting aims to automate the "dévissage and passage to limit" steps of Fontaine equivalences. The r -adic separation and completeness of R are thus essential conditions on a dévissage setting for such strategy to make sense. This excludes for instance overconvergent (φ, Γ) -modules.

Lemma 2.4.12. *Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup and D be an object of $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.*

1. *For each r -torsion-free module P we have $\text{Tor}_1^R(D, P) = \{0\}$.*
2. *For each $n \geq 0$, the morphisms $(\varphi_{s,D})_{s \in \mathcal{S}}$ restrict-corestrict to $r^n D$. With this \mathcal{S} -action, $r^n D$ belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Quotienting gives a structure of object of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R/r)$ on each $r^n D/r^{n+1} D$.*
3. *For each $n \geq 0$, the morphisms $(\varphi_{s,D})_{s \in \mathcal{S}}$ restrict-corestrict to $D[r^n]$. With this \mathcal{S} -action, $D[r^n]$ belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Quotienting gives a structure of object of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R/r)$ on each $D[r^{n+1}]/D[r^n]$.*

Proof. 1. The vanishing of Tor_1^R only restates a part of Proposition 2.4.5.

2. Let $n \geq 0$. By Theorem 2.4.1, the R -module D is r -adically complete and separated, thus $r^n D$ is also. Properties of the (r, μ) -dévissage of $r^n D$ comes from studying dévissage of D . The Theorem 2.4.1 concludes for the conditions on the underlying R -module. The condition $\varphi_s(r)R = rR$ allows to identify $\varphi_{s,r^n D}^*$ to

$$\varphi_s^*(r^n D) \cong \varphi_s(r)^n \varphi_s^* D = r^n (\varphi_s^* D) \xrightarrow[\varphi_{s,D}^*]{\sim} r^n D.$$

Hence $r^n D$ is étale.

At the level of abelian groups, applying φ_s^* is tensoring with R viewed as R -module via φ_s . As R is $\varphi_s(r)$ -torsion-free, Lemma 2.4.4 proves the vanishing of $\text{Tor}_1^R(R_{\varphi_s}, r^n D/r^{n+1} D)$; the exact sequence defining the quotient $r^n D/r^{n+1} D$ stays exact after passing to φ_s^* . The five lemma concludes that $r^n D/r^{n+1} D$ is étale.

3. For the (r, τ) -dévissage, we give the argument for étaleness. Because $r^n D$ is still étale with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion, we can apply the Tor_1^R -vanishing to $r^n D$; the exact sequence

$$0 \rightarrow D[r^n] \rightarrow D \xrightarrow{r^n \times} r^n D \rightarrow 0$$

is still exact after passing to φ_s^* . Hence, $\varphi_{s,D}^*$ sends $\varphi_s^*(D[r^n]) = (\varphi_s^* D)[r^n]$ to $D[r^n]$. The five lemma concludes to the étaleness of $D[r^n]$. We study quotients as above. \square

Reciprocally, we can detect the étale property on the dévissage.

Lemma 2.4.13. *Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup. Let D be an object of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ such that the underlying R module is of finite presentation with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion. If each $r^n D / r^{n+1} D$ belongs to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R/r)$, then D belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.*

Proof. The first point of Proposition 2.4.5 makes φ_s^* and the formation of dévissages commute. It implies that the R -module $\varphi_s^* D$ is finitely presented with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion. So the source and target of $\varphi_{s,D}^*$ are both r -adically complete and separated; the fact that $\varphi_{s,D}^*$ is an isomorphism will be deduced from the fact that it is an isomorphism on each term of the (r, μ) -dévissage by dévissage and limit. \square

We now investigate the symmetric monoidal structure.

Proposition 2.4.14. *Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup. The closed symmetric monoidal structure on $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ verifies that*

1. *The full subcategory $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ of $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ is closed under the symmetric monoidal structure.*
2. *If $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$, this full subcategory is also closed under internal Hom.*

Proof. 1. Let D_1 and D_2 be objects of $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Proposition 2.2.8 already tells that $(D_2 \otimes_R D_2)$ is finitely presented. Let's analyse the (r, μ) -dévissage of $(D_1 \otimes_R D_2)$. Tensoring the exact sequence corresponding to $rD_2 \subset D_2$ by D_1 , we obtain an exact sequence

$$\text{Tor}_1^R(D_1/rD_1, D_2) \rightarrow rD_1 \otimes_R D_2 \rightarrow D_1 \otimes_R D_2 \quad (*2)$$

where the image of the last morphism is $r(D_1 \otimes_R D_2)$. As D_1/rD_1 is a finite projective R/r -module, pushing further the analysis of Tor at the beginning of Lemma 2.4.4 gives a identification

$$\text{Tor}_1^R(D_1/rD_1, D) \cong D_1/rD_1 \otimes_{R/r} D[r]$$

natural in D_1 and D .

We will compute the left connecting morphism of (*2). Consider the exact sequence

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{r \times} R \rightarrow R/r \rightarrow 0$$

and enhance it to an exact sequence of R -projective resolutions as follows

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\text{Id}} & R \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i_1} & R \oplus R & \xrightarrow{p_2} & R \longrightarrow 0 \\
& \downarrow \text{Id} & & \downarrow (-\text{Id}, r \times) & & \downarrow r \times & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{r \times} & R & \longrightarrow & R/r \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow (r \times) + \text{Id} & & \downarrow
\end{array}$$

To compute the connecting morphism, we tensor with D_2 , then apply the snake lemma from the kernel of the right middle-height map (which is $D_2[r]$) to the second-from-the-bottom left term (which is D_2). This morphism is merely the inclusion. Now fix $d_1 \in D_1$ and use the following morphism of exact sequences

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{r \times} & R & \longrightarrow & R/r \longrightarrow 0 \\
& & \times r d_1 \downarrow & & \times d_1 \downarrow & & \times d_1 \downarrow \\
0 & \longrightarrow & r D_1 & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D_1/r D_1 \longrightarrow 0
\end{array}$$

which gives us a commutative square with horizontal maps being connecting morphisms:

$$\begin{array}{ccc}
D_2[r] \cong \text{Tor}_1^R(R/r, D_2) & \longrightarrow & D_2 \\
d_1 \otimes - \downarrow & & (r d_1) \otimes - \downarrow \\
D_1/r D_1 \otimes_{R/r} D_2[r] \cong \text{Tor}_1^R(D_1/r D_1, D_2) & \longrightarrow & r D_1 \otimes_R D_2
\end{array}$$

Because the upper horizontal map always identifies with the inclusion, the connecting morphism we look for is

$$D_1/r D_1 \otimes_{R/r} D_2[r] \rightarrow r D_1 \otimes_R D_2, \quad d_1 \otimes d_2 \mapsto r d_1 \otimes d_2.$$

Hence, we obtain that

$$r(D_1 \otimes_R D_2) \cong r D_1 \otimes_R D_2/D_2[r].$$

As we only used the (r, μ) -dévissage of D_1 , we can apply the result to $r D_1$ and $D_2/D_2[r]$ to obtain

$$r^2(D_1 \otimes_R D_2) \cong r^2 D_2 \otimes_R D_2/D_2[r^2].$$

Applying recursivment and taking quotients shows that

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad & r^n(D_1 \otimes_R D_2) / r^{n+1}(D_1 \otimes_R D_2) \\ & \cong (r^n D_1 \otimes_R D_2 / D_2[r^n]) / (r^{n+1} D_1 \otimes_R D_2 / D_2[r^{n+1}]) \\ & \cong (r^n D_1 / r^{n+1} D_1) \otimes_{R/r} (D_2 / (r D_2 + D_2[r^n])) \end{aligned}$$

The first term of this tensor product is finite projective over R/r because D_1 belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. The second term is isomorphic to $r^n D_2 / r^{n+1} D_2$ as $(D_2[r^n] + r D_2) / r D_2$ is the kernel of $D_2 / r D_2 \xrightarrow{r^n \times} r^n D_2 / r^{n+1} D_2$. Their tensor product is still finite projective.

We finally use *iii* of Theorem 2.4.1. As tensor product of two finite projective modules, $(D_1)_\infty \otimes_R (D_2)_\infty$ is finite projective, a fortiori r -torsion free. The other terms $(D_1)_{\text{tors}} \otimes_R (D_2)_\infty$, $(D_1)_\infty \otimes_R (D_2)_{\text{tors}}$ and $(D_1)_{\text{tors}} \otimes_R (D_2)_{\text{tors}}$ are of $r^{N_1+N_2}$ -torsion, with D_1 (resp. D_2) being of r^{N_1} - (resp. r^{N_2} -) torsion.

2. Let D and D' be objects of $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Theorem 2.4.2 allows to fix two decompositions

$$D = D_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} D_n \quad \text{and} \quad D' = D'_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} D'_n.$$

We obtain that

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(D, D') &= \text{Hom}_R(D_\infty, D'_\infty) \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} \text{Hom}_R(D_\infty, D'_n) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{1 \leq i, j \leq N} \text{Hom}_R(D_i, D'_j) \\ &= \text{Hom}_R(D_\infty, D'_\infty) \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} \text{Hom}_{R/r^n}(D_\infty / r^n D_\infty, D'_n) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{1 \leq i, j \leq N} \text{Hom}_{R/r^{\min(i,j)}}(D_i / r^{\min(i,j)} D_j, D'_j[r^{\min(i,j)}]) \\ &\cong \text{Hom}_R(D_\infty, D'_\infty) \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} \text{Hom}_{R/r^n}(D_\infty / r^n D_\infty, D'_n) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{1 \leq i, j \leq N} \text{Hom}_{R/r^{\min(i,j)}}(D_i / r^{\min(i,j)} D_j, D'_j / r^{\min(i,j)} D'_j) \end{aligned}$$

where the last isomorphism uses the two first points of Lemma 2.4.6. Each module in the Hom sets is finite projective over the corresponding ring. First, this implies that $\underline{\text{Hom}}_R(D, D')$ is finitely presented with finite projective (r, μ) -dévissage (apply the fourth point of Lemma 2.2.9 multiple times then Theorem 2.4.2). Then, we remark that the previous isomorphism upgrades to an isomorphism of \mathcal{S} -modules for $\underline{\text{Hom}}$. Each term on the right is étale (use the

first point of Proposition 2.3.3 on each $R \rightarrow R/r^n$) then the second point of Proposition 2.2.13 applied for all the rings R/r^n concludes that $\underline{\mathrm{Hom}}_R(D_1, D_2)$ is étale. \square

2.4.3 Preservation by the previous operations

We now study the preservation of such conditions by base change. Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup. Let a be a morphism of \mathcal{S} -rings $a : R \rightarrow T$ such that the pair $(T, a(r))$ is a dévissage setup. It is automatically an \mathcal{S} -dévissage setup¹⁴.

Proposition 2.4.15. *In the setup above, the functor Ex sends $\mathrm{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\mathrm{Mod}_{a(r)\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$. It is strong symmetric monoidal.*

Proof. The second point of Proposition 2.3.3 already tells that $\mathrm{Ex}(D)$ belongs to $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$. Let $n \geq 0$. The R -module $D/r^n D$ is of r^n -torsion with finite projective (r, μ) -dévissage and the ring T is $a(r)$ -torsion-free; Lemma 2.4.4 implies that $\mathrm{Tor}_1^R(D/r^n D, T) = \{0\}$, which translates into the injectivity of

$$T \otimes_R r^n D \rightarrow T \otimes_R D$$

deduced from the inclusion. Its image is $a(r)^n (T \otimes_R D)$. The obtained isomorphism

$$T \otimes_R r^n D \xrightarrow{\sim} a(r)^n (T \otimes_R D)$$

being compatible with inclusions as n varies, we deduce that

$$a(r)^n (T \otimes_R D) / a(r)^{n+1} (T \otimes_R D) \cong T \otimes_R r^n D / r^{n+1} D = T / a(r) \otimes_{R/r} r^n D / r^{n+1} D.$$

By Proposition 2.3.3, we conclude that $\mathrm{Ex}(D)$ has finite projective $(a(r), \mu)$ -dévissage.

Using that $\mathrm{Tor}_1^R(r^n D, T) = \{0\}$, we obtain that $(T \otimes_R D)[a(r)^n] = (T \otimes_R D[r^n])$ hence $\mathrm{Ex}(D)$ has bounded $a(r)^\infty$ -torsion. \square

Proposition 2.4.16. *In the setup above, suppose that $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$. Then, the functor Ex is closed monoidal from $\mathcal{M}\mathrm{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.*

Proof. By mimicking the proof of the third point of Proposition 2.3.3, we only need to prove that $i_{D, D', a}$ from Lemma 2.2.9 is an isomorphism as soon as D is of finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion. As usual, we decompose

$$D \cong D_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} D_i.$$

¹⁴For all s , φ_s and r being associated imply that $\varphi_s(a(r))$ and $a(r)$ also are.

Hence, we obtain that

$$\mathrm{Hom}_R(D, D') = \mathrm{Hom}_R(D_\infty, D') \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Hom}_{R/r^n}(D_i, D'[r^n]).$$

Applying Lemma 2.2.9 for each term varying the ring gives the desired isomorphism. \square

We move towards the preservation through invariants. Let (R, r) be an \mathcal{S} -dévissage setup. As in section 2.3.2, we fix a normal submonoid $\mathcal{S}' \triangleleft \mathcal{S}$ and impose that $r \in R^{\mathcal{S}'}$. The pair $(R^{\mathcal{S}'}, r)$ is automatically an \mathcal{S}/\mathcal{S}' -dévissage setup¹⁵. We might refer concisely to these data as an invariant dévissage setup.

Proposition 2.4.17. *In this setup suppose that:*

- *The inclusion $R^{\mathcal{S}'} \subset R$ is faithfully flat.*
- *We have¹⁶*

$$\forall t \in (R^{\mathcal{S}'}/r), \exists n \geq 1, (R^{\mathcal{S}'}/r)[t^\infty] = (R^{\mathcal{S}'}/r)[t^n].$$

- *The map $R^{\mathcal{S}'}/r \rightarrow (R/r)^{\mathcal{S}'}$ is an isomorphism¹⁷.*

Let D be in $\mathrm{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\mathrm{ét}}(\mathcal{S}, R)$ such that the comparison morphism

$$R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} \mathrm{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism. Then $\mathrm{Inv}(D)$ belongs to $\mathrm{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\mathrm{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{\mathcal{S}'})$.

Proof. The Proposition 2.3.7 already tells us that $\mathrm{Inv}(D)$ belongs to $\mathrm{Mod}^{\mathrm{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{\mathcal{S}'})$.

Let $n \geq 0$. Consider the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} r^n(R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} \mathrm{Inv}(D)) & \xrightarrow{\sim} & & r^n D & \\ \downarrow & \nearrow & & \downarrow & \\ R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} r^n \mathrm{Inv}(D) & \longrightarrow & R \otimes_{R^{\mathcal{S}'}} \mathrm{Inv}(D) & \xrightarrow{\sim} & D \end{array}$$

\cap

¹⁵Any subring of R containing r , in particular $R^{\mathcal{S}'}$, is r -adically separated and r -torsion-free. As \mathcal{S}' acts r -adically continuously on R , $R^{\mathcal{S}'}$ is closed for the r -adic topology on R , hence r -adically complete. Finally, because R is r -torsion free, $\varphi_s(r)$ and r being associated in R and invariants imply that they are in $R^{\mathcal{S}'}$.

¹⁶This happens as soon as $R^{\mathcal{S}'}/r$ is reduced. All applications will satisfy this stronger condition.

¹⁷Because R is r -torsion-free, this is equivalent to the Eilenberg-Mac Lane cohomological group $H^1(\mathcal{S}', R)$ being r -torsion-free.

where the horizontal isomorphisms are the isomorphism of comparison and its multiplication by r^n . Thanks to the upper commutative triangle, the plain diagonal morphism is surjective. Moreover, the flatness of $R^{S'} \subset R$ implies that the down left horizontal morphism is injective, hence so is the plain diagonal one ; this last one is therefore an isomorphism. Its compatibility with inclusions as n varies gives an isomorphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ as follows:

$$R \otimes_{R^{S'}} r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D) \xrightarrow{\sim} r^n D / r^{n+1} D$$

which identifies to an isomorphism in $\text{Mod}(\mathcal{S}, R/r)$:

$$j : R/r \otimes_{R^{S'}/r} r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D) \xrightarrow{\sim} r^n D / r^{n+1} D.$$

The comparison morphism for $r^n D / r^{n+1} D$ and R/r appears horizontally in the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} R/r \otimes_{R^{S'}/r} \text{Inv}(r^n D / r^{n+1} D) & \xrightarrow{\quad} & r^n D / r^{n+1} D \\ \wr \uparrow \text{Id}_R \otimes \text{Inv}(j) & & \uparrow \\ R/r \otimes_{R^{S'}/(r)} \text{Inv}\left(R/r \otimes_{R^{S'}/r} r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D)\right) & & \\ \uparrow \text{Id}_R \otimes c & & \nearrow \sim \\ R/r \otimes_{R^{S'}/r} r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D) & & j \end{array}$$

where c is the morphism given at Proposition 2.3.10. We will apply this proposition after quick remarks.

The morphism $R^{S'}/r \hookrightarrow R/r$ is faithfully flat. Hence, the condition on $R^{S'}/r$ can be lifted to R/r . Finally, the isomorphism $R^{S'}/r \rightarrow (R/r)^{S'}$ finishes to prove that the ring R/r verifies the conditions of Proposition 2.3.10.

Thanks to faithful flatness, j underlines that $r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D)$ is finite projective over $R^{S'}/r$. We apply Proposition 2.3.10 to $r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D)$ and R/r , obtaining that the morphism c is an isomorphism. Now, the comparison morphism for $r^n D / r^{n+1} D$ is an isomorphism and we use Proposition 2.3.7 with R/r and $r^n D / r^{n+1} D$ to conclude that $\text{Inv}(D)$ is of finite projective (r, μ) -dévissage. It is of bounded r^∞ -torsion as any subobject of D is. \square

This proposition uses the comparison isomorphism for R -modules to deduce them for all terms of the dévissage. The following corollary explains how to lift the comparison isomorphisms. We use that Eilenberg-Mac Lane cohomology of monoids for which [CL24, Section 3.1] provides a short introduction.

Theorem 2.4.3. *In the invariant dévissage setup, suppose that:*

- *The inclusion¹⁸ $R^{S'}/r \subset R/r$ is faithfully flat.*
- *We have $H^1(\mathcal{S}', R/r) = \{0\}$.*
- *For every object D of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R/r)$ the comparison morphism*

$$R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism.

Then, the comparison morphism is an isomorphism for every object of $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and the functor Inv sends $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/S', R^{S'})$ and is closed strong symmetric monoidal.

Proof. Our first instinct is to say roughly "by dévissage"¹⁹. If Theorem 2.4.1 proved that objects in $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ are r -adically complete and separated, nothing guarantees that the left term of their comparison morphism is. We walk a tight path to prove that comparison morphisms are isomorphisms for every term of the (r, μ) -dévissage then concludes for D itself.

Remark that we have dropped two hypothesis compared to Proposition 2.4.17. The fact that $R^{S'}/r \rightarrow (R/r)^{S'}$ is an isomorphism is proved on the way. The hypothesis on the torsion only aimed to recover the isomorphism

$$r^n \text{Inv}(D) / r^{n+1} \text{Inv}(D) \xrightarrow{\sim} \text{Inv}(r^n D / r^{n+1} D)$$

from the comparison isomorphism for D . Here it is first recovered differently.

Step 1: we prove that for an r -adically complete and separated \mathcal{S}' -module D over R , we have

$$H^1(\mathcal{S}', D) \cong \varprojlim H^1(\mathcal{S}', D/r^n D).$$

Monoid cohomology is computed by cochain complexes; so we have exact sequences

$$0 \rightarrow (D/r^n)/(D/r^{n+1})^{S'} \xrightarrow{d^0} Z^1(\mathcal{S}', D/r^n D) \rightarrow H^1(\mathcal{S}', D/r^n D) \rightarrow 0.$$

The first term is isomorphic to $Q_n = D/\{d \mid \forall s, \varphi_{s,D}(d) - d \in r^n D\}$. Passing to the limit, we obtain an exact sequence

$$0 \rightarrow D/D^{S'} \xrightarrow{d^0} Z^1(\mathcal{S}', D) \rightarrow \varprojlim_n H^1(\mathcal{S}', D/r^n D) \rightarrow R^1 \varprojlim_n Q_n.$$

¹⁸It is an injection because R is r -torsion-free.

¹⁹Which is the take of Fontaine in the proof of [Fon07, Propositions 1.2.4 and 1.2.6] : "Le cas des représentations de p -torsion s'en déduit par dévissage et le cas général par passage à la limite".

The transition maps between the Q_n 's are surjective: it is Mittag-Leffler and the $R^1 \lim$ vanishes.

Step 2: we prove that every finite projective étale \mathcal{S} -module over R/r is \mathcal{S}' -acyclic.

There is a dévissage of each R/r^n with subquotients isomorphic to R/r as \mathcal{S}' -abelian groups. With the cohomological hypothesis, dévissage tells that each $H^1(\mathcal{S}', R/r^n)$ vanishes. Thanks to step 1, we deduce that $H^1(\mathcal{S}', R)$ vanishes.

At this point, remark at this point that the hypothesis " R is r -torsion-free" and the cohomological one give that $R^{\mathcal{S}'}/r \cong (R/r)^{\mathcal{S}'}$. Hence, the inclusion $(R/r)^{\mathcal{S}'} \subset R/r$ is faithfully flat.

Now take a finite projective étale \mathcal{S} -module D over R/r . Via the comparison morphism, it is isomorphic to

$$R/r \otimes_{(R/r)^{\mathcal{S}'}} \text{Inv}(D)$$

and Proposition 2.3.7 shows that $\text{Inv}(D)$ is finite projective over $(R/r)^{\mathcal{S}'}$. Fix a presentation

$$\text{Inv}(D) \oplus P = (R^{\mathcal{S}'}/r)^k.$$

It produces a presentation

$$D \oplus \left(R/r \otimes_{R^{\mathcal{S}'}/r} P \right) \cong \left(R/r \otimes_{R^{\mathcal{S}'}/r} \text{Inv}(D) \right) \oplus \left(R/r \otimes_{R^{\mathcal{S}'}/r} P \right) \cong (R/r)^k$$

as \mathcal{S}' -module over R/r . Monoid cohomology commutes to direct sums, hence the vanishing of $H^1(\mathcal{S}', R)$ implies the vanishing of $H^1(\mathcal{S}', D)$.

Step 3: go back to D belonging to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Recall that by Lemma 2.4.12, the terms of the two dévissages belong to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R/r)$, so their comparison morphisms are isomorphisms. Step 2 proves that every $r^n D/r^{n+1} D$ is \mathcal{S}' -acyclic. Moreover D is of finite presentation hence complete and separated by Theorem 2.4.1. Then, dévissage and step 1 imply the vanishing of $H^1(\mathcal{S}', D)$. Using Lemma 2.4.12, we obtain this vanishing for each $r^n D$ and each $D[r^n]$.

Step 4: the \mathcal{S}' -acyclicity of $D[r^n]$ used on the exact sequence

$$0 \rightarrow D[r^n] \rightarrow D \xrightarrow{r^\times} r^n D \rightarrow 0$$

implies that $r^n \text{Inv}(D) \rightarrow \text{Inv}(r^n D)$ is an isomorphism. The \mathcal{S}' -acyclicity of $r^{n+1} D$, used on the exact sequence

$$0 \rightarrow r^{n+1} D \rightarrow r^n D \rightarrow r^n D/r^{n+1} D \rightarrow 0$$

implies that $\text{Inv}(r^n D)/\text{Inv}(r^{n+1} D) \rightarrow \text{Inv}(r^n D/r^{n+1} D)$ is an isomorphism. Combined, they exhibit an isomorphism of S' -modules over $R^{S'}/r$ between $r^n \text{Inv}(D)/r^{n+1} \text{Inv}(D)$ and $\text{Inv}(r^n D/r^{n+1} D)$.

The comparison isomorphism for $r^n D/r^{n+1} D$ descends finite projectivity to the $(R/r)^{S'}$ -module $\text{Inv}(r^n D/r^{n+1} D)$. The isomorphism with $r^n \text{Inv}(D)/r^{n+1} \text{Inv}(D)$ concludes that $\text{Inv}(D)$ has finite projective (r, μ) -dévissage. Moreover, D being r -adically complete and separated implies that $\text{Inv}(D)$ is too. We can apply Theorem 2.4.1 to show that $\text{Inv}(D)$ is finitely presented. Hence, $R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D)$ is finitely presented, therefore complete and separated by Theorem 2.4.1.

Step 5: generalising the previous step, we could obtain isomorphisms

$$\forall n, k \geq 0, \quad r^n(R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D))/r^{n+k}(R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D)) \cong R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(r^n D/r^{n+k} D)$$

compatible with reduction and multiplication. We can therefore use dévissage from the comparison isomorphisms for each $r^n D/r^{n+1} D$ to obtain the comparison morphism for D is an isomorphism modulo r^n for each $n \geq 1$. Step 4 proved that the left side of the comparison morphism for D is r -adically complete and separated, and we already new that the right side D , is complete and separated. Thus, it is an isomorphism.

Thanks to Proposition 2.3.7, we know that each $\text{Inv}(r^n D/r^{n+1} D)$ belongs to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S/S', R^{S'}/r)$, hence Step 4 implies that each $r^n \text{Inv}(D)/r^{n+1} \text{Inv}(D)$ belongs to the same subcategory. Then Lemma 2.4.13 concludes that $\text{Inv}(D)$ belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(S/S', R^{S'}/r)$.

Step 6: it remains to show that the functor is closed strong symmetric monoidal. The required isomorphisms have complete and separated $R^{S'}$ -modules as sources and targets. Hence, it suffices to prove that the induced morphisms between their (r, μ) -dévissages are isomorphisms. For this, use the identifications of the devissage of invariants proved above, the strategy of Corollary 2.3.8 and Proposition 2.3.9 and the fully faithfulness of $R^{S'}/r \subset R/r$. \square

Remark 2.4.18. Combining Proposition 2.4.15 and Theorem 2.4.3 says that the condition on r -dévissage is preserved by a Fontaine-type functor. When the ring of coefficients R on the (φ, Γ) -module side verifies $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$, the Theorem 2.4.2 implies that our considered (φ, Γ) -modules have underlying modules according to the *iv*) condition. I want to emphasize that this condition is not a priori preserved by a Fontaine-type functor. Let's consider Fontaine case : even if finite type \mathbb{Z}_p -representations have such decomposition as \mathbb{Z}_p -modules, as well as their base change to $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$, preserving this decomposition through taking of invariants (i.e. by Galois descent) would require such decomposition to be $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -invariant.

Fix a non trivial character $\chi : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}_p$. Define

$$V := (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) e_1 \oplus \mathbb{F}_p e_2$$

with \mathbb{Z}_p -linear Galois action given by

$$\begin{aligned}\sigma \cdot e_1 &= e_1 + \chi(\sigma) e_2 \\ \sigma \cdot e_2 &= p\chi(\sigma) e_1 + e_2\end{aligned}$$

The only stable submodule of $V[p]$ is $V[p] \cap pV$ which forbids a $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ -invariant decomposition. Worst, no submodule isomorphic to $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ is stable by the Galois action. To see more similar examples (even for multivariable variants) and computation of the associated (multivariable) (φ, Γ) -modules, see sections 3.4 6.2 and [Mar24].

Proposition 2.4.19. *In the invariant dévissage setup, suppose that:*

- $H^1(S', R/r) = \{0\}$.
- $\forall t \in R^{S'}/r, \exists n \geq 1, (R/r)[t^\infty] = (R/r)[t^n]$.

Let D be a finitely presented $R^{S'}$ -module with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion. Then, the map

$$c : D \rightarrow \text{Inv}(R \otimes_{R^{S'}} D)$$

is an isomorphism of $R^{S'}$ -modules. If D was an S/S' -module over $R^{S'}$, then c is an isomorphism of S/S' -modules over $R^{S'}$.

Proof. As R is r -torsion free, the same arguments than in Lemma 2.4.13 show that $R \otimes_{R^{S'}} -$ commutes with the formation of the (r, μ) -dévissage; hence $(R \otimes_{R^{S'}} D)$ is a finitely presented R -module with finite projective (r, μ) -dévissage and bounded r^∞ -torsion. By Theorem 2.4.1, it is r -adically complete and separated and so is $\text{Inv}(R \otimes_{R^{S'}} D)$. We obtained that the source and target of c are r -adically complete and separated hence it is an isomorphism as soon as it is on each term of the (r, μ) -dévissage.

Like in Theorem 2.5.1's proof, we show that for every finitely presented $R^{S'}$ -module with finite projective (r, μ) -dévissage $(R \otimes_{R^{S'}} D)$ is S' -acyclic. Hence, the functor $\text{Inv}(R \otimes_{R^{S'}} -)$ commutes to the formation of (r, μ) -dévissage. The isomorphisms for the (r, μ) -dévissage then follow from Proposition 2.3.10. \square

Remark 2.4.20. Coinduction for finite subtle index submonoid $S < \mathcal{T}$ should behave well for modules with projective r -dévissage. If (R, r) is a dévissage setup with $r \in R^S$, $(\text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R), f_r)$ is a dévissage setup, where f_r is constant equal to

r . Thanks to the Tor vanishings for R -modules D with projective (r, μ) -dévissage and R being r -torsion free, we should recover equivalents of Lemma 2.3.14 and Proposition 2.3.19.

2.5 Adding topology

As mentioned in the introduction, number theory considers *continuous* Galois representations. For finite dimensional \mathbb{F}_p -linear representations of $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ continuity traditionally means smoothness, for finite type \mathbb{Z}_p -representations this means continuity for the p -adic topology. These properties should impose topological conditions on Fontaine-type functors' essential image. Therefore, this chapter aims to input topological data in our categories of \mathcal{S} -modules over R .

2.5.1 The initial topology

Our first idea might be to define a general category of topological R -modules and even go to the condensed world, but looking back to representations we notice that finite dimensional \mathbb{F}_p -linear (resp. \mathbb{Z}_p -linear) representations are always endowed with a specific topology: the discrete (resp. the p -adic) one. There is indeed an intrinsic topological structure on finite type modules (see [Sch17, Section 2.2]).

Lemma 2.5.1. *Let M be a finite type R -module and fix a quotient map $\pi : R^k \twoheadrightarrow M$. The quotient topology makes M a topological R -module. Moreover, every R -linear map f from M to a topological R -module N is continuous for this topology.*

Proof. Quotient topology from a topological R -module is a topological R -module structure; we will give a bit of the argument to familiarise the reader. We check that the external multiplication is continuous. Quotient topology allows to check this after pre-composition by $\text{Id}_R \times \pi$. The following diagram is commutative, where the lower map is the multiplication on R^k :

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ \text{Id}_R \times \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ R \times R^k & \longrightarrow & R^k \end{array}$$

The composition via the down-right corner is continuous and commutativity of the diagram concludes.

Now, let f be a R -linear map from M to a topological R -module N . Universal property of quotient topology allows to check continuity on $(f \circ \pi)$. Let (e_i) be the canonical basis of R^k and $n_i = (f \circ \pi)(e_i)$. The following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
\pi \uparrow & & \uparrow \Sigma \\
R^k & \xrightarrow{(r_i) \mapsto (r_i n_i)} & N^k
\end{array}$$

Seeing $(f \circ \pi)$ as a composition via down-right corner highlights its continuity. \square

Definition/Proposition 2.5.2. For any finite type R -module M , the quotient topology given by a quotient map doesn't depend on the chosen quotient map; we call it the *initial topology*.

The functor from finite type R -modules to topological R -modules endowing them with initial topology is fully faithful.

Proof. Applying Lemma 2.5.1 to Id_N with two quotient topologies proves that Id_N is an homeomorphism: the topology doesn't depend on the quotient map. The same lemma shows that any R -linear map between two finite type R -modules is continuous if we see them with their weak topology. This is exactly the fully faithfulness assertion. \square

This topology also behaves very well with respect to quotients.

Lemma 2.5.3. For any surjection $p : M \twoheadrightarrow N$ of finite type R -modules, the quotient topology on N coming from the initial topology on M is the initial topology on N .

Proof. For any quotient map $\pi : R^k \twoheadrightarrow M$, we have that $(p \circ \pi)$ is a quotient map for N and endows it with initial topology. But as it factorises by π , the map $(p \circ \pi)$ induces the quotient topology associated to p . \square

Lemma 2.5.4. Let M be a finite projective R -module. Take a presentation of M as $M \oplus M' = R^k$. The topology induced as subset of R^k is the initial topology. In particular, it doesn't depend on the chosen presentation.

Proof. The Lemma 2.5.1 already establishes that the initial topology is the finest. The projection $\pi : R^k \rightarrow M$ coming from the presentation induces the initial topology. An open for the initial topology is $U \subseteq M$ such that $\pi^{-1}(U) = U \oplus M'$ is open in R^k . For such open, we have $(U \oplus M') \cap M = U$ hence U is open for the induced topology. \square

In general, this initial topology for finitely generated modules doesn't behave well with respect to subobjects. Nonetheless, we can use [Hen14] to highlight a case where it does.

Proposition 2.5.5. *Let R be a topological ring which is complete Hausdorff, noetherian, has a sequence of units converging to zero, a countable basis of neighborhoods of zero, and verifies that the topological nilpotent elements form a neighborhood of zero. Let $N \subset M$ be an (automatically finitely generated) sub- R -module of a finitely generated R -module. Then, the initial topology on M induces the initial topology on N .*

Proof. In this setup, we use [Hen14, Theorem 2.12] saying that there exists a unique structure of topological R -module on M which makes it complete Hausdorff with countable basis of neighborhoods of zero. Remark that the proof of existence in *loc. cit.* shows that this topology is precisely the initial topology. Hence, it only remains to show that the induced topology is complete Hausdorff with countable basis of neighborhoods of zero. As the initial topology on M is Hausdorff, the induced topology on N is also. The intersection of N with a countable basis of neighborhoods of zero also provides one for the induced topology. Finally, if $(n_k)_{k \geq 0}$ is Cauchy for the induced topology, it precisely says that it is Cauchy in M , hence converges in M . As M is noetherian, [Hen14, Proposition 2.11] tells that N is closed, which finishes to prove its completeness. \square

Remark 2.5.6. Beware that, even though uniqueness holds in [Hen14, Theorem 2.12] without the noetherianity assumption, it doesn't allow to drop this hypothesis in the previous proposition because the two topologies that we want to compare might fail to verify the requirements of the aforementioned theorem. On one hand, the initial topology on a finitely generated module is complete but might not be Hausdorff. On the other hand, the induced topology is Hausdorff but might fail to be complete²⁰.

2.5.2 Topological \mathcal{S} -modules over R

In this subsection, we fix \mathcal{S} a topological monoid.

Definition 2.5.7. We define the category \mathcal{S} -Ring of *topological \mathcal{S} -rings*. Its objects are the \mathcal{S} -rings R endowed with a topological ring structure such that the underlying map

$$\mathcal{S} \times R \rightarrow R, (s, r) \mapsto \varphi_s(r)$$

is continuous. Its morphisms are the continuous morphisms of \mathcal{S} -rings.

In this subsection, we now fix a topological \mathcal{S} -ring R .

²⁰Indeed, I don't see why its completion should still be finitely generated.

Definition 2.5.8. The category of *topological étale \mathcal{S} -modules over R* , denoted by $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, is the full subcategory of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ whose objects have an action map

$$\mathcal{S} \times D \rightarrow D, \quad (s, d) \mapsto \varphi_{s,D}(d)$$

continuous for the initial topology on D .

The category of topological étale projective \mathcal{S} -modules over R , denoted by $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, is intersection of the full subcategories of topological étale and étale projective \mathcal{S} -modules over R .

Example 2.5.9. If \mathcal{S} has discrete topology, the continuity condition is equivalent to saying that all $\varphi_{s,D}$ are continuous endomorphisms. But maps between finite type R -modules, which are semilinear with respect to a continuous endomorphism of R , are continuous. Hence, continuity is automatic for \mathcal{S} discrete.

Remark 2.5.10. The previous continuity condition is the one implicitly used²¹ to treat continuity in literature.

It seems difficult to give a simple condition for continuity in general because the initial topology allows to test the continuity after replacement of the module by a free one only at the source. It happens that the initial topology behaves even better on finite projective modules. We illustrates both phenomena.

Lemma 2.5.11. *Let D be an object of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and $\pi : R^k \rightarrow D$ a quotient map. The module D belongs to $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ if and only if each map*

$$\mathcal{S} \rightarrow D, \quad s \mapsto \varphi_{s,D}(\pi(e_i))$$

is continuous.

Proof. Assume each stated composition is continuous. We check continuity of the action map on

$$\mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{S}} \times \pi} \mathcal{S} \times D \rightarrow D,$$

which happens to also decompose as

$$\mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{S}} \times \text{Id}_{R^k}} \mathcal{S} \times (\mathcal{S} \times R)^k \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{S}} \times [(s,r) \mapsto \varphi_s(r)]^k} \mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{(s,r_i) \mapsto \sum r_i \varphi_{s,D}(\pi(e_i))} D$$

hence is continuous. □

²¹Or explicitly stated in [Sch17].

Lemma 2.5.12. Suppose that D belongs to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. For each $s \in \mathcal{S}$, the semilinear map

$$R^k \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{\varphi_{s,D}} D \hookrightarrow R^k$$

produces a matrix $M_{s,D}$. The module D belongs to $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ if and only if the map $s \mapsto M_{s,D}$ is continuous for the product topology on matrices.

Proof. Because the initial topology on D is simultaneously the quotient topology from π and the induced topology from the inclusion, the continuity of $\mathcal{S} \times D \rightarrow D$ can be tested on:

$$\mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{S}} \times \pi} \mathcal{S} \times D \rightarrow D \xrightarrow{i} R^k.$$

If $s \mapsto M_{s,D}$ is continuous, this composition also decomposes as

$$\mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{S}} \times \text{Id}_{R^k}} \mathcal{S} \times (\mathcal{S} \times R)^k \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{S}} \times [(s,r) \mapsto \varphi_s(r)]^k} \mathcal{S} \times R^k \xrightarrow{(s,v) \mapsto M_{s,D}(v)} R^k$$

hence is continuous.

Conversely, fix $d_i = \pi(e_i)$. The map sending s to the (i, j) -th coefficient of $M_{s,D}$ is the composition

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{S}} \times d_i} \mathcal{S} \times D \rightarrow D \xrightarrow{\iota} R^k \xrightarrow{p_j} R$$

which is continuous. □

Proposition 2.5.13. The full subcategory $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ of $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is a monoidal subcategory. The same is true for $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Proof. We check the stability by tensor product. Let D_1 and D_2 be objects of $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. The third point of Proposition 2.2.8 already proves that their tensor product is étale. It remains to check continuity. Fix two quotient maps $\pi_l : R^{k_l} \twoheadrightarrow D_l$. Because $(\pi_1(e_{1,i}) \otimes \pi_2(e_{2,j}))_{(i,j) \in \llbracket 1, k_1 \rrbracket \times \llbracket 1, k_2 \rrbracket}$ generates $D_1 \otimes_R D_2$, Lemma 2.5.11 allows to check continuity on each

$$\mathcal{S} \rightarrow D_1 \otimes_R D_2, \quad s \mapsto \varphi_{s,D_1}(\pi_1(e_{1,i})) \otimes \varphi_{s,D_2}(\pi_2(e_{2,j})).$$

They decompose as

$$\mathcal{S} \xrightarrow{s \mapsto (\varphi_{s,D_1}(\pi_1(e_{1,i})), \varphi_{s,D_2}(\pi_2(e_{2,j})))} D_1 \times D_2 \xrightarrow{(d_1, d_2) \mapsto d_1 \otimes d_2} D_1 \otimes_R D_2.$$

The first morphism is continuous because D_1 and D_2 both belong to $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Continuity of the second one can be checked after pre-composition by each π_l 's. It happens that in the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
R^{k_1} \times R^{k_2} & \xrightarrow{(r_i, r_j) \mapsto (r_i r_j)} & R^{k_1 k_2} \\
\pi_1 \times \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \otimes \pi_2 \\
D_1 \times D_2 & \longrightarrow & D_1 \otimes_R D_2
\end{array}$$

the composition via the upper-right corner emphasises continuity.

The ring R is an object of $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ precisely because it is a topological \mathcal{S} -ring.

The projective version uses the fourth point of Proposition 2.2.8 rather than the third. \square

Finding an adjoint is harder and require additional conditions on the topological ring. We begin by a general technical lemma.

Lemma 2.5.14. *Let A be a topological ring. Let M be a finite projective A -module with its initial topology. Let (m_1, \dots, m_k) be a generating family of M .*

1. *For every neighbourhood U of 0 in A^k , there exists a neighbourhood V of 0 in M such that*

$$\forall m \in V, \exists (a_i) \in U, m = \sum_{i=1}^k a_i m_i.$$

2. *Suppose that A^\times is open in A . There exists a neighbourhood of (m_1, \dots, m_k) in M^k such that every family in this neighbourhood is generating.*
3. *Suppose that one of the following is verified*

- a) *The subset A^\times is open in A and the inverse map is continuous on A^\times .*
- b) *The topological ring A has a neighbourhood U of 0 which is stable by sum, product, and whose family of multiplications²² $U^{n \times}$ is final among neighbourhoods of 0.*

Then, we can improve the first result. For every neighbourhood U of 0 in A^k , there exists a neighbourhood W of (m_1, \dots, m_k) in M^k and a neighbourhood V of 0 in D such that

$$\forall d \in V, \forall (m'_i) \in W \text{ s.t. } (m'_i) \text{ is generating, } \exists (a_i) \in U, d = \sum a_i m'_i.$$

In case a), we can drop the condition "(m'_i) is generating".

These results can be rephrased as "small neighbourhoods of 0 in M have elements expressed uniformly with small coordinates in the family (m_i) (resp. in all close enough families)".

²²Here, for a subset X in a ring A , call the family of multiplication $X^{n \times}$ the subgroup generated by $\{x_1 \dots x_n \mid (x_i) \in X^n\}$.

Proof. 1. We can reformulate the result by saying that

$$p : A^k \rightarrow M, (a_i) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i m_i$$

is open. This quotient map is indeed open because the initial topology on M is the associated quotient topology.

2. The group $\mathrm{GL}_k(A)$ is open in $M_k(A)$ as the inverse image of A^\times by the determinant. Let (U_1, \dots, U_k) be neighbourhoods of the canonical basis of A^k such that the open $\prod U_i$ of $A^{k^2} \cong M_k(A)$ is contained in $\mathrm{GL}_k(A)$. Because p is open, there exist opens (V_1, \dots, V_k) of M such that

$$\forall j, \forall v \in V_j, \exists (a_{i,j})_i \in U_j, m = \sum a_{i,j} m_i.$$

The open $\prod V_j$ is suitable: all its families are image by p of families in $\prod U_j$ which are all basis of A^k .

3. First treat the case where A^\times is open with continuous inverse map. There, invertible matrices form an open of $M_k(A)$ with continuous inverse map. Let U be a neighbourhood of 0 in A^k . By continuity of

$$\mathrm{GL}_k(A) \times A^k \rightarrow A^k, (M, v) \mapsto M^{-1}v,$$

there exists a neighbourhood of identity $W_{\mathrm{mat}} \subset \mathrm{GL}_k(A)$ and a neighbourhood U' of 0 in A^k contained in the inverse image of U . Looking closer the previous paragraph, we already established that there exists a neighbourhood W of (m_1, \dots, m_k) in M^k such that

$$\forall (m'_i) \in W, \exists M \in W_{\mathrm{mat}}, m'_i = \sum M_{i,j} m_j.$$

Moreover, there exists a neighbourhood V of 0 in M such that every element of V can be expressed on the family (m_i) with coordinates in U' . For $d \in V$, choose $a_i \in U'$ such that $d = \sum_i a_i m_i$. We have

$$d = \sum_j \left(\sum_i a_i (M^{-1})_{i,j} \right) m_j = \sum_j (M^{-1}(a_i)_i)_j m_j$$

and the coordinates belong to U by construction.

Move on to the case where A is a Huber ring. Fix a ring of definition A_0 and an ideal of definition I . It is sufficient to prove the result for $U = (I^n)^k$. Let V be a neighbourhood of 0 in M that the first point of this lemma furnishes

for $(I^n)^k$ and (m_i) . Set $W = \prod_i (m_i + V)$ which is a neighbourhood of (m_i) in M^k . For $(m'_i) \in W$ and $d \in V$, we begin by finding $(a_i) \in (I^n)^k$ such that

$$d = \sum_i a_i m_i = \sum_i a_i m'_i + \sum_i a_i (m_i - m'_i).$$

Because each $(m_i - m'_i)$ belongs to V , we find $(a_{j,i}) \in (I^n)^{k^2}$ such that

$$\begin{aligned} d &= \sum_i a_i m'_i + \sum_i \left(\sum_j a_j a_{j,i} \right) m_i \\ &= \sum_i \left(a_i + \sum_j a_j a_{j,i} \right) m'_i + \sum_i \left(\sum_j a_j a_{j,i} \right) (m_i - m'_i). \end{aligned}$$

By repeating the operation, one finds two families $(a_{i,l}) \in (I^n)^k$ and $(s_{i,l}) \in (I^{nl})^k$ satisfying

$$d = \sum_i a_{i,l} m'_i + \sum_i s_{i,l} (m_i - m'_i).$$

The sequel $[\sum_i s_{i,l} (m_i - m'_i)]_l$ converges to zero; then the first point of this lemma for (m'_i) tells that for l big enough, there exists $(a_{i,\infty}) \in (I^n)^k$ such that

$$\sum_i s_{i,l} (m_i - m'_i) = \sum_i a_{i,\infty} m'_i.$$

This concludes. □

Remark 2.5.15. Conditions of the third point are both verified by almost all the rings we use for (φ, Γ) -modules. If A is a complete Huber ring, it verifies the first condition. If A is a Huber ring, the second condition is also verified by any ideal of definition.

Even if the proof using the first condition is less convoluted, the second condition seems easier to obtain because our rings are systematically constructed as Huber pairs even if they are not domains, nor complete (e.g. the ring E_{Δ}^{sep} in Definition 5.1.6 with the weak topology as in Definition 6.1.2). The formulation of the second condition might also seems abstruse compared to saying that A is Huber. It allows the colimit topology of 5.1.2 to verify the condition while not being Huber.

We come back to the setup of a topological S -ring R .

Proposition 2.5.16. *When the condition of Lemma 2.5.14's third point is satisfied by R , the full subcategory $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$ of $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, R)$ is stable by internal Hom.*

Thus, the symmetric monoidal structure of Proposition 2.5.13 is closed.

Proof. To prove that $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ is topological étale projective (étale projective is already established), we begin²³ by proving that the initial topology on $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ is the pointwise convergence topology for the initial topology on D_2 (i.e. induced by the product topology on map from D_1 to D_2). Let $D_i \oplus D'_i = R^{k_i}$ be presentations of the D_i 's. The R -module $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ is direct summand of the free module $\text{Hom}_R(R^{k_1}, R^{k_2})$ as

$$\text{Hom}_R(D_1, D_2) = \{f \in \text{Hom}_R(R^{k_1}, R^{k_2}) \mid D'_1 \subset \text{Ker}(f) \text{ and } \text{Im}(f) \subset D_2\}.$$

The initial topology on $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ is henceforth obtained from this presentation. It happens that the topology on the free module $\text{Hom}_R(R^{k_1}, R^{k_2}) \cong R^{k_1 k_2}$ is the pointwise convergence; in addition, the initial topology on D_2 is induced from R^{k_2} so the initial topology on $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ is the pointwise convergence topology. To show that $\underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)$ is topological, it remains to show that

$$\forall d \in D_1, \mathcal{S} \times \text{Hom}_R(D_1, D_2) \rightarrow D_2, (s, f) \mapsto \varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f)(d) \text{ is continuous.}$$

Denote by (d_i) the components in D_1 of the canonical basis of R^{k_1} . Fixing an expression $d = \sum_i r_i \varphi_{s, D_1}(d_i)$, we already computed that

$$\varphi_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(f) \left(\sum_i r_i \varphi_{s, D_1}(d_i) \right) = \sum_i r_i \varphi_{s, D_2}(f(d_i)).$$

Let (s, f) be a pair and U_2 an open neighbourhood of (s, f) 's image in D_2 . Let U be a neighbourhood of 0 in R^{k_1} and $(\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)$ a open neighbourhood (s, f) such that

$$\forall (t_i, s', g) \in U \times \mathcal{W} \times W_2, \sum_i (r_i + t_i) \varphi_{s', D_2}(g(d_i)) \in U_2.$$

This is possible because D_2 belongs to $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and the initial topology on the internal Hom is the pointwise topology. Thanks to D_2 's étaleness, the family $(\varphi_{s, D_1}(d_i))_i$ is generating and the third point of Lemma 2.5.14 constructs specific neighbourhoods V of 0 in D_2 and W of $(\varphi_{s, D_1}(d_i))_i$ in D^k . Finally, fix $\mathcal{W}'_1 \subseteq \mathcal{W}_1$ such that

$$\forall s \in \mathcal{W}'_1, \sum_i r_i [\varphi_{s, D_1}(d_i) - \varphi_{s', D_1}(d_i)] \in V \text{ and } (\varphi_{s', D_1}(d_i))_i \in W,$$

²³It seems possible to explicitly determine $\text{M}_{s, \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}$ but the subtleties would stay the same, however hidden under proliferation of indexes.

thanks to the continuity of \mathcal{S} -action. For every $(s', g) \in \mathcal{W}'_1 \times W_2$, we have

$$d = \sum_i r_i \varphi_{s', D_1}(d_i) + \sum_i r_i [\varphi_{s, D_1}(d_i) - \varphi_{s', D_1}(d_i)]$$

whose second half can be re-expressed as $(\sum_i t_i \varphi_{s', D_1}(d_i))$ for some $(t_i)_i \in U$. Thus,

$$\varphi_{s', \underline{\text{Hom}}_R(D_1, D_2)}(g)(d) = \sum_i (r_i + t_i) \varphi_{s', D_2}(g(d_i))$$

which belongs to U_2 . □

We move on to dévissage setups. Preserving continuity happens to be subtle. In Fontaine's original setup, the exact sequences of $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ -modules or $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules like

$$0 \rightarrow pD \rightarrow D \rightarrow D/pD \rightarrow 0$$

appearing while doing dévissage on (φ, Γ) -modules are strict for both the p -adic topology and the initial topology coming from the weak topology. However for this second topology, it relies on the structure theorem for finite type modules over a discrete valuation ring. The strategy in the general case is less obvious. Worse, as we said in Remark 2.5.6, taking invariants might not respect the initial topology in general.

Fix a dévissage setup (R, r) and a structure of topological \mathcal{S} -ring on R such that $\forall s \in \mathcal{S}, \varphi_s(r)R = rR$. The restrictions-corestrictions of φ_s make R/r belong to $\mathcal{S}\text{-Ring}$.

Definition 2.5.17. The category $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is the intersection of the full subcategories $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Proposition 2.5.18. Suppose that the condition of Lemma 2.5.14's third point is verified by R . Suppose in addition that $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$. The subcategory $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ is stable by internal Hom.

Proof. First consider that both R^\times being open with continuous inverse map and R being Huber imply the analogous condition on each R/r^n . Then, consider the decomposition of $\text{Hom}_R(D_1, D_2)$ given in the proof of Proposition 2.4.14's second point and use Proposition 2.5.16 on each one. □

Remark 2.5.19. As R is r -adically complete, R^\times is automatically open with continuous inverse map for the r -adic topology. Even for coarser topologies, completeness greatly simplifies the proof of openness.

2.5.3 Preservation by the previous operations

This chapter will end by studying how these topological constructions interact with our previous operations and variations. Let $a : R \rightarrow T$ be a morphism of topological \mathcal{S} -rings.

Proposition 2.5.20. *The functor Ex defined in section 2.3.1 sends $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$. It also sends $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$ and is strong symmetric monoidal.*

When the condition of Proposition 2.5.16's third point is satisfied by R , the image of Ex is closed under $\underline{\text{Hom}}$ and Ex naturally commutes to $\underline{\text{Hom}}$.

Proof. The first point of Proposition 2.3.3 already establishes that Ex sends $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\text{Mod}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$ and $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$. Only topological conditions remain.

Fix $D \in \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ and a quotient map $\pi : R^k \rightarrow D$. The family $(1 \otimes \pi(e_i))$ is generating in $(T \otimes_R D)$, hence Lemma 2.5.11 reduces continuity to checking that each

$$\mathcal{S} \rightarrow T \otimes_R D, \quad s \mapsto 1 \otimes \varphi_{s,D}(\pi(e_i))$$

is continuous. These maps decompose as

$$\mathcal{S} \xrightarrow{s \mapsto \varphi_{s,D}(\pi(e_i))} D \xrightarrow{d \mapsto 1 \otimes d} T \otimes_R D$$

where the first map is continuous because D is topological. Continuity of the second can be checked after pre-composition by π . Hence, we look at the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} R^k & \xrightarrow{\Pi^a} & T^k \\ \pi \downarrow & & \text{Id}_T \otimes \pi \downarrow \\ D & \longrightarrow & T \otimes_R D \end{array}$$

whose path via the upper-right corner emphasises the continuity.

Results on the (closed) symmetric monoidal structure are deduced from the results on $\text{Mod}_{\text{proj}}^{\text{ét}}$. □

Add the datum of a normal submonoid \mathcal{S}' of \mathcal{S} and endow the quotient monoid \mathcal{S}/\mathcal{S}' with the quotient topology²⁴. It becomes a topological monoid. The ring $R^{\mathcal{S}'}$ endowed with the induced topology from R belongs to $\mathcal{S}/\mathcal{S}'\text{-Ring}$. The inclusion $R^{\mathcal{S}'} \subset R$ is a morphism of topological \mathcal{S} -rings.

²⁴See Exemple A.1.6.

Proposition 2.5.21. *Let D belongs to $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Suppose that $R^{S'} \subset R$ is faithfully flat and that the comparison morphism*

$$R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism. Then $\text{Inv}(D)$ is an object of $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{S'})$.

Suppose in addition that R is complete Hausdorff with a countable basis of neighborhoods of zero. Suppose that $R^{S'}$ is complete noetherian, has a sequence of units converging to zero, verifies that the topological nilpotent elements form a neighborhood of zero. Then, the same result is correct for $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

Proof. Thanks to Proposition 2.3.7, we already know that $\text{Inv}(D)$ belongs to $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{S'})$. Fix a presentation of $\text{Inv}(D)$ as direct summand of a finite free $R^{S'}$ -module. If we base change this presentation to R , the comparison isomorphism identifies it as a presentation of D as direct summand of a finite free R -module. Therefore, the induced topology on $\text{Inv}(D)$ from the initial topology on D is the initial topology. The continuity condition follows directly from the continuity on D .

Let's consider the other case. The same strategy reduces the claim to showing that the initial topology $\text{Inv}(D)$ is induced from the initial topology on D . As the topology on R is Hausdorff with countable basis of neighborhoods of zero, the same is true for $R^{S'}$ which is equipped with the induced topology. We can therefore apply [Hen14, Theorem 2.12] to $R^{S'}$ -module and we only need to show that the induced topology is complete Hausdorff with a countable basis of neighborhoods of zero to conclude. As the initial topology on D is Hausdorff with a countable basis of neighborhoods of zero, the same is true for the induced topology on $\text{Inv}(D)$. If $(d_k)_{k \geq 0}$ is a Cauchy sequence in $\text{Inv}(D)$ for the induced topology, then it is in D . This sequence converges into D . We concludes by noticing that the continuity of the action of \mathcal{S}' on D implies that $\text{Inv}(D)$ is closed in D . \square

We do not treat general coinduction²⁵. To keep things easy, we impose conditions that are verified in this thesis's framework, though I don't claim that they are optimal. Suppose that \mathcal{S} is a submonoid of a bigger topological monoid \mathcal{T} , with induced topology. The coinduction of a ring will be endowed with the limit topology seeing coinduction as a big equaliser.

²⁵We could define a continuous version of coinduction, which would only contain continuous function from \mathcal{T} to the topological space (resp. ring, resp. module). This would have the desired adjunction property and need the space (resp. the ring) to have a continuous action of \mathcal{S} so as to have a chance to get more elements than \mathbb{Z} -valued functions. In suitable settings, we could endow the coinduction with compact-open topology and unravel our propositions. However, such a general setting didn't occur in my work.

Lemma 2.5.22. 1. The limit topology on the coinduction $\text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R)$ is the pointwise convergence on functions.

2. Suppose that for every $t \in \mathcal{T}$ and \mathcal{U} open in \mathcal{S} , the set $(\mathcal{U}t)$ is open²⁶ (in particular \mathcal{S} is open in \mathcal{T}), then $\text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R)$ with limit topology is a topological \mathcal{T} -ring.

Proof. 1. The limit is indexed by a poset with minimal vertices indexed by \mathcal{T} . Because the transition maps are expressed as some of the continuous maps φ_s , the limit topology is the induced topology from the product over \mathcal{T} . It is the pointwise convergence of functions.

2. Thanks to the first point, we only need to prove that for every $t_0 \in \mathcal{T}$, the map

$$\mathcal{T} \times \text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R) \rightarrow R, (t, f) \mapsto (t \cdot f)(t_0) = f(t_0 t)$$

is continuous. Let (t_1, f_1) belongs to the source and W be a neighbourhood of $f_1(t_0 t_1)$ in R . By continuity of the \mathcal{S} -action on R , there exists a neighbourhood $(\mathcal{U} \times V)$ of $(e_{\mathcal{S}}, f_1(t_0 t_1))$ in $(\mathcal{S} \times R)$ whose image lies in W . Thanks to hypothesis $\mathcal{U}t_0 t_1$ is a neighbourhood of $t_0 t_1$ in \mathcal{T} , thus continuity of \mathcal{T} 's law produces a neighbourhood \mathcal{V} of t_1 in \mathcal{T} such that $t_0 \mathcal{V} \subset \mathcal{U}t_0 t_1$. Then,

$$\forall (t, f) \in \mathcal{V} \times \{f \mid f(t_0 t_1) \in V\}, \exists s \in \mathcal{S}, f(t_0 t') = \varphi_s(f(t_0 t_1))$$

hence belongs to W . □

Proposition 2.5.23. Suppose that for every $t \in \mathcal{T}$ and \mathcal{U} open in \mathcal{S} , the set $(\mathcal{U}t)$ is open and that \mathcal{S} is of finite subtle index in \mathcal{T} . Then, the essential image of

$$\text{Coind}_S^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{T}, \text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R))$$

contains $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{T}, \text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R))$.

Proof. The topology on $\text{Coind}_S^{\mathcal{T}}(R)$ being the pointwise convergence topology, the evaluation at the identity of \mathcal{T} is a continuous \mathcal{S} -ring morphism. Then the proof is the same as in 2.3.19, using the isomorphism of Lemma 2.3.18 and the fact that Ex preserves continuity which is Proposition 2.5.20. □

We now take into consideration the variants about dévissage tackled in section 2.4. Fix a morphism $a : R \rightarrow T$ of topological \mathcal{S} -rings and suppose that both (R, r) and $(T, a(r))$ are dévissage setups.

²⁶This is not implied by \mathcal{S} being open: it is wrong for $M_n(\mathbb{R})$ seen as a submonoid of itself.

Proposition 2.5.24. *The functor Ex sends $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ to the full subcategory $\mathcal{M}\text{od}_{a(r)\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, T)$. It is strong symmetric monoidal.*

If the conditions of Proposition 2.5.18 are verified by R , its image is stable by internal Hom and naturally commutes the formation of internal Hom .

Proof. Combine Propositions 2.4.15 and 2.5.20. □

We add the datum of a normal submonoid \mathcal{S}' and suppose that $r \in R^{\mathcal{S}'}$. To adapt Corollary 2.5.1 to our topological setting, it turns out that we need to be a little more subtle about the categories we consider²⁷. Precisely, we want to allow the action of the normal submonoid \mathcal{S}' to be continuous for another better behaved topology, so as to analyse the comparison morphism with respect to this topology, then transfer continuity with respect to another. In addition, as we did not obtain a preservation of continuity for étale modules by Inv , we put ourselves in a setup where we can use Theorem 2.4.2.

Definition 2.5.25. Let (R, r) be a dévissage setup and \mathcal{T}' be a ring topology on R . We say that \mathcal{T}' has *good r -dévissages properties* if for all finitely presented R -module D with finite projective (r, μ) -dévissage, the initial topology on the R -module D induces the initial topology on the R -module rD and on the R/r -module $D[r]$.

Definition 2.5.26. Let (R, r) be a dévissage setup. Let \mathcal{S} be a topological monoid and add a structure of \mathcal{S} -ring on R . Fix a topology \mathcal{T} on R making the \mathcal{S} -ring structure a topological \mathcal{S} -ring structure. Let \mathcal{S}' be a normal submonoid (with induced topology) and \mathcal{T}' be a topology on R enhancing it to a topological \mathcal{S}' -ring. We suppose that $r \in R^{\mathcal{S}'}$ as before Theorem 2.5.27.

We define $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$ as the full subcategory of $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ for the topology \mathcal{T} on R formed by objects D such that the forgetful functor to $\text{Mod}(\mathcal{S}', R)$ sends D into $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}', R)$ for the topology \mathcal{T}' on R .

Proposition 2.5.27. *In the setup above, suppose in addition that:*

- *The map $R^{\mathcal{S}'} / r \rightarrow R/r$ is faithfully flat*
- *The map $R^{\mathcal{S}'} / r \hookrightarrow (R/r)^{\mathcal{S}'}$ is an isomorphism²⁸.*
- *We have either $K_0(R^{\mathcal{S}'} / r) = \mathbb{Z}$ or the following setup. The ring R is complete Hausdorff with a countable basis of neighborhoods of zero and the ring $R^{\mathcal{S}'}$ is complete noetherian, has a sequence of units converging to zero, verifies that the topological nilpotent elements form a neighborhood of zero.*

²⁷see Remark 3.3.4 to understand how $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{S}', R/r)$ might not vanish for the only reasonable topology making the \mathcal{S} -action continuous.

²⁸This is true for instance as soon as $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{S}', R)$ is r -torsion-free for any topology coarser than the r -adic. Here we already see that the properties for the topology \mathcal{T} comes without any cost.

Let D be an object of $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, \mathcal{S}', R)$. If the comparison morphism

$$R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism, then $\text{Inv}(D)$ belongs to $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{S'})$.

Proof. Proposition 2.4.17 tells that $\text{Inv}(D)$ belongs to $\text{Mod}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}/\mathcal{S}', R^{S'})$. Continuity remains to prove.

Suppose proved that the initial topology on $\text{Inv}(D)$ is induced by the inclusion into D with initial topology. Take (d_i) a generating family of $\text{Inv}(D)$. Combining Lemma 2.5.11 and this assumption, continuity of the action can be checked on each

$$\mathcal{S}/\mathcal{S}' \xrightarrow{s\mathcal{S}' \mapsto \varphi_s(d_i)} \text{Inv}(D) \rightarrow D,$$

which are continuous thanks to continuity on D .

Suppose first that $K_0(R^{S'}/r) = \mathbb{Z}$ to prove the topological assumption. Thanks to Theorem 2.4.2, we have a decomposition

$$\text{Inv}(D) = D'_\infty \oplus \bigoplus_{1 \leq n \leq N} D'_n$$

which translates thanks to the isomorphism of comparison into the identification of $\text{Inv}(D) \subset D$ as the direct sum of $R \otimes_{R^{S'}} D'_\infty$ and each $(R/r^n) \otimes_{R^{S'}/r^n} D'_n$. The inclusion $R^{S'} \subseteq R$ induces by definition the topology on $R^{S'}$. Moreover, on D'_n (resp. $R \otimes_{R^{S'}} D'_n$) the initial topology as finite type $R^{S'}$ -module (resp R -module) and finite type $R^{S'}/r^n$ -module (resp R/r^n -module) coincide²⁹. This shows that the induced topology on $\text{Inv}(D)$ is the initial one.

In the other topological situation, we combine the results of Propositions 2.4.17 and 2.5.21. \square

In our general setting, we use Eilenberg-Mac Lane cohomology of monoids for topological monoids, which I mainly saw defined for prodiscrete monoids and modules (see for instance [KV22, §2]). The properties we use in this most general setting are studied in Appendix A.

Theorem 2.5.1. *In the setup of Definition 2.5.25, suppose that:*

- The map $R^{S'}/r \rightarrow R/r$ is faithfully flat.
- We have either $K_0(R^{S'}/r) = \mathbb{Z}$ or the following setup : the ring R is complete Hausdorff with a countable basis of neighborhoods of zero for \mathcal{T} and the ring

²⁹Topology on R/r^n is the quotient topology and a generating family as an R/r^n -module is also generating as an R -module.

$R^{S'}$ is complete noetherian, has a sequence of units converging to zero, verifies that the topological nilpotent elements form a neighborhood of zero.

- The topology \mathcal{T}' is coarser than the r -adic topology and has good r -dévissages properties.
- We have $H_{\text{cont}}^1(S', R/r) = \{0\}$.
- For every D in $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(S, S', R/r)$ the comparison morphism

$$R \otimes_{R^{S'}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

is an isomorphism.

Then, the comparison morphism is an isomorphism for objects of $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(S, S', R)$ and the functor Inv sends $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(S, S', R)$ to $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(S/S', R^{S'})$ and is strong symmetric monoidal. It is closed monoidal as soon as R^\times is open with continuous inverse map or if R is a Huber ring with ideal of definition generated by elements of $R^{S'}$.

Proof. Follow closely Theorem 2.4.3 to prove that for every object D of $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(S, S', R)$, the comparison morphism is an isomorphism. Remark that the step 1 works for continuous cohomology: because \mathcal{T}' is a ring topology, coarser than the r -adic topology, each r -adically complete and separated finite type module D satisfies

$$D \cong \varprojlim D/r^n D$$

in the category of topological groups, equipping D with the initial topology and each term of the limit with quotient topology. For step 2, remark that the decomposition $D \oplus (R/r \otimes_{R^{S'}/r} P = (R/r)^k$ is a decomposition as topological S -abelian groups and use Lemma A.2.2. Remark that the good r -dévissages properties imply that all considered exact sequences in steps 3 and 4 are strict exact sequence of topological abelian groups, hence we can use Proposition A.2.3. Then use Proposition 2.5.27 for the topological S -ring R with \mathcal{T} . The fact that it is strong symmetric monoidal, closed in some case, doesn't require any new idea. \square

Example 2.5.28. Although we stated things for an abstract topology \mathcal{T}' , one major example is to use the r -adic topology as \mathcal{T}' for which the initial topology on any finitely generated module is the r -adic one. For this topology, any finitely generated R -module D induces the r -adic topology on rD . For this topology, the p -adic topology induces the discrete topology on $D[r]$ for any R -module D with bounded r^∞ -torsion. Thus, the r -adic topology has good r -dévissages properties thanks to Theorem 2.4.1.

Another setting would make \mathcal{T}' have good r -dévissages properties: if $K_0(R/r) = \mathbb{Z}$ and if the induced topology on rR from R is the one given by the isomorphism $R \xrightarrow{r \times} rR$. Even though this sometimes shows that \mathcal{T} also has good r -dévissages properties, considering \mathcal{T}' could still be crucial to guarantee the cohomological condition.

Finally, if R is noetherian complete Hausdorff, with countable basis of neighborhoods of zero for \mathcal{T}' , a sequence of units converging to zero and the topological nilpotents elements being a neighborhood of zero, then \mathcal{T}' automatically has good r -dévissage property. For this, combine the results of Propositions 2.4.5 and 2.5.5.

L'équivalence de Fontaine, version Lubin-Tate

3.1 Modules formels de Lubin-Tate

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ une extension finie. Nous donnons ici les résultats essentiels de la construction des lois de groupes formels de Lubin-Tate et de l'extension abélienne associée. Pour une exposition plus détaillée aboutissant à la théorie du corps de classes local, le lecteur ou la lectrice pourra se référer à [Yos06]. Nous fixons pour cette partie une uniformisante π de K et nous notons q le cardinal de son corps résiduel.

Définition 3.1.1. Un polynôme de Lubin-Tate est un polynôme $f \in \mathcal{O}_K[T]$ (de degré q) unitaire tel que

$$f(T) \equiv T^q + \pi T \pmod{(\pi T^2)}.$$

Exemple 3.1.2. Pour $K = \mathbb{Q}_p$ et $\pi = p$, le polynôme de Lubin-Tate $(1 + T)^p - 1$ est souvent bien pratique.

Pour K général, le choix canonique reste de prendre $f = T^q + \pi T$.

Nous fixons pour la suite un polynôme de Lubin-Tate f .

Proposition 3.1.3. *Il existe une unique série entière $+_{\text{LT},f} \in \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]]$ telle que*

$$T_1 +_{\text{LT}} T_2 \equiv T_1 + T_2 \pmod{(T_1, T_2)^2} \text{ et } f(T_1 +_{\text{LT},f} T_2) = f(T_1) +_{\text{LT},f} f(T_2).$$

Cette série est "associative et commutative" au sens où

$$(T_1 +_{\text{LT},f} T_2) +_{\text{LT},f} T_3 = T_1 +_{\text{LT},f} (T_2 +_{\text{LT},f} T_3) \text{ et } T_1 +_{\text{LT},f} T_2 = T_2 +_{\text{LT},f} T_1.$$

De plus,

$$\exists! i \in \mathcal{O}_K[[T]], \quad T +_{\text{LT},f} i(T) = 0.$$

$$\forall a \in \mathcal{O}_K, \exists! [a]_{\text{LT},f} \in \mathcal{O}_K[[T]], \quad [a]_{\text{LT},f} \equiv aT \pmod{T^2} \text{ et } [a]_{\text{LT},f} \circ f = f \circ [a]_{\text{LT},f}.$$

Nous avons composé des séries formelles appartenant à $T\mathcal{O}_K[[T]]$ et/ou $T_1\mathcal{O}_K[[T_1, T_2]] + T_2\mathcal{O}_K[[T_1, T_2]]$. Nous remarquons qu'une telle série s'évalue correctement sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$.

Corollaire 3.1.4. *Les séries construites précédemment vérifient*

$$[0]_{\text{LT},f} = 0, \quad [1]_{\text{LT},f} = T \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad [\pi^n]_{\text{LT},f} = f^{\circ n}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_K, \quad [a + b]_{\text{LT},f} = [a]_{\text{LT},f} +_{\text{LT},f} [b]_{\text{LT},f}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_K, \quad [ab]_{\text{LT},f} = [a]_{\text{LT},f} \circ [b]_{\text{LT},f}.$$

Exemple 3.1.5. Dans le cas particulier de $K = \mathbb{Q}_p$ et $f = (1 + T)^p - 1$, nous avons

$$T_1 +_{\text{LT},f} T_2 = T_1 + T_2 + T_1 T_2, \quad i(T) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n T^n = \frac{1}{1 + T} - 1$$

$$\text{et } [a]_{\text{LT},f} = (1 + T)^a - 1 := \sum_{n \geq 1} \binom{a}{n} T^n$$

où $\binom{-}{n}$ est un polynôme à coefficients rationnels dont nous vérifions qu'il stabilise \mathbb{Z}_p .

Définition 3.1.6. Pour $m \geq 1$, l'extension finie galoisienne $\overline{\mathbb{Q}_p} | K_{\text{LT},\pi,m} | K$ est le corps de décomposition de $f^{\circ m}$ sur K . Elle dépend de π mais pas de f (voir [Yos06, Lemme 4.6]). Définissons

$$K_{\text{LT},\pi} = \bigcup_{m \geq 1} K_{\text{LT},\pi,m}.$$

Posons $\mu_{f,m}$ l'ensemble des racines de $f^{\circ m}$ dans $K_{\text{LT},\pi,m}$ et $\mu_{f,m}^\times = \mu_{f,m} \setminus \mu_{f,m-1}$.

Théorème 3.1.7. 1. Pour tout $x \in \mu_{f,m}^\times$, l'extension $K_{\text{LT},\pi,m}$ est engendrée par x .

2. Pour tout $x \in \mu_{f,m}^\times$ les éléments de $\mu_{f,m}^\times$ sont précisément les éléments de la forme $[a]_{\text{LT},f}(x)$ pour $a \in \mathcal{O}_K^\times$.

3. On peut alors définir l'application

$$\iota_\pi : \mathcal{O}_K^\times \rightarrow \text{Gal}(K_{\text{LT},\pi} | K), \quad a \mapsto \left[x \in \bigcup_{m \geq 1} \mu_{f,m} \mapsto [a]_{\text{LT},f}(x) \right]$$

C'est un isomorphisme de groupes topologiques qui dépend de π mais pas de f .

Démonstration. Les séries formelles en jeu s'évaluent sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$. Grâce au Corollaire 3.1.4, le uplet $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}, 0, +_{\text{LT},f}, i, [\cdot]_{\text{LT},f})$ est un \mathcal{O}_K -module. La preuve repose sur une analyse des morphismes de \mathcal{O}_K -modules défini pour $x \in \mu_f^\times$ par

$$\mathcal{O}_K \rightarrow \mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}, \quad x \mapsto [a]_{\text{LT},f}(x)$$

dont le noyau est précisément $\pi^m \mathcal{O}_K$. □

Définition 3.1.8. Par la suite, nous utilisons le caractère

$$\chi_{K,LT,\pi} : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{O}_K^\times, \quad \sigma \mapsto \iota_\pi^{-1} \left(\sigma|_{K_{LT,\pi}} \right).$$

Afin d'adapter les notations de Fontaine aux (φ, Γ) -modules Lubin-Tate, nous notons $\Gamma_{K,LT} := \mathcal{O}_K^\times$. À π fixé, nous identifions sans le dire $\mathcal{G}_K / \mathcal{G}_{K_{LT,\pi}}$ à $\Gamma_{K,LT}$ via $\chi_{K,LT,\pi}$.

On note aussi $\omega_{K,LT,\pi}$ la réduction de $\chi_{K,LT,\pi}$ modulo π . C'est un caractère lisse de \mathcal{G}_K , à valeurs dans \mathbb{F}_q^\times , de noyau $\mathcal{G}_{K_{LT,\pi},1}$.

Nous finissons cette section en énonçant la théorie du corps de classes local. Bien qu'elle ne nous serve pas pour l'équivalence de Fontaine, elle donne une application élégante des modules formels de Lubin-Tate et rend plus naturels les calculs de la section 3.4. Nous choisissons, par pure dépendance au sentier, de l'énoncer dans le cas des corps locaux p -adique bien qu'elle soit correcte pour tous les corps locaux. On rappelle que

$$K^{\text{nr}} := \bigcup_{f \geq 1} K\mathbb{Q}_{q^f}$$

est l'extension maximale non ramifiée de K et que $\text{Gal}(K^{\text{nr}}|K)$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$, engendré par le morphisme de Frobenius $\text{Frob}_q := W_{\mathcal{O}_K}(x \mapsto x^q)$.

Théorème 3.1.9 (Théorie du corps de classes local). *Soit K un corps local p -adique. L'extension maximale abélienne K^{ab} de K coïncide avec $K_{LT,\pi} K^{\text{nr}}$. Le morphisme suivant est un isomorphisme de groupes topologiques :*

$$\begin{aligned} \text{Art}_K^{-1} : \mathcal{G}_K^{\text{ab}} &\rightarrow \widehat{K^\times} \\ \sigma &\mapsto a\pi^n \quad \text{où} \quad \begin{cases} n \in \widehat{\mathbb{Z}} \text{ tel que } \sigma|_{K^{\text{nr}}} = \text{Frob}_q^{-n} \\ \forall m, \forall x \in \mu_{f,m}, \quad \sigma(x) = [a]_{LT}(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Son inverse est appelé isomorphisme d'Artin. Il ne dépend ni du choix de f , ni de celui de π .

De plus, pour toute extension finie $L|K$, nous avons $K^{\text{ab}} \subset L^{\text{ab}}$ et le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \widehat{L^\times} & \xrightarrow{\text{Art}_L} & \mathcal{G}_L^{\text{ab}} \\ \text{N}_{L|K} \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{K^\times} & \xrightarrow{\text{Art}_K} & \mathcal{G}_K^{\text{ab}} \end{array}$$

où le morphisme de droite factorise l'inclusion $\mathcal{G}_L \subset \mathcal{G}_K$.

Remarque 3.1.10. En guise de corollaire, nous pouvons décrire tous les caractères continus $\mathcal{G}_K \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ grâce à $\omega_{K,LT,\pi}$: ils sont engendrés par n'importe quel caractère non ramifié qui envoie le q -Frobenius sur un générateur de \mathbb{F}_q^\times et par $\omega_{K,LT,\pi}$.

La théorie du corps de classes local est également adaptée pour décrire le groupe $\text{Ext}_{L[\mathcal{G}_K]}^1(L, L)$ où $L|\mathbb{Q}_p$ contient tous les conjugués de K . Ce groupe d'extensions s'identifie à $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_K, L)$ puis à $\text{Hom}_{\text{Topgp}}(\mathcal{G}_K, L)$. Par la théorie du corps de classes local, ce dernier est de dimension $1 + [K:\mathbb{Q}_p]$ sur L , et une base est donnée par le caractère non ramifié qui envoie le q -Frobenius sur 1 et par les $\sigma \circ \log \circ \chi_{K,LT,\pi}$ pour $\sigma : K \rightarrow L$.

La théorie de Lubin-Tate permet également de comprendre l'extension analytique de L par $L(\chi_{K,LT,\pi})$. En considérant la structure de \mathcal{O}_K -module donné sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$ par la loi de Lubin-Tate et l'action compatible de \mathcal{G}_K . Les invariants par \mathcal{G}_K étant π -adiquement séparés, on en tire un morphisme de Kummer injectif

$$\pi \mathcal{O}_K \hookrightarrow H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_K, T_\pi(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}))$$

qui correspond ainsi à une extension non triviale. On peut la décrire explicitement : on choisit une famille $\pi_m \in \mu_{f,m}^\times$ telle que $f(\pi_{m+1}) = \pi_m$. On choisit également ϖ_m tels que $f(\varpi_1) = \pi$ et $f(\varpi_{m+1}) = \varpi_m$. On a

$$\forall g \in \mathcal{G}_K, \exists! a_g \in \mathcal{O}_K, \forall m \geq 1, g(\varpi_m) = \varpi_m +_{LT,f} [a_g]_{LT,f}(\pi_m).$$

L'application $g \mapsto a_g$ fournit un élément de $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_K, K(\chi_{LT,\pi}))$. Par dualité de Tate (voir [Her98b, Th. p. 565]), on trouve que $\dim_L \text{Ext}_{L[\mathcal{G}_K]}^1(L, L(\chi_{K,LT,f}))$ vaut $[K:\mathbb{Q}_p]$. Le cocycle ci-dessus en donne l'une des droites.

Théorème 3.1.11 (Extension modérément ramifiée maximale). *Soit K un corps local p -adique dont le corps résiduel est de cardinal q . On note $K_{q^f} = K\mathbb{Q}_{q^f}$ l'extension non ramifiée de degré f . Soit π une uniformisante de K .*

Les extensions modérément ramifiées de K sont stables par composition. Il existe donc une extension modérément ramifiée maximale pour l'inclusion qui vaut

$$K^{\text{mr}} = \left(\bigcup_{f \geq 1} (K_{q^f})_{LT,\pi,1} \right) K^{\text{nr}}.$$

Le morphisme suivant est correctement défini et établit un isomorphisme de groupes topologiques

$$\begin{aligned} \text{Gal}(K^{\text{nr}}|K) &\rightarrow \left(\lim_{\substack{f \geq 1 \\ N_{\mathbb{F}_{q^f m}|\mathbb{F}_{q^f}}} \mathbb{F}_{q^f}^\times \right) \rtimes \widehat{\varphi_q^{\mathbb{Z}}} \\ \sigma &\mapsto ((x_n), \varphi_q^k) \text{ où } \begin{cases} \sigma|_{K^{\text{nr}}} = \text{Frob}_q^k \\ \forall f, x_n = \omega_{K_{q^f}, \text{LT}, \pi}((\sigma \text{Frob}_q^{-k})|_{K_{q^f}}) \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 Corps de normes imparfait Lubin-Tate

Nous définissons le corps complet de valuation discrète $E := \mathbb{F}_q((X))$ et fixons une clôture séparable E^{sep} avec l'unique extension de la valuation. Nous notons $E^+ = \mathbb{F}_q[[X]]$ et $E^{\text{sep}, +}$ leurs anneaux de valuation. L'équivalence de Fontaine pour les corps de caractéristique p , dont vous trouverez l'énoncé original dans [Fon07, Prop. 1.2.6], établit déjà équivalence pour les représentations sur \mathcal{O}_K de \mathcal{G}_E en utilisant l'anneau de comparaison $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$. Pour en déduire l'équivalence de Fontaine version Lubin-Tate, il y a deux ingrédients. Le premier consiste à remarquer que la théorie de Galois de $K_{\text{LT}, \pi}$ est la même que celle du corps E , par exemple via l'équivalence perfectoïde. Puis, il faut étendre l'action de \mathcal{G}_E sur l'anneau de comparaison $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ dans une action de \mathcal{G}_K . Pour ces deux étapes, J.-M. Fontaine suggère déjà dans l'introduction de [Fon07] de ne pas se limiter à dévisser par l'extension cyclotomique. L'extension Lubin-Tate permet en effet d'obtenir une action plus agréable à décrire. Nous plongeons $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ dans $\tilde{A}_K := W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^\flat)$.

Commençons par redéfinir l'anneau de comparaison $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ pour des représentations de \mathcal{G}_E à coefficients de caractéristique mixte (voir [Fon07, §A.1.2]).

Définition 3.2.1. Soit

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ := \mathcal{O}_K[[X]] \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+[X^{-1}]^{\wedge p}.$$

Proposition 3.2.2. 1. Il existe une $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -algèbre $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ qui est π -adiquement séparée et complète, de corps résiduel E^{sep} en π . Elle est unique à isomorphisme près.

Nous supposons désormais une telle algèbre fixée.

2. Pour tout $r \in \text{End}_{\text{Ann}}(E^{\text{sep}})$ tel que $r(E) \subseteq E$ et tout $f \in \text{End}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ tel que $(f \bmod \pi) = r|_E$, il existe une unique $f_1 \in \text{End}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ telle que $(f_1)|_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} = f$ et $(f_1 \bmod \pi) = r$.

3. Pour toute extension $E^{\text{sep}}|F|E$, il existe une unique sous- \mathcal{O}_E -algèbre de $\widehat{\mathcal{O}_{E^{\text{sep}}}}$, π -adiquement complète et séparée, dont l'image du corps résiduel dans E^{sep} est F . Nous l'appelons \mathcal{O}_F . Nous appelons \mathcal{O}_F^+ la complétion π -adique de la clôture intégrale de \mathcal{O}_E^+ dans \mathcal{O}_F .
4. Dans le contexte de 2., si r stabilise F (resp. F^+), alors f_1 stabilise \mathcal{O}_F (resp. \mathcal{O}_F^+).

Démonstration. 1. L'anneau \mathcal{O}_E est local d'idéal maximal (π) et de corps résiduel E . Puisqu'il est π -adiquement séparé et complet, il est hensélien. Soit $\mathcal{G}_{\text{al}_E}$ la catégories des extensions finies galoisiennes $E^{\text{sep}}|F|E$ avec pour morphismes les inclusions. Grâce à [Sta18, Tag 04GK], il existe pour toute extension $F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}$ une extension finie étale \mathcal{O}_F de corps résiduel F , unique à isomorphisme près. En choisissant de tels \mathcal{O}_F pour toute extension, nous obtenons un diagramme indexé par $\mathcal{G}_{\text{al}_E}$ formé d'injections et nous définissons

$$\mathcal{O}_{E^{\text{nr}}} := \left(\operatorname{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} \mathcal{O}_F \right)^{\wedge \pi}.$$

Pour toute autre algèbre vérifiant ces propriétés, nous construisons grâce à [Sta18, Tag 08HQ] des inclusions cohérentes de chaque \mathcal{O}_F et nous concluons en passant à la limite et complétant.

2. Conséquence de [Sta18, Tag 08HQ].
3. L'existence se démontre comme au premier point pour les extensions finies. Compléter l'union des sous-anneaux obtenus pour chaque sous-extension finie $F|F'|E$ pour obtenir l'existence en général. L'unicité se démontre par dévissage.
4. Pour le premier énoncé, remarquer que $f(\mathcal{O}_F)$ vérifie les hypothèses du troisième point. Pour prouver le deuxième énoncé, considérer que \mathcal{O}_F^+ est π -adiquement complète et séparée, d'anneau résiduel F^+ en π . \square

Définition 3.2.3. En appliquant la proposition précédente, nous relevons l'action de \mathcal{G}_E sur E^{sep} en une action \mathcal{O}_E -linéaire sur $\mathcal{O}_{E^{\text{nr}}}$. Puisque l'action sur E^{sep} est à stabilisateurs ouverts et que l'action sur $\mathcal{O}_{E^{\text{nr}}}$ est \mathcal{O}_K -linéaire, cela fournit une structure de \mathcal{G}_E -anneau topologique $\mathcal{O}_{E^{\text{nr}}}$ pour la topologie π -adique.

Corollaire 3.2.4. Pour toute extension $E^{\text{sep}}|F|E$, l'inclusion¹ $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_{E^{\text{nr}}}^{\mathcal{G}_F}$ est une égalité.

¹Déduite par le quatrième point de la Proposition 3.2.2.

Pour continuer, nous voulons identifier \mathcal{G}_E à un sous-groupe de \mathcal{G}_K . Nous utilisons l'équivalence des théories de Galois d'un corps perfectoïde et de son basculé. L'énoncé d'une telle équivalence suit la formulation de [Sch12, §3], bien que Fontaine-Wintenberger avaient déjà démontré le résultat dans les cas qui nous intéressent. Le lecteur ou la lectrice souhaitant une preuve de l'équivalence des théories de Galois par basculement pourra se référer à [Mor, §4].

Définition 3.2.5. Le basculé d'une \mathbb{F}_p -algèbre B est défini comme \mathbb{F}_p -algèbre par

$$B^\flat := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}, x \mapsto x^p} B.$$

Pour tout $q = p^f$, il coïncide avec la limite le long de $x \mapsto x^q$.

Proposition 3.2.6. Soit \mathcal{O} une \mathbb{Z}_p -algèbre complète pour la topologie p -adique, l'application

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O} \rightarrow (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\flat, \quad (x^{(n)}) \mapsto (x^{(n)} \bmod p\mathcal{O})$$

une bijection multiplicative. Par transfer, elle munit le basculé d'une structure d'anneau où l'addition est donnée par $(x+y)^{(n)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k}$ et où la multiplication se fait terme à terme.

En particulier, l'anneau $(\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\flat$ est intègre dès que \mathcal{O} l'est.

Définition 3.2.7. Pour $x \in (\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\flat$, on appelle souvent $x^\sharp \in \mathcal{O}$ l'élément $x^{(0)}$. Si \mathcal{O}_1 est une \mathcal{O} -algèbre complète pour la valuation p -adique, et que \mathcal{O}'_2 est une sous- $(\mathcal{O}/p\mathcal{O})^\flat$ -algèbre de $(\mathcal{O}_1/p\mathcal{O}_1)^\flat$ on appelle $(\mathcal{O}'_2)^\sharp$ la sous- \mathcal{O} -algèbre de \mathcal{O}_1 engendrée par les x^\sharp pour $x \in \mathcal{O}'_2$. Cette opération est appelée débasculement dans \mathcal{O}_1 .

Définition 3.2.8. Un corps valué K est dit perfectoïde si sa valuation est de rang 1 non discrète, s'il est complet pour cette valuation, s'il existe un élément ϖ de l'idéal maximal tel que $p \in \varpi^p \mathcal{O}_K$ et si la puissance p -ième sur $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est surjective.

Définition 3.2.9. Le basculé d'un corps perfectoïde K est²

$$K^\flat := \text{Frac}[(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^\flat].$$

Théorème 3.2.10 (Théorème 4.5 de [Mor]). Si K est un corps perfectoïde, K^\flat muni de $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|_K$ est encore un corps perfectoïde. Toute extension finie séparable de K est perfectoïde. Choisissons \widehat{K} la complétion d'une clôture algébrique de K . Le basculement et le débasculement vers \widehat{K} établissent une équivalence de catégories entre les extensions finies séparables de K dans \widehat{K} et les extensions finies séparables de K^\flat .

²On utilise l'intégrité démontrée en Proposition 3.2.6.

En particulier, cette correspondance respecte le degré, le caractère galoisien et fournit un isomorphismes entre \mathcal{G}_K et \mathcal{G}_{K^b} .

Ce minuscule arsenal rassemblé, nous pouvons en revenir à comprendre la théorie de Galois de $K_{\text{LT},\pi}$.

Définition 3.2.11. Un système de Lubin-Tate associé à f est un générateur du \mathcal{O}_K -module libre de rang 1

$$\varprojlim_{\substack{m \geq 0 \\ a \mapsto f(a)}} \mu_{f,m}.$$

C'est une famille $\pi^b = (\pi_m)$ telle que $\pi_1 \in \mu_{f,1}^\times$ et $\forall m, f(\pi_{m+1}) = \pi_m$.

Proposition 3.2.12. Soit π^b un système de Lubin-Tate associé à f . Le corps $\widehat{K_{\text{LT},\pi}}$ est un corps perfectoïde. L'élément π^b est une pseudo-uniformisante de son basculé et le morphisme de corps topologiques déterminé par

$$j : \mathbb{F}_q((X^{1/p^\infty})) \rightarrow \widehat{K_{\text{LT},\pi}}^b, \quad X \mapsto \pi^b$$

est un isomorphisme de corps perfectoïdes.

Puisque la théorie de Galois ne change ni en complétant, ni prenant des extensions radicielles, ni par basculement de corps perfectoïde, les corps E et $K_{\text{LT},\pi}$ ont la même théorie de Galois. Plus précisément, en fixant une clôture séparable $\mathbb{F}_q((X^{1/p^\infty}))$ et un choix d'extension de l'isomorphisme j précédent de cette clôture séparable vers \mathbb{C}_p^b , la bijection entre extensions finies s'exprime

$$F \mapsto K_{\text{LT},\pi}^{\text{alg}} \cap j(F\mathbb{F}_q((X^{q^{-\infty}})))^\#.$$

Nous définissons $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi} := \mathcal{G}_{K_{\text{LT},\pi}} \triangleleft \mathcal{G}_K$ isomorphe à \mathcal{G}_E , canoniquement si l'on fixe des clôtures séparables et une extension de j .

Nous plongeons à présent $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ dans \tilde{A}_K .

Proposition 3.2.13. Munissons \tilde{A}_K de la topologie faible, obtenue en voyant ensemblement les vecteurs de Witt comme un produit de \mathbb{C}_p^b . Il est également muni d'une structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique en relevant les actions sur \mathbb{C}_p^b .

Il existe un élément³ $\{\pi^b\}_{\text{LT}}$ dans \tilde{A}_K , topologiquement nilpotent, tel que

1. Le morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres topologiques

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{A}_K, \quad X \mapsto \{\pi^b\}_{\text{LT}}$$

³On peut retrouver f à partir de π^b : nous nous épargnons donc des indices inutiles.

est injective, d'image contenue dans $W_{\mathcal{O}_K}(\widehat{K_{\text{LT},\pi}}^b)$ et stable par $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$.

2. L'image est invariante par $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}$ et l'action \mathcal{O}_K -linéaire de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{O}_K^{\times})$ déduite sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vérifie

$$\varphi_q(X) = f(X) \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}_K^{\times}, a \cdot X = [a]_{\text{LT},f}(X).$$

3. La topologie d'anneau induite sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ a pour base de voisinages de zéro les $(p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + X^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+)_{n,m \geq 0}$. Nous l'appelons topologie faible.
4. L'application précédente s'étend en une injection de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ dans \tilde{A}_K . Son image ne dépend pas de l'extension et est stable par $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$. En faisant agir \mathcal{G}_E sur \tilde{A}_K par identification à $\mathcal{G}_{K_{\text{LT},\pi}}$, le morphisme est \mathcal{G}_E -équivariant.

La topologie induite sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ possède encore pour base de voisinages de zéro les $(p^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}} + X^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}^+)_{n,m \geq 0}$. Nous l'appelons encore topologie faible.

On appelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$ les $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques obtenus par transfert de l'action sur \tilde{A}_K . On appelle également E_K et E_K^{sep} leurs réductions modulo π .

Remarque 3.2.14. Pour tout extension galoisienne $K_{\infty}|K$ telle que $\text{Gal}(K_{\infty}|K)$ est localement isomorphe à \mathbb{Z}_p , la théorie du corps des normes imparfait dans [Win83] permet d'identifier la théorie de Galois de K_{∞} avec celle de $\mathbb{F}_q((X))$. En construisant $\mathbb{F}_q((X))$ par la théorie du corps des normes plutôt que par les corps perfectoides, on obtient même immédiatement une action de $\text{Gal}(K_{\infty}|K)$. Cependant, obtenir une théorie des (φ, Γ) -modules requiert une application $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{A}_K$ comme à la proposition précédente. Fontaine-Wintenberger savaient le faire pour l'extension cyclotomique mais l'action de $\text{Gal}(K(\mu_{p^{\infty}})|K)$ n'a alors pas d'expression aisée. L'extension Lubin-Tate permet également cette construction et la proposition précédente illustre que l'action de $\text{Gal}(K_{\text{LT},\pi}|K)$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ a une expression agréable. L. Poyeton a donné une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir faire de tels relevés dans [Poy19, Th. A].

3.3 Preuve de l'équivalence

Nous rédigeons l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate dans le langage du Chapitre 2. Même si la preuve peut paraître à première vue plus lourde que ce qui s'y passe vraiment, elle nous permet d'illustrer à quel point le cadre du Chapitre 2 est précisément celui des équivalence de Fontaine et de souligner certaines subtilités (voir la Remarque 3.3.4). Cela permet également d'écrire une première fois certains

arguments dans ce cadre facile pour qu'ils soient plus routiniers une fois le cadre multivariable mis en place.

De la section précédente, nous tirons les trois anneaux suivants.

- L'anneau \mathcal{O}_K avec la topologie π -adique et l'action triviale de \mathcal{G}_K . Nous le voyons également comme un $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique avec action triviale.
- L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ avec sa structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique pour la topologie faible. Comme $\mathcal{H}_{K,LT,\pi}$ agit trivialement, l'action se factorise à travers le quotient $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT})$, fournissant un $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT})$ -anneau topologique.
- L'anneau $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$ avec sa structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique pour la topologie faible. La topologie π -adique et la restriction de l'action l'équipent d'une structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{H}_{K,LT,\pi})$ -anneau topologique.

Nous commençons par construire les foncteurs de Fontaine [Fon07, §1.2.2].

Définition/Proposition 3.3.1. On pose

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}_{LT} : & \text{Mod}(\mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\text{triv}} \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K) \\
 & & \downarrow \text{Ex} \\
 & \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}) \\
 \\
 \mathbb{V}_{LT} : & \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) & \xrightarrow{\text{triv}} \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \varphi_q^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) \\
 & & \downarrow \text{Ex} \\
 & \text{Mod}(\mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}})
 \end{array}$$

Démonstration. Pour définir Ex et Inv dans le cas de \mathbb{D}_{LT} , les sections 2.3.1 et 2.3.2 requièrent de vérifier les trois points suivants :

1. L'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}$ est un morphisme de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux.
2. Le monoïde $\mathcal{H}_{K,LT,\pi}$ est un sous-monoïde distingué de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ et le quotient s'identifie à $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT})$.
3. L'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\pi}}$ est une égalité.

Le premier point est donné par construction des anneaux. Le deuxième découle de ce que $K_{LT,\pi}$ est galoisienne. Le troisième a fait l'objet du Corollaire 3.2.4.

Dans le cas de \mathbb{V}_{LT} , il faut vérifier que

1. L'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subset \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ est un morphisme de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux.
2. Le monoïde $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ est un sous-monoïde distingué de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ et le quotient s'identifie à \mathcal{G}_K .
3. L'inclusion $\mathcal{O}_K \subseteq \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}^{\varphi_q = \text{Id}}$ est une égalité.

À nouveau, seul le troisième point ne découle pas des constructions. Puisque le q -Frobenius est \mathcal{O}_K -linéaire et que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ est π -adiquement complet et séparé, les deux anneaux sont π -adiquement complets et séparés. Par dévissage, il suffit donc de prouver l'égalité modulo π , ce qui revient à dire que les racines de $T^q - T$ dans E^{sep} sont les éléments par \mathbb{F}_q . \square

Théorème 3.3.2. *Considérons le foncteur \mathbb{D}_{LT} restreint à la catégorie $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$. Pour un tel V , le morphisme de comparaison*

$$\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} \mathbb{D}_{\text{LT}}(V) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V$$

est un isomorphisme. L'image essentielle de cette restriction est contenue dans $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$, où la topologie en jeu est la topologie faible, et le foncteur est fortement symétrique monoïdal fermé.

Considérons le foncteur \mathbb{V}_{LT} restreint à $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$. Pour l'un de ces $(\varphi_q, \Gamma_{K,\text{LT}})$ -module D , le morphisme de comparaison

$$\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{V}_{\text{LT}}(D) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} D$$

est un isomorphisme. L'image essentielle de cette restriction est contenue dans $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ et le foncteur est fortement symétrique monoïdal fermé.

Démonstration. Puisque \mathcal{O}_K et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ sont des anneaux de valuation discrète, les catégories $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ et $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ coïncident avec $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K)$ pour la topologie π -adique et $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ pour la topologie faible.

Nous voulons restreindre-corestreindre les domaines dans l'expression de \mathbb{D}_{LT} comme composée comme suit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{\text{LT}} & : & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K) \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{O}_K) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) \xleftarrow{\text{Inv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}, \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}) \end{array}$$

où les deux topologies en jeu pour les modules sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ sont la topologie faible et la topologie π -adique. Le fait que ces restrictions-corestrictions soient correctement

définies⁴ s'obtient avec la Proposition 2.5.24 appliquée aux deux monoïdes $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ et $\mathcal{H}_{K,LT,\pi}$ pour les deux topologies ci-dessus et au Corollaire 2.5.1 pour le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,LT,\pi}$ agissant sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$. Pour vérifier que l'on est dans un contexte où les catégories de modules à π -dévissage projectif sont définies, que les topologies sont les bonnes, et que l'on peut appliquer les résultats du Chapitre 2, il faut vérifier la liste de conditions suivante :

1. Le couple $(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}, \pi)$ est un contexte de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT})$ -dévissage.
2. L'inclusion $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est continue pour la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et pour les deux topologies sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$.
3. L'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\pi}}$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques pour les topologies faibles, i.e. la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ induit la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$.
4. L'inclusion $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est fidèlement plate et π est irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$.
5. Nous avons $K_0(E_K) = \mathbb{Z}$.
6. La topologie π -adique sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$ est linéaire, plus grossière que la π -adique, et a de bonnes propriétés de π -dévissage.
7. Le groupe $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{H}_{K,LT,\pi}, E_K^{\text{sep}})$ pour la topologie quotient de la topologie π -adique sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}}$. Cette topologie est la topologie discrète.
8. Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{H}_{K,LT,\pi}, E_K^{\text{sep}})$, le morphisme de comparaison

$$E_K^{\text{sep}} \otimes_{E_K} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

est un isomorphisme.

Les trois premières conditions découlent de la construction des anneaux. Les quatrième et cinquième découlent de ce que nos anneaux sont de valuation discrète, que le morphisme est local et \mathcal{O}_K -linéaire. La sixième était déjà évoquée dans l'exemple 2.5.28. La septième et huitième découlent du théorème de la base normale de Hilbert et de la descente galoisienne. Nous obtenons alors tous les résultats annoncés sur \mathbb{D}_{LT} .

Une liste similaire de conditions permet de démontrer le résultat pour \mathbb{V}_{LT} mais plusieurs différences sont à noter. Tout d'abord, on remarque que la condition de continuité sur l'action de $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ est vide ce qui entraîne que

$$\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) = \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,LT}, \varphi_q^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$$

⁴Nous ne mentionnons pas pourquoi triv est correctement défini.

où les deux topologies sont la topologie faible et la π -adique. De plus, les analogues des septième et huitième conditions doivent être démontrés différemment. Pour l'énoncé cohomologique, tout cocycle $c \in Z^1(\varphi_q^{\mathbb{N}}, E^{\text{sep}})$ vérifie

$$c(\varphi_q^n) = \sum_{0 \leq i < n} \varphi_q^i(x) \text{ pour } x = c(\varphi_q).$$

En posant y tel que $\varphi_q(y) - y = x$, ce qui existe puisque E^{sep} est séparablement clos, on obtient que $c(\varphi_q^n) = \varphi_q^n(y) - y$, i.e. est un cobord.

Enfin, montrons l'isomorphisme de comparaison pour $D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}}, E^{\text{sep}})$. Commençons par démontrer l'injectivité de

$$E^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_q} D^{\varphi_q = \text{Id}} \rightarrow D, \quad x \otimes d \mapsto xd.$$

Prenons $\sum_I x_i \otimes d_i$ non nul dans le noyau avec $\forall i \in I, x_i \neq 0$ et $\#I$ minimal. Choisissons $j \in I$; quitte à diviser par x_j , on peut supposer que $x_j = 1$. Puisque le morphisme de comparaison est φ_q -invariant, l'élément $\sum_I x_i^q \otimes d_i$ est également dans le noyau, de même que la différence

$$\sum_{I \setminus \{j\}} (x_i^q - x_i) \otimes d_i.$$

Par minimalité de $\#I$, il en découle que $\forall i, x_i^q = x_i$, i.e. $x_i \in \mathbb{F}_q$. Ainsi, $\sum_I x_i d_i = 0$ dans $D^{\varphi_q = \text{Id}}$.

Pour démontrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit alors de démontrer que $\#(D^{\varphi_q = \text{Id}}) = q^{\dim_{E^{\text{sep}}} D}$. On choisit une base \mathcal{B} du E^{sep} -espace vectoriel D et note Φ la matrice de $\varphi_{q,D}$ dans cette base, au sens où

$$\varphi_{q,D} \left(\sum_{b \in \mathcal{B}} x_b b \right) = \sum_{b, b' \in \mathcal{B}} \varphi_q(x_b) \Phi_{b, b'} b'.$$

Les éléments de $D^{\varphi_q = \text{Id}}$ sont alors les $\sum x_b b$ tels que $\forall b, \sum_{b'} x_{b'}^q \Phi_{b', b} = x_b$. Par égalité, la matrice Φ est inversible et on réécrit la condition $\forall b, \sum_{b'} x_{b'}^q \Phi_{b', b}^{-1} = x_b$. On compte donc les E^{sep} -points du schéma

$$\begin{aligned} X_D &:= \text{Spec} \left(E^{\text{sep}}[T_b \mid b \in \mathcal{B}] / (T_b^q = \sum_{b'} \Phi_{b', b} T_{b'} \mid b \in \mathcal{B}) \right) \\ &\cong \text{Spec} \left(E^{\text{sep}}[T_b \mid b \in \mathcal{B}] / (T_b = \sum_{b'} \Phi_{b', b}^{-1} T_{b'}^q \mid b \in \mathcal{B}) \right) \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième description, la jacobienne des polynômes est l'identité; ainsi ce schéma est étale sur $\text{Spec}(E^{\text{sep}})$ dont tous les revêtement étales sont isomorphe à $\sqcup_{1 \leq i \leq n} \text{Spec}(E^{\text{sep}})$. Il a donc un nombre de E^{sep} -points égal à la dimension sur

E^{sep} de ses sections globales. En regardant la première description, on voit que $(\prod T_b^{k_b})_{(k_b) \in \mathcal{B}[[0, q-1]]}$ est une base des sections globales et la dimension de ses sections globales vaut donc $q^{\#\mathcal{B}}$. \square

Corollaire 3.3.3. *Les foncteurs \mathbb{D}_{LT} et \mathbb{V}_{LT} sont quasi-inverses. Ils établissent une équivalence de catégories symétriques monoïdales fermées entre $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ et $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K, \text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$.*

Démonstration. Il nous reste simplement à démontrer qu'ils sont inverses l'un de l'autre. Soit V un objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$. Le Théorème 3.3.2 construit déjà un isomorphisme naturel dans $\text{Mod} \left(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \right)$

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} \mathbb{D}_{\text{LT}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V.$$

Prenons les invariants par φ_q . À gauche, on récupère par définition $(\mathbb{V}_{\text{LT}} \circ \mathbb{D}_{\text{LT}})(V)$. À droite, on peut appliquer la Proposition 2.4.19 : en effet, nous avons déjà démontré que $H^1(\varphi_q^{\mathbb{N}}, E^{\text{sep}}) = \{0\}$ et nous savons que $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ est sans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ -torsion. Les invariants du terme de droite redonnent V ; on a construit un isomorphisme naturel $\mathbb{V}_{\text{LT}} \circ \mathbb{D}_{\text{LT}} \Rightarrow \text{Id}$.

On démontre l'autre isomorphisme de manière similaire, en utilisant une version topologique de la Proposition 2.4.19. \square

Remarque 3.3.4. L'utilisation de la topologie π -adique est cruciale. En effet, la condition cohomologique $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \pi}, E^{\text{sep}}) = \{0\}$ n'est pas vérifiée pour la topologie sur E^{sep} donnée par la valuation. La théorie d'Artin-Schreier sur E^{sep} pour l'opérateur $\wp(x) = x^p - x$ affirme⁵ qu'il existe une extension maximale abélienne d'exposant p et construit un isomorphisme

$$E/\wp(E) \rightarrow \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathcal{G}_E, \mathbb{F}_p).$$

La restriction de \wp à \mathbb{F}_q est \mathbb{F}_p -linéaire de noyau égal à \mathbb{F}_p . Soit $y \in \mathbb{F}_q \setminus \cup_r, \exists g \geq 2, r^g = q \mathbb{F}_r$. On choisit $y \in \mathbb{F}_q$ qui n'appartient à aucune sous-extension stricte \mathbb{F}_r . Prouvons que

$$\mathbb{F}_p y \oplus \bigoplus_{n \geq 1, p \nmid n} \mathbb{F}_q X^{-n} \subseteq E$$

est un supplémentaire de $\wp E$ dans E .

Démontrons d'abord qu'il contient un système de représentants des classes $E/\wp(E)$. Remarquons que pour $f \in XE^+$, on a $f^{p^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, $x \mapsto x^p - x$ est inversible sur XE^+ d'inverse donné par $x \mapsto \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} x^{p^n}$. De plus, comme

⁵Voir [Neu99, Exercices 2 et 3, Chapitre IV, §3].

$\mathbb{F}_p y$ est un supplémentaire de $\wp(\mathbb{F}_q)$ dans \mathbb{F}_q , tout élément $z \in \mathbb{F}_q$ peut être écrit $xy + \wp(y')$ pour $x \in \mathbb{F}_p$, et est donc représenté par xy . Tout monôme de la forme zX^{-pn} pour $n \geq 1$, vérifie

$$zX^{-pn} \in z^{1/p}X^{-n} + \wp(E).$$

Par récurrence sur v , tout $zX^{-p^v n}$ avec $n \geq 1$ appartient à $\mathbb{F}_q X^{-n} + \wp(E)$. Comme tout élément de E peut s'écrire comme la somme d'un élément de XE^+ , d'un élément de \mathbb{F}_q et d'une somme finie sur les monômes $zX^{-p^v n}$ avec $n \geq 1$ et $p \nmid n$, on conclut que l'on a trouvé des représentants.

Pour montrer qu'ils forment un supplémentaire, il reste à montrer que l'intersection avec $\wp(E)$ vaut $\{0\}$. Soit

$$f \in \left(\mathbb{F}_p y \oplus \bigoplus_{n \geq 1, p \nmid n} \mathbb{F}_q X^{-n} \right) \cap \wp(E).$$

On écrit $f = \wp(g)$. Si $v_X(g) < 0$, on obtient que $v_X(g^p) < v_X(g)$ et par conséquent $v_X(\wp(g)) = v_X(g^p) = p v_X(g)$. Cela implique que $p \mid v_X(f)$ ce qui est impossible sauf si $f = 0$. Si $v_X(g) \geq 0$, on a $f = \wp(g) \in E^+$. Appelons z le coefficient constant de g ; le coefficient constant de f est $\wp(z)$ qui est nul car $\mathbb{F}_p y \cap \wp(\mathbb{F}_q) = \{0\}$. On obtient donc que $f \in XE^+$ ce qui n'est possible que si $f = 0$.

Fixons $\ell \neq p$ un nombre premier et

$$\eta_n : \mathcal{H}_{K,LT,\pi} \cong \mathcal{G}_E \rightarrow \mathbb{F}_p$$

le morphisme continu correspondant à $X^{-\ell^n}$. L'application

$$\mathcal{H}_{K,LT,\pi} \rightarrow E, \quad \sigma \mapsto \sum_{n \geq 0} \eta_n(\sigma) X^n$$

est un morphisme de groupes, continu pour la topologie induite par la valuation. Il fournit un cocycle continu à valeurs dans E^{sep} , qui n'est pas un cobord car il ne se factorise pas par un quotient fini.

Remarque 3.3.5. Une autre version de cette équivalence repose sur le corps de normes parfait $\tilde{E} = \mathbb{F}_q((X^{1/p^\infty}))$ avec sa topologie de corps perfectoïde. Nous avons déjà démontré en filigrane qu'il a la même théorie de Galois que $K_{LT,\pi}$. Il est possible de construire l'anneau de coefficients

$$\tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}_K} := W_{\mathcal{O}_K}(\tilde{E}) = (\mathcal{O}_K[[X^{1/\infty}]] [X^{-1}])^{\wedge \pi}$$

muni de la topologie faible et l'anneau de comparaison $W_{\mathcal{O}_K}(\tilde{E}^{\text{sep}})$ muni d'une action de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ en le plongeant dans \tilde{A}_K . Pour ce faire, on identifie \tilde{E}^{sep} à $(\widehat{K_{\text{LT},\pi}}^b)^{\text{sep}} \subset \mathbb{C}_p^b$. Nous obtenons une équivalence de Fontaine perfectoides Lubin-Tate entre $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ et $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \tilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}_K})$.

3.4 Quelques calculs explicites

Pour illustrer l'équivalence Lubin-Tate, nous calculons le foncteur de Fontaine sur quelques exemples de petite dimension.

Nous commençons par illustrer à quel point le cadre Lubin-Tate rend transparente la théorie du corps de classes local. On regarde les représentations continues de dimension 1 de \mathcal{G}_K sur K . Son image est un compact de K^\times , par conséquent contenue dans \mathcal{O}_K^\times . De plus, un tel caractère se factorise par l'abélianisé de \mathcal{G}_K donc son noyau contient $\mathcal{G}_{K^{\text{ab}}}$.

Lemme 3.4.1. *Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ associé par la Proposition 3.2.2 à $E^{\text{sep}}|E^{\text{nr}}|E$. Alors, il existe un morphisme canonique*

$$\left(\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}\right)^{\wedge \pi} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}},$$

injectif, d'image $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$.

L'endomorphisme Frob_q donné par l'action de \mathcal{G}_E et $\varphi_q \hat{\otimes} \text{Id}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ coïncident sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$.

Pour tout $a \in \Gamma_{K,\text{LT}}$. L'action de $\text{Art}(a)$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\text{nr}}$ est $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$ -linéaire.

Démonstration. L'injection $\overline{\mathbb{F}_q} \subset E^{\text{sep}}$ se relève par la Proposition 3.2.2 en une injection $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$. La complétion du produit tensoriel est une \mathcal{O}_K -algèbre séparée et complète d'anneau résiduel en π égal à $\overline{\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} E = E^{\text{nr}}$. Le morphisme obtenu en complétant le produit tensoriel des inclusions de $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}}$ est donc un morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres locales, d'idéal maximal (π) , π -adiquement complètes et séparées et injectif modulo π . Il est donc injectif et son image est une \mathcal{O}_K -algèbres locales, d'idéal maximal π , π -adiquement complètes et séparées de corps résiduel E^{nr} . La Proposition 3.2.2 implique que cette image est bien $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$.

Par définition, l'action de $\text{Frob}_q \in \text{Gal}(E^{\text{nr}}|E)$ est un relevé $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ -linéaire de l'endomorphisme $(\text{Frob}_{q,\overline{\mathbb{F}_q}} \otimes \text{Id}_E)$ de E^{nr} . L'unicité dans la Proposition 3.2.2 affirme donc que Frob_q et $\varphi_q \hat{\otimes} \text{Id}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}}$ agissent de la même manière sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\text{nr}}$.

Pour tout $a \in \Gamma_{K,\text{LT}}$, on cherche à montrer que l'action de n'importe quel relevé $\sigma \in \mathcal{G}_K$ de $\text{Art}(a)$ dans \mathcal{G}_K fixe l'image de $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$ dans \tilde{A}_K . Il suffit de le vérifier modulo π . On cherche donc à montrer que σ agit trivialement sur $\overline{\mathbb{F}_q} \subset \mathbb{C}_p^b$. Via l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^b}$ avec la limite de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\pi$ le long de $x \mapsto x^q$, l'élément $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$

est identifié à la famille des $([x^{1/q^n}] \bmod \pi)$. Comme $\text{Art}(a)$ est triviale sur K^{nr} et que chaque $[x^{1/q^n}] \in \mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}$, l'action de $\text{Art}(a)$ sur $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$ est triviale. \square

Lemme 3.4.2. *Soit V un objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ tel que le morphisme structural $\rho_V : \mathcal{G}_K \rightarrow \text{GL}(V)$ se factorise par $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$. Alors, l'application*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))=\text{Id}} \rightarrow \mathbb{D}_{\text{LT}}(V), \quad z \otimes (x \otimes v) \mapsto zx \otimes v$$

est un isomorphisme. Via cette identification, l'action de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}})$ stabilise $\left(\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))=\text{Id}}$. Sur ce sous-espace, l'action de φ_q est donnée par la restriction de $\text{Id}_{\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}} \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi))$.

L'action de $x \in \Gamma_{K,\text{LT}}$ est donnée par $\text{Id}_{\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}} \otimes \rho_V(\text{Art}(x))$.

Démonstration. Étape 1 : on démontre que

$$\mathbb{D}_{\text{LT}}(V) = \left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))=\text{Id}}.$$

Nous savons que

$$\mathbb{D}_{\text{LT}}(V) := \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}} = \left(\left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{G}_{E^{\text{nr}}}} \right)^{\text{Art}(\pi^{-1})=\text{Id}}.$$

Or, $\mathcal{G}_{E^{\text{nr}}}$ est le noyau du morphisme $\mathcal{G}_E \rightarrow \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{G}_K^{\text{ab}}$, donc $\sigma \in \mathcal{G}_{E^{\text{nr}}}$ agit par $\sigma \otimes \text{Id}_V$. En utilisant la Proposition 2.4.19, on en déduit que

$$\left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{G}_{E^{\text{nr}}}} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}^{\mathcal{G}_{E^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V$$

et la Définition 3.2.3 affirme que ces invariants sont $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$. L'élément $\text{Art}(\pi^{-1})$ s'identifie à Frob_q dans \mathcal{G}_E et nous avons dit à la Définition 3.2.3 que Frob_q agit sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$ comme φ_q .

Étape 2 : on démontre que le morphisme⁶

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))=\text{Id}} \rightarrow \left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))=\text{Id}}$$

⁶Pour le voir comme une inclusion, on utilise que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}/\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}$ est plat sur \mathcal{O}_K , i.e. sans π -torsion. Cela vient de ce que si $\{1\} \cup \{x_i\}$ est un relevé dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}$ d'une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base de E^{nr} , le module $(\oplus_i \mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}} x_i)^{\wedge p}$ fournit une section de la projection $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\text{nr}}/\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}$. Ce quotient est donc sans π -torsion.

L'équivalence de Fontaine pour le corps \mathbb{F}_q produit une équivalence de catégories entre représentations sur \mathcal{O}_K de $\text{Frob}_q^{\mathbb{Z}}$ et $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{K^{\text{nr}}})$ donnée par

$$W \mapsto \left(\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} W \right)^{\text{Frob}_q = \text{Id}}.$$

Puisque l'action de Frob_q sur $\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}$ est un relevé \mathcal{O}_K -linéaire du q -Frobenius, c'est φ_q . Ceci démontre en particulier l'égalité souhaitée pour des représentations V de π -torsion : en considérant une combinaison linéaire de tenseurs purs dans le noyau avec un nombre minimal de termes, on démontre comme pour le morphisme de comparaison que l'application est injective. De plus, en utilisant l'équivalence pour \mathbb{F}_q et l'équivalence Lubin-Tate, la source et le but sont des E^{nr} -espaces vectoriels de dimension $\dim_{\mathbb{F}_q} V$. Les deux équivalences démontrent également que la source et le but commutent à la formation du (π, μ) -dévissage. Ainsi, comme ce sont deux \mathcal{O}_K -modules complets et séparés, l'isomorphisme se déduit par dévissage et passage à la limite de celui pour tous les termes du (π, μ) -dévissage de V .

Étape 3 : exprimons enfin les actions. Sur les invariants dans $\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V$, nous avons $\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1})) = \text{Id}$. A fortiori, puisque l'action de φ_q sur \mathbb{D}_{LT} est la restriction de $\varphi_q \otimes \text{Id}_V$, on en déduit qu'elle coïncide avec $\text{Id}_{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}} \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi))}$.

Quant à l'action de $\Gamma_{K, \text{LT}}$ elle est donnée par la restriction du morphisme $(x \cdot -) \otimes \rho_V(\text{Art}(x))$ sur $\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V$. Or, nous avons démontré au Lemme 3.4.1 que l'action de x sur $\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}$ est triviale. On en déduit l'expression annoncée. \square

Remarque 3.4.3. Pour une représentation V qui est de π -torsion⁷ nous pouvons même donner les matrices des actions. Soit \mathcal{B} une \mathbb{F}_q -base de V et M la matrice de $\rho_V(\text{Art}(\pi))$ dans cette base ; on veut montrer qu'il existe une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base \mathcal{B}' d'invariants par $\varphi_q \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi^{-1}))$. Autrement dit, si $A \in \text{M}_d(\overline{\mathbb{F}_q})$ est la matrice de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} , nous avons

$$A^{-1} M^{-1} \varphi_q(A) = \text{Id}_d \text{ ce qui équivaut à } M = \varphi_q(A) A^{-1}.$$

Nous avons montré que l'action de φ_q sur $\mathbb{D}_{\text{LT}}(V)$ s'exprime comme la restriction de $\text{Id}_{\overline{\mathbb{F}_q}} \otimes \rho_V(\text{Art}(\pi))$ dont la matrice dans la base \mathcal{B}' vaut

$$A^{-1} M A = A^{-1} \varphi_q(A).$$

Puisque $\varphi_q(M) = M$, on peut vérifier que $A^{-1} \varphi_q(A)$ est à coefficients dans \mathbb{F}_q .

Si M_x est la matrice de $\rho_V(\text{Art}(x))$ dans \mathcal{B} , la matrice de l'action semi-linéaire de x sur $\mathbb{D}_{\text{LT}}(V)$ s'écrit $A^{-1} M_x A$ dont on peut vérifier quelle est invariante par φ_q .

⁷Ou plus généralement une représentation libre sur $\mathcal{O}_K/\pi^n \mathcal{O}_K$.

Proposition 3.4.4. Soit $\chi : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$ un caractère continu. Alors, $\mathbb{D}_{\text{LT}}(\chi)$ est isomorphe au $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ -module libre de rang 1 de base $\{\mathbf{e}\}$ pour lequel

$$\varphi_q(\mathbf{e}) = \chi(\text{Art}_K(\pi))\mathbf{e} \text{ et } \forall x \in \Gamma_{K,\text{LT}}, x \cdot \mathbf{e} = \chi(\text{Art}_K(x))\mathbf{e}.$$

Démonstration. On sait que

$$\mathbb{D}_{\text{LT}}(\chi) := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_K^{\text{nr}}}}(\chi)^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}}$$

est libre de rang 1 grâce à l'équivalence. De plus, le Lemme 3.4.2 précise que $\mathbb{D}_{\text{LT}}(\chi) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} z$ où $z \in \mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$ vérifie $\chi(\text{Art}(\pi^{-1}))\varphi_q(z) = z$.

Pour calculer l'action de φ_q et de $\Gamma_{K,\text{LT}}$, on utilise les descriptions du Lemme 3.4.2. Puisque $\mathbb{D}_{\text{LT}}(\chi)$ est constitué des éléments invariants par $\varphi_q \otimes \chi(\text{Art}(\pi^{-1}))$, l'élément z vérifie

$$\varphi_{q,\mathbb{D}_{\text{LT}}(\chi)}(z) = \chi(\text{Art}_K(\pi))z.$$

L'action de $x \in \Gamma_{K,\text{LT}}$ sur z est donnée par multiplication par $\chi(\text{Art}(x))$. \square

Proposition 3.4.5. Soit $\eta : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{O}_K$ un caractère continu. Soit V_η l'extension du caractère trivial par lui-même déduite en posant $\rho_{V_\eta} = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathbb{D}_{\text{LT}}(V_\eta)$ est isomorphe au module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}\mathbf{e}_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}\mathbf{e}_2$ où la matrice du Frobenius est donnée dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ par $\begin{pmatrix} 1 & \eta(\text{Art}(\pi)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et où la matrice de l'action de $x \in \Gamma_{K,\text{LT}}$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & \eta(\text{Art}(x)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. De nouveau, le caractère η et donc ρ_{V_η} se factorise par $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$ ce qui entraîne grâce au Lemme 3.4.2 que

$$\mathbb{D}_{\text{LT}}(V_\eta) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \left(\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V_\eta \right)^{\varphi_q \otimes \rho_{V_\eta}(\text{Art}(\pi^{-1})) = \text{Id}}.$$

Soit $\{b_1, b_2\}$ la base de canonique de V_η . Elle vérifie que

$$\rho_{V_\eta}(\text{Art}(\pi^{-1}))(b_1) = b_1 \text{ et } \rho_{V_\eta}(\text{Art}(\pi^{-1}))(b_2) = \eta(\text{Art}(\pi^{-1}))b_1 + b_2.$$

Pour alléger le calcul, on pose $c = \eta(\text{Art}(\pi^{-1}))$. Les invariants s'écrivent $\{xb_1 + yb_2 \mid (\varphi_q(x) + c\varphi_q(y), \varphi_q(y)) = (x, y)\}$. On démontre par dévissage que l'équation $\varphi_q(T) - T + c = 0$ admet une solution z dans $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$. Modulo π , il s'agit de trouver une racine à $T^q - T + (c \bmod \pi)$ dans $\overline{\mathbb{F}_q}$, ce qui est possible car $(c \bmod \pi) \in \mathbb{F}_q$. Si

z_n est une solution modulo π^n écrivons $\varphi_q(z_n) - z_n + c = \pi^n z'$. Grâce au cas modulo π pour $c' = (z' \bmod \pi)$, on choisit z'' tel que $\varphi_q(z'') - z'' + c' = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_q(z_n + \pi^n z'') - (z_n + \pi^n z'') + c &= (\varphi_q(z_n) - z_n + c) + \pi^n(\varphi_q(z'') - z'') \\ &= \pi^n(\varphi_q(z'') - z'' + c') \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1}}.\end{aligned}$$

On démontre alors que la famille $\{b_1, zb_1 + b_2\}$ est une base de $\mathbb{D}_{\text{LT}}(V_\eta)$.

Grâce au Lemme 3.4.2, on peut calculer

$$\varphi_{q, \mathbb{D}_{\text{LT}}(V_\eta)}(b_1) = b_1$$

$$\begin{aligned}\varphi_{q, \mathbb{D}_{\text{LT}}(V_\eta)}(zb_1 + b_2) &= zb_1 + (cb_1 + b_2) \\ &= cb_1 + (zb_1 + b_2)\end{aligned}$$

Un calcul similaire fonctionne pour l'action de $x \in \Gamma_{K, \text{LT}}$. □

Nous continuons en décrivant le $(\varphi_q, \Gamma_{K, \text{LT}})$ -module étale associé aux représentations absolument irréductible de dimension 2 de \mathcal{G}_K sur \mathbb{F}_q . On s'inspire pour cela de [Ber10, Prop. 18.10]. Ses calculs pour $K = \mathbb{Q}_p$ illustrent déjà que la théorie de Lubin-Tate pour les extensions non ramifiées de \mathbb{Q}_p fournissait une description des représentations absolument irréductibles de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur \mathbb{F}_p .

Proposition 3.4.6. *Les représentations de dimension 2 irréductibles de \mathcal{G}_K sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ sont isomorphes à exactement l'une des*

$$\text{Ind}_{\mathcal{G}_{K_{q^2}}}^{\mathcal{G}_K} (\omega_2^h \mu_\lambda)$$

pour $1 \leq h \leq q^2 - 2$, $q \nmid h$, $q + 1 \nmid h$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}$. Ici ω_2 est une abréviation pour le caractère $\omega_{K_{q^2}, \text{LT}, \pi}$ de la Définition 3.1.8 et μ_λ est le caractère non ramifié qui envoie Frob_{q^2} sur λ .

Démonstration. Soit V une telle représentation. Sa restriction à l'inertie sauvage I_K^s est une représentation lisse d'un pro- p -groupe sur un $\overline{\mathbb{F}_q}$ -espace vectoriel de dimension finie. Elle admet donc un vecteur fixe v . Puisque $I_K^s \triangleleft \mathcal{G}_K$, tous les $g \cdot v$ sont également fixes. Puisque V est irréductible, on en déduit que I_K^s agit trivialement sur V . On peut donc voir V comme une représentation du groupe de Galois de l'extension maximale modérément ramifiée qu'on a décrit au Théorème 3.1.11.

Regardons la restriction de V à I_K/I_K^s , identifié à la limite projective des $\mathbb{F}_{q^n}^\times$. L'ordre de chaque quotient étant premier à p et $\overline{\mathbb{F}_q}$ étant algébriquement clos, cette restriction est semi-simple, somme de deux caractères $\omega \oplus \omega'$. Choisissons de plus un

relevé ϕ_q du q -Frobenius dans \mathcal{G}_K/I_K^s . On sait que $\phi_q(V[\omega])$ est dans la composante isotypique de ω^q .

Supposons d'abord que $\omega^q = \omega$. Puisque V est irréductible, ϕ_q ne peut envoyer le facteur ω dans lui-même sans quoi ce serait une sous-représentation. Ainsi, on en déduit que $\omega' = \omega$. Puisque la représentation est lisse sur un corps algébriquement clos, l'action de ϕ_q est diagonalisable et toute droite stable fournit une sous-représentation. Ce cas est donc exclus.

Ainsi $\omega^q \neq \omega$, ce qui impose que $\omega' = \omega^q$. Pour les mêmes raisons $\omega'^q = \omega$. Ainsi, $\omega^{q^2} = \omega$ et ϕ_q^2 laisse stable la droite associée à ω . On a donc prouvé que cette droite était une sous- $\mathcal{G}_{K_{q^2}}$ -représentation. En regardant les ordres, les caractères de ce dernier se factorisent par $\text{Gal}\left((K_{q^2})_{\text{LT},\pi,1} K^{\text{nr}} | K_{q^2}\right) \cong \mathbb{F}_{q^2}^\times \times \widehat{\varphi}_{q^2}^{\mathbb{Z}}$. Puisque le premier facteur est cyclique, ses morphismes vers $\overline{\mathbb{F}_q}^\times$ sont des puissances de l'identité. Autrement notre caractère s'écrit $\omega_2^h \mu_\lambda$ pour $0 \leq h \leq q^2 - 1$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{F}_q}^\times$. Puisque $\omega^q \neq \omega$, on en déduit que $hq \neq q \pmod{q^2 - 1}$, i.e. $q + 1 \nmid h$.

La restriction de V à $\mathcal{G}_{K_{q^2}}$ possède donc une droite isomorphe à $\omega_2^h \mu_\lambda$ ce qui produit un morphisme non nul

$$\text{Ind}_{\mathcal{G}_{K_{q^2}}}^{\mathcal{G}_K} (\omega_2^h \mu_\lambda) \rightarrow V.$$

Par irréductibilité c'est un isomorphisme.

Pour finir, on remarque que la restriction à $\mathcal{G}_{K_{q^2}}$ de cette induite s'écrit $\omega_2^h \mu_\lambda \oplus \omega_2^{hq} \mu_\lambda$. Son déterminant est donc

$$\omega_2^{h(q+1)} \mu_{\lambda^2} = N_{\mathbb{F}_q^2 | \mathbb{F}_q}(\omega_2) \mu_{\lambda^2} = \omega_{K, \text{LT}, \pi}^h \mu_{\lambda^2}$$

en utilisant la compatibilité des morphismes d'Artin (voir Théorème 3.1.9). L'action de ϕ_q envoie une base de $\omega_2^h \mu_\lambda$ sur une base de $\omega_2^{hq} \mu_\lambda$ puis de nouveau sur une base de $\omega_2^h \mu_\lambda$. Comme son carré est la multiplication par λ , le déterminant de ϕ_q est λ .

Puisque les induites de $\omega_2^h \mu_\lambda$ et $\omega_2^{hq} \mu_\lambda$ coïncident (ce sont des tordues par conjugaison par ϕ_q l'une de l'autre), on peut supposer que $q \nmid h$. Alors, les représentations ont toutes des déterminants différents. \square

Corollaire 3.4.7. Soit $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ tel que $\lambda^2 \in \mathbb{F}_q^\times$. On pose

$$W_\lambda := \{\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q} \mid \alpha^{q^2} = -\lambda^2 \alpha\}$$

qui est une droite sur $\overline{\mathbb{F}_{q^2}}$. On le voit comme \mathbb{F}_q -espace vectoriel de dimension 2. Soit $1 \leq h \leq q^2 - 2$ avec $q \nmid h$ et $q + 1 \nmid h$. On munit W_λ d'une action de du groupe de

Galois modérément ramifié \mathcal{G}_K/I_K^s où l'action d'un élément⁸ $((x_n), \varphi_q^k)$ est donnée par $\alpha \mapsto x_2^h \varphi_q^k(\alpha)$ ce qui donne une représentation $W_{h,\lambda}$.

Ces représentations sont des représentants des classes d'isomorphismes de \mathcal{G}_K -représentations absolument irréductibles de dimension 2 sur \mathbb{F}_q .

Démonstration. Démontrons d'abord que deux telles représentations V et W sont isomorphes⁹ si et seulement si elles le sont sur $\overline{\mathbb{F}_q}$. Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}_q})$ une matrice d'un isomorphisme de représentations sur $\overline{\mathbb{F}_q}$ dans des bases de V et W . Puisque l'action est à coefficients dans \mathbb{F}_q dans ces bases, on en déduit que $\mathrm{Frob}_q(M)$ est également un isomorphisme de représentations. Par Lemme de Schur et irréductibilité de W sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, il en découle que $\mathrm{Frob}_q(M)M^{-1} = \lambda \mathrm{Id}_W$. L'annulation de $H_{\mathrm{cont}}^1(\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{F}_q^\times)$ entraîne que, quitte à pré-composer par une homothétie, la matrice M est à coefficients dans \mathbb{F}_q et fournit un isomorphisme entre V et W .

Il reste à déterminer quelles représentations de la Proposition 3.4.6 viennent d'une représentations sur \mathbb{F}_q . En prouvant ladite proposition, nous avons calculé que $\det(\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}_{K,q^2}}^{\mathcal{G}_K}(\omega_2^h \mu_\lambda)) = \omega_{K,LT,\pi}^h \mu_{\lambda^2}$. Ainsi, pour qu'une telle représentation vienne de \mathbb{F}_q , il faut que $\lambda^2 \in \mathbb{F}_q^\times$.

Pour conclure, il reste à vérifier que pour $\lambda^2 \in \mathbb{F}_q^\times$, $W_{h,\lambda}$ est absolument irréductible de déterminant $\omega_{K,LT,\pi}^h \mu_{\lambda^2}$. Puisque $q+1 \nmid h$, nous avons

$$\{x_2^h \mid x_2 \in \mathbb{F}_{q^2}^\times\} \subsetneq \mathbb{F}_q^\times.$$

On remarque qu'il n'existe pas de sous-représentation de dimension 1 stable par l'inertie. On laisse le lecteur ou la lectrice vérifier que $W_{h,\lambda}$ est non seulement irréductible mais absolument irréductible. Un élément de I_K/I_K^s identifié à (x_n) agit par multiplication par x_2^h sur le \mathbb{F}_{q^2} -espace vectoriel de dimension 1 : par définition de la norme, son déterminant est donc la multiplication par $N_{\mathbb{F}_{q^2}|\mathbb{F}_q}(x_2^h) = x_1^h$. Avec la description de l'isomorphisme du Théorème 3.1.11, c'est bien $\omega_{K,LT,\pi}^h$. Pour calculer le déterminant du Frobenius, deux cas existent. S'il existe α tel que $\{\alpha, \alpha^q\}$ est une \mathbb{F}_q -base, on a

$$\varphi_q(\alpha \wedge \alpha^q) = \alpha^q \wedge (-\lambda^2 \alpha) = \lambda^2 \alpha \wedge \alpha^q.$$

Sinon, on a $\alpha^q = \lambda \alpha$ et le déterminant du Frobenius vaut également λ^2 . \square

⁸On utilise la description du groupe de Galois modérément ramifié au Théorème 3.1.11.

⁹En général, deux représentations semi-simples de dimension finie sur un corps F sont isomorphes si et seulement si elles le sont sur F^{sep} . C'est une conséquence du Théorème de Brauer-Nesbitt.

Proposition 3.4.8. Pour $(q+1)/2 \nmid h$, il existe une base¹⁰ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $\mathbb{D}_{\text{LT}}(W_{h,\lambda})$ dans laquelle la matrice du Frobenius s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 X^{-h(q-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

et l'action de $a \in \Gamma_{K,\text{LT}}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} f_a(X)^{h/(q+1)} & 0 \\ 0 & f_a(X)^{hq/(q+1)} \end{pmatrix}$$

où¹¹ $f_a(X) = aX/[a]_{\text{LT},f}(X) \pmod{\pi}$.

Démonstration. Nous laissons le lecteur ou la lectrice vérifier que les formules ci-dessus définissent bien un $(\varphi_q, \Gamma_{K,\text{LT}})$ -module $D_{h,\lambda}$. Mais nous effectuons un calcul en vérifiant que $f_a(X)f_b([a]_{\text{LT},f}(X)) = f_{ab}(X)$:

$$\begin{aligned} f_a(X)f_b([a]_{\text{LT},f}(X)) &= \frac{aX}{[a]_{\text{LT},f}(X)} \frac{b[a]_{\text{LT},f}(X)}{[b]_{\text{LT},f}([a]_{\text{LT},f}(X))} \\ &= \frac{abX}{[ab]_{\text{LT},f}(X)} \\ &= f_{ab}(X) \end{aligned}$$

On montre ensuite que $\overline{\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} D_{h,\lambda}$ n'a pas de sous- ϕ_q -module de rang 1. La droite engendrée par \mathbf{e}_2 n'est pas stable par ϕ_q . Ainsi, si une droite $\Delta \subset D_{h,\lambda}$ est stable par ϕ_q , elle contient un vecteur $d = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2$ avec $a \in \cup_{f \geq 1} \mathbb{F}_{q^f}((X))$. L'équation $\varphi_{q,D_{h,\lambda}}(v) = \alpha v$ implique $a^{q+1} = -\lambda^2 X^{-h(q-1)}$. Une telle égalité au niveau des degrés impliquerait que $(q+1) \mid 2h$, ce que nous avons exclu.

Enfin, on calcule le déterminant de $D_{h,\lambda}$. Dans la base $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, le Frobenius correspond à la multiplication par $\lambda^2 X^{-h(q-1)}$ et l'action de $a \in \Gamma_{K,\text{LT}}$ à la multiplication par $f_a(X)^h$. On vérifie que dans la base $X^h(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ le Frobenius correspond à la multiplication par λ^2 :

$$\begin{aligned} \varphi_{q,\det(D_{h,\lambda})}(X^h(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)) &= X^{hq}((- \lambda^2 X^{-h(q-1)} \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_1) \\ &= -\lambda^2 X^h \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= \lambda^2 (X^h(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)) \end{aligned}$$

¹⁰Probablement pour h général aussi, mais nous ne le prouvons pas dans cette thèse.

¹¹On vérifie que $f_a \in 1 + XE^+$. Ainsi, il est possible de prendre sa racine $q+1$ -ième, via la formule $(1 + Xg)^{1/(q+1)} = \sum_{n \geq 0} \binom{(q+1)^{-1}}{n} X^n g^n$ où $(q+1)^{-1} \in \mathbb{Z}_p$.

et l'action de a à la multiplication par a^h . Puisque \mathbb{D}_{LT} est exact et que \mathbb{V}_{LT} commute à la formation du déterminant, $\mathbb{V}_{LT}(D_{h,\lambda})$ est une représentation absolument irréductible de dimension 2 et de déterminant $\omega_{K,LT,\pi}^h \mu_{\lambda^2}$. À la fin de la preuve du Corollaire 3.4.7, nous avons vu que cela caractérisait $W_{h,\lambda}$. \square

3.5 Automatiques continuités

Dans [Fon07, §3.3.2] et [Sch17, Déf. 2.2.6], comme dans la section 3.3, les définitions des catégories de (φ, Γ_K) -modules requièrent la continuité de l'action de Γ_K pour la topologie initiale associée à la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Il se trouve que ces conditions de continuité sont automatiquement vérifiées. Cela n'enlève rien à l'importance desdites conditions pour manipuler les objets en jeu. En revanche, lorsque nous voulons définir un $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -module étale topologique, il n'est nul besoin de vérifier la continuité de l'action de $\Gamma_{K,LT}$.

Cette automaticité a été démontrée par P. Schneider dans [Sch17, Th. 2.2.8] de manière interne à la catégorie des $(\varphi_q, \Gamma_{K,LT})$ -modules. Nous commençons par en donner une autre preuve, qui repose sur un résultat d'automatique continuité pour les représentations galoisiennes¹² ainsi que les résultats topologiques du premier chapitre.

Lemme 3.5.1. *Tout morphisme d'un groupe procyclique G vers un groupe fini est continu.*

Démonstration. Soit N l'exposant dudit groupe fini. Alors G^N est contenu dans le noyau. Comme G est procyclique, il est isomorphe à un certain

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p / p^{n_p} \mathbb{Z}_p, \quad n_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Pour presque tout p on a $p \nmid N$ donc $N\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$ et que pour les autres $N\mathbb{Z}_p$ est ouvert dans \mathbb{Z}_p . Cela prouve que G^N est ouvert dans G . \square

Lemme 3.5.2. *Soit G un groupe profini et $g \in G$. Alors l'adhérence $\overline{\langle g \rangle}$ est procyclique et la topologie induite par G est la topologie profinie.*

¹²Dont nous espérons que la preuve est plus aisée à appréhender en première lecture.

Démonstration. Écrivons $G = \lim_I G_i$. Par construction de la topologie profinie, un élément appartient à $\overline{\langle g \rangle}$ ssi son image dans chaque G_i coïncide avec celle d'un g^n . Appelons g_i l'image de g dans G_i . Nous avons

$$\overline{\langle g \rangle} = \lim_I \langle g_i \rangle \subset \lim_I G_i$$

ce qui prouve déjà qu'il est procyclique. De plus, la topologie induite par G est la plus grossière rendant les projections vers G_i continues. Comme celles-ci se factorisent par $\langle g_i \rangle$, c'est la plus grossière rendant les projections sur $\langle g_i \rangle$ continues, i.e. la topologie profinie. \square

Lemme 3.5.3. *Soit G un groupe topologique, A un sous-groupe fermé normal et B un sous-groupe fermé. On suppose que A ou B est compact pour la topologie induite et que $AB = G$. Un morphisme $G \rightarrow H$ pour H fini est continu ssi ses restrictions à A et B le sont.*

Démonstration. Partons d'un morphisme $f : G \rightarrow H$ vers un groupe fini dont les restrictions sont continues. Pour prouver que f est continu, il suffit que pour toute suite $g_n \xrightarrow{e}_G$, il existe une suite extraite dans le noyau de f .

On écrit $g_n = a_n b_n$. Quitte à extraire par compacité de B , on peut supposer¹³ que $b_n \rightarrow b$. Il vient que $a_n \rightarrow b^{-1}$, puis comme A et B sont fermés que $b \in A \cap B$. Alors, $g_n = (a_n b)(b^{-1} b_n)$ et les deux suites $a_n b$ et $b^{-1} b_n$ tendent vers l'identité. Par continuité des restrictions de f , on obtient $f(a_n b) = e_H$ et $f(b^{-1} b_n) = e_H$ à partir d'un certain rang, ce qui conclut. \square

Théorème 3.5.4. *Soit K un corps local p -adique, $L|\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $K_\infty|K$ une extension de Lie. Toute représentation linéaire de \mathcal{G}_K sur un \mathcal{O}_L -module de type fini dont la restriction à \mathcal{G}_{K_∞} est continue pour la topologie p -adique est continue.*

Démonstration. Il suffit de le prouver pour un module de torsion puis de passer à la limite. Pour un tel module M , une représentation est continue si et seulement si le morphisme déduit $\rho : \mathcal{G}_K \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}_L}(M)$ est continue pour la topologie discrète au but.

Le quotient $\text{Gal}(K_\infty|K)$ de \mathcal{G}_K a un sous-groupe ouvert distingué U muni d'un isomorphisme de groupes topologiques $\iota : U \rightarrow \mathbb{Z}_p^d$. On appelle $\text{res} : \mathcal{G}_K \rightarrow \text{Gal}(K_\infty|K)$. Soient $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}_K$ tels que les $\iota(\text{res}(g_i))$ forment une \mathbb{Z}_p -base de \mathbb{Z}_p^d . D'après le Lemme 3.5.2, chaque $\overline{\langle g_i \rangle}$ est procyclique et la topologie induite est la topologie profinie. Ainsi, on montre par récurrence que

$$G_i := \mathcal{G}_{K_\infty} \overline{\langle g_1 \rangle} \dots \overline{\langle g_i \rangle} = \text{res}^{-1}(\iota^{-1}(\mathbb{Z}_p^i \times \{0\}^{d-i}))$$

¹³Un raisonnement analogue fonctionne si A est compact.

et que la restriction de ρ à G_i est continue. Pour $i = 0$, c'est l'hypothèse du théorème. Pour l'hérédité sur la restriction, on utilise simultanément le Lemme 3.5.1 sur $\langle g_{i+1} \rangle$ et le Lemme 3.5.1 sur $G_{i+1} = G_i \langle g_{i+1} \rangle$. On sait que G_i distingué et fermé grâce à sa description donnée par l'hérédité. Le groupe G_d est d'indice fini dans \mathcal{G}_K : la continuité de ρ se teste donc sur G_d . \square

Ce théorème s'applique en particulier pour $K_\infty = K(\mu_{p^\infty})$ et $K_\infty = K_{\text{LT},\pi}$ pour un choix d'uniformisante π .

Corollaire 3.5.5. *Les sous-catégories pleine de $\text{Mod}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ données par $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ pour la topologie faible et $\text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ coïncident.*

Démonstration. Soit $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}_K, \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi})$ la catégorie des représentations de \mathcal{G}_K sur des \mathcal{O}_K -modules de type fini telles que la restriction à \mathcal{H}_K est continue pour la topologie π -adique. Une preuve similaire à celle du Théorème 3.3.2 démontre que

$$\mathbb{D}_{\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}_K, \mathcal{H}_K) \rightarrow \text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}), \quad V \mapsto (\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}^{\widehat{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}} V)^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}}$$

est une équivalence de catégories. Pour cela, nous pointons plusieurs détails. D'une part, la catégorie de représentations coïncide avec¹⁴ $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_K, \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}, \mathcal{O}_K)$ où \mathcal{T} est la topologie grossière et \mathcal{T}' la topologie π -adique. En effet, la condition de continuité pour la topologie grossière est automatique. D'autre part, la catégorie $\text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ coïncide avec $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \varphi_q^\mathbb{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ pour les deux mêmes topologies : puisque $\varphi_q^\mathbb{N}$ est discret et son action \mathcal{O}_K -linéaire, la condition de continuité π -adique de l'action est automatique (voir l'Exemple 2.5.9). Enfin, les anneaux \mathcal{O}_K et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ sont de valuation discrète et d'uniformisante π ; ils ont de bonnes propriétés de π -dévissage. La preuve imite alors celle du Théorème 3.3.2 en décomposant le foncteur via la catégorie $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \mathcal{G}_K, \varphi_q^\mathbb{N} \times \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ avec les deux mêmes topologies

Le Théorème 3.5.4 affirme alors que la sous-catégorie pleine $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}_K, \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi})$ est en réalité toute la catégorie. Le Théorème 3.3.2 affirme que l'image essentielle de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$ est contenue dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K})$ pour la topologie faible, l'équivalence ci-dessus conclut que

$$\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) = \text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_q^\mathbb{N} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}).$$

\square

¹⁴Voir Définition 2.5.26.

Remarque 3.5.6. Tout caractère $\chi : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$ est continu. Il se factorise par $\mathcal{G}_K^{\text{ab}}$ et le Théorème ci-dessus affirme qu'il suffit de vérifier la continuité sur l'image de $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}$, i.e. sur $\overline{\langle \text{Frob} \rangle}$. Ce groupe étant procyclique, le Lemme 3.5.1 entraîne que tout morphisme vers un groupe profini est continu.

Je ne sais pas s'il existe des représentations de \mathcal{G}_K sur des \mathcal{O}_K -modules de type fini qui ne soient pas continues. Le Théorème 3.5.4 entraîne qu'elle devraient s'écrire comme extension à \mathcal{G}_K d'une représentation non continue de $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi}$. On peut construire un morphisme non continu $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi} \rightarrow \mathbb{F}_p$: choisissons les morphismes continus η_n de la Remarque 3.3.4. En suivant l'idée de [RZ10, Ex. 4.2.12], on choisit un ultrafiltre \mathcal{F} contenant le filtre de Fréchet. Alors

$$\eta : \mathcal{H}_{K,\text{LT},\pi} \rightarrow \mathbb{F}_p, \quad \sigma \mapsto x \text{ tel que } \{n \mid \eta_n(\sigma) = x\} \in \mathcal{F}$$

construit un morphisme non continu, i.e. une représentation réductible non semi-simple et non continue de dimension 2 sur \mathbb{F}_p .

Nous utiliserons plutôt cette stratégie pour démontrer des résultats similaires dans le cas multivariable. Toutefois, il semble intéressant pour se familiariser avec les $(\varphi_q, \Gamma_{K,\text{LT}})$ -modules de rédiger une preuve qui, comme celle de [Sch17], vit purement dans le monde des $(\varphi_q, \Gamma_{K,\text{LT}})$ -modules. Nous nous restreignons aux objets modulo p .

Théorème 3.5.7. *Tout objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, E_K)$ est topologique.*

Démonstration. Soit D un tel E_K -espace vectoriel. Appelons d sa dimension et choisissons une base. On note Φ (resp. M_a) la matrice du Frobenius dans cette base (resp. les matrices donnant l'action de $\Gamma_{K,\text{LT}}$). Puisque le module est étale, la matrice Φ est inversible. La semi-linéarité de l'action dit que $a \mapsto M_a$ est un cocycle $M \in Z^1(\Gamma_{K,\text{LT}}, \text{GL}_d(E_K))$. Nous cherchons à prouver qu'il est continu. Pour cela, on prouve que l'image réciproque de l'identité par chaque $(M \bmod M_d(X^n E_K^+))$ est ouverte.

Pour une matrice M , on appelle $v_X(M)$ le minimum des valuations X -adiques des coefficients. On a

$$v_X(MN) \geq v_X(M) + v_X(N),$$

$$v_X(\varphi_q(M)) = qv_X(M) \text{ et } v_X(a \cdot M) = v_X(M).$$

La commutation du Frobenius au $\Gamma_{K,\text{LT}}$ entraîne que

$$\forall a \in \Gamma_{K,\text{LT}}, \quad \varphi_q(M_a) = \Phi^{-1} M_a a \cdot \Phi,$$

ce qui donne

$$qv_X(M_a) \geq v_X(M_a) + v_X(\Phi) + v_X(\Phi^{-1}).$$

Ceci implique que $v_X(M_a)$ est borné inférieurement. Posons $-v$ une telle borne inférieure. Ainsi, M est un cocycle de $Z^1(\Gamma_{K,LT}, GL_d(X^{-v}E_K^+))$.

Soit $U < \Gamma_{K,LT}$ ouvert tel que

$$\forall a \in U, \quad a \cdot X \equiv X \pmod{X^{v+1}E^+}$$

en particulier $N \in M_d(X^{-v}E^+) \implies a \cdot N \in N + M_d(E^+)$. Notons Λ le réseau de D associé à la base choisie, et choisissons une famille $(N_i)_{i \leq k}$ de représentants de $(M_a \bmod M_d(E^+))_{a \in U}$. Appelons Λ' le réseau $\sum_i N_i \Lambda$. Soit $a \in U$ et $i \leq k$. On pose $b \in U$ et $N \in M_d(E^+)$ tels que $N_i = M_b + N$. Dans ce contexte,

$$M_a N_i \in M_{ab} + M_a M_d(E^+) + M_d(E^+) \text{ puis } M_a N_i \Lambda \subset \Lambda'.$$

On vient de prouver que le cocycle, restreint à U a un réseau stable. Quitte à choisir mieux notre base, on peut donc supposer que $M|_U \in Z^1(U, GL_d(E_K^+))$.

Prouvons par récurrence sur $n \geq 1$ que la réduction modulo $M_d(X^n E^+)$ du cocycle envoie un sous-groupe ouvert sur l'identité, ce qui conclura. Pour $n = 1$, l'action de $\Gamma_{K,LT}$ sur E_K^+ est triviale modulo X . Par conséquent, la réduction du cocycle modulo $M_d(X E_K^+)$ est un morphisme de groupes de U vers $GL_d(\mathbb{F}_q)$. Comme U est groupe de Lie p -adique, tout morphisme vers un groupe fini est continu¹⁵ : l'initialisation est démontrée. Supposons le résultat correct pour n et posons $U_n < \Gamma_{K,LT}$ ouvert tel que $c|_{U_n} \equiv \text{Id} \pmod{M_d(X^n E_K^+)}$. Il existe alors $\epsilon : U_n \rightarrow M_d(\mathbb{F}_q)$ tel que

$$c|_{U_n} \equiv 1 + X^n \epsilon \pmod{M_d(X^{n+1} E_K^+)}.$$

La condition de cocycle affirme que $\epsilon(a_1 a_2) = \overline{a_1^n} \epsilon(a_2) + \epsilon(a_1)$. Nous en tirons que restreint à $U_n \cap (1 + \pi \mathcal{O}_K)$, ϵ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est automatiquement continu¹⁶ ce qui fournit l'hérédité. \square

Remarque 3.5.8. Pour les modules de dimension 1, on peut même se passer de l'existence du φ_q .

Remarque 3.5.9. Le Corollaire 3.5.5 permet d'expliciter un point éludé dans [Dee01]. Rappelons le contexte pour $K = \mathbb{Q}_p$. Soit R un anneau local noethérien, complet par rapport à la topologie \mathfrak{m}_R -adique, de corps résiduel k_R fini de caractéristique p . Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}, R}$ le produit tensoriel complété de R et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$, muni d'une action R -linéaire de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}_p^\times)$ provenant de celle sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$. La définition des familles de (φ, Γ) -modules

¹⁵Imiter les arguments du Théorème 3.5.4.

¹⁶Idem.

de [Dee01, haut de la p. 655] ne fait étrangement pas intervenir de topologie : il s'agit des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p, R}}$ -modules de type fini avec une action semi-linéaire de $(\varphi^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}_p^{\times})$. Ledit article prouve un isomorphisme de comparaison pour les familles de représentations, i.e. les représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur un R -modules de type fini, continues pour la topologie initiale induite par le topologie \mathfrak{m}_R -adique. Or, pour démontrer que le foncteur depuis les familles de (φ, Γ) -modules sur R produit bien de telles représentations, il faudrait à première vue la continuité de l'action de \mathbb{Z}_p^{\times} pour la topologie initiale induite par la topologie produit tensoriel sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p, R}}$.

Pour réparer l'argument, les deux stratégies d'automatique continuité ci-dessus fonctionnent. Par exemple on peut montrer qu'une action semi-linéaire de \mathbb{Z}_p^{\times} sur un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p, R}}$ -module de type fini est automatiquement continue. Soit D une telle famille de (φ, Γ) -modules. Comme la topologie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p, R}}$ est plus grossière que la topologie \mathfrak{m}_R -adique, la continuité se teste sur chaque $D/\mathfrak{m}_R^n D$. Puisque R/\mathfrak{m}_R^n est fini, le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ -module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p, R}}/\mathfrak{m}_R^n$ est de type fini et la topologie produit tensoriel est la topologie initiale comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ -module. Ainsi, l'action sur $D/\mathfrak{m}_R^n D$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$ -module de type finie et l'action de \mathbb{Z}_p^{\times} y est continue pour la topologie initiale donnée par la topologie produit tensorielle ssi elle l'est pour la topologie initiale donnée par la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}}$. Le résultat d'automatique continuité se déduit donc du Corollaire 3.5.5.

Le lemme de Drinfeld pour des diamants sur \mathbb{F}_q

4.1 Espaces perfectoides et diamants

Pour retrouver $\mathcal{G}_{\widetilde{E}, \Delta}$ comme groupe fondamental d'une catégorie galoisienne nous utilisons la théorie des diamants. Nous en donnons une exposition adaptée à nos besoins, avec pour référence [SW20] et [Sch]. La première référence fournit une approche vaste et accessible aux perfectoides, diamants et objets qui en découlent. La deuxième est plus compacte et technique mais nous servira comme sources d'énoncés millimétrés. Un lecteur ou une lectrice souhaitant d'abord se familiariser avec la géométrie adique et les perfectoides pourra se référer à [Mor].

Définition 4.1.1. Une paire de Tate perfectoïde est une paire (A, A^+) où A est un anneau topologique, A^+ un sous-anneau ouvert borné et intégralement clos et possédant un élément π vérifiant que

- La topologie sur A^+ est la topologie π -adique et A^+ est π -adiquement complet.
- Nous avons $p \in \pi^p A^+$.
- Le morphisme d'anneaux déduit $A^+/\pi A^+ \rightarrow A^+/\pi^p A^+$, $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme.

Un tel élément π s'appelle une pseudo-uniformisante. La définition de paire de Tate perfectoïde requiert l'existence d'une pseudo-uniformisante et non d'en choisir une.

À toute paire de Tate perfectoïde, nous associons un espace topologique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ muni de deux faisceaux d'anneaux que nous appelons espace affinoïde. L'ensemble sous-jacent sera

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{semi-norme multiplicative } |\cdot| : A \rightarrow \Gamma \cup \{0\} \\ \text{à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné,} \\ \text{continue pour la topologie de l'ordre sur } \Gamma, \\ \text{telle que } |A^+| \subseteq \Gamma_{\leq 1}. \end{array} \right\} / \sim.$$

La topologie a pour base d'ouverts les ouverts rationnels

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right) := \{ |\cdot| \text{ telle que } \forall i, |f_i| \leq |g| \neq 0 \} \text{ pour } (f_1, \dots, f_r) = A.$$

Cet espace est spectral. Les faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+$ sont caractérisés par leurs valeurs sur les ouverts rationnels :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}\left(U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right)\right) &= \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} [\pi^{-1}], \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+\left(U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right)\right) &= \text{clôture intégrale de } \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} \\ &\quad \text{dans } \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} \left[\frac{1}{\pi}\right].\end{aligned}$$

Définition 4.1.2. Un espace perfectoïde est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ formé d'un espace topologique et de deux faisceaux d'anneaux, qui est localement isomorphe à un espace affinoïde $(\mathrm{Spa}(A, A^+), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+)$. On note souvent un tel triplet X par abus. Les morphismes d'espaces perfectoïdes sont les morphismes d'espaces annelés $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ induit localement par un morphisme d'anneaux continu tel que de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y^+) \subset \mathcal{O}_X^+$.

On dit qu'il est de caractéristique p (resp. de caractéristique mixte) si \mathcal{O}_X a pour valeurs des anneaux de caractéristique p (resp. de caractéristique nulle).

Proposition 4.1.3. *Un morphisme $(A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ entre paire de Tate perfectoïdes est un morphisme d'anneaux continu $f : A \rightarrow B$ tel que $f(A^+) \subset B^+$. L'association $(A, A^+) \mapsto \mathrm{Spa}(A, A^+)$ fournit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie opposée des paires de Tate perfectoïdes vers celle des espaces perfectoïdes.*

Remarque 4.1.4. Pour tout corps perfectoïde avec sa valuation $|\cdot|$, on pose $F^\circ = \{x \in F \mid |x| \leq 1\}$. Le couple (F, F°) est une paire de Tate perfectoïde et on note $\mathrm{Spa}(F)$ l'espace affinoïde associé. Il n'a qu'un seul point donné par la classe d'équivalence de $|\cdot|$. Réciproquement soit (F, F^+) une paire de Tate perfectoïde pour laquelle F est un corps. Pour une pseudo-uniformisante π , la valuation

$$|x|_\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^{-\min\{k \in \mathbb{Z} \mid x^n \in \pi^k F^+\}/n}$$

est une valuation de rang 1 non discrète et fait de K un corps perfectoïde. L'espace $\mathrm{Spa}(F, F^+)$ possède $\mathrm{Spa}(F)$ comme point générique.

Définition 4.1.5 (voir Définitions 6.2 et 7.8 dans [Sch]). Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces perfectoïdes.

1) Le morphisme f est dit fini étale si pour tout ouvert affinoïde $U = \mathrm{Spa}(R, R^+) \subset X$, son image réciproque est affinoïde. Notons que $f^{-1}(U) = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ et que le morphisme $R \rightarrow A$ est fini étale, identifiant A^+

à la clôture intégrale de R^+ dans A . Il suffit de le vérifier sur un recouvrement ouvert du but (voir [Sch12, §7]).

2) Le morphisme f est dit étale s'il se factorise localement sur Y comme la composée d'une immersion ouverte et d'un morphisme fini étale.

3) Le morphisme f est pro-étale s'il existe un recouvrement de Y en ouverts affinoïdes $V \subset Y$, tels qu'il existe $f(V) \subset U = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde, un petit système cofiltré d'espaces affinoïdes $\left(\mathrm{Spa}(A_i, A_i^+)\right)_I$ et un morphismes de diagrammes formé de morphismes affinoïdes étales $\left(\mathrm{Spa}(A_i, A_i^+)\right)_I \rightarrow \mathrm{Spa}(R, R^+)$ tel que $f|_V$ s'identifie à la limite de ce diagramme. Comme décrit dans [Sch, Prop. 6.4], la limite de ce diagramme est affinoïde.

Exemple 4.1.6. Soit F un corps perfectoïde et F^+ un anneau de définition. Les espaces perfectoïdes finis étales sur $\mathrm{Spa}(F, F^+)$ sont isomorphes aux

$$\bigsqcup_{i \in I} \mathrm{Spa}(F_i, F_i^+)$$

où I est fini, où les $F_i|F$ sont des extensions finies séparables et où F_i^+ est la clôture intégrale de F^+ dans F .

En particulier si F est algébriquement clos, les seuls espaces finis étales sur $\mathrm{Spa}(F, F^+)$ sont des unions disjointes de $\mathrm{Spa}(F, F^+)$.

Définition 4.1.7 (voir Définition 8.1 dans [Sch]). Nous définissons la sous-catégorie pleine Perf des espaces perfectoïdes dont les objets sont ceux de caractéristique p . Nous la munissons de la topologie pro-étale : les recouvrement de X sont les familles $(f_i : X_i \rightarrow X)_I$ de morphismes pro-étales tels que pour tout ouvert quasi-compact U de X , il existe $J \subset I$ finis et des ouverts quasi-compacts $V_j \subset X_j$ tels que $U \subset \bigcup_J f_j(V_j)$. La catégorie Perf munie de cette topologie sera appelée le site pro-étale Perf .

On appelle petit faisceau pro-étale un faisceau sur Perf qui admet une surjection depuis un espace perfectoïde. Cette condition règle les problèmes à définir le topos associé à Perf , qui n'est pas une petite catégorie. On écrit donc Perf comme "union" de petites catégories et on regarde la "colimite" des topos obtenus, le long de flèches pleinement fidèles. Dans les preuves et les références à SGA, on oubliera cette subtilités.

Grâce à [Sch, Cor. 8.6], la topologie sur le site pro-étale Perf est sous-canonique¹, au sens où pour tout espace perfectoïde X de caractéristique p , le préfaisceau $Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perf}}(Z, X)$ est un petit faisceau sur le site pro-étale Perf . Nous conservons la même notation pour un espace perfectoïde et le faisceau associé. Pour les propriétés

¹Voir [Sta18, Tag 00WQ] and [Sta18, Tag 00WP].

d'une topologie sous-canonique et plus généralement la notion de morphismes représentables de faisceaux, nous renvoyons à [Sta18, Tag 00UZ] et [Sta18, Tag 0021].

Définition 4.1.8. Un diamant X est un (petit) faisceau sur le site pro-étale Perf de la forme X_0/R . Ici X_0 est un espace perfectoïde de caractéristique p et R est une relation d'équivalence² sur X_0 telle que R est un faisceau représentable et que les compositions $R \rightarrow X_0 \times X_0 \rightrightarrows X_0$ sont des morphismes pro-étales.

Les espaces perfectoïdes de caractéristique p forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des diamants.

Tout espace perfectoïde de caractéristique p étant muni d'une action du Frobenius absolu, c'est encore le cas de tout diamant. Tout morphisme de diamant est équivariant pour le Frobenius.

Définition 4.1.9. Pour tout corps discret k de caractéristique p , nous notons abusivement $\text{Spd}(k)$ le faisceau sur Perf qui à un affinoïde $\text{Spa}(A, A^+)$ envoie l'ensemble des morphismes d'anneaux $k \rightarrow A$. Ce n'est pas un diamant.

Pour une puissance q de p et un diamant X sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$, le q -Frobenius est un automorphisme de diamants sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$.

Proposition 4.1.10. Soient X, Y deux diamants sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Le faisceau pro-étale $X \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y$ est un diamant.

Démonstration. Similaire à la Proposition 11.4 dans [Sch]. □

Pour une introduction plus complète que les définitions qui suivront, nous renvoyons le lecteur à [Sch, §11].

Définition 4.1.11 (voir Définitions 10.1 et 10.7 dans [Sch]). Un morphisme de diamants $X' \rightarrow X$ est appelé fini étale (resp. immersion ouverte) lorsque, pour tout espace perfectoïde X et tout morphisme de faisceaux $Y \rightarrow X$, le produit fibré $Y \times_X X'$ est représentable dans Perf et le morphisme d'espaces perfectoïdes $Y \times_X X' \rightarrow Y$ est fini étale (resp. est une immersion ouverte).

Dans le cas d'une immersion ouverte, nous dirons par abus de langage que X' est un ouvert de X .

Proposition 4.1.12 (voir Proposition 10.4 dans [Sch]). Soient $f : Y \rightarrow Y_1$, $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ et $h : X \rightarrow Y$ des morphismes de diamants.

- 1) Si f et g sont finis étales alors $g \circ f$ aussi.
- 2) Si $g \circ f$ et g sont finis étales, alors f aussi.
- 3) Si f est fini étale, alors $Y \times_{Y_1} X \rightarrow X$ est fini étale.

²Une relation d'équivalence sur un faisceau X_0 est sous-faisceau R de $X_0 \times X_0$ qui induit une relation d'équivalence au niveau des sections sur chaque objet de Perf .

Définition/Proposition 4.1.13. 1. Un point géométrique d'un diamant X est un morphisme de faisceaux sur Perf

$$\bar{x} : \text{Spa}(F) \rightarrow X$$

où F est un corps perfectoïde (de caractéristique p) algébriquement clos³.

2. Deux points \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont dits équivalents s'il existe un corps perfectoïde algébriquement clos F et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spa}(F_1) & \\ \nearrow & & \searrow \bar{x}_1 \\ \text{Spa}(F) & & X \\ \searrow & & \nearrow \bar{x}_2 \\ & \text{Spa}(F_2) & \end{array}$$

Soit X un diamant. L'ensemble des points géométriques à équivalence près est noté $|X|$. Si X est un espace perfectoïde de caractéristique p , l'ensemble $|X|$ s'identifie à l'espace sous-jacent; il a donc une topologie naturelle. Si $X = X_0/R$ est un écriture comme quotient d'un espace perfectoïde, la topologie quotient sur $|X|$ induite par $|X_0|$ ne dépend pas de l'écriture. Nous appelons espace sous-jacent au diamant, encore noté X , l'ensemble $|X|$ muni de cette topologie.

3. Les ouverts de X correspondent exactement aux ouverts de l'espace topologique $|X|$.
4. Un diamant X est dit connexe s'il n'admet pas d'écriture comme union disjointe de deux ouverts non vides. Cela équivaut à ce que $|X|$ soit connexe.

Nous définissons une classe de diamants pour lesquels l'espace topologique sous-jacent est gentil, permettant par exemple de déduire des propriétés du comportement sur les points géométriques (voir la preuve de la Proposition 4.3.6).

Définition 4.1.14. Un diamant X est dit spatial s'il est quasi-compact et quasi-séparé (qcqs) et s'il existe une base d'ouverts pour lesquels l'inclusion est quasi-compacte⁴

Lemme 4.1.15. Soit X un diamant sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$, spatial. Soit Y un diamant qcqs sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$ avec une base d'ouverts pour lesquels l'inclusion est quasi-compacte. Alors le produit fibré $X \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y$ est un diamant spatial.

³Nous choisissons délibérément de considérer $\text{Spa}(F)$, i.e. de fixer $F^+ = F^\circ$. Nous obtiendrions la même définition d'espace sous-jacent en considérant les $\text{Spa}(F, F^+)$ pour F un corps perfectoïde algébrique clos.

⁴Notons que d'après [Sch, Prop. 11.15], ces ouverts sont identifiés à des ouverts de $|X|$.

Démonstration. Puisque $Y \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est quasi-compact et que X est quasi-compact, le produit fibré est quasi-compact. Soient Z et Z' deux faisceaux pro-étales quasi-compacts avec des morphismes vers le produit fibré. On écrit

$$Z \times_{(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y)} Z' = (Z \times_X Z')_{Z \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Z'} \left(Y \times_{(Y \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y)} (Z \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Z') \right).$$

Puisque X est quasi-séparé, $Z \times_X Z'$ est quasi-compact. Puisque $Y \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est quasi-séparé, le morphisme

$$Y \times_{(Y \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y)} (Z \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Z') \rightarrow Z \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Z'$$

est quasi-compact, ce qui conclut à la quasi-séparation de $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y$.

Le produit fibrés d'ouverts U et V de X et Y pour lesquels l'inclusion est quasi-compacte fournissent une base d'ouverts pour lesquels l'inclusion est quasi-compacte ; c'est une composée de changements de base des inclusions quasi-compactes. \square

4.2 Groupe fondamental fini étale

4.2.1 Catégories galoisiennes

Nous définissons la notion de catégorie galoisienne. On l'interprètera comme une liste de conditions pour construire une équivalence avec une catégorie de représentations d'un groupe profini. Le lecteur ou la lectrice souhaitant un exposé détaillé de la théorie pourra se référer à [GR03, V, §4].

Définition 4.2.1. 1. Soit \mathcal{C} une catégorie ayant toutes les limites et colimites. On dit qu'un objet X est \mathcal{C} -connexe si pour tout monomorphisme $f : Y \rightarrow X$, l'objet Y est initial ou le morphisme f est un isomorphisme.

2. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories ayant toutes les limites et colimites finies. On dit qu'il est exact s'il envoie les objets initiaux (et finaux) sur des objets initiaux (et finaux), et que pour tout diagramme $(X \rightarrow Y \leftarrow Z)$ et $(X' \leftarrow Y' \rightarrow Z')$, les morphismes naturels

$$F(X \times_Y Z) \rightarrow F(X) \times_{F(Y)} F(Z) \text{ et } F(X') \sqcup_{F(Y')} F(Z') \rightarrow F(X' \sqcup_{Y'} Z')$$

sont des isomorphismes.

3. Un tel foncteur F est dit conservatif si tout morphisme f de \mathcal{C} est un isomorphisme dès que $F(f)$ l'est.

Définition 4.2.2 (Voir la Définition 2.4 dans [Jon15]). Une catégorie galoisienne est un couple (\mathcal{C}, F) , où \mathcal{C} est une catégorie essentiellement petite et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un foncteur, tel que

- a) La catégorie \mathcal{C} a toutes les limites et colimites finies.
- b) Tout objet de \mathcal{C} est une union disjointe finie d'objets \mathcal{C} -connexes.
- c) Le foncteur F est à valeurs dans les ensembles finis.
- d) Le foncteur F est exact.
- e) Le foncteur F est conservatif.

Théorème 4.2.3. Soit (\mathcal{C}, F) une catégorie galoisienne. Définissons le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ comme le groupe d'automorphismes du foncteur F . Il s'identifie à un sous-groupe de

$$\prod_{X \in \mathcal{D}} \mathfrak{S}_{F(X)}$$

où \mathcal{D} est une petite sous-catégorie de \mathcal{C} qui lui est équivalente. Nous le munissons de la topologie induite par la topologie profinie.

Pour tout objet X , l'action de $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ sur $F(X)$ est donc à stabilisateurs ouverts et F se promeut en une équivalence de catégories

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, F)\text{-EnsFinis}$$

où cette dernière catégorie est celle des $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ -ensembles finis à stabilisateurs ouverts.

Pour une preuve pas à pas, nous renvoyons à [Jon15, Prop. 3.4]. Avant de continuer, il est tout de même intéressant d'introduire la notion d'objet galoisien de \mathcal{C} et de comprendre comment interpréter le groupe fondamental en ces termes.

Exemple 4.2.4. Commençons par nous donner une intuition sur l'exemple du groupe de Galois d'un corps. Soit K un corps quelconque et \overline{K} une clôture galoisienne fixée. On considère la catégorie $\mathbf{F\acute{E}t}(\mathrm{Spec}(K))$ des schémas finis étales sur $\mathrm{Spec}(K)$. Ces schémas sont exactement les spectres de produits finis d'extensions finies séparables de K . Le foncteur fibre que l'on considère est

$$\mathrm{Spec}(A) \mapsto \mathrm{Hom}_K(A, \overline{K}).$$

Ce couple fournit une catégorie galoisienne. Le spectre d'un produit étant l'union disjointe des spectres des termes, les objets connexes sont exactement les spectres d'extensions finies séparables.

Les axiomes d'une catégorie galoisienne impliquent que pour deux morphismes $f, g : X \rightarrow Y$ depuis un objet connexe, s'il existe $x \in F(X)$ tel que $F(f)(x) = F(g)(x)$, alors⁵ $f = g$. Cela implique que pour tout objet connexe X , nous avons

$\# \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \leq \# F(X)$. Un objet est dit *galoisien* s'il y a égalité⁶. Tout objet connexe possède un épimorphisme depuis un objet galoisien. La catégorie étant essentiellement petite et admettant des produits fibrés, il est alors possible de construire un ensemble ordonné filtrant I et un foncteur $(X_i)_{i \in I}$ dans les objets galoisiens de \mathcal{C} tel que tout objet connexe admette un épimorphisme⁷ depuis l'un des X_i . Choisissons de plus un élément $(x_i) \in \lim F(X_i)$. Ceci détermine pour tout i , une bijection

$$\iota_i : \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i) \rightarrow F(X_i), \quad f \mapsto F(f)(x_i)$$

et les applications $F(X_j) \rightarrow F(X_i)$ s'identifient à des morphismes de groupes $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X_j) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$. Cela détermine donc un diagramme de groupes $i \mapsto \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$ et une application

$$\pi_1(\mathcal{C}, F) \rightarrow \lim \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i), \quad \sigma \mapsto \left(\iota_i^{-1}(\sigma(F)(x_i)) \right)_i$$

qui est un isomorphisme de groupes profinis⁸.

4.2.2 Existence du groupe fondamental d'un diamant

Définition 4.2.5. Soit X un diamant. La catégorie $\text{FÉt}(X)$ a pour objets les morphismes de diamants finis étales $Y \rightarrow X$ et pour morphismes les morphismes de X -diamants (qui sont automatiquement finis étales).

Soit \bar{x} un point géométrique de X . Nous définissons le foncteur fibre

$$\text{Fib}_{\bar{x}} : \text{FÉt}(X) \rightarrow \text{Ens}, \quad [Y \rightarrow X] \mapsto |Y \times_X \bar{x}|.$$

Voyons comment ajouter l'action d'un groupe localement profini.

Définition 4.2.6. Soit Γ un groupe localement profini.

⁵Dans le cas de $\text{FÉt}(\text{Spec}(K))$, cela se traduit par le fait que deux morphismes depuis d'une K -algèbre finie étale vers une extension finie séparable de K coïncident s'ils coïncident après post-composition par un plongement dans \bar{K} .

⁶Ces deux derniers énoncés correspondent dans le cas de $\text{FÉt}(\text{Spec}(K))$ au théorème d'Artin et à la définition d'une extension galoisienne.

⁷Dans le cas de $\text{FÉt}(\text{Spec}(K))$, on peut choisir une famille d'extensions finies galoisiennes de K telle que toute extensions finie se plonge dans l'une d'elles.

⁸Dans le cas de $\text{FÉt}(\text{Spec}(K))$, le choix des (x_i) correspond à un choix cohérent de plongements des extensions finies séparables dans \bar{K} . Ceci détermine correctement des morphismes de restriction entre leurs groupes de Galois et identifie le groupe fondamental à \mathcal{G}_K .

1. Définissons $\underline{\Gamma}$ le faisceau en groupes sur Perf donné par $\underline{\Gamma}(X) = \mathcal{C}(|X|, \Gamma)$.
2. Une action de Γ sur un diamant X est un morphisme de faisceau sur Perf

$$\underline{\Gamma} \times X \rightarrow X$$

qui fait commuter les diagrammes d'actions de groupes.

3. Un diamant X avec action de Γ est dit Γ -connexe s'il n'est pas l'union de deux ouverts non vides stables par l'action de $\underline{\Gamma}$.

Remarque 4.2.7. Une telle action de Γ sur X induit une action continue de Γ sur $|X|$. Les ouverts $\underline{\Gamma}$ -stables de X correspondent bijectivement aux ouverts Γ -stables de $|X|$.

Définition 4.2.8. Soit Γ un groupe localement profini et X un diamant muni d'une action de Γ . La catégorie $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ a pour objets les morphismes finis étales Γ -équivalents $Y \rightarrow X$ où Y est un diamant avec action de Γ . Les morphismes sont les morphismes de X -diamants Γ -équivalents.

Soit \bar{x} un point géométrique de X , nous définissons le foncteur fibre

$$\text{Fib}_{\bar{x}} : \text{FÉt}(X|\Gamma) \rightarrow \text{Ens}, [Y \rightarrow X] \mapsto |Y \times_X \bar{x}|.$$

Théorème 4.2.9. Soit X un diamant munit d'une action d'un groupe localement profini Γ pour laquelle il est Γ -connexe et \bar{x} un point géométrique.

Le couple $(\text{FÉt}(X|\Gamma), \text{Fib}_{\bar{x}})$ est une catégorie galoisienne dont on notera $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})$ le groupe fondamental. Les diamants $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ -connexes sont les diamants Γ -connexes.

Démonstration. Nous vérifions les axiomes d'une catégorie galoisienne listés en 4.2.2 en décalquant au maximum la preuve du cas schématique dans [Jon15, Th. 4.4].

a) Pour l'existence de limites et colimites finies dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$, il suffit de montrer l'existence d'un objet final, de produits fibrés, de l'union disjointe de deux objets et de coégalisateurs, ce que nous montrons dans l'ordre.

Objet final : l'objet X muni de son action de Γ est clairement un objet final de $\text{FÉt}(X|\Gamma)$.

Produits fibrés : prenons un diagramme de produit fibrés dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$, i.e. un diagramme commutatif au flèches Γ -équivalentes comme suit

$$\begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \downarrow & \searrow \\ Y_1 & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

Nous considérons le produit fibré dans Perf/X , muni du produit fibré des actions (qui existe car les morphismes sont équivariants). Il reste à vérifier que le morphisme structural vers X , ainsi que les morphismes structuraux du produits Y_1, Y_2 et Y . Grâce à la Proposition 4.1.12 il suffit de le montrer pour $Y_1 \times_Y Y_2 \rightarrow Y_1$. Il est fini étale puisqu'il s'agit du changement de base du morphisme fini étale $Y_2 \rightarrow Y$.

Unions disjointes finies : l'union disjointe $\sqcup Y_i$ d'objets de $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ dans la catégories des diamants avec action de Γ au-dessus de X appartient encore à $\text{FÉt}(X|\Gamma)$. En effet, l'image réciproque d'un ouvert affinoïde est une union disjointe finie d'affinoïde, donc un affinoïde ce qui démontre que le morphisme vers X est fini étale.

Coégalisateurs : comme nous regardons uniquement des diamants, l'existence de coégalisateurs sera plus aisée que dans le cas de schémas. Considérons un diagramme

$$Y_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y_2$$

dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$. La preuve fonctionne exactement comme dans [Sta18, Tag 0BN9] : le spectre adique des \mathcal{O}_X algèbres localement libres $p_*\mathcal{O}_{Y_i}$ est correctement défini et le coégalisateur correspond à l'égalisateur des \mathcal{O}_X -algèbres. On vérifie le caractère fini étale se fait après changement de base au voisinage étale schématique qui trivialisent lesdites \mathcal{O}_X -algèbre (on utilise par exemple [Sch, Prop. 9.11] pour descendre le caractère fini étale.), vu comme voisinage étale adique.

iii) Pour tout objet $Y \in \text{FÉt}(X|\Gamma)$, le morphisme structural

$$Y \times_X \bar{x} \rightarrow \bar{x}$$

est fini étale. Soit F le corps perfectoïde algébriquement clos correspondant à \bar{x} . L'Exemple 4.1.6 affirme qu'il existe un ensemble fini I tel que le diamant $Y \times_X \bar{x}$ est isomorphe à $\bigsqcup_I \text{Spa}(F)$. En particulier que son espace sous-jacent est fini.

ii) Nous commençons par prouver qu'un monomorphisme dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ est une immersion ouverte de but un ouvert fermé. Soit $f : Y' \rightarrow Y$ un tel monomorphisme. Dans toute catégorie⁹, en regardant ce que cela signifie sur les préfaisceaux Hom , un morphisme f est un monomorphisme si et seulement si sa diagonale est un isomorphisme. En particulier, le caractère monomorphique ne dépend pas de la catégorie. Nous en déduisons que f est un monomorphisme de diamants, fini étale. Tous ses changements de base par des morphismes depuis des espaces perfectoïdes sont représentables et sont des monomorphismes. Il suffit ainsi de démontrer qu'un monomorphisme fini étale d'espaces perfectoïdes est une immersion ouverte vers un ouvert fermé. Nous supposons à présent que Y' et Y sont des espaces perfectoïdes.

⁹Il faudrait en réalité considérer une petite catégorie, mais $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ et Perf sont toutes deux "colimites" de petites sous-catégories pleines, dans lesquelles les isomorphismes se détectent.

Pour cela, [Hub13, Lemme 1.4.5 ii) et Prop. 1.7.8] implique que l'image de f est un ouvert fermé de Y . De plus, le morphisme $Y' \rightarrow f(Y')$ est encore un monomorphisme fini étale, on peut supposer f ensemblistement surjectif, auquel cas nous voulons simplement prouver que c'est un isomorphisme. Puisque f est un monomorphisme, nous avons déjà démontré que sa diagonale est un isomorphisme. Le changement de base de f par f est donc un isomorphisme. Puisque f est ensemblistement surjective, en la voyant comme un morphisme surjectif de petits v -faisceaux, nous concluons que f est un isomorphisme grâce à [Sch, Prop. 10.11].

À présent, puisque tout monomorphisme dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ est une immersion ouverte sur un ouvert fermé, stable par Γ puisque le monomorphisme est Γ -équivariant, un objet de $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ est connexe si et seulement si le diamant associé est Γ -connexe au sens de la définition 4.1.13. Soit à présent $Y \in \text{FÉt}(X|\Gamma)$. Si Y possède plus de N composantes connexes, nous pouvons trouver récursivement une décomposition

$$Y = \bigsqcup_{1 \leq i \leq N} Y_i$$

en ouverts fermés non vides. Le morphisme $Y \rightarrow X$ est ouvert et fermé ce qui démontre que chaque $Y_i \rightarrow X$ est un épimorphisme puisque X est Γ -connexe. Par conséquent, chaque produit fibré $Y_i \times_X \bar{x}$ est non vide, fournissant un point différent de $\text{Fib}_{\bar{x}}(Y)$. Ce dernier ensemble étant fini, le diamant Y ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes, et se décompose par conséquent comme l'union disjointe finie de celles-ci.

d) Pour la commutation aux limites et colimites finies considérer d'abord qu'elles commutent à prendre la fibre adique au-dessus de \bar{x} . Pour conclure, se rappeler que lesdites fibres sont des unions disjointes de copies de \bar{x} . Le foncteur "ensemble sous-jacent" commute donc aux limites et colimites finies pour les espaces finis étales sur \bar{x} .

e) Il s'agit de démontrer que $\text{Fib}_{\bar{x}}$ est conservatif. Soit $i : Y' \rightarrow Y$ un morphisme dans $\text{FÉt}(X)$ tel que $\text{Fib}_{\bar{x}}$ induise un isomorphisme. Le foncteur fibre commutant naturellement aux unions disjointes, nous pouvons nous restreindre au cas où Y est connexe. Dans ce cas, soit U le sous-faisceau de Y défini pour tout espace perfectoïde Z de caractéristique p par

$$U(Z) = \left\{ f \in Y(Z) \mid \forall \bar{z} \rightarrow Z \text{ point géométrique } Y' \times_{i,Y,f \circ \bar{z}} \bar{z} = \bar{z} \right\}.$$

Démontrons que U est ouvert. Soit $g : \tilde{Y} \rightarrow Y$ un morphisme depuis un espace perfectoïde \tilde{Y} de caractéristique p . Le produit fibré $U \times_Y \tilde{Y}$ s'écrit

$$\begin{aligned} (U \times_Y \tilde{Y})(Z) &= \left\{ f \in \tilde{Y}(Z) \mid g \circ f \in U(Z) \right\} \\ &= \left\{ f \in \tilde{Y}(Z) \mid \forall \bar{z} \rightarrow Z, \ Y' \times_{i, Y, g \circ f \circ \bar{z}} \bar{z} = \bar{z} \right\} \\ &= \left\{ f \in \tilde{Y}(Z) \mid \forall \bar{z} \rightarrow Z, \ (Y' \times_Y \tilde{Y}) \times_{\tilde{Y}, f \circ \bar{z}} \bar{z} = \bar{z} \right\} \end{aligned}$$

Le morphisme $Y' \times_Y \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ est un morphisme fini étale entre espaces perfectoïdes. Comme un tel morphisme fini étale est localement libre de type fini, l'ensemble des points tels que la fibre géométrique est de cardinal 1 est un ouvert $U_{\tilde{Y}}$ de \tilde{Y} . L'ensemble $(U \times_Y \tilde{Y})(Z)$ est exactement les morphismes d'image contenue dans cet ouvert, d'où $(U \times_Y \tilde{Y}) = U_{\tilde{Y}}$ est un ouvert. Nous venons de démontrer que U est un sous-faisceau ouvert. Les mêmes arguments se généralisent en prenant le pré-faisceau "fibre de cardinal k " et en remplaçant " $= \bar{z}$ " par " $= \cup_{1 \leq i \leq k} \bar{z}_i$ " dans la définition. Ainsi, le sous-faisceau U est un ouvert-fermé de Y . De plus, en considérant les \bar{x} -points, le caractère isomorphe de $\text{Fib}_{\bar{x}}(i)$ démontre que $U(\bar{x})$ est non vide, donc que U est non vide. Par connexité, $U = Y$.

Pour tout corps perfectoïde algébriquement clos F et tout anneau d'entiers F^+ , il y a un morphisme induit $Y'(\text{Spd}(F, F^+)) \rightarrow Y(\text{Spd}(F, F^+))$. Tout élément au but est un point géométrique \bar{y} de Y et son image réciproque correspond à $Y' \times_Y \bar{y}$. En considérant que le point géométrique appartient à $U(\text{Spd}(F, F^+))$, nous en déduisons que cette image réciproque est de cardinal 1, autrement dit que le morphisme induit est une bijection. Le morphisme fini étale i est quasi-compact quasi-séparé (combiner [Sch, Déf. 6.2 et 10.1] et [AGV, VI Cor. 2.6]) ; nous concluons que i est un isomorphisme avec [Sch, Lemme 11.11]. \square

Exemple 4.2.10. Soit F un corps perfectoïde. Soit \bar{x} un point géométrique de $\text{Spa}(F)$ donné par le choix d'une clôture algébrique F^{alg} et le morphisme

$$\bar{x} : \text{Spa}(\widehat{F^{\text{alg}}}) \rightarrow \text{Spa}(F).$$

L'exemple 4.1.6 décrit les diamants Z dans $\text{FÉt}(\text{Spa}(F))$. Le foncteur $\text{Fib}_{\bar{x}}$ est isomorphe au foncteur qui envoie $\text{Spa}(F_i)$, où $F_i|F$ est finie, sur l'ensemble de plongements de F_i dans $\widehat{F^{\text{alg}}}$. L'action du groupe de Galois \mathcal{G}_F par post-composition sur ces plongements fournit des endotransformations du foncteur fibre. Elle identifie $\pi_1^{\text{fét}}(\text{Spa}(F), \bar{x})$ à \mathcal{G}_F .

Dans le cas où l'action est libre, il existe une description alternative de cette catégorie.

Proposition 4.2.11. *Soit X un diamant muni d'une action d'un groupe localement profini Γ . Alors, le petit faisceau pro-étale X/Γ est un diamant.*

Démonstration. Commençons par un petit rappel : pour une union disjointe d'espaces profinis S et un perfectoïde Y , le faisceau $Y \times S$ est un recouvrement pro-étale de Y pour la projection et $|Y \times S| = |Y| \times S$. Cela se vérifie localement sur Y et sur S , donc on peut supposer que $S = \lim_I S_i$ avec S_i fini. Alors

$$Y \times S = \lim_I Y \times S_i$$

et chaque $Y \times S_i$ est une union disjointe de copies de Y , donc étale sur Y . Pour Y affine, [Sch, Prop. 6.4] donne le résultat souhaité.

On montre ensuite que pour tout diamant Y , la projection $Y \times \Gamma \rightarrow Y$ est séparée et quasi-pro-étale¹⁰. D'après [Sch, Prop. 10.11], on peut le vérifier après v -recouvrement de Y par un perfectoïde, i.e. on peut supposer Y perfectoïde. Dans ce cas, on a déjà prouvé que la projection était pro-étale, en particulier quasi-pro-étale. Pour prouver qu'il est séparé, [Sch, Prop. 5.11] affirme qu'il faut vérifier que

$$|\Delta| : |Y \times \Gamma| \xrightarrow{|\text{Id}_Y \times \Delta_\Gamma|} |Y \times \Gamma \times \Gamma|$$

est une immersion fermée. Le paragraphe précédent l'identifie à

$$|Y| \times \Gamma \xrightarrow{\text{Id}_{|Y|} \times \Delta_\Gamma} |Y| \times \Gamma \times \Gamma$$

qui est fermée puisque Γ est séparé.

Revenons à notre diamant X avec action de Γ . On cherche à démontrer que le morphisme $X \times \Gamma \xrightarrow{\text{action}} X$ est quasi-pro-étale. Toujours d'après [Sch, Prop. 10.11], il suffit de vérifier que le changement de base par $\pi_1 : X \times \Gamma \rightarrow X$ est séparé et quasi-pro-étale. Il s'écrit

$$(X \times \Gamma) \times_{\text{action}, X, \pi_1} (X \times \Gamma) \xrightarrow{\pi_2} X \times \Gamma$$

Or

$$X \times \Gamma \times \Gamma \cong (X \times \Gamma) \times_{\text{action}, X, \pi_1} (X \times \Gamma), \quad (x, g, g') \mapsto ((g'^{-1}x, g'), (x, g))$$

¹⁰Ceci étant vrai pour tout Y , nous démontrons en réalité que le morphisme de petits faisceaux pro-étales $\underline{G} \rightarrow *$ est séparé et quasi-pro-étale. Nous aurions pu l'énoncer ainsi, mais il aurait fallu passer par la même preuve.

et via cette identification π_2 est la projection $(X \times \underline{G}) \times \underline{G} \rightarrow (X \times \underline{G})$. Le premier paragraphe de cette preuve démontre que ce morphisme est séparé et quasi-pro-étale.

Le faisceau X/Γ est le quotient de X par la relation $X \times \underline{\Gamma} \xrightarrow{\pi_1 \times \text{action}} X \times X$. Nous venons de démontrer que les deux projections de cette relation sont quasi-pro-étales ; [Sch, Prop. 11.8] conclut. \square

Théorème 4.2.12. *Soit X un diamant muni d'une action d'un groupe localement profini Γ pour laquelle il est Γ -connexe. On suppose également que l'action est libre, i.e. que pour tout corps perfectoïde algébriquement clos K l'action de Γ sur $X(\text{Spa}(K))$ est libre.*

Alors, pour tout point géométrique \bar{x} de X , le foncteur

$$\text{FÉt}(X|\Gamma) \rightarrow \text{FÉt}(X/\Gamma), \quad Y \mapsto Y/\Gamma$$

est une équivalence de catégories pour les foncteurs $\text{Fib}_{\bar{x}}$.

Démonstration. Cela découle du Théorème 4.2.9 si l'on prouve que le foncteur est une équivalence de catégories.

On commence par prouver que l'action sur $X(Z)$ pour tout perfectoïde Z . Soient $\gamma \in \mathcal{C}(|Z|, \Gamma)$ et $f \in X(Z)$ tels que $\gamma \cdot f = f$. Pour tout $z \in |Z|$, on choisit $z : \text{Spa}(F) \rightarrow Z$ dans la classe d'équivalence. Par naturalité de l'action, on a également

$$\gamma(z) \cdot (f \circ z) = (\gamma \cdot f) \circ z = f \circ z.$$

La liberté sur les points géométriques de rang 1 implique que $\gamma(z) = 1$. Ainsi $\gamma \equiv 1$.

Nous utilisons ensuite [Sch, Prop. 9.7] qui affirme que $\text{FÉt}(X/\Gamma)$ est équivalente à $\text{FÉt}(X)$ avec donnée de descente. La liberté de l'action entraîne que

$$X \times \underline{\Gamma} \xrightarrow[\sim]{\pi_1 \times \text{action}} X \times_{X/\Gamma} X.$$

Avec cette remarque, une donnée de descente se reformule comme un automorphisme a de $Y \times \underline{G}$ au-dessus de $X \times \underline{\Gamma} \xrightarrow{\text{action} \times \text{Id}_{\Gamma}} X \times \underline{\Gamma}$ et une condition de cocycle. Nous laissons le lecteur ou la lectrice vérifier que cette condition de cocycle dit exactement que $\pi_1 \circ a$ fournit une action de groupe. On retrouve l'équivalence prédite. \square

4.2.3 Propriétés du groupe fondamental étale

Nous listons en vrac quelques résultats utiles sur les groupes fondamentaux étales.

Proposition 4.2.13. Soit $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un morphisme continu de groupes localement profinis. Soit Y un diamant avec action de Γ_1 et X un diamant avec action de Γ_2 , qui le munit en particulier X d'une action de Γ_1 . Supposons que les deux diamants vérifient les conditions du Théorème 4.2.9. Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de diamants Γ_1 -équivariant. Soit \bar{y} un point géométrique de Y . Le foncteur suivant est correctement défini.

$$\mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X|\Gamma_2) \longrightarrow \mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(Y|\Gamma_1)$$

$$Z \longmapsto Z \times_X Y$$

$$f \longmapsto f \times_X \mathrm{Id}_Y$$

Il existe un morphisme de groupes profinis

$$\pi_1^{\mathrm{f}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(Y|\Gamma_1, \bar{y}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(X|\Gamma_2, \bar{y})$$

qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X|\Gamma_2) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Fib}_{\bar{y}}} & \pi_1^{\mathrm{f}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(X|\Gamma_2, \bar{y}) - \mathrm{EnsFinis} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(Y|\Gamma_1) & \xrightarrow[\mathrm{Fib}_{\bar{y}}]{\sim} & \pi_1^{\mathrm{f}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(Y|\Gamma_1, \bar{y}) - \mathrm{EnsFinis} \end{array}$$

où le foncteur de droite est obtenu grâce au morphisme entre groupes fondamentaux ci-dessus.

Démonstration. La définition du foncteur ne pose aucun problème. Pour le morphisme entre groupes, soit T un automorphisme de $\mathrm{Fib}_{\bar{y}} : \mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(Y|\Gamma_1) \rightarrow \mathrm{EnsFinis}$. Pour tout objet Z de $\mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X|\Gamma_2)$, l'ensemble $|Z \times_X \bar{y}|$ s'identifie à $|(Z \times_X Y) \times_Y \bar{y}|$ sur lequel agit $T(Z \times_X Y)$. Cette famille de bijections étant naturelle en Z , elle fournit un automorphisme du foncteur $\mathrm{Fib}_{\bar{y}}$ de source $\mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X|\Gamma_2)$, i.e. un élément de $\pi_1^{\mathrm{f}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{t}}(X|\Gamma_2, \bar{y})$. Nous vérifions qu'il s'agit d'un morphisme de groupes topologiques et qu'il fait commuter le diagramme. \square

Lemme 4.2.14. Soit $H : (\mathcal{C}', F') \rightarrow (\mathcal{C}, F)$ un foncteur exact de catégories galoisiennes et $h : \pi_1(\mathcal{C}, F) \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}', F')$ le morphisme continu déduit. Soit $\sigma \in \pi_1(\mathcal{C}', F')$ tel que pour tout $X' \in \mathcal{C}'$ galoisien, l'automorphisme de $H(X')$ déduit de σ préserve les composantes connexes. Alors σ est dans l'image de h .

Démonstration. Comme h est un morphisme continu entre groupes profinis, il suffit de prouver que pour tout X' galoisien, l'automorphisme de X' déduit de σ est dans l'image de

$$\pi_1(\mathcal{C}, F) \xrightarrow{h} \pi_1(\mathcal{C}', F') \twoheadrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}'}(X').$$

On se fixe un tel X' et Y une composante connexe de $H(X')$. Il existe un élément de $\tau \in \pi_1(\mathcal{C}, F)$ dont l'action sur $F(Y)$ est celle de σ . Alors, les actions de $h(\tau)$ et de σ sur $F'(X')$ coïncident sur $F(Y) \subset F(H(X')) = F'(X')$. Puisque X' est connexe, cela implique que leurs images dans $\text{Aut}_{\mathcal{C}'}(X')$ coïncident. \square

Remarque 4.2.15. Remarquons que pour un sous-groupe fermé $G' < G$, la restriction à G' fournit un exemple où l'image d'un objet galoisien n'a pas de raisons d'être connexe. Dans ce contexte, le résultat se reformule par " $g \in G'$ si et seulement si pour tout G -ensemble connexe galoisien g stabilise les orbites sous G'' ". Les G -ensembles connexes galoisiens sont les G/H où H est ouvert et distingué et g stabilise l'orbite G'/H si et seulement si $gH \in G'/H$. On a donc retrouvé que l'appartenance à G' se teste sur les quotients finis de G .

Lemme 4.2.16. Soit Γ un groupe localement profini, X un diamant muni d'une action libre de Γ qui le rend Γ -connexe et \bar{x} un point géométrique de X . Notons \mathbf{T} l'équivalence de catégories $\text{FÉt}(X|\Gamma) \cong \pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})\text{-Ens}$.

1. Il y a un isomorphisme naturel entre foncteurs de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})\text{-Ens}$ dans Ens

$$H_\Gamma^0 \xrightarrow{\sim} \text{Orb} \circ \mathbf{T}$$

où H_Γ^0 donne l'ensemble des composantes Γ -connexes et Orb est l'ensemble des orbites.

2. Soit k un corps fini et V un k -espace vectoriel. Soit Z un objet en k -espaces vectoriels de $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ qui représente le faisceau constant associé à V

$$\text{FÉt}(X|\Gamma) \rightarrow k\text{-EspacesVect}, \quad Y \mapsto V^{H_\Gamma^0(Y)}.$$

Alors $\mathbf{T}(Z)$ isomorphe au k -espace vectoriel V avec action triviale de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})$.

Démonstration. 1. Conséquence de la théorie générale des catégories galoisiennes et de la description des objets connexes dans $\text{FÉt}(X|\Gamma)$.

2. Le k -espace vectoriel V avec action triviale de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})$ représente le foncteur

$$\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})\text{-Ens} \rightarrow k\text{-EspacesVect}, \quad A \mapsto \text{Hom}(A, V) = V^{\text{Orb}(A)}.$$

D'après le premier point, $\mathbf{T}(Z)$ représente un foncteur isomorphe ce qui conclut. \square

4.3 Le lemme de Drinfeld

Après cette introduction assez générale, nous nous replaçons dans un contexte plus propice à notre équivalence. Resaisissons-nous de notre puissance q du premier p et l'ensemble fini Δ .

Définition 4.3.1. Soit X un diamant sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ muni d'une action de $\Phi_{\Delta,q}^{\mathrm{gp}}$ telle que l'action de $\varphi_{\Delta,q}$ est le q -Frobenius. Nous appelons $\mathrm{F\acute{E}t}(X \parallel \Phi_{\Delta,q})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{F\acute{E}t}(X \parallel \Phi_{\Delta,q}^{\mathrm{gp}})$ dont les objets sont les diamants tels que l'action de $\varphi_{\Delta,q}$ est le q -Frobenius.

Exemple 4.3.2. Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ des petits faisceaux pro-étales sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Le petit faisceau donné par

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha$$

possède une action du groupe $\Phi_{\Delta,q}^{\mathrm{gp}}$ telle que l'action de $\varphi_{\beta,q}$ est donnée par le produit du q -Frobenius sur X_β et de l'identité sur $\prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$. L'action de $\varphi_{\Delta,q}$ est celle du q -Frobenius.

Lemme 4.3.3. Soit X un diamant sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$.

1. Si X est quasi-compact alors $X/\varphi_q \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est quasi-compact.
2. Si X est quasi-séparé et que l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ est libre, alors $X/\varphi_q \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est quasi-séparé.
3. Si X est qcqs, connexe et que l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ sur X est libre, alors le diamant $X/\varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ est connexe et il existe un isomorphisme naturel de catégories galoisiennes

$$\mathrm{F\acute{E}t}(X) \rightarrow \mathrm{F\acute{E}t}(X/\varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})).$$

Démonstration. 1. Comme rappelé dans [Sch, p. 39], les catégories de petits faisceaux sur le site pro-étale et sur le v -site sont algébriques, avec une base d'objets cohérents donnés par les affinoïdes perfectoides. D'après [AGV, VI Cor. 2.6], vérifie que $X/\varphi_q \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est quasi-compact revient à vérifier que pour un affinoïde perfectoid $\mathrm{Spa}(B, B^+)$, le produit $X/\varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(B, B^+)$

est quasi-compact. Par compacité, on choisit une surjection $\mathrm{Spa}(A, A^+) \rightarrow X$ et on en déduit une surjection

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) / \varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(B, B^+) \rightarrow X / \varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(B, B^+)$$

et on peut donc se restreindre au cas de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$. Dans ce cas, le produit $\mathrm{Spa}(A, A^+) \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(B, B^+)$ est la réunion des ouverts rationnels

$$U_n = \left\{ |\cdot| \in \mathrm{Spa}(C, C^+) \mid |\varpi_B|^n \leq |\varpi_A| \leq |\varpi_B|^{1/n} \neq 0 \right\} \text{ de } \mathrm{Spa}(C, C^+)$$

avec $C^+ = (A^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} B^+)^{(\varpi_A, \varpi_B)}$, $C = C^+[\varpi_A^{-1} \varpi_B^{-1}]$.

Or $\varphi_q(U_n) \subset U_{qn}$ donc U_1 se surjecte sur le produit fibré, ce qui conclut.

2. Grâce à [Sch, Prop. 10.11], vérifier que la diagonale de $X / \varphi_q \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q) \times X$ est quasi-compacte, se fait après changement de base à $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} X$. Dans ce cas, par liberté de l'action, le pullback s'identifie à

$$X \times \varphi_q^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p_1 \times \text{action}} X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} X.$$

Par [AGV, VI Cor. 2.6], cette quasi-compacité se vérifie après changement de base à un recouvrement affinoïde perfectoïde de X . Son image est recouverte par les $U_{n,B} \subset \mathrm{Spa}(B, B^+) \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(B, B^+)$ pour $\mathrm{Spa}(B, B^+)$ parcourant les ouverts affinoïdes. On se ramène donc à prouver que, pour un affinoïde perfectoïde, le pullback de

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) \times \varphi_q^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p_1 \times \text{action}} \mathrm{Spa}(A, A^+) \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(A, A^+)$$

le long de l'inclusion de U_n est quasi-compact. On voit que $(|\cdot|, \varphi_q^m)$ appartient à U_n si et seulement si $|\varpi_A|^{q^m n} \leq |\varpi_A| \leq |\varpi_A|^{q^m/n}$. Puisque $|\varpi_A| < 1$, le pullback est exactement $\mathrm{Spa}(A, A^+) \times \varphi_q^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p_1 \times \text{action}} \mathrm{Spa}(A, A^+) \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(A, A^+)$ qui est quasi-compact.

3. Pour tout $\mathrm{Spa}(A, A^+) \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$, l'espace $\mathrm{Spa}(A, A^+) \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ est un revêtement pro-étale de $\mathrm{Spa}(A, A^+)$: il s'écrit

$$\lim_{f \geq 1} \mathrm{Spa}(\mathbb{F}_{q^f} \otimes_{\mathbb{F}_q} A, \mathbb{F}_{q^f} \otimes_{\mathbb{F}_q} A^+).$$

Ainsi, $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ est un diamant, revêtement pro-étale de X . Puisque $\mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) \rightarrow \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$ est un $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ -torseur, $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) \rightarrow X$ est également un $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ -torseur pour l'action du q -Frobenius sur $\mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$. L'action est libre et

X s'identifie au quotient par cette action. En particulier, cela fournit déjà une équivalence de catégories naturelle

$$\mathrm{F\acute{E}t}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) | \phi_q^{\widehat{\mathbb{Z}}}\right).$$

On démontre ensuite que la restriction de l'action induit une équivalence

$$\mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) | \phi_q^{\widehat{\mathbb{Z}}}\right) \cong \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) | \phi_q^{\mathbb{Z}}\right).$$

Il faut montrer que pour tout revêtement fini étale $Y \rightarrow X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ muni d'un automorphisme au-dessus de ϕ_q , celui-ci s'étend en une action de $\phi_q^{\widehat{\mathbb{Z}}}$. Un tel revêtement muni d'un endomorphisme revient à un revêtement et un isomorphisme $\phi_q^* Y \rightarrow Y$. D'après [Sch, Prop. 11.23], cela équivaut à la donnée pour un certain $f \geq 1$, de $Z \in \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_{q^f}})\right)$ et d'un isomorphisme de revêtement $i : \phi_q^* Z \rightarrow Z$. En particulier $i \circ f$ est un automorphisme de Z dans $\mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_{q^f}})\right)$. En se plaçant dans $\mathrm{F\acute{E}t}(X)$, qui est une catégorie galoisienne puisque X est connexe, on voit que i est d'ordre fini. Cela permet d'étendre $i \times \mathrm{Id}_{\mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})}$ en une action de $\phi_q^{\widehat{\mathbb{Z}}}$.

Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) | \phi_q^{\mathbb{Z}}\right) &\rightarrow \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) | \varphi_{q,X}^{\mathbb{Z}}\right) \\ (Y, f) &\mapsto (Y, \varphi_q \circ f^{-1}) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories. De plus, l'action de $\varphi_{q,X}^{\mathbb{Z}}$ sur le produit fibré $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ est libre puisque celle de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ sur X l'est. Le Théorème 4.2.12 démontre alors que cette dernière catégorie est équivalente à

$$\mathrm{F\acute{E}t}\left(X/\varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})\right).$$

On a montré l'équivalence de catégories et elle commute au foncteur fibre. En particulier $\mathrm{F\acute{E}t}\left(X/\varphi_q \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})\right)$ est galoisienne, ce qui démontre la connexité¹¹.

Remarque 4.3.4. Comme [Bha+19, "Sheaves, stacks and shtukas" Déf. 4.3.5] le sous-entend, nous pourrions tout faire dans le monde des champs pro-étales. Dans les cas que nous regardons, *loc. cit.* suggère qu'une modification de la définition de X/Γ fournit encore un petit faisceau pro-étale et que cette

¹¹Le foncteur fibre doit refléter les isomorphismes, ce qui est impossible si le diamant n'est pas connexe.

nouvelle définition garantit que $\mathrm{F\acute{E}t}(X|\Gamma) \cong \mathrm{F\acute{E}t}(X/\Gamma)$ sans hypothèse sur la liberté de l'action. Nous préférons éviter cette discussion.

De plus, $\mathrm{F\acute{E}t}(X) \cong \mathrm{F\acute{E}t}\left(X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) \parallel \Phi_{\Delta, q}\right)$ est encore vraie dans des cas où la liberté de l'action tombe à l'eau. Par exemple, c'est un joli calcul de le vérifier pour $X = \mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Cela ouvre une possibilité pour qu'avec la définition modifiée et la théorie des champs, le lemme de Drinfeld soit vrai dans un cadre plus général que celui de notre texte.

□

On va utiliser avec abondance les résultats de [SW20, Prop. 16.3.6]. Nous énonçons la proposition et précisons certains éléments de preuve.

Proposition 4.3.5. *Soit k un corps discret et $D, X \rightarrow \mathrm{Spd}(k)$ des diamants connexes avec $D \rightarrow \mathrm{Spd}(k)$ qcqs. Supposons que pour tout corps algébriquement clos non archimédien $F|k$, D_F est connexe. Alors, $D \times_{\mathrm{Spd}(k)} X$ est connexe.*

Si de plus k est algébriquement clos, et que le changement de base induit toujours un isomorphisme $\pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D, \bar{d}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D_F, \bar{d})$, alors les projections induisent un isomorphisme

$$\pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D \times_{\mathrm{Spd}(k)} X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D, \bar{x}) \times \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(X, \bar{x}).$$

Démonstration. Pour la première partie, nous renvoyons à [SW20] pour comprendre pourquoi l'hypothèse qcqs est utilisée.

Pour l'identification des groupes fondamentaux, nous commençons par prouver que $\pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D \times_{\mathrm{Spd}(k)} X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(X, \bar{x})$ est surjectif. Pour $X' \rightarrow X$ un recouvrement galoisien (donc connexe), la première partie démontre que $D \times_X X'$ est connexe. En particulier, nous pouvons appliquer le Lemme 4.2.14 à tout élément de $\pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(X, \bar{x})$.

On choisit ensuite un point géométrique de rang 1 $\mathrm{Spa}(F) \rightarrow X$ et on veut démontrer que la suite déduite

$$\pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D_F, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(D \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\mathrm{f\acute{e}t}}(X, \bar{x}) \rightarrow 0$$

est exacte au centre. Soit σ dans le noyau. On prend $Y' \rightarrow Y := D \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} X$ fini étale. Grâce à [SW20, Prop. 16.3.3], on construit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ \text{fibres} & & \downarrow \pi_2 \\ \text{géométriquement} & & \\ \text{connexes} & \downarrow & \\ X' & \xrightarrow{\text{fini étale}} & X \end{array}$$

On peut alors réécrire

$$\mathrm{Fib}_{\bar{x}}(Y' \times_Y D_C) = Y' \times_Y \bar{x} = Y' \times_{X' \times_X Y} ((X' \times_X Y) \times_Y \bar{x}).$$

Puisque σ est dans le noyau, l'automorphisme déduit de σ agit fibre à fibre au-dessus de $(X' \times_X Y) \times_Y \bar{x}$. Ces fibres étant géométriquement connexes, on peut appliquer le Lemme 4.2.14 pour en déduire que σ est dans l'image de $\pi_1^{\text{fét}}(D_F, \bar{x})$.

Pour conclure, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1^{\text{fét}}(D_F, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{fét}}(D \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{fét}}(X, \bar{x}) & \longrightarrow & 1 \\ & \searrow & \downarrow & & & & \\ & & \pi_1^{\text{fét}}(D, \bar{x}) & & & & \end{array}$$

et le morphisme diagonal est un isomorphisme par hypothèse. Cela démontre que la suite du haut est exacte et scindée. \square

Proposition 4.3.6. *Soit X un diamant sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$, connexe et spatial, sur lequel l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ est libre. Soit K un corps perfectoïde algébriquement clos de caractéristique nulle. Alors,*

$$\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_p)} \text{Spd}(K) := X/\varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spa}(K^b)$$

est connexe et le foncteur

$$\text{FÉt}(X) \rightarrow \text{FÉt}\left(X/\varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})\right) \cong \text{FÉt}\left(\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_q)} \text{Spd}(K)\right)$$

est une équivalence de catégories galoisiennes.

Démonstration. Nous déléguons plusieurs parties de la preuve à [Bha+19, Lemme 4.3.10], mais nous réordonnons les arguments, en explicitons certains et pointons là où l'utilisation du q -Frobenius nécessite ajustement.

On commence par le démontrer lorsque $X = \text{Spa}(F)$ avec F algébriquement clos de caractéristique p . Pour $K = \mathbb{C}_p$, on utilise [Wei17, Prop. 3.8.1] pour $E = \mathbb{Q}_q$ et F pour conclure que $\text{FF}_{\text{Spa}(F),q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_q)} \text{Spd}(\mathbb{C}_p)$ est simplement connexe¹². Nous déléguons le cas où K général aux arguments inductifs dans [Bha+19].

Revenons au cas général : pour la fidélité, on choisit un point géométrique \bar{x} de $\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_q)} \text{Spd}(K)$ que l'on voit aussi comme point de X . Soient f, g dans $\text{FÉt}(X)$ dont les changement de base f' et g' dans $\text{FÉt}(\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_q)} \text{Spd}(K))$ coïncident. On identifie naturellement

$$\text{Fib}_{\bar{x}}(f) = \text{Fib}_{\bar{x}}(f') = \text{Fib}_{\bar{x}}(g') = \text{Fib}_{\bar{x}}(g).$$

Puisque $\text{Fib}_{\bar{x}}$ est conservatif et commute aux coégalisateurs, on obtient $f = g$.

¹²Pour passer de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ à \mathbb{C}_p on utilise que les recouvrements de la courbe adique adique viennent d'une extension finie de \mathbb{Q}_q , puis [SW20, Prop. 15.2.7] pour identifier le diamant de la courbe adique à $\text{FF}_{X,q}$. Nous pointons que la simple connexité géométrique, énoncée comme description des recouvrement finis étales par exemple [FF18, Th. 3.15], implique la connexité.

Pour le caractère plein, soit Y_1 et Y_2 dans $\text{FÉt}(X)$ et f un morphisme entre leurs images dans $\text{FÉt}(\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_q)} \text{Spd}(K))$. Soit \bar{x} un point géométrique de X . Puisque X est spatial et que l'image de \bar{x} est stable par généralisation, on peut écrire cette image comme la limite des voisinages d'ouverts la contenant. Par spatialité et [Sch, Lemme 11.21], ces voisinages peuvent être choisis qcqs. D'après [Sch, Prop. 11.23], le morphisme $g_{\bar{x}} : Y_{1\bar{x}} \rightarrow Y_{2\bar{x}}$ donné par le caractère plein pour un point à partir de $f_{\bar{x}}$ provient d'un morphisme sur un voisinage étale de \bar{x} dans X . Puisque les prolongements des $f_{\bar{x}}$ aux voisinages étales se recollent, la pleine fidélité pour les points géométriques affirme alors que les prolongements des $g_{\bar{x}}$ se recollent en un morphisme $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ duquel f provient.

Pour l'essentielle surjectivité, soit Y un revêtement au but. Le cas d'un corps perfectoïde algébriquement clos entraîne que pour tout point géométrique \bar{x} de X , l'espace $Y \times_X \bar{x}$ vient d'un revêtement fini étale $X'_{\bar{x}}$ de \bar{x} . Les ouverts V relativement quasi-compacts de X sont stables par φ_q . D'après [Sch, Prop. 10.11], vérifier que $V/\varphi_q \rightarrow X/\varphi_q$ est une immersion ouverte quasi-compacte se fait après changement de base à X , i.e. sur $V \subset X$. En utilisant [Sch, Lemme 11.22], $X'_{\bar{x}}$ est la fibre d'un revêtement fini étale X' d'un ouvert contenant l'image de \bar{x} . En combinant le Lemme 4.1.15 et la Proposition 4.3.3, on obtient que $X/\varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(K^b)$ est spatial. Ainsi, la fibre de $X/\varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(K^b)$ en \bar{x} s'écrit également comme limite des voisinages ouverts contenant ladite fibre. Le changement de base de X' est encore un revêtement fini étale d'un ouvert de $X/\varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(K^b)$ contenant la fibre en \bar{x} . Nous pouvons recoller ces changements de base en Y ; par pleine fidélité, nous pouvons donc recoller les X' en un revêtement fini étale de X dont l'image est Y .

L'équivalence de catégories commutant au foncteur fibre, le but est une catégorie galoisienne et $\text{FF}_{X,q} \times_{\text{Spd}(\mathbb{Q}_p)} \text{Spd}(K)$ est connexe. \square

Théorème 4.3.7 (Lemme de Drinfeld). *Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ des diamants spatiaux, connexes et pour lesquels l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ est libre. Soit également \bar{x} un point géométrique du diamant $\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha$. La paire*

$$\left(\text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \parallel \Phi_{\Delta,q} \right), \text{Fib}_{\bar{x}} \right)$$

est une catégorie galoisienne.

De plus, la famille de morphismes $\varphi_{\beta,q}$ -équivalents

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

construit un morphisme

$$\pi_1^{\text{fét}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \middle| \Phi_{\Delta, q}, \bar{x} \right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} \pi_1^{\text{fét}}(X_\alpha, \bar{x})$$

qui est un isomorphisme de groupes profinis.

Démonstration. On singularise $\beta \in \Delta$. On a la suite d'équivalence de catégories

$$\begin{aligned} & \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \middle| \Phi_{\Delta, q} \right) \\ & \cong \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \middle| \Phi_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}^{\text{gp}} \right) \\ & \cong \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha / \Phi_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}^{\text{gp}} \right) \\ & \cong \text{FÉt} \left(X_\beta \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \prod_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha / \varphi_q \right) \\ & \cong \text{FÉt} \left((X_\beta \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \prod_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha / \varphi_q) / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) \right) \\ & \cong \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})} (X_\alpha / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})) \right) \end{aligned}$$

La première équivalence consiste à reconstruire l'action de $\varphi_{\beta, q}$ à partir des autres et du q -Frobenius. Puisque l'action de $\Phi_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}$ sur $\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha$ est libre¹³, le Théorème 4.2.12 donne la deuxième équivalence. Pour la troisième, on utilise [Mar23b, Prop. 2.3]. Pour la quatrième, veut utiliser la deuxième partie de la Proposition 4.3.5 pour $X_\beta \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \prod_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha / \varphi_q$; pour montrer qu'il est connexe on utilise la première partie de la Proposition 4.3.5 pour $k = \mathbb{F}_q$, combinée avec le Lemme 4.3.3 pour l'hypothèse qcqs et avec la Proposition 4.3.6 pour la connexité géométrique ; pour montrer qu'il est qcqs, on combine le Lemme 4.3.3 et le Lemme 4.1.15 ; la liberté de l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ provient de celle sur X_β . La dernière équivalence vient d'un isomorphisme de diamants : on utilise que l'action de φ_q se fait uniquement sur X_β puis une identité de produits fibrés.

Or, chaque $X_\alpha / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}) \rightarrow \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$ est qcqs, et pour tout corps algébriquement clos non archimédien $F|k$, $X_\alpha / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(F)$ est connexe de même groupe fondamental que $X_\alpha / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q})$: combiner les deux pre-

¹³Se rappeler que le produit fibré faisceutique est le produit des pré-faisceaux.

miers points du Lemme 4.3.3 et la Proposition 4.3.6. On peut donc appliquer la Proposition 4.3.5 : la catégorie $\text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \parallel \Phi_{\Delta, q} \right)$ est galoisienne et

$$\pi_1^{\text{fét}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \parallel \Phi_{\Delta, q}, \bar{x} \right) \cong \prod_{\alpha \in \Delta} \pi_1^{\text{fét}} \left(X_\alpha / \varphi_q \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\overline{\mathbb{F}_q}), \bar{x} \right).$$

En réappliquant le dernier point du Lemme 4.3.3 à chaque X_α , on conclut. \square

Nous donnons immédiatement un cadre plutôt large où les conditions du lemme de Drinfeld sont vérifiées.

Lemme 4.3.8. *Soit X un espace perfectoïde qcqs. Il est spatial et l'action de $\varphi_q^{\mathbb{Z}}$ est libre.*

Démonstration. La spatialité découle de [Hub93, Th. 3.5].

Pour la liberté de l'action, supposons qu'il existe $f : \text{Spa}(F) \rightarrow X$ fixe par φ_q^n pour $n > 0$. Puisque φ_q agit ouvert par ouvert, quitte à choisir un affinoïde contenant l'image, on peut supposer que $X = \text{Spa}(A, A^+)$ pour (A, A^+) une paire de Tate perfectoïde. Soit ϖ_A une pseudo-uniformisante de A . On a

$$\forall m \geq 0, f(\varpi_A) = f(\varpi_A^{q^{nm}}) \rightarrow 0.$$

Par continuité, $f(\varpi_A) = 0$ ce qui est impossible puisque ϖ_A est une unité. \square

Proposition 4.3.9. *Soit \tilde{E} un corps perfectoïde de caractéristique p , extension de \mathbb{F}_q . Soit $\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie, extension de $\mathbb{F}_{q'}$ pour $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$. Soit Δ un ensemble fini. Il existe un foncteur canonique*

$$\text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) \parallel \Phi_{\Delta, q'} \right) \rightarrow \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+) \parallel \Phi_{\Delta, q} \right).$$

Soit $\bar{x} \rightarrow \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+)$ un point géométrique. Le morphisme $\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ déduit grâce au lemme de Drinfeld correspond à l'inclusion.

Démonstration. Par propriétés universelles, nous construisons un morphisme $\Phi_{\Delta, q'}^{\text{gp}}$ -équivalent

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+).$$

Le tiré en arrière par ce morphisme fournit le foncteur annoncé entre catégories galoisiennes.

Pour tout $\beta \in \Delta$, ledit morphisme s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) & \longrightarrow & \text{Spd}(\tilde{F}_\beta, \tilde{F}_\beta^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+) & \longrightarrow & \text{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) \end{array}$$

On passe aux groupes fondamentaux. Le Théorème 4.3.7 affirme alors que les morphismes horizontaux s'identifient aux projections

$$\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{F}_\beta} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}.$$

Or, en se rappelant comment on identifie $\mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}$ aux automorphismes du foncteurs fibres sur FÉt $(\text{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+))$, les morphismes verticaux de droite correspondent aux inclusions $\mathcal{G}_{\tilde{F}_\beta} \subset \mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}$ ce qui conclut. \square

Équivalences de Fontaine multivariables pour certains corps perfectoides de caractéristique p

Dans ce chapitre, nous commençons par établir une équivalence de Fontaine pour les représentations de produits de groupes de Galois absolus de corps perfectoides de caractéristique p pour des coefficients de caractéristique p . Suivant l'idée de [CKZ21], nous commençons par utiliser le lemme de Drinfeld pour les diamants pour passer de modules sur un anneau perfectoïde multivariable \tilde{E}_Δ à des \tilde{E}_Δ -algèbres finies étales puis à des ensembles avec action du produit de groupes souhaité. Contrairement à *loc. cit.*, nous effectuons nos constructions sur \mathbb{F}_q , ce qui permet de contourner certains arguments délicats et de finir avec un anneau de coefficients intègre.

Pensant à l'application aux corps locaux p -adiques qui suivra, nous pourrions garder en tête que le cas le plus important est celui des corps perfectoides $\mathbb{F}_q((X^{1/p^\infty}))$ qui a même théorie de Galois que des extensions de Lie de nos corps locaux p -adiques. Nous établirons dans un deuxième temps une équivalence de Fontaine imparfaite pour ces corps perfectoides, d'abord pour des représentations de caractéristique p puis en dévissant pour capturer toutes les représentations p -adiques de type fini.

Le formalisme développé dans le Chapitre 2 souligne que les points délicats d'une équivalence de Fontaine sont de deux natures : la définition correcte de l'anneau de comparaison avec sa topologie et son action de monoïde d'un côté, l'obtention des isomorphismes de comparaison de l'autre. Nous commençons ainsi par définir anneaux adaptés à une équivalence de Fontaine pour des corps perfectoides de caractéristique p . En caractéristique p , les conditions topologiques pour appliquer le formalisme du Chapitre 2 sont aisées. Malheureusement, nous voulons utiliser ici la théorie des perfectoides ce qui nous force à être tout de même précautionneux quant aux topologies sur nos anneaux.

5.1 Construction du foncteur \mathbb{D}_Δ modulo p

5.1.1 Définition des anneaux perfectoïdes multivariables

Fixons pour cette section un corps perfectoïde \tilde{E} de caractéristique p . Nous fixons une clôture séparable \tilde{E}^{sep} et un plongement $\overline{\mathbb{F}}_p \subset \tilde{E}^{\text{sep}}$. Nous supposons que $\tilde{E} \cap \overline{\mathbb{F}}_p$ est fini de cardinal q . Fixons également ϖ une pseudo-uniformisante de \tilde{E} et k le corps résiduel de \tilde{E} . Pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$, l'élément ϖ est encore une pseudo-uniformisante et la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans \tilde{F} est encore finie. Nous noterons q^f son cardinal.

L'adjectif *multivariable* implique de se fixer un ensemble fini Δ . Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous considérons un corps perfectoïde \tilde{E}_α muni d'un isomorphisme avec \tilde{E} et d'une extension de cet isomorphisme à leurs clôtures séparables. En particulier, cela fixe pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension isomorphe $\tilde{F}_\alpha|\tilde{E}_\alpha$ et une structure de \mathbb{F}_{q^f} -algèbre. De manière générale, pour chaque objet obtenu à partir de \tilde{E} , nous notons avec un indice α l'objet obtenu pour \tilde{E}_α à partir d'un objet choisi pour \tilde{E} et du choix d'isomorphismes précédents. Nous définissons

$$\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\tilde{E}_\alpha}.$$

Nous voulons établir une équivalence pour des représentations \mathbb{F}_r -linéaires de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ pour $\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_r$.

Définition 5.1.1. Définissons le monoïde¹ $\Phi_{\Delta, p} = \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha, p}^{\mathbb{N}}$. Il sera toujours muni de la topologie discrète. Pour $b \geq 1$, nous notons

$$\varphi_{\alpha, p^b} := \varphi_\alpha^b \text{ et } \varphi_{\Delta, p^b} := (\varphi_{\alpha, p^b})_{\alpha \in \Delta}.$$

Pour $p^a|p^b$, nous définissons

$$\Phi_{\Delta, p^b, p^a} = \langle \varphi_{\Delta, p^a}, \varphi_{\alpha, p^b} \mid \alpha \in \Delta \rangle < \Phi_{\Delta, p}.$$

Pour $a = b$, nous simplifions cette notation en Φ_{Δ, p^b} .

Nous pouvons plonger les monoïdes simplifiables Φ_{Δ, p^b, p^a} dans leurs symétrisés $\Phi_{\Delta, p^b, p^a}^{\text{gp}}$.

Commençons par définir une \mathbb{F}_q -algèbre analogue du E de Fontaine dans le cas multivariable perfectoïde. Ici, nous faisons agir le groupe $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$: des q -Frobenius sur chaque copie qui encodent les actions des différents $\mathcal{G}_{\tilde{E}_\alpha}$ et un Frobenius r -Frobenius

¹Il est évidemment isomorphe à \mathbb{N}^Δ mais nous préférons nommer une base de manière suggestive.

global qui permet de redescendre à des \mathbb{F}_r -représentations (voir Corollaire 5.1.24). La construction entre dans le cadre de [CKZ21, §4.1].

Définition 5.1.2. Soit $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie. Appelons encore ϖ_α l'image de $\varpi_\alpha \in \tilde{F}_\alpha^\circ$ dans le produit tensoriel

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^\circ.$$

Définissons également l'idéal $(\varpi) = (\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta)$ et l'élément $\varpi_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \varpi_\alpha$.

Définissons

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\Delta,q}^+ &:= \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^\circ \right)^{\wedge(\varpi)} \\ \tilde{F}_{\Delta,q} &:= \tilde{F}_{\Delta,q}^+ \left[\frac{1}{\varpi_\Delta} \right]. \end{aligned}$$

Trois topologies seront utilisées pour ces deux anneaux². Sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ ces trois topologies sont la topologie discrète, la topologie ϖ_Δ -adique et la topologie (ϖ) -adique. Sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$, ce sont la topologie discrète, la topologie d'anneau³ ayant pour base de voisinages de 0 la famille⁴ $(\varpi_\Delta^n \tilde{F}_{\Delta,q}^+)_{n \geq 0}$ que nous appelons *topologie adique* et la topologie colimite des topologies (ϖ) -adiques via l'écriture

$$\tilde{F}_{\Delta,q} = \text{colim}_{n \geq 0} \frac{1}{\varpi_\Delta^n} \tilde{F}_{\Delta,q}^+$$

que nous appelons *topologie colimite*.

Le produit tensoriel des \tilde{F}_α° est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique pour la topologie (ϖ) -adique, l'élément $\varphi_{\alpha,q}$ agissant par le q -Frobenius sur \tilde{F}_α° et l'identité sur les \tilde{F}_β° et l'élément $\varphi_{\Delta,r}$ agissant par le r -Frobenius. En complétant, on obtient une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ muni de la topologie (ϖ) -adique. Cette action est également une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ muni de la topologie ϖ_Δ -adique ou de topologie discrète. Après localisation, l'action du monoïde fournit donc une structure $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$ pour chacune des trois topologies ci-dessus⁵.

²Les trois topologies sont utiles respectivement pour les considérer comme coefficients de catégories de φ -modules, comme espace adique à la section 5.2.1 ou pour un raisonnement fin à la section 5.4.1. Leurs analogues pour les anneaux imparfaits donneront plusieurs éclairages sur les conditions de continuité de l'action de $\Gamma_{K,\Delta,\text{LT}}$ à la section 6.1.

³Voir [Bou71, Chap. III §6.3] pour les axiomes que doivent vérifier une telle base de voisinages.

⁴Il n'est pas si clair que à ce stade que $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ s'injecte dans $\tilde{F}_{\Delta,q}$. Considérer pour l'instant que la base de voisinages définie est l'image dans $\tilde{F}_{\Delta,q}$. L'abus de notations sera néanmoins vite réparé (voir Corollaire 5.1.23).

⁵C'est plus subtile pour la topologie colimite car les Frobenius ne stabilisent pas les termes de la colimite.

Soient $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie et q^f le cardinal de la clôture séparable de \mathbb{F}_q dans \tilde{F} . Nous utiliserons également les $\Phi_{\Delta, q^f, r}^{\text{gp}}$ -anneaux topologiques \tilde{F}_{Δ}^+ et \tilde{F}_{Δ} obtenus comme à la définition précédente en considérant \tilde{F} comme extension finie de lui-même, i.e. en faisant les produits tensoriels sur \mathbb{F}_{q^f} .

Remarque 5.1.3. Puisque nos produits tensoriels ne sont pas sur \mathbb{F}_p , nous ne pouvons décomposer le Frobenius absolu et obtenir un $\Phi_{\Delta, p}^{\text{gp}}$ -anneau comme dans [CKZ21].

Remarque 5.1.4. Le balancier entre les idéaux (ϖ) et (ϖ_{Δ}) est important pour ces anneaux. Puisque nous commençons par prendre la complétion (ϖ) -adique, il serait naturel que la topologie sur \tilde{E}_{Δ} soit construite à partir de la topologie (ϖ) -adique. Malheureusement, la famille d'idéaux de \tilde{E}_{Δ}^+ donnée par $(\varpi)^k$ ne définit pas sur \tilde{E}_{Δ} une structure d'anneau topologique⁶. Pour conserver tout de même que les ϖ_{α} sont individuellement topologiquement nilpotent, on peut considérer la topologie colimite, dont nous nous servirons d'ailleurs à la section 5.4.1. Toutefois, nous voudrions utiliser nos anneaux dans contextes pour lesquels cette topologie n'est pas adéquate : dans la section 5.2.1, nous voulons voir le couple $(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ comme une paire de Huber. Pour la topologie colimite, une base de voisinage de zéro s'écrit

$$\left\{ \bigcup_{n \geq 0} \frac{(\varpi)^{m_n}}{\varpi_{\Delta}^n} \mid (m_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } m_{n+1} \geq m_n + |\Delta| \right\}$$

dont aucun n'est contenu dans \tilde{E}_{Δ}^+ . Nous n'aurions pas une paire de Huber. Le ticket d'entrée dans la théorie des espaces adiques est précisément d'utiliser la topologie adique.

Dans ce chapitre cependant, nous n'aurons besoin que de la topologie discrète pour nos actions de monoïdes. En réalité, pour l'équivalence modulo p ou pour l'équivalence imparfaite, nous pourrions appliquer les méthodes du Chapitre 2 avec n'importe laquelle des trois topologies : la continuité d'une action de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ sur un module fini projectif sur \tilde{E}_{Δ} est automatique puisque l'action sur l'anneau est continue pour chacune des trois topologies. Néanmoins, les arguments de dévissages de la section 5.4.2 utilisent nécessairement la topologie discrète pour garantir des conditions cohomologiques ; nous préférons donc n'utiliser que celle-ci. La question se posera davantage pour l'équivalence multivariable Lubin-Tate.

Remarque 5.1.5. Nous spécifierons notre étude à des corps perfectoides plus agréables à la section 5.4.1 et nous décrirons complètement l'anneau \tilde{E}_{Δ} dans ce cas. Les lecteurs et lectrices souhaitant avoir une prise plus concrète sur ces anneaux peuvent lire dès à présent la Remarque 5.4.2.

⁶Par exemple, chaque $(\varpi)^k / \varpi_{\Delta}$ contient $\varpi_{\alpha}^k / \varpi_{\Delta}$ ce qui démontre que le produit n'est pas continu au point $(\varpi_{\Delta}^{-1}, 0)$.

Nous définissons à présent l'analogue de E^{sep} dans le cadre multivariable perfectoïde .

Définition 5.1.6. Soit $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie galoisienne. L'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E}}$ sur \tilde{F}° est \mathbb{F}_q -linéaire, continue pour les topologies discrète et ϖ -adique, commutant au Frobenius. L'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ facteur par facteur sur le produit tensoriel des \tilde{F}_α° se complète (ϖ) -adiquement en une action sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ continue pour la topologie discrète, commutant à l'action de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$.

Nous obtenons donc une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$. En localisant, nous obtenons une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$.

Lemme 5.1.7. Soit $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ la catégorie des sous-extensions finies galoisiennes de \tilde{E} dans \tilde{E}^{sep} avec les inclusions pour morphismes. La construction

$$\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_{\Delta,q}^+$$

où l'on met la topologie discrète est canoniquement un foncteur de $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ vers la catégorie des $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneaux topologiques⁷.

La construction

$$\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_\Delta^+$$

est canoniquement un foncteur depuis la catégorie de $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ vers la catégorie des anneaux topologiques. Pour toute tour d'extensions finies galoisiennes $\tilde{F}'|\tilde{F}|\tilde{E}$, le morphisme associé

$$\tilde{F}_\Delta^+ \rightarrow \tilde{F}'_\Delta^+$$

est un morphisme⁸ $\Phi_{\Delta,q^{f'},r}^{\text{gp}}$ -équivariant.

Les mêmes résultats sont vrais pour $\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_{\Delta,q}$ et $\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_\Delta$.

Démonstration. Pour la première construction, il faut prendre le produit tensoriel des injections $(\varphi_{\alpha,p}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}_\alpha})$ -équivariantes

$$\tilde{F}_\alpha^\circ \hookrightarrow \tilde{F}'_\alpha^\circ,$$

puis compléter (ϖ) -adiquement et localiser en ϖ_Δ .

Précisons la deuxième construction dans le cas de $\tilde{E} \subset \tilde{F}$. Notons \tilde{E}' le corps de décomposition de $X^{q^f} - X$ sur \tilde{E} . Le morphisme à déconstruire factorise par \tilde{E}'_Δ . Le morphisme $\tilde{E}'_\Delta \rightarrow \tilde{F}_\Delta$ est simplement donné par la première construction. Pour $\tilde{E}'|\tilde{E}$,

⁷Le Corollaire 5.1.23 et la Proposition 5.1.22 démontrent même que les morphismes obtenus sont des injections.

⁸Idem.

on sait grâce à [Bou81, V §5, Prop. 9] que $\tilde{E}|\mathbb{F}_q$ est régulière : l'anneau $\tilde{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^f}$ est donc un corps et une analyse des dimensions montre qu'il est canoniquement isomorphe à \tilde{E}' . En décomposant dans une \mathbb{F}_q -base de \mathbb{F}_{q^f} , on voit qu'un élément est dans \tilde{E}'_α si et seulement si ses coordonnées sont dans \tilde{E}°_α . On peut donc compléter et localiser l'injection

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}^\circ_\alpha \hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}^\circ_\alpha \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^f} \cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_{q^f}} \tilde{E}'_\alpha.$$

□

Définition 5.1.8. Définissons le $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique discret

$$\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} = \text{colim}_{\tilde{F} \in \mathcal{G}_{\text{al}} \tilde{E}} \tilde{F}_{\Delta,q}.$$

Remarque 5.1.9. Nous évitons ici à tous prix de compléter ϖ_Δ -adiquement l'anneau $\tilde{E}_\Delta^{\text{sep},+} := \text{colim} \tilde{F}_{\Delta,q}^+$. Si nous complétons, deux choix de topologies s'offriraient : un analogue de la topologie adique pour lequel certains groupes de cohomologie continue ne s'annulent pas, ou la topologie discrète sur le complété pour laquelle l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ cesse d'être continue.

5.1.2 Propriétés desdits anneaux

Cette section est assez technique. Elle plonge les anneaux tout juste définis dans des anneaux de série de Hahn-Mal'cev multivariables afin de prouver certaines de leurs propriétés algébriques et topologiques. En première lecture, il est conseillé d'éviter la lecture des preuves, voire de se contenter de retenir les résultats des Corollaires 5.1.23, 5.1.24 et 5.1.25 ainsi que de la Proposition 5.1.26.

La plupart des propriétés des anneaux $\tilde{F}_{\Delta,q}$ sont déduites de propriétés des anneaux de séries de Hahn-Mal'cev multivariables que nous introduisons ici. Dans le cas univariable, l'étude des corps maximale-ment valués dans [Kap42] démontre que les anneaux d'entiers de notre corps perfectoïde \tilde{E} et de ses extensions se plongent dans un anneau de séries formelles généralisées $k^{\text{alg}}[[t^{\mathbb{R}}]]$. Nous introduisons un analogue multivariable, démontrons un plongement similaire et l'étudions pour en déduire les propriétés de $\tilde{F}_{\Delta,q}$.

Définition 5.1.10. Soit A un anneau et $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ une famille finie de groupes abéliens totalement ordonnés. Définissons l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariables associé par

$$A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket = \left\{ \sum_{\underline{\gamma} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}} a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \mid \begin{array}{l} \forall \underline{\delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}, \forall \alpha \in \Delta, \text{ l'ensemble} \\ \left\{ \gamma_\alpha \leq \delta_\alpha \mid \exists \underline{\gamma}' \in \prod_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta, \geq 0, \leq \delta_\beta}, a_{(\gamma_\alpha, \underline{\gamma}')} \neq 0 \right\} \\ \text{est bien ordonné} \end{array} \right\}.$$

Proposition 5.1.11. Les applications

$$A \rightarrow A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket, \quad a \mapsto at^0,$$

$$\left(\sum a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) + \left(\sum b_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) := \left(\sum (a_{\underline{\gamma}} + b_{\underline{\gamma}}) t^{\underline{\gamma}} \right)$$

$$\text{et } \left(\sum a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) \times \left(\sum b_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) := \left(\sum_{\underline{\gamma} \in \prod \Gamma_{\alpha, \geq 0}} \left(\sum_{\substack{\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2 \in \prod \Gamma_{\alpha, \geq 0} \\ \underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2 = \underline{\gamma}}} a_{\underline{\gamma}_1} b_{\underline{\gamma}_2} \right) t^{\underline{\gamma}} \right)$$

munissent $A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket$ d'une structure de A -algèbre. Elle est séparée et complète par rapport à la famille d'idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$ pour $\underline{\gamma} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}$. Elle est intègre (resp. réduite) dès que A est intègre (resp. réduit).

Démonstration. Laissée aux lecteurs et lectrices. □

Remarque 5.1.12. 1. Pour parler de manière informelle, il s'agit de l'anneau des séries multivariables telle que pour tout multi-indice $\underline{\gamma}$, l'ensemble d'indices de la réduction modulo $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$ de notre série a toutes ses projections bien ordonnées.

2. Cet anneau est en général légèrement plus gros que la complétion de l'anneau

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta} A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \rrbracket$$

par rapport aux idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$. Par exemple, nous avons

$$\sum_{n \geq 1} (t_1 t_2)^{1 - \frac{1}{n}} \in A \llbracket t_1^{\mathbb{Q}}, t_2^{\mathbb{Q}} \rrbracket$$

sans qu'il n'appartienne à la complétion. Il est toutefois moins aisé de décrire la complétion, a fortiori de la manipuler.

3. Si nous imposons uniquement que les projections des indices apparaissant soient bien ordonnées, nous aurions un anneau non-complet par rapport aux idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$. Il serait inadapté pour plonger \tilde{E}_Δ^+ .

4. La définition précédente coïncide avec les séries de Hahn-Mal'cev dans [Hah07] lorsque $|\Delta| = 1$.

Nous nous concentrons sur le cas qui nous servira, où tous les groupes Γ_α sont égaux à un même sous-groupe Γ de \mathbb{R} .

Définition 5.1.13. Soit A un anneau, Δ un ensemble fini et Γ un sous-groupe de \mathbb{R} . Pour $\gamma \in \Gamma$ et $\underline{c} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^\Delta$, définissons l'idéal $J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}$ de $A[[t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta]]$ par

$$J_{\gamma, \Delta, \underline{c}} := \left(t_\alpha^\delta \mid \delta \in \Gamma_{\geq 0}^\Delta, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \delta_\alpha \geq \gamma \right).$$

Lorsque $\underline{c} = (1)_{\alpha \in \Delta}$, nous notons $J_{\gamma, \Delta}$ l'idéal obtenu.

Définition/Proposition 5.1.14. Dans le cadre de la définition précédente, soit $\underline{c} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^\Delta$. Alors,

$$\forall x = \sum_{\underline{\gamma} \in \Gamma_{\geq 0}^\Delta} a_{\underline{\gamma}} t_{\underline{\gamma}} \in A[[t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta]], \left\{ \sum c_\alpha \gamma_\alpha \mid \underline{\gamma} \text{ tel que } a_{\underline{\gamma}} \neq 0 \right\} \text{ est bien ordonné}$$

et la formule

$$|x|_{\Delta, \underline{c}} := e^{-\max\{\gamma \mid x \in J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}\}}$$

définit une norme sous-multiplicative. Lorsque A est intègre, la norme $|\cdot|_{\Delta, \underline{c}}$ est multiplicative et l'anneau $A[[t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta]]$ est intègre.

Démonstration. Soit $(\underline{\gamma}_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments telle que $\forall n, a_{\underline{\gamma}_n} \neq 0$ et que $(\sum c_\alpha \gamma_{n, \alpha})_{n \geq 0}$ décroît strictement. En particulier les sommes $\sum \gamma_{n, \alpha}$ sont bornées. Par construction des supports des séries de Hahn Mal'cev multivariées, les suites $(\gamma_{n, \alpha})_{n \geq 0}$ n'ont pas de suites extraites strictement décroissantes. Ainsi, nous pouvons créer par extraction successives une extractrice ψ telle que chaque $(\gamma_{\psi(n), \alpha})_{n \geq 0}$ est croissante. C'est absurde.

Puisque les $J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}$ forment une suite croissante d'idéaux, la formule définit une semi-norme. L'anneau de séries de Hahn-Mal'cev multivariable étant séparé pour $(t_\alpha^\gamma)_{\gamma \in \Gamma_{\geq 0}}$, il l'est aussi pour la famille des $J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}$: la semi-norme est séparée. Enfin, les inclusions

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, (J_{\gamma_1, \Delta, \underline{c}})(J_{\gamma_2, \Delta, \underline{c}}) \subset J_{(\gamma_1 + \gamma_2), \Delta, \underline{c}},$$

démontrent qu'elle est sous-multiplicative.

Plaçons-nous à présent dans le cas où A est intègre et fixons un ordre total sur Δ . On remarque que

$$\forall x \in A[[t_\alpha^\mathbb{R} \mid \alpha \in \Delta]], \sup \left\{ \gamma \mid x \in J_{\gamma, \Delta, \underline{c}} \right\} = \min \left\{ \sum c_\alpha \gamma_\alpha \mid \underline{\gamma} \text{ tel que } a_{\underline{\gamma}} \neq 0 \right\}.$$

Nous notons γ_x cet élément. Prenons x et y deux séries associées à des familles de coefficients (a_γ) et (b_γ) . Considérons les multi-indices $\underline{\gamma}$ tels que $a_\gamma \neq 0$ et $\sum c_\alpha \gamma_\alpha = \gamma_x$. Les projections de cet ensemble de multi-indices sont bien ordonnées⁹ ce qui implique que l'on peut choisir $\underline{\delta}_x$ minimal pour l'ordre lexicographique parmi eux. On fait de même pour y . Considérons deux multi-indices $\underline{\delta}$ et $\underline{\delta}'$ tels que $a_{\underline{\delta}} \neq 0$, $b_{\underline{\delta}'} \neq 0$ et

$$\underline{\delta} + \underline{\delta}' = \underline{\delta}_x + \underline{\delta}_y \quad (*3)$$

Par définition de γ_x , on a $\sum c_\alpha \delta_\alpha \geq \gamma_x$ et de manière analogue $\sum c_\alpha \delta'_\alpha \geq \gamma_y$. Par minimalité de γ_x et γ_y , l'équation $(*)$ impose que les inégalités précédentes sont des égalités. En l'indice β minimal pour lequel $\delta_\beta \neq \delta_{x,\beta}$ ou $\delta'_\beta \neq \delta_{y,\beta}$, nous avons par minimalité pour l'ordre lexicographique de $\underline{\delta}_x$ et $\underline{\delta}_y$ que

$$\delta_\beta \geq \delta_{x,\beta} \text{ et } \delta'_\beta \geq \delta_{y,\beta}.$$

L'équation $(*3)$ impose à nouveau que les deux inégalités précédentes sont des égalités, ce qui contredit la définition de β . Nous avons démontré que le coefficient de xy en degré $\underline{\delta}_x + \underline{\delta}_y$ était précisément $a_{\underline{\delta}_x} b_{\underline{\delta}_y}$, non nul par intégrité. Il en découle que

$$|xy|_{\Delta, \underline{c}} \geq e^{-(\gamma_x + \gamma_y)}.$$

□

Corollaire 5.1.15. *Dans le cadre précédent, soit $\beta \in \Delta$. Si A est intègre, la valuation t_β -adique est multiplicative sur $A[[t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta]]$.*

Démonstration. Considérons les $|\cdot|_{\Delta, \underline{c}_n}$ pour $c_{n,\beta} = n$ et $\forall \alpha \neq \beta, c_{n,\alpha} = 1$ puis faire diverger n . □

Lemme 5.1.16. *Soit k un corps et A une k -algèbre noethérienne. Soit Δ un ensemble fini et Γ un groupe abélien totalement ordonné. L'application naturelle*

$$\iota_0 : \bigotimes_{\alpha \in \Delta, k} A[[t_\alpha^\Gamma]] \rightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, k} A \right) [[t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta]]$$

est injective.

Pour toute famille finie de multi-indices $(\underline{\gamma}_i)_{1 \leq i \leq m}$, nous avons

$$\iota_0^{-1}((t^{\underline{\gamma}_i} \mid 1 \leq i \leq m)) = (t^{\underline{\gamma}_i} \mid 1 \leq i \leq m).$$

⁹Comme précédemment la somme est bornée.

Démonstration. Énoncé intermédiaire : soit $\alpha \in \Delta$. Nous commençons par montrer que le morphisme

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\} \rrbracket \otimes_k A \llbracket t_\alpha^\Gamma \rrbracket \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \rrbracket$$

est injectif. Considérons $\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes g_i$ dans le noyau. On écrit $g_i = \sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} a_{i, \gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha}$. En identifiant les termes en $t_\alpha^{\gamma_\alpha}$ au but, nous obtenons

$$\forall \gamma_\alpha, \sum_{1 \leq i \leq n} f_i a_{i, \gamma_\alpha} = 0 \text{ dans } \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\} \rrbracket.$$

Par noethérianité de A , nous choisissons une famille de vecteurs $(e_k)_{1 \leq k \leq r}$ qui engendre le noyau

$$A^n \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\} \rrbracket, (a_i) \mapsto \sum_i f_i a_i.$$

Nous écrivons ensuite $(a_{i, \gamma_\alpha})_{1 \leq i \leq n} = \sum_k b_{k, \gamma_\alpha} e_k$ avec $\forall k, \gamma_\alpha, b_{k, \gamma_\alpha} \in A$. On peut s'arranger pour que le support de chaque famille $(b_{k, \gamma_\alpha})_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}}$ soit contenu dans l'union de tous les supports des $(a_{i, \gamma_\alpha})_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}}$: ce support vérifie les conditions les séries de Hahn-Mal'cev ce qui donne du sens aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes g_i &= \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} a_{i, \gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} \left(\sum_{1 \leq k \leq r} b_{k, \gamma_\alpha} e_{k, i} \right) t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} b_{k, \gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) e_{k, i} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq r} \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} b_{k, \gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes e_{k, i} \right) \end{aligned}$$

et chaque $\sum_i f_i \otimes e_{k, i}$ est dans le noyau de

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\} \rrbracket \otimes_k A \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) \llbracket t_\beta^\Gamma \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\} \rrbracket.$$

Prouver que cette dernière application est injective suffit à conclure. À nouveau, on identifie les coefficients. De plus, le noyau de l'application

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right)^n \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right), \quad (b_i) \mapsto \sum_i e_i \otimes b_i$$

est de type fini sur $(\otimes_{\beta \neq \alpha, k} A)$ puisqu'il s'agit du changement de base de

$$k^n \rightarrow A, \quad (x_i) \mapsto \sum_i x_i e_i$$

dont le noyau est de type fini sur k . On se ramène de cette manière à prouver que

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) \otimes_k A \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta} A \right)$$

est injective, ce qui est tautologique.

Démonstration de l'injectivité : la flèche dont nous voulons montrer l'injectivité est une composée de changements de base au-dessus de k du morphisme ci-dessus.

Étude des idéaux : Soit $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille finie de multi-indices. Appelons J l'idéal engendré par les t^{γ_i} au but et J^\otimes celui engendré à la source. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous posons $\sigma_\alpha \in \mathfrak{S}_m$ telle que

$$\gamma_{\sigma_\alpha(1), \alpha} \leq \gamma_{\sigma_\alpha(2), \alpha} \leq \dots \leq \gamma_{\sigma_\alpha(m), \alpha}.$$

Supposons que $x = \sum_{1 \leq j \leq n} \otimes_{\alpha \in \Delta} f_{j, \alpha} \in J$. Nous découpons chaque $f_{j, \alpha}$ en

$$f_{j, \alpha} = \sum_{k=1}^m t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k), \alpha}} f_{j, \alpha, k}$$

où les monômes en t_α de $f_{j, \alpha, k}$ sont de degré strictement inférieur à $(\gamma_{\sigma_\alpha(k+1), \alpha} - \gamma_{\sigma_\alpha(k), \alpha})$. Il est alors possible d'écrire

$$x = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \in \llbracket 1, m \rrbracket^\Delta} \bigotimes_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha}.$$

Appelons Λ l'ensemble des uplets \underline{i} tels que

$$\exists i, \forall \alpha, \gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha} \geq \gamma_{i, \alpha}.$$

Autrement dit, nous sélectionnons les tranches qui appartiendront automatiquement à l'idéal J^\otimes . Pour chaque uplet $\underline{k} \in \Lambda$, choisissons $i_{\underline{k}}$ qui souligne son appartenance à Λ . Il est alors possible d'écrire

$$\begin{aligned} x_{\geq} &:= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \in \Lambda} \bigotimes_{\alpha \in \Delta} t_{\alpha}^{\gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}), \alpha}} f_{j, \alpha, k_{\alpha}} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq m} t_{\underline{i}}^{\gamma_i} \left(\sum_{\substack{\underline{k} \in \Lambda \\ \text{tel que } i_{\underline{k}} = i}} \bigotimes_{\alpha \in \Delta} t_{\alpha}^{\gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}), \alpha} - \gamma_{i, \alpha}} f_{j, \alpha, k_{\alpha}} \right) \in J^\otimes. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'image par ι_0 de

$$x_{<} := \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \notin \Lambda} \bigotimes_{\alpha \in \Delta} t_{\alpha}^{\gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}), \alpha}} f_{j, \alpha, k_{\alpha}}$$

doit également appartenir à J . Or,

$$\forall \underline{k} \notin \Lambda, \forall i, \exists \alpha, \gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}), \alpha} < \gamma_{i, \alpha}$$

ce qui implique immédiatement par définition des σ_{α}

$$\forall \underline{k} \notin \Lambda, \forall i, \exists \alpha, \gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}+1), \alpha} \leq \gamma_{i, \alpha}$$

Si un monôme $t^{\underline{\gamma}}$ apparaît dans $\iota_0(\sum_j \bigotimes_{\alpha} t_{\alpha}^{\gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}), \alpha}} f_{j, \alpha, k_{\alpha}})$ nous avons par construction des $f_{j, \alpha, k}$ que

$$\forall \alpha, \gamma_{\alpha} < \gamma_{\sigma_{\alpha}(k_{\alpha}+1), \alpha}.$$

Il en découle que $\nexists i, \forall \alpha, \gamma_{\alpha} \geq \gamma_{i, \alpha}$. Dans l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariées, l'appartenance à J se teste sur les monômes qui apparaissent. Il en découle que $\iota_0(x_{<}) = 0$. Puisque nous avons déjà démontré que ι_0 est injective, il en découle que $x_{<} = 0$ soit $x = x_{\geq} \in J^\otimes$. \square

Nous reprenons à présent les notations de la section précédente. Nous étudions tout d'abord l'anneau \tilde{E}_{Δ} (et par conséquent tous les \tilde{F}_{Δ}).

Définition 5.1.17. Pour tout $r \in \mathbb{N}[q^{-1}]$, nous définissons l'idéal $I_{r, \Delta}$ de \tilde{E}_{Δ}^+ par

$$I_{r, \Delta} := (\varpi^{\underline{r}} \mid, \underline{r} \in (\mathbb{N}[q^{-1}])^{\Delta}, \sum r_{\alpha} = r) = \bigcup_{k \gg k_r} \varphi_{\Delta, q}^{-k} \left((\varpi)^{q^{k_r}} \right)$$

où k_r est tel que $q^{k_r} r \in \mathbb{N}$.

On définit de même la famille d'idéaux

$$I_{r^-, \Delta} := \bigcap_{\substack{r' \in \mathbb{N}[q^{-1}] \\ \text{tel que } r' < r}} I_{r', \Delta}.$$

Proposition 5.1.18. *Il existe une injection d'anneaux*

$$\hat{\iota} : \tilde{E}_{\Delta}^+ \hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_{\alpha}^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket.$$

De plus, nous pouvons choisir cette injection de telle sorte que

$$\forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \quad \hat{\iota}^{-1}(J_{r, \Delta}) = I_{r^-, \Delta}.$$

Démonstration. Grâce à [Bou81, Chap. V §17, Prop. 9], l'extension $\tilde{E}|\mathbb{F}_q$ est régulière. Il en découle que l'anneau $\tilde{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ est intègre. Sa complétion ϖ -adique est encore un corps perfectoïde, de pseudo-uniformisante ϖ et de corps résiduel muni d'un plongement de $\overline{\mathbb{F}_q}$; nous le notons \tilde{E}' . Il est lui-même plongé dans un corps perfectoïde¹⁰ \tilde{F} de pseudo-uniformisante ϖ et de corps résiduel k^{alg} . Nous obtenons grâce à [Kap42, Cor. du Th. 8] que \tilde{F} est analytiquement isomorphe à un sous-corps de $k^{\text{alg}}(\llbracket t^{\mathbb{R}} \rrbracket)$, avec ϖ envoyé sur t : notre corps est perfectoïde de corps résiduel algébriquement clos et de groupe de valeurs contenu dans \mathbb{R} ce qui permet de vérifier sans problème les hypothèses du théorème de Kaplansky. De plus, en examinant attentivement la preuve de [Kap42, Lemme 13], nous pouvons garantir que chaque ϖ^{1/q^n} est envoyé sur t^{1/q^n} . Il existe ainsi une suite d'injections d'anneaux

$$\tilde{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \tilde{E}'^{\circ} \hookrightarrow \tilde{F}^{\circ} \hookrightarrow k^{\text{alg}} \llbracket t^{\mathbb{R}} \rrbracket$$

qui envoie ϖ^{1/q^n} sur t^{1/q^n} . Nous obtenons une suite d'injections

$$\begin{aligned} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_{\alpha}^{\circ} &\hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_{\alpha}^{\circ} \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \left(\tilde{E}_{\alpha}^{\circ} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \right) \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_{\alpha}'^{\circ} \\ &\hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_{\alpha}^{\mathbb{R}} \rrbracket \\ &\hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_{\alpha}^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket \end{aligned}$$

où la dernière provient du lemme 5.1.16. Appelons ι la composée.

Commençons par considérer une famille finie $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$ de multi-indices à valeurs dans $\mathbb{N}[q^{-1}]$ et notons I^{\otimes} (resp. I'^{\otimes} , resp. J^{\otimes} , resp. J) l'idéal engendré par la famille

¹⁰Considérer par exemple la complétion de sa clôture algébrique.

$(\varpi^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$ (resp. $(\varpi^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$, resp. $(t^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$, resp. $(t^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$) à la source du morphisme ι (resp. chaque étape de sa décomposition ci-dessus par ordre croissant). Nous démontrons que $\iota^{-1}(J) = I^\otimes$.

Nous savons déjà grâce au Lemme 5.1.16 que l'image réciproque de J par le dernier morphisme est J^\otimes . Pour passer de J^\otimes à I^\otimes , fixons n tel que $\forall (i, \alpha)$, $k_{i,\alpha} \in q^{-n}\mathbb{N}$. Prenons une famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans \tilde{E}^+ telle que la famille des réductions est une \mathbb{F}_q -base de $\tilde{E}^\circ / \varpi^{1/q^n} \tilde{E}^\circ$. Puisque \tilde{E}° est ϖ^{1/q^n} -adiquement séparé et complet, tout élément s'écrit de manière unique comme

$$\sum_{k \geq 0, i \in \mathcal{I}} a_{k,i} e_i \varpi^{k/q^n}$$

pour une famille presque nulle $((a_{k,i})_{k \geq 0})_{i \in \mathcal{I}}$ d'éléments de \mathbb{F}_q . Autrement dit, nous avons l'égalité algébrique

$$\tilde{E}^\circ = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi^{1/q^n} \rrbracket e_i.$$

Pour tout multi-indice $\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta$, nous appelons $e_{\underline{i}} = \otimes e_{i_\alpha}$ de tel sorte que

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^\circ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_\alpha^{1/q^n} \rrbracket \right) e_{\underline{i}}.$$

Appelons

$$A_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_\alpha^{1/q^n} \rrbracket, \quad A'_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket \varpi_\alpha^{1/q^n} \rrbracket \text{ et } B_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^{1/q^n} \rrbracket.$$

Puisque $(\tilde{E}^\circ / \varpi^{1/q^n}) \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \cong \tilde{E}'^\circ / \varpi^{1/q^n} \hookrightarrow k^{\text{alg}} \llbracket t^\mathbb{R} \rrbracket / t^{1/q^n}$, nous pouvons étendre la famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ en une famille indexée par $\mathcal{J} \supset \mathcal{I}$ telle que $(f_j)_{j \in \mathcal{J}}$ soit une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base de $k^{\text{alg}} \llbracket t^\mathbb{R} \rrbracket / t^{1/q^n}$ et que l'image de e_i coïncide avec f_i . La famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ s'identifie aussi à une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base de $\tilde{E}'^\circ / \varpi^{1/q^n}$. Nous obtenons donc trois décompositions comme A_n -module (resp. A'_n -, resp. B_n -module)

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^\circ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} A_n e_{\underline{i}}, \quad \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}'_\alpha^\circ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} A'_n e_{\underline{i}} \text{ et } \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^\mathbb{R} \rrbracket = \bigoplus_{\underline{j} \in \mathcal{J}^\Delta} B_n f_{\underline{j}}.$$

Les idéaux I^\otimes , I'^\otimes et J sont engendrés par des éléments qui appartiennent respectivement à A_n , A'_n et B_n . Nous appelons $I^{\otimes, \text{res}}$ l'idéal engendré dans A_n , $I'^{\otimes, \text{res}}$ dans A'_n et $J^{\otimes, \text{res}}$ dans B_n . Un élément appartient à I^\otimes (resp. I'^\otimes , resp. J^\otimes) si et seulement si¹¹ toutes ses coordonnées appartiennent à $I^{\otimes, \text{res}}$ (resp. $I'^{\otimes, \text{res}}$, resp. $J^{\otimes, \text{res}}$).

¹¹Pour remonter, faire attention que seulement un nombre fini de coordonnées sont non nulles et l'idéal considéré est de type fini.

Nous allons exécuter des manipulations lourdes en notations, qui reviennent au fond à considérer les coordonnées dans la famille des $e_i \varpi^{k/q^n}$. Toutefois, en se contentant de décomposer ainsi, on perdrait la trace de l'appartenance des coordonnées au produit tensoriel des séries formelles à l'intérieur des séries multivariées. Cet avertissement sur la laideur à venir terminé, prenons le morphisme

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}'_{\alpha} \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_{\alpha}^{\mathbb{R}} \rrbracket.$$

Nous obtenons donc un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}'_{\alpha} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i \in \mathcal{I}'^{\Delta}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) e_{\underline{i}} \\ \downarrow & & \downarrow \varpi^{1/q^n} \mapsto t^{1/q^n} \text{ et } \mathcal{I}' \subset \mathcal{J} \\ \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_{\alpha}^{\mathbb{R}} \rrbracket & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{j \in \mathcal{J}^{\Delta}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \mathbb{F}_q \llbracket t_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) f_{\underline{j}} \end{array}$$

L'idéal J^{\otimes} est composé des éléments à coordonnées dans $J^{\otimes, \text{res}}$. L'idéal $J^{\otimes, \text{res}}$ s'identifie à $I'^{\otimes, \text{res}}$ via $\varpi \mapsto t$. L'image réciproque de J^{\otimes} est constituée des éléments de coordonnées dans $I'^{\otimes, \text{res}}$, i.e. les éléments de I'^{\otimes} .

Puisque $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ est une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base $\tilde{E}'_{\alpha} / \varpi^{1/q^n}$, nous obtenons ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_{\alpha}^{+} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i \in \mathcal{I}^{\Delta}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) e_{\underline{i}} \\ \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbb{F}_q} \\ \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_{\alpha}^{'+} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{j \in \mathcal{J}^{\Delta}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \mathbb{F}_q \llbracket t_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) e_{\underline{j}} \end{array}$$

Comme les appartenances à I^{\otimes} et I'^{\otimes} se détectent sur les coordonnées, il suffit de démontrer que l'image réciproque de $I'^{\otimes, \text{res}}$ est $I^{\otimes, \text{res}}$. Prenons $\{1\} \sqcup \mathcal{B}$ une \mathbb{F}_q -base de $\overline{\mathbb{F}_q}$. Il est possible d'écrire

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \mathbb{F}_q \llbracket t_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket t_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) \oplus \left[\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket t_{\alpha}^{1/q^n} \rrbracket \right) b \right].$$

À nouveau, l'appartenance à $I'^{\otimes, \text{res}}$ se lit sur les coordonnées : il faut qu'elles appartiennent à $I^{\otimes, \text{res}}$. Cela conclut.

Nous avons démontré par circonvolutions et tourbillons de notations que $\iota^{-1}(J) = I^{\otimes}$ pour toute famille finie de multi-indices. En passant à l'union, on obtient le résultat pour des familles quelconques de multi-indices.

L'anneau \tilde{E}_Δ^+ est la complétion de $\otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+$ par rapport aux idéaux $(\varpi)^k$ pour $k \geq 1$. Nous avons prouvé en particulier que pour tout entier $k \geq 1$ l'image réciproque de l'idéal $(t)^k$ est l'idéal $(\varpi)^k$; ainsi, ι se complète en un morphisme d'anneaux

$$\hat{\iota} : \tilde{E}_\Delta^+ \hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket.$$

Revenons aux énoncés sur les idéaux. Nous commençons par raffiner notre propriété sur les images inverses en remplaçant ι par $\hat{\iota}$. Considérons une famille de multi-indices $(\underline{k}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ telle que

$$\exists n, \forall \alpha \in \Delta, \exists k_\alpha \leq n, (0, \dots, 0, k_\alpha, 0, \dots, 0) \in \{\underline{k}_i \mid i \in \mathcal{I}\}.$$

Cette condition se traduit par " $(t^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{I})$ est ouvert pour la topologie (t) -adique dans l'anneau de séries de Hahn-Mal'cev multivariées". Démontrer l'égalité $\hat{\iota}^{-1}((t^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{I})) = (\varpi^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{I})$ dans \tilde{E}_Δ^+ revient à la prouver dans $\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+$, ce qui est déjà fait.

On comprend mieux l'énoncé sur l'image réciproque de $J_{r,\Delta}$. À première vue, nous voudrions que $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r,\Delta}$ mais l'idéal $J_{r,\Delta}$ n'est pas engendré par $\{t^{\underline{s}} \mid \underline{s} \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \text{ tq } \sum s_\alpha = r\}$. En réalité,

$$J_{r,\Delta} = \bigcap_{\substack{r' \in \mathbb{N}[q^{-1}] \\ \text{tel que } r' < r}} \left(t^{\underline{s}} \mid \underline{s} \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \text{ tq } \sum s_\alpha = r' \right).$$

À partir du résultat sur les idéaux ouverts, on obtient donc $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r^-, \Delta}$. \square

Contrairement aux anneaux de [CKZ21], l'anneau l'anneau \tilde{E}_Δ est intègre.

Corollaire 5.1.19. *L'anneau \tilde{E}_Δ^+ est intègre.*

Démonstration. Puisque $\overline{\mathbb{F}_q}$ est parfait et algébriquement clos, nous savons grâce à [Bou81, Chap. V §5, Prop. 9] que toutes ses extensions sont régulières, en particulier $\left(\otimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right)$ est intègre. Nous déduisons que l'anneau de séries de Hahn-Mal'cev multivariable est intègre grâce à la Proposition 5.1.11, puis que \tilde{E}_Δ^+ est intègre par injectivité de $\hat{\iota}$. \square

Corollaire 5.1.20. 1. *La formule*

$$|x|_{\tilde{E}, \Delta} = e^{-\sup \left\{ r \in \mathbb{N}[q^{-1}] \mid x \in I_{r^-, \Delta} \right\}}$$

fournit une norme multiplicative sur \tilde{E}_Δ^+ .

2. Nous avons

$$\forall \underline{k} \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta, \quad \hat{\iota}^{-1}((t^{\underline{k}})) = (\varpi^{\underline{k}}).$$

Démonstration. 1. Les propriétés de $|\cdot|_{\tilde{E},\Delta}$ se déduisent alors de celles de $|\cdot|_{\Delta,\perp}$ à la Proposition 5.1.14 et des égalités $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r^-, \Delta}$ à la Proposition 5.1.18.

2. Il faut démontrer que $\hat{\iota}^{-1}((t^{\underline{k}})) \subseteq (\varpi^{\underline{k}})$. Soit x dans l'image réciproque. Nous avons

$$\forall n, \quad \hat{\iota}(x) \in (t^{\underline{k}}, J_{n,\Delta}).$$

Ce dernier idéal étant (ϖ) -adiquement ouvert, nous avons démontré en prouvant la Proposition 5.1.18 que $\forall n, \quad x \in (\varpi^{\underline{k}}, I_{n^-, \Delta})$. Écrivons $x = \varpi^{\underline{k}} x'_n + y_n$ avec $y_n \in I_{n^-, \Delta}$. Alors, $\varpi^{\underline{k}} x'_n \rightarrow x$ pour la norme $|\cdot|_{\tilde{E},\Delta}$. Cette dernière étant multiplicative, la suite x'_n est également de Cauchy pour la norme $|\cdot|_{\tilde{E},\Delta}$. Puisque

$$I_{(n+1)|\Delta|^-, \Delta} \subset I_{n|\Delta|, \Delta} \subset (\varpi^n) \subset (\varpi)^n,$$

la suite (x'_n) est également (ϖ) -adiquement de Cauchy et possède une limite $x' \in \tilde{E}_\Delta^+$ qui vérifie que $x = \varpi^{\underline{k}} x'$. \square

Pour comprendre les anneaux $\tilde{F}_{\Delta,q}$ nous les exprimons comme coinduites des \tilde{F}_Δ , que nous venons d'analyser. L'intuition nous vient du lemme suivant sur les corps finis.

Lemme 5.1.21. *Définissons une structure de $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ -anneau sur $\mathbb{F}_{q'}$ en faisant agir le générateur $\varphi_{\Delta,r}$ du quotient $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}/\Phi_{\Delta,q'}^{\text{gp}} \cong \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{Z}}/\varphi_{\Delta,q'}^{\mathbb{Z}}$ comme le r -Frobenius. Il existe un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux*

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}).$$

Démonstration. Pour tout $\psi \in \Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$, nous définissons

$$\psi_{\text{spé}} : \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \rightarrow \mathbb{F}_{q'}, \quad \bigotimes x_\alpha \mapsto \prod \psi_\alpha(x_\alpha).$$

Nous laissons aux lecteurs et lectrices le soin de vérifier que

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \rightarrow \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}), \quad x \mapsto [\psi \mapsto \psi_{\text{spé}}(x)]$$

est un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux. \square

Gardons en tête les notations de la preuve précédente pour établir un analogue pour nos anneaux multivariables. Nous nous plaçons dans le même contexte qu'à la section précédente.

Proposition 5.1.22. *Rappelons que \tilde{F}_Δ^+ est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ -anneau et $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau. Il existe un isomorphisme de foncteurs¹² de $\mathcal{G}\text{al}_{\tilde{E}}$ dans les $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux*

$$\tilde{F}_{\Delta,q}^+ \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_\Delta^+).$$

C'est un isomorphisme de foncteurs vers les anneaux topologiques pour les topologies discrètes (resp. ϖ_Δ -adiques) sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ et¹³ \tilde{F}_Δ^+ .

Le même résultat est vrai pour $\tilde{F}_{\Delta,q}$ et \tilde{F}_Δ pour les topologies discrètes ou les topologies adiques.

Pour $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ fini, on a un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux topologiques

$$\tilde{F}_\Delta^{\text{sep}} = \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}).$$

Démonstration. Nous appelons encore $\psi_{\text{spé}}$ le morphisme de $\tilde{F}_{\Delta,q}$ dans \tilde{F}_Δ donné par la même formule qu'au Lemme 5.1.21.

Choisissons un système \mathcal{R} de représentants du quotient fini $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}/\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$. Nous avons un isomorphisme d'anneaux

$$\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \mathbb{F}_{q'}, \quad f \mapsto (f(\psi))_{\psi \in \mathcal{R}}.$$

Pour n'importe quel $\beta \in \Delta$, nous pouvons établir la suite d'isomorphismes d'anneaux suivante :

¹²Voir le Lemme 5.1.7.

¹³La coinduite étant une limite, elle vient avec une topologie naturelle.

$$\begin{aligned}
\left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{F}_\beta^\circ &\cong \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_{q', \beta}} \tilde{F}_\beta^\circ \\
&\cong \left(\prod_{\psi \in \mathcal{R}} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_{q', \beta}} \tilde{F}_\beta^\circ \\
&\cong \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \left(\mathbb{F}_{q'} \otimes_{\psi_\beta, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_\beta^\circ \right) \\
&\cong \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \tilde{F}_\beta^\circ \\
&\cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}} (\tilde{F}_\beta^\circ)
\end{aligned}$$

où $\mathbb{F}_{q', \beta}$ est indique que le produit (tensoriel) est vu comme $\mathbb{F}_{q'}$ -algèbre via son facteur β et où ψ_β est la composante de ψ sur $\varphi_{\beta, p}^{\mathbb{N}}$. Le passage à la troisième ligne correspond à expliciter la structure de $\mathbb{F}_{q'}$ -algèbre sur chaque facteur du produit, et à faire commuter le produit fini au produit tensoriel. Le passage à la quatrième ligne correspond à appliquer au facteur ψ l'isomorphisme $x \otimes y \mapsto x\psi_\beta(y)$. Nous vérifions que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneau en suivant l'image de

$$\chi \left(\left(\bigotimes_{\alpha \neq \beta} x_\alpha \right) \otimes y_\beta \right) = \bigotimes_{\alpha \neq \beta} \chi_\alpha(x_\alpha) \otimes \chi_\beta(y_\beta)$$

le long des isomorphismes et en vérifiant qu'elle vaut

$$\left[\psi \mapsto \prod_{\alpha \neq \beta} (\psi\chi)_\alpha(x_\alpha) \times (\psi\chi)_\beta(y_\beta) \right].$$

Une itération de ces arguments fournit un isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneaux :

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^\circ \xrightarrow{\sim} \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_\alpha^\circ \right), \quad \otimes y_\alpha \mapsto [\psi \mapsto \psi_{\text{spé}}(\otimes y_\alpha)]. \quad (*4)$$

Attention, les arguments de $\psi_{\text{spé}}$ sont des tenseurs sur \mathbb{F}_q mais les valeurs de sortie sont des tenseurs sur $\mathbb{F}_{q'}$.

Grâce à l'expression explicite du morphisme, chaque ϖ_α est envoyé dans la coinduite sur $(\psi_\alpha(\varpi_\alpha))_{\psi \in \mathcal{R}}$. Les puissances de l'idéal $((\psi_\alpha(\varpi_\alpha))_{\psi \in \mathcal{R}} \mid \alpha \in \Delta)$ et de l'idéal $((\varpi_\alpha)_{\psi \in \mathcal{R}} \mid \alpha \in \Delta)$ étant cofinales les unes dans les autres, l'isomorphisme est un homéomorphisme pour la topologie (ϖ) -adique à la source et et le produit des topo-

logies (ϖ) -adiques au but. L'isomorphisme se complète donc en un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux

$$\tilde{F}_{\Delta,q}^+ \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_{\Delta}^+).$$

C'est évidemment un homéomorphisme pour les topologies discrètes partout.

Par intégrité de \tilde{F}_{Δ}^+ , un élément $x \in \tilde{F}_{\Delta}^+$ appartient à $\varpi_{\Delta} \tilde{F}_{\Delta,q}^+$ si et seulement si chaque $\psi_{\text{spé}}(x) \in \psi_{\text{spé}}(\varpi_{\Delta}) \tilde{F}_{\Delta}^+$. En écrivant la coinduite comme un produit fini et en remarquant que tous les $(\psi_{\text{spé}}(\varpi_{\Delta}))$ ont même radical, c'est un homéomorphisme pour la topologie ϖ_{Δ} -adique et le produit des topologies ϖ_{Δ} -adiques.

En inversant ϖ_{Δ} et en remarquant que (ϖ_{Δ}) et $(\psi_{\text{spé}}(\varpi_{\Delta}))$ ont même radical dans \tilde{F}_{Δ} , on obtient l'isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux. Sa continuité au niveau entier entraîne sa continuité après localisation.

La naturalité de toutes ces constructions se teste sur l'expression (*4) puisque les morphismes liés aux foncteurs du Lemme 5.1.7 sont également obtenus en complétant de tels produits tensoriels. Ces vérifications reposent sur le fait que les inclusions $\tilde{F}_{\alpha}^{\circ} \subset \tilde{F}_{\alpha}^{\prime+}$ sont $\varphi_{\alpha,q}$ -équivariantes.

Soit $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ finie. Grâce à la naturalité, on peut passer à la colimite sur $\mathcal{G}_{\tilde{F}}$. Le résultat découle alors de ce que $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ est d'indice fini dans $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$; la coinduite est une limite finie et commute donc aux colimites filtrantes. \square

Corollaire 5.1.23. *Pour une extension finie $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$, l'anneau $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_{Δ}^+ -torsion. En particulier l'anneau \tilde{E}_{Δ}^+ est intègre.*

Il en découle que l'application $\tilde{F}_{\Delta,q}^+ \rightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}$ est injective. L'anneau $\tilde{F}_{\Delta,q}$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_{Δ} -torsion. En particulier l'anneau \tilde{E}_{Δ} est intègre.

Démonstration. La coinduite est un anneau de fonctions à valeurs dans \tilde{F}_{Δ}^+ . Nous avons prouvé que ce dernier est intègre au Corollaire 5.1.19 donc la coinduite est réduite.

Pour la torsion, utiliser que le plongement de \tilde{E}_{Δ}^+ dans la coinduite s'écrit $\prod \psi$, que chaque ψ est injectif et que \tilde{F}_{Δ}^+ est sans \tilde{E}_{Δ}^+ -torsion. \square

Corollaire 5.1.24. *L'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq \tilde{F}_{\Delta,q}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}$ est une égalité.*

Démonstration. On se ramène à prouver que l'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq \tilde{F}_{\Delta,q',r}^{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}$ est une égalité.

Soit y un élément invariant. Nous fixons n tel que $\varpi_{\Delta}^n y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. En appliquant $\varphi_{\Delta,r}$, on trouve

$$(\varpi_{\Delta}^n y)^r = \varpi_{\Delta}^{rn} \varphi_{\Delta,r}(y) = \varpi_{\Delta}^{(r-1)n} (\varpi_{\Delta}^n y).$$

En appliquant $|\cdot|_{\tilde{F},\Delta}$ dont nous avons prouvé au Corollaire 5.1.14 qu'elle est multiplicative, nous trouvons $|\varpi_{\Delta}^n y|_{\tilde{F},\Delta} = 0$ ou $|\varpi_{\Delta}^n y|_{\tilde{F},\Delta} = |\varpi_{\Delta}^n|_{\tilde{F},\Delta}$. En utilisant la séparation de la norme, sa multiplicativité et le fait que ϖ_{Δ}^n n'est pas diviseur de

zéro, on en déduit que $y = 0$ ou $y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$ de norme 1. Il existe donc $y_0 \in \mathbb{F}_{q'}$ tel que $|y - y_0|_{\tilde{F}, \Delta} < 1$. En appliquant le même raisonnement à cette différence, on trouve $y = y_0$. \square

Corollaire 5.1.25. *Si l'on munit $\tilde{F}_{\Delta, q}$ de la topologie adique, la paire $(\tilde{F}_{\Delta, q}, \tilde{F}_{\Delta, q}^+)$ est une paire de Huber perfectoïde.*

Démonstration. La définition de la topologie adique implique que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+$ est un anneau de définition. Il est de plus parfait de pseudo-uniformisante ϖ_{Δ} . Nous savons alors que $\tilde{F}_{\Delta, q}$ est un anneau de Tate perfectoïde. Pour conclure, il reste à démontrer que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+$ est intégralement clos. Nous montrons même que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+ = \tilde{F}_{\Delta, q}^{\circ}$.

D'après la Proposition 5.1.22, via l'expression $\tilde{F}_{\Delta, q}$ comme coinduite, la topologie adique s'identifie au produit des topologies adiques sur \tilde{F}_{Δ} ; un anneau de définition est donné par le produit d'anneaux de définition ; un idéal de définition canonique est donné par le produit d'idéaux de définition. Ainsi, ses éléments bornés sont exactement les familles d'éléments bornés : on se restreint à démontrer le résultat pour \tilde{F}_{Δ} .

Soit $y \in \tilde{F}_{\Delta}^{\circ}$ que l'on écrit z/ϖ_{Δ}^k avec $z \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. Par hypothèse, fixons $l \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq 0, \quad \varpi_{\Delta}^l y^{q^n} \in \tilde{F}_{\Delta}^+.$$

Puisque \tilde{F}_{Δ}^+ est parfait, cela implique que

$$\forall n \geq 0, \quad z \in \varpi_{\Delta}^{k - \frac{l}{q^n}} \tilde{F}_{\Delta}^+.$$

Dans l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariées, nous en déduisons

$$\forall n \geq 0, \quad \hat{\iota}(z) \in (t_{\Delta}^{k - \frac{l}{q^n}})$$

puis que $\hat{\iota}(z) \in (t_{\Delta}^k)$. Grâce au Corollaire 5.1.20, ceci implique que $z \in \varpi_{\Delta}^k \tilde{F}_{\Delta}^+$, i.e. que $y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. \square

Proposition 5.1.26. *L'anneau $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_{Δ} -torsion.*

Démonstration. Pour toute tour d'extensions $\tilde{E}^{\text{sep}} | \tilde{F}' | \tilde{F} | E$, le morphisme $\tilde{F}_{\Delta, q} \rightarrow \tilde{F}'_{\Delta, q}$ du Lemme 5.1.7 est obtenu en appliquant $\text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{sep}}}$ au morphisme $\tilde{F}_{\Delta} \rightarrow \tilde{F}'_{\Delta, q'}$. Le Corollaire 5.1.23 entraîne donc que la colimite indexant le diagramme du Lemme 5.1.7 est donnée par des injections. Une autre utilisation du Corollaire 5.1.23 conclut alors quant aux propriétés de $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$. \square

Remarque 5.1.27. Si l'anneau de coefficients \tilde{E}_Δ de nos φ -modules perfectoïdes multivariables est intègre, ce n'est pas le cas de l'anneau de comparaison $\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$. En effet, il existe une injection

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}.$$

5.1.3 Le foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$

Nous imitons la construction du foncteur de Fontaine et obtenir un foncteur

$$\tilde{\mathbb{D}}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta \right).$$

Des conditions données par le formalisme du Chapitre 2, il reste essentiellement à démontrer que la descente galoisienne fonctionne pour des anneaux multivariables.

Lemme 5.1.28. *Le morphisme canonique*

$$\tilde{E}_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_\alpha} \left(\tilde{E}_\beta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_\beta} \cdots \left(\tilde{E}_\delta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_\delta} \tilde{F}_{\Delta, q} \right) \right) \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ -équivalent. Pour définir l'objet de gauche, la structure de \tilde{F}_α -algèbre est donnée par le morphisme $\tilde{F}_\alpha \rightarrow \tilde{F}_{\Delta, q}$.

Démonstration. Puisque les morphismes $\tilde{E}_\alpha^{\text{sep}} \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ sont $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ -équivalents, l'équivariance est automatique. De plus, quitte à passer à la colimite, on se restreint à prouver une identité similaire entre $\tilde{F}'_{\Delta, q}$ et $\tilde{F}_{\Delta, q}$ pour une extension finie $\tilde{F}' | \tilde{F}$.

Nous introduisons, pour toute paire (A, ϖ) formée d'un anneau et d'un élément admettant des racines p^n -ièmes pour n arbitraire, la catégorie $(A, \varpi)\text{-Mod}$ des presque- A -modules par rapport à l'idéal $\text{Rad}(\varpi)$. De la même manière, nous appelons presque- (A, ϖ) -isomorphisme un morphisme de A -modules qui devient un isomorphisme dans $(A, \varpi)\text{-Mod}$.

Grâce à [Sch12, Prop. 5.23], nous savons que \tilde{F}'° est un $(\tilde{F}^\circ, \varpi)$ -module uniformément libre de type fini. Choisissons une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq d}$ dans \tilde{F}'° telle que

$$\bigoplus_{k=1}^d \tilde{F}^\circ x_k \rightarrow \tilde{F}'^\circ$$

est un presque- $(\tilde{F}^\circ, \varpi)$ -isomorphisme. Le morphisme

$$\bigoplus_{(i_\alpha) \in \llbracket 1, d \rrbracket^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^{\circ} \right) (\otimes x_{i_\alpha, \alpha}) \rightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha'^{\circ} \right)$$

est un presque- $\left(\left(\otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^\circ\right), \varpi_\Delta\right)$ -isomorphisme (pour le voir, on le décompose comme suite de changements de base du presque-isomorphisme précédent). Puisque la structure monoïdale sur (A, ϖ) -Mod vient du produit tensoriel sur les A -modules (voir [GR02, §2.2.5]), le morphisme ci-dessus est encore un presque-isomorphisme après quotient par $(\varpi)^n$. En passant à la limite¹⁴, nous en déduisons que

$$\bigoplus_{(i_\alpha) \in \llbracket 1, d \rrbracket^\Delta} \tilde{F}_{\Delta, q}^+(\otimes x_{i_\alpha, \alpha}) \rightarrow \tilde{F}_{\Delta, q}'^+$$

est un presque- $(\tilde{F}_{\Delta, q}^+, \varpi_\Delta)$ -isomorphisme. En décomposant à nouveau, le terme de gauche est presque- $(\tilde{F}_{\Delta, q}^+, \varpi_\Delta)$ -isomorphe à

$$\tilde{F}_\alpha'^\circ \otimes_{\tilde{F}_\alpha^\circ} \left(\tilde{F}_\beta'^\circ \otimes_{\tilde{F}_\beta^\circ} \cdots \left(\tilde{F}_\delta'^\circ \otimes_{\tilde{F}_\delta^\circ} \tilde{F}_{\Delta, q}^+ \right) \right).$$

En inversant ϖ_Δ , nous obtenons l'isomorphisme escompté. \square

Corollaire 5.1.29. 1. Pour toute extension finie $\tilde{E}^{\text{sep}} | \tilde{F} | \tilde{E}$, l'inclusion $\tilde{F}_{\Delta, q} \subseteq \left(\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}\right)^{\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}}$ est une égalité.

2. Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}\right)$ pour la topologie discrète sur $\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$, le morphisme de comparaison

$$\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \rightarrow D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Grâce à la description ci-dessus, nous pouvons appliquer [Mar22b, Th. 3.6]. La descente fidèlement plate des modules projectifs pour $\tilde{F}_{\Delta, q} \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ (resp. pour $\tilde{E}_\Delta \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$) établit une équivalence de catégorie entre les $\tilde{F}_{\Delta, q}$ -modules finis projectifs et les $\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ -modules finis projectifs munis d'une action lisse de $\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}$. Cela implique les deux énoncés. \square

Définition/Proposition 5.1.30. Le foncteur

$$\tilde{\mathbb{D}}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} \rightarrow \text{Mod}\left(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta\right), \quad V \mapsto \left(\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V\right)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}}$$

est correctement défini et son image essentielle est incluse dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta\right)$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée et $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

¹⁴La catégorie (A, ϖ) -Mod admet toutes les limite puisque la localisation $A\text{-Mod} \rightarrow (A, \varpi)\text{-Mod}$ admet un adjoint à gauche (voir [GR02, Cor. 2.2.15]).

Démonstration. La catégorie de représentations se réécrit $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r)$. Nous décomposons le foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ comme suit.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : & \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}) \end{array}$$

Pour montrer que Ex et Inv préservent les sous-catégories, nous utilisons la Proposition 2.5.20 respectivement pour le morphisme de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneaux topologiques discrets $\mathbb{F}_r \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ et la Proposition 2.5.21 pour $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ avec comme sous-monoïde $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} < (\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$. Les conditions de la Proposition 2.5.20 ont été déjà démontrées en construisant les anneaux. Nous listons et démontrons les conditions de la Proposition 2.5.21.

Condition 1 : le sous-monoïde $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ est distingué et le groupe topologique quotient s'identifie à $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$. Tout découle de ce que $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ est un produit direct.

Condition 2 : l'anneau topologique \tilde{E}_{Δ} s'identifie à $(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})^{\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}$. L'identification ensembliste est l'objet du premier point du Corollaire 5.1.29. Puisque les anneaux sont discrets, la condition topologique est vide.

Condition 3 : l'inclusion $\tilde{E}_{\Delta} \subset \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ est fidèlement plate. Le Lemme 5.1.28 démontre que c'est une suite de changements de base le long de morphismes de corps, a fortiori un morphisme fidèlement plat.

Condition 4 : les morphismes de comparaison sont des isomorphismes. C'est l'objet du deuxième point du Corollaire 5.1.29.

Le foncteur ainsi construit arrive dans $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$. Puisque $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ est discret les catégories $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$ et $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$ coïncident pour n'importe quelle topologie. \square

5.2 L'équivalence multivariable perfectoïde modulo p

Pour démontrer une équivalence de Fontaine perfectoïde modulo p , il nous reste à montrer que le candidat naturel à être quasi-inverse de $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ fournit de bons objets. Nous pouvons déjà le définir

Définition 5.2.1. Grâce aux résultats du Lemme 5.1.7 et du Corollaire 5.1.24, nous pouvons définir correctement

$$\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r), \quad D \mapsto (\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}.$$

Pour prouver qu'il est quasi-inverse de $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$, nous aurons besoin de démontrer un autre isomorphisme de comparaison, beaucoup plus délicat. Nous suivons la stratégie dans [CKZ21] qui consiste à utiliser le lemme de Drinfeld pour les diamants afin d'obtenir d'une autre manière une \mathbb{F}_r -représentation de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ à partir d'un $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -module sur \tilde{E}_Δ . Dans la preuve de [CKZ21, Prop. 4.20], les trois auteurs utilisent la commutation de leur foncteur au dual, peu évidente à ce stade de démonstration. Nous préférons utiliser activement l'intégrité des anneaux dans notre version de l'équivalence pour contourner une partie des arguments.

5.2.1 Le foncteur $V_{\tilde{E},\Delta}$

Il reste à démontrer que le morphisme de comparaison pour les invariants $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ est un isomorphisme pour $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}})$. Grâce au Corollaire 5.1.29, la descente galoisienne établit une équivalence de catégories

$$\text{Inv} : \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta) : \text{Ex}.$$

On se ramène donc à prouver le théorème suivant.

Théorème 5.2.2. [voir Théorème 5.2.11] *Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$, le morphisme de comparaison*

$$\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \tilde{V}_\Delta(D) \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D$$

est un isomorphisme.

Nous construisons par une méthode géométrique un foncteur $V_{\tilde{E},\Delta}$ puis nous l'analysons pour obtenir l'isomorphisme de comparaison. Nous aurons besoin d'utiliser tous les foncteurs $V_{\tilde{F},\Delta}$ avec $\tilde{F}|\tilde{E}$ finie pour étudier \tilde{V}_Δ . Bien que ce qui suit est rédigé avec \tilde{E} et q , gardons en tête que nous démontrons les résultats également pour chaque \tilde{F} et q' .

Proposition 5.2.3. *Soit D un objet de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \tilde{E}_\Delta)$, le foncteur*

$$\mathfrak{I}_D : \tilde{E}_\Delta\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens}, \quad T \mapsto (T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}},$$

où $\varphi_{\Delta,r}$ agit sur T comme de r -Frobenius, est représentable par une \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale que l'on nomme S_D .

Démonstration. Étape 1 : soit R une \mathbb{F}_r -algèbre et φ_r le r -Frobenius. Soit D un objet de $\text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_r^{\mathbb{N}}, R)$ qui est libre de rang fini comme R -module. Alors le foncteur

$$R\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens}, \quad T \mapsto (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}}$$

est représentable par une R -algèbre finie étale. Fixons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de D et A la matrice de $\varphi_{r,D}$ dans la base \mathcal{B} , autrement dit

$$\forall (x_i) \in R^d, \quad \varphi_{r,D} \left(\sum_{1 \leq i \leq d} x_i e_i \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i^r a_{i,j} e_j.$$

Pour toute R -algèbre T , le produit tensoriel $T \otimes_R D$ est un T -module libre de base \mathcal{B} et $\sum_i t_i e_i \in (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}}$ si et seulement si

$$\sum_j t_j e_j = \sum_j \left(\sum_i t_i^r a_{i,j} \right) e_j.$$

Ceci équivaut à

$$\forall j, \quad t_j = \sum_i t_i^r a_{i,j}.$$

Comme D est étale, la matrice A est inversible d'inverse B et on obtient

$$\sum_j t_j e_j \in (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}} \Leftrightarrow \forall j, \quad t_j = \sum_i t_i b_{i,j}.$$

Le foncteur est donc représenté par la R -algèbre $R[T_i]/(T_j^r - \sum_i b_{i,j} T_i \mid 1 \leq j \leq d)$. La jacobienne de la famille de polynômes définissant le quotient vaut B en tout point d'annulation ce qui prouve que la R -algèbre est finie étale. Par Yoneda, cette R -algèbre ne dépend pas de \mathcal{B} à isomorphisme près.

Étape 2 : en général, puisque D est fini projectif, le Lemme [Sta18, Tag 00NX] affirme qu'il est localement libre de rang fini. Sur tout ouvert affine $V(z)$ tel que $D[z^{-1}]$ est libre, nous construisons un représentant S_z avec la première étape. Yoneda fournit une immersion ouverte $f_{y,z} : \text{Spec}(S_y) \rightarrow \text{Spec}(S_z)$ pour toute inclusion $V(y) \subseteq V(z)$. D'après [Duc, §5.2.2.2], on peut recoller les $\text{Spec}(S_z)$ le long des $f_{y,z}$. On vérifie par propriété universelle du recollement que le schéma sur $\text{Spec}(\tilde{E}_\Delta)$ obtenu est le spectre de l'algèbre finie étale représentant le foncteur escompté. \square

Nous avons démontré que la paire $(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ est une paire de Huber perfectoïde. Comme l'anneau S_D est une \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale, nous en tirons un affinoïde muni d'un morphisme fini étale

$$\text{Spa}(S_D, S_D^+) \rightarrow \text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+).$$

Proposition 5.2.4. *L'espace perfectoïde $\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)$ est naturellement muni d'une structure d'objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$.*

Démonstration. Le sous-anneau S_D^+ est par définition la clôture intégrale de \tilde{E}_Δ^+ . Puisque \tilde{E}_Δ^+ est un sous- $\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}$ -anneau de \tilde{E}_Δ , toute structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}$ -anneau sur S_D compatible à la structure de \tilde{E}_Δ -algèbre se restreint-corestreint en une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}$ -anneau sur S_D^+ . On obtient ainsi une action sur le diamant. Pour obtenir un objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$, il reste donc à construire une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau telle que $\varphi_{\Delta,q}$ agisse comme le q -Frobenius.

Soit $\alpha \in \Delta$ et T une \tilde{E}_Δ -algèbre. Le morphisme

$$T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D \rightarrow \varphi_{\alpha,q}^* T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D, \quad t \otimes d \mapsto (1 \otimes t) \otimes \varphi_{\alpha,q,D}(d)$$

est $\varphi_{\Delta,r}$ -équivariant et naturel en T ; il fournit une application naturelle en T

$$(T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\mathrm{Id}} \rightarrow (\varphi_{\alpha,q}^* T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\mathrm{Id}}$$

qui se réinterprète comme une transformation naturelle

$$\Psi_\alpha : \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* -).$$

Définissons $\psi_{\alpha,D} := \Psi_\alpha(S_D)(\mathrm{Id}_{S_D})$.

Pour n'importe quel $\varphi_1 \in \Phi_{\Delta,q}$, nous construisons de même Ψ_1 et $\psi_{1,D} : S_D \rightarrow \varphi_1^* S_D$ à partir de l'action de φ_1 . Commençons par prouver que les $\psi_{-,D}$ se comportent bien vis-à-vis de la composition. Pour tout morphisme de \tilde{E}_Δ -algèbres $g : S_D \rightarrow T$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, S_D) & \xrightarrow{\Psi_\alpha(S_D)} & \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* S_D) \\ \downarrow - \circ g & & \downarrow - \circ \varphi_{\alpha,q}^* g \\ \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, T) & \xrightarrow{\Psi_\alpha(T)} & \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* T) \end{array}$$

et en suivant l'image de Id_{S_D} , on trouve que $\Psi_\alpha(T)(g) = (\varphi_{\alpha,q}^* g) \circ \psi_{\alpha,D}$. En particulier,

$$(\varphi_{\alpha,q}^* \psi_{\beta,D}) \circ \psi_{\alpha,D} = \Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* S)(\psi_{\beta,D}) = [\Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* S_D) \circ \Psi_\beta(S_D)](\mathrm{Id}_{S_D}) \quad (*5)$$

Appelons $i_T : (\varphi_{\alpha,q} \varphi_{\beta,q})^* T \cong \varphi_{\alpha,q}^* (\varphi_{\beta,q}^* T)$ naturel en T . Grâce à un diagramme similaire, il fournit une égalité les foncteurs $\Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* -) \circ \Psi_\beta$ et $(f \mapsto i_- \circ f) \circ \Psi_{\alpha\beta}$, où $\Psi_{\alpha\beta}$ est associé à $\varphi_{\alpha,q} \varphi_{\beta,q}$. Appliqué à l'équation (*5), cela donne

$$i_{S_D} \circ \psi_{\alpha\beta,D} = (\varphi_{\alpha,q}^* \psi_{\beta,D}) \circ \psi_{\alpha,D}.$$

Nous pouvons généraliser ce résultat à $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{\Delta, q}$. En particulier, nous avons

$$i \circ \psi_{\Delta, D} = \varphi_{\alpha_1, q}^* \psi_{\alpha_2 \dots \alpha_{|\Delta|}, D} \circ \dots \circ \psi_{\alpha_{|\Delta|}, D}$$

où $i : \varphi_{\Delta, q}^* S_D \xrightarrow{\sim} \varphi_{\alpha_1, q}^* \dots \varphi_{\alpha_{|\Delta|}, q}^* S_D$ et où $\psi_{\Delta, D}$ est construit à partir de $\varphi_{\Delta, q}$. Ainsi, démontrer que les $\psi_{\alpha, D}$ sont inversibles se réduit à démontrer que $\psi_{\Delta, D}$ est inversible.

Soit Ψ_{Δ} la transformation naturelle obtenue à partir de $\varphi_{\Delta, q}$. Pour toute \tilde{E}_{Δ} -algèbre T , nous considérons le linéarisé du Frobenius relatif

$$\varphi_{q, T}^* : \varphi_q^* T \rightarrow T, \quad x \otimes t \mapsto xt^q.$$

Nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} (T \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_{\Delta, r} = \text{Id}} & \longrightarrow & (\varphi_q^* T \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_{\Delta, r} = \text{Id}} & \xrightarrow{\mathfrak{I}_D(\varphi_q^*)} & (T \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_{\Delta, r} = \text{Id}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}}(S_D, T) & \xrightarrow{\Psi(T) = \varphi_q^*(-) \circ \psi_{\Delta, D}} & \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}}(S_D, \varphi_q^* T) & \xrightarrow{\varphi_q^* \circ -} & \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}}(S_D, T) \end{array}$$

Si l'on considère $\sum t_i \otimes d_i$ en haut à gauche, son image en haut à droite est exactement

$$\sum t_i^q \otimes \varphi_{\Delta, q, D}(d_i) = \varphi_{\Delta, q, T \otimes D}(\sum t_i \otimes d_i) = \sum t_i \otimes d_i.$$

Il en découle que la composée du bas est l'identité. En appliquant à $T = S_D$ et à Id_{S_D} , il vient que $\varphi_q^* \circ \psi_{\Delta, D} = \text{Id}_{S_D}$, autrement dit que $\psi_{\Delta, D}$ est simplement l'inverse du Frobenius absolu sur S_D .

Nous venons de finir de prouver que les $\psi_{\alpha, D}$ sont inversibles. Le fait qu'ils soient \tilde{E}_{Δ} -linéaires, leurs relations et l'expression de $\psi_{\Delta, D}$ prouvent précisément que leurs inverses fournissent une structure d'objet de FÉt $(\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+) \parallel \Phi_{\Delta, q})$. \square

Notre construction atterrit désormais dans une catégorie davantage adaptée au lemme de Drinfeld. En revanche, nous vivons toujours sur $\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ et non sur $X_{\tilde{E}} := \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spa}(\tilde{E}_{\alpha})$. Ce sont deux espaces distincts : moralement, $X_{\tilde{E}}$ ne garde que les valuations pour lesquels chaque ϖ_{α} est topologiquement nilpotent. Nous donnons un énoncé précis.

Lemme 5.2.5. *Définissons $U_m := \{|\cdot| \in \text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+) \mid \forall \alpha, \beta, |\varpi_{\alpha}|^m \leq |\varpi_{\beta}|\}$. C'est un ouvert rationnel¹⁵ de $\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$.*

¹⁵En effet, puisque tous les ϖ_{β} sont inversibles dans \tilde{F}_{Δ} les conditions $|\varpi_{\beta}| \neq 0$ peuvent être sous-entendues. De plus, les ϖ_{α}^m engendrent un idéal ouvert de \tilde{F}_{Δ}^+ , de type fini.

Appelons $Y_{\tilde{E}}$ l'espace perfectoïde réunion des ouverts U_m de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$.

Les espaces perfectoïdes $Y_{\tilde{E}}$ et $X_{\tilde{E}}$ sont canoniquement isomorphes. L'action de $\Phi_{\Delta, q}^{\mathrm{gp}}$ sur $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ se restreint-corestreint sur $Y_{\tilde{E}}$ et correspond à l'action sur $X_{\tilde{E}}$ construite à l'Exemple 4.3.2.

Démonstration. Prouvons d'abord que les points de $Y_{\tilde{E}}$ sont précisément les valuations $|\cdot| \in \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ telles que $\forall \alpha, |\varpi_{\alpha}|^n \rightarrow 0$. Soit $|\cdot| \in U_m$. Puisque $\varpi_{\Delta} \in \tilde{F}_{\Delta}^{\circ\circ}$, nous avons $|\varpi_{\Delta}|^n \rightarrow 0$. Puisque $|\cdot| \in U_m$, nous obtenons

$$\forall \alpha, |\varpi_{\alpha}|^{m|\Delta|} \leq |\varpi_{\Delta}|$$

d'où $|\varpi_{\alpha}|^n \rightarrow 0$. Réciproquement, supposons que $\forall \alpha, |\varpi_{\alpha}|^n \rightarrow 0$. Pour tout couple (α, β) l'identité $|\varpi_{\alpha}|^m \leq |\varpi_{\beta}|$ est vraie pour m assez grand. Par conséquent, pour m assez grand, $|\cdot| \in U_m$.

Pour prouver que les espaces perfectoïdes coïncident, commençons par trouver une famille de morphismes $Y_{\tilde{E}} \rightarrow \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\alpha})$. Posons jusqu'à la fin de la section $(\tilde{E}_{\Delta, m}, \tilde{E}_{\Delta, m}^+)$ la paire de Huber correspondant à l'ouvert rationnel U_m . Soit $m \geq 1$ et $\alpha \in \Delta$. Nous venons de prouver que pour tout $|\cdot| \in U_m$, nous avons $|\varpi_{\alpha}|^n \rightarrow 0$, ce qui implique que $\varpi_{\alpha} \in \tilde{E}_{\Delta, m}^{\circ\circ}$ puis que l'application canonique

$$\tilde{E}_{\alpha} \rightarrow \tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{E}_{\Delta, m}$$

est continue¹⁶. L'image de $\tilde{E}_{\alpha}^{\circ}$ est contenue dans \tilde{E}_{Δ}^+ puis dans $\tilde{E}_{\Delta, m}^+$. Nous avons construit un morphisme $U_m \rightarrow \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\alpha})$. En passant à la colimite, nous obtenons un morphisme $g_{\alpha} : Y_{\tilde{E}} \rightarrow \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\alpha})$.

Nous prouvons l'isomorphisme en construisant une naturelle au niveau des $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ -points des faisceaux $X_{\tilde{E}}$ et $Y_{\tilde{E}}$ sur Perf . À $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perf}}(\mathrm{Spa}(A, A^+), Y_{\tilde{E}})$, on associe la famille des $(g_{\alpha} \circ f)_{\alpha} \in X_{\tilde{E}}(\mathrm{Spa}(A, A^+))$. Réciproquement, pour une famille $(f_{\alpha})_{\alpha}$, l'image de chaque ϖ_{α} appartient à $A^{\circ\circ}$ ce qui permet de compléter (ϖ) -adiquement et localiser $\otimes f_{\alpha}$ en un morphisme $f : \mathrm{Spa}(A, A^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$. Or,

$$\forall |\cdot| \in \mathrm{Spa}(A, A^+), \alpha \in \Delta, f(|\cdot|)(\varpi_{\alpha})^n = |f_{\alpha}(\varpi_{\alpha})|^n \rightarrow 0$$

puisque $f_{\alpha}(\varpi_{\alpha}) \in A^{\circ\circ}$. Ainsi, f se factorise par $Y_{\tilde{E}}$. Nous laissons les lecteurs et lectrices vérifier que les deux applications tout juste définies sont inverses l'une de l'autre.

¹⁶N'oublions pas que ϖ_{α} est une pseudo-uniformisante pour \tilde{E}_{α} . Attention au fait que la première application de cette composée n'est pas continue puisque ϖ_{α} n'est pas topologiquement nilpotente dans \tilde{E}_{Δ} .

L'action sur $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ se retreint-corestreint à $Y_{\tilde{E}}$ puisque $(\varphi_{\alpha,q}^{n_\alpha})_\alpha(U_m) \subset U_{m+q \max |n_\alpha - n_\beta|}$. L'action de $\varphi_{\alpha,q}$ s'identifie à celle sur $X_{\tilde{E}}$: cette dernière est caractérisée par la commutation des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) & \xrightarrow{\varphi_q \text{ si } \beta=\alpha \text{ et Id sinon}} & \mathrm{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{\tilde{E}} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha,q}} & X_{\tilde{E}} \end{array}$$

□

Lemme 5.2.6. *Considérons les morphismes d'anneaux*

$$\tilde{E}_\Delta \rightarrow H^0\left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}\right)$$

et

$$\tilde{E}_\Delta^+ \rightarrow H^0\left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+\right).$$

Le deuxième est injectif et ϖ_Δ -presque surjectif. En particulier, le premier morphisme est injectif.

Démonstration. Voir [CKZ21, Prop. 4.27].

□

Remarque 5.2.7. Le Lemme 5.2.5 fonctionnerait pour la complétion ϖ_Δ -adique du produit tensoriel à la place de \tilde{E}_Δ^+ . Cela signifie que notre espace $X_{\tilde{E}}$ s'injecte dans deux affinoïdes¹⁷, le plus petit étant $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. Il semblerait raisonnable de considérer le plus gros, mais ce dernier a trop peu de sections globales et le Lemme 5.2.6 ne fonctionnerait plus. Il est donc important de compléter (ϖ) -adiquement dans la définition de \tilde{E}_Δ .

En revanche, comme nous l'avons déjà évoqué à la Remarque 5.1.4, équiper \tilde{E}_Δ^+ de sa topologie ϖ_Δ -adique est primordial pour lui associer un espace perfectoïde.

Définition 5.2.8. Grâce à la Proposition 5.2.4, le produit fibré

$$Z_D := Y_{\tilde{E}} \times_{\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)} \mathrm{Spd}(S_D, S_D^+)$$

est un objet de $\mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Soit \bar{y} un point géométrique de $Y_{\tilde{E}}$. Le lemme de Drinfeld équipe l'ensemble fini $V_{\tilde{E},\Delta}(D) := |Z_D \times_{Y_{\tilde{E}}} \bar{y}|$ d'une action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$.

Lemme 5.2.9. *Le diamant Z_D possède une structure canonique d'objet en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels dans $\mathrm{F}\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q'})$. L'ensemble $V_{\tilde{E},\Delta}(D)$ appartient canoniquement à $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$.*

¹⁷Les espaces sous-jacents ont l'air de se ressembler : par exemple la norme ϖ_α -adique est un point des deux affinoïdes.

Démonstration. Chaque $(T \otimes_{\tilde{F}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r} = \text{Id}}$ est muni d'une structure de \mathbb{F}_r -espace vectoriel naturelle en T . Cela munit S_D d'une structure naturelle de \tilde{E}_Δ -algèbre en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels. Puisque $\mathbb{F}_r \subset \tilde{E}_\Delta^{\Phi_{\Delta,q}}$, l'action de $\Phi_{\Delta,q}$ est \mathbb{F}_r -linéaire ce qui fait de $\text{Spd}(S_D, S_D^+)$ un objet de $\text{FÉt}(\text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels. Nous en déduisons la structure sur Z_D par restriction à $Y_{\tilde{E}}$.

L'équivalence de catégorie entre $\text{FÉt}(X_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$ et les $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -ensembles finis conclut pour $V_{\tilde{E},\Delta}(D)$. \square

Proposition 5.2.10. *Supposons que $V_{\tilde{E},\Delta}(D)$ est isomorphe à la représentation triviale \mathbb{F}_r^d . Alors D est isomorphe à \tilde{E}_Δ^d dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$.*

Démonstration. Étape 1 : soit S_{base} la \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale donnée par $\tilde{E}_\Delta[X]/(X^r - X)$ avec l'action semi-linéaire de $\Phi_{\Delta,q}$ qui laisse fixe la classe de X . Cette action fournit une structure d'objet de $\text{FÉt}(\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ sur $\text{Spa}(S_{\text{base}}, S_{\text{base}}^+)$. Nous notons Z_{base} sa restriction à $Y_{\tilde{E}}$ qui est encore un objet de $\text{FÉt}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Remarquons que S_{base} est l'algèbre finie étale associée à $\tilde{E}_\Delta \in \mathcal{M}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$.

Montrons que $\text{Spa}(S_{\text{base}}, S_{\text{base}}^+)$, vu comme faisceau en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels sur $\text{FÉt}(\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ est le faisceau constant associé à \mathbb{F}_r . Soit Z un objet connexe de $\text{FÉt}(\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Un morphisme vers $\text{Spa}(S_{\text{base}}, S_{\text{base}}^+)$ correspond à une section globale $\Phi_{\Delta,q}$ -invariante z de Z telle que $\prod_{a \in \mathbb{F}_r} (z - a) = 0$. Les sections $(z - a)$ engendrent deux à deux le faisceau d'idéaux \mathcal{O}_Z ; leur lieux d'annulation sont donc disjoints. De plus, leurs lieux d'annulations sont des fermés $\Phi_{\Delta,q}$ -stables. Par connexité, on en déduit que z appartient à \mathbb{F}_r . La décomposition des objets en union disjointe de composantes Γ -connexes montre qu'un morphisme vers $\text{Spa}(S_{\text{base}}, S_{\text{base}}^+)$ correspond à une fonction à valeurs dans \mathbb{F}_r constante sur les composantes Γ -connexes. Par tiré en arrière, Z_{base} est encore le faisceau constant associé à \mathbb{F}_r et le Lemme 4.2.16 affirme alors que la représentation de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ obtenue grâce au lemme de Drinfeld est la représentation triviale sur \mathbb{F}_r .

Étape 2 : dans cette étape, nous cherchons à décrire S_D .

L'étape 1 montre que l'objet $\sqcup_d Z_{\text{base}}$ de la catégorie galoisienne $\text{FÉt}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$ est associé à la représentation triviale \mathbb{F}_r^d . Ainsi, nous obtenons $Z_D \cong \sqcup_d Z_{\text{base}}$ dans cette catégorie galoisienne. Bien que le terme de droite coïncide avec $Z_{\tilde{F}_\Delta^d}$, tout notre travail consiste à remonter cette identification à S_D puis à D . Nous venons de calculer $\text{Spa}(S_D, S_D^+)_{|Y_{\tilde{E}}}$. Nous allons en déduire un calcul sur $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. Il s'agit de la partie la plus technique de la preuve.

Puisque S_D est finie étale, elle est plate et de présentation finie d'où l'existence d'une présentation comme module fini projectif : on se fixe une telle présentation sous la forme d'un isomorphisme de \tilde{E}_Δ -module

$$S_D \oplus M = \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j.$$

En localisant et complétant¹⁸, on obtient pour tout ouvert affine V de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_D & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^0(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}) & \rightarrow & \bigoplus_{j \leq N} H^0(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}) e_j & \rightarrow & H^0(V, \tilde{M}) \end{array}$$

où f désignera toujours le morphisme structural vers $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. En passant à la limite ce diagramme sur la famille des ouverts U_m , on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_D & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^0(Y_{\tilde{E}}, f_* \mathcal{O}_{Z_D}) & \rightarrow & \bigoplus_{j \leq N} H^0(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}) e_j & \rightarrow & H^0(Y_{\tilde{E}}, \tilde{M}) \end{array}$$

Le Lemme 5.2.6 affirmant que le morphisme vertical central est injectif, celui de gauche l'est aussi. Dans la suite de la preuve, nous identifions les quatre modules du carré de gauche à des sous-modules les uns des autres. En inversant les rôles de S_D et M , le morphisme vertical de droite est également injectif. Le lemme du serpent affirme alors qu'un élément de $\varprojlim S_{D,m}$ appartient à S_D si et seulement si ses coordonnées dans la base e_j appartiennent à \tilde{E}_Δ .

Soit x une section $\Phi_{\Delta,q}$ -invariante de $H^0(Y_{\tilde{E}}, f_* \mathcal{O}_{Z_D})$ et prouvons qu'elle appartient à S_D .

Soit $\alpha \in \Delta$. Par définition de $Y_{\tilde{E}}$, pour tout $|\cdot| \in Y_{\tilde{E}}$, $\exists n, \forall \beta, |\varpi_\beta|^{q^n} \leq |\varpi_\alpha|$. Autrement dit, $\prod_{\beta \neq \alpha} \varphi_{\beta,q'}^n$ envoie $|\cdot|$ dans l'ouvert rationnel

$$U = \mathrm{Spa}(\tilde{F}_\Delta)(\tilde{F}_\Delta^+) \left(\frac{\varpi_\alpha^2, \varpi_\beta \mid \beta \neq \Delta}{\varpi_\alpha} \right).$$

¹⁸Ne pas oublier que la topologie sur S_D est la topologie initiale sur un module fini projectif.

Ce dernier est quasi-compact et contient donc un domaine fondamental. Sur le domaine U , l'écriture

$$\varpi_\alpha^{|\Delta|} = \varpi_\Delta \times \prod_{\beta \neq \alpha} \varpi_\beta / \varpi_\alpha$$

illustre que ϖ_α est une pseudo-uniformisante. Nous fixons alors un entier k tel que

$$x|_U \in \varpi_\alpha^{-k} \sum H^0 \left(U, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right).$$

L'action du Frobenius absolu est triviale sur les points de $Y_{\tilde{E}}$; l'espace $Y_{\tilde{E}}$ est donc recouvert par les $\prod_{\beta \neq \alpha} \varphi_{\beta, q}^{n_\beta}(U)$. Prenons $\psi \in \Phi_{\Delta \setminus \{\alpha\}, q}$. L'invariance de x donne

$$x|_{\psi(U)} = (\psi(x))|_{\psi(U)} = \psi(x|_U)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} x_{\psi(U)} &\in \psi \left(\varpi_\alpha^{-k} H^0 \left(U, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right) \right) \\ &\subseteq \varpi_\alpha^{-k} \sum H^0 \left(\psi(U), f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right) \end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne utilise le fait que $\varphi_{\alpha, q}$ n'apparaît pas dans ψ et se souvient que $\Phi_{\Delta, q, r}$ agit sur $\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)$ dans la catégorie des $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ -espaces perfectoides (voir la discussion au début de la Proposition 5.2.4). Comme la topologie sur S_D est la topologie initiale, il se trouve que $S_D \cap (\sum_j \tilde{E}_\Delta^+ e_j)$ est ouvert et nous savons également que S_D^+ est borné; nous pouvons fixer m tel que

$$S_D^+ \subset \sum_j \varpi_\Delta^{-m} \tilde{E}_\Delta^+ e_j.$$

Pour tout ouvert affine V de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$, nous avons encore

$$H^0 \left(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right) \subset \sum_j \varpi_\Delta^{-m} H^0 \left(V, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right) e_j.$$

Ainsi, les coordonnées de x dans la base (e_j) appartiennent à

$$\varpi_\alpha^{-k} \varpi_\Delta^{-m} H^0 \left(\psi(U), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right)$$

pour tout $\psi(U)$. En recollant, les coordonnées de x appartiennent donc à

$$\varpi_\Delta^{-(k+m)} H^0 \left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right) \subset \varpi_\Delta^{-(k+m+1)} \tilde{E}_\Delta^+$$

grâce au lemme 5.2.6. Les coordonnées sont donc dans \tilde{E}_Δ , ce qui conclut.

Nous savons que

$$Z_D \cong Y_{\tilde{E}} \times_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)} \mathrm{Spa} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} \tilde{E}_\Delta[X_i]/(X_i^r - X_i), \prod_{1 \leq i \leq d} \tilde{E}_\Delta^+[X_i]/(X_i^r - X_i) \right).$$

Les X_i s'interprètent comme des sections globales $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$ -invariantes de Z_D . Tous les monômes en X_i sont des sections globales et $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$ -invariantes de Z_D et appartiennent donc à S_D . Elles vérifient les mêmes relations ce qui permet de déduire un isomorphisme de \tilde{E}_Δ -algèbres

$$S_D \cong \prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}.$$

Étape 3 : construisons une bijection de $V_{\tilde{E}, \Delta}(D)$ dans $D^{\Phi_{\Delta, q, r}}$.

Grâce à l'isomorphisme de l'étape 2, il est possible d'écrire la suite de bijections suivantes :

$$\begin{aligned} V_{\tilde{E}, \Delta}(D) &\cong \mathbb{F}_r^d \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}, \tilde{E}_\Delta \right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} (S_D, \tilde{E}_\Delta) \\ &\cong D^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}} \end{aligned}$$

Nous construisons le diagramme commutatif de \mathbb{F}_r -espaces vectoriels suivant :

$$\begin{array}{ccc} D^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}, \tilde{E}_\Delta \right) \\ \downarrow \scriptstyle 1 \otimes \mathrm{Id}_{\tilde{E}_\Delta} \otimes \varphi_{\alpha, q, D} & & \downarrow \scriptstyle \varphi_{\alpha, q}^*(\cdot) \circ \psi_{\alpha, q, \mathrm{base}} \\ \left(\varphi_{\alpha, q}^* \tilde{E}_\Delta \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D \right)^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}, \varphi_{\alpha, q}^* \tilde{E}_\Delta \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}, \tilde{E}_\Delta \right) \end{array}$$

Le carré de gauche est issu de la Proposition 5.2.4. Le deuxième carré est donné par Yoneda. L'image d par la ligne supérieure devient $\varphi_{\alpha, q, D}(d)$. L'élément d est envoyé en bas à gauche sur un morphisme g tel que $g(X_i) \in \mathbb{F}_r$. Une application de cette forme est laissé fixe par la ligne inférieure. Ainsi, pour notre module, nous avons $D^{\Phi_{\Delta, q, r}} = D^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}}$.

Étape 4 : nous avons construit un isomorphisme \mathbb{F}_r -linéaire $\mathbb{F}_r^d \cong D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$. En tensorisant par \tilde{E}_{Δ} , nous obtenons un isomorphisme \tilde{E}_{Δ} -linéaire

$$\tilde{E}_{\Delta}^d \cong \tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$$

Sa post-composition par $\tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \rightarrow D$ est un morphisme dans de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -modules sur \tilde{E}_{Δ} , dont nous voulons prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Prouvons que $\tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \rightarrow D$ est injectif. Puisque \tilde{E}_{Δ} est intègre, cette injectivité se vérifie après tensorisation par $\text{Frac}(\tilde{E}_{\Delta})$. Soit alors $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i \otimes d_i$ dans le noyau de ce dernier morphisme, dont on suppose le nombre de termes non nuls minimal. Quitte à diviser par x_1 , nous pouvons supposer que $x_1 = 1$. L'identité $\sum x_i d_i = 0$ se transforme par application de $\varphi_{\Delta,r}$ en $d_1 + \sum_{2 \leq i \leq k} x_i^r d_i = 0$. En soustrayant, ceci implique que $\sum_{2 \leq i \leq k} (x_i - x_i^r) \otimes d_i$ est également dans le noyau. Par hypothèse de minimalité, tous les x_i valent x_i^r . Puisque $\text{Frac}(\tilde{E}_{\Delta})$ est un corps, ceci implique que tous les x_i sont des éléments de \mathbb{F}_r . La relation $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i d_i = 0$ originelle s'avère être une relation dans $D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$, soit $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i \otimes d_i = 0$.

Le paragraphe précédent produit un morphisme injectif dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q',r}, \tilde{E}_{\Delta})$ que nous notons $i : \tilde{E}_{\Delta}^d \hookrightarrow D$. L'identification de S_D à l'étape 2 affirme de plus que d est la dimension locale de D . Soit $z \in \tilde{E}_{\Delta}$ tel que $D[z^{-1}]$ est libre de rang d . L'action de $\varphi_{\Delta,r}$ s'étend à $\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}]$. Par extension des scalaires comme en Proposition 2.3.3, nous obtenons un morphisme injectif dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}}, \tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}])$ de la forme

$$i_z : (\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}])^d \hookrightarrow D[z^{-1}].$$

Posons \mathcal{B} une base de $D[z^{-1}]$ et $A \in M_d(\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}])$ la matrice de l'image de la base canonique par i_z dans \mathcal{B} . Soit également B la matrice de $\varphi_{\Delta,r,D[z^{-1}]}$ dans la base \mathcal{B} . Puisque i_z est $\varphi_{\Delta,r}$ -équivariante, son image est stable par $\varphi_{\Delta,r,D[z^{-1}]}$ et l'image de la base canonique est formé d'éléments invariants. Matriciellement, cela se traduit par $B\varphi(A) = A$ dans $M_d(\tilde{E}_{\Delta})$ et en particulier $\det(B) \det(A)^r = \det(A)$. Puisque i_z est injective, son déterminant est non nul. Par intégrité de \tilde{E}_{Δ} , on en déduit que $\det(A)$ est inversible dans \tilde{E}_{Δ} , d'inverse $\det(B) \det(A)^{r-2}$. On en déduit que l'image de i_z engendre $D[z^{-1}]$. Autrement dit que i_z est un isomorphisme. Par conséquent, le morphisme i est un isomorphisme ce qui conclut. \square

5.2.2 L'isomorphisme de comparaison pour $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$

Nous démontrons à présent le théorème au centre de toutes les équivalences de cet article. Pour ce faire, nous utilisons la discussion qui précède pour toutes les extensions finies de \tilde{E} .

Théorème 5.2.11. *Pour tout objet D de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$, le morphisme de comparaison*

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \tilde{V}_{\Delta}(D) \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons encore la notation $V_{\tilde{E},\Delta}$ puisqu'il nous faut absolument garder en mémoire le corps de base sur lequel nous travaillons. Pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ et q' associé, nous appellerons dans cette preuve $\text{Ex}_{\tilde{F}}$ le foncteur de la Définition 2.3.2 pour le groupe $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ et le morphisme d'anneaux $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{F}_{\Delta}$ du Lemme 5.1.7. Nous appellerons également dans cette preuve $\text{Ex}_{\tilde{F},q}$ l'analogue pour le groupe $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ et le morphisme d'anneaux $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}$.

Étape 1 : soit \tilde{F} une extension finie de \tilde{E} . Nous commençons par montrer que pour tout objet D de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$,

$$V_{\tilde{F},\Delta}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong V_{\tilde{E},\Delta}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}}.$$

Pour toute \tilde{F}_{Δ} -algèbre T , nous avons la suite de bijections naturelles suivante :

$$\begin{aligned} (T \otimes_{\tilde{F}_{\Delta}} \text{Ex}_{\tilde{F}}(D))^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} &\cong (T \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \\ &\cong \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}}(S_D, T) \\ &\cong \text{Hom}_{\tilde{F}_{\Delta}\text{-Alg}}(\tilde{F}_{\Delta} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} S_D, T) \end{aligned}$$

Ainsi, la \tilde{F}_{Δ} -algèbre finie étale $S_{\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)}$ s'identifie $\tilde{F}_{\Delta} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} S_D$. Cette identification est compatible à l'action de $\Phi_{\Delta,q'}^{\text{gp}}$ et à la structure de \mathbb{F}_r -espace vectoriel. En restreignant à $Y_{\tilde{F}}$, on obtient

$$\begin{aligned} Z_{\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)} &= Y_{\tilde{F}} \times_{Y_{\tilde{E}}} \left(Y_{\tilde{E}} \times_{\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)} \text{Spa}(S_D, S_D^+) \right) \\ &= Y_{\tilde{F}} \times_{Y_{\tilde{E}}} Z_D \end{aligned}$$

en tant qu'objet en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels de $\text{FÉt}(Y_{\tilde{F}} || \Phi_{\Delta,q'})$. La Proposition 4.2.13 conclut que

$$V_{\tilde{F},\Delta}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong V_{\tilde{E},\Delta}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}}.$$

Étape 2 : prenons toujours D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$ et fixons d son rang. Considérons une extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ telle que l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}$ sur la $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -représentation lisse $V_{\tilde{E},\Delta}(D)$ est triviale. D'après la première étape, cela signifie que la représentation $V_{\tilde{F},\Delta}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D))$ est triviale. Puisque $\text{Ex}_{\tilde{F}}$ préserve le rang,

la première étape fournit un isomorphisme dans $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta})$ entre \tilde{F}_{Δ}^d et $\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)$.

La Proposition 5.1.22 démontre que

$$\tilde{F}_{\Delta,q} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_{\Delta}).$$

En appliquant le Lemme 2.3.13 pour $R = \tilde{F}_{\Delta,q}$, $T = \tilde{F}_{\Delta}$, $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}} < \Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ d'indice fini et i la projection sur la coordonnée du neutre, nous obtenons un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta,q})$

$$\text{Ex}_{\tilde{F},q}(D) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)),$$

puis une suite d'isomorphismes dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta,q})$

$$\text{Ex}_{\tilde{F},q}(D) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_{\Delta}^d) \cong \tilde{F}_{\Delta,q}^d.$$

En particulier, en étendant des scalaires à $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$, nous obtenons un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})$ entre $(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)$ et $(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})^d$. Le caractère isomorphe du morphisme de comparaison découle¹⁹ du Corollaire 5.1.29. \square

Grâce au Théorème 5.2.2, nous pouvons raffiner le foncteur $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ et démontrer que $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ est une équivalence de catégories.

Proposition 5.2.12. *L'image essentielle du foncteur*

$$\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r), \quad D \mapsto (\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}$$

est incluse dans $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. De plus, le foncteur $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Nous décomposons le foncteur $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ comme suit en se souvenant que la condition de continuité à la source est automatique :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} : & \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \mathbb{F}_r) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}) \end{array}$$

¹⁹On démontre un isomorphisme uniquement algébriquement, puisque l'on ne s'est pas fatigués à s'occuper de l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Comme le morphisme de comparaison est automatiquement équivariant et ne dépend pas ensemblistement de l'action galoisienne, cela suffit.

Puisque $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$, s'identifie à $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, \mathbb{F}_r)$, il faut prouver que Ex et Inv préservent la sous-catégorie considérée. Nous utilisons les Propositions 2.5.20 et 2.5.21 respectivement pour le morphisme de $(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta})$ -anneaux topologiques discrets $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ et pour $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ avec comme sous-monoïde $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}} < (\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta})$. Les conditions pour Ex sont encore une fois démontrées au fil de la construction des anneaux. La liste des conditions à démontrer pour Inv est similaire à la Proposition 5.1.30. La condition 1 est automatique ; la condition 2 est un énoncé algébrique pour des anneaux discrets, contenue dans le Corollaire 5.1.24 ; la condition 3 découle de ce que \mathbb{F}_r est un corps ; la condition 4 fait l'objet du Théorème 5.2.11. \square

Théorème 5.2.13. *Les foncteurs $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ et $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ forment une paire de foncteurs quasi-inverses et établissent une équivalence de catégories symétriques monoïdales fermées*

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} \rightleftarrows \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) : \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}.$$

Démonstration. Il reste à prouver que les foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre. Grâce aux isomorphismes de comparaison naturels que nous avons obtenus en étudiant les foncteurs, prouver que $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} \circ \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ est isomorphe à l'identité revient à passer aux $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ -invariants l'isomorphisme de comparaison naturel

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D$$

et à prouver que

$$\forall D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, \tilde{E}_{\Delta}), \quad D \rightarrow (\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \text{ est un isomorphisme.}$$

La Proposition 5.1.26 permet d'utiliser la Proposition 2.3.10 pour conclure. L'autre composition se traite de même. \square

5.3 Lien entre les deux foncteurs

Dans cette section, nous démontrons que $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ et $\mathbb{V}_{\tilde{E}, \Delta}$ sont isomorphes. Ce résultat n'est a priori pas utile pour démontrer l'équivalence de Fontaine multivariable. Elle fournit cependant une construction purement géométrique de $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$.

Théorème 5.3.1. *Les foncteurs $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$ et $\mathbb{V}_{\tilde{E}, \Delta}$ sont naturellement isomorphes.*

Démonstration. Étape 1 : nous construisons tout d'abord une transformation naturelle $T_{\tilde{E}}$ entre les deux foncteurs. Appelons $(R^{\text{sep}}, R^{\text{sep}, +})$ la paire de Huber associée au recouvrement pro-étale de $\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ donné par le diagramme

des $\mathrm{Spa}(\tilde{F}_{\Delta,q}, \tilde{F}_{\Delta,q}^+)$. La preuve du Lemme 5.1.28 démontre entre autres que tous les morphismes de transition du diagramme sont fortement finis étales au sens de [Sch12, Déf. 7.2]. D'après [Sch12, Lemme 7.3 (i)], tous les morphismes $|\mathrm{Spa}(\tilde{F}_{\Delta,q}, \tilde{F}_{\Delta,q}^+)| \rightarrow |\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)|$ sont donc surjectifs. En utilisant [Sch, Prop. 6.4 (i)], on trouve que

$$|\mathrm{Spa}(R, R^+)| = \lim_{\mathcal{G}_{\tilde{E}}^{\mathrm{al}}} |\mathrm{Spa}(\tilde{F}_{\Delta,q}, \tilde{F}_{\Delta,q}^+)|.$$

Soit U_1 l'ouvert rationnel non vide de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$ contenu dans $Y_{\tilde{E}}$ et défini au Lemme 5.2.5. Toutes les images réciproques de U_1 dans les $|\mathrm{Spa}(\tilde{F}_{\Delta,q}, \tilde{F}_{\Delta,q}^+)|$ sont des ouverts affinoïdes non vides. Leur intersection dans la limite des $|\mathrm{Spa}(\tilde{F}_{\Delta,q}, \tilde{F}_{\Delta,q}^+)|$ est donc non vide par Tychonov. Ceci permet de choisir un point géométrique \bar{y} de $\mathrm{Spa}(R, R^+) \times_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)} Y_{\tilde{E}}$.

Il existe une inclusion naturelle

$$\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) \subset (R \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}}.$$

Ce dernier ensemble s'identifie à $\{\mathrm{Spa}(R, R^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)\}$. En post-composant par le changement de base le long de $\bar{y} \rightarrow \mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)$, on obtient un morphisme $\mathrm{Spa}(R, R^+) \times_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)} \bar{y} \rightarrow Z_D \times_{Y_{\tilde{E}}} \bar{y}$ de source isomorphe à \bar{y} (elle est non vide). On identifie naturelle ce morphisme à un point de $|Z_D \times_{Y_{\tilde{E}}} \bar{y}|$. Ainsi, nous avons construit une transformation naturelle entre foncteurs vers les ensembles $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta} \Rightarrow V_{\tilde{E}, \Delta}$.

On vérifie qu'il s'agit d'une transformation naturelle entre foncteurs vers les représentations de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ sur \mathbb{F}_r . Le fait que l'application construite pour D soit un morphisme de groupes se vérifie par exemple de la manière suivante : on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) \times \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) & \xrightarrow{(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2} & \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) \\ \cap \downarrow & & \downarrow \cap \\ (R \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}} \times (R \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}} & \xrightarrow{(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2} & (R \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Spa}(R, R^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(S_D, S_D^+) \\ \times \\ \mathrm{Spa}(R, R^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(S_D, S_D^+) \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \mathrm{Spa}(R, R^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(S_D, S_D^+) \right\} \\ \text{fibre sur } \bar{y} \downarrow & & \downarrow \text{fibre sur } \bar{y} \\ V_{\tilde{E}, \Delta}(D) \times V_{\tilde{E}, \Delta}(D) & \xrightarrow{(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2} & V_{\tilde{E}, \Delta}(D) \end{array}$$

où le seul morphisme horizontal non labellisé est donné par la structure d'objet en groupes sur $\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)$. Les carrés commutent tous : le deuxième par définition de la structure d'objet en groupes, le troisième par naturalité des application donnée par cette dernière. Puisque les composées verticales sont celles données par la transformation naturelle $\tilde{V}_\Delta \Rightarrow V_{\tilde{E}, \Delta}$, cela conclut.

Étape 2 : nous cherchons à comprendre comment fonctionne \tilde{V}_Δ vis-à-vis du changement d'extension. Soit $\tilde{E}^{\mathrm{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie. Nous notons toujours $\mathrm{Ex}_{\tilde{F}}$ le changement de base le long de $\tilde{E}_\Delta \rightarrow \tilde{F}_\Delta$. Dans cette preuve, on note \tilde{V}'_Δ le foncteur associé à \tilde{F} , défini depuis $\mathrm{Mod}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta, q', r}^{\mathrm{gp}}, \tilde{F}_\Delta)$. On utilise la deuxième partie du Lemme 2.3.13 avec $\Phi_{\Delta, q', r}^{\mathrm{gp}} < \Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$, le $(\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta})$ -anneau \tilde{E}_Δ et le $(\Phi_{\Delta, q', r}^{\mathrm{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta})$ -anneau $\tilde{F}_\Delta^{\mathrm{sep}}$. Grâce à la Proposition 5.1.22 et au Lemme 2.3.18, nous obtenons pour $D \in \mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$ un isomorphisme

$$\tilde{E}_\Delta^{\mathrm{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\mathrm{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}}(\tilde{F}_\Delta^{\mathrm{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D).$$

En prenant les invariants par $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$, les propriétés de la coinduites fournissent un isomorphisme naturel

$$\tilde{V}_\Delta(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}} \cong (\tilde{F}_\Delta^{\mathrm{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\Phi_{\Delta, q', r}^{\mathrm{gp}}} = \tilde{V}'_\Delta(\tilde{F}_\Delta \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D).$$

Étape 3 : démontrons enfin que la transformation naturelle $T_{\tilde{E}}$ est un isomorphisme naturel. Soit $D \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$ et $\tilde{F}|\tilde{E}$ finie. Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_\Delta(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}} & \xrightarrow{T_{\tilde{E}}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}}} & V_{\tilde{E}, \Delta}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F}, \Delta}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \tilde{V}'_\Delta(\mathrm{Ex}_{\tilde{F}}(D)) & \xrightarrow{T_{\tilde{F}}(\mathrm{Ex}_{\tilde{F}}(D))} & V_{\tilde{F}, \Delta}(\mathrm{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \end{array}$$

où nous venons de démontrer que le morphisme vertical de gauche est un isomorphisme et où nous avons démontré que celui de droite aussi à l'étape 1 de la preuve du Théorème 5.2.11. La commutativité vient de ce que, pour construire $T_{\tilde{F}}$, on peut choisir le point géométrique \bar{y} de $\lim_{\tilde{F}'|\tilde{F}} \mathrm{Spa}(\tilde{F}'_{\Delta, q'}, \tilde{F}'_{\Delta, q'}{}^+)$ au-dessus de $Y_{\tilde{F}}$ qui provient d'un point géométrique de $\lim_{\tilde{F}'|\tilde{E}} \mathrm{Spa}(\tilde{F}'_{\Delta, q}, \tilde{F}'_{\Delta, q}{}^+)$ au-dessus de $Y_{\tilde{E}}$. Puisque $V_{\tilde{E}, \Delta}(D)$ est une représentation lisse, on se restreint donc à prouver que $T_{\tilde{E}}(D)$ est bijective lorsque $V_{\tilde{E}, \Delta}(D)$ est la représentation triviale. Dans ce cas, la Proposition 5.2.10 affirme que D de rang d est isomorphe à \tilde{E}_Δ^d .

Comme $S_{D_1 \oplus D_2} = S_{D_1} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} S_{D_2}$, on a $Z_{D_1 \oplus D_2} = Z_{D_1} \times_{Y_{\tilde{E}}} Z_{D_2}$ donc $V_{\tilde{E}, \Delta}$ commute aux sommes directes. Nous pouvons donc vérifier le caractère isomorphisme de $T_{\tilde{E}}$ sur le cas $D = \tilde{E}_\Delta$. Dans ce cas, un élément $x \in \mathbb{F}_r \subset \tilde{V}_\Delta(\tilde{E}_\Delta)$ s'envoie sur le morphisme $\mathrm{Spa}(R, R^+) \rightarrow \mathrm{Spa}(S_{\mathrm{base}}, S_{\mathrm{base}}^+)$ associé à $X \mapsto x$ (voir l'étape 1 de la démonstration de la Proposition 5.2.10). Or, la fibre de ce morphisme correspond à un point non nul de $V_{\tilde{E}, \Delta}(\tilde{E}_\Delta) \cong \mathbb{F}_r$ ce qui conclut. \square

Remarque 5.3.2. Dans un travail ultérieur, nous essaierons de raffiner l'équivalence multivariable perfectoïde en utilisant cette description par $V_{\tilde{E}, \Delta}$. En effet, la construction de ce foncteur transite par les fibrés vectoriels $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$ -équivariants sur $Y_{\tilde{E}}$ dont nous conjecturons qu'ils forment aussi une catégorie équivalente à $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$. Cette catégorie pourrait s'insérer dans des constructions plus géométriques comme celles de [Bre+25].

5.4 L'équivalence pour les perfectisés de corps locaux de caractéristique p

5.4.1 L'équivalence modulo p

Dans cette section et la suivante, nous cherchons à déperfectoïdiser notre équivalence. Nous fixons E un corps de caractéristique p , de valuation discrète, complet pour cette valuation, tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans son corps résiduel k est de cardinal fini q . En fixant X une uniformisante, nous savons que E est isomorphe à $k((X))$. Définissons également \tilde{E} le complété de la clôture radicielle de E . C'est un corps perfectoïde et nous pouvons le décrire par

$$\tilde{E} = \left(\bigcup_{n \geq 0} k[[X^{1/q^n}]] \right)^{\wedge X} \left[\frac{1}{X} \right]$$

que l'on nomme traditionnellement $k((X^{1/q^\infty}))$. Les théories de Galois de E et de \tilde{E} étant identiques, nous cherchons à obtenir une équivalence de Fontaine pour $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E, \Delta}$ à partir de l'équivalence perfectoïde précédente, tout en obtenant des anneaux de coefficients imparfaits plus aisément manipulables du côté des φ -modules.

Nous nous plaçons dans le contexte de la section 5.1 pour le corps \tilde{E} , avec X comme choix de pseudo-uniformisante. En ayant fixé \tilde{E}^{sep} , nous avons aussi fixé une clôture séparable E^{sep} de E . Nous imitons dans la suite les définitions de la section 5.1, ce qui nous épargne des preuves identiques.

Définition 5.4.1. Soit $E^{\text{sep}}|F|E$ une extension finie. Nous définissons

$$F_{\Delta,q}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} F_{\alpha}^{\circ} \right)^{\wedge(\underline{X})}$$

$$F_{\Delta,q} := F_{\Delta,q}^+ \left[\frac{1}{X_{\Delta}} \right].$$

Trois topologies seront utilisées pour ces deux anneaux respectivement pour le considérer comme coefficients de catégories de φ -modules, comme coefficients d'une catégories de (φ, Γ) -modules et pour un raisonnement fin à la section suivante. Sur $F_{\Delta,q}^+$ ces trois topologies sont respectivement la topologie discrète, la topologie X_{Δ} -adique et la topologie (\underline{X}) -adique. Sur $F_{\Delta,q}$, ce sont la topologie discrète, la topologie d'anneau ayant pour base de voisinages de 0 la famille $(X_{\Delta}^n F_{\Delta,q}^+)_{n \geq 0}$ que nous appelons *topologie adique* et la topologie colimite des topologies (\underline{X}) -adiques que nous appelons *topologie colimite*.

Le produit tensoriel des F_{α}° est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique pour la topologie (\underline{X}) -adique, l'élément $\varphi_{\alpha,q}$ agissant par le q -Frobenius sur F_{α}° et l'identité sur les F_{β}° et l'élément $\varphi_{\Delta,r}$ agissant par le r -Frobenius. En complétant, on obtient une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}^+$ pour chacune des trois topologies. Après localisation, elle fournit une structure $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}$ pour chacune des trois topologies ci-dessus.

Lorsque $E^{\text{sep}}|F|E$ est finie galoisienne, l'action de \mathcal{G}_E sur F° est \mathbb{F}_q -linéaire, continue pour les topologies discrète et X -adique, et commute au Frobenius. L'action de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ facteur par facteur sur le produit tensoriel des F_{α}° se complète en une action sur $F_{\Delta,q}^+$ continue en particulier pour les topologies discrètes et adique, et commutant à l'action de $\Phi_{\Delta,q,r}$. Nous obtenons de cette manière deux structures de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}^+$. En localisant, nous obtenons deux structures de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}$.

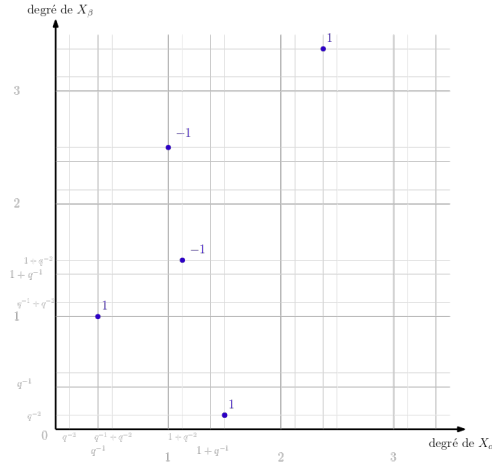
Remarque 5.4.2. Nous avons annoncé que dans le cadre de cette section, nous pouvions décrire explicitement les anneaux perfectoides et les anneaux imparfaits. Commençons par les anneaux perfectoides. Nous décrivons

$$\tilde{E}^{\circ} = \left\{ \sum_{d \in \mathbb{N}[q^{-1}]} a_d X^d \mid \begin{array}{l} (a_d) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{N}[q^{-1}]} \text{ telle que} \\ \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{d \leq r \mid a_d \neq 0\} \text{ est fini.} \end{array} \right\}.$$

Nous obtenons que

$$\tilde{E}_{\Delta}^{+} = \left\{ \sum_{\underline{d} \in (\mathbb{N}[q^{-1}])^{\Delta}} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{N}[q^{-1}]^{\Delta}} \text{ tel que } \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{ \underline{d} \mid \sum d_{\alpha} \leq r, \text{ et } a_{\underline{d}} \neq 0 \} \text{ est fini} \right\}.$$

Dans le cadre perfectoïde, les complétions (\underline{X}) -adiques et (X_{Δ}) -adiques du produit tensoriel ne coïncident même pas algébriquement : à deux variables par exemple, l'élément $\sum_n X_{\alpha}^{1/q^n} X_{\beta}^{q^n}$ appartient à la complétion (X_{α}, X_{β}) -adique mais pas à la complétion $X_{\{\alpha, \beta\}}$ -adique.

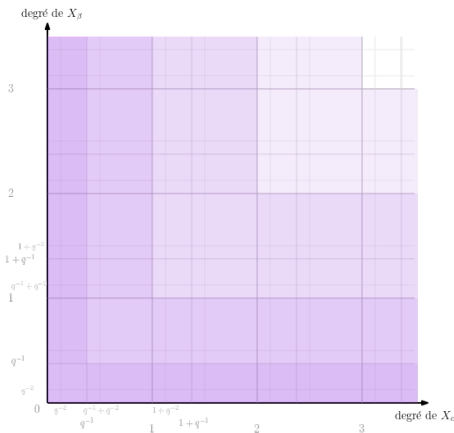
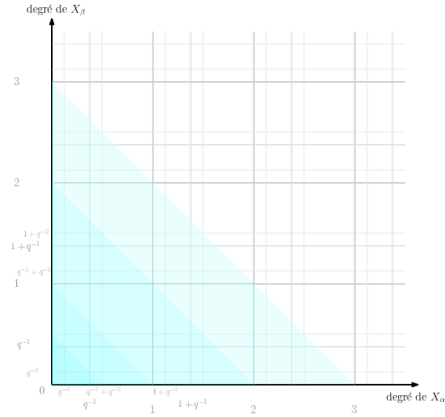


pour $q = 3$ est donnée ci-contre.

Pour comprendre de manière graphique les complétions pour deux variables, nous représentons une série par une famille de points dans une grille labellisés par les coefficients correspondants. La représentation du polynôme

$$\begin{aligned} Q = & X_{\alpha}^{1/q} X_{\beta} - X_{\alpha} X_{\beta}^{2+1/q+1/q^2} \\ & - X_{\alpha}^{1+1/q^2} X_{\beta}^{1+1/q^2} \\ & + X_{\alpha}^{1+1/q+1/q^2} X_{\beta}^{1/q^2} \\ & + X_{\alpha}^{2+1/q} X_{\beta}^{3+1/q} \end{aligned}$$

Un élément de la complétion (X_α, X_β) -adique possède une représentation telle que son intersection avec toutes les zones triangulaires²⁰ coïncide avec la représentation d'un élément de $\tilde{E}_\alpha^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{E}_\beta^+$. Cela signifie exactement que l'intersection avec toute zone triangulaire ne contient qu'un nombre fini de points.



De manière analogue, un élément de la complétion $X_\alpha X_\beta$ -adique possède une représentation telle que son intersection avec chaque zone en L provient de la représentation d'un élément de $\tilde{E}_\alpha^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{E}_\beta^+$. Cela revient à choisir une représentation telle que l'intersection avec toute partie rectangulaire verticale d'une zone en L ne contient qu'un nombre fini d'abscisses, que sur les droites correspondant à

ces abscisses la représentation soit d'intersection finie avec tout compact, et la condition analogue pour les parties rectangulaires horizontales et les ordonnées.

Ceci nous permet de comprendre pourquoi $\sum_{n \geq 0} X_\alpha^{1/q^n} X_\beta^{q^n}$ appartient à une complétion mais pas à l'autre sur sa représentation.

En inversant X_Δ ,

$$\tilde{E}_\Delta = \left\{ \sum_{\underline{d} \in (\mathbb{Z}[q^{-1}])^\Delta} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{Z}[q^{-1}]^\Delta} \text{ tel que} \\ \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{ \underline{d} \mid \sum d_\alpha \leq r, \text{ et } a_{\underline{d}} \neq 0 \} \text{ est fini et que} \\ \exists N > 0, \forall \underline{d}, \forall \alpha, a_{\underline{d}} \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

De manière similaire,

$$E_\Delta = \left\{ \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^\Delta} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{Z}^\Delta} \text{ tel que} \\ \exists N > 0, \forall \underline{d}, \forall \alpha, a_{\underline{d}} \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

²⁰Les zones triangulaires correspondent à des quotients par $I_{n,\Delta}$. De manière équivalente, nous pourrions considérer les quotients par $(\underline{X})^n$ et obtenir des zones carrées.

Remarquons que dans le cas imparfait, les complétions (\underline{X}) - et X_Δ -adiques coïncident algébriquement puisque la finitude de l'intersection avec chaque zone triangulaire implique la condition sur les zones en L.

Toute extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$ s'écrit $l((Y))$ pour une uniformisante Y et une extension finie séparable $l|k$ ce qui fournit une description semblable de $\tilde{F}_{\Delta,q}$ et $F_{\Delta,q}$ en remplaçant \underline{X} par \underline{Y} et $(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k)$ par $(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} l)$.

Cette description explicite nous fournit également sans argument technique une famille d'injections $F_{\Delta',q} \hookrightarrow F_{\Delta,q}$ pour $\Delta' \subseteq \Delta$.

Nous pouvons faire le lien entre les anneaux perfectoides et imparfaits.

Lemme 5.4.3. *Pour toute extension finie galoisienne $E^{\text{sep}}|F|E$ nous appelons $\tilde{F} = \tilde{E}F$ l'extension finie galoisienne de \tilde{E} associée.*

Il existe une injection de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux $F_{\Delta,q}^+ \hookrightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}^+$ naturelle en F .

Pour toute famille finie de multi-indices $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{N}^\Delta)^n$, l'image réciproque de l'idéal (X^{d_i}) est engendrée par les mêmes éléments.

Démonstration. Construire l'application et calculer les images réciproques des idéaux s'obtient à partir de la description de nos anneaux à la Remarque 5.4.2. Nous vérifions que l'application construite coïncide avec le produit tensoriel des injections $F_\alpha^\circ \hookrightarrow \tilde{F}_\alpha^\circ$, complété et localisé. L'équivariance et la naturalité découlent de cette seconde construction. \square

Corollaire 5.4.4. 1. *Les anneaux $F_{\Delta,q}^+$ sont réduits et sans E_Δ^+ -torsion. Il en découle que l'application $F_{\Delta,q}^+ \rightarrow F_{\Delta,q}$ est injective, que $F_{\Delta,q}$ est réduit et sans E_Δ -torsion. En particulier, l'anneau E_Δ est intègre.*

2. *Soit $\mathcal{G}_{\text{al}_E}$ la catégorie des extensions finies galoisiennes de E dans E^{sep} avec les inclusions pour morphismes. La construction*

$$F \mapsto F_{\Delta,q}$$

où l'on met la topologie discrète est canoniquement un foncteur de $\mathcal{G}_{\text{al}_E}$ vers la catégorie des $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques. Tous les morphismes déduits sont injectifs. De plus, localiser les injections du Lemme 5.4.3 fournit une transformation naturelle vers le foncteur du Lemme 5.1.7.

Définition 5.4.5. Définissons les $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux

$$E_\Delta^{\text{sep},+} = \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} F_{\Delta,q}^+ \quad \text{et} \quad E_\Delta^{\text{sep}} = \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} F_{\Delta,q}.$$

Nous pourrions munir ce dernier de la topologie discrète ou de la topologie adique, ayant pour base de voisinages de 0 les $(X_\Delta^n E_\Delta^{\text{sep},+})_{n \geq 0}$. Les deux fournissent une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique. Nous n'utilisons que la topologie discrète dans cette section.

Lemme 5.4.6. *Pour toute extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, le morphisme canonique*

$$E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{F_\alpha} \left(E_\beta^{\text{sep}} \otimes_{F_\beta} \cdots (E_\delta^{\text{sep}} \otimes_{F_\delta} F_{\Delta,q}) \right) \rightarrow E_\Delta^{\text{sep}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ -équivalent.

Démonstration. Identique au Lemme 5.1.28, les presque mathématiques en moins. En effet, le F° -module F'° est libre de rang fini pour toute extension finie $F'|F$ ce qui donne même un isomorphisme

$$F'_\alpha \otimes_{F_\alpha} \left(F'_\beta \otimes_{F_\beta} \cdots (F'_\delta \otimes_{F_\delta} F_{\Delta,q}^+) \right) \rightarrow F'_{\Delta,q}.$$

□

Corollaire 5.4.7. *Nous obtenons que :*

1. *L'anneau E_Δ^{sep} est réduit et sans E_Δ -torsion.*
2. *L'inclusion $E_\Delta \subseteq (E_\Delta^{\text{sep}})^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$ est une égalité.*
3. *Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$, le morphisme de comparaison*

$$E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Identique à la Proposition 5.1.26 et au Corollaire 5.1.29. □

Définition/Proposition 5.4.8. Le foncteur

$$\mathbb{D}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta), \quad V \mapsto (E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V)^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$$

est correctement défini, pleinement fidèle et son image essentielle est incluse dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée. Le foncteur \mathbb{D}_Δ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Identique à la Proposition 5.1.30, mise à part la pleine fidélité que nous n'avions alors pas traitée. Soit $V_1, V_2 \in \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}$. En utilisant la commua-

tion naturelle de \mathbb{D}_Δ au Hom interne puis l'isomorphisme de comparaison pour $\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2)$, nous obtenons des isomorphismes dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$

$$\begin{array}{ccc} E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \mathbb{D}_\Delta(\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2)) & & \\ \wr \downarrow & \searrow \sim & \\ E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2)) & & E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \underline{\text{Hom}}(V_1, V_2) \end{array}$$

Calculons les invariants par $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$. Pour le morphisme vertical, on utilise le Proposition 2.3.10 pour $\mathcal{G}_{E,\Delta}$, la E_Δ -algèbre sans torsion²¹ E_Δ^{sep} et le E_Δ -module fini projectif $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2))$. Pour le morphisme diagonal, le Corollaire 5.1.24 couplé à l'injection $E_\Delta^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ donne $\mathbb{F}_r = (E_\Delta^{\text{sep}})^{\Phi_{\Delta,q,r}}$; on applique ensuite la Proposition 2.3.10 à l'inclusion $\mathbb{F}_r \subset E_\Delta^{\text{sep}}$. On obtient

$$\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{F}_r, \mathcal{G}_{E,\Delta}}}(V_1, V_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2))$$

et l'on vérifie qu'il s'agit de l'application donnée par fonctorialité²². \square

Il reste à démontrer que \mathbb{D}_Δ est essentiellement surjectif et à expliciter son quasi-inverse. À dessein, nous avons commencé par l'équivalence de Fontaine perfectioïde pour pouvoir en déduire des propriétés de \mathbb{D}_Δ .

Définition 5.4.9. Appelons $\tilde{\text{Ex}} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta) \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \tilde{E}_\Delta)$ le foncteur obtenu à partir de l'inclusion de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneaux $E_\Delta \subset \tilde{E}_\Delta$ en suivant la Définition 2.3.2.

La stratégie consiste à démontrer que $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta \cong \tilde{\text{Ex}} \circ \mathbb{D}_\Delta$ puis que $\tilde{\text{Ex}}$ est pleinement fidèle. Grâce à la commutation au Hom interne de la Proposition 2.3.3, il suffit de démontrer que

$$\forall D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta), \quad D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \cong \tilde{\text{Ex}}(D)^{\Phi_{\Delta,q,r}}.$$

Rappelons brièvement la stratégie de preuve de ce énoncé dans le cas univariable. Soit $d \in (\tilde{E} \otimes_E D)^{\varphi=\text{Id}}$ que l'on écrit $d = \sum x_i e_i$ pour une E -base (e_i) de D . Nous munissons $(\tilde{E} \otimes_E D)$ de son unique structure de \tilde{E} -espace vectoriel topologique pour la topologie adique sur \tilde{E} . Quitte à choisir correctement la base, nous pouvons supposer que

$$\left(\bigoplus X \tilde{E}^+ e_i \right) \subset (\tilde{E} \otimes_E D)^{++} := \{d \in \tilde{E} \otimes_E D \mid \varphi_D^n(d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

²¹Nous utilisons les deux premiers points du Corollaire 5.4.7.

²²Cette identification de l'application est déjà contenue dans les Propositions 2.3.5 et 2.3.9.

et que $(\oplus E^+ e_i)$ est stable par φ_D . Pour N assez grand, on peut écrire $\varphi^N(x_i) \in E + X\tilde{E}^+$. Ainsi,

$$d = \varphi_D^N(d) = \sum \varphi^N(x_i) \varphi_D^N(e_i) \in D + (\tilde{E} \otimes_E D)^{++}.$$

En appliquant φ_D^n pour n arbitrairement grand on en déduit que d est dans l'adhérence de D , i.e. dans D .

Dans le cas multivariable, la topologie adique sur \tilde{E}_Δ ne permet pas de décaler la preuve. En effet, si l'on considère $x = \sum_{n \geq 0} X_\alpha^{q^n+1/q^n}$, aucun $\varphi_{\Delta,q}^N(x)$ n'appartient à $E_\Delta + X_\Delta \tilde{E}_\Delta^+$. Il faut considérer la topologie colimite, malgré son apparence tarabiscotée.

Lemme 5.4.10. *Le sous-anneau E_Δ de \tilde{E}_Δ est fermé pour la topologie colimite.*

Démonstration. Au niveau entier, utilisons la description de nos anneaux à la Remarque 5.4.2. Soit $x \in \tilde{E}_\Delta^+ \setminus E_\Delta^+$. Il existe un monôme aX^d apparaissant dans x avec $d \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \setminus \mathbb{N}^\Delta$. Ce terme apparaît encore (X) -adique localement, d'où l'on tire que E_Δ^+ est fermé dans \tilde{E}_Δ^+ . Grâce aux égalités $E_\Delta \cap X_\Delta^{-n} \tilde{E}_\Delta^+ = X_\Delta^{-n} E_\Delta^+$, on fait le même raisonnement sur chaque terme de la colimite. \square

Lemme 5.4.11. *Soient $R \subseteq T$ un sous-anneau fermé d'un anneau topologique T et D un R -module fini projectif. Puisque D est plat sur R , on peut voir $D \subset (T \otimes_R D)$. Le sous-espace D est fermé pour la topologie initiale.*

Démonstration. Fixons une présentation $D \oplus D' = R^k$ de D . Dans ce cas, $(T \otimes_R D) \oplus (T \otimes_R D') = T^k$ fournit une présentation de $(T \otimes_R D)$. Puisque $R \subseteq T$ est fermé, c'est encore le cas de $R^k \subseteq T^k$ avec les topologies produits. La topologie initiale sur $(T \otimes_R D)$ étant la topologie induite depuis T^k , on en déduit que $D = (T \otimes_R D) \cap R^k$ est fermé dans $(T \otimes_R D)$. \square

Proposition 5.4.12. *Soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. L'inclusion*

$$D^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \subseteq \widetilde{E_X}(D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}}$$

est une égalité.

Démonstration. Prenons $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une famille génératrice de D et posons $A = (a_{i,j}) \in M_d(E_\Delta)$ une matrice de $\varphi_{\Delta,r,D}$ dans la famille (e_i) . Quitte à considérer la famille génératrice $(X_\Delta^n e_i)$, on a $A \in M_d(E_\Delta^+)$. Nous avons alors par récurrence immédiate

$$\forall N \geq 0, \quad \varphi_{\Delta,r}^N \left(\sum_i (X) \tilde{E}_\Delta^+ e_i \right) \subseteq \sum_i (X)^{r^N} \tilde{E}_\Delta^+ e_i.$$

En particulier

$$\sum_i (X) \tilde{E}_\Delta^+ e_i \subseteq (\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{++} := \left\{ d \in (\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D) \mid \begin{array}{l} \varphi_{\Delta, r, \tilde{E}_X(D)}^n(d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{pour la topologie initiale d\'eduite} \\ \text{de la topologie colimite sur } \tilde{E}_\Delta \end{array} \right\}.$$

Prenons \`a pr\'esent une \'{e}criture $d = \sum x_i e_i$ d'un \'{e}l\'ement $d \in (\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta, r} = \text{Id}}$. Gr\^ace \`a la Remarque 5.4.2, les mon\^omes des x_i de degr\'e total inf\'erieur \`a 1 sont en nombre fini. En particulier, leurs d\'enominateurs sont des puissances de p divisant un certain r^N . Pour un tel N ,

$$\begin{aligned} d &= \varphi_{\Delta, r, \tilde{E}_X(D)}^N(d) \\ &= \sum_i \varphi_{\Delta, r}^N(x_i) \varphi_{\Delta, r, D}^N(e_i) \in \left[D + \sum_i (X) \tilde{E}_\Delta^+ e_j \right] \subseteq \left[D + (\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{++} \right] \end{aligned}$$

\'{E}crivons une telle d\'ecomposition $d = d_0 + d^{++}$. Alors,

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{\Delta, r, D}^n(d_0)$$

pour la topologie initiale associ\'ee \`a la topologie colimite sur \tilde{E}_Δ . Les Lemmes 5.4.10 et 5.4.11 combin\'es d\'emonstrent que D est ferm\'e dans $(\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)$ pour la topologie initiale, d'o\`u $d \in D$. \square

Nous en tirons le corollaire qui nous servira vraiment en prenant les invariants dans la Proposition 5.4.12.

Corollaire 5.4.13. *Soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{\'et}}(\Phi_{\Delta, q, r}, E_\Delta)$. L'inclusion suivante est une \'egalit\'e*

$$D^{\Phi_{\Delta, q, r}} \subseteq \tilde{E}_X(D)^{\Phi_{\Delta, q, r}}.$$

Nous identifions les deux cat\'egories $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{\'et}}(\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$ et $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{\'et}}(\Phi_{\Delta, q, r}, \tilde{E}_\Delta)$ dans la suite.

Proposition 5.4.14. *1) Les foncteurs $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ et $\tilde{E}_X \circ \mathbb{D}_\Delta$ sont isomorphes.*

2) Le foncteur \tilde{E}_X est pleinement fid\`ele.

D\'emonstration. 1) Soit V un objet de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E, \Delta}$. Consid\'erons le morphisme d'anneaux $(\Phi_{\Delta, q, r} \times \mathcal{G}_{E, \Delta})$ -\'equivariant $E_\Delta^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ obtenu \`a partir de la Proposition 5.4.3. En tensorisant par V et passant aux invariants par $\mathcal{G}_{E, \Delta}$, il fournit une application E_Δ -lin\'eaire et $\Phi_{\Delta, q, r}$ -\'equivariante $\mathbb{D}_\Delta(V) \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}_\Delta(V)$, puis comme $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta(V)$ est un \tilde{E}_Δ -module, une transformation naturelle $S : \tilde{E}_X \circ \mathbb{D}_\Delta \Rightarrow \tilde{\mathbb{D}}_\Delta$.

Puisque $\tilde{E}_\Delta \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ est fidèlement plat, nous vérifions qu'il s'agit d'un isomorphisme de foncteur après changement de base. La transformation naturelle entre foncteur au Corollaire 5.4.4 fournit l'isomorphisme de gauche du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} \left(\tilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} \mathbb{D}_\Delta(V) \right) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes S(V)} & \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_\Delta} \tilde{\mathbb{D}}_\Delta(V) \\ \wr \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta^{\text{sep}}} \left(E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \mathbb{D}_\Delta(V) \right) & \rightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta^{\text{sep}}} \left(E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V \right) & \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V \end{array}$$

où les flèches non labellisées sont les isomorphismes de comparaison déjà étudiés. Pour que $S(V)$ soit un isomorphisme, il suffit de vérifier la commutation du diagramme.

2) Soient D_1, D_2 deux objets de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. L'application donnée par $\tilde{\text{Ex}}$ au niveau des morphismes s'obtient selon la Proposition 2.3.5 en prenant les $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants de la composée

$$\text{Hom}_{E_\Delta}(D_1, D_2) \rightarrow \text{Ex}(\text{Hom}_{E_\Delta}(D_1, D_2)) \xrightarrow[\sim]{\iota_{D_1, D_2}} \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta}(\text{Ex}(D_1), \text{Ex}(D_2)),$$

où ι_{D_1, D_2} est un isomorphisme puisque D_1 est fini projectif. En passant aux invariants par $\Phi_{\Delta,q,r}$, le premier morphisme devient un isomorphisme d'après le Corollaire 5.4.13. \square

Lemme 5.4.15. *L'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq (E_\Delta^{\text{sep}})^{\Phi_{\Delta,q,r}}$ est une égalité.*

Démonstration. Combiner le résultat sur $\tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ au Corollaire 5.1.24 et l'injection $E_\Delta^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ obtenue en passant à la limite dans le Lemme 5.4.3. \square

Théorème 5.4.16. *Le foncteur*

$$\mathbb{D}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta} \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$$

est une équivalence de catégories monoïdales fermées. Un quasi-inverse est donné par

$$\mathbb{V}_\Delta : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}, \quad D \mapsto (E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}}.$$

Démonstration. Nous avons vu que $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta \cong \tilde{\text{Ex}} \circ \mathbb{D}_\Delta$ en Proposition 5.4.14, que $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ est une équivalence au Théorème 5.2.13 et que \mathbb{D}_Δ et $\tilde{\text{Ex}}$ sont pleinement fidèles aux Propositions 5.4.8 et 5.4.14. Cela suffit à prouver que \mathbb{D}_Δ est une équivalence de catégories.

Soit V une représentation. Nous avons prouvé en Proposition 5.4.8 un isomorphisme de comparaison naturel

$$E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}} \mathbb{D}_{\Delta}(V) \xrightarrow{\sim} E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V.$$

En décomposant dans une \mathbb{F}_r -base de V , les $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants du terme de droite redonnent V . Passer aux invariants fournit donc un isomorphisme naturel

$$\mathbb{V}_{\Delta} \circ \mathbb{D}_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{Id}.$$

□

5.4.2 Dévissage vers des coefficients de caractéristique mixte

Nous cherchons à présent à démontrer à en déduire équivalence de Fontaine multivariable imparfaite pour des coefficients de caractéristique mixte. Nous fixons une extension finie K de \mathbb{Q}_p de corps résiduel de cardinal r tel que $q = r^f$. Soit $L = K\mathbb{Q}_q$. La lettre π dénote toujours une uniformisante de K , qui est également une uniformisante de L .

Nous conservons la donnée de l'ensemble fini Δ . Puisque $\mathbb{Q}_r = K \cap \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$, il existe un r -Frobenius canonique sur L . L'action de $\Phi_{\Delta,q,r}$ sur \mathcal{O}_L par son quotient $\Phi_{\Delta,q,r}/\Phi_{\Delta,q} \cong \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}/f\mathbb{N}}$ fournit une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique pour la topologie π -adique.

Nous fixons une famille $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\alpha}}^+$ de \mathcal{O}_L -algèbres π -adiquement séparées et complète, d'anneau résiduel en l'idéal π égal à E_{α}° et munies d'un relèvement semi-linéaire $\phi_{\alpha,r}$ du r -Frobenius sur E_{α}° . On notera toujours X_{α} une uniformisante de E_{α} ou un relevé dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\alpha}}$. Exactement comme dans la Proposition 3.2.2 et la Définition 3.2.3, on choisit des $\mathcal{G}_{E_{\alpha}}$ -anneaux $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\alpha}^{\text{ur}}}}$ ainsi que leurs sous-anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\alpha}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\alpha}}^+$ pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$. En appliquant [Sta18, Tag 08HQ] pour le r -Frobenius sur les corps résiduels, on peut étendre l'endomorphisme $\phi_{\alpha,r}$ en un endomorphisme \mathcal{O}_L -semi-linéaire de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\alpha}^{\text{ur}}}}$ qui stabilise chaque $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\alpha}}$ et commute à l'action galoisienne.

Définition 5.4.17. On note alors

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta}}^+ = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\alpha}}^+ \right)^{\wedge(\pi, \underline{X})} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta}} = \left(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta}}^+ \left[\frac{1}{X_{\Delta}} \right] \right)^{\wedge \pi}.$$

Ces anneaux ne dépendent pas du choix de π ni de celui des X_{α} . Ce sont des \mathcal{O}_L -algèbres π -adiquement séparées et complètes d'anneaux résiduels en π égaux respectivement à $F_{\Delta,q}^+$ et $F_{\Delta,q}$.

Dans cette section, nous les munissons uniquement de la topologie π -adique.

Le produit tensoriel des $\phi_{\alpha,r}$ qui sont tous \mathcal{O}_L -semi-linéaires par rapport au r -Frobenius, les $\phi_{\alpha,r}^{\circ f}$ et l'action de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ -terme à terme fournissent après complétion et/ou localisation une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ pour la topologie π -adique. Les injections depuis \mathcal{O}_L sont des morphismes de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneaux topologiques.

Remarque 5.4.18. Il est également possible de rendre explicite ces anneaux. On écrit $F = \mathbb{F}_{q^f}((X'))|E$ de degré d'inertie f et d'indice de ramification e . On remarque alors que $X \in X'^e(F^\circ)^\times$. En utilisant la Remarque 5.4.2,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ = \left\{ \sum_{\underline{d} \in \mathbb{N}^\Delta} a_{\underline{d}} X'^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} a_{\underline{d}} \in \otimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_{q^f}} \\ \forall k \geq 0, \{ \underline{d} \mid a_{\underline{d}} \neq 0 \pmod{\pi^k} \} \text{ est fini} \end{array} \right\}.$$

Définition 5.4.19. Nous définissons comme au Corollaire 5.4.4 deux diagrammes de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux dont nous définissons

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}^+ := \left(\text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}} E} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ \right)^{\wedge \pi} \text{ et } \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}} := \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right] \right)^{\wedge \pi}.$$

Nous munissons ce dernier de la topologie π -adique ce qui en fait un $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique.

Lemme 5.4.20. Nous avons $H^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta^{\text{sep}}) = \{0\}$.

Démonstration. La suite restriction-inflation et le résultat du Corollaire 5.1.24 pour $r = q$ donnent

$$0 \rightarrow H^1 \left(\varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}} / \varphi_{\Delta,q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{F}_q \right) \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta^{\text{sep}}) \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta,q}, E_\Delta^{\text{sep}}).$$

La base normale de Hilbert affirme que \mathbb{F}_q est induit comme \mathbb{F}_r -module avec action de $\text{Gal}(\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_r) = \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}} / \varphi_{\Delta,q}^{\mathbb{N}}$. Il est acyclique.

Pour analyser le terme de droite, nous avons besoin des deux résultats qui suivent.

Premier résultat : soit $\beta \in \Delta$. Montrons l'égalité $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}} = (E_\Delta^{\text{sep}})^{\varphi_{\beta,q} = \text{Id}}$. Soit $F|E$ une extension finie que nous écrivons $l((Y))$ pour une certaine uniformisante Y et $l|k$. Selon la Remarque 5.4.2 nous pouvons écrire

$$F_{\Delta,q} = \left\{ \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^\Delta} a_{\underline{d}} Y^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} l \right)^{\mathbb{Z}^\Delta} \text{ tel que} \\ \exists N > 0, \forall \underline{d}, \forall \alpha, a_{\underline{d}} \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

De cette description se déduit l'inclusion $F_{\Delta \setminus \{\beta\},q} \subseteq F_{\Delta,q}^{\varphi_{\beta,q} = \text{Id}}$. Soit $x = \sum a_{\underline{d}} Y^{\underline{d}}$ non nul dans les invariants. Munissons \mathbb{Z}^Δ de l'ordre lexicographique par rapport à un

ordre sur Δ de minimum β et considérons $\underline{d}_{\min} = \min\{\underline{d} \mid a_{\underline{d}} \neq 0\}$. Le coefficient de $(qd_{\min, \beta}, d_{\alpha}, \dots)$ dans $\varphi_{\beta, q}(x)$ vaut $\varphi_{\beta, q}(a_{\underline{d}_{\min}})$. Puisque $\varphi_{\beta, q}$ est injectif sur $(\otimes_{\mathbb{F}_q} l)$, c'est donc le degré minimal de $\varphi_{\beta, q}(x)$. Il en découle que $d_{\min, \beta} = 0$. Appelons

$$y = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}\Delta \setminus \{\beta\}} a_{(0, \underline{d})} Y^{(0, \underline{d})} \in F_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}.$$

Il se trouve que $x - y$ est encore invariant mais n'a aucune terme de degré en β nul. Nous obtenons donc $x - y = 0$ soit $x \in F_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}$.

Deuxième résultat : soit $\beta \in \Delta$. Montrons que l'endomorphisme de $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}$ -espaces vectoriels $(\varphi_{\alpha, q} - \text{Id})$ est surjectif sur E_{Δ}^{sep} . Chaque polynôme $T^q - T - x$ étant scindé sur E_{β}^{sep} , nous savons que l'endomorphisme est inversible sur E_{β}^{sep} . Le Lemme 5.4.6 affirme en particulier que

$$E_{\beta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\beta}} \left(E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta \setminus \{\beta\}}} E_{\Delta} \right) \cong E_{\Delta}^{\text{sep}}$$

ce qui permet de conclure.

Utilisation des résultats : nous choisissons $\beta \in \Delta$ et utilisons la suite exacte restriction-inflation pour $\varphi_{\beta, q}^{\mathbb{N}} < \Phi_{\Delta, q}$:

$$0 \rightarrow H^1 \left(\Phi_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}, (E_{\Delta}^{\text{sep}})^{\varphi_{\beta, q} = \text{Id}} \right) \rightarrow H^1 \left(\Phi_{\Delta, q}, E_{\Delta}^{\text{sep}} \right) \rightarrow H^1 \left(\varphi_{\beta, q}^{\mathbb{N}}, E_{\Delta}^{\text{sep}} \right).$$

Le premier résultat identifie le terme de gauche à la cohomology de $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}}$. Par récurrence sur $|\Delta|$, on se ramène donc à démontrer que le terme de droite s'annule. Or, soit f un 1-cocycle. Les relations de cocycles imposent que

$$\forall n \geq 0, \quad f(\varphi_{\beta, q}^n) = \sum_{0 \leq i < n} \varphi_{\beta, q}^{\circ i} (f(\varphi_{\beta, q})).$$

Ainsi, pour $(\varphi_{\beta, q} - \text{Id})(y) = f(\varphi_{\beta, q})$, qui existe grâce au deuxième résultat, le cocycle f est le cobord associé à y . \square

Lemme 5.4.21. La K-théorie de E_{Δ} vérifie $K_0(E_{\Delta}) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. Voir [Zá18b, Lemme 2.3]. \square

Théorème 5.4.22. Les foncteurs

$$\mathbb{D}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E, \Delta} \rightarrow \text{Mod} \left(\Phi_{\Delta, q, r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}} \right), \quad V \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{G}_{E, \Delta}}$$

$$\mathbb{V}_\Delta : \text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{E,\Delta}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q,r}}$$

sont lax monoïdaux fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E,\Delta}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. Démontrer la définition correcte et les propriétés sur leurs images essentielles se fait en décomposant les deux foncteurs comme aux Propositions 5.1.30 et 5.2.12 en utilisant la topologie π -adique. On rappelle que, puisque $\Phi_{\Delta,q,r}$ est discret, les sous-catégories $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$ et $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$ pour la π -adique coïncident. Nous appliquons pour chaque foncteur la Proposition 2.5.24 respectivement aux inclusions $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$, puis la Proposition 2.5.1 au $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$ muni de la topologie π -adique pour seule topologie respectivement pour les sous-monoïdes $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ et $\Phi_{\Delta,q,r}$. Il nous faut pour cela vérifier plusieurs conditions que nous listons. Les deux premières vérifient que nous nous plaçons dans un cadre cohérent avec la section 2.4. La troisième justifie les utilisations de la Proposition 2.5.24. Les suivantes vérifient les conditions multiples de la Proposition 2.5.1.

Condition 1 : les couples (π, \mathcal{O}_K) , $(\pi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta})$ et $(\pi, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}})$ sont des contextes de π -dévissage.

Les anneaux sont par construction π -adiquement séparés et complets. Reste à démontrer qu'ils sont sans π -torsion. C'est évident pour \mathcal{O}_K . Le produit tensoriel des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha}^+$ est sans π -torsion puisque chacun des termes l'est, a fortiori son complété et séparé. De même, en passant à la colimite puis en complétant, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$ est sans π -torsion.

Condition 2 : pour chacun des trois anneaux, et chaque endomorphisme f dans l'action des monoïdes, les idéaux engendrés par $f(\pi)$ et π coïncident. Ici, π est même invariant par chaque action.

Condition 3 : les inclusions $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}$ sont π -adiquement continues et équivariantes. C'est le cas par construction.

Condition 4 : les anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{ur}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}}$ coïncident respectivement avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ et \mathcal{O}_K .

L'identification des topologies π -adiques (resp. l'égalité algébrique) s'obtient par dévissage (resp. et complétion) à partir de l'injectivité du morphisme modulo π (resp. d'une identification algébrique modulo π). C'est alors exactement l'injectivité dans le Corollaire 5.4.4 ou simplement la définition de la caractéristique (resp. les résultats du deuxième point du Corollaire 5.4.7 et du Corollaire 5.1.24).

Condition 5 : les inclusions $E_\Delta \subset E_\Delta^{\text{sep}}$ et $\mathbb{F}_r \subset E_\Delta^{\text{sep}}$ sont fidèlement plates.

La deuxième était déjà utilisée dans la Proposition 5.4.8 et est conséquence du Lemme 5.4.6.

Condition 6 : l'élément π est irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ et \mathcal{O}_K .

Cela équivaut à l'intégrité de E_Δ démontrée au Corollaire 5.4.4 et à celle de \mathbb{F}_r .

Condition 7 : nous avons $K_0(E_\Delta) = \mathbb{Z}$ et $K_0(\mathbb{F}_r) = \mathbb{Z}$. Pour démontrer utiliser le Théorème 2.5.1, nous pouvons aussi utiliser la grosse condition en utilisant la noethérianité de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$.

La première est démontrée au Lemme 5.4.21. De plus \mathbb{F}_r est un corps.

Condition 8 : la topologie π -adique a de bonnes propriétés de π -dévissage.

C'est une remarque nous faisons dans l'Exemple 2.5.28.

Condition 9 : les groupes $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$ et $H_{\text{cont}}^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta^{\text{sep}})$ s'annulent.

Le deuxième équivaut à l'énoncé du Lemme 5.4.20 puisque tous les objets en jeu sont discrets. Pour le premier, nous utilisons le résultat du Lemme 5.4.6 pour des extensions finies. Comme nous l'avions déjà évoqué pour démontrer la descente galoisienne, cela implique par base normale de Hilbert que chaque $F_{\Delta,q}$ est un E_Δ -module induit pour l'action de $\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_\alpha | E_\alpha)$, a fortiori acyclique. Nous en déduisons l'énoncé puisque

$$\begin{aligned} H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}}) &:= \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} \lim H^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_\alpha | E_\alpha), (E_\Delta^{\text{sep}})^{\mathcal{G}_{F,\Delta}} \right) \\ &= \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} \lim H^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_\alpha | E_\alpha), F_{\Delta,q} \right). \end{aligned}$$

Condition 10 : les deux morphismes de comparaison sont des isomorphismes pour les objets de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$.

Le troisième point du Corollaire 5.4.7 prouve déjà l'isomorphisme de comparaison pour les invariants par $\mathcal{G}_{E,\Delta}$. Comme cela implique que l'extension des scalaires et la prise de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ -invariants fournissent une équivalence de catégorie entre $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$ et $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$, le Théorème 5.4.16 et la décomposition des deux foncteurs impliquent que l'extension des scalaires et la prise de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants fournissent une équivalence de catégorie entre $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E,\Delta}$ et $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$. Ceci contient en particulier l'autre isomorphisme de comparaison.

Une fois que nos deux foncteurs sont construits, démontrer qu'ils sont quasi-inverses l'un de l'autre se fait comme à la démonstration du Théorème 5.2.13 en passant aux invariants l'isomorphisme de comparaison et en utilisant la Proposition 2.4.19. Ceci utilise la première partie du Corollaire 5.4.7 affirmant que E_Δ^{sep} est sans E_Δ -torsion. \square

Remarque 5.4.23. La version $K_0(R^{S'}/r) = \mathbb{Z}$ de la condition 7 ci-dessus démontre que $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$ est stable par Hom interne avant l'équivalence de catégories. De plus, elle permet d'appliquer le Théorème 2.4.2. Ainsi, tous les objets D de $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$ ont une écriture comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}$ -module de la forme

$$D \cong D_{\infty} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq N} D_i$$

où D_{∞} est fini projectif sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}$, et où chaque D_i est fini projectif sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}/\pi^i \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}$.

5.5 L'équivalence de Carter-Kedlaya-Zábrádi

Dans les sections précédentes, deux versions des premières équivalences de Carter-Kedlaya-Zábrádi ont été démontrées. Précisément, le Théorème 5.2.13 pour $r = p$ fournit un analogue de [CKZ21, Th. 4.6] dans le cas où tous les corps sont identiques.

Les versions de ce texte ont plusieurs avantages. Nous avons conservé l'obtention d'une équivalence pour les corps de caractéristique p sans avoir besoin d'utiliser l'action supplémentaire de Γ ; c'était déjà un avantage de [CKZ21] par rapport à [Zá18b]. Enfin, ces équivalences, contrairement à celles de [CKZ21], considèrent des catégories de modules étales sur des anneaux *intègres* ; les sections précédentes utilisent d'ailleurs ces questions d'intégrité pour faire fonctionner différemment les preuves²³. Cette section est consacrée à retrouver à partir de nos versions sur des anneaux intègres l'un des théorèmes de [CKZ21].

Le lien entre les équivalences de ce texte et celles de [CKZ21] repose sur le fait que les anneaux non intègres introduits par Carter-Kedlaya-Zábrádi sont coinduits à partir des anneaux intègres considérés dans ce texte, idée déjà présente pour se ramener au cas intègre dans le Théorème 5.2.11. Nous détaillons dans le cas de l'équivalence multivariable modulo p pour des corps locaux de caractéristique p comment retrouver une équivalence du type de celles de [CKZ21]. Les sections précédentes illustrent que l'essentiel du travail consiste à obtenir une équivalence en modulo p pour des corps perfectoides. Le reste consiste à dévisser, passer à la limite, ajouter des actions, en bref tout un tas de joyeuseries qui s'adaptent pour obtenir l'équivalence de votre choix. Pour ne pas surcharger ce texte, on se contente de retrouver une version imparfaite de [CKZ21, Th. 4.6] avec nos méthodes.

Nous conservons notre corps E de caractéristique p , de valuation discrète, séparé complet pour cette valuation, et tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans le corps résiduel k est finie. La complétion de sa perfection est notée \tilde{E} .

²³Voir les preuves de la Proposition 5.2.10 puis celle du Théorème 5.2.11 qui s'en sert.

Définition 5.5.1. En imitant les Définitions 5.4.1 et 5.4.5 avec des produits tensoriels sur \mathbb{F}_p , nous définissons pour tout extension finie galoisienne $F|E$ les $(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques discrets

$$F_{\Delta,p}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} F_\alpha^+ \right)^{\wedge(\underline{X})}, \quad F_{\Delta,p} := F_{\Delta,p}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right]$$

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} = \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} F_{\Delta,p}.$$

Lemme 5.5.2. *Le sous-monoïde $\Phi_{\Delta,q,p} < \Phi_{\Delta,p}$ est d'indice subtil fini.*

Démonstration. En posant $q = p^f$, on réécrit cette inclusion de monoïdes comme $(f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^\Delta$. Toute classe à gauche $(n_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$ est contenue dans l'une des classes minimales pour l'inclusion

$$\left\{ (k_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N} \mid \forall i, 0 \leq k_i < f \text{ et } \exists i, k_i = 0 \right\}.$$

Pour finir la démonstration, nous allons démontrer que pour toute paire $((n_i), (m_i))$ de Δ -uplets, les relations entre classes à gauche associées ont une famille finie et cofinale de relations minimales. Puisque tout élément de \mathbb{N}^Δ est régulier, une relation est $(n_i) + (k_i) = (m_i) + (l_i)$ est entièrement déterminée par (k_i) .

Considérons

$$R = \left\{ (r_i, r) \in \mathbb{N}^\Delta \times \mathbb{N} \mid (n_i) + (fr_i) + r(1, \dots, 1) \in (m_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N} \right\}.$$

L'ensemble $\mathbb{N}^\Delta \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre partiel produit est un bel ordre (utiliser le lemme de Dickson pour étudier ses antichaînes). Ainsi R possède une famille finale et finie. Les relations données par ces éléments minimaux forment un système fini cofinal des relations entre $(n_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$ et $(m_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$. \square

Proposition 5.5.3. 1. *Il existe un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,p}$ -anneaux topologiques discrets*

$$E_{\Delta,p} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(E_\Delta),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

2. *Il existe un isomorphisme de $(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques discrets*

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}}^{\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}}(E_\Delta^{\text{sep}}),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

Démonstration. 1. La démonstration suit la même stratégie que la Proposition 5.1.22, avec plusieurs changements notables. Tout d'abord, le morphisme similaire à celui donné dans la preuve en (*4) est invariant par $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ puisque l'action commute à chaque $\psi_{\text{spé}}$. Cette invariance est ensuite conservée par complétion et localisation. Il faut également prendre en compte que nos actions ne sont plus que des actions de monoïdes. Fixons \mathcal{R}_{\min} un système fini de représentants des classes à gauche minimales pour l'inclusion, qui sont finales pour l'inclusion, pour le sous-monoïde $\Phi_{\Delta,q,p} < \Phi_{\Delta,p}$. Fixons $\mathcal{L}_{\min} \subset \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$ un système fini et final des éléments minimaux. Ceci est possible grâce au Lemme 5.5.2. Notons $(\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}$ la petite catégorie ayant pour objets $\mathcal{R}_{\min} \sqcup \{\psi_1 \tau_1 \mid (\psi_1, \tau_1, \psi_2, \tau_2) \in \mathcal{L}_{\min}\}$ et pour flèches les identités et les $\tau_1 \rightarrow \psi_1 \tau_1$ pour toute relation dans \mathcal{L}_{\min} . Pour tout $\Phi_{\Delta,q,p}$ -anneau A , nous avons alors un isomorphisme

$$\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(A) \xrightarrow{\sim} \lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} A, \quad f \mapsto [\psi \mapsto f(\psi)] \quad (*5)$$

où le diagramme dont on prend la limite associe l'endomorphisme ψ de A au morphisme $[\tau \rightarrow \psi\tau]$ dans $(\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}$. Cette description ne suffit pas : en effet le passage à la quatrième ligne dans la première suite d'isomorphismes en Proposition 5.1.22 utilise que

$$\mathbb{F}_{q'} \otimes_{\psi_{\beta}, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_{\beta}^{\circ} \rightarrow \tilde{F}_{\beta}^{\circ}, \quad x \otimes y \mapsto x\psi_{\beta}(y)$$

est un isomorphisme. Pour F_{β}° , il sera seulement injectif. Bonne nouvelle, les projections sur chaque facteur dans la limite de (*5) ne sont pas non plus surjectives. Pour réparer l'argument, il suffit de démontrer que

$$\lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} F_{\beta}^{\circ} = \lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} \psi_{\beta}(F_{\beta}^{\circ}).$$

Démontrons que pour tout fonction $f \in \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(F_{\beta}^{\circ})$ et tout $\psi \in \Phi_{\Delta,p}$, alors $f(\psi) \in \psi_{\beta}(F_{\beta}^{\circ})$. Supposons que $\psi_{\beta} = \varphi_{\beta,p}^n$ et fixons m, k tels que $\varphi_{\beta,p}^{n+m} = \varphi_{\beta,q}^k$. On peut alors écrire $\varphi_{\Delta,p}^m \psi = \varphi_{\Delta,q}^k \psi_1$ et

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta,p}^m(f(\psi)) &= \varphi_{\Delta,p}^m(f(\psi)) = f(\varphi_{\Delta,p}^m \psi) \\ &= f(\varphi_{\Delta,q}^k \psi_1) = \varphi_{\beta,q}^k(f(\psi_1)) = \varphi_{\beta,p}^m(\varphi_{\beta,p}^n(f(\psi_1))). \end{aligned}$$

L'injectivité de $\varphi_{\beta,p}^m$ conclut.

2. Puisque les colimites filtrantes sont tamisées, elles commutent naturellement à la coinduction. Il suffit donc de prendre la colimite des isomorphismes précédents. \square

Définition/Proposition 5.5.4. Le foncteur

$$\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{E, \Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p}), \quad V \mapsto (E_{\Delta, p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\mathcal{G}_{E, \Delta}}$$

est pleinement fidèle et son image essentielle est incluse dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p})$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée et $\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}}$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Identique à la Proposition 5.4.8 en démontrant des analogues des lemmes qui la précèdent pour $E_{\Delta, p}^{\text{sep}}$. \square

Une version imparfaite du Théorème 4.6 de [CKZ21], dans le cas où tous les corps perfectoides considérés sont isomorphes à \tilde{E} , se formule comme suit :

Théorème 5.5.5. *Le foncteur*

$$\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p})$$

est une équivalence de catégories monoïdales fermées. Un quasi-inverse est donné par

$$\mathbb{V}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p}) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, \quad D \mapsto (E_{\Delta, p}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta, p}} D)^{\Phi_{\Delta, p}}.$$

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\Phi_{\Delta, q, p}, E_{\Delta}) & \xrightarrow{\text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p}}^{\Phi_{\Delta, p}}} & \text{Mod}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p}) \\ \cup & & \cup \\ \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, p}, E_{\Delta}) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p}) \\ \mathbb{D}_{\Delta} \uparrow \wr & \nearrow \mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} & \\ \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} & & \end{array}$$

Le foncteur \mathbb{D}_{Δ} est une équivalence d'après le Théorème 5.4.16. Le premier morphisme horizontal est obtenu par identification de $E_{\Delta, p}$ à $\text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p}}^{\Phi_{\Delta, p}}(E_{\Delta})$ comme $\Phi_{\Delta, p}$ -anneau à la Proposition 5.5.3 et par la construction de la Proposition 2.3.11. La flèche en pointillé indique que $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p})$ est contenu dans l'image essentielle de la coinduction ; ceci découle du Lemme 5.5.2 et de la Proposition 2.3.19.

Prouvons que l'enveloppe de ce diagramme commute. Soit V une représentation dans $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$, que nous voyons comme objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, \mathbb{F}_p)$. La première étape de \mathbb{D}_{Δ} et $\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}}$ consiste à étendre les scalaires. Nous appliquons le deuxième point du Lemme 2.3.18 au sous-monoïde d'indice subtil fini $\Phi_{\Delta, q, p} < \Phi_{\Delta, p}$, au $(\Phi_{\Delta, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta})$ -anneau \mathbb{F}_p , au $(\Phi_{\Delta, q, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta})$ -anneau E_{Δ}^{sep} , à l'inclusion $\mathbb{F}_p \hookrightarrow E_{\Delta}^{\text{sep}}$ et à la représentation V ; on obtient un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}, E_{\Delta, p}^{\text{sep}})$

$$E_{\Delta, p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}}^{\Phi_{\Delta, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}}(E_{\Delta}^{\text{sep}}) \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}}^{\Phi_{\Delta, p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}}(E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V).$$

En passant aux invariants, on obtient un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta, p}, E_{\Delta, p})$ naturel en V

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}}(V) &:= \left(E_{\Delta, p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \\ &\cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p}}^{\Phi_{\Delta, p}} \left((E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}} \right) \\ &= \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q, p}}^{\Phi_{\Delta, p}} (\mathbb{D}_{\Delta}(V)). \end{aligned}$$

C'est exactement la commutativité du diagramme que nous recherchions.

La flèche pointillée démontre alors que $\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}}$ est essentiellement surjective. On trouve l'expression d'un quasi-inverse comme pour le Théorème 5.4.16. \square

Nous pourrions établir la version perfectoïde [CKZ21, Th. 4.6] de manière similaire. Malheureusement, l'anneau \overline{R} dans l'article de Carter-Kedlaya-Zábrádi est un complété de la colimite $\tilde{E}_{\Delta, p}^{\text{sep}}$ que nos stratégies nous poussent à définir. Nous préférons ainsi éluder une telle preuve pour nous épargner un énoncé de décomplétion des invariants. Il est d'ailleurs à noter une subtilité dans [CKZ21] puisque l'espace $\text{Spa}(\overline{R}, \overline{R}^+)$ obtenu par construction produit n'est pas pro-étale sur $\text{Spa}(R, R^+)$. Pour appliquer la descente pro-étale, il faudrait remplacer \overline{R}^+ par la complétion ϖ_{Δ} -adique de la colimite des constructions produits sur les extensions finies de \tilde{E} , et non sa complétion (ϖ) -adique. C'est un anneau que nous avons brièvement utilisé dans la section 5.3.

Bestiaire d'équivalences de Fontaine multivariables pour des corps locaux p -adiques

6.1 L'équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}|K|\mathbb{Q}_p$ une extension finie dont le corps résiduel est de cardinal q . Soit Δ un ensemble fini. Dans ce chapitre, nous obtenons une équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable laissée ouverte dans [CKZ21]. Ce résultat a été également démontré dans [Pup21] en suivant les méthodes de [Zá18b]. Au moment de rédaction des articles qui composent en partie cette thèse, je n'étais pas au courant de la thèse de G. Pupazan. Les méthodes de la présentes thèses ont l'avantage de souligner à quel point l'équivalence Lubin-Tate est une conséquence formelle d'une équivalence pour les corps de caractéristique p et d'une construction d'anneaux raisonnables. Les résultats de G. Pupazan utilisent une topologie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ qui ne fait pas partie de celles utilisées jusque là et il l'analyse finement pour démontrer une automatique continuité analogue au Corollaire 3.5.5. Dans cette section, nous retrouvons l'équivalence pour trois topologies différentes sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ puis montrons que les conditions de continuité de l'action de $\Gamma_{K,LT,\Delta}$ sont automatiques, en utilisant le formalisme du Chapitre 2 plutôt que des calculs explicites sur les trois topologies.

Pour préparer l'équivalence glectique semi-linéaire, nous autorisons un choix de loi de Lubin-Tate différent pour chaque $\alpha \in \Delta$. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous nous donnons une uniformisante π_α de K , un polynôme de Lubin-Tate f_α associé à π_α et un système de Lubin-Tate π_α^\flat associé à f_α .

Définition 6.1.1. Nous munissons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$ de deux topologies : la topologie (π, X_Δ) -adique et la topologie (π, \underline{X}) -adique.

Nous munissons $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ de trois topologies. Premièrement, la topologie ayant pour base de voisinages de 0 les sous-groupes $(\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+)_{n,m \geq 0}$. Cette topologie sera appelée *topologie adique faible*.

On munit chaque $X_\Delta^{-m} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$ de la topologie initiale venant de la topologie (π, \underline{X}) -adique sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$. La deuxième topologie considérée est celle obtenue en écrivant

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} = \lim_{n \geq 0} \operatorname{colim}_{m \geq 0} X_\Delta^{-m} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+ / \pi^n X_\Delta^{-m} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+.$$

Nous l'appelons la *topologie colimite*.

La dernière topologie, que nous nommons *topologie faible*, a pour base de voisinages de zéro les $\left(\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} + \sum_{d \in \mathbb{Z}^\Delta, \Sigma d \geq m} \underline{X}^d \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+ \right)_{n, m \geq 0}$. Il s'agit de la topologie de [Pup21, Lemme 2.15].

Nous définissons les mêmes topologies pour les $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ et pour $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{nr}}}$.

Définition/Proposition 6.1.2. Considérons la situation de la section 5.4.2 pour $E = \mathbb{F}_q((X))$, pour l'extension $K = L$, l'ensemble fini Δ , une famille (E_α) de corps valués isomorphes à E et la famille de \mathcal{O}_K -algèbres π -adiquement séparées et complètes d'anneau résiduel E_α^+ en π données comme à la Définition 3.2.3 par

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha} = \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha]] \left[\frac{1}{X_\alpha} \right] \right)^{\wedge \pi},$$

munies du relèvement \mathcal{O}_K -linéaire du q -Frobenius vérifiant $\phi_{\alpha, q}(X_\alpha) = f_\alpha(X_\alpha)$.

Pour toute extension finie galoisienne $E^{\text{sep}}|F|E$, considérons les $(\varphi_{\alpha, q}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_{E_\alpha})$ -anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}^+$ de la Définition 5.4.17. Les plongements dans \tilde{A}_K construits à la Proposition 3.2.13 à partir¹ des π_α^b les munissent d'une structure de $(\varphi_{\alpha, q}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques pour la topologie faible que l'on appelle $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \alpha}}^+$. L'action de $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta})$ terme à terme sur le produit tensoriel des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \alpha}}^+$ est (π, \underline{X}) -adiquement continue. Elle se complète et localise sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ en une structure de $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta})$ -anneau topologique pour les topologies adique faible, colimite et faible que nous appelons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \Delta}}$.

Dans la Définition 5.4.19, les injections sont $\mathcal{G}_{K, \Delta}$ -équivariantes. Cela permet de passer à la colimite et compléter en une structure de $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta})$ -anneau sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{nr}}}$ que l'on nomme $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \Delta}}^{\text{nr}}}$. C'est une structure de $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta})$ -anneau topologique pour chacune des trois topologies ci-dessus. Comme dans le paragraphe qui précède la Définition 3.2.3, après choix des π_α^b et d'une extension de j , le groupe $\mathcal{G}_{E, \Delta}$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \Delta}$ de $\mathcal{G}_{K, \Delta}$. Via cette identification, le $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{E, \Delta})$ -anneau sous-jacent à $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \Delta}}^{\text{nr}}}$ est $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta}^{\text{nr}}}$.

Nous notons également $\Gamma_{K, \text{LT}, \Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_K^\times$ que nous identifierons canoniquement à $\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(K_{\text{LT}, f_\alpha} | K) = \mathcal{G}_{K, \Delta} / \mathcal{H}_{K, \text{LT}, \Delta}$.

Démonstration. Nous nous contentons d'expliquer rapidement pourquoi les actions obtenues sont effectivement continues. Que ce soit pour la continuité (π, \underline{X}) -adique sur le produit tensoriel ou pour la continuité pour les trois topologies après complétions, on prouve que les voisinages de zéro explicités sont stables par l'action.

¹Et de choix de clôtures séparables de chaque $\mathbb{F}_q((X_\alpha^{1/p^\infty}))$ et d'isomorphismes avec $\bigcup_{[K' : K_{\text{LT}}] < \infty} (K' \widehat{K_{\text{LT}}})^b$. Puisque nous avons déjà choisi une identification des clôtures séparables de \tilde{E}_α et \tilde{E} , cela revient à faire un unique choix pour E .

Cela suffit puisque l'action se fait par morphismes d'anneaux sur des anneaux topologiques.

Pour tout $n \geq 0$ et toute famille de multi-indices $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Z}^\Delta$, les sous-groupes $\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ + \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ et $\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta} + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ sont stables par l'action. Nous voyons immédiatement que les voisinages pour la topologie (π, \underline{X}) -adique et pour les topologies adique faible et faible, s'écrivent sous cette forme. Pour la topologie colimite, remarque qu'une base de voisinages de zéro est donnée par les

$$\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta} + \bigcup_{k \geq 0} \frac{(\underline{X})^{m_k}}{X_\Delta^k} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$$

pour $m_{k+1} \geq m_k + |\Delta|$. Ces derniers s'écrivent comme ci-dessus avec

$$\mathfrak{D}_m = \left\{ \underline{d} \mid \forall k, \left((\forall \alpha, d_\alpha \geq -k) \implies \sum \underline{d} \geq m_k + k|\Delta| \right) \right\}.$$

□

Remarque 6.1.3. Nous pointons à nouveau que $(\pi, \underline{X})^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$ ne fournissent pas une base de voisinages de zéro d'une structure d'anneau topologique sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$. Les topologies colimites et faibles sont deux bonnes alternatives pour lesquelles chaque X_α est topologiquement nilpotent.

Remarque 6.1.4. Nous pouvons décrire le $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta})$ -anneau topologique obtenu explicitement. Nous avons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^+ \cong \mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]] \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \cong \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]] \left[\frac{1}{X_\Delta} \right] \right)^{\wedge \pi}$$

avec la topologie d'anneau ayant pour base de voisinages de 0 les $(\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^+)_{n,m \geq 0}$. L'action de $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta})$ est donnée par la seule action de \mathcal{O}_K -algèbre topologique telle que

$$\left(\varphi_{\alpha,q}^{n_\alpha} \right)_\alpha (X_\beta) = f_\beta^{on_\beta} (X_\beta)$$

$$\forall (x_\alpha)_\alpha \in \Gamma_{K,LT,\Delta}, (x_\alpha)_\alpha (X_\beta) = [x_\beta]_{LT,f_\beta} (X_\beta).$$

Pour obtenir une équivalence de Fontaine multivariable Lubin-Tate, il nous reste à analyser les topologies adique faible, colimite et faible, dont nous n'avons pas l'usage pour les corps de caractéristique p . Cela conduit à se replonger dans les topologies adiques sur nos anneaux de caractéristique p , également évincées des précédentes équivalences.

Lemme 6.1.5. *Pour toute famille $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Z}^\Delta$, nous avons les égalités suivantes.*

1. Dans E_{Δ}^{sep} , l'égalité

$$\left(\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} E_{\Delta}^{\text{sep},+} \right) \cap E_{\Delta} = \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} E_{\Delta}^+.$$

2. Pour $n \geq 0$, l'égalité dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}$

$$\left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}} + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}^+ \right) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}} = \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}} + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}^+.$$

3. Pour $n \geq 0$ et si pour tout $\underline{d} \in \mathfrak{D}$ on a $\sum \underline{d} > 0$, l'égalité dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}$

$$\left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}} + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}^+ \right) \cap \mathcal{O}_K = \pi^n \mathcal{O}_K.$$

Démonstration. 1. On se ramène à le prouver pour chaque $F_{\Delta,q}^+$. Pendant la démonstration du Lemme 5.4.6, nous avons démontré un isomorphisme de E_{Δ}^+ -modules

$$F_{\alpha}^{\circ} \otimes_{E_{\alpha}^{\circ}} \left(F_{\beta}^{\circ} \otimes_{E_{\beta}^{\circ}} \cdots \left(F_{\delta}^{\circ} \otimes_{E_{\delta}^{\circ}} E_{\Delta}^+ \right) \right) \cong F_{\Delta,q}^+.$$

Puisque chaque F_{α}° est un E_{α}° -module libre de type fini pour lequel $\{1\}$ se complète en une base², il existe une E_{Δ} -base de $F_{\Delta,q}$ de la forme $\{1\} \sqcup \mathcal{B}$ telle que $F_{\Delta,q}^+ = E_{\Delta}^+ \oplus \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} E_{\Delta}^+ b$. Comme chaque $E_{\Delta} b$ est un sous- E_{Δ} -module, un élément de $F_{\Delta,q}$ appartient à $\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} F_{\Delta,q}^+$ si et seulement si toutes ses coordonnées appartiennent à $\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} E_{\Delta}^+$. Cela conclut.

2. On établit le résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$, le résultat est vide. Supposons le résultat vérifié pour un $n \geq 0$ et soit x dans l'intersection pour $(n+1)$. Nous savons que $(x \bmod \pi)$ appartient à $(\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} E_{\Delta}^{\text{sep},+}) \cap E_{\Delta}$, donc à $\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} E_{\Delta}^+$ par le premier point. Ainsi, il existe une famille $(y_{\underline{d}})$ d'éléments presque tous nuls de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}^+$ telle que $x - \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} y_{\underline{d}} \equiv 0 \bmod \pi$.

Grâce au premier point du Corollaire 5.4.7, E_{Δ}^{sep} est sans X_{Δ}^m -torsion; nous savons aussi que $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}$ est sans π -torsion (voir la condition 1 dans la démonstration du Théorème 5.4.22). Il en découle que

$$X_{\Delta}^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}^+ \cap \pi \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}} = \pi X_{\Delta}^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{nr}}}^+.$$

²Pour ces deux affirmations, considérer que pour une extension finie non ramifiée ou totalement ramifiée, il existe un élément primitif tel que $F^{\circ} = E^{\circ}[x]$. Toute extension finie se décompose comme extension totalement ramifiée d'une extension non ramifiée.

Soit $F|E$ une extension finie d'indice de ramification e et de degré d'inertie f . On utilise la description de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ à la Remarque 5.4.18. Soit $z \in \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ qui est multiple de π . Fixons une famille $z_{\underline{d}}$ d'éléments presque tous nuls de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ tels que $z = \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{e\underline{d}} z_{\underline{d}}$. On choisit \mathfrak{D}_z fini contenant l'ensemble des indices où le coefficient est non nul. Écrivons $z_{\underline{d}} = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^\Delta} \underline{X}^{\underline{i}} a_{\underline{i}, \underline{d}} \underline{X}^{e\underline{d}}$ avec $a_{\underline{i}, \underline{d}} \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_{qf}} \right)$ avec seulement un nombre fini de termes non multiples par π^k . L'hypothèse de divisibilité par π affirme que

$$\forall \underline{j} \in \mathbb{Z}^\Delta, \pi \text{ divise } \sum_{\underline{i} + \underline{d} = \underline{j}} a_{\underline{i}, \underline{d}}.$$

On se donne un ordre lexicographique sur Δ qui détermine un ordre total sur \mathbb{Z}^Δ . Pour chaque couple $(\underline{i}, \underline{d})$ tel que $a_{\underline{i}, \underline{d}}$ est non nul, on peut choisir $\underline{j}(\underline{i}, \underline{d}) \in \mathfrak{D}_z$ minimal tel que $\underline{X}^{e\underline{j}} | \underline{X}^{e(\underline{i} + \underline{d})}$. Alors

$$z = \sum_{\underline{j} \in \mathfrak{D}_z} \underline{X}^{e\underline{j}} \left(\sum_{(\underline{i}, \underline{d}) \text{ tel que } \underline{j}(\underline{i}, \underline{d}) = \underline{j}} a_{\underline{i}, \underline{d}} \underline{X}^{e\underline{i} + e(\underline{d} - \underline{j})} \right).$$

En séparant selon $\underline{i} + \underline{d}$ on se comprend que chaque somme sur $(\underline{i}, \underline{j})$ est divisible par π . Nous avons donc prouvé que

$$\left(\sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ \right) \cap \pi \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ = \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \pi \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+.$$

On reprend notre hérédité en choisissant une extension finie $F|E$ pour laquelle on peut écrire $x = \pi^{n+1}z + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} z_{\underline{d}}$ avec $z_{\underline{d}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ presque tous nuls. Nous obtenons que

$$\pi \text{ divise } \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} (z_{\underline{d}} - y_{\underline{d}})$$

donc que cette somme appartient à $\pi \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$. Ainsi

$$\left(x - \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} y_{\underline{d}} \right) \in \pi \left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_\Delta^{\text{nr}}} + \sum_{\underline{d} \in \mathfrak{D}} \underline{X}^{\underline{d}} \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_\Delta^{\text{nr}}}^+ \right)$$

et l'hypothèse de récurrence conclut.

3. Raisonnement similaire.

□

Théorème 6.1.6. *Les foncteurs*

$$\mathbb{D}_{\Delta, \text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \Delta} \rightarrow \text{Mod} \left(\Phi_{\Delta, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}} \right)$$

$$V \mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \Delta}}$$

$$\mathbb{V}_{\Delta, \text{LT}} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K, \Delta}, \mathcal{O}_K)$$

$$D \mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}^{\text{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}} D \right)^{\Phi_{\Delta, q}}$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et l'une des trois topologies adique faible, colimite et faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}$, sont correctement définies, lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \Delta}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. La démonstration est similaire au Théorème 5.4.22 et utilise même des résultats démontrés audit théorème. Ici, nous aurons crucialement besoin de la variante des \mathcal{S} -modules topologiques sur R à r -dévissage projectif introduits dans la section 2.4. Nous appelons topologie draconique l'une des trois topologies adique faible, colimite et faible que nous choisissons pour le reste de la preuve. Nous décomposons alors le foncteur $\mathbb{D}_{\Delta, \text{LT}}$ comme d'habitude comme $\text{Inv} \circ \text{Ex} \circ \text{triv}$ mais nous voudrions à présent qu'il se corestreigne comme la composée suivante :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{K, \Delta}, \mathcal{O}_K) \\ & \quad \downarrow \text{triv} \\ & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta}, \mathcal{O}_K) \\ & \quad \downarrow \text{Ex} \\ & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta}, \mathcal{H}_{K, \text{LT}, \Delta}, \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}^{\text{nr}}}) \\ & \quad \downarrow \text{Inv} \\ & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}) \end{aligned}$$

où les topologies sont : la topologie π -adique sur la première ligne, la topologie draconique pour le premier monoïde et π -adique pour le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \Delta}$ en bas à droite, la topologie draconique en bas à gauche. De même, le foncteur $\mathbb{V}_{\Delta, \text{LT}}$ se décompose comme $\text{Inv} \circ \text{Ex} \circ \text{triv}$ et nous voudrions qu'il corestreigne comme la composée suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \\
& \quad \downarrow \text{triv} \\
& \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \\
& \quad \downarrow \text{Ex} \\
& \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^{\text{nr}}}) \\
& \quad \downarrow \text{Inv} \\
& \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_K)
\end{aligned}$$

où les topologies sont la topologie draconique pour les premiers monoïdes et π -adiques pour les seconds. On remarquera que, puisque la topologie sur $\Phi_{\Delta,q}$ est discrète et que son action sur chaque anneau est continue pour les deux topologies, nous avons bien coïncidence des deux sous-catégories

$$\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \text{ et } \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}).$$

Pour justifier la définition correcte, nous devons vérifier une liste de conditions pour utiliser les mêmes résultats du Chapitre 2 qu'au Théorème 5.4.22.

Conditions 1, 2, 5, 6, 7 et 8 : ce sont les mêmes conditions puisque les anneaux sous-jacents sont ceux du Théorème 5.4.22.

Condition 3 : les inclusions $\mathcal{O}_K \subset \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^{\text{nr}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \subset \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^{\text{nr}}}$ sont continues pour les topologies π -adiques et faibles. Elles sont $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ -équivariantes. C'est le cas par construction.

Condition 4 : les anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^{\Phi_{\Delta,q}}$ coïncident avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ et $\Phi_{\Delta,q}$ pour les topologies π -adique et draconique. Seule la coïncidence des topologies draconiques n'est pas contenue ad verbatim dans la condition analogue du Théorème 5.4.22. En considérant la description de leur voisinages de zéro (ou de celle donnée pour la topologie colimite en démontrant la Définition/Proposition 6.1.2), on réalise que nous avons même démontré une version forte de l'identification de ces topologies au Lemme 6.1.5.

Condition 9 : identique à la condition 9 du Théorème 5.4.22. Nous soulignons cependant que les énoncés cohomologiques requis par le Corollaire 2.5.1 ne concernent que la topologie discrète.

Condition 10 : les morphismes de comparaison sont exactement ceux des objets de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$, sauf qu'ils ont le bon goût d'être aussi $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ -équivariants. La condition se déduit donc immédiatement de celle au Théorème 5.4.22. \square

Nous voyons que la démonstration du théorème à partir de l'équivalence pour les corps de caractéristique p revenait à construire les bons anneaux, choisir les bonnes topologies et utiliser le formalisme général.

Proposition 6.1.7. *Les sous-catégories pleines de $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ données par $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ pour la topologie adique faible, pour la topologie colimite et pour la topologie adique coïncident toutes les trois avec $\text{Mod}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$.*

Démonstration. On démontre comme au Théorème 3.5.4 que les représentations de $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ sur des \mathcal{O}_K -modules de type fini qui sont continues pour la topologie π -adique restreinte à $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$ sont continues.

À partir de là, on démontre comme au Corollaire 3.5.5 que la catégories des représentations dont la restriction à $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$ est continue est équivalente à $\text{Mod}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$. Avec l'équivalence du Théorème 6.1.6 et l'automatique continuité tout juste mentionnée côté galoisien, on en déduit que cette dernière catégorie est équivalente à $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ pour les trois topologies.

Grâce à sa description explicite, à [Sta18, Tag 0306] et à [Sta18, Tag 00FN], l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ est noethérien, ce qui rend automatique qu'un module de type fini ait une π^∞ -torsion bornée.

Reste à démontrer que la projectivité du π -dévissage est automatique (le rang constant est automatique puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ est intègre). Ceci se fait³ similairement à [Zá18b, Prop. 2.2] en utilisant [GK18, Th. 1]. \square

Remarque 6.1.8. Pour obtenir une version Lubin-Tate multivariable de l'équivalence, il était crucial de pouvoir considérer le produit tensoriel sur \mathcal{O}_K et d'obtenir un anneau dont les invariants par $\Phi_{\Delta,q}$ valent \mathcal{O}_K . Avec l'anneau non intègre de [CKZ21], il n'est pas clair de savoir comment relever en caractéristique mixte nos anneaux, et même si nous y parvenions par exemple pour une extension non ramifiée, les invariants par $\Phi_{\Delta,p}$ seraient \mathbb{Z}_p et non \mathcal{O}_K . Le problème est encore plus visible modulo p : il faut trouver un sous-monoïde de $M < \Phi_{\Delta,p}$ par lequel quotienter, qui fasse encore marcher le formalisme d'une équivalence de Fontaine et tel que $E_{\Delta,p}^M = \mathbb{F}_q$. Mais de quel \mathbb{F}_q est-il question ?

Remarque 6.1.9. On pourrait demander une équivalence multivariable Lubin-Tate pour un produit de groupes de Galois de corps locaux p -adiques non a priori identiques. Je ne sais pas actuellement quelle forme devrait prendre une telle équivalence.

³Ceci est rédigé dans [Pup21, Lemme 2.11].

Supposons donnés des corps locaux p -adiques K_α et disons pour illustrer les difficultés⁴ que leurs corps résiduels sont de même cardinal q . Soit L l'extension composée des K_α . On choisit toujours une uniformisante π_α de chaque K_α et un polynôme de Lubin-Tate f_α associé. Le problème principal est que $f_{L|K}$ peut être non trivial. Pour des coefficients de caractéristique p , on sait faire : en étendant les scalaires de l'équivalence ci-dessus à $\mathbb{F}_{q^{f_{L|K}}}$, on obtient une équivalence

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_{q^{f_{L|K}}}} \prod \mathcal{G}_{K_\alpha} \leftrightarrow \mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q} \times \prod \mathcal{O}_{K_\alpha}^\times, \mathbb{F}_{q^{f_{L|K}}} \llbracket X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rrbracket [X_\Delta^{-1}] \right)$$

avec $(x_\alpha)(X_\beta) = \overline{[x_\beta]_{\mathrm{LT}, f_\beta}(X_\beta)}$. En revanche, pour relever cela en caractéristique mixte, on voudrait une équivalence où l'anneau des coefficients serait

$$(\mathcal{O}_L \llbracket X_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rrbracket [X_\Delta^{-1}])^{\wedge p}$$

avec une action \mathcal{O}_L -linéaire de $(\Phi_{\Delta,q} \times \prod \mathcal{O}_{K_\alpha}^\times)$ vérifiant entre autres que $(x_\alpha)(X_\beta) = [x_\beta]_{\mathrm{LT}, f_\beta}(X_\beta)$. L'anneau résiduel n'est pas celui que l'on sait traiter en caractéristique p . En effet, si on regarde l'orbite sous $\mathbb{Z}[\prod \mathcal{O}_{K_\alpha}^\times]$ de X_Δ les réductions peuvent avoir un coefficient en X_Δ qui n'est pas dans \mathbb{F}_q .

6.2 Quelques calculs explicites

La première vérification à faire sur ce calcul consiste à regarder si nous arrivons à comprendre les box products. On garde les notations de la section précédente.

Proposition 6.2.1. *Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ une famille d'objets de $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K$, que nous voyons comme représentations du facteur labellisé α de $\mathcal{G}_{K,\Delta}$. Il existe un isomorphisme dans $\mathcal{M}\mathrm{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\mathrm{LT},\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$*

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} \left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\alpha}}} \mathbb{D}_{\alpha,\mathrm{LT}}(V_\alpha) \right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\Delta,\mathrm{LT}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_K} V_\alpha \right)$$

naturel en les V_α .

Démonstration. Le morphisme naturel n'est pas délicat à définir. Il faut en revanche démontrer qu'il s'agit d'un isomorphisme. On commence par démontrer que la source et le but sont de présentation finie à π -dévissage projectif. Pour le but, cela découle du Théorème 6.1.6. Pour la source, c'est le cas de chaque terme $\mathbb{D}_{\alpha,\mathrm{LT}}(V_\alpha)$

⁴Par exemple, si ce sont les conjugués d'un même corps K . C'est le même phénomène qui fait que nous nous plaçons par le cas d'une extension galoisienne pour l'équivalence glectique semi-linéaire de la sous-section 6.4.3.

puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\alpha}}$ est de valuation discrète, puis de son extension des scalaires avec la Proposition 2.5.24. Par stabilité des modules à π -dévissage projectif par produit tensoriel, on conclut. Ainsi, le Théorème 2.4.1 affirme qu'ils sont π -adiquement séparés et complets et il suffit de prouver que leurs dévissages sont isomorphes.

Puisque $\mathbb{D}_{\Delta,LT}$ est exact il commute à la formation du π -dévissage. Pour démontrer que la source aussi, on singularise $\beta \in \Delta$. Pour tout entier n , on a

$$\pi^n \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta} V_\alpha \right) = (\pi^n V_\beta) \bigotimes_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}} V_\alpha$$

d'où en quotientant

$$\pi^n (\bigotimes_{\alpha \in \Delta} V_\alpha) / \pi^{n+1} (\bigotimes_{\alpha \in \Delta} V_\alpha) = \pi^n V_\beta / \pi^{n+1} V_\beta \bigotimes_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}} V_\alpha / \pi V_\alpha.$$

En appliquant le même raisonnement à la source et la commutation des $\mathbb{D}_{\alpha,LT}$ à la formation de π -dévissage, on se rend compte que le n -ième terme de son π -dévissage est naturellement isomorphe à

$$\left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\beta}} \mathbb{D}_{\beta,LT} \left(\pi^n V_\beta / \pi^{n+1} V_\beta \right) \right) \otimes_{E_{K,\Delta}} \bigotimes_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}} \left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\alpha}} \mathbb{D}_{\alpha,LT} (V_\alpha / \pi V_\alpha) \right).$$

La source commute donc à la formation de π -dévissage. Il suffit de vérifier l'isomorphisme pour des représentations modulo π .

Dans ce cas, on démontre grâce au Lemme 5.4.6 des isomorphismes naturels dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, E_{K,\Delta}^{\text{sep}} \right)$:

$$\begin{aligned} E_{K,\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_q} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_K} V_\alpha \right) &\cong \left(E_\alpha^{\text{sep}} \otimes_{F_\alpha} \cdots \left(E_\beta^{\text{sep}} \otimes_{F_\beta} E_{K,\Delta} \right) \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_K} V_\alpha \right) \\ &\cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, E_{K,\Delta}} \left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\alpha}} \left(E_{K,\alpha}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_q} V_\alpha \right) \right) \\ &\cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, E_{K,\Delta}} \left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\alpha}} \left(E_{K,\alpha}^{\text{sep}} \otimes_{E_{K,\alpha}} \mathbb{D}_{\alpha,LT}(V_\alpha) \right) \right) \\ &\cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, E_{K,\Delta}} \left(E_{K,\alpha}^{\text{sep}} \otimes_{E_{K,\alpha}} \left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\alpha}} \mathbb{D}_{\alpha,LT}(V_\alpha) \right) \right) \\ &\cong E_{K,\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{K,\Delta}} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, E_{K,\Delta}} \left(E_{K,\Delta} \otimes_{E_{K,\alpha}} \mathbb{D}_{\alpha,LT}(V_\alpha) \right) \end{aligned}$$

On a utilisé les isomorphismes de comparaison pour les $\mathbb{D}_{\alpha,LT}(V_\alpha)$ et les identités sur les produits tensoriels. Le gros produit tensoriel est invariant par $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$. Chaque $\mathbb{D}_{\alpha,LT}(V_\alpha)$ est un $E_{K,\alpha}$ -espace vectoriel, ce qui prouve que le gros produit tensoriel est libre sur $E_{K,\Delta}$. Le Lemme 2.3.10 peut s'utiliser grâce au premier point du Corollaire 5.4.7 et conclut pour l'identification des $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$ -invariants. \square

Toute représentation semi-simple sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ peut s'obtenir comme somme directe de box products de représentations irréductibles. L'exemple typique de représentation non semi-simple est V_η donnée par $\rho_{V_\eta} := \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\eta : \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_q$ est un caractère qui n'est pas triviale sur $\mathcal{G}_{K,\beta}$ et $\mathcal{G}_{K,\delta}$.

Proposition 6.2.2. *La représentation ci-dessus n'est pas isomorphe à une somme directe de box products. En appelant η_α la restriction à $\mathcal{G}_{K,\alpha}$, c'est en revanche une sous-représentation de $\boxtimes_{\alpha \in \Delta} \begin{pmatrix} 1 & \eta_\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*

Démonstration. Puisque sa seule sous-représentation est la triviale, si V_η est somme directe de box products c'est un box product, disons des V_α . Soit ι un isomorphisme avec $\boxtimes V_\alpha$. En considérant la restriction à $\mathcal{G}_{K,\beta}$, on obtient un isomorphisme entre $\begin{pmatrix} 1 & \eta_\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V_\beta^{\oplus d}$. L'image de la droite fixe a une coordonnée non nulle. La projection sur cette copie de V_β a pour noyau une sous-représentation de $\begin{pmatrix} 1 & \eta_\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'intersecte pas la droite fixe : la projection est un isomorphisme. Ainsi $d = 1$. Tous les V_α pour $\alpha \neq \beta$ sont des droites. En regardant l'image par ι de la droite fixe, on voit que toutes ces V_α sont la représentation triviale. Comme la restriction à $\mathcal{G}_{K,\delta}$ est non triviale, c'est impossible.

On peut démontrer que si V_η se plonge dans une somme directe de box products, il se plonge dans $\boxtimes \begin{pmatrix} 1 & \eta_\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nommons pour chaque α la base $\{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{f}_\alpha\}$ dans laquelle la matrice s'écrit. Alors, le vecteur $\mathbf{e} = \otimes \mathbf{e}_\alpha$ est fixe et le vecteur $\mathbf{f} = \sum_\alpha \mathbf{f}_\alpha \otimes_{\beta \neq \alpha} \mathbf{e}_\alpha$ vérifie que

$$g \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} + \sum_\alpha \chi_\alpha(g_\alpha) \mathbf{e} = \mathbf{f} + \chi(g) \mathbf{e}.$$

□

Dans ce genre de cas, nous pouvons encore calculer ce que produit $\mathbb{D}_{\Delta, \text{LT}}$.

Proposition 6.2.3. *Soit $\eta : \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightarrow \mathcal{O}_K$ un caractère continu. Soit η_α la restriction de η à la α -ième copie de \mathcal{G}_K , de telle sorte que $\eta = \prod \eta_\alpha$. Alors, $\mathbb{D}_{\Delta, \text{LT}}(V_\eta)$ est isomorphe au module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \mathbf{e}_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \mathbf{e}_2$ où la matrice de $\varphi_{\alpha,q}$ est donnée dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ par $\begin{pmatrix} 1 & \eta_\alpha(\text{Art}(\pi_\alpha)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et où la matrice de l'action de $(x_\alpha) \in \Gamma_{K, \text{LT}, \Delta}$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & \eta(\text{Art}(x_\alpha)_\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. On pourrait imiter la preuve du Lemme 3.4.2 avec un produit tensoriel de $\widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}$ mais on se contente d'utiliser le calcul de la Proposition 3.4.5. Pour chaque α , on choisit donc grâce à la preuve de Proposition 3.4.5 un élément $z_\alpha \in \widehat{\mathcal{O}_{K^{\text{nr}}}}$ tel que $\varphi_q(z_\alpha) - z_\alpha = \eta_\alpha(\text{Art}(\pi_\alpha^{-1}))$. Soit $\{b_1, b_2\}$ une base dans laquelle la matrice de ρ_{V_η} s'écrit comme annoncée. Le vecteur $1 \otimes b_1$ de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V_\eta$ est fixe sous toute action. De plus, en posant $z = \oplus_\alpha 1 \otimes 1 \otimes z_\alpha \otimes \dots \otimes 1$, on a que $\varphi_{\alpha,q}(z) + \eta_\alpha(\text{Art}(\pi_\alpha^{-1})) = z$, i.e. que $zb_1 + b_2$ est invariant par chaque

$\varphi_{\alpha,q} \otimes \eta_{\alpha}(\text{Art}(\pi_{\alpha}^{-1}))$. Puisque η se factorise par $\prod \mathcal{G}_{K^{\text{ab}}}$, ces conditions suffisent à ce que $\{b_1, zb_2 + b_1\}$ forme une base des invariants par $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\Delta}$. La condition d'invariance donne que $\varphi_{\alpha,q}$ agit comme $\text{Id}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}} \otimes \rho_{V_{\eta_{\alpha}}}(\text{Art}(\pi_{\alpha}))$ et l'appartenance des z_{α} à $\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{nr}}}}$ que $\Gamma_{K,\text{LT},\Delta}$ agit comme $\rho_{V_{\eta}} \circ \prod \text{Art}$. Cela fournit les formules prédites. \square

6.3 L'équivalence de Fontaine plectique

Dans [NS16] et [NS17], J. Nekovář et T. Scholl formulent différentes conjectures plectiques. Elles prédisent que, pour un corps de nombres F , les représentations obtenues dans la cohomologie de la donnée de Shimura associée à la restriction à \mathbb{Q}_p d'un groupe algébrique sur F , qui viennent naturellement avec une action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, devraient hériter en réalité d'une action d'un groupe plus gros $\mathcal{G}_{F,\text{plec}}$. Nous appelons ce dernier *groupe de Galois plectique*. Ce chapitre établit des équivalences de Fontaine pour le groupe de Galois plectique d'un corps local p -adique. Comme pour déduire l'équivalence multivariable Lubin-Tate de l'équivalence pour les corps de caractéristique p , il reste essentiellement à définir un anneau de comparaison correct et un monoïde adéquat agissant dessus dans chacun des cas.

6.3.1 Le groupe de Galois plectique

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}|K|\mathbb{Q}_p$ une extension finie.

Définition 6.3.1. Nous définissons le *groupe de Galois plectique*

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} := \text{Aut}_K \left(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \right).$$

Nous définissons une structure de groupe topologique en prenant pour base de voisinages de l'identité les intersections finies de stabilisateurs.

Nous notons $\mathcal{P} = \{\text{plongements } \tau : K \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$. C'est un ensemble de cardinal $[K : \mathbb{Q}_p]$, sur lequel $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit par post-composition. Pour tout plongement τ , nous notons K_{τ} son image. Enfin, pour chaque plongement τ , on choisit une extension $\tau_{\text{ext}} : \overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Il existe un isomorphisme d'anneaux canonique

$$K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\tau \in \mathcal{P}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \quad x \otimes y \mapsto (\tau(x)y)_{\tau \in \mathcal{P}}.$$

La structure de K -algèbre est donnée par τ sur la composante indexée par τ . Considérons le monomorphisme

$$\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad (g_{\tau}) \mapsto [(y_{\tau}) \mapsto (g_{\tau}(y_{\tau}))].$$

Le choix des τ_{ext} permet de tordre ce monomorphisme en

$$\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad (g_\tau) \mapsto [(y_\tau) \mapsto (\tau_{\text{ext}} g_\tau \tau_{\text{ext}}^{-1})(y_\tau)].$$

Ce choix détermine également un morphisme

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad \omega \mapsto [(y_\tau) \mapsto \tau_{\text{ext}}((\omega^{-1}(\tau))_{\text{ext}}^{-1}(y_{\omega^{-1}(\tau)}))].$$

Si la formule est absconse, nous pouvons la résumer en disant que la copie indexée par τ de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est envoyée sur la copie indexée $\omega(\tau)$, de la seule manière possible obtenue à partir des τ_{ext} et qui respecte les structures de K -algèbres.

Lemme 6.3.2. *L'image de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ est distinguée dans $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ et a pour complément l'image de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Cela exhibe le groupe topologique $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ comme produit en couronne*

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} \cong \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

où $\text{plec}(\omega)(g_\tau) = (g_{\omega^{-1}(\tau)})$.

Cette description est la plus concise en termes de notations. Elle repose en revanche drastiquement sur le choix des τ_{ext} et l'isomorphisme n'est donc pas canonique. L'image de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ est quant à elle canonique, de même que la projection sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$.

Agir sur le terme de droite de $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$ produit un plongement canonique de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}$. J. Nekovář et T. Scholl étendent naturellement l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\text{Ind}_{\mathcal{G}_K}^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(V)$, pour V une représentation de \mathcal{G}_K , en une action de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$. Nous expliquons brièvement comment.

Pour V une représentation de \mathcal{G}_K , on appelle V_τ la représentation de \mathcal{G}_{K_τ} obtenue en tordant par conjugaison par τ_{ext}^{-1} . L'application

$$\text{Ind}_{\mathcal{G}_K}^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(V) \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \mathcal{P}} V_\tau, \quad f \mapsto (f(\tau_{\text{ext}}))_\tau$$

est correctement définie et la projection sur le τ -ième terme est une application \mathcal{G}_{K_τ} -équivariante. Le but est muni d'une action de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ en agissant terme à terme et d'une action de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ par $\omega((v_\tau)_\tau) = (v_{\omega^{-1}(\tau)})_\tau$. Ces deux données (en tordant l'action de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ en une action de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$) fournissent une action de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ d'après le lemme précédent. De plus, $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est envoyé sur $((g\tau)_{\text{ext}}^{-1}g\tau_{\text{ext}})|_{K_\tau}, (\tau \mapsto g\tau)$ et on vérifie grâce à cette formule que l'on a bien étendu l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Exemple 6.3.3. Nous allons construire une famille de représentations qui englobent le cas des induites précédemment traité. Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de représentations de \mathcal{G}_K sur un corps F . On choisit également une partition $n_1 + \dots + n_k = \#\mathcal{P}$ et on

appelle $\text{Part}_{\underline{n}} = \{f : \mathcal{P} \rightarrow \llbracket 1, k \rrbracket \mid \#f^{-1}(i) = n_i\}$. La représentation $V_{\underline{n}}$ a alors pour espace sous-jacent

$$\bigoplus_{f \in \text{Part}_{\underline{n}}} \bigotimes_{\tau \in \mathcal{P}} V_{f(\tau)},$$

où l'on fait agir $\mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}$ facteur par facteur de chaque produit tensoriel et où $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ agit en envoyant le terme pour f sur le terme pour $f \circ \omega$ par $\bigotimes_{\tau} v_{\tau} \mapsto \bigotimes_{\tau} v_{\omega^{-1}(\tau)}$.

Dans le cas où $V_1 = V$, $V_2 = F$, $n_1 = 1$ et $n_2 = \#\mathcal{P} - 1$, on retombe sur une représentation isomorphe à $\text{Ind}_{\mathcal{G}_K}^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(V)$.

Dans le cas où $V_1 = V$ et $n_1 = \#\mathcal{P}$, on tombe sur une extension à $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ de l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur l'induite tensorielle $\bigotimes \text{Ind}_{\mathcal{G}_K}^{\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}}(V)$.

6.3.2 Preuve de l'équivalence plectique

Pour commencer, nous établissons une équivalence pour des représentations du groupe de Galois plectique. Comme pour l'équivalence multivariable, il suffit d'étendre les actions utilisées dans le Théorème 5.4.22. Dans cette section, toutes les constructions de monoïdes sont automatiquement munies de topologies. Pour un petit bestiaire de constructions et de lemmes sur les monoïdes topologiques, se référer à l'Annexe A.

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p} | K | \mathbb{Q}_p$ une extension finie⁵. Nous nous fixons une uniformisante π de K , une loi de Lubin-Tate f associée à π et un système de Lubin-Tate π^b .

Nous commençons dans le cadre de la section 6.1 avec $\Delta = \mathcal{P}$, le choix de (π, f, π^b) pour chaque plongement, le choix d'un $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau}^{\text{nr}}}}$ pour chaque plongement et d'une extension aux clôtures séparables de l'isomorphisme

$$j_{\tau} : \mathbb{F}_q((X_{\tau}^{1/q^{\infty}})) \rightarrow \widehat{K_{\text{LT}, f}}^b, \quad X_{\tau} \mapsto \pi^b.$$

Ces données déterminent comme à la Proposition 3.2.13 une structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau}^{\text{nr}}}}$ et un plongement équivariant i_{τ} dans $W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^b)$ dont l'image ne dépend pas de τ . Pour tout couple (τ_1, τ_2) , nous notons $i_{\tau_2, \tau_1} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau_1}^{\text{nr}}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau_2}^{\text{nr}}}}$ l'isomorphisme de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques donné par $i_{\tau_2}^{-1} i_{\tau_1}$. Pour toute extension galoisienne $E^{\text{sep}} | F | E$, le morphisme i_{τ_2, τ_1} envoie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau_1}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau_2}}$. De plus, ces isomorphismes sont \mathcal{O}_K -linéaires et vérifient

$$\forall \tau_1, \tau_2, \tau_3, \quad i_{\tau_3, \tau_1} = i_{\tau_3, \tau_2} i_{\tau_2, \tau_1}. \quad (*6)$$

⁵Nous fixons ainsi un plongement de K dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Il sera parfois utile pour intuiter les formules correctes de se dire que K vit à part dans une autre clôture algébrique, contrairement aux K_{τ} qui vivent dans \mathbb{Q}_p .

Définition 6.3.4. Soit $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, on définit sur $\bigotimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\tau}^+$ l'endomorphisme

$$\omega \cdot_{\text{plec}} (\otimes y_\tau) = \otimes i_{\tau, \omega^{-1}(\tau)}(y_{\omega^{-1}(\tau)}).$$

Puisque chaque i_{τ_2, τ_1} est continu pour la topologie faible, cet endomorphisme est continu pour la topologie (π, \underline{X}) -adique, se complète, passe à la colimite et se complète π -adiquement en un endomorphisme $\omega \cdot_{\text{plec}}$ - sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$.

Définition 6.3.5. Nous appelons $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ le monoïde topologique défini par

$$\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}} := (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$$

où le produit semi-direct est donné par

$$\forall \omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}, \text{plec}(\omega) \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_\tau}, g_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\omega^{-1}(\tau)}}, g_{\omega^{-1}(\tau)} \right)$$

avec la topologie usuelle sur $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ et la topologie discrète sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$.

Définition/Proposition 6.3.6. La définition précédente fournit une action continue pour les topologies adique faible, colimite et faible de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Combinée à l'action de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$, nous obtenons une action de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ continue pour la topologie chacune de ces trois topologies.

Définissons $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \text{plec}}^{\text{nr}}}}$ l'un des $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ -anneaux topologiques obtenus.

Démonstration. D'après le deuxième point des Propositions A.1.5 et A.1.10, il suffit de vérifier des relations sur les actions. C'est le cas sur les produits tensoriels en utilisant à la fois la relation (*6) et le fait que les i_{τ_2, τ_1} sont des morphismes $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -équivariants. Les relations sont conservées en complétant et passant à la limite. \square

Proposition 6.3.7. Le sous-monoïde $\Phi_{\mathcal{P}, q} < \text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ est distingué et le quotient $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}} / \Phi_{\mathcal{P}, q}$ s'identifie à $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ comme monoïde topologique, canoniquement au vu du choix des τ_{ext} . De plus, l'inclusion

$$\mathcal{O}_K \subseteq \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K, \text{plec}}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\mathcal{P}, q}}$$

est une égalité.

Démonstration. Pour le caractère distingué, remarquer que les endomorphismes de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ définissant le produit semi-direct avec $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ induisent des endomorphismes surjectifs de $\Phi_{\mathcal{P}, q}$. L'identification de $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ au sous-monoïde ouvert et

distingué $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$, qui est un complément de $\Phi_{\mathcal{P},q}$ conclut pour l'identification du quotient. Quant aux invariants, il s'agit exactement de la condition 4 dans la preuve du Théorème 5.4.22. \square

Nous définissons de manière ad hoc l'anneau plectique puis décrivons un peu mieux nos constructions.

Définition 6.3.8. Le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}} < \text{T}\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ est distingué. Nous définissons le monoïde topologique

$$\text{T}_{K,\text{plec}} := \text{T}\mathcal{G}_{K,\text{plec}} / \mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}.$$

Nous définissons aussi le $\text{T}_{K,\text{plec}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}} := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}}.$$

Proposition 6.3.9. Le monoïde topologique $\text{T}_{K,\text{plec}}$ s'identifie canoniquement à

$$(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$$

où

$$\forall \omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}, \text{plec}(\omega) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\tau}}, x_{\tau} \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\omega^{-1}(\tau)}}, x_{\omega^{-1}(\tau)} \right).$$

Le $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$ construit à la section 6.1. En reprenant sa description à la Remarque 6.1.4, l'action de $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est le seul morphisme de \mathcal{O}_K -algèbre topologique tel que $\forall \tau \in \mathcal{P}, \omega \cdot X_{\tau} = X_{\omega(\tau)}$.

Démonstration. On utilise le troisième point de la Proposition A.1.10 pour la description du quotient et la condition 4 dans la démonstration du Théorème 5.4.22 pour l'identification de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$. Pour écrire l'action, considérons que par définition chaque X_{τ} est envoyé par i_{τ} sur $\{\pi^b\}_{\text{LT}} \in \tilde{A}_K$. Ainsi, $i_{\tau_2, \tau_1}(X_{\tau_1}) = X_{\tau_2}$ et l'écriture (*6) conclut. \square

Une fois les anneaux construits correctement, nous obtenons gratuitement l'équivalence de Fontaine plectique pour l'une des trois topologies. À nouveau, nous pourrions démontrer une automatique continuité.

Théorème 6.3.10. Les foncteurs

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\text{plec},\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}} &\rightarrow \text{Mod} \left(\text{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}} \right) \\ V &\mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}_{\text{plec,LT}} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_K)$$

$$D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}^{\text{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q}}$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et l'une des trois topologies adique faible, colimite et faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$, sont lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. La stratégie est la même qu'au Théorème 6.1.6 et les conditions à vérifier découlent des constructions ci-dessus et des conditions vérifiées pour le Théorème 6.1.6. \square

6.4 Les équivalences de Fontaine glectique

6.4.1 Variables cachées dans \tilde{A}_K

Dans le chapitre, on utilise le groupe de Weil W_L d'un corps local L . Il s'agit du sous-groupe de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ formé des éléments de degré entier, i.e. qui agissent sur L^{nr} comme une puissance entière du Frobenius relatif. Il sera muni de la topologie d'union disjointe $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Frob}^{\circ n} \cdot I_L$, où le sous-groupe d'inertie I_L est muni de la topologie profinie. Nous appelons *topologie localement profinie* cette topologie. Ainsi, le morphisme vers \mathbb{Z} donné par le degré est continu. On note W_L^+ le sous-monoïde formé des éléments de degré positif.

Pour $K|\mathbb{Q}_p$ galoisienne, une philosophie adjacente à la philosophie plectique se détache en regardant un peu mieux \tilde{A}_K . Regardons plutôt le sous-anneau $\tilde{A}_K^+ := W_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^b})$. Nous écrivons $\tilde{A}_K^+ = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_q} W(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p^b})$ et considérons l'action \mathcal{O}_K -semi-linéaire de $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ par $\sigma \otimes \varphi^{\deg(\sigma)}$. On choisit un triplet (π, f, π^b) comme pour la construction du plongement de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ dans \tilde{A}_K à la Proposition 3.2.13. L'image de ce plongement est stable par l'action de W_K^+ mais pas nécessairement par celle de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. En choisissant pour chaque plongement τ une extension $\tau_{\text{ext}} \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ de degré minimal, nous pouvons considérer le morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}^+ \rightarrow \tilde{A}_K^+, \quad X_{\tau} \mapsto \tau_{\text{ext}} \cdot \{\pi^b\}_{\text{LT}}.$$

Son image est la plus petite sous- \mathcal{O}_K -algèbre fermée de \tilde{A}_K^+ contenant $\{\pi^b\}_{\text{LT}}$ et stable par $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Nous commençons par démontrer que cette application est injective.

Nous allons utiliser une stratégie de [Ber13] avec les constructions plus adaptées au cas Lubin-Tate de [Ber16]. Pour rendre la référence plus simple, cette section

reprend les notations de *loc. cit.* : on appelle $u = \{\pi^b\}_{\text{LT}}$ et u_τ sont image par τ_{ext} . Pour $a \in \mathcal{O}_K^\times$, appliquer τ aux coefficients de $[a]_{\text{LT},f}$ donne $[\tau(a)]_{\text{LT},f}$. Ainsi, nous avons $\varphi_q(u_\tau) = \tau(f)(u_\tau)$ et l'action de $g \in \mathcal{G}_K$ vérifie $g(u_\tau) = [\chi_{K,\text{LT},\tau(\pi)}(g)]_{\text{LT},\tau(f)}(u_\tau)$.

Pour tout $r > 0$, on définit une norme $|\cdot|_r$ sur $\tilde{B}_K^+ := W_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^b)[1/p]$ par

$$\left| \sum_{k \gg -\infty} \pi^k [x_k] \right|_r = \max_{k \gg -\infty} |\pi^k|_p |x_k|_b^{1/r}$$

où $|\cdot|_b$ est la norme donnée sur \mathbb{C}_p^b par $|x|_b = |x^{(0)}|_p$. On définit successivement pour $[r, s] \subset]0, +\infty[$ la norme $|\cdot|_{[r,s]} = \inf_{t \in [r,s]} |\cdot|_t$. On démontre que pour tout $r \geq e_K|\mathbb{Q}_p|$, on a $|u/[\pi^b]|_r = 1$. Ainsi, on définit pour tout $r \geq e_K|\mathbb{Q}_p|$ le Fréchet $\tilde{B}_K^{\dagger,r}$ obtenu en complétant l'un des anneaux $\tilde{B}_K^+[1/u]$ ou $\tilde{B}_K^+[1/[\pi^b]]$ par rapport à la famille $|\cdot|_{[r,s]}$ pour $s > r$. On définit enfin $\tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger$ comme la colimite de ces Fréchets. Le quotient de deux uniformisantes de K est un élément de $|\cdot|_r$ -norme 1. Ainsi, l'action de \mathcal{G}_K sur \tilde{B}_K^+ se fait par isométries et on peut l'étendre en une action de $\tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger$. Puisque u_τ est fixe par $\mathcal{G}_{K,\text{LT},\tau(\pi)}$ et que le quotient $\Gamma_{K,\text{LT}}$ agit par les séries de Lubin-Tate $[a]_{\text{LT},\tau(f)}$, nous avons que u_τ est τ -analytique.

Sur les vecteurs pseudo-analytiques de $\tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger$, on définit une dérivation ∇_τ comme dans [Ber16, p. 3574]. D'après [Ber16, p. 3582], elle vérifie que $\nabla_\tau(u_{\tau'}) = 0$ si $\tau' \neq \tau$ et que $\nabla_\tau(u_\tau) = \log_{\text{LT},f}(u_\tau)v_\tau$ où v_τ est de norme 1 dans $(\tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger)^{\text{pa}}$. En considérant $\partial_\tau = \log_{\text{LT},\tau(f)}(u_\tau)^{-1}v_\tau^{-1}\nabla_\tau$, on obtient donc $\partial_\tau(u_{\tau'}) = \mathbb{1}_{\tau'=\tau}$. Les ∂_τ commutent entre elles. Puisque les éléments u_τ sont topologiquement nilpotents, que les éléments de \mathcal{O}_K sont bornés et que $\tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger$ est complet, il est possible de considérer la composée K -linéaire

$$\mathcal{E}_p^+ := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}^+[\pi^{-1}] \rightarrow \tilde{B}_K^+ \subset \tilde{B}_{K,\text{rig}}^\dagger, \quad X_\tau \mapsto u_\tau$$

dont la restriction à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}^+$ se factorise par \tilde{A}_K^+ . L'image de cette composée est contenue dans les vecteurs pseudo-analytiques et elle est compatibles aux dérivations $\partial/\partial X_\tau$ à la source et ∂_τ au but par construction.

Lemme 6.4.1. *Les seuls idéaux de \mathcal{E}_p^+ stables par tous les $\partial/\partial X_\tau$ sont les deux idéaux triviaux.*

Démonstration. Nous notons \preceq l'ordre partiel sur \mathbb{N}^G tel que $\underline{k} \preceq \underline{k}'$ si et seulement si $\forall \tau \in G, k_\tau \leq k'_\tau$. Soit I un idéal non nul et $f = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^G} x_{\underline{k}} X^{\underline{k}}$ appartenant à $I \setminus \{0\}$. Comme les $|x_{\underline{k}}|_p$ sont bornées, choisissons \underline{k}_0 tel que $x_{\underline{k}_0} \neq 0$ et $|x_{\underline{k}_0}|_p$ est maximale. Cela implique que

$$\forall \underline{k}_0 \prec \underline{k}, \quad \frac{x_{\underline{k}}}{x_{\underline{k}_0}} \prod_{\tau} \binom{k_\tau}{k_{0,\tau}} \in \mathcal{O}_K.$$

Pour tout monôme $x_{\underline{k}} \underline{X}^{\underline{k}} f$, lui appliquer $\partial/\partial \underline{X}^{\underline{k}_0}$ l'annule si $\underline{k} \not\geq \underline{k}_0$, l'envoie sur $x_{\underline{k}} \prod_{\tau} k_{\tau}! / (k_{\tau} - k_{0,\tau})! \underline{X}^{\underline{k} - \underline{k}_0}$ sinon. Ainsi,

$$\frac{1}{x_{\underline{k}_0} \prod_{\tau} k_{0,\tau}!} \frac{\partial}{\partial \underline{X}^{\underline{k}_0}} f \in 1 + (\underline{X}) \mathcal{O}_{\mathcal{P}}^+ \subset (\mathcal{E}_{\mathcal{P}}^+)^{\times}.$$

□

Corollaire 6.4.2. *Le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}^+ \rightarrow \tilde{A}_K^+$ est injectif.*

Démonstration. On considère la composée introduite $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}^+ \rightarrow (\tilde{B}_{K,\text{rig}}^+)^{\text{pa}}$ qui commute avec les dérivations. Son noyau est donc un idéal stable par chaque $\partial/\partial X_{\tau}$. Puisque c'est un morphisme de K -algèbres, ce noyau est nul. □

Cette injectivité s'interprète comme l'apparition de $|\mathcal{P}|$ variables cachées. Cela suggère également que nous devrions voir apparaître sur notre anneau multivariable $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}$ une action additionnelle de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et peut-être une équivalence de Fontaine reliant les (φ, Γ) -modules sur cet anneau à une certaine catégorie de représentations. La suite de cette section répond à ces attentes.

Remarque 6.4.3. Il n'est pas possible d'étendre à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}$ le morphisme vers $\tilde{B}_{K,\text{rig}}^+$.

L'apparition des variables additionnelles est un phénomène du monde impair. En effet, tous les u_{τ} vivent dans $(\tilde{A}_K^+)^{\mathcal{G}_{K^{\text{ab}}}}$ puisque l'action de $\mathcal{G}_{K_{\text{LT},\tau(\pi)}}$ agit trivialement sur u_{τ} . Ces invariants sont

$$W_{\mathcal{O}_K} \left(\mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{ab}}}} \right)$$

où

$$\overline{\mathbb{F}_q} \llbracket X^{1/p^\infty} \rrbracket \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{K^{\text{ab}}}}, \quad X \mapsto \pi^b$$

est un isomorphisme. Les éléments u_{τ} ont donc des "expressions perfectoides" les uns en fonction des autres.

6.4.2 Le groupe de Galois glectique

Définition 6.4.4. Nous appelons *groupe de Galois glectique*, et notons $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$, le sous-groupe de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ engendré par $\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}}$ et par l'image de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Appelons K_{gal} l'extension composée des K_{τ} . C'est une extension galoisienne de \mathbb{Q}_p et le noyau de l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur \mathcal{P} est exactement $\mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$. Nous en déduisons un monomorphisme de groupes $\text{Perm} : \text{Gal}(K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Dans tout le chapitre 6.3, on notera aussi f_{gal} le degré d'inertie de $K_{\text{gal}}|K$.

Proposition 6.4.5. *La projection de $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ correspond l'image de Perm . Le groupe $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec} \circ \text{Perm}} \text{Gal}(K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p)$, canoniquement au choix des τ_{ext} près.*

Avec les notations de la Définition A.1.11, le groupe $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est canoniquement isomorphe à

$$(\prod_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_{\tau}} \rtimes_{\text{glec}} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}) / \sim \mathcal{G}_{K_{\text{gal}}} \sim$$

où $\text{glec}(\sigma)(g_{\tau}) = (\sigma g_{\sigma^{-1}\tau} \sigma^{-1})$ et où $\mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$ est plongé diagonalement dans $\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}}$.

Démonstration. Puisque l'image de $\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}}$ est distinguée dans $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$, les sous-groupes contenant $\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}}$ correspondent aux sous-groupes du quotient $\mathcal{G}_{K,\text{plec}} / \prod \mathcal{G}_{K_{\tau}} \cong \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\tau \in \mathcal{P}$. Pour comprendre son action sur $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$, on considère une expression $\sum_i x_i \otimes y_i$ qui appartient au facteur τ dans l'écriture $\oplus_{\tau} \overline{\mathbb{Q}_p}$. Cela signifie que

$$\forall \tau' \neq \tau, \sum_i \tau'(x_i) y_i = 0.$$

Alors $\sigma(\sum x_i \otimes y_i) = \sum x_i \otimes \sigma(y_i)$ vérifie

$$\forall \tau' \neq \sigma\tau, \sum \tau'(x_i) \sigma(y_i) = \sigma(\sum (\sigma^{-1}\tau')(x_i) y_i) = 0.$$

Donc l'image de σ dans $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est donnée par son action sur \mathcal{P} .

Nous avons déjà construit deux morphismes de $\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ vers $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$. Pour montrer qu'ils induisent un morphisme depuis le quotient du produit semi-direct, nous vérifions les conditions de la Définition A.1.11. Les deux premières ne posent pas problème. Pour la dernière, soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, $\chi \in \mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$ et $(y_{\tau})_{\tau} \in \oplus_{\tau} \overline{\mathbb{Q}_p}$:

$$[\text{glec}(\sigma)(\chi)](y_{\tau})_{\tau} = (\sigma\chi\sigma^{-1})(y_{\tau})_{\tau} = ((\sigma\chi\sigma^{-1})(y_{\tau}))_{\tau} = [(\sigma)(\chi)(\sigma^{-1})](y_{\tau})_{\tau}.$$

Nous laissons les lecteurs et lectrices vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme. \square

6.4.3 L'équivalence de Fontaine glectique semi-linéaire pour des extensions galoisiennes de \mathbb{Q}_p

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ une sous-extensions finie de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Nous fixons encore un choix d'extension τ_{ext} de chaque plongement à $\overline{\mathbb{Q}_p}$, que l'on suppose appartenir à $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et de degré minimal.

Définition/Proposition 6.4.6. Nous avons

$$\forall \tau \in \mathcal{P}, \forall \sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \exists! g_{\sigma,\tau} \in \mathcal{G}_K, (\sigma\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma,\tau} = \sigma\tau_{\text{ext}}.$$

Si $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$, alors $g_{\sigma,\tau} \in W_K^+$. Son degré absolu est noté $fd_{\sigma,\tau}$ avec $d_{\sigma,\tau} \in \mathbb{N}$ et ne dépend pas du choix des τ_{ext} puisqu'ils sont de degré positif minimal.

Démonstration. L'existence provient de ce que $\sigma\tau_{\text{ext}}$ coïncide avec $(\sigma\tau)_{\text{ext}}$ sur K . Ainsi, l'élément $(\sigma\tau)_{\text{ext}}^{-1}\sigma\tau_{\text{ext}}$ fixe K . Si $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$, le degré de $\sigma\tau_{\text{ext}}$ est positif. Or, c'est aussi une extension de $\sigma\tau$, d'où $\deg(\sigma\tau_{\text{ext}}) \geq \deg((\sigma\tau)_{\text{ext}})$. \square

Remarque 6.4.7. La définition précédente capture donc l'information des degrés dans $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ que le choix des τ_{ext} oublie. Cela servira entre autre à garantir que l'action sur l'anneau de Fontaine plectique d'une extension du p -Frobenius dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est une racine du q -Frobenius.

Lemme 6.4.8. Les $g_{\sigma,\tau}$ vérifient la relation

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \forall \tau \in \mathcal{P}, \quad g_{\sigma_2\sigma_1,\tau} = g_{\sigma_2,\sigma_1\tau} g_{\sigma_1,\tau}.$$

A fortiori, les $d_{\sigma,\tau}$ vérifient la relation

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \forall \tau \in \mathcal{P}, \quad d_{\sigma_2\sigma_1,\tau} = d_{\sigma_2,\sigma_1\tau} + d_{\sigma_1,\tau}.$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} (\sigma_2\sigma_1\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma_2,\sigma_1\tau} g_{\sigma_1,\tau} &= (\sigma_2(\sigma_1\tau))_{\text{ext}} g_{\sigma_2,\sigma_1\tau} g_{\sigma_1,\tau} \\ &= \sigma_2(\sigma_1\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma_1,\tau} \\ &= \sigma_2\sigma_1\tau_{\text{ext}} \end{aligned}$$

\square

Définition/Proposition 6.4.9. Nous appelons $\text{T}\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ le monoïde topologique défini en utilisant A.1.11 par

$$\text{T}\mathcal{G}_{K,\text{glect}} := \left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{glect}} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \sim$$

où le produit semi-direct est donné par

$$\forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \quad \text{glect}(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, g_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, g_{\sigma^{-1}\tau} \right)$$

et avec le morphisme $\kappa_{\text{glect}} : W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \rightarrow (\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ qui envoie le Frobenius arithmétique sur $\varphi_{\mathcal{P},q}^{\text{f}_{\text{gal}}}$, avec la topologie usuelle sur $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ et la topologie localement profinie sur le groupe de Weil.

Démonstration. Pour les mêmes raisons que précédemment, le noyau de glec contient $I_{K_{\text{gal}}}$. Il faut ensuite vérifier les trois conditions de la Définition A.1.11. Le Frobenius arithmétique est dans le noyau de plec et donne donc la même "action de conjugaison" que $\varphi_{\mathcal{P},q}^{f_{\text{gal}}}$. Puisque $K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne $W_{K_{\text{gal}}} \triangleleft W_{\mathbb{Q}_p}$ d'où nous déduisons que $W_{K_{\text{gal}}}^+/I_{K_{\text{gal}}} \triangleleft W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\text{gal}}}$. Ce dernier sous-groupe est dans le centre, de même que son image dans $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$. Cela démontre la troisième condition. \square

Lemme 6.4.10. *La restriction de la projection sur produit semi-direct vers $T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ se restreint en des injections depuis $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\text{gal}}}$. Ce sont des homéomorphismes sur leur image.*

Démonstration. Ajoutons que $\text{glec}(W_{\mathbb{Q}_p}^+)$ est constituée d'automorphismes pour appliquer la Proposition A.1.13. Cela permet notamment de prouver que les éléments de $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\text{gal}}}$ sont dans des classes disjointes. De plus, le sous-groupe $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ est ouvert dans le produit semi-direct et stable par la relation définissant le quotient. Nous en déduisons que la topologie induite sur $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\text{gal}}}$ par l'injection est effectivement discrète. L'autre plongement se démontre de manière analogue. \square

Proposition 6.4.11. *Le sous-monoïde $\Phi_{\mathcal{P},q} < T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est distingué et le quotient $T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}/\Phi_{\mathcal{P},q}$ s'identifie à $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ comme monoïde topologique, canoniquement au choix des τ_{ext} près.*

Démonstration. En utilisant le premier résultat de la Proposition A.1.14 grâce au fait que $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ agit par automorphismes sur $\Phi_{\mathcal{P},q}$, on obtient

$$\Phi_{\mathcal{P},q} \triangleleft \left[(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\text{gal}}} \right].$$

On utilise le deuxième résultat de la même proposition pour conclure que son image via le plongement dans $T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est distinguée. Enfin, le troisième point de ladite proposition permet d'identifier le quotient. Puisque κ_{glec} prend ses valeurs dans $\Phi_{\mathcal{P},q}$ nous obtenons que

$$T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}/\Phi_{\mathcal{P},q} \cong \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\overline{\text{glec}}} W_{\mathbb{Q}_p}^+/W_{K_{\text{gal}}}^+$$

où $\overline{\text{glec}}(\sigma)(g_\tau) = (g_{\sigma^{-1}\tau})$. En identifiant $W_{\mathbb{Q}_p}^+/W_{K_{\text{gal}}}^+$ à $\text{Gal}(K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p)$, nous retombons sur la description de $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ donné par le choix des τ_{ext} à la Proposition 6.4.5. \square

Définition 6.4.12. Le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}} < T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est distingué pour les mêmes raisons qu'à la proposition précédente. Nous définissons le monoïde topologique

$$T_{K,\text{glec}} := T\mathcal{G}_{K,\text{glec}}/\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}.$$

Proposition 6.4.13. *Le monoïde topologique $T_{K,\text{glect}}$ s'identifie canoniquement à*

$$\left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{glect}} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \sim$$

où

$$\forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \text{ glect}(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, x_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, x_{\sigma^{-1}\tau} \right)$$

et où l'on identifie le Frobenius arithmétique à $\varphi_{\mathcal{P},q}^{f_{\text{gal}}}$.

Démonstration. Similaire à celle de la Proposition 6.3.9. \square

Supposons jusqu'à la fin de cette section que $\overline{\mathbb{Q}_p}|K|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne. Dans ce cas, nous avons $K_{\text{gal}} = K$ et $f_{\text{gal}} = f$ et nous identifierons canoniquement \mathcal{P} à $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$ dans cette section.

Définition 6.4.14. Le quotient $\mathcal{G}_{K,\text{glect}} / \prod_{\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)} \mathcal{G}_K$ s'identifie à $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$. L'action de ce dernier sur \mathcal{O}_K le munit d'une structure de $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ -anneau topologique que l'on note $\mathcal{O}_{K,\text{sl}}$.

Nous notons $\text{sRep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ la catégorie des représentations semi-linéaires continues⁶ de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ de type fini sur \mathcal{O}_K .

Nous considérons toujours un choix de (π, f, π^b) pour K . Nous commençons à nouveau dans le cadre de la section 6.1 avec $\Delta = \mathcal{P}$, le choix de $(\tau(\pi), \tau(f), \tau_{\text{ext}}(\pi^b))$ pour le plongement τ et un choix d'extensions de

$$j_\tau : \mathbb{F}_q((X_\tau^{1/q^\infty})) \rightarrow \widehat{K_{\text{LT},\tau(f)}}^b$$

aux clôtures séparables. Comme à la section 6.1, cela détermine une structure de $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ -anneau topologique sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ et une identification de $\mathcal{G}_{E,\mathcal{P}}$ au sous-groupe $\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}} = \prod \mathcal{G}_{K_{\text{LT},\tau(f)}} < \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$.

Chaque τ_{ext} induit un endomorphisme τ -semi-linéaire de K -algèbres de \mathbb{C}_p qui envoie $K_{\text{LT},f}$ sur $K_{\text{LT},\tau(f)}$. En basculant, on obtient τ_{ext}^b un endomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $\varphi^{\deg \tau}$ -semi-linéaire⁷ de \mathbb{C}_p^b qui envoie $\widehat{K_{\text{LT},f}}^b$ sur $\widehat{K_{\text{LT},\tau(f)}}^b$ et π^b sur $\tau_{\text{ext}}(\pi^b)$. Cet endomorphisme est $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariant. En revanche, il n'est pas \mathcal{G}_K -équivariant :

$$\forall g \in \mathcal{G}_K, \forall x \in \mathbb{C}_p^b, \tau_{\text{ext}}^b(g \cdot x) = (\tau_{\text{ext}} g \tau_{\text{ext}}^{-1}) \cdot (\tau_{\text{ext}}^b(x)). \quad (*7)$$

En passant aux vecteurs de Witt, on obtient un diagramme commutatif

⁶Elle s'écrit $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prj},\text{dv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{K,\text{sl}})$ dans le langage du Chapitre 2.

⁷Ici φ est le Frobenius absolu et $\deg \tau$ est bien défini modulo f , ce qui définit correctement $\varphi^{\deg \tau}$ sur \mathbb{F}_q .

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{X \mapsto \{\pi^b\}_{LT,f}} & W_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{K_{LT,f}}^b \right) & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_K} \left(\mathbb{C}_p^b \right) \\
\downarrow X \mapsto X_{\tau} & & \downarrow & & \downarrow W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{\text{ext}}^b) \\
\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\tau}} & \xrightarrow{X_{\tau} \mapsto \{\tau_{\text{ext}}(\pi^b)\}_{LT,\tau(f)}} & W_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{K_{LT,\tau(f)}}^b \right) & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_K} \left(\mathbb{C}_p^b \right)
\end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des morphismes τ -semi-linéaires de \mathcal{O}_K -algèbres. Or, $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ est la complétion de la hensélisation stricte de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Le diagramme précédent montre alors que $W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{\text{ext}}^b)$ induit un isomorphisme entre les $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -anneaux topologiques $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ et $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\tau}}}$ construits comme en Proposition 3.2.2, respectivement pour (π, f, π^b) et $(\tau(\pi), \tau(f), \tau_{\text{ext}}(\pi^b))$. Les actions de \mathcal{G}_K vérifient encore l'équation (*7). Ce morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres est également τ -semi-linéaire. Définissons

$$j_{\tau_2, \tau_1} := W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{2,\text{ext}}^b) \circ W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{1,\text{ext}}^b)^{-1} : \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\tau_1}^{\text{nr}}}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\tau_2}^{\text{nr}}}}.$$

C'est un isomorphisme de \mathcal{O}_K -algèbres topologiques $(\tau_2 \tau_1^{-1})$ -semi-linéaire, $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariant tel que

$$\forall g \in \mathcal{G}_K, \forall x, j_{\tau_2, \tau_1}(g \cdot x) = \left(\tau_{2,\text{ext}} \tau_{1,\text{ext}}^{-1} g \tau_{1,\text{ext}} \tau_{2,\text{ext}}^{-1} \right) \cdot (j_{\tau_2, \tau_1}(x)). \quad (*8)$$

Ils vérifient

$$\forall \tau_1, \tau_2, \tau_3, j_{\tau_3, \tau_1} = j_{\tau_3, \tau_2} \circ j_{\tau_2, \tau_1}.$$

Définition/Proposition 6.4.15. Soit $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, on définit sur $\otimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau}}^+$ l'endomorphisme

$$\sigma \cdot_{\text{sgllec}} (\otimes y_{\tau}) = \otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma, \sigma^{-1}\tau}} \left(j_{\tau, \sigma^{-1}\tau}(y_{\sigma^{-1}\tau}) \right).$$

Bien que les $j_{\tau, \sigma^{-1}\tau}$ ne soient pas \mathcal{O}_K -linéaires, ils sont tous $\sigma|_K$ -semi-linéaires ce qui rend correcte la définition. Ces endomorphismes se complètent (π, \underline{X}) -adiquement, passent à la colimite et se complètent π -adiquement en une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$. Son noyau est précisément I_K .

Démonstration. Nous montrons en détail, pour cette fois-ci uniquement, qu'il s'agit d'un action sur le produit tensoriel. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et $\otimes y_{\tau}$ appartenant au produit tensoriel. Alors,

$$\begin{aligned}
(\sigma_2 \sigma_1) \cdot_{\text{splec}} (\otimes y_\tau) &= \otimes \varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma_2 \sigma_1, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau}} (j_{\tau, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau} (y_{\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau})) \\
&= \otimes \varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma_2, \sigma_2^{-1} \tau} + d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau}} \left([j_{\tau, \sigma_2^{-1} \tau} \circ j_{\sigma_2^{-1} \tau, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau}] (y_{\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau}) \right) \\
&= \otimes \varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma_2, \sigma_2^{-1} \tau}} \left(j_{\tau, \sigma_2^{-1} \tau} \left(\varphi_{\sigma_2^{-1} \tau, q}^{d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau}} (j_{\sigma_2^{-1} \tau, \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau} (y_{\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau})) \right) \right) \\
&= \sigma_2 \cdot_{\text{splec}} \left(\otimes \varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1} \tau}} (j_{\tau, \sigma_1^{-1} \tau} (y_{\sigma_1^{-1} \tau})) \right) \\
&= \sigma_2 \cdot_{\text{splec}} (\sigma_1 \cdot_{\text{splec}} (\otimes y_\tau))
\end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne utilise les relations des d et des j et où celui à la troisième utilise la $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariance de j_{τ_2, τ_1} .

Prouvons à présent que le noyau sur les produits tensoriels est précisément I_K . Soit σ dans le noyau. En regardant l'action sur les X_τ , on obtient que σ agit trivialement sur \mathcal{P} , autrement dit que $\sigma \in W_K^+$. Dans ce cas $(\sigma\tau)_{\text{ext}} = \tau_{\text{ext}}$ et on obtient que $g_{\sigma, \tau} = \tau_{\text{ext}}^{-1} \sigma \tau_{\text{ext}}$, en particulier que son degré absolu vaut $\deg \sigma$. Pour que chaque $d_{\sigma, \tau}$ soit nul, il faut donc que $\deg \sigma = 0$.

Puisque $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K$ est discret, la continuité de l'action est automatique dès lors que l'on peut compléter. \square

Définition/Proposition 6.4.16. Considérons l'action de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ obtenue en tordant l'action définie à la section 6.1 par l'automorphisme

$$(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}), \quad \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_\tau}, g_\tau \right) \rightarrow \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_\tau}, \tau_{\text{ext}} g_\tau \tau_{\text{ext}}^{-1} \right).$$

Considérons également l'action \cdot_{splec} de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Ensemble, elles fournissent une structure de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{splec}}$ -anneau topologique pour notre topologie préférée parmi les topologies adique faible, colimite ou faible. On la note $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{splec}}^{\text{nr}}}}$. On appelle topologie draconique⁸ la topologie choisie jusqu'à la fin de la section.

Petite remarque, l'action est \mathcal{O}_K -semi-linéaire, au sens où $\mathcal{O}_{K, \text{sl}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{splec}}^{\text{nr}}}}$ est un morphisme de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{splec}}$ -anneau.

Démonstration. D'après les propriétés universelles des Proposition A.1.10 et A.1.5, il faut vérifier deux conditions de compatibilité des actions. La compatibilité à splec utilise que les j_{τ_2, τ_1} sont $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariants et vérifient (*8). Pour le passage au quotient, nous avons déjà énoncé que le Frobenius arithmétique Frob dans $W_{K_{\text{gal}}}^+$ agit trivialement sur \mathcal{P} et que $\forall \tau, d_{\text{Frob}, \tau} = f$. Ceci dit précisément que Frob agit comme $\varphi_{\mathcal{P}, q}^f$. \square

⁸Par souci de concision et adoration déraisonnée.

L'action de $\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glect}}$ sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}^{\mathrm{nr}}}}$ est fidèle mais nous ne l'utiliserons pas. Nous nous intéressons aux invariants par les deux sous-monoïdes des équivalences de Fontaines multivariées.

Proposition 6.4.17. *L'inclusion $\mathcal{O}_{K,\mathrm{sl}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}^{\mathrm{nr}}}^{\Phi_{\mathcal{P},q}}$ est une égalité de $\mathcal{G}_{K,\mathrm{glect}}$ -anneaux topologiques.*

Démonstration. Combiner la condition 4 dans la preuve du Théorème 5.4.22 et la semi- \mathcal{O}_K -linéarité de l'action. \square

Définition 6.4.18. Nous définissons le $\mathrm{T}_{K,\mathrm{glect}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}^{\mathrm{nr}}}^{\mathcal{H}_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}}}.$$

Proposition 6.4.19. *Le $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$ construit à la section 6.1. En reprenant sa description à la Remarque 6.1.4, l'action continue et semi-linéaire de $\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glect}}$ est caractérisée par*

$$\begin{aligned} \forall \tau, \varphi_{\tau,q}(X_\tau) &= \tau(f)(X_\tau), \\ \forall x = (x_\tau) \in \Gamma_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}}, \forall \tau', x \cdot X_{\tau'} &= [x_{\tau'}]_{\mathrm{LT},\tau'(f)}(X_{\tau'}) \\ \text{et } \forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \forall \tau, [\sigma] \cdot X_\tau &= (\sigma\tau)(f)^{d_{\sigma,\tau}}(X_{\sigma\tau}). \end{aligned}$$

Démonstration. Similaire à la Proposition 6.3.9 en utilisant que $j_{\tau_2,\tau_1}(X_{\tau_1}) = X_{\tau_2}$. \square

Une fois les anneaux construits correctement, nous obtenons gratuitement l'équivalence de Fontaine glectique semi-linéaire.

Théorème 6.4.20. *Les foncteurs*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\mathrm{sglect},\mathrm{LT}} : s\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\mathrm{glect}} &\rightarrow \mathrm{Mod}(\mathrm{T}_{K,\mathrm{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}}) \\ V &\mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}^{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}}} \\ \mathbb{V}_{\mathrm{sglect},\mathrm{LT}} : \mathcal{M}\mathrm{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\mathrm{ét}}(\mathrm{T}_{K,\mathrm{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}}) &\rightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{G}_{K,\mathrm{glect}}, \mathcal{O}_K) \\ D &\mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}^{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}}} D \right)^{\Phi_{\mathcal{P},q}} \end{aligned}$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie draconique sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathrm{sglect}}}$ sont lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont

contenues respectivement dans $\mathcal{M}od_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\mathcal{T}_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{sglec}}})$ et $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glec}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Remarque 6.4.21. Nous avons ici une action du sous-monoïde $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K$ qui est une extension en générale non scindée de $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$ par $\varphi_q^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas où K n'est pas galoisienne, il existe encore des variables cachées dans $W_{\mathcal{O}_{K,\text{gal}}}(\mathbb{C}_p^{\flat})$. Nous espérons une équivalence de Fontaine semi-linéaire glectique pour $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_{K,\text{gal}}} \mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ en considérant des anneaux du type

$$\bigotimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_{K,\text{gal}}} \mathcal{O}_{K,\text{gal}} \bigotimes_{\mathcal{O}_{K\tau}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K\tau}}.$$

Il faudrait refaire une série de définitions et de lemmes concernant les invariants, ce que nous laissons de côté dans ce présent article.

6.4.4 Deux équivalences de Fontaine glectiques

Dans le cas général d'un corps local p -adique, nous pouvons cependant construire une (voire trois) équivalences pour les représentations linéaires de $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$. Toutes les preuves absentes sont similaires à celles du cas semi-linéaire.

Définition/Proposition 6.4.22. Soit $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$ on définit sur $\bigotimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\tau}^+$ l'endomorphisme

$$\sigma \cdot_{\text{glec}} (\bigotimes y_\tau) = \bigotimes \varphi_{\tau, \bar{q}}^{d_{\sigma, \sigma^{-1}\tau}} \left(i_{\tau, \sigma^{-1}\tau} (y_{\sigma^{-1}\tau}) \right).$$

Ces endomorphismes se complètent (π, \underline{X}) -adiquement, passent à la colimite et se complètent π -adiquement en une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$. Son noyau est précisément $I_{K,\text{gal}}$.

Définition/Proposition 6.4.23. L'action de $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ et l'action de glec de $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{K,\text{gal}}$ sont continues pour la topologie draconique. Elles fournissent une structure de $\mathcal{T}\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ -anneau topologique que l'on note $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}^{\text{nr}}}}$.

Proposition 6.4.24. *L'inclusion*

$$\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\mathcal{P},q}}$$

est une égalité.

Définition/Proposition 6.4.25. Nous définissons le $\mathcal{T}_{K,\text{glec}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}} := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}}.$$

Le $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,LT,\mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$ construit à la section 6.1. En reprenant sa description à la remarque 6.1.4, l'action continue et semi-linéaire de $\text{T}\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \forall \tau, \varphi_{\tau,q}(X_\tau) &= f(X_\tau), \\ \forall \tau', \forall x = (x_\tau)_\tau \in \Gamma_{K,LT,\mathcal{P}}, \quad x \cdot X_{\tau'} &= [x_{\tau'}]_{LT,f}(X_{\tau'}) \\ \text{et } \forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \forall \tau, \quad [\sigma] \cdot X_\tau &= f^{d_{\sigma,\tau}}(X_{\sigma\tau}). \end{aligned}$$

Théorème 6.4.26. *Les foncteurs*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\text{glec},LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glec}} &\rightarrow \text{Mod}(\text{T}_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}) \\ V &\mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}}} \\ \mathbb{V}_{\text{glec},LT} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}) &\rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_K) \\ D &\mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q}} \end{aligned}$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie draconique sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}$ sont lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glec}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Le monoïde $\text{T}_{K,\text{glec}}$ est intéressant car ses deux sous-monoïdes $\Phi_{\mathcal{P},q}$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+/\text{I}_{K,\text{gal}}$ contiennent $\varphi_{\mathcal{P},q}^{f_{\text{gal}}\mathbb{N}}$ comme sous-monoïde distingué sans que la suite exacte déduite soit scindée. Dans le cas de $K = \mathbb{Q}_q$, on a simplement rajouté à $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod_{\mathcal{P}} \mathbb{Z}_q^\times)$ une racine f -ième de $\varphi_{\mathcal{P},q}$.

Remarque 6.4.27. Toujours pour $K = \mathbb{Q}_q$, nous pouvons faire un lien entre notre $\text{T}_{K,\text{glec}}$ -anneau et l'anneau de coefficients A dans [Bre+25], avec cette même philosophie de faire tourner les variables et de les tordre après un tour complet. Choisissons $f = T^q + \pi T$ et voyons $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ comme sous-monoïde de $\text{T}_{K,\text{glec}}$ en identifiant $\varphi_p^{\mathbb{N}} \cong W_{\mathbb{Q}_p}^+/\text{I}_{\mathbb{Q}_q}$ et en plongeant \mathbb{F}_q^\times dans $\prod_{0 \leq i < f} \mathbb{Z}_q^\times$ par les représentants de Teichmüller $x \mapsto ([x])_i$. Alors, le $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ -anneau $E_{K,\text{glec}}^+ := \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}^+ / \pi \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}}}^+$ s'identifie à un sous- $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ -anneau de A en envoyant X_{Frob^i} sur $Y_{f-1-i}^{p^i}$. Malheureusement, l'action de \mathcal{O}_K^\times sur $E_{K,\text{glec}}^+$ ne se localise pas en le produit des Y_j , il faut microlocaliser, ce qui donne un fumet un peu différentes aux anneaux de [Bre+25].

Remarque 6.4.28. Nous esquissons une autre équivalence aux saveurs glectiques dont la preuve suivrait trait pour trait celle qui précède. Nous changeons légèrement l'action du monoïde $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ en décrétant que

$$\sigma(\otimes y_\tau) = \otimes \left(\varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}} \circ g_{\sigma,\sigma^{-1}\tau} \circ i_{\tau,\sigma^{-1}\tau} \right) (y_{\sigma^{-1}}).$$

Autrement dit, au lieu de faire tourner les plongements en se souvenant des problèmes de degrés, on se souvient intégralement de l'élément $g_{\sigma,\tau}$. En identifiant l'action de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ à une action de $\prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}$ par conjugaison par chacun des τ_{ext} , les deux actions s'assemblent en action continue du monoïde

$$\text{TG}'_{K,\text{glect}} := \left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}) \rtimes_{\text{glect}'} W_{\mathbb{Q}_p}^+ \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ \sim$$

avec

$$\text{glect}'(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, g_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, \sigma g_{\sigma^{-1}\tau} \sigma^{-1} \right)$$

et l'identification via le morphisme $\kappa'_{\text{glect}}(\sigma) = (\varphi_{\mathcal{P},q}^{\deg \sigma/f}, \sigma, \dots, \sigma)$. Autrement dit, nous faisons tourner les \mathcal{G}_{K_τ} par la conjugaison par $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et nous identifions ceux de $W_{K_{\text{gal}}}^+$ à une puissance convenable du Frobenius $\varphi_{\mathcal{P},q}$ et à la diagonale dans $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$. Nous pouvons à nouveau vérifier que les morphismes $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod \mathcal{G}_{K_\tau})$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sont des plongements de monoïdes topologiques. Nous notons $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}'}^{\text{nr}}}}$ le $\text{TG}'_{K,\text{glect}}$ -anneau topologique obtenu.

Le quotient par $\Phi_{\mathcal{P},q}$ s'identifie à $((\prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}^+) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ \sim$. Après quotient, $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ s'injecte encore, mais la topologie induite est désormais celle induite par $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Grâce à cette remarque, on peut établir que le morphisme $\text{TG}'_{K,\text{glect}} / \Phi_{\mathcal{P},q} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ induit par $W_{\mathbb{Q}_p}^+ \subset \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un isomorphisme de monoïdes topologiques.

Le quotient par $\text{T}'_{K,\text{glect}} := \text{TG}'_{K,\text{glect}} / \mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}$ s'identifie à

$$\left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod_{\mathcal{P}} \mathcal{O}_{K_\tau}^\times) \rtimes_{\text{glect}'} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}} \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ / \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}} \sim$$

où nous avons

$$\text{glect}'(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, x_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, \sigma(x_{\sigma^{-1}\tau}) \right)$$

et

$$\kappa_{\text{glect}'}(\sigma \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}}) = (\varphi_{\mathcal{P},q}^{\deg \sigma/f}, \text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma)).$$

Ici, $K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}$ est l'extension composée des K_τ^{ab} qui contient donc K^{nr} et correspond au sous-groupe

$$\{x \in \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}^\times \mid \forall \tau, N_{K_{\text{gal}}|K_\tau}(x) = 1\} \triangleleft \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}^\times$$

par la théorie du corps de classes locale.

En définissant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}} := \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}}}}$, nous obtenons à nouveau une équivalence de catégories

$$\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glec}} \xleftrightarrow{\sim} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-prjdv}}^{\text{ét}}(T'_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}).$$

De plus, l'action de $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}$ est l'unique morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres topologiques tel que

$$\forall \tau \in \mathcal{P}, \quad \sigma \cdot X_\tau = [\tau_{\text{ext}}^{-1}(\text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma))]_{LT,f}(X_{\sigma\tau}).$$

Notons que $\tau_{\text{ext}}^{-1}(\text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma)) = \text{Art}_K^{-1}(\tau_{\text{ext}}^{-1}\sigma\tau_{\text{ext}})$.

Bibliographie

- [AGV] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. (SGA 4) Tomes 1 à 3, réédition.*
- [BL94] Laurent BARTHEL et Ron LIVNÉ. “IRREDUCIBLE MODULAR REPRESENTATIONS OF GL_2 OF A LOCAL FIELD”. In : *Duke Math. J.* 75.2 (1994).
- [Ber10] Laurent BERGER. *GALOIS REPRESENTATIONS AND (φ, Γ) -MODULES, Course given at IHP in 2010.* 2010.
- [Ber14] Laurent BERGER. “Lifting the field of norms”. In : *J. Éc. polytech. Math.* 1 (2014), 29–38.
- [Ber13] Laurent BERGER. “Multivariable Lubin-Tate (φ, Γ) -modules and filtered φ -modules”. In : *Math. Res. Lett.* 20 (3 2013), p. 409-428.
- [Ber16] Laurent BERGER. “Multivariable (φ, Γ) -modules and locally analytic vectors”. In : *Duke Math. J.* 165 (2016), p. 3567-3595.
- [Bha+19] Bhargav BHATT, Ana CARAIANI, Kiran S. KEDLAYA, Jared WEINSTEIN et Peter SCHOLZE. *Perfectoid Spaces : Lectures from the 2017 Arizona Winter School.* T. 242. Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., 2019.
- [BR83] Shrikant M. BHATWADEKAR et Ravi A. RAO. “On a question of Quillen”. In : *Transactions of the Amer. Math. Soc.* 279 (2 1983), p. 801-810.
- [Bou81] Nicolas BOURBAKI. *Algèbre, Chapitres 4-7.* Springer, 1981.
- [Bou71] Nicolas BOURBAKI. *Topologie générale, Chapitres 1-4.* Springer, 1971.
- [Bre03] Christophe BREUIL. “Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p) : I$ ”. In : *Compositio Math.* 138 (2003), p. 165-188.
- [Bre10] Christophe BREUIL. “The emerging p -adic Langlands programme”. In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, India, 2010).* T. 1. Hindustan Book Agency, 2010, 203–230.
- [Bre+21] Christophe BREUIL, Florian HERZIG, Yongquan HU, Stefano MORRA et Benjamin SCHRAEN. “Conjectures and results on modular representations of $GL_n(K)$ for a p -adic field K ”. In : *to appear in Memoirs of Amer. Math. Soc.* (2021).
- [Bre+25] Christophe BREUIL, Florian HERZIG, Yongquan HU, Stefano MORRA et Benjamin SCHRAEN. “Multivariable $(\varphi, \mathcal{O}_K^\times)$ -modules and local-global compatibility”. In : *Math. Ann.* 392, no. 2 (2025), p. 2709-2801.
- [CKZ21] Annie CARTER, Kiran KEDLAYA et Gergely ZÁBRÁDI. “Drinfeld’s lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ) -modules”. In : *Documenta Math.* (2021), p. 1329-1393.

- [CL24] Antonio M. CEGARRA et Jonathan LEECH. *The Cohomology of Monoids*. T. 12. RSME Springer Series. Springer Cham, 2024.
- [CC98] Frédéric CHERBONNIER et Pierre COLMEZ. “Représentations p -adiques surconvergentes”. In : *Inventiones mathematicae* 133.3 (1998), p. 581-611.
- [Col19] Pierre COLMEZ. “Le programme de Fontaine”. In : *L’Enseignement mathématique* 65 (2019), 487–531.
- [Col13] Pierre COLMEZ. “Le programme de Langlands p -adique”. In : *European Math. Soc.* (2013), 259–284.
- [Col10] Pierre COLMEZ. “REPRÉSENTATIONS DE $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ET (φ, Γ) -MODULES”. In : *Astérisque* 330 (2010), p. 345-389.
- [Col16] Pierre COLMEZ. “Représentations localement analytiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules”. In : *Represent. Theory* 20 (2016), p. 187-248.
- [Dee01] Jonathan DEE. “ Φ - Γ -Modules for Families of Galois Representations”. In : *J. Algebra* 235 (jan. 2001), p. 636-664.
- [Duc] Antoine DUCROS. *Introduction à la théorie des schémas*. Lecture notes available at webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros.
- [EG23] Matthew EMERTON et Toby GEE. *Moduli Stacks of Étale (ϕ, Γ) -Modules and the Existence of Crystalline Lifts*. T. 215. Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 2023.
- [EGH23] Matthew EMERTON, Toby GEE et Eugen HELLMANN. “An introduction to the categorical p -adic Langlands program”. In : *preprint* (2023).
- [FF18] Laurent FARGUES et Jean-Marc FONTAINE. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique*. T. 406. 2018.
- [Fon07] Jean-Marc FONTAINE. “Représentations p -adiques des corps locaux, 1^{ère} partie”. In : *The Grothendieck Festschrift*. T. II. Birkhäuser, Boston, MA, 2007, p. 249-309.
- [Fou05] Lionel FOURQUAUX. “Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate”. Thèse de doct. Paris 6, 2005.
- [GR02] Ofer GABBER et Lorenzo RAMERO. “Almost ring theory - sixth release”. In : (2002).
- [GK18] Elmar GROSSE-KLÖNNE. “A note on multivariable (φ, Γ) -modules”. In : *Res. Number Theory* 5.1 (nov. 2018).
- [GR03] Alexander GROTHENDIECK et Michel RAYNAUD. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. T. 3. Documents Mathématiques. S. M. F., 2003.
- [Hah07] Hans HAHN. “Über die nichtarchimedischen Größensysteme”. In : *Sitzungsber., Abt. IIa, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl.* 116 (1907).
- [Hen14] T. HENKEL. “An Open Mapping Theorem for rings which have a zero sequence of units”. In : *unpublished* (2014).
- [Her98a] Laurent HERR. “Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques”. In : *Bulletin de la S. M. F.* 126.4 (1998), p. 563-600.

- [Her98b] Laurent HERR. “Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques”. In : *Bulletin de la S.M.F* 126 (1998), p. 563-600.
- [Hub13] Roland HUBER. T. 40. Aspects of Mathematics. Springer, 2013.
- [Hub93] Roland HUBER. “Continuous valuations”. In : *Math. Zeitschrift* 212 (1993), 455–477.
- [Jak68] A. V. JAKOVLEV. “The Galois group of the algebraic closure of a local field”. In : *Math. USSR Izv.* 2 (1968).
- [JZ25] Gergely JAKOVÁC et Gergely ZÁBRÁDI. “Finiteness properties of generalized Montréal functors with applications to mod p representations of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ ”. In : *preprint* (2025).
- [Jw82] Uwe JANSEN et Kay WINGBERG. “Die Struktur der absoluten Galoisgruppe p -adischer Zahlkörper”. In : *Inventiones mathematicae* 70 (1982), p. 71-98.
- [JR79] Moshe JARDEN et Jürgen RITTER. “On the Characterization of Local Fields by Their Absolute Galois Groups”. In : *J. Number Theory* 11 (1979), p. 1-13.
- [Jon15] Aise Johan De JONG. *Étale fundamental groups*. <http://math.columbia.edu/~phlee/CourseNotes/EtaleFundamental.pdf>. 2015.
- [Kap42] Irving KAPLANSKY. “Maximal fields with valuations”. In : *Duke Math. J.* 9.2 (1942), p. 303-321.
- [KL15] Kiran S. KEDLAYA et Ruochuan LIU. “Relative p -adic Hodge theory : Foundations”. In : *Astérisque* 371 (2015).
- [KR09] Mark KISIN et Wei REN. “Galois representations and Lubin-Tate groups”. In : *Documenta Math.* 14 (2009), p. 441-461.
- [KV22] Benjamin KUPFERER et Otmar VENJAKOB. “Herr-complexes in the Lubin–Tate setting”. In : *Mathematika* 68.1 (2022), p. 74-147.
- [LT65] Jonathan LUBIN et John TATE. “Formal complex multiplication in local fields”. In : *Annals of Math., Second Series* 81 (2 1965), 380–387.
- [Mar23a] Nataniel MARQUIS. “Algebraic structure objects (and diagram frenzy)”. In : *note available at nmarquis-maths.github.io* (2023).
- [Mar24] Nataniel MARQUIS. “Computations of some (φ, Γ) -modules”. In : *note available at nmarquis-maths.github.io* (2024).
- [Mar22a] Nataniel MARQUIS. “De la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ aux difficultés pour $\mathrm{GL}_n(K)$ ”. In : *IDR available at nmarquis-maths.github.io* (2022).
- [Mar22b] Nataniel MARQUIS. “Note sur la descente galoisienne”. In : *note available at nmarquis-maths.github.io* (2022).
- [Mar23b] Nataniel MARQUIS. “Objects in algebraic structure (and diagram frenzy)”. In : *note available at nmarquis-maths.github.io* (2023).

- [Moc97] Shinichi MOCHIZUKI. “A Version of the Grothendieck Conjecture for p -Adic Local Fields”. In : *Int. J. Math.* 08.04 (1997), p. 499-506.
- [Eme] *MODULI STACKS OF (φ, Γ) -MODULES : A SURVEY*, author=Matthew Emerton and Toby Gee, booktitle=to appear in *Proceedings of the Int. Colloquium on Arithmetic Geometry year=2020*.
- [Mor] Matthew MORROW. *Adic and perfectoid spaces*. <https://webusers.imj-prg.fr/~matthew.morrow/Espaces/Perf%20spaces%20IMJ-PRG%20final.pdf>.
- [NS16] Jan NEKOVARÁŘ et Anthony J. SCHOLL. “Introduction to plectic cohomology”. In : *Contemporary Math.* 664 (2016), p. 321-337.
- [NS17] Jan NEKOVARÁŘ et Anthony J. SCHOLL. “Plectic Hodge theory I”. In : (2017).
- [Neu99] Jürgen NEUKIRCH. *Algebraic Number Theory*. T. 322. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Link, 1999.
- [PZ21] Aprameyo PAL et Gergely ZÁBRÁDI. “Cohomology and overconvergence for representations of powers of Galois groups”. In : *J. Inst. Math. Jussieu* 20(2) (2021), p. 361-421.
- [Pha23] Ngo-Thanh-Dat PHAM. “Moduli stacks of Lubin–Tate (φ, Γ) -modules”. In : (2023).
- [Poy19] Léo POYETON. “Extensions de Lie p -adiques et (φ, Γ) -modules”. Thèse de doct. École Normale Supérieure de Lyon, 2019.
- [Pup21] Gheorghe PUPAZAN. “Multivariable (φ, Γ) -modules and representations of products of Galois groups”. Thèse de doct. Humboldt University Berlin, 2021.
- [Rao85] Ravi A. RAO. “On Projective $R_{f_1 \dots f_t}$ -Modules”. In : *Amer. J. of Math.* 107.2 (1985), p. 387-406.
- [RZ10] Luis RIBES et Pavel ZALESKII. *Profinite Groups*. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin, 2010.
- [Sch17] Peter SCHNEIDER. *Galois Representations and (φ, Γ) -Modules*. T. 164. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.
- [SV23] Peter SCHNEIDER et Otmar VENJAKOB. “Compairing Categories of Lubin–Tate (φ_L, Γ_L) -Modules”. In : *Results Math.* 78 (2023).
- [Sch12] Peter SCHOLZE. “Perfectoid Spaces”. In : *Publications math. de l’IHÉS* 116 (2012), p. 245-313.
- [Sch] Peter SCHOLZE. “Étale Cohomology of Diamonds”. In : to appear in *Astérisque* ().
- [SW20] Peter SCHOLZE et Jared WEINSTEIN. *Berkeley Lectures on p -adic Geometry*. T. 207. Annals Math. Studies, 2020.
- [Sch10] Benjamin SCHRAEN. “Représentations p -adiques de $GL_2(L)$ et Catégories Dérivées”. In : *Isr. J. Math.* 176 (2010), p. 307-361.
- [Ser94] Jean-Pierre SERRE. *Cohomologie Galoisienne*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1994.

- [Sil94] Joseph H. SILVERMAN. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1994.
- [Sta18] The STACKS PROJECT AUTHORS. *The Stacks Project*. `stacks.math.columbia.edu`. 2018.
- [Vig11] M.-F. VIGNERAS. “Le foncteur de Colmez pour $GL(2, F)$ ”. In : *Advanced Lectures Math.* 19 (2011), p. 531-557.
- [Wei94] Charles WEIBEL. *An Introduction to Homological Algebra*. T. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.
- [Wei17] Jared WEINSTEIN. “ $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ as a geometric fundamental group”. In : *Int. Math. Res. Notice* 2017 (10 2017), p. 2964 -2997.
- [Win83] Jean-Pierre WINTENBERGER. “Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications”. In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 4e série, 16.1 (1983), p. 59-89.
- [Yos06] Teruyoshi YOSHIDA. “Local Class Field Theory via Lubin-Tate Theory”. In : *Annales Fac. Sc. Toulouse Math.* 17 (2006).
- [Zá18a] Gergely ZÁBRÁDI. “Multivariable (φ, Γ) -modules and smooth \mathfrak{o} -torsion representations”. In : *Sel. Math. New Ser.* 24 (2018), p. 935-995.
- [Zá18b] Gergely ZÁBRÁDI. “Multivariable (φ, Γ) -modules and products of Galois groups”. In : *Math. Res. Lett.* 25(2) (2018), p. 687-721.
- [Če22] Kęstutis ČESNAVIČIUS. “Problems about torsors over regular rings (with an appendix by Yifei Zhao)”. In : *Acta Math. Vietnamica* 47 (2022), p. 39-107.

Monoïdes topologiques

Dans cette annexe, nous donnons une suite d'énoncés qui nous aiderons à manipuler les monoïdes topologiques. Nous nous épargnons de rédiger la plupart des preuves ; il s'agit surtout de fixer ce qui est vrai.

A.1 Constructions dans les monoïdes topologiques

Définition A.1.1. Rappelons qu'un monoïde topologique est un objet en monoïdes dans la catégorie des espaces topologiques. Nous appelons \mathbf{MndTop} la catégorie des monoïdes topologiques.

Proposition A.1.2. *La catégorie des monoïdes topologiques admet toutes les limites et le foncteur d'oubli vers les espaces topologiques commute naturellement aux limites.*

Définition A.1.3. Soit M un monoïde et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur M telle que

$$\forall m, m', n, n' \in M, \quad m\mathcal{R}m' \text{ et } n\mathcal{R}n' \implies mm'\mathcal{R}nn'. \quad (\text{Q1})$$

La loi sur M passe au quotient en une loi de monoïde sur M/\mathcal{R} ayant pour élément neutre la classe du neutre. Si M était un monoïde topologique, la topologie quotient sur M/\mathcal{R} en fait encore un monoïde topologique.

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{Q} \subset M \times M$, il existe une relation d'équivalence sur M contenant \mathcal{Q} minimale pour l'inclusion et vérifiant (Q1). On appelle M/\mathcal{Q} le quotient par cette dernière relation.

Définition A.1.4. Soit M un monoïde topologique et X un espace topologique. Une *action continue de M sur X* est morphisme de monoïdes $M \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ens}}(X, X)$ tel que l'application déduite $M \times X \rightarrow X$ est continue.

Lorsque X est muni de structure algébriques additionnelles, par exemple lorsque c'est un groupe topologique, on définit une action continue de M sur X de manière identique, en imposant que l'image soit contenue dans les morphismes de groupes.

Proposition A.1.5. *Soit M un monoïde topologique et $\mathcal{Q} \subset M \times M$.*

1. Le quotient M/\mathcal{Q} représente le foncteur

$$\mathbf{MndTop} \rightarrow \mathbf{Ens}, \quad S \mapsto \{a : M \rightarrow S \text{ continu tel que } \forall (m, n) \in \mathcal{Q}, a(m) = a(n)\}.$$

2. Les foncteurs

$$\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}, \quad X \mapsto \{\text{Actions continues de } M/\mathcal{Q} \text{ sur } X\}$$

et

$$\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}, \quad X \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{Actions continues de } M \text{ sur } X \\ \text{telles que } \forall (m, n) \in \mathcal{Q}, x \in X, m \cdot x = n \cdot x \end{array} \right\}$$

sont isomorphes. Le même résultat est vrai avec les catégories \mathbf{MndTop} , \mathbf{AnnTop} , etc, comme catégories sources.

3. La relation d'équivalence par laquelle on quotiente est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(amb, anb) \mid a, b \in M \text{ et } (m, n) \in \mathcal{Q}\}$.

Exemple A.1.6. Un sous-monoïde $N < M$ est appelé distingué si $\forall m, mN = Nm$. On notera alors $N \triangleleft M$. Dans ce cas, la relation $m_1 \mathcal{R} m_2 \leftrightarrow m_1 N = m_2 N$ est une relation d'équivalence qui vérifie (Q1). On note M/N le quotient. Il est en bijection avec les classes à gauche et représente le foncteur

$$\mathbf{MndTop} \rightarrow \mathbf{Ens}, \quad S \mapsto \{a : M \rightarrow S \text{ continu tel que } N \subseteq \text{Ker}(a)\}.$$

Remarque A.1.7. Attention, cette notion de sous-monoïde distingué est à prendre avec des pincettes puisqu'un monoïde n'est pas nécessairement distingué dans lui-même : considérer par exemple le monoïde des matrices carrées de taille d . La propriété universelle du quotient admet toujours un représentant, mais le monoïde peut être bien plus petit que l'ensemble des classes à gauche. De la même manière, le noyau d'un morphisme de monoïdes n'est pas toujours distingué.

Remarque A.1.8. Lorsque X est localement compact une action continue est exactement un morphisme de monoïdes vers $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X)$ muni de la topologie compacte ouverte. En revanche, rien ne garantit en général ni l'adjonction, ni même que cette topologie soit une topologie de monoïde. La seule topologie de monoïde sur $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, X)$ serait la topologie "ouverte-ouverte" qui donne une notion d'action continue plus forte.

Définition A.1.9. Soient M et N deux monoïdes topologiques et $\lambda : N \rightarrow \text{End}_{\text{Mnd}}(M)$ un morphisme de monoïdes tel que l'action $N \times M \rightarrow M$ déduite est continue. L'ensemble $M \times N$ muni de la loi

$$\forall (m_1, m_2, n_1, n_2) \in M^2 \times N^2, (m_1, n_1) \cdot_\lambda (m_2, n_2) = (m_1 \lambda(n_1)(m_2), n_1 n_2)$$

est un monoïde topologique que l'on note $M \rtimes_\lambda N$.

Proposition A.1.10. Soient M et N deux monoïdes topologiques et fixons un morphisme de monoïdes $\lambda : N \rightarrow \text{End}_{\text{Mnd}}(M)$ tel que l'action de N sur M déduite est continue.

1. Le monoïde topologique $M \rtimes_\lambda N$ représente le foncteur

$$\text{MndTop} \rightarrow \text{Ens}, S \mapsto \left\{ \text{tels que } \begin{array}{c} (b : M \rightarrow S, c : N \rightarrow S) \text{ continus} \\ \forall (n, m) \in N \times M, c(n)b(m) = b(\lambda(n)(m))c(n) \end{array} \right\}.$$

2. Les deux foncteurs

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \{\text{Actions continues de } M \rtimes_\lambda N \text{ sur } X\}$$

et

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \text{Paire d'actions continues } (\cdot_M, \cdot_N) \text{ de } M \text{ et } N \text{ sur } X \\ \text{telles que } \forall (m, n, x) \in M \times N \times X, n \cdot_N (m \cdot_M x) = (\lambda(n)(m)) \cdot_M (n \cdot_N x) \end{array} \right\}$$

sont isomorphes. Le même résultat est vrai avec les catégories MndTop , AnnTop , etc, comme catégories sources.

Définition A.1.11. Soit M, N deux monoïdes topologiques et λ une action continue de M sur le monoïde N . Soit également $I < N$ et $\kappa : I \rightarrow M$ un morphisme de monoïde. Nous supposons de plus que $I \triangleleft N$, que

$$\forall (i, m) \in I \times M, \kappa(i)m = \lambda(i)(m)\kappa(i)$$

et que

$$\forall (i, j, n) \in I^2 \times N \text{ tels que } ni = jn, \lambda(n)(\kappa(i)) = \kappa(j).$$

Nous définissons

$$(M \rtimes_\lambda N) / \sim_{I \sim} := (M \rtimes_\lambda N) / \{((\kappa(i), 1_N), (1_M, i)) \mid i \in I\}.$$

Remarque A.1.12. Les trois conditions ne sont pas nécessaire à la définition mais servent à capturer une famille de quotients raisonnables à décrire. La première condition semble raisonnable quitte à remplacer I par le sous-groupe distingué

engendré. Le deuxième condition impose que i et $\lambda(i)$ ait la même "action par conjugaison" sur M , la troisième que les actions par conjugaison de N sur I et sur $\kappa(I)$ soient cohérentes.

Proposition A.1.13. *Conservons le cadre de la Définition A.1.11 et supposons que $\lambda(I)$ est formé d'automorphismes. La relation d'équivalence par laquelle nous quotientons est exactement la clôture symétrique de*

$$\forall(m, n, i), [(\kappa(i), 1_N)(m, n) = (\kappa(i)m, n)] \mathcal{R} [(\lambda(i)(m), in) = (1_M, i)(m, n)].$$

Démonstration. La Proposition A.1.5 dit déjà que la relation d'équivalence par laquelle nous quotientons est la clôture symétrique et transitive de

$$\begin{aligned} \forall(m, m', n, n', i) \in M^2 \times N^2 \times I, \quad & (m, n)(\kappa(i), 1_N)(m, m') \mathcal{Q} (m, n)(1_M, i)(m', n') \\ \text{i.e. } & (m\lambda(n)(\kappa(i)m'), nn') \mathcal{Q} (m\kappa(ni)(m'), nin'). \end{aligned}$$

Fixons (m, m', n, n', i) comme ci-dessus. Pour j tel que $ni = jn$ et $n'' = nn'$ et $m'' = \lambda(n'')^{-1}(m)\lambda(n)(m')$, nous obtenons que

$$(m, n)(\kappa(i), 1_N)(m, m') = (\kappa(j), 1_N)(m'', n'')$$

et

$$(m, n)(1_M, i)(m', n') = (1_M, j)(m'', n'').$$

Il nous reste simplement à démontrer que sa clôture symétrique est transitive. Pour cela, considérons une suite

$$(\kappa(i)m, n) \mathcal{Q} (\lambda(i)(m), in) = (\kappa(j)m', n') \mathcal{Q} (\lambda(j)(m'), jn').$$

De l'égalité centrale nous déduisons que $\lambda(i)(m) = \kappa(j)m'$ et $in = n'$. Le terme de droite se réécrit donc

$$(\lambda(j)(m'), jn') = (\lambda(ji)(\lambda(i)^{-1}(m')), jin)$$

En posant $m'' = \lambda(i)^{-1}(m')$, on obtient que

$$\begin{aligned} \kappa(ji)m'' &= \kappa(j)\kappa(i)\lambda(i)^{-1}(m') \\ &= \kappa(j)m'\kappa(i) \\ &= \lambda(i)(m)\kappa(i) \\ &= \kappa(i)m \end{aligned}$$

où le passage à la troisième ligne utilise l'égalité ci-dessus et où les passages à la deuxième ligne à la quatrième utilise les hypothèses de définition de $(M \rtimes_{\lambda} N) / \sim I \sim$. Les deux extrêmes de la ligne appartiennent donc à la relation comme $(\kappa(ji)m'', n)\mathcal{Q}(\lambda(ji)(m''), jin)$. \square

Donnons à présent quelques propriétés sur les sous-groupes distingués et les quotients.

Proposition A.1.14. 1. Soit $N \triangleleft M$ deux monoïdes et \mathcal{R} une relation d'équivalence vérifiant (Q1). Alors, l'image de N est distinguée dans M/\mathcal{R} .

2. Soit $M_0 < M$. Pour que $(M_0 \times \{1_N\}) \triangleleft (M \rtimes_{\lambda} N)$, il faut et suffit que $M_0 \triangleleft M$ et que pour tout $n \in N$, l'endomorphisme $\lambda(n)$ se restreigne-corestreigne en un endomorphisme surjectif de M_0 . Dans ce cas, il existe un isomorphisme naturel de monoïdes topologiques

$$(M \rtimes_{\lambda} N) / (M_0 \times \{1_N\}) \xrightarrow{\sim} (M/M_0) \rtimes_{\lambda} N.$$

3. Gardons les notations du point précédent avec des monoïdes topologiques, supposons que λ induit une action continue $N \times M \rightarrow M$ et ajoutons la donnée d'un sous-monoïde $I < N$ et d'un morphisme continu $\kappa : I \rightarrow M$ qui vérifie les hypothèses de la Définition A.1.11 et tels que $\kappa^{-1}(M_0) \triangleleft N$. Alors les morphismes λ et κ passent au quotient en $\bar{\lambda} : N/\kappa^{-1}(M_0) \rightarrow \text{End}_{\text{Mnd}}(M/M_0)$ qui fournit une action continue et $\bar{\kappa} : I/\kappa^{-1}(M_0) \rightarrow M/M_0$ qui vérifient encore les hypothèses de la Définition A.1.11. En appelant M_1 l'image de M_0 dans $(M \rtimes_{\lambda} N) / \sim I \sim$, elle y est distinguée et nous avons une identification naturelle

$$\left((M \rtimes_{\lambda} N) / \sim I \sim \right) / M_1 \xrightarrow{\sim} \left(M/M_0 \rtimes_{\bar{\lambda}} N/\kappa^{-1}(M_0) \right) / \sim I/\kappa^{-1}(M_0) \sim.$$

Démonstration. Les deux premiers énoncés se démontrent à la main en écrivant des égalités entre classes. Pour le troisième énoncé, utilisez les deux premiers pour démontrer les distinctions et construisez l'isomorphisme par propriété universelle. \square

A.2 Cohomologie d'Eilenberg-Mac Lane des monoïdes topologiques

Soit \mathcal{S} un monoïde topologique. On considère la catégorie $\mathcal{S}\text{-AbTop}$ des groupes abéliens topologiques munis d'une action continue de \mathcal{S} . La catégorie n'est pas abélienne, mais nous pouvons tout de même définir des complexes en imitant l'expression de la cohomologie d'Eilenberg-Mac Lane par la résolution de Bar [Wei94, §6.5] et son adaptation au cas topologique dans [KV22, §2].

Définition A.2.1. Soit A un \mathcal{S} -groupe abélien topologique. On définit un complexe de groupes abéliens

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathcal{S}, A) := \left[A \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}, A) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^2, A) \rightarrow \cdots \right]$$

où $d^i : \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^i, A) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}^{i+1}, A)$ est donné par

$$\begin{aligned} (d^i f)(s_1, \dots, s_{i+1}) &= s_1 f(s_2, \dots, s_{i+1}) + \sum_{k=1}^i (-1)^i f(s_1, \dots, s_k s_{k+1}, \dots, s_{i+1}) \\ &\quad + f(s_1, \dots, s_i) \end{aligned}$$

Ses groupes de cohomologie sont notés $H_{\mathrm{cont}}^i(\mathcal{S}, A)$. Ce complexe est fonctoriel en A .

Dans ce cadre général, il est probablement illusoire d'espérer de bonnes propriétés. On remarque tout de même que $H_{\mathrm{cont}}^0(\mathcal{S}, A) = A^{\mathcal{S}}$.

Lemme A.2.2. *Le foncteur $A \mapsto \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathcal{S}, A)$ commute aux sommes directes.*

Dans le cas de suites exactes courtes strictes avec section ensembliste continue [KV22, Lemme 2.1.2] énonce qu'il y a une suite exacte longue associée. Nous démontrons une version affaiblie pour une suite exacte courte.

Proposition A.2.3. *Soit*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte courte stricte de \mathcal{S} -groupes abéliens topologiques, i.e. telle que la topologie de A est celle induite par B et que la topologie de C est la topologie quotient depuis B . Alors, il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow A^{\mathcal{S}} \rightarrow B^{\mathcal{S}} \rightarrow C^{\mathcal{S}} \rightarrow H_{\mathrm{cont}}^1(\mathcal{S}, A)$$

Démonstration. La suite exacte courte stricte induit une suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathcal{S}, A) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathcal{S}, B) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{cont}}(\mathcal{S}, C).$$

En particulier, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_{\mathrm{cont}}^1(\mathcal{S}, A) & \longrightarrow & Z_{\mathrm{cont}}^1(\mathcal{S}, B) & \longrightarrow & Z_{\mathrm{cont}}^1(\mathcal{S}, C) \end{array}$$

Le lemme du serpent conclut. □

