TD n°12 : Formes quadratiques (et révision)

14 et 17/01/2025

Exercice 1. Quelques réductions

Une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n est toujours équivalente à $b(X,Y) = x_1y_1 + \ldots + x_sy_s - x_{s+1}y_{s+1} - \ldots - x_ry_r$. On appelle r le rang et $(s, r-s)$ la signature. Donner le rang et la signature pour les forme bilinéaires associées aux formes quadratiques suivantes :

1. La forme $f((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. La forme $g((x,y)) = 4xy$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. La forme $\mathrm{Tr}(A)^2$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. La forme $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas de $\mathbb{F}_p$, pour $p \neq 2$, nous nous intéressons à la dimension 2.

5. Combien y a-t-il de carrés dans $\mathbb{F}_p$?
6. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{F}_p^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a une solution.
7. ● En déduire qu'il n'y a que deux classes d'équivalence de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur $\mathbb{F}_p^2$. À quelle classe un plan hyperbolique appartient-il ?

Correction de l'exercice 1 :

1. On vérifie que $f((x,y,z)) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. Les trois coordonnées dans les carrés sont libres, donc la forme est de rang 3 et de signature $(3,0)$.
2. On écrit que $g((x,y)) = (x+y)^2 - (x-y)^2$. Les coordonnées dans les carrés sont libres, donc la forme est de rang 2 et de signature $(1,1)$.
3. On écrit que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. La forme est de rang n^2 et de signature $(n^2, 0)$.
4. On écrit que $\mathrm{Tr}(A)^2 = (\sum_i a_{i,j})^2$. La forme est de rang 1 et de signature $(1,0)$.

Exercice 2. Isométrie avec un grand espace fixe

Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un K-espace vectoriel V. Soit H un hyperplan de V et $u \in \mathrm{O}(b)$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$.

1. Supposons que $b_{|(H\times H)}$ est non dégénérée. Démontrer que $H \oplus H^\perp = V$. Démontrer que l'on est dans exactement l'un des deux cas : u est l'identité ou u est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Supposons que $b_{|(H\times H)}$ est dégénérée. En déduire que tout élément de $V \backslash H$ n'appartient pas à $H^\perp$. Démontrer que u est l'identité.

Correction de l'exercice 2 :

1. L'hypothèse $b_{|(H\times H)}$ non dégénérée se traduit exactement par $H\cap H^\perp = \{0\}$. Dans ce cas, les identités entre dimensions affirment que $H\oplus H^\perp = V$. Soit v une base de $H^\perp$ (qui est de dimension 1 puisque H est un hyperplan). Puisque u préserve b, on sait que $u(v)\in H^\perp$. Les deux cas demandées correspondent à $u(v) = \pm 1$ et sont distincts par $\mathrm{car}(K)\neq 2$.

   En posant $u(v) = \lambda v$, on a
   $$\lambda^2 b(v,v) = b(u(v),u(v)) = b(v,v).$$
   Puisque v est orthogonal à H et que b n'est pas dégénérée, on sait que $b(v,v)\neq 0$, donc que $\lambda^2 = 1$. Ceci conclut.

2. Soit $v\in V\backslash H$. Puisque $H^\perp$ est de dimension 1 et $b_{|(H\times H)}$ non dégénérée, on sait que $H^\perp\subset H$, d'où $v\notin H^\perp$.

   Posons $u(v) = \lambda v + h$. Posons également $h_0\in H^\perp$ qui est tel que $b(h_0,v)\neq 0$ pour les mêmes raisons que ci-dessus. On obtient
   $$b(h_0,v) = b(u(h_0),u(v)) = b(h_0,\lambda v + h) = \lambda b(h_0,v)$$
   d'où $\lambda = 1$. On en déduit aussi que $v+h = u(v) = u^2(v-h)$ ce qui implique sur les formes quadratiques l'égalité entre
   $$b(v+h,v+h) = b(v,v) + 2b(v,h) + b(h,h)$$
   $$b(v,v) \text{ et}$$
   $$b(v-h,v-h) = b(v,v) - 2b(v,h) + b(h,h).$$
   Comme on est en caractéristique différente de 2, on en déduit que $b(v,h) = 0$. On finit en réécrivant que
   $$\forall h'\in H,\ b(v,h') = b(u(v),u(h')) = b(v,h') + b(h,h')$$
   ce qui prouve que $h\in H^\perp$. Comme nous avons déjà prouvé $b(v,h) = 0$, et que b est non dégénérée $h = 0$.

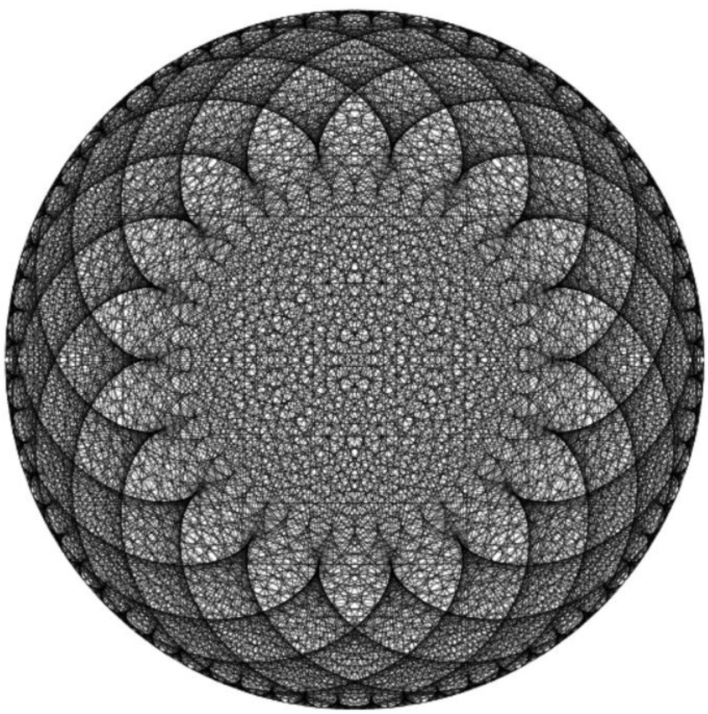

FIGURE 1 – Puissance 65^e appliquée aux racines 1554-ièmes de l'unité.