TD n°10 : Caractères

17 et 20/12/2024

Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Les questions les plus délicates de la feuille sont marquées d'un .

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste après le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Rapide et caractères

Le but de cet exercice est de retrouver certains résultats prestement grâce à la théorie des caractères. Soit G un groupe et k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.

1. Soit X un ensemble fini avec action de G. Rappeler pourquoi $\dim_k(kX)^G$ est égal au nombre d'orbites. Retrouver la formule de Burnside-Frobenius

$$|\{\text{Orbites}\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|.$$

2. Démontrer qu'une représentation V de dimension finie est irréductible si et seulement son dual V^* est irréductible.

Exercice 2. Torsion par un automorphisme

Soit G un groupe et k un corps. Pour toute représentation V de G dans un k-espace vectoriel et tout automorphisme φ de G, on appelle V^φ la représentation de même espace sous-jacent que V et telle que

$$\rho_{V^\varphi} = \rho_V \circ \varphi.$$

1. Démontrer que, si φ est intérieur, alors $V \cong V^\varphi$.
2. Démontrer que V^φ est irréductible dès que V est irréductible.
3. Dans le cas où G est fini, où k est algébriquement clos de caractéristique nulle et où V est de dimension finie, retrouver les deux résultats précédents grâce aux caractères.
4. Sous les mêmes hypothèses, démontrer que φ laisse stable les classes de conjugaison si et seulement si

$$\forall V \text{ irréductible, } V^\varphi \cong V.$$

Exercice 3. Box product, édition augmentée

Soient G et H deux groupes. Soit k un corps et V (resp. W) une représentation de G (resp. de H) sur un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Rappeler comment l'on construit la représentation $V \boxtimes W$ de $G \times H$, d'espace sous-jacent $V \otimes W$. Dans le cas où les représentations sont de dimension finie sur un corps algébriquement clos, démontrer que $V \boxtimes W$ est irréductible dès que V et W le sont.

2. Démontrer que
$$\chi_{V\boxtimes W}(g,h) = \chi_V(g)\chi_W(h).$$
Que dire que $\langle \chi_{V_1\boxtimes W_1}, \chi_{V_2\boxtimes W_2}\rangle$ lorsque G et H sont finis ?
3. Dans le cas où G et H sont finis et où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, retrouver que $V\boxtimes W$ est irréductible dès que V et W le sont.
4. En déduire dans ce cas que toute représentation irréductible de $G\times H$ s'écrit $V\boxtimes W$ pour V et W irréductibles.

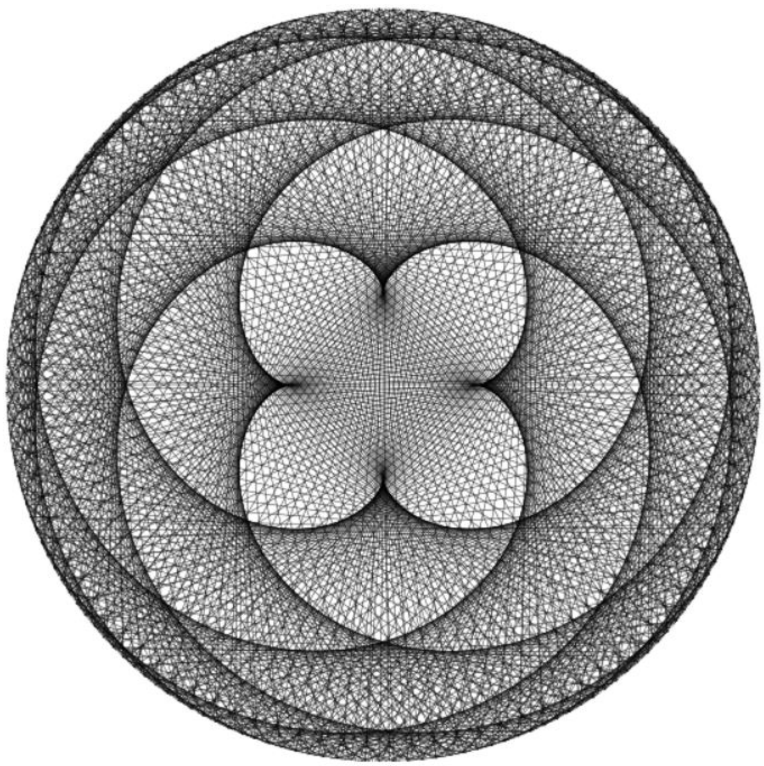

FIGURE 1 – Puissance 702^e appliquée aux racines 1002-ièmes de l'unité.