TD n°9 : Produit tensoriel

10 et 13/12/2024

Nous traiterons les exercices 1, 3, 4 et 5. Les questions les plus délicates de la feuille sont marquées d'un .

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste après le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à nataniel.marquis@dma.ens.fr.

Exercice 1. Endomorphismes entre représentations

Soit k un corps et G un groupe fini tel que $\mathrm{car}(k) \nmid |G|$. On fixe $(\rho_i)_{i\in\mathcal{I}}$ un système de représentants des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G sur des k-espaces vectoriels.

1. Soit V une représentations de G sur un k-espace vectoriel. Démontrer que
$$V[\rho_i] = \sum_{f\,:\,\rho_i\to V} \mathrm{Im}(f)$$
est une sous-représentation de V.
2. Démontrer que
$$V = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} V[\rho_i].$$
3. Nous supposons désormais que V est de dimension finie et nous fixons un isomorphisme $V \xrightarrow{\iota} \oplus\rho_i^{\oplus n_i}$. Démontrer que $V[\rho_i] = \iota^{-1}(\rho_i^{\oplus n_i})$.
4. Nous fixons une autre représentations W et k_i les multiplicités. Soit $f : V \to W$ un morphisme de représentations. Démontrer que $\forall i \in \mathcal{I},\ \ f(V[\rho_i]) \to W[\rho_i]$.
5. Lorsque k est algébriquement clos, démontrer que $\mathrm{Hom}_G(\rho_i^{\oplus n}, \rho_i^{\oplus k})$ est de dimension nk. En déduire la dimension de $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ en fonction des n_i et des k_i.
6. Reprendre la question 9) de l'exercice 3 du précédent TD.

Exercice 2. Produit tensoriel et produit de Schur

Soit k un corps, V_1, V_2, W_1 et W_2 quatre k-espaces vectoriels et $f_i : V_i \to W_i$ deux applications linéaires.

1. Montrer qu'il existe une unique application k-linéaire
$$f_1 \otimes f_2 \,:\, V_1 \otimes_k V_2 \to W_1 \otimes_k W_2$$
telle que $(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$.
2. On ajoute la donnée de deux espaces vectoriels L_1 et L_2 et de $g_i : W_i \to L_i$. Démontrer que
$$(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2).$$

Nous nous intéressons à présent à deux endomorphismes f d'un espace vectoriel V et g d'un espace vectoriel W

1. On dit que V est diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in I}$ s'il existe un isomorphisme $\iota : V \to k^{\otimes I}$ tel que
$$\iota \circ f \circ \iota^{-1} = [(x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)] .$$
Démontrer que si f et g sont diagonalisables, alors $f \otimes g$ aussi.

On définit le produit tensoriel de deux matrices $A \in \mathrm{M}_n(k)$ et $B \in \mathrm{M}_m(k)$ comme
$$A \otimes B := (a_{i,j} b_{i',j'})_{(i,i'),(j,j')\in [\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}.$$

1. Interpréter en terme de produit tensoriel d'endomorphismes.
2. En déduire que le produit tensoriel de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.
3. Démontrer que le produit tensoriel de deux matrices symétriques positives est symétrique positif.
4. Pour $n = m$, démontrer que le produit de Schur $A \star B = (a_{i,j} b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de deux matrices symétriques positives l'est encore.

Exercice 3. Interprétation du déterminant

Soit k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie d. Soit f un endomorphisme linéaire de V.

1. Pour $r \ge 1$, démontrer qu'il existe un unique endomorphisme linéaire $\Lambda^r f$ de $\Lambda^r V$ tel que
$$\forall v_1, \dots, v_r \in V,\ \ (\Lambda^r f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = f(v_1) \wedge \dots f(v_r).$$
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de V. Démontrer que $\Lambda^d f$ est la multiplication par le déterminant de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Retrouver que le déterminant d'une matrice est invariant par conjugaison.

Exercice 4. Interprétation de la trace

Soit k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie.

1. Se convaincre de nouveau que
$$V^* \otimes V \to \mathrm{End}_k(V),\ \ \lambda \otimes v \mapsto [w \mapsto \lambda(w)v]$$
est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.
2. L'application $V^* \times V \to k,\ \ \lambda \otimes v \mapsto \lambda(v)$ est bilinéaire. Soit $\mathcal{B}$ une base de V. Démontrer que la composée
$$\mathrm{End}_k(V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V \to k$$
est l'application trace dans la base $\mathcal{B}$.

Cette application a le mérite de ne pas avoir besoin de choix de $\mathcal{B}$ pour être définie. Elle est *naturelle*.

Exercice 5. Box product

Soient G et H deux groupes. Soit k un corps et V (resp. W) une représentation irréductible de G (resp. de H) sur un k-espace vectoriel. Rappeler comment l'on construit la représentation $V \square W$ de $G \times H$, d'espace sous-jacent $V \otimes W$. Démontrer qu'elle est irréductible.

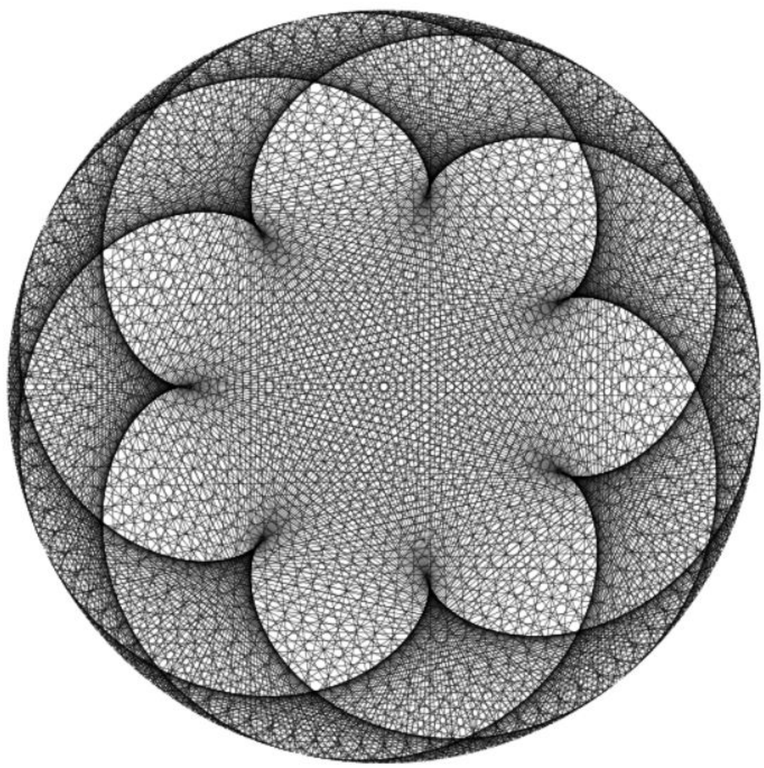

FIGURE 1 – Puissance 701^e appliquée aux racines 1001-ièmes de l'unité.