

Note pour les mathématiques condensées

Nataniel Marquis

6 octobre 2025

Ce texte a pour objet de retracer certaines de mes réflexions lors de mon introduction aux ensembles condensés, commençant par les notes de cours [CS19], [CS20] et [CS22] de D. Clausen et P. Scholze, puis le cours "Mathématiques solides" d'A.-C. Le Bras du master de mathématiques fondamentales et enfin la semaine de conférence "Condensed mathematics" au CIRM. De nombreuses notions et définitions qui sont abordées dans lesdites notes ne seront pas rappelées; nous essaierons plutôt d'écrire certains détails qui m'ont permis d'ajouter de la fluidité à ma lecture assez novice de ces notes, ou d'ajouter des détails qui m'ont également été nécessaires bien que probablement très élémentaires.

Nombreuses de ces questions sont venues lors de discussions sur les mathématiques condensées avec Antoine Ducros, dont bon nombres ont abouties à expliciter les détails qui se trouvent dans le présent document. Ce présent document a ensuite été nourri lors de la semaine de conférence à Luminy sur les mathématiques condensées en mars 2023, pour laquelle je tiens chaleureusement à remercier les organisateur·trice·s, les orateur·trice·s et tous les participant·e·s. Un grand merci également à Babine, qui a assisté aux derniers exposés et dont vous trouvez une photographie compromettante ci-dessous.



Table des matières

1	Topologie générale	3
2	Sites et topoi	6
2.1	Produit tensoriel sur $A\text{-Mod}$	6
2.2	Hom interne dans $A\text{-Mod}$	8
2.3	A -modules libres et interaction avec les précédents foncteurs	10
2.4	La catégorie $A\text{-Alg}$	11
3	Mathématiques condensées	13
3.1	Quels sont les espaces topologiques condensés ?	13
3.2	Descriptions de colimites	14
3.3	Construction de la "faisceautisation" pour les petits préfaisceaux	15
3.4	Produit tensoriel dans le cadre condensé	17
3.5	Modules libres dans le cadre condensé	18
3.6	Hom interne dans le cadre condensé	19
3.7	Les catégories AbCond , $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ et autres	19
4	Mathématiques solides	21
4.1	Quelques calculs	21
4.2	À propos de certaines solidifications obscures	22
4.3	Calculs dans le monde light solide	24
4.4	Un dévissage topologique	25
5	Anneaux analytiques	27
5.1	Anneaux analytiques simples : cas discret et p -adique	27
5.2	Où sont les algèbres d'Iwasawa dans le monde solide ?	30
6	ANNEXE. Ludothèque catégorique	33
6.1	Catégories monoïdales et objets monoïdaux	33
6.2	Objets monoïdaux idempotents	35

1 Topologie générale

Dans un premier temps, nous rappelons que [CS19, Proposition 1.7] affirme que la catégorie des espaces topologiques κ -compactement engendrés s'envoie de manière pleinement fidèle vers la catégorie des κ -ensembles condensés. Nous commençons donc par regarder d'un peu plus près la notion d'espace κ -compactement engendré, et d'autres variantes que nous introduisons par souci d'exhaustivité.

Définition 1.1. Un espace topologique X est dit quasi-compactement engendré si une application $X \rightarrow Y$ vers un espace topologique Y quelconque est continue si et seulement si pour toute application continue d'un quasi-compact K vers X , la composée $K \rightarrow Y$ est continue.

Un espace topologique X est compactement engendré si une application $X \rightarrow Y$ vers un espace topologique Y quelconque est continue si et seulement si pour toute application continue d'un compact K vers X , la composée $K \rightarrow Y$ est continue.

Nous définissons de manière analogue les espaces κ -quasi-compactement engendrés (resp. κ -compactement engendrés) en imposant dans la définition que les espaces quasi-compacts (resp. compacts) considérés sont κ -petits.

Proposition 1.2. Soit X un espace topologique. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) L'espace X est quasi-compactement engendré.
- ii) Une application vers un espace topologique $X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout quasi-compact K de X , la composée par l'inclusion $K \rightarrow X$ est continue.
- iii) Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si pour tout quasi-compact $K \subseteq X$, l'intersection $U \cap K$ est ouverte dans K .
- iv) L'espace X est κ -quasi-compactement engendré pour un certain cardinal κ .
- v) L'espace X est κ -quasi-compactement engendré pour tout $\kappa > |X|$.

Démonstration. ii) \Leftrightarrow iii) : supposons que ii) est vérifiée. Un ouvert vérifie automatiquement la propriété du point trois et réciproquement, si $U \subseteq X$, considérons l'application $X \rightarrow \{\eta, \varepsilon\}$ qui envoie U sur η et son complémentaire sur ε . Nous munissons $\{\eta, \varepsilon\}$ de la topologie pour laquelle η est ouvert mais pas ε . Cette application est continue si et seulement si U est ouvert. Or, d'après 2., elle est continue si et seulement si pour tout quasi-compact K de X , la flèche $K \rightarrow \{\eta, \varepsilon\}$ est continue. Autrement dit, si et seulement si chaque $U \cap K$ est ouvert dans K .

Supposons que iii) est vérifiée et prenons une application $f : X \rightarrow Y$ telle que toutes les composées $f_K : K \rightarrow Y$ sont continues. Soit V un ouvert de Y . Par 3., nous avons que $f^{-1}(V)$ est ouvert si et seulement si chaque $f^{-1}(V) \cap K$ est ouvert dans K . Puisque $f^{-1}(V) \cap K = f_K^{-1}(V)$, nous avons terminé la preuve.

ii) \Leftrightarrow v) \Leftrightarrow i) : rappelons qu'une classe \mathcal{C} de flèches $K \rightarrow X$ est cofinale (dans la catégorie des applications continues d'un quasi-compact vers X) si toute application continue d'un quasi-compact vers X se factorise par l'une de ces flèches. Nous démontrons d'abord que tester la continuité d'une application $f : X \rightarrow Y$ sur les applications continues $K \rightarrow X$ est équivalent à la tester sur les flèches de \mathcal{C} . L'une des implications est limpide. Pour l'autre, si toutes composition par des éléments de \mathcal{C} sont continues, prenons $g : K' \rightarrow X$ continue. Elle se factorise en $K' \xrightarrow{g_1} K \xrightarrow{g_2} X$ où g_2 appartient à \mathcal{C} . Il en découle que $f \circ g_2$ est continue, a fortiori que $f \circ g$ l'est en précomposant par g_1 .

Pour les équivalences qui nous préoccupent dans ce point, nous considérons les classes de flèches formées des morphismes depuis des quasi-compacts κ -petits pour un certain $\kappa > |X|$, ou depuis des quasi-compacts de X . Il suffit de prouver que ces classes sont cofinales, donc de prouver que la plus petite de ces classes est cofinale. Or, toute application continue $K' \rightarrow X$ se factorise par son image, qui est un quasi-compact de X . Ceci conclut.

v) \Rightarrow iv) \Rightarrow i) : tester la continuité sur une classe de flèches plus restreinte donne une notion plus forte. Ceci prouve la deuxième implication, la première étant évidente. □

Pour manipuler plutôt des compacts que des quasi-compacts, nous pouvons utiliser une classe d'espaces compacts qui se comportent particulièrement : les extrêmement discontinus. Nous conduisons une analyse semblable à la précédente, mais dont les résultats seront moins concis.

Définition 1.3. Soit X un espace topologique compact. Sont équivalentes (voir entre autres [Gle58]) :

- i) L'adhérence de tout ouvert de X est ouverte.
- ii) Toute surjection $K \twoheadrightarrow X$ depuis un compact se scinde.
- iii) L'espace X est rétract de la compactification de Stone-Čech βX_0 d'un ensemble discret X_0 .
- iv) L'espace X est un objet projectif de la catégorie des espaces topologiques compacts.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que X est extrêmement discontinu.

Lemme 1.4. *Soit X un espace topologique T_1 et $f : \tilde{S} \rightarrow X$ une application continue depuis un espace extrêmement discontinu. Alors, pour tout cardinal indénombrable inaccessible $\kappa > |X|$, il existe un extrêmement discontinu S qui est κ -petit et par lequel f se factorise.*

Démonstration. Pour tout couple de points distincts $(x, y) \in X^2$, les sous-espaces $f^{-1}(\{x\})$ et $f^{-1}(\{y\})$ sont des fermés disjoints de \tilde{S} . Puisque \tilde{S} est profini, il est possible de séparer ces fermés par deux ouverts-fermés disjoints. Autrement dit, nous avons une fonction $f_{x,y} : \tilde{S} \rightarrow \{x, y\}$ où le but est muni de la topologie discrète, qui envoie $f^{-1}(\{x\})$ sur x et $f^{-1}(\{y\})$ sur y . Appelons f_X le produit de ces applications, qui est encore continue de \tilde{S} vers $\prod_{x \neq y} \{x, y\}$. Puisque \tilde{S} est quasi-compact et que le produit est séparé, l'image T de f_X est un compact, de cardinal inférieur à $2^{|X| \times |X|} < \kappa$. Soient s_1, s_2 deux points de \tilde{S} dont les images dans X sont différentes. Il s'en suit que leurs images par une certaine $f_{x,y}$ sont différentes, donc que leurs images par f_X sont différentes. Ceci prouve que f se factorise ensemblistement comme

$$\tilde{S} \xrightarrow{f_X} T \xrightarrow{g} X.$$

Prouvons que g est continue. Pour tout fermé F de X , l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est fermée. Or, puisque f_X est une application continue d'un quasi-compact vers un séparé, elle est fermée ce qui implique que $f_X(f^{-1}(F))$, qui vaut $g^{-1}(F)$ puisque f_X est surjective. Nous prenons ensuite $S = \beta T$ extrêmement discontinu, toujours κ -petit puisque ce dernier est inaccessible. Le produit fibré $\tilde{S} \times_T S$ est compact et son morphisme structural vers S est surjectif (c'est le cas du morphisme depuis S dans le diagramme qui le définit). Puisque \tilde{S} est extrêmement discontinu, on trouve une section allant de \tilde{S} vers le produit fibré. En post-composant cette section par $\tilde{S} \times_T S \rightarrow S$ nous pouvons factoriser $\tilde{S} \rightarrow T$ par S , soit en mettant bout à bout tous les morphismes, factoriser $\tilde{S} \rightarrow X$ par S . \square

Proposition 1.5. *Soit X un espace topologique. Les énoncés suivants sont équivalents.*

- i) L'espace X est compactement engendré.
- ii) Une application vers un espace topologique $X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour toute application continue $S \rightarrow X$ depuis un extrêmement discontinu, la composée par l'inclusion $S \rightarrow Y$ est continue.

Si X est T_1 , les deux énoncés sont également équivalents aux énoncés suivants :

- iii) L'espace X est κ -compactement engendré pour un certain cardinal κ .
- iv) L'espace X est κ -compactement engendré pour tout $\kappa > |X|$ indénombrable inaccessible.

Si X est faiblement séparé¹, les quatre énoncés sont également équivalents aux énoncés suivants :

- v) Une application vers un espace topologique $X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout compact K de X , la composée par l'inclusion $K \rightarrow Y$ est continue.
- vi) Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si pour tout compact $K \subseteq X$, l'intersection $U \cap K$ est ouverte dans K .

Enfin, si X est séparé, les six énoncés sont également équivalents à l'énoncé suivant :

- vii) L'espace X est quasi-compactement engendré.

1. Voir [nLab, "Weakly Hausdorff topological space"] pour une introduction concise du concept.

Démonstration. ii) \Rightarrow i) \Rightarrow vii) et v) \Rightarrow iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow i) : pour les mêmes raisons que pour la version quasi-compacte, restreindre les morphismes sur lesquels tester la continuité fournit une notion plus forte.

v) \Leftrightarrow vi) : se décalque sur le cas quasi-compact.

i) \Rightarrow ii) : prenons ainsi une application $X \rightarrow Y$ continue dès qu'on la pré-compose avec une application continue depuis un extrêmement discontinu S . Soit $K \rightarrow X$ une application continue puis un compact. Nous pouvons la pré-composer par le morphisme usuel $\beta(K^{\text{disc}}) \rightarrow K$ pour un compact. Ce morphisme surjectif allant d'un quasi-compact vers un séparé, il est fermé et des arguments décalqués sur le lemme 1.4 impliquent alors que $K \rightarrow X$ est continue puisque $S \rightarrow X$ l'est par hypothèse. L'hypothèse pour appliquer le caractère compactement engendré est vérifiée.

ii) \Rightarrow iv) dans le cas T_1 : pour un espace T_1 , le lemme 1.4 prouve que les morphismes depuis des compacts κ -petits sont cofinaux parmi les morphismes depuis des extrêmement discontinus. L'argument usuel (ou du moins qui commence à l'être depuis quelques preuves) conclut.

i) \Rightarrow v) dans le cas faiblement séparé : grâce à [Lew78, Annexe A, Lemme 1.1], l'image de toute application continue $K \rightarrow X$ depuis un compact est compacte dans le cas où X est faiblement séparé. On en déduit que les inclusions des compacts de X sont cofinales parmi les applications continues depuis des compacts.

vii) \Rightarrow v) dans le cas séparé : l'image de toute application continue $K \rightarrow X$ d'un quasi-compact vers un séparé est un compact. Les inclusions des compacts de X sont donc cofinales parmi les applications continues depuis des quasi-compacts.

□

Remarque 1.6. De cette proposition nous tirons plusieurs remarques intéressantes.

Tout d'abord que sur la classe des espaces faiblement séparés, la propriété d'être compactement engendré se comprend bien : la continuité d'une application se teste sur les compact *de l'espace*. Si dire que $X \mapsto \underline{X}_\kappa$ est pleinement fidèle sur les κ -compactement engendrés se comprend bien en disant que l'on a seulement besoin de garder les applications continues depuis les compacts κ -petits pour comprendre les applications continues vers X , nous comprenons mal comment cela pourrait être possible sans qu'il suffise de tester sur les compacts de X . Pour les espaces faiblement séparés, c'est effectivement suffisant.

Sur la classe des espaces T_1 , il est possible de restreindre le cardinal des ensembles compacts tests. En combinant le fait que les foncteurs de κ - Cond vers λ - Cond pour $\lambda > \kappa$ sont pleinement fidèles (voir [CS19, Proposition 2.9]) et que les \underline{X} sont bien des ensembles condensés dès lors que X est T_1 (voir 3.1), il en découle que le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ des espaces T_1 compactement engendrés vers les ensembles condensés est pleinement fidèle.

Exemple 1.7. Tout compact est compactement engendré. Nous pouvons donner un exemple un peu plus subtil de quasi-compact non séparé² qui se retrouve tout de même compactement engendré. Soit X un ensemble infini, que l'on munit de la topologie cofinie. Par contraposée, il faut prouver que pour toute application non continue $X \rightarrow Y$, elle reste non continue après pré-composition par un morphisme depuis un compact. En particulier, il faut et suffit de démontrer que pour tout $A \subset X$ qui n'est pas fermé, il exist un compact $K \rightarrow X$ avec un morphisme continue vers X tel que l'image réciproque de A n'est pas fermée. Soit A un tel sous-ensemble non fermé, i.e. $A \subsetneq X$ et infini. Prenons également $x \in X \setminus A$. Munissons $K = A \sqcup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les sous-ensembles de A et les sous-ensembles cofinis auxquels ∞ appartient. L'espace K est compact ; l'application de K dans X qui envoie A sur lui-même et ∞ sur x est continue et l'image réciproque de A n'est pas fermée dans K .

Exemple 1.8. Petit cas particulier qui illustre que le caractère T_1 n'est pas automatique pour un compactement engendré. Pour tout $\kappa \geq 2^{\aleph_0}$, il existe des espaces compactement κ -compactement engendré inaccessible mais qui ne sont pas T_1 . Prenons notre exemple caractéristique $\{\eta, \varepsilon\}$. Une application $f : \{\eta, \varepsilon\} \rightarrow X$ est continue si et seulement si tout ouvert contenant $f(\varepsilon)$ contient également $f(\eta)$. Ceci se vérifie après précomposition avec l'application continue $[0, 1] \rightarrow \{\eta, \varepsilon\}$ associée au fermé $[1/2, 1]$. Savoir que notre espace non T_1 préféré est compactement engendré met tout de même un grand coup dans la rigidité que l'on pourrait imputer à cette propriété.

2. Il n'est même pas faiblement séparé en général, en prenant par exemple $[0, 1/2]$ muni de la topologie discrète qui s'envoie dans $[0, 1]$ avec la topologie cofinie.

2 Sites et topoi

Cette section vise à étudier de manière exhaustive la catégorie $A\text{-Mod}$ des modules sur un faisceau en anneaux. L'essentiel des propositions sont une réécriture avec des notations plus adaptée à la suite de la présente note de la notion de topos annelé dans [GV72, Exposé IV, sections 11-12].

Nous fixons pour la suite un petit site \mathcal{C} . Le topos des faisceaux sur \mathcal{C} est muni de sa structure monoïdale donnée par le produit de faisceaux, et d'unité le faisceau constant associé à un singleton. Nous fixons également A un faisceau en anneaux commutatifs sur \mathcal{C} .

Définition 2.1. La catégorie $A\text{-Mod}$ est la catégorie dont les objets sont les paires formées d'un faisceau en groupes abéliens sur \mathcal{C} et d'un morphisme $\mu : A \times M \rightarrow M$ qui fait commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 A \times M \times M & \xrightarrow{\text{Id}_A \times \Sigma_M} & A \times M \\
 \Delta_A \times \text{Id}_{(M \times M)} \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \times M \times A \times M & & \\
 \mu \times \mu \downarrow & & \\
 M \times M & \xrightarrow{\Sigma_M} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A \times A \times M & \xrightarrow{\Sigma_A \times \text{Id}_M} & A \times M \\
 \text{Id}_{(A \times A)} \times \Delta_M \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \times M \times A \times M & & \\
 \mu \times \mu \downarrow & & \\
 M \times M & \xrightarrow{\Sigma_M} & M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \times A \times M & \xrightarrow{\text{Id}_A \times \mu} & A \times M \\
 \pi_A \times \text{Id}_M \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \times M & \xrightarrow{\mu} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{1_A \times \text{Id}_M} & A \times M \\
 & \searrow \text{Id}_M & \downarrow \mu \\
 & & M
 \end{array}$$

où $\Sigma_M : M \times M \rightarrow M$ est l'addition sur M , où Σ_A (resp. π_A , resp. 1_A) est l'addition (resp. la multiplication, resp. l'unité) de A . Ces diagrammes correspondent, de haut en bas et de gauche à droite, à la distributivité de μ sur Σ_M , la distributivité de μ sur Σ_A , l'associativité jointe de μ et π_A , la description de la multiplication par 1.

De manière équivalente, cela signifie que l'on se donne une structure de $A(X)$ -module sur $M(X)$ qui est fonctorielle en X . Cette catégorie est abélienne.

La rédaction dans les notations du présent document de cette propriété est reportée à des heures sombres de l'auteur, qui renvoie le lecteur à [GV72, Exposé II, Proposition 6.7].

2.1 Produit tensoriel sur $A\text{-Mod}$

Nous commençons par nous intéresser à la construction du produit tensoriel sur la catégorie $A\text{-Mod}$.

Définition 2.2. Pour M, N deux objets de $A\text{-Mod}$, nous définissons le produit tensoriel $M \otimes_A N$ comme la faisceautisation

$$\left(X \mapsto M(X) \otimes_{A(X)} N(X) \right)^\# .$$

Proposition 2.3. Soit B un préfaisceau en anneaux sur \mathcal{C} . Soit $B\text{-pMod}(\mathcal{C})$ la catégorie des préfaisceaux en groupe abéliens sur \mathcal{C} muni d'un morphisme $B \times M \rightarrow M$ qui fasse commuter les diagrammes que l'on imagine et dont les morphismes commutent à ces morphismes. Le foncteur

$$\begin{array}{ccc}
 B^\#\text{-Mod} & \rightarrow & B\text{-pMod}(\mathcal{C}) \\
 (M, f : B^\# \times M \rightarrow M) & \mapsto & (M, g : B \times M \rightarrow B^\# \times M \rightarrow M)
 \end{array}$$

est correctement défini et possède un adjoint à gauche.

Démonstration. Pour vérifier la bonne définition, il faut vérifier que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
B \times M \times M & \xrightarrow{\text{Id}_B \times -} & B \times M \\
\Delta_B \times \text{Id}_{M \times M} \downarrow & & \downarrow g \\
B \times M \times B \times M & & \\
g \times g \downarrow & & \\
M \times M & \xrightarrow{+} & M
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
B \times B \times M & \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}_M} & B \times M \\
\text{Id}_{B \times B} \times \Delta_M \downarrow & & \downarrow g \\
B \times M \times B \times M & & \\
g \times g \downarrow & & \\
M \times M & \xrightarrow{+} & M
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
B \times B \times M & \xrightarrow{\text{Id}_B \times g} & B \times M \\
\pi \times \text{Id}_M \downarrow & & \downarrow g \\
B \times M & \xrightarrow{g} & M
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{1 \times \text{Id}_M} & B \times M \\
& \searrow \text{Id}_M & \downarrow g \\
& & M
\end{array}$$

où $+$: $M \times M \rightarrow M$ est l'addition, où σ (resp. π , resp. 1) sont l'addition (resp. la multiplication, resp. l'unité) de B . Nous ne rédigeons que le troisième, à partir de la commutativité du diagramme pour B^\sharp et f . Par construction de g , nous pouvons étoffer le diagramme pour B et f en un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
& & & \text{Id}_{B^\sharp} \times f & \\
& & & \curvearrowright & \\
B^\sharp \times B^\sharp \times M & & & & B^\sharp \times M \\
& \swarrow & & & \nwarrow \\
& B \times B \times M & \xrightarrow{\text{Id}_B \times g} & B \times M & \longrightarrow & B^\sharp \times M \\
& \downarrow \pi \times \text{Id}_M & & \downarrow g & & \nwarrow f \\
& B \times M & \xrightarrow{g} & M & & \\
& \downarrow & & \nearrow f & & \\
& B^\sharp \times M & & & &
\end{array}$$

où les triangles commutent grâce à la définition de g et à la propriété universelle et commutation aux produits finis de la faisceautisation. L'enveloppe du diagramme commute par hypothèse sur f . Ainsi, comme la commutativité du carré central de teste après faisceautisation, elle se teste sur l'enveloppe.

Pour l'adjonction, un morphisme $g : B \times M \rightarrow M$ la propriété universelle de la faisceautisation et sa commutation aux produits finis fournit un morphisme $f : B^\sharp \times M^\sharp \rightarrow M^\sharp$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
B^\sharp \times M^\sharp & \xrightarrow{f_g} & M^\sharp \\
\downarrow & & \downarrow \\
B \times M & \xrightarrow{g} & M
\end{array}$$

Ce coup-ci, dans le troisième diagramme étoffé, le carré central et les triangles commutent, ce qui impose que l'enveloppe commute. Autrement dit, le foncteur

$$B\text{-pMod}(\mathcal{C}) \rightarrow B\text{-Mod}, (M, g) \rightarrow (M^\sharp, f_g)$$

est bien défini. On vérifie à partir de l'adjonction de la faisceautisation qu'il est bien adjoint à gauche du foncteur précédent. \square

Corollaire 2.4. *Le faisceau $M \otimes_A N$ possède une structure naturelle d'objet de $A\text{-Mod}$.*

Démonstration. Le préfaisceau $X \mapsto M(X) \otimes_{A(X)} N(X)$ possède une structure naturelle d'objet de $A\text{-pMod}(\mathcal{C})$ ce qui fournit par application de l'adjoint de la proposition 2.3 une structure de A -module sur sa faisceautisation. \square

Proposition 2.5. *Les constructions précédente apparaissent dans une catégorie monoïdale canonique*

$$(A\text{-Mod}, \otimes_A, A, a^A, l^A, r^A).$$

Démonstration. D'un point de vue préfaisceautique, il est aisé de construire a^A, l^A, r^A qui fournissent une structure de catégorie monoïdale en rendant fonctorielle les structures monoïdales section par section. En faisceautisant, on obtient l^A et r^A . Pour obtenir l'associativité faisceautique, il faut ajouter les isomorphismes naturels du type

$$\left((M \otimes_A^p N)^\# \otimes_A^p L : \right)^\# \cong ((M \otimes_A^p N) \otimes_A^p L)^\#.$$

Ici \otimes_A^p dénote le produit tensoriel pré-faisceautique³. □

Remarque 2.6. On pourrait définir fonctoriellement la notion d'application A -bilinéaire et démontrer que $M \otimes_A N$ représente le foncteur qui envoie L sur les application A -bilinéaires de $M \times N$ dans L . Cela fournirait une autre démonstration du caractère monoïdal de la structure donnée par \otimes_A .

2.2 Hom interne dans $A\text{-Mod}$

Nous passons à présent à la construction du deuxième foncteur qui nous intéresse : le foncteur Hom interne. Commençons par la remarque suivante :

Remarque 2.7. Supposons que \mathcal{D} soit un site avec un objet final $*$ et que B soit un faisceau en anneaux sur \mathcal{D} . Pour tout couple (M, N) d'objets de $B\text{-Mod}$, l'ensemble $\text{Hom}_{B\text{-Mod}}(M, N)$ possède une structure naturelle de $B(*)$ -module. Un tel morphisme f est une famille fonctorielle de morphismes de $B(X)$ -modules $f_X : M(X) \rightarrow N(X)$. Puisque $*$ est final, il existe une famille fonctorielle de morphismes d'anneaux $b_X : B(*) \rightarrow B(X)$. Pour $\lambda \in B(*)$ et $f, g \in \text{Hom}_{B\text{-Mod}}(M, N)$, nous définissons ainsi

$$(f + \lambda g)_X : M(X) \rightarrow N(X), \quad m \mapsto f(m) + b_X(\lambda)g(m)$$

et nous vérifions que cette formule fournit effectivement une structure de $B(*)$ -module.

Ainsi dans le cas où \mathcal{C} aurait un objet final $*_{\mathcal{C}}$, l'ensemble $\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ posséderait une structure de $A(*_{\mathcal{C}})$ -module. Nous voudrions enrichir cette structure d'ensemble en un objet de $A\text{-Mod}$.

Définition 2.8. Soient M, N deux objets de $A\text{-Mod}$. Nous définissons le préfaisceau $\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ comme

$$\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)(X) = \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}/X}, N|_{\mathcal{C}/X})$$

où \mathcal{C}/X est la catégorie tranchée au-dessus X .

Remarque 2.9. La catégorie tranchée au-dessus de X possède également une topologie : à un recouvrement de $(Y_i \rightarrow Y)$ de Y , on peut associer un recouvrement de $Y \rightarrow X$ en prenant comme objets les $Y_i \rightarrow Y \rightarrow X$ avec les morphismes $Y_i \rightarrow Y$ vers l'objet $Y \rightarrow X$. Les recouvrements de $Y \rightarrow X$ étant donc identifiés aux recouvrements de Y , le foncteur de Grothendieck sur les préfaisceaux commute à la restriction de \mathcal{C} à \mathcal{C}/X . Ainsi, la faisceautisation commute à ladite restriction.

En particulier, la restriction commute aux produits faisceautiques et $A_{\mathcal{C}/X}$ est encore un faisceau en anneaux commutatifs.

Proposition 2.10. Le préfaisceau $\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ est un faisceau, naturellement muni d'une structure d'objet de $A\text{-Mod}$. Les foncteurs $- \otimes_A M$ et $\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, -)$ forment un couple de foncteurs adjoints.

Démonstration. Rédigeons une partie de la démonstration du caractère faisceautique. Nous prenons $(X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ un recouvrement de X et

$$f_i \in \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X_i}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}/X_i}, N|_{\mathcal{C}/X_i})$$

qui coïncident sur chaque $\mathcal{C}/(X_i \times_X X_j)$. Nous voulons montrer qu'il existe un unique

$$f \in \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}/X}, N|_{\mathcal{C}/X})$$

tel que $f|_{\mathcal{C}/X_i} = f_i$. Supposons qu'un tel morphisme f existe. Prenons $Y \rightarrow X$ un objet de \mathcal{C}/X . La famille $(Y \times_X X_i \rightarrow Y)_{i \in I}$ forme un recouvrement. Ainsi, puisque N est un faisceau, le morphisme

$$f(Y \rightarrow X) : M(Y) \rightarrow N(Y)$$

3. N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous trouvez souhaitable de boucher les quelques trous de cette preuve.

est obtenu par propriété universelle de l'égaliseur à partir des

$$f'_i(Y \rightarrow X) : M(Y) \xrightarrow{f(Y \rightarrow X)} N(Y) \xrightarrow{N} N(Y \times_X X_i).$$

La naturalité de f , et son lien avec f_i force cette composée à se décomposer d'une autre manière comme

$$f'_i(Y \rightarrow X) : M(Y) \xrightarrow{M} M(Y \times_X X_i) \xrightarrow{f_i(Y \times_X X_i \rightarrow X_i)} N(Y \times_X X_i)$$

ce qui démontre en particulier l'unicité. Pour l'existence, il faut vérifier que les f'_i ainsi définies se recollent (grâce la condition sur les f_i), puis que f est bien un morphisme de $\mathcal{A}_{\mathcal{C}/X}$ -modules.

Grâce à la remarque 2.7 et puisque \mathcal{C}/X possède X comme objet final, nous avons défini une structure de $A(X)$ -module sur $\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)(X)$. Reste à démontrer qu'elle est fonctorielle. Très exactement, pour tout morphisme $Y \rightarrow X$ de \mathcal{C} , tout élément $\lambda \in A(X)$ et tout couple de morphismes $f, g \in \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}/X}, N|_{\mathcal{C}/X})$, nous avons l'égalité

$$(f + \lambda g)|_{\mathcal{C}/Y} = f|_{\mathcal{C}/Y} + \lambda|_Y g|_{\mathcal{C}/Y}.$$

Ceci se vérifie aisément en utilisant le fait que pour tout objet Z de \mathcal{C}/Y le morphisme structural $Z \rightarrow Y$ est dans \mathcal{C}/X ce qui prouve que $\lambda|_Y$ s'envoie dans $A(Z)$ sur le même élément que λ .

Démontrons enfin l'adjonction. Soient M, N, L trois objets de $A\text{-Mod}$. Un morphisme

$$\varphi \in \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(L \otimes_A M, N)$$

correspond à un morphisme du préfaisceau

$$(X \mapsto L(X) \otimes_{A(X)} M(X))$$

dans N qui est A -linéaire. Autrement dit, il correspond à une famille de morphismes

$$\varphi_X : L(X) \otimes_{A(X)} M(X) \rightarrow N(X)$$

qui sont $A(X)$ -linéaires et fonctoriels en X . Grâce à l'adjonction dans chaque $A(X)\text{-Mod}$, cela correspond à une famille

$$\psi_X : L(X) \rightarrow \text{Hom}_{A(X)\text{-Mod}}(M(X), N(X))$$

de morphismes $A(X)$ -linéaires et fonctoriels en X . Pour chaque objet X , on définit un morphisme

$$\chi_X : L(X) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)(X)$$

comme suit : pour tout objet Y de \mathcal{C}/X , le morphisme χ_X après restriction à Z est donné par la composition

$$L(X) \rightarrow L(Z) \xrightarrow{\psi_Z} \text{Hom}_{A(Z)\text{-Mod}}(M(Z), N(Z))$$

La fonctorialité des ψ_Z assure que ces restrictions se recollent. La définition de la structure de $A(X)$ -module affirme bien que χ_X est un morphisme de $A(X)$ -modules. Enfin, pour tout morphisme $Y \rightarrow X$ et tout objet Z de \mathcal{C}/Y , le morphisme $Z \rightarrow Y$ est canoniquement dans \mathcal{C}/X ce qui implique la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} L(X) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & L(Z) & \longrightarrow \text{Hom}_{A(Z)\text{-Mod}}(M(Z), N(Z)) \\ \uparrow & \nearrow & \\ L(Y) & & \end{array}$$

et prouve la fonctorialité des χ_X . En famille, ils forment ainsi un élément

$$\chi \in \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(L, \underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)).$$

Réciproquement pour tout χ , on construit une famille ψ_X en considérant χ_X post-composé avec les sections sur X depuis $\text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}/X}, N|_{\mathcal{C}/X})$. On vérifie que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre. \square

Remarque 2.11. Soit $Y \rightarrow X$ un objet de $\mathcal{C}_{/X}$, il existe une équivalence de topoi entre $\mathcal{C}_{/Y}$ et $(\mathcal{C}_{/X})_{/(Y \rightarrow X)}$, naturelle en $Y \rightarrow X$. Ceci fournit un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}_{/X}}, N|_{\mathcal{C}_{/X}}) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N))|_{\mathcal{C}_{/X}}$$

naturel en M et N .

Proposition 2.12. Soient L, M, N , des faisceaux $A\text{-Mod}$. Il existe un isomorphisme naturel dans $A\text{-Mod}$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(L \otimes_A M, N) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(L, \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)).$$

Démonstration. Nous construisons l'isomorphisme au niveau des X -sections :

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(L \otimes_A M, N)(X) &= \mathrm{Hom}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}}\left((L \otimes_A M)|_{\mathcal{C}_{/X}}, N|_{\mathcal{C}_{/X}}\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}\text{-Mod}}\left(L|_{\mathcal{C}_{/X}} \otimes_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}} M|_{\mathcal{C}_{/X}}, N|_{\mathcal{C}_{/X}}\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}\text{-Mod}}\left(L|_{\mathcal{C}_{/X}}, \underline{\mathrm{Hom}}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}\text{-Mod}}(M|_{\mathcal{C}_{/X}}, N|_{\mathcal{C}_{/X}})\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{A|_{\mathcal{C}_{/X}}\text{-Mod}}\left(L|_{\mathcal{C}_{/X}}, \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)|_{\mathcal{C}_{/X}}\right) \\ &= [\underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(L, \underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N))](X) \end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne est obtenue en démontrant la commutation du produit tensoriel à la restriction grâce aux arguments de la remarque 2.9, le passage à la troisième utilise la proposition précédente pour le site $\mathcal{C}_{/X}$, cela à la quatrième utilise la remarque précédente. \square

2.3 A -modules libres et interaction avec les précédents foncteurs

Pour parachever notre construction général de foncteurs associés à la catégorie $A\text{-Mod}$, nous construis le A -module libre associé à un faisceau.

Définition 2.13. Pour un faisceau S sur \mathcal{C} , nous appelons $A[S]$ le faisceautisé du préfaisceau

$$X \mapsto A(X)[S(X)].$$

Les morphismes structuraux $S(X) \rightarrow A(X)[S(X)]$ étant fonctoriels en X , ils fournissent après faisceautisation un morphisme de faisceaux $S \Rightarrow A[S]$

Proposition 2.14. Il existe une unique structure de foncteur vers $A\text{-Mod}$ sur $S \mapsto A[S]$ tel que les morphismes $S \rightarrow A[S]$ donnent une transformation naturelle de l'identité vers $A[-] : S \mapsto A[S]$ en tant que foncteurs vers les faisceaux. Le foncteur $A[-]$ est en réalité un foncteur vers $A\text{-Mod}$ et fournit un adjoint à gauche de l'oubli $A\text{-Mod} \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C})$.

Nous avons mieux, l'adjonction fonctionne au niveau de Hom internes, i.e. il existe un isomorphisme de foncteurs allant de $\mathrm{Sch}(\mathcal{S})^{\mathrm{op}} \times A\text{-Mod}$ dans $A\text{-Mod}$ entre $\underline{\mathrm{Hom}}(-, -)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-Mod}}(A[-], -)$.

Enfin, le foncteur $A[-]$ est puissamment symétrique monoidal.

Démonstration. Pour l'existence et l'unicité de la structure de foncteur, considérer que nous voulons une structure de foncteur vers $A\text{-Mod}$. Pour un morphisme $f : S \rightarrow T$, le comportement de $A[f]$ sur l'image dans $A[S](X)$ de $A(X)[S(X)]$ est dicté par la propriété de naturalité. En faisceautisant, nous obtenons la structure souhaitée. Concernant l'adjonction, il faut combiner l'adjonction de $M \mapsto A(X)[M]$ au niveau des sections préfaisceatiques puis l'adjonction de la faisceautisation.

Pour la version interne : soient S un faisceau sur \mathcal{C} , M un objet de $A\text{-Mod}$ et X un objet de \mathcal{C} . Pour tout préfaisceau T sur \mathcal{C} , et tout objet $(Y \rightarrow X)$ dans $\mathcal{C}_{/X}$, l'expression de $T^\sharp(Y)$ ne fait intervenir que les recouvrements de Y dans \mathcal{C} qui peuvent se voir comme les recouvrements de $(Y \rightarrow X)$ dans $\mathcal{C}_{/X}$. Ainsi, nous avons $T|_{\mathcal{C}_{/X}}^\sharp \cong (T|_{\mathcal{C}_{/X}})^\sharp$ et en particulier $(A[S])|_{\mathcal{C}_{/X}} \cong A|_{\mathcal{C}_{/X}}[S|_{\mathcal{C}_{/X}}]$. Ceci permet d'écrire la suite d'isomorphismes fonctoriels en X , S et M suivante

$$\begin{aligned}
\left[\underline{\text{Hom}}_{\text{Sh}(\mathcal{C})}(S, M) \right] (X) &= \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C}/X)}(S|_{\mathcal{C}/X}, M|_{\mathcal{C}/X}) \\
&\cong \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}(A|_{\mathcal{C}/X} [S|_{\mathcal{C}/X}], M|_{\mathcal{C}/X}) \\
&\cong \text{Hom}_{A|_{\mathcal{C}/X}\text{-Mod}}((A[S])|_{\mathcal{C}/X}, M|_{\mathcal{C}/X}) \\
&= (\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(A[S], M))(X)
\end{aligned}$$

qui démontre l'adjonction.

Soient S, T des faisceaux d'ensembles sur \mathcal{C} et X un objet de \mathcal{C} . L'isomorphisme

$$A(X)[(S \times T)(X)] \rightarrow A(X)[S(X)] \otimes_{A(X)} A(X)[T(X)], \quad [(s, t)] \mapsto [s] \otimes [t]$$

est fonctoriel en X et fournit un isomorphisme de préfaisceaux. L'isomorphisme obtenu au niveau des faisceaux est exactement $A[S \times T] \cong A[S] \otimes_A A[T]$ (voir la remarque ?? pour identifier le faisceautisé du but au produit tensoriel des modules libres). L'isomorphisme de $A[\ast] \cong$ provient de la fonctorialité des isomorphismes $A(X)[\ast] \cong A(X)$. Nous nous épargnons la commutation des diagrammes formés à partir de ces morphismes de cohérence, qui découlent des commutations au niveau des sections, i.e. pour de "braves" ensembles et un "authentique" anneau. \square

Ces objets permettent dans certains cas de donner une description alternative du Hom interne.

Proposition 2.15. *Supposons dans la topologie sur \mathcal{C} est sous-canonique. Tout objet de \mathcal{C} peut donc être vu comme un faisceau sur \mathcal{C} . Nous avons alors l'égalité :*

$$\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N) : X \mapsto \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M \otimes_A A[X], N).$$

Démonstration. La suite d'égalité suivante prouve notre énoncé :

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M \otimes_A A[X], N) &= \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(A[X], \underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)) \\
&= \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathcal{C})}(X, \underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)) \\
&= \underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)(X)
\end{aligned}$$

\square

2.4 La catégorie $A\text{-Alg}$

Nous voulons à présent ajouter à nos objets une structure d'algèbre (unitaire associative) sur A , puis construire des objets munis d'une telle structure.

Définition 2.16. La catégorie $A\text{-Alg}$ des A -algèbres possède pour objets les triplets formés d'un A -module M , et de deux morphismes de A -modules $\eta_M : A \rightarrow M$ et $\pi_M : M \otimes_A M \rightarrow M$ qui font commuter les deux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc}
(M \otimes_A M) \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & M \otimes_A (M \otimes_A M) \\
\downarrow \pi_M \otimes \text{Id}_M & & \downarrow \text{Id}_M \otimes \pi_M \\
M \otimes_A M & & M \otimes_A M \\
& \searrow \pi_M & \swarrow \pi_M \\
& M &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& A & \xrightarrow{\eta_M} M \\
& \sim \uparrow & \nearrow \pi_M \\
A \otimes_A A & & \\
\downarrow \eta_M \otimes \eta_M & & \\
M \otimes_A M & &
\end{array}$$

Remarque 2.17. Deux remarques sur cette définition. Nous aurions pu définir la multiplication comme une structure d'anneau qui vérifiait de plus la bilinéarité. Toutefois, puisque la structure monoïdale donnée par $- \otimes_A -$ est déjà construite, il est possible de l'autoriser pour s'épargner des diagrammes. En réalité, l'existence de biproduits dans $A\text{-Mod}$ permet de construire un morphisme canonique

$$(\text{Id}_M \otimes \eta_M) \sqcup (\eta_M \otimes \text{Id}_M) : M \times M \rightarrow M \otimes_A M$$

et la donnée d'une multiplication depuis le produit est bilinéaire si et seulement si elle se factorise par ce morphisme.

Pour les mêmes raisons, dire que η_M est un morphisme d'anneaux est simplifié par le diagramme de droite. Nous pourrions à première vue nous demander en quoi l'isomorphisme $A \otimes_A A \xrightarrow{\sim} A$ est canonique puisqu'il semble pouvoir venir de deux manières de la structure monoïdale : soit en voyant A comme neutre à gauche, soit à droite, soit même en affirmant que la multiplication sur A est bilinéaire et qu'elle se factorise en un isomorphisme. En construisant explicitement la structure monoïdale sur $A\text{-Mod}$, nous nous rendrions compte que les isotransformations naturelles qui illustrent que A est neutre à gauche ou à droite sont exactement construites dans le cas de A à partir de sa structure de A -module, i.e. de la multiplication pour sa structure d'anneau.

Proposition 2.18. *Supposons que S est un objet en monoïdes dans $\text{Sch}(\mathcal{C})$ de multiplication μ et d'unité η . La structure de A -module sur $A[S]$ enrichie par les morphismes $A[\eta]$ et*

$$A[S] \otimes_A A[S] \cong A[S \times S] \xrightarrow{A[\mu]} A[S]$$

munissent $A[S]$ d'une structure de A -algèbre.

Cette construction fournit un foncteur des objets en monoïdes vers $A\text{-Alg}$.

Démonstration. Cela rentre dans un cadre catégorique général que je détaille dans la ludothèque catégorique 6. Pour appliquer [, Proposition 3.1], il faut bien remarquer que $S \mapsto A[S]$ est STRONG symétrique monoïdal et que notre définition de $A\text{-Alg}$ correspond exactement à la définition des objets monoïdes dans $A\text{-Mod}$ (voir [, Monoid in a monoidal category]). \square

3 Mathématiques condensées

3.1 Quels sont les espaces topologiques condensés ?

Commençons par réécrire avec un maximum de détail la caractérisation des espaces topologiques que les problèmes ensemblistes nous autorisent à voir comme des ensembles condensés. Nous reprenons ad verbatim la preuve de [CS19, Proposition 2.15] en dépliant quelques détails.

Lemme 3.1. *Soit X un espace topologique. Le foncteur \underline{X} est un ensemble condensé si et seulement si X est T_1 .*

Démonstration. Sens direct : commençons par traiter le cas le plus pathologique incarné par l'espace topologique $\{\eta, \varepsilon\}$ où η est ouvert mais pas ε . Le foncteur associé est isomorphe à $S \mapsto \text{Fermés}(T)$ via $C^0(T, \{\eta, \varepsilon\}) \rightarrow \text{Fermés}(S)$, $f \mapsto f^{-1}(\{\varepsilon\})$. Supposons qu'il s'agit d'un κ -ensemble condensé. Alors toute application continue f se factorise en $T \xrightarrow{f_1} S \xrightarrow{f_2} \{\eta, \varepsilon\}$ pour un certain S qui est κ -petit et $f^{-1}(\{\eta\})$ est l'image réciproque par f_2 d'un fermé de S . Puisque S est κ -petit et compact, ses fermés sont intersection indexée par un ensemble de cardinal strictement inférieur à κ d'ouverts. Cela devrait également être le cas des fermés de T .

Dans le cas général, en envoyant η sur un point non fermé de X et ε sur un point de son adhérence, nous obtenons une application continue $\{\eta, \varepsilon\} \rightarrow X$. Supposons par l'absurde que X est un κ -ensemble condensé. Prenons T un ensemble extrêmement discontinu et F l'un de ses fermés, qui définit une application continue vers $\{\eta, \varepsilon\}$. Par hypothèse sur X , il existe un espace extrêmement discontinu et κ -petit S tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & \{\eta, \varepsilon\} & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & S & & \end{array}$$

L'image réciproque dans S de l'image de ε correspond à l'image de F , qui est donc fermée. Ceci permet de dire que $S \rightarrow X$ se factorise par $\{\eta, \varepsilon\}$ de manière à faire commuter le triangle rectangle de droite. Nous aurions prouvé que $\{\eta, \varepsilon\}$ est un κ -ensemble condensé, ce qui est impossible.

Sens inverse : supposons que X est T_1 . Nous voulons prouver qu'il existe un cardinal indénombrable inaccessible κ tel que \underline{X} provient d'un κ -ensemble condensé. Ceci signifie que pour tout espace topologique extrêmement discontinu \tilde{S} , nous avons l'égalité

$$\underline{X}(\tilde{S}) = \underset{S \text{ extrêmement discontinu } \kappa\text{-petit}}{\text{colim}}_{\tilde{S} \rightarrow S \text{ continue}} \underline{X}(\tilde{S})$$

ce qui revient à montrer que toute application continue $\tilde{S} \rightarrow X$ se factorise par un extrêmement discontinu κ -petit S en $\tilde{S} \rightarrow S \rightarrow X$.

Prenons pour κ un cardinal indénombrable inaccessible tel que $|X| < \kappa$. Soit $f : \tilde{S} \rightarrow X$ une telle application continue. Pour tout couple de points distincts $(x, y) \in X^2$, les images réciproques $f^{-1}(\{x\})$ et $f^{-1}(\{y\})$ sont des fermés disjoints de \tilde{S} . Puisque \tilde{S} est profini, il est possible de séparer ces fermés par deux ouverts-fermés disjoints. Autrement dit, nous avons une fonction $f_{x,y} : \tilde{S} \rightarrow \{x, y\}$ où le but est muni de la topologie discrète, qui envoie $f^{-1}(\{x\})$ sur x et $f^{-1}(\{y\})$ sur y . Appelons f_X le produit de ces applications, qui est encore continue de \tilde{S} vers $\prod_{x \neq y} \{x, y\}$. Puisque \tilde{S} est quasi-compact et que le produit est séparé, l'image T de f_X est un compact, de cardinal inférieur à $2^{|X| \times |X|} < \kappa$. Soient s_1, s_2 deux points de \tilde{S} dont les images dans X sont différentes. Il s'en suit que leurs images par une certaine $f_{x,y}$ sont différentes, donc que leurs images par f_X sont différentes. Ceci prouve que f se factorise ensemblistement comme

$$\tilde{S} \xrightarrow{f_X} T \xrightarrow{g} X.$$

Prouvons que g est continue. Pour tout fermé F de X , l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est fermée. Or, puisque f_X est une application continue d'un quasi-compact vers un séparé, elle est fermée ce qui implique que $f_X(f^{-1}(F)) = g^{-1}(F)$ est fermé. Nous prenons ensuite $S = \beta T$ extrêmement discontinu, toujours κ -petit puisque ce dernier est inaccessible. Le produit fibré $\tilde{S} \times_T S$ est compact et son morphisme structural vers \tilde{S} est surjectif (c'est le cas du morphisme depuis S dans le diagramme qui le définit). Puisque \tilde{S} est extrêmement discontinu, on trouve une section allant de \tilde{S} vers le produit fibré. En post-composant cette section par $\tilde{S} \times_T S \rightarrow S$ nous pouvons factoriser $\tilde{S} \rightarrow T$ par S , soit en mettant bout à bout tous les morphismes, factoriser $\tilde{S} \rightarrow X$ par S . \square

Remarque 3.2. Ce lemme vient souligner une subtilité, tant sur l'importance que prend le cadre de respect des règles ensemblistes puisqu'il restreint les espaces possibles à utiliser, mais aussi sur des finesses dans le passage à la limite. Dans [CS19] nous trouvons la mention d'un foncteur pleinement fidèle des ensemble κ -compactement engendrés vers les κ -ensembles condensés. En particulier $\{\eta, \varepsilon\}_\kappa$ est un κ -ensemble condensé pour tout cardinal indénombrable inaccessible κ (voir l'exemple 1.8 pour prouver qu'il est bien κ -compactement engendré). Il existe aussi des foncteurs pleinement fidèles $\text{Top}_{\lambda\text{-cg}} \rightarrow \text{Top}_{\kappa\text{-cg}}$ pour tout $\kappa \geq \lambda$. ce n'est pas un ensemble condensé ce qui prouve qu'il existe des cardinaux arbitrairement grands $\kappa > \lambda$ pour lesquels le diagramme suivant où tous les foncteurs sont pleinement fidèles n'est pas commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_{\lambda\text{-cg}} & \longrightarrow & \text{Top}_{\kappa\text{-cg}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda\text{-EnsCond} & \longrightarrow & \kappa\text{-EnsCond} \end{array}$$

Nous retrouvons aussi en filigrane un lien étrange la condition T_1 , suffisante pour compactement engendré implique un certain κ -compactement engendré. Nous savons avec notre exemple qu'elle n'est pas nécessaire.

3.2 Descriptions de colimites

Les lemmes suivants traitent du comportement de certaines colimites.

Lemme 3.3. *Soit \mathcal{A} une catégorie admettant toutes les limites, colimites. Soit κ un cardinal indénombrable inaccessible. Soit I une petite catégorie et*

$$\mathcal{D} : I \rightarrow \text{Sh}(\kappa\text{-ExtrDisc}, \mathcal{A}), \quad i \mapsto \mathcal{F}_i$$

un diagramme. Si la catégorie I est tamisée pour \mathcal{A} , alors le préfaisceau

$$S \mapsto \text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_i(S)$$

est un faisceau. A fortiori, il s'agit de la colimite dans $\text{Sh}(\kappa\text{-ExtrDisc}, \mathcal{A})$.

Le même résultat est vrai en remplaçant $\kappa\text{-ExtrDisc}$ par $\kappa\text{-Prof}$ et tamisé par étroitement tamisé.

Démonstration. L'avantage du site $\kappa\text{-ExtrDisc}$ réside dans le fait que la condition faisceautique revient à une condition sur les unions disjointes. Un préfaisceau \mathcal{G} est un faisceau si et seulement si pour tout couple d'espaces (S, T) , nous avons $\mathcal{G}(S \sqcup T) = \mathcal{G}(S) \times \mathcal{G}(T)$. Ici,

$$\begin{aligned} \text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_i(S \sqcup T) &\cong \text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_i(S) \times \mathcal{F}_i(T) \\ &= \left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_i(S) \right) \times \left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{F}_i(T) \right) \end{aligned}$$

où l'on utilise exactement le caractère tamisé de I pour \mathcal{A} .

Le raisonnement similaire avec les limites finies définissant les conditions de recollement fournit l'autre généralisation. \square

Remarque 3.4. Le premier résultat s'applique sans restriction sur le diagramme dès que \mathcal{A} possède des biproduits. En particulier, sur $\kappa\text{-AbCond}$ ⁴, les foncteurs sections sur un extrêmement discontinu commutent à toutes les colimites. Le deuxième résultat s'applique en particulier pour une colimite filtrée et Ens, ce qui se reformule en disant que sur $\kappa\text{-Ens}$, les foncteurs sections en un profini commutent aux colimites filtrantes.

Corollaire 3.5. *Soit I une petite catégorie filtrante et $\mathcal{D} : I \rightarrow \text{Top}_{\text{cg}}$, $i \mapsto X_i$ un diagramme en groupes abéliens topologiques compactement engendrés. Nous avons l'identification suivante d'espaces topologiques :*

$$\left(\text{colim}_{\mathcal{D}} X_i \right) (*)_{\text{top}} \cong \text{colim}_{\mathcal{D}} X_i$$

où la première colimite est prise dans EnsCond et la deuxième dans Top

4. Par conséquent, sur AbCond.

Démonstration. Quitte à prendre un cardinal κ assez grand, l'image de \mathcal{D} arrive dans $\text{Top}_{\kappa\text{-cg}}$ et les colimites dans EnsCond et celle dans $\kappa - \text{EnsCond}$ coïncident. L'identification ensembliste en dévient par conséquent plutôt aisée : c'est une simple application du lemme 3.3 comme nous l'avons fait remarqué juste avant. Il nous reste à régler l'identification topologique.

Par définition, l'ensemble $\left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \underline{X_i}\right)(*)_{\text{top}}$ est équipé de la topologie quotient via le morphisme

$$\bigsqcup_{\substack{T \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{D}} \underline{X_i} \\ T \text{ extrêmement discontinu et } \kappa\text{-petit}}} T \rightarrow \left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \underline{X_i}\right)(*)$$

ce qui équivaut par Yoneda à la topologie la plus fine donnant la continuité de

$$\bigsqcup_{\substack{f \in \left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \underline{X_i}\right)(T) \\ T \text{ extrêmement discontinu et } \kappa\text{-petit}}} T \rightarrow \left(\text{colim}_{\mathcal{D}} \underline{X_i}\right)(*)$$

puis en utilisant le lemme 3.3 à la topologie la plus fine donnant la continuité de

$$f : T \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{D}} X_i$$

pour chaque morphisme $f \in \text{colim}_{\mathcal{D}} \mathcal{C}^0(T, X_i)$, et donc pour chaque morphisme de T dans l'un des X_i . Enfin, puisque chaque X_i est κ -compactement engendré, il s'agit de la topologie la plus fine pour laquelle chaque $X_i \rightarrow \text{colim}_{\mathcal{D}} X_i$ est continue. \square

Remarque 3.6. Nous trouvons là une bizarrerie : l'hypothèse de séparation dans la définition d'un compactement engendré est nécessaire pour pouvoir les envoyer dans EnsCond . Si nous prenons par exemple l'espace topologique $Z = \{\mathbb{Z}_-\} \cup \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ où tous les points sont ouverts, sauf l'infini dont les voisinages sont les ensembles cofinis. L'application $\cdot - 1$ induit une application continue de Z dans lui-même. La colimite du diagramme indexé par \mathbb{N} dont tous les objets sont Z et toutes les flèches $\cdot - 1$ se trouve être notre espace non T_1 préféré $\{\eta, \varepsilon\}$ où η est ouvert, mais pas ε . Ce dernier serait compactement engendré si nous ôtions l'hypothèse de séparation.

Ceci fournit un exemple frappant de la non commutation de $X \mapsto \underline{X}$ aux colimites, même filtrantes. En effet notre colimite dans EnsCond existe bien (elle appartient à n'importe quel $\kappa - \text{EnsCond}$) mais le foncteur $\underline{\eta, \varepsilon}$ n'est pas un ensemble condensé. Reste à exhiber cette non égalité.

Remarque 3.7. Au fil de cette preuve, nous retrouvons la difficulté à produire un énoncé similaire pour AbCond . Si l'on prend pour chaque X_i un groupe topologique, la colimite dans Ab existe bien et coïncide avec les sections sur $*$ de la colimite dans AbCond des $\underline{X_i}$. En revanche, il paraît complexe de munir cette colimite d'une topologie qui en fasse un groupe topologique. Comme le dit P. Scholze dans [CS19], le foncteur $X \mapsto X(*)_{\text{top}}$ ne commute pas bien au produit.

3.3 Construction de la "faisceautisation" pour les petits préfaisceaux

Continuons en décrivant le faisceautisé sur notre site ExtrDisc .

Proposition 3.8. Soit κ un cardinal indénombrable inaccessible et \mathcal{F} un préfaisceau sur $\kappa - \text{ExtrDisc}$. La faisceautisé \mathcal{F}^\sharp se décrit comme

$$\mathcal{F}^\sharp(S) = \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S} \prod_I \mathcal{F}(S_i).$$

Démonstration. Sur les ensembles extrêmement discontinus, nous savons que la condition faisceautique revient à transformer les unions disjointes finies en produits. Vérifions d'abord que la formule

$$\mathcal{G}(S) = \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S} \prod_I \mathcal{F}(S_i)$$

définit bien un faisceau. Calculons

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(S \sqcup S') &= \bigsqcup_{\kappa \text{ fini}} \text{colim}_{T_k=S \sqcup S'} \prod_I \mathcal{F}(T_k) \\
&= \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S, \bigsqcup_{J \text{ fini}} S'_j=S'} \prod_I \mathcal{F}(S_i) \times \prod_J \mathcal{F}(S'_j) \\
&= \left(\bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S, \bigsqcup_{J \text{ fini}} S'_j=S'} \prod_I \mathcal{F}(S_i) \right) \times \left(\bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S, \bigsqcup_{J \text{ fini}} S'_j=S'} \prod_J \mathcal{F}(S'_j) \right) \\
&= \left(\bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S} \prod_I \mathcal{F}(S_i) \right) \times \left(\bigsqcup_{J \text{ fini}} \text{colim}_{S'_j=S'} \prod_J \mathcal{F}(S'_j) \right) \\
&= \mathcal{G}(S) \times \mathcal{G}(S')
\end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne se fait grâce à la cofinalité des recouvrement de $S \sqcup S'$ provenant d'une concaténation de recouvrement et où le passage à la troisième ligne provient de la commutation des colimites filtrées indexées par un produit finis. Nous laissons de côté la vérification de la propriété universelle, qui est purement formelle. \square

Corollaire 3.9. 1) Soit $\lambda > \kappa$ des cardinaux indénombrables inaccessibles. Le foncteur pleinement fidèle des préfaisceaux sur $\kappa - \text{ExtrDisc}$ vers ceux sur $\lambda - \text{ExtrDisc}$ commute à la faisceautisation.

2) Soit \mathcal{F} un petit préfaisceau sur ExtrDisc . Le préfaisceau

$$S \mapsto \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{S_i=S} \prod_I \mathcal{F}(S_i)$$

est un objet de EnsCond que l'on appelle suggestivement $\mathcal{F}^\#$. Le foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\#$ fournit un adjoint à gauche de l'oubli de EnsCond vers les petits préfaisceaux sur ExtrDisc .

Démonstration. 1) Prenons \mathcal{F} un préfaisceau sur $\kappa - \text{ExtrDisc}$. Dans cette preuve, nous notons $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}^\lambda$ le dit foncteur pleinement fidèle, et nous précisons le cardinal après le symbole dièse de la faisceautisation. Nous écrivons le calcul en bloc, puis expliciterons ligne à ligne les arguments qui assurent sa validité :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{\#, \kappa})^\lambda(T) &= \bigsqcup_{T \rightarrow S, S \text{ } \kappa\text{-petit}} \text{colim}_{S \text{ } \kappa\text{-petit}} \mathcal{F}^{\#, \kappa}(S) \\
&= \bigsqcup_{T \rightarrow S, S \text{ } \kappa\text{-petit}} \text{colim}_{\bigsqcup_{I \text{ fini}} S_i=S} \prod_I \mathcal{F}(S_i) \\
&= \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{T_i=T} \text{colim}_{(T_i \rightarrow S_i)_{i \in I}, \text{ chaque } S_i \text{ } \kappa\text{-petit}} \prod_I \mathcal{F}(S_i) \\
&= \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{T_i=T} \prod_{j \in I} \left(\text{colim}_{(T_i \rightarrow S_i)_{i \in I}, \text{ chaque } S_i \text{ } \kappa\text{-petit}} \mathcal{F}(S_j) \right) \\
&= \bigsqcup_{I \text{ fini}} \text{colim}_{T_i=T} \prod_{j \in I} \left(\text{colim}_{T_j \rightarrow S_j, S_j \text{ } \kappa\text{-petit}} \mathcal{F}(S_j) \right) \\
&= (\mathcal{F}^\lambda)^{\#, \lambda}(T)
\end{aligned}$$

Le passage à la troisième ligne est permis par le fait qu'une décomposition de S entraîne une décomposition de T grâce aux images réciproques des S_i ; on identifie ainsi les deux catégories qui indexent les colimites. Le passage à la quatrième ligne se fait à nouveau par commutation des colimites filtrées aux produits finis. Ceci conclut sur $\lambda - \text{ExtrDisc}$.

Nous avons prouvé que l'ensemble condensé associé à $\mathcal{F}^{\#, \kappa}$ vérifie pour tout cardinal λ la propriété universelle de la faisceautisation pour les morphismes vers des λ -ensembles condensés. En particulier, il la vérifie sur EnsCond .

2) Puisque les partitions finies ouvertes d'un objet de $\kappa - \text{ExtrDisc}$ restent dans cette catégorie, nous avons grâce à la proposition 3.8 l'égalité pour tout λ

$$\mathcal{F}^\#_{|\lambda - \text{ExtrDisc}} = (\mathcal{F}_{|\lambda - \text{ExtrDisc}})^{\#, \lambda}.$$

Associées au premier point, elles prouvent de plus que si \mathcal{F} est κ -petit, alors $\mathcal{F}^\#$ aussi. Enfin, les morphismes dans EnsCond ou dans les petits préfaisceaux sur ExtrDisc étant la colimite des morphismes à tout niveau λ , les égalités associées à l'adjonction de la faisceautisation à tout niveau λ , prouvent l'adjonction recherchée. \square

Remarque 3.10. Si nous avons considérés un faisceau en ensembles \mathcal{F} sur $\kappa - \text{Prof}$, le préfaisceau sur $\kappa - \text{Prof}$ donné par

$$\mathcal{F}^{\lambda, \text{Prof}}(T) = \text{colim}_{T \rightarrow S, S \text{ profini } \kappa\text{-petit}} \mathcal{F}(S)$$

n'est a priori pas un faisceau. Puisqu'il est adjoint à gauche de l'oubli de $\text{Sh}(\lambda\text{-Prof})$ vers $\text{Sh}(\kappa\text{-Prof})$, nous déduisons des différentes propriétés d'adjonctions un isomorphisme naturel en \mathcal{F} entre

$$\mathcal{F}^{\lambda, \text{Prof}}_{|\lambda\text{-ExtrDisc}} \cong (\mathcal{F}_{|\kappa\text{-ExtrDisc}})^\lambda,$$

ce qui n'est pas évident à démontrer à la main. Nous en déduisons également de l'égalité sur le site extrêmement discontinu que

$$\mathcal{F}^\lambda_{|\kappa\text{-Prof}} = \mathcal{F}.$$

La notation $\mathcal{F}^\#$ désignera ainsi indifféremment la faisceautisation à niveau fini de \mathcal{F} ou sa "faisceautisation" dans EnsCond au sens adjoint de l'oubli de EnsCond vers les petits préfaisceaux sur ExtrDisc .

Nous aurons besoin par la suite de deux corollaires de cette description.

Corollaire 3.11. Soient $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un épimorphisme de préfaisceaux sur $\kappa - \text{ExtrDisc}$. Le morphisme $\mathcal{F}^\# \rightarrow \mathcal{G}^\#$ déduit est un constitué d'applications surjectives⁵, qu'il soit vu dans $\kappa - \text{EnsCond}$ ou dans EnsCond .

Démonstration. Les descriptions de la faisceautisation à niveau κ et des extensions entre niveau de cardinalité fixé par colimites entraînent sans difficulté que la surjectivité de $\mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{G}(S)$ pour tout objet S de $\kappa - \text{ExtrDisc}$ implique la surjectivité des applications pour tout extrêmement discontinu, et pour chaque λ -faisceautisation. Le corollaire 3.9 conclut alors que cette surjectivité à tout niveau entraîne la surjectivité de toutes les applications définissant $\mathcal{F}^\# \rightarrow \mathcal{G}^\#$ dans EnsCond . \square

Corollaire 3.12. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Un épimorphisme dans $\text{Sh}(\kappa - \text{ExtrDisc}, \mathcal{A})$ est exactement un morphisme tel que les applications au niveau de chaque objet de $\kappa - \text{ExtrDisc}$ sont des épimorphismes⁶.

Un épimorphisme de AbCond est exactement un morphisme tel que les applications au niveau de chaque objet sont surjectives.

Démonstration. Puisque $\text{Sh}(\kappa - \text{ExtrDisc}, \mathcal{A})$ est abélienne, ledit morphisme est un épimorphisme si et seulement si son conoyau est nul. Or, puisque \mathcal{A} possède des biproduits, la remarque 3.4 montre que le conoyau de notre morphisme est le conoyau préfaisceautique. Puisque \mathcal{A} est abélienne cela signifie que les applications au niveau de chaque objet sont des épimorphismes.

Pour l'application à AbCond , la pleine fidélité de $\kappa - \text{AbCond} \rightarrow \text{AbCond}$ implique que la restriction d'un épimorphisme dans AbCond donne un épimorphisme dans $\kappa - \text{AbCond}$. Au niveau des sections sur des objets de $\kappa - \text{ExtrDisc}$, le morphisme est donc un épimorphisme dans \mathcal{A} . Ceci étant vrai pour tout κ et les épimorphismes de \mathcal{A} étant exactement les morphismes de groupes surjectifs, nous concluons. \square

3.4 Produit tensoriel dans le cadre condensé

Les sections suivantes concernent les catégories $A\text{-Mod}$ et $A - \text{Alg}$ pour un anneau condensé A . Il s'agit de construire les foncteurs classiques que nous avons évoqués à la section 2 mais en prenant en compte les problèmes ensemblistes.

Définition 3.13. Soit A un anneau condensé. La catégorie $A\text{-Mod}$ (resp. $A - \text{Alg}$) est la sous-catégorie pleine des A -modules sur le site ExtrDisc formée de ceux parmi ces modules qui sont des ensembles condensés. De manière équivalente, il s'agit de la colimite le long de foncteurs pleinement fidèles des catégories $A_{|\kappa\text{-ExtrDisc}}\text{-Mod}$.

Proposition 3.14. Soient $\lambda > \kappa$ des cardinaux indénombrables inaccessibles. Soit A un objet de $\kappa - \text{AnnCond}$ et M, N des A -modules sur le site $\kappa - \text{ExtrDisc}$. Il existe une structure naturelle de A^λ -modules sur M^λ et N^λ et le produit tensoriel commute à notre foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$ au sens où naturellement

$$(M \otimes_A N)^\lambda = M^\lambda \otimes_{A^\lambda} N^\lambda.$$

5. C'est donc meilleur que la préservation du caractère épimorphique.

6. Puisque nous sommes dans une catégorie abélienne, cela équivaut à dire que les conoyaux aux niveau des sections sur chaque objet sont nuls.

Démonstration. Pour montrer l'existence de la structure A^λ -module, nous renvoyons à des arguments en tous points similaires à ceux de la fin du lemme 3.19, en considérant que $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$ est l'adjoint à gauche de la restriction au site $\kappa - \text{ExtrDisc}$.

Le produit tensoriel faisceutique se décompose en produit tensoriel préfaisceutique et en faisceutisation. Le corollaire 3.9 a montré que notre foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$ commute à la faisceutisation. Reste donc à prouver la commutation de notre foncteur au produit tensoriel préfaisceutique. Les sections sur T dans $\lambda - \text{ExtrDisc}$ du produit tensoriel préfaisceutique de M^λ et N^λ sur A^λ valent

$$\left(\text{colim}_{T \rightarrow S, S \kappa\text{-petit}} M(S) \right) \otimes_{\text{colim}_{T \rightarrow S, S \kappa\text{-petit}} A(S)} \left(\text{colim}_{T \rightarrow S, S \kappa\text{-petit}} N(S) \right)$$

qui part commutation naturelle du produit tensoriel aux colimites filtrées s'identifie fonctoriellement à

$$\text{colim}_{T \rightarrow S, S \kappa\text{-petit}} (M(S) \otimes_{A(S)} N(S)).$$

Ceci conclut. \square

Corollaire 3.15. *Soit A un anneau condensé et M, N des objets de $A\text{-Mod}$. Supposons que A, M et N vivent simultanément à niveau κ . L'objet de $A_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}\text{-Mod}$ obtenu par produit tensoriel sur $\kappa - \text{ExtrDisc}$, vu comme objet de EnsCond est naturellement un objet de $A\text{-Mod}$, qui ne dépend pas du κ choisi. Nous le notons $M \otimes_A N$.*

Démonstration. Pour la structure d'objet de $A\text{-Mod}$, il s'agit de passer la première partie du lemme précédent à la limite.

Pour l'indépendance vis-à-vis de κ , la deuxième partie du lemme précédent conclut. \square

3.5 Modules libres dans le cadre condensé

Proposition 3.16. *Soient $\lambda > \kappa$ des cardinaux indénombrables inaccessibles. Soit A un objet de $\kappa - \text{AnnCond}$ et X un objet de $\kappa - \text{EnsCond}$. L'objet $A[X]^\lambda$ est naturellement muni d'une structure d'objet de $A^\lambda\text{-Mod}$. L'adjoint de l'oubli depuis $A\text{-Mod}$ commute naturellement à notre foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\lambda$ au sens où naturellement*

$$A[X]^\lambda = A^\lambda[X^\lambda].$$

Démonstration. Cette preuve est sensiblement plus simple que la preuve du produit tensoriel, pour la simple raison que la propriété universelle dudit produit tensoriel est plus pénible à expliciter et que nous avons ainsi choisi de ne pas passer par là. Ici, par Yoneda, il nous suffit de considérer la suite de bijection suivante pour tout objet M de $A^\lambda\text{-Mod}$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A^\lambda\text{-Mod}} (A^\lambda[X^\lambda], M) &= \text{Hom}_{\lambda - \text{EnsCond}} (X^\lambda, M) \\ &= \text{Hom}_{\kappa - \text{EnsCond}} (X, M_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}) \\ &= \text{Hom}_{A\text{-Mod}} (A[X], M_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}) \\ &= \text{Hom}_{A^\lambda\text{-Mod}} (A[X]^\lambda, M) \end{aligned}$$

où l'on utilise l'adjonction de $A^\lambda[-]$ pour la première ligne, l'adjonction de notre foncteur préféré pour le passage à la deuxième, l'adjonction de $A^\lambda[-]$ pour le passage à la troisième. Pour le passage à la quatrième, l'adjonction de notre foncteur préféré s'étend en une adjonction de $A\text{-Mod}$ dans $A^\lambda\text{-Mod}$ justement parce ledit foncteur respecte la linéarité. \square

Corollaire 3.17. *Soit A un anneau condensé et X un objet de EnsCond . Supposons que A et X soient tous deux κ -condensés. L'objet de $A_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}\text{-Mod}$ donné par*

$$A_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}[X_{|\kappa - \text{ExtrDisc}}]$$

vu comme objet de EnsCond est naturellement un objet de $A\text{-Mod}$, qui ne dépend pas du κ choisi. Nous le notons $A[X]$ et le foncteur $A[-]$ est adjoint de l'oubli depuis $A\text{-Mod}$ vers EnsCond .

Démonstration. Pour la structure d'objet de $A\text{-Mod}$, il s'agit de passer à la limite le lemme précédent. L'indépendance vis-à-vis de κ et l'adjonction suivent de la deuxième partie. \square

3.6 Hom interne dans le cadre condensé

Attaquons à présent la construction du Hom interne, qui se révèle plus délicat que les précédent.

Proposition 3.18. *Soit κ un cardinal indénombrable inaccessible. Soit A un objet de $\kappa\text{-AnnCond}$ et M, N des objets de $\kappa\text{-Mod}$. Pour tout cardinal indénombrable inaccessible $\lambda > \kappa$, l'objet $\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(M, N)^\lambda$ est naturellement muni d'une structure d'objet de $A^\lambda\text{-Mod}$.*

Pour tout cardinaux indénombrables accessibles $\lambda' > \lambda > \kappa$ assez grands⁷, le Hom interne commute naturellement à notre foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\lambda'}$ au sens où naturellement

$$\underline{\text{Hom}}_{A^\lambda\text{-Mod}}(M^\lambda, N^\lambda)^{\lambda'} \cong \underline{\text{Hom}}_{A^{\lambda'}\text{-Mod}}(M^{\lambda'}, N^{\lambda'}).$$

Démonstration. Commençons par traiter le cas où $M = A[S]$ pour S qui est κ -extrêmement discontinu. Dans ce cas, pour tout espace topologie T dans $\lambda\text{-ExtrDisc}$, il exhiber un isomorphisme entre

$$\underline{\text{Hom}}_{A^\lambda\text{-Mod}}(A^\lambda[S], M^\lambda)(T) = \text{colim}_{\left(\begin{array}{c} S_1 \twoheadrightarrow S \times T \\ \downarrow \\ S_0 \end{array} , T_0 \in \lambda\text{-ExtrDisc}, S_0 \in \kappa\text{-ExtrDisc} \right)} M(S_0)$$

et

$$(\underline{\text{Hom}}_{A\text{-Mod}}(A[S], M))^\lambda(T) = \text{colim}_{\left(T \rightarrow S_1 , S_1 \in \kappa\text{-ExtrDisc} \right)} M(S \times S_1).$$

Cette égalité n'est pour l'instant pas claire, même si je sais finir la preuve une fois cette étape établie. □

3.7 Les catégories AbCond , $\mathbb{Z}\text{-Mod}$ et autres

Nous répondons ici de manière plus vague à la question naturelle suivante : quel est le lien entre la catégorie des groupes abéliens condensés et $\mathbb{Z}\text{-Mod}$?

Lemme 3.19. *Soit R un anneau discret. La catégorie $\underline{R}\text{-Mod}$ (resp. $\underline{R}\text{-Alg}$) est équivalente à la catégorie des petits faisceaux en R -modules (resp. en R -algèbres) sur ExtrDisc .*

Démonstration. Soit S extrêmement discontinu. Une fonction de $\underline{R}(S) = \mathcal{C}^0(S, R)$ était localement constante, elle correspond à une partition en ouverts de S et à un élément par ensemble dans la partition. Autrement dit, nous avons

$$\underline{R}(S) = \text{colim}_{\sqcup S_i = S} \prod_I R$$

ce qui prouve via la description du faisceautisé à la proposition 3.8 que \underline{R} est le faisceau constant associé à R . Nous appelons R le préfaisceau constant associé à R .

Nous ne rédigeons que le cas de $\underline{R}\text{-Mod}$. Une structure d'objet en R -modules sur M correspond exactement à une structure d'objet de AbCond et d'un morphisme de préfaisceaux $f : R \times M \rightarrow M$ qui fait commuter les quatre diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} R \times M \times M & \xrightarrow{\text{Id}_R \times -} & R \times M \\ \Delta_{R \times \text{Id}_M \times M} \downarrow & & \downarrow f \\ R \times M \times R \times M & & \\ f \times f \downarrow & & \\ M \times M & \xrightarrow{+} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R \times R \times M & \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}_M} & R \times M \\ \text{Id}_{R \times R} \times \Delta_M \downarrow & & \downarrow f \\ R \times M \times R \times M & & \\ f \times f \downarrow & & \\ M \times M & \xrightarrow{+} & M \end{array}$$

7. Assez grand en dépend ici de κ et de M .

$$\begin{array}{ccc}
R \times R \times M & \xrightarrow{\text{Id}_R \times f} & R \times M \\
\pi \times \text{Id}_M \downarrow & & \downarrow f \\
R \times M & \xrightarrow{f} & M
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{1 \times \text{Id}_M} & R \times M \\
& \searrow \text{Id}_M & \downarrow f \\
& & M
\end{array}$$

où $+$: $M \times M \rightarrow M$ est l'addition, où σ (resp. π , resp. 1) sont l'addition (resp. la multiplication, resp. l'unité) de R transférées aux préfaisceaux. Autrement dit, c'est une structure d'objet de $R\text{-Psh}(\mathcal{C})$. L'adjoint de la proposition 2.3, ceci donne une structure d'objet de $\underline{R}\text{-Mod}$ sur le faisceau M . Puisqu'il est adjoint à gauche, cette structure est la seule induisant la structure de faisceau en R -modules sur M . Réciproquement le foncteur de ladite proposition montre que toute structure de \underline{R} -modules fournit effectivement une structure de faisceau en R -modules.

Moins théoriquement, nous pourrions expliquer comment la structure de faisceaux en R -modules sur M fournit une structure de $\mathcal{C}^0(X, R)$ -module sur $M(X)$. Toute fonction étant localement constante depuis un compacte, la multiplication par ladite fonction se déduit par recollement de la multiplication sur chacune des préimages non vides, qui sont en nombre fini.

Les argument se décalquent ad verbatim pour les R -algèbres en ajoutant des diagrammes. \square

Corollaire 3.20. *Les catégories AbCond et $\underline{\mathbb{Z}}\text{-Mod}$ sont équivalentes.*

Fixons quelques notations. Nous notons systématiquement $\otimes_{\underline{R}}$ l'adjoint à gauche du Hom interne dans $\underline{R}\text{-Mod}$ et \otimes_R celui du Hom interne aux *préfaisceaux* en R -modules⁸.

Lemme 3.21. *Il existe des isomorphismes naturels en X entre les \underline{R} -modules⁹*

$$\underline{R}[X] \cong (S \mapsto R[X(S)])^\# \cong \underline{R} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \underline{\mathbb{Z}}[X].$$

Démonstration. Une simple utilisation de Yoneda en accumulant les adjonctions. Pour l'isomorphisme de premier et du dernier par exemple, nous utilisons qu'il existe une transformation naturelle entre deux foncteurs de $\underline{R}\text{-Mod}$ vers Ens donnée par

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\underline{R}\text{-Mod}}(\underline{R}[X], -) &\cong \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(X, -) \\
&\cong \text{Hom}_{\text{AbCond}}(\underline{\mathbb{Z}}[X], -) \\
&\cong \text{Hom}_{\underline{R}\text{-Psh}}(\underline{R} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \underline{\mathbb{Z}}[X], -) \\
&\cong \text{Hom}_{\underline{R}\text{-Mod}}(\underline{R} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}} \underline{\mathbb{Z}}[X], -)
\end{aligned}$$

\square

Proposition 3.22. *Pour tout ensemble condensé X , le R -module condensé $\underline{R}[X]$ est plat au sens où*

$$\underline{R}[X] \otimes_{\underline{R}} - : \underline{R}\text{-Mod} \rightarrow \underline{R}\text{-Mod}$$

est exact.

Démonstration. Un simple déroulement des propriétés universelles nous convainc de l'isomorphisme naturel, pour tout préfaisceau \mathcal{F} en R -modules et tout faisceau \mathcal{G} en R -modules, entre $\mathcal{F}^\# \otimes \mathcal{G}$ et $(\mathcal{F} \otimes_R \mathcal{G})^\#$. La faisceautisation étant exacte, il suffit de prouver que le préfaisceau $S \mapsto R[X(S)]$ est plat. Comme la tensorisation $- \otimes_R -$ dans les préfaisceaux se fait terme à terme et que l'exactitude se vérifie sur chaque foncteur section, tout cela découle du fait que $S \mapsto R[X(S)]$ est un préfaisceau en R -modules libres, a fortiori en R -modules plats. \square

Nous avons en réalité légèrement mieux.

Lemme 3.23. *Pour tout ensemble condensé X , le R -module condensé $\underline{R}[X]$ est un faisceau en R -modules plats¹⁰ sur le site ExtrDisc .*

Démonstration. Le préfaisceau $S \mapsto R[X(S)]$ est un préfaisceau en R -modules libres, a fortiori en R -modules plats. Grâce à la proposition 3.8, le module $R[X](S)$ est une colimite filtrée de produits finis de R -modules plats. C'est une colimite filtrée de somme directe de R -modules plats : c'est un R -module plat. \square

8. Les Hom internes coïncident mais pas leurs adjoints.

9. Ne pas oublier la proposition 2.3 pour voir certains de ces objets comme des \underline{R} -modules.

10. Ce qui est plus fort que la proposition 3.22.

4 Mathématiques solides

4.1 Quelques calculs

La section s'intéresse à quelques calculs précis. Dans chaque cas, nous dirons en quelques mots pourquoi les groupes abéliens condensés considérés sont solides, puis nous calculerons le produit tensoriel solide annoncé.

Proposition 4.1. 1. Soient I et J deux ensembles. Nous avons

$$\left(\prod_I \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \left(\prod_J \mathbb{Z} \right) \cong \prod_{I \times J} \mathbb{Z}.$$

2. Pour tout ensemble I , nous avons

$$\left(\prod_I \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[[X]] \cong \prod_I \mathbb{Z}[[X]]$$

avec la topologie produit des topologies X -adiques.

3. Comme corollaire immédiat

$$\mathbb{Z}[[X]] \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}[[Y]] \cong \mathbb{Z}[[X, Y]]$$

avec la topologie (X, Y) -adique.

Démonstration. 1. Si I ou J est fini, le produit est une somme directe et la commutation du produit tensoriel solide aux colimites conclut.

Sinon, nous proposons d'abord un raffinement du théorème de Nöbeling évoqué dans [CS19, Théorème 5.4]. Soit S un ensemble profini infini et \mathcal{I} une petite catégorie telle que S s'écrit comme limite d'un \mathcal{I} -diagramme d'ensembles finis. Alors $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z})$ est colimite des \mathbb{Z}^{S_i} pour $i \in \mathcal{I}$ et est donc de cardinal $|\mathcal{I}|$. De même, les mesures sur $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z})$ sont la limites des mesures sur les \mathbb{Z}^{S_i} , donc de cardinal inférieur à $|\mathcal{I}|$ comme sous-objet d'un produit. Démontrons que $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I]$ est de cardinal $|I|$. Un diagramme définissant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$ comme ensemble profini est indexé par les parties finies de I et correspond aux projections sur un nombre fini de coordonnées. Ce qui précède démontre donc que le groupe sous-jacent à $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I]$ est de cardinal inférieur à $|I|$. De plus, les évaluations aux points de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^I$ sont des éléments de $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I]$ ce qui prouve l'autre inégalité. Il existe un ensemble I' tel que $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I]$ est isomorphe à $\prod_{I'} \mathbb{Z}$, qui est de cardinal $\max(\aleph_0, |I'|)$. Si $|I| > \aleph_0$, nous avons trouvé un ensemble profini S tel que $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] = \prod_I \mathbb{Z}$. Nous avons également que $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}] \cong \mathbb{Z}[[X]] \oplus \mathbb{Z}$ qui est un produit dénombrable de \mathbb{Z} .

Ceci qui ramène notre étude au cas où $\prod_I \mathbb{Z}$ (resp. $\prod_J \mathbb{Z}$) s'écrit $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ (resp. $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[T]$) pour un certain profini. Dans ce cas, le produit tensoriel est $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S \times T]$. On rappelle que si $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z})$ est libre de base indexée par I alors $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ est un produit indexé par I de \mathbb{Z} . Le groupe abélien $\mathcal{C}(S \times T, \mathbb{Z})$ est le produit tensoriel $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{C}(T, \mathbb{Z})$ donc il est libre avec pour rang le produit des cardinaux. Ceci conclut.

2. L'anneau condensé $\mathbb{Z}[[X]]$ avec la topologie X -adique s'identifie à $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ en prenant la suite des coefficients. Le produit tensoriel s'identifie donc à $\prod_{I \times \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ qui est effectivement le produit annoncé.

3. Identifier les deux termes à $\prod_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ via les coefficients.

□

Proposition 4.2. Il existe une identification canonique de

$$\mathbb{F}_p[[X^{1/p^\infty}]] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[[Y^{1/p^\infty}]]$$

avec la complétion (X, Y) -adique de $\mathbb{F}_p[X^{1/p^\infty}, Y^{1/p^\infty}]$.

4.2 À propos de certaines solidifications obscures

L'analogie entre solidification et complétion est très présent dans la théorie. En tombant sur ce slogan, il devient assez naturel de se demander ce que donne la solidification sur les premiers anneaux que nous avons complété. Les trois exemples qui viennent en tête, dont les deux derniers apparaissent comme des cas particuliers du premier sont $(\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})$, $(\mathbb{F}_p[t], t\text{-adique})$ et $(\mathbb{Z}, p\text{-adique})$. Les solidifications de ces trois anneaux condensés semblent encore inconnues, voire monstrueuse et cette section déplie ce que nous en savons, ainsi que quelques pistes.

Lemme 4.3. 1. Le groupe abélien condensé $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ représente le foncteur

$$\text{AbCond} \rightarrow \text{Ens}, A \mapsto \{u \in A(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \mid A(\text{limite})(u) = 0 \in A(\{\infty\})\}$$

où limite est l'inclusion de $\{\infty\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Moralement, il s'agit du foncteur "suite tendant vers 0".

2. Le groupe abélien solide $(\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}])^\blacksquare$ représente le foncteur

$$\mathbb{Z}_\blacksquare\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}, A \mapsto \{u \in A(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \mid A(\text{limite})(u) = 0 \in A(\{\infty\})\}$$

où limite est l'inclusion de $\{\infty\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Moralement, il s'agit du foncteur "suite tendant vers 0".

3. Il existe un isomorphisme de \mathbb{Z}_\blacksquare -algèbres

$$(\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}])^\blacksquare \cong \mathbb{Z}[[t]]$$

et la section de $\mathbb{Z}[[t]](\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ donnée grâce au point précédent par le lemme de Yoneda est simplement¹¹ $n \mapsto t^n$.

Démonstration. 1. La propriété universelle du quotient affirme que $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ représente le foncteur qui à un groupe abélien condensé A associe

$$\{f \in \text{Hom}_{\text{AbCond}}(\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}], A) \mid f \circ \mathbb{Z}[\text{limite}] = 0\}.$$

Par propriété universelle du module libre, une telle f s'écrit forcément $\mathbb{Z}[g]$ pour un certain $g \in \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, A)$ et ainsi le quotient représente le foncteur qui à A associe

$$\{g \in \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, A) \mid g \circ \text{limite} = 0\}.$$

Enfin, Yoneda affirme que ce premier ensemble de morphismes est en bijection fonctorielle avec $A(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ ce qui nous fournit la représentation souhaitée.

2. La solidification étant adjoint de l'oubli des groupes abéliens solides vers les groupes abéliens condensés, la solidification du quotient représente le foncteur

$$\mathbb{Z}_\blacksquare\text{-Mod} \rightarrow \text{Ens}, A \mapsto \text{Hom}_{\text{AbCond}}(\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}], A)$$

et le premier point conclut.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, considérons le monoïde $X_n = \{0, \dots, n-1\} \cup \{\llbracket n, \infty \rrbracket\}$ pour l'addition¹² que l'on muni de la topologie discrète. La catégorie des espaces topologiques avec le produit comme structure monoïdale permet d'écrire l'espace profini $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec l'addition comme

$$\mathbb{N} \cup \{\infty\} = \lim_n X_n$$

où la limite est prise dans les objets monoïdaux des espaces topologiques. En appliquant le foncteur $\mathbb{Z}[-]$, qui est symétrique monoïdal, nous obtenons un morphisme de \mathbb{Z} -algèbres condensées que l'on identifie comme suit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}] &\longrightarrow \lim_n \mathbb{Z}[X_n] \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_{\text{restes chinois}} \mathbb{Z}[t]/(t^n - t^{n+1}) \\ &\xrightarrow{\sim} \lim_n \mathbb{Z}[t]/t^n \oplus \mathbb{Z} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[[t]] \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

11. Nous fixons par convention que $t^\infty = 0$.

12. Plus précisément, l'addition sur $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ passe au quotient sur X_n .

où certaines identifications utilisent que le foncteur $X \mapsto \underline{X}$ commute aux limites. Par définition de la solidification au niveau profini, le terme de droite correspond à $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[\mathbb{N} \cup \{\text{infy}\}]$. Le morphisme depuis $\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ est donné par Yoneda par l'image au niveau des sections sur le point de la fonction égale à ∞ . Elle s'envoie dans $\mathbb{Z}[X_n](*)$ sur la fonction égale à $[n, \infty]$, puis sur t^n puis sur $(0, 1)$. Ainsi, l'image de $\mathbb{Z}[\{\infty\}]$ est le deuxième facteur \mathbb{Z} . La solidification du quotient s'identifie au premier facteur $\mathbb{Z}[[t]]$ comme $\mathbb{Z}_{\blacksquare}$ -algèbre.

Pour connaître la section fournie par Yoneda à partir du point 2), il faut suivre l'image de la section "identité" de $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$ de $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$ par les morphismes précédent et on se rend compte qu'elle est effectivement envoyée sur $n \mapsto t^n$. □

Le premier point du lemme précédent nous invite à considérer le morphisme

$$\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}] \rightarrow (\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})$$

donné par Yoneda à partir de la section $[n \mapsto t^n] \in \mathbb{Z}[t](\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. Malheureusement, le lemme suivant suggère qu'il se comporte mal.

Lemme 4.4. *L'image du morphisme précédent est donnée par*

$$S \mapsto \{f : \mathcal{C}(S, \mathbb{Z}[t]) \mid \text{Im}(f) \text{ est bornée pour } |\cdot|_{\ell^1}\}$$

où $|\sum a_k t^k|_{\ell^1} = \sum |a_k|$.

Démonstration. Soit X un espace compact et une section sur X du pré-faisceau $Y \mapsto \mathbb{Z}(Y)[\mathcal{C}(Y, \mathbb{N} \cup \{\infty\})]$ que l'on écrit $\sum_I a_i [f_i]$ avec I fini, où les a_i sont des fonctions localement constantes de X dans \mathbb{Z} et $f_i \in \mathcal{C}(X, \mathbb{N} \cup \{\infty\})$. Son image dans $(\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})(X)$ est

$$f : x \mapsto \sum_I a_i t^{f_i(x)}$$

et cette fonction a une image de norme $|\cdot|_{\ell^1}$ bornée par $\sum_I a_i \infty$. Puisque cette image prédite est déjà un faisceau, l'image du morphisme depuis la faisceautisation $\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$, l'image est contenu dans l'image prédite.

Réciproquement, montrons par récurrence sur la borne de $\text{Im}(f)$ que tout fonction continue vers $\mathbb{Z}[t]$ dont l'image est bornée pour $|\cdot|_{\ell^1}$ est dans l'image. Si la fonction est nulle, c'est limpide. Sinon soit f d'image bornée non nulle. Par continuité de f , la fonction $v_t(f)$ est continue vers $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors, considérons le fermé F_+ (resp. F_-) de X complémentaire de l'ouvert

$$\{x \in X \mid v_t(f)(x) < \infty \text{ et le coefficient dominant de } f(x) \text{ est négatif (resp. positif)}\}.$$

Les fermés F_+ et F_- forment un recouvrement de X et sur F_+ (resp. F_-) la fonction $f - t^{v_t(f)}$ (resp. $f + t^{v_t(f)}$) est de norme $|\cdot|_{\ell^1}$ strictement inférieure à celle de f , donc appartient à l'image par hypothèse de récurrence. Puisque $\pm t^{v_t(f)}$ est l'image de $\pm [v_t(f)]$, la fonction f appartient à l'image sur F_+ et F_- donc dans X . □

La solidification de ce morphisme s'identifie grâce au dernier point du lemme 4.3 à un morphisme d'anneaux solides $\mathbb{Z}[[t]] \rightarrow (\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})^{\blacksquare}$.

Proposition 4.5. *Le morphisme précédent est un monomorphisme et exhibe $\mathbb{Z}[[t]]$ comme facteur direct de $(\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})^{\blacksquare}$.*

Démonstration. Regardons la suite courte suivante de \mathbb{Z} -algèbres condensées :

$$\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]/\mathbb{Z}[\{\infty\}] \rightarrow (\mathbb{Z}[t], t\text{-adique}) \rightarrow \mathbb{Z}[[t]]$$

dont la composée est exactement donnée par $n \mapsto t^n$. En solidifiant, il sort une suite courte de $\mathbb{Z}_{\blacksquare}$ -algèbres que le troisième point du lemme 4.3 identifie à

$$\mathbb{Z}[[t]] \rightarrow (\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})^{\blacksquare} \rightarrow \mathbb{Z}[[t]]$$

dont la composée est l'identité. Ceci conclut. □

Remarque 4.6. Il est ainsi possible d'écrire $(\mathbb{Z}[t], t\text{-adique})^{\blacksquare}$ comme $\mathbb{Z}[[t]] \oplus I$ où I est un idéal pour sa structure d'anneau. Je ne crois pas qu'il soit connu à ce jour si $I = 0$, ou même si le groupe abélien sous-jacent à I est nul.

L'argument suivant tend à affirmer que non, au moins pour la première question. Les compacts de $(\mathbb{Z}, p\text{-adique})$ sont assez affreux et il n'en existe même pas de famille cofinale agréable. Plus particulièrement, aucun sous-groupe n'est compact. Ceux-ci interviennent dans l'écriture suivante, pour toute famille cofinale \mathcal{K} de compacts :

$$(\mathbb{Z}, p\text{-adique}) = \text{Coker} \left(\varinjlim_{X \in \mathcal{K}} \mathbb{Z}[X^2] \rightarrow \varinjlim_{X \in \mathcal{K}} \mathbb{Z}[X] \right)$$

où la flèche centrale est donnée par $[(x, y)] \mapsto [x] + [y] - [x + y]$ dans un compact contenant x, y et $x + y$.

Dans $(\mathbb{Z}, 2\text{-adique})$, par exemple, la meilleure famille cofinale de compacts que je connais à ce jour est paramétrée par les sous-arbres de l'arbre binaire complets qui n'ont pas de branche partant infiniment souvent vers la droite. Notons que $\{0\} \cup \{2^n + 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_r} \mid n < k_1 < \dots < k_r \text{ et } r \leq n\}$ est un compact pour le moins étrange de \mathbb{Z} avec la topologie 2-adique.

Antoine Ducros a une preuve de $I = 0$ dans le cas des mathématiques condensées light.

La complexité de ces exemples tend à dire que la solidification se comporte bien à partir d'objets "déjà quelque peu complets" comme le produit tensoriel de deux objets solides, mais garde davantage d'informations si l'on part d'horreurs topologiques.

4.3 Calculs dans le monde light solide

Dans cette section, toutes les mathématiques condensées sont supposées light.

Lemme 4.7. *Soit A un anneau light solide tel que 0 est dans l'adhérence de 1 , i.e. que le morphisme $\mathbb{N} \rightarrow A$ constant égal à 1 se factorise par $P \rightarrow A$. Alors $A = 0$.*

Démonstration. En utilisant la solidité, on sait que le morphisme $[P \rightarrow A]$ "constant égal à 1 " s'écrit $(\text{Id} - \sigma)(g)$ pour un unique $g : P \rightarrow A$. Puisque σ commute à $(\text{Id} - \sigma)$ et fixe le morphisme constant égal à 1 , on en déduit que $\sigma(g) = g$. Ainsi, $(\text{Id} - \sigma)(g) = 0$. Nous venons de prouver que $1 = 0$ ce qui conclut que $A = 0$. \square

Proposition 4.8. *Considérons les anneaux dans $(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\blacksquare}\text{-Mod}$ donnés par $\mathbb{Z}[[T]]$ avec la topologie T -adique et $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ avec la topologie dont une base de voisinages de 0 est donnée par les $T^{-n}\mathbb{Z}[[T^{-1}]]$. Nous avons*

$$\mathbb{Z}[[T]] \otimes_{(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}((T^{-1})) = 0.$$

Démonstration. Les deux sont des $\mathbb{Z}[T]$ -algèbres et s'expriment comme limites et colimites¹³ d'objets discrets : ils sont donc light solides.

Du morphisme de monoïdes donné par la diagonale $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \times \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on tire un morphisme de groupes abéliens condensés

$$\mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\mathbb{N} \cup \{\infty\}]$$

qui se factorise en $P \rightarrow P \otimes P$. De plus, puisque $T^n \rightarrow 0$ dans $\mathbb{Z}[[T]]$ et $T^{-n} \rightarrow 0$ dans $\mathbb{Z}((T^{-1}))$ on en déduit une application

$$P \rightarrow P \otimes P \xrightarrow{(n \mapsto T^n) \otimes (m \mapsto T^{-m})} \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}((T^{-1})) \rightarrow \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}((T^{-1}))$$

La précomposition par $\{n\} \mapsto P$ se factorise comme

$$\{n\} \xrightarrow{T^n \otimes T^{-n}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[T]} \mathbb{Z}((T^{-1})) \rightarrow \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}((T^{-1})).$$

En regardant au niveau des sections sur le point, on en déduit qu'elle coïncide avec 1 . L'application $P \rightarrow \mathbb{Z}[[T]] \otimes_{(\mathbb{Z}[T], \mathbb{Z})_{\blacksquare}} \mathbb{Z}((T^{-1}))$ que nous avons obtenu est donc une factorisation de la suite constante égale à 1 . Le lemme précédent conclut. \square

13. Attention, c'est uniquement parce que l'on a une colimite selon des morphismes ouverts que la colimite commute à $X \mapsto \underline{X}$.

4.4 Un dévissage topologique

Je regardais un peu trop fixement les anneaux de Fontaine suivants : l'anneau $\mathcal{O}_\varepsilon^+ := \mathbb{Z}_p[[X]]$ muni de la topologie (p, X) -adique et l'anneau $\mathcal{O}_\varepsilon = (\mathbb{Z}_p[[X]][X^{-1}])^{\hat{p}}$ muni de la topologie d'anneau dont une base de voisinages de zéro est constituée des $p^n \mathcal{O}_\varepsilon + X^k \mathcal{O}_\varepsilon^+$. Les deux anneaux sont sans p -torsion, p -adiquement séparés et complets et la topologie quotient sur $E = \mathcal{O}_\varepsilon/p \cong \mathbb{F}_p((X))$ est celle dont une base de voisinages de zéro est constituée des $X^k \mathbb{F}_p[[X]]$. La question que je me pose est la suivante : puis-je retrouver la topologie sur \mathcal{O}_ε à partir de la donnée de celle sur E ?

Pour commencer cette réflexion, nous pouvons nous demander si l'on peut retrouver la topologie sur $\mathcal{O}_\varepsilon/p^2$ qui s'insère dans une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \rightarrow E \cong p\mathcal{O}_\varepsilon/p^2\mathcal{O}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon/p^2\mathcal{O}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon/p\mathcal{O}_\varepsilon = E \rightarrow 0.$$

Il s'agit même d'une suite exacte *stricte* de groupes topologiques. La topologie sur l'extension au centre est-elle entièrement déterminée par les topologies des deux termes ? On vérifie aisément que c'est le cas pour une extension stricte de \mathbb{F}_p par \mathbb{F}_p ou les deux sont munis de la topologie discrète, mais le résultat semblait assez évident.

Nous pouvons en réalité, grâce aux solides light, démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.9. *Soit \mathcal{O} une \mathbb{Z}_p -algèbre topologique sans p -torsion, p -adiquement séparée et complète, muni d'un isomorphisme d'anneaux $i : \mathcal{O}/p\mathcal{O} \cong E$. Il existe au plus une topologie sur \mathcal{O} telle que :*

1. *Le morphisme i est un homéomorphisme si l'on munit sa source de la topologie quotient.*
2. *Le multiplication par p induit un homéomorphisme de \mathcal{O} vers $p\mathcal{O}$ munit de la topologie induite.*

Lemme 4.10. *Soit A un groupe abélien topologique métrisablement compactement engendré tel que le groupe light condensé \underline{A} est solide. Soit B un groupe abélien extension de E par A . On suppose que pour toute suite $(a_n) \in A^\mathbb{N}$, si $pa_n \rightarrow 0$, il existe (a'_n) telle que $a'_n \rightarrow 0$ et $pa_n = pa'_n$. Il existe au plus une topologie sur B qui le rend métrisablement compactement engendré, telle que la suite courte*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow 0$$

est une suite exacte stricte de groupes topologiques et que \underline{B} est solide.

Démonstration. Les métrisablement compactement engendrés se plongent de manière pleinement fidèle dans les light condensés et qu'une telle suite exacte stricte équivaut à l'exactitude de la suite des groupes condensés associés, l'énoncé se ramène à dire que l'application¹⁴ $\text{Ext}_{\text{Solid}^{\text{light}}}^1(\underline{E}, \underline{A}) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Ab}}^1(E, A)$ est injective.

Que ce soit dans les groupes abéliens, dans les groupes topologiques, dans les light condensés¹⁵, E s'écrit comme la limite des $\mathbb{F}_p[[X]]$ le long de la multiplication par X . Ainsi, l'injectivité se réduit à celle de $\text{Ext}_{\text{Solid}^{\text{light}}}^1(\mathbb{F}_p[[X]], \underline{A}) \rightarrow \text{Ext}_{\text{Ab}}^1(\mathbb{F}_p[[X]], A)$. Le complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow p\mathbb{Z}[[X]] \rightarrow \mathbb{Z}[[X]]$$

est une résolution projective de $\mathbb{F}_p[[X]]$ dans les groupes abéliens et dans les solides ! Grâce à la pleine fidélité du foncteur $Z \mapsto \underline{Z}$ des groupes métrisablement compactement engendrés vers les groupes solides, nous pouvons réécrire l'application entre groupes d'extensions comme

$$\text{Hom}_{\text{TopAb}}(p\mathbb{Z}[[X]], A) / \text{Hom}_{\text{TopAb}}(\mathbb{Z}[[X]], A) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ab}}(p\mathbb{Z}[[X]], A) / \text{Hom}_{\text{Ab}}(\mathbb{Z}[[X]], A).$$

L'injectivité de cette application provient de ce qu'un morphisme continu f depuis $p\mathbb{Z}[[X]]$ revient à se donner une suite convergente (z_n) image de (pX^n) et que dire qu'elle provient d'un morphisme ensembliste revient à dire que $(z_n) = (pa_n)$. L'hypothèse sur A conclut alors que $X^n \mapsto a'_n$ est morphisme continu depuis $\mathbb{Z}[[X]]$ dont provient f . \square

Démonstration. Fixons \mathcal{T} une telle topologie sur \mathcal{O} . Pour tout entier n , prouvons par récurrence que la topologie quotient sur $\mathcal{O}/p^n\mathcal{O}$ est uniquement déterminée par les hypothèses de l'énoncé. L'hypothèse 1) donne l'initialisation et le fait que $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ est métrisablement compactement engendré et solide. De plus, \mathcal{O} est p -adiquement séparé et complet ainsi que sans p -torsion, ce qui prouve qu'il s'écrit comme limite d'extensions de $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$ dans les

14. Nous pouvons l'obtenir en remarquant que le groupe sous-jacent à une extension de groupes solides est une extension des groupes sous-jacents, ou en considérant que pour toute résolution injective solide I^\bullet de A , le complexe $I(*)^\bullet$ est exact et formé de groupes divisibles, i.e. de \mathbb{Z} -modules injectifs.

15. Puisque les flèches de transition sont ouvertes.

groupes topologiques. Il est a fortiori métrisablement compactement engendré et solide. L'hypothèse 2) termine de démontrer que $\mathcal{O}/p^n\mathcal{O}$ vérifie les hypothèses du lemme 4.10. En appliquant ledit lemme à la suite exacte stricte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}/p^n\mathcal{O} \xrightarrow{p^\times} \mathcal{O}/p^{n+1}\mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow 0$$

dont le caractère strict provient de l'hypothèse 2), nous avons la récurrence.

Puisque \mathcal{O} munit de \mathcal{T} est p -adiquement séparé et complet, il est limite dans les groupes topologiques des $\mathcal{O}/p^n\mathcal{O}$ munis des topologies induites. Nous venons de démontrer que ces derniers ne dépendaient que des hypothèses de l'énoncé, ce qui conclut.

□

5 Anneaux analytiques

5.1 Anneaux analytiques simples : cas discret et p -adique

Nous terminons en écrivant la démonstration de [CS19, Remarque 7.2].

Proposition 5.1. *Soit (A, \mathcal{A}) un anneau pré-analytique tel que A est discret. Le foncteur $S \mapsto \mathcal{A}[S]$ se factorise uniquement en un foncteur depuis la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ dont les objets sont les $A[S]$ pour S extrêmement discontinus. En particulier, si $A[S_1]$ et $A[S_2]$ sont isomorphes alors $\mathcal{A}[S_1]$ et $\mathcal{A}[S_2]$ aussi.*

Démonstration. La fonctorialité de \mathcal{A} fournit des applications pour tout couple d'extrêmement discontinus

$$T(S) \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T])$$

fonctorielles au sens où l'identité dans $S(S)$ est envoyée sur l'identité et où le diagramme suivant commute lorsque l'application de gauche est la composition des fonctions continues et l'application de droite la composition dans $A\text{-Mod}$:

$$\begin{array}{ccc} T(S) \times U(T) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T]) \times \text{Hom}_A(\mathcal{A}[T], \mathcal{A}[U]) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[U]) \end{array}$$

Puisque les $\text{Hom}_A(-, -)$ sont des A -modules et que la colonne de droite du diagramme précédent est une application A -bilinéaire, l'unique extension $A[T(S)] \rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T])$ est encore fonctorielle (l'application de gauche est remplacée par l'unique extension A -bilinéaire de l'application initiale). Puisque \mathcal{A} transforme unions disjointes finies en sommes, le foncteur contravariant $\text{Hom}_A(\mathcal{A}[-], \mathcal{A}[T])$ est un faisceau ce qui permet de faisceautiser

$$A[T(-)] \Rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{A}[-], \mathcal{A}[T])$$

en une transformation naturelle

$$A[T] \Rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{A}[-], \mathcal{A}[T]).$$

On vérifie que l'application de composition

$$\text{Hom}_A(A[S], A[T]) \times \text{Hom}_A(A[T], A[U]) \rightarrow \text{Hom}_A(A[S], A[U])$$

correspond aux recollement des

$$A[T'(S')] \times A[U'(T')] \rightarrow A[U'(S')]$$

que l'on a construit. Pour aider les calculs, que nous n'écrivons pas en entier, détaillons à quel morphisme correspond $x \in A[T](S)$. Pour un certain recouvrement fini $S = \sqcup_I S_i$, nous identifions x à un élément de $\prod_I A[T(S_i)]$. Le morphisme de $\text{Hom}_{\text{EnsCond}}(S, A[T])$ déduit envoie $f \in S(V)$ identifié à $(f_i) \in \prod_I S_i(V_i)$ dans $\prod_I A[T(V_i)]$ via la composition par composition par f_i sur le $i^{\text{ième}}$ facteur. On en déduit ainsi que les factorisations des premiers diagrammes en diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T(S) \times U(T) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[T(S)] \times A[U(T)] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & A[U(S)] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T]) \times \text{Hom}_A(\mathcal{A}[T], \mathcal{A}[U]) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[U]) \end{array}$$

se recollent les factorisations des premiers diagrammes en diagrammes commutatifs où l'application de gauche est la composition.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(S, T) \times \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(T, U) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Hom}_{\text{EnsCond}}(S, U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(A[S], A[T]) \times \text{Hom}_A(A[T], A[U]) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T]) \times \text{Hom}_A(\mathcal{A}[T], \mathcal{A}[U]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_A(A[S], A[U]) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[U]) \end{array}$$

Nous avons ainsi factorisé la transformation naturelle. Pour l'unicité, on remarque que la factorisation simultanée des $T(S) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{A}[S], \mathcal{A}[T])$ via $A[T](S)$ est unique (par unicité de la linéarisation, puis de la faisceautisation). \square

Remarque 5.2. La dernière propriété est automatique lorsque l'anneau est analytique puisque l'on peut vérifier que $\mathcal{A} \otimes_A M$ ne dépend pas de la présentation de M choisie.

Soit A un anneau condensé. Il existe une structure d'anneau pré-analytique que l'on note $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ donnée par

$$(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare} : \text{ExtrDisc} \rightarrow A\text{-Mod}, \quad S \mapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S].$$

Proposition 5.3 (Proposition 7.9 dans [CS19]). *1. Supposons que A est solide et que pour tout extrêmement discontinu S , nous avons un isomorphisme¹⁶ dans $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$*

$$(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S] = A \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$$

Alors, l'anneau pré-analytique $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ est analytique.

2. L'hypothèse du lemme précédent est en particulier vérifiée lorsque A est discret ou que $A = \mathbb{Z}_p$ pour un certain premier p .

Démonstration. 1. Soit S un extrêmement discontinu et K de la forme

$$K = \text{Ker} \left(\bigoplus_I (A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S_i] \rightarrow \bigoplus_J (A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S'_j] \right)$$

où les S_i et les S'_j sont extrêmement discontinus. Il existe une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{RHom}_{A\text{-Mod}}((A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S], K) &\cong \text{RHom}_{A\text{-Mod}}\left((A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S])^{L_{\blacksquare}}, K\right) \\ &\cong \text{RHom}_{A\text{-Mod}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S], K) \\ &\cong \text{RHom}_{\text{AbCond}}(\mathbb{Z}[S], K) \\ &\cong \text{RHom}_{A\text{-Mod}}(A[S], K) \end{aligned}$$

Où la première ligne est une reformulation de l'hypothèse sur $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S]$. Le passage à la dernière ligne est simplement l'adjonction et l'identification¹⁷ $A[S] \cong A \otimes_{\mathbb{Z}}^L \mathbb{Z}[S]$.

2. Puisque $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ est projectif, le produit tensoriel solide dérivé est concentré en degré nul et vaut

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}} \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S].$$

Un anneau discret A s'écrit en tant que groupe abélien condensé (donc comme groupe abélien solide) comme colimite de copies de \mathbb{Z} comme suit :

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \oplus_I \text{ finiz}/n_i \mathbb{Z} \subseteq A}} \text{Coker} \left(\bigoplus_I \mathbb{Z} \xrightarrow{\oplus(-\times n_i)} \bigoplus_I \mathbb{Z} \right).$$

La commutation du produit tensoriel aux colimites ramène l'égalité $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] = A \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L \mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$ au cas de $A = \mathbb{Z}$.

Le cas de \mathbb{Z}_p est plus délicat. Nous écrivons

$$\mathbb{Z}_p = \text{colim} \left(\mathbb{Z}[[X]] \xrightarrow{-\times(X-p)} \mathbb{Z}[[X]] \right).$$

Si $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S] \cong \prod_I \mathbb{Z}$, nous savons que $\mathbb{Z}_p_{\blacksquare}[S] = \prod_I \mathbb{Z}_p$. Or,

16. Isomorphisme ici est s'entend du point de vue infini dérivé.

17. Cette identification provient de la projectivité de $\mathbb{Z}[S]$ dans AbCond .

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}}^L \prod_I \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_I \mathbb{Z} \\
&= \operatorname{colim} \left(\mathbb{Z}[[X]] \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_I \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[[X]] \otimes_{\mathbb{Z}} \prod_I \mathbb{Z} \right) \\
&= \operatorname{colim} \left(\prod_I \mathbb{Z}[[X]] \xrightarrow{-\prod_I (- \times (X-p))} \prod_I \mathbb{Z}[[X]] \right) \\
&= \prod_I \mathbb{Z}_p
\end{aligned}$$

où la première ligne est obtenue par projectivité de $\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S]$, le passage à la deuxième ligne par commutation du produit tensoriel solide aux colimites et le passage à la troisième ligne vient de la proposition 4.1. \square

Nous cherchons ensuite à utiliser la notion d'objet monoïdal idempotent dans ces catégories. Les objets monoïdaux idempotents dans la catégorie dérivée $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$ interviennent comme fermés d'un locale d'une version plus récente des globalisations en [CS19, Lecture IX]. Nous ferons une remarque après la proposition qui clôt notre analyse de $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ sur ce locale.

Proposition 5.4. *Supposons que l'anneau pré-analytique $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ est analytique.*

1. *La catégorie $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}\text{-Mod}$ est la sous-catégorie pleine de $A\text{-Mod}$ ¹⁸ formée des objets solides.*

Supposons de plus que A est une \mathbb{Z} -algèbre idempotente dans $\mathbb{Z}_{\blacksquare}\text{-Mod}$. Alors, $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}\text{-Mod}$ est stable par $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}$, le couple $(\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}, A)$ peut être enrichi canoniquement en une structure symétrique monoïdale et les bifoncteurs \otimes_{\blacksquare} et $\otimes_{(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}}$ sont naturellement isomorphes. Enfin, la catégorie $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}\text{-Mod}$ s'identifie canoniquement à une sous-catégorie pleine de $\mathbb{Z}_{\blacksquare}\text{-Mod}$, dont elle est même un idéal pour la structure monoïdale $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}$.

2. *L'infinie catégorie $D_{\blacksquare}(A, \mathbb{Z})$ est la sous-catégorie pleine de $D(A)$ ¹⁹ formée des objets solides.*

Supposons de plus que A est une \mathbb{Z} -algèbre idempotente dans $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$. Alors, $D_{\blacksquare}(A, \mathbb{Z})$ est stable par $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L$, le couple $(\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L, A)$ peut être enrichi canoniquement en une structure symétrique monoïdale et les bifoncteurs $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L$ et $\otimes_{(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}}^L$ sont naturellement homotopes. Enfin, l'infinie catégorie $D_{\blacksquare}(A, \mathbb{Z})$ s'identifie canoniquement à une sous-catégorie pleine de $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$, dont elle est même un idéal pour la structure monoïdale $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L$.

Démonstration. Soit M un objet de $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}\text{-Mod}$. Pour tout extrêmement discontinu S , nous avons la suite de bijections

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\operatorname{AbCond}}(\mathbb{Z}_{\blacksquare}[S], M) &= \operatorname{Hom}_{A\text{-Mod}}((A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}[S], M) \\
&= M(S)
\end{aligned}$$

où la première ligne provient de ce que M est un A -module et de la propriété d'adjonction de $A \otimes_{\mathbb{Z}} -$ et où le passage à la deuxième ligne découle de la définition d'un $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ -module. Ainsi, M est solide. Réciproquement, si un A -module M est solide, en inversant l'ordre du calcul, on démontre que M est un $(A, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ -module. L'analogie fonctionne pour le deuxième point en remplaçant Hom par RHom , $A\text{-Mod}$ par $D(A)$ et $M(S)$ par $\operatorname{RHom}_{\operatorname{AbCond}}(\mathbb{Z}[S], M)$.

Le reste des affirmations provient des propositions 6.9 et 6.11 et de leurs analogues en infinies catégories. \square

Remarque 5.5. En combinant les résultats des propositions 5.3 et 5.4 nous venons de démontrer que la catégorie $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$ est stable par $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L$ et qu'être un \mathbb{Z}_p -module est une propriété dans $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$ et non une structure. À première vue, cela peut sembler étonnant puisqu'il semble que pour deux objets M et N de $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$, l'objet $M \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L N$ est muni de deux structures de \mathbb{Z}_p -modules via sa structure et gauche et celle à droite. Il se trouve qu'elles coïncident.

^{18.} Ici, A est vu comme ensemble condensé.

^{19.} Ici, A est vu comme ensemble condensé.

En deuxième lecture, il n'est finalement pas étonnant qu'avoir une structure de \mathbb{Z}_p -module soit une propriété et non une structure si l'on considère une intuition venant du monde topologique. Pour un groupe abélien topologique séparé A , être un \mathbb{Z}_p -module topologique est une propriété : il faut et suffit que pour tout $a \in A$ et toute suite (r_n) d'entiers convergeant dans \mathbb{Z}_p , la suite $(r_n a)$ dans A converge et que l'application bilinéaire $\mathbb{Z}_p \times A \rightarrow A$ déduite est continue. Une éventuelle structure de \mathbb{Z}_p -module sur A est contrainte par sa structure de groupe abélien.

Remarque 5.6. Remarque, si nous regardons \mathbb{F}_p comme objet monoïdal de $\mathbb{Z}_{\blacksquare}\text{-Mod}$, elle est effectivement idempotente. Ainsi $(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z})_{\blacksquare}$ est simplement la sous-catégorie des modules solides sur lesquels la multiplication par p est nulle. En revanche, ce n'est pas le cas au niveau dérivé puisque nous avons

$$\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L \mathbb{F}_p = [\dots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{F}_p \leftarrow \mathbb{F}_p \leftarrow 0 \leftarrow \dots],$$

où les \mathbb{F}_p existent en degré 0 et 1. Il n'est pas automatique par le formalisme précédent que $D_{\blacksquare}(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z})$ est stable par $\otimes_{\mathbb{Z}_{\blacksquare}}^L$. Une justification morale à ceci existe déjà dans le cas non condensé : d'un point de vue dérivé $\text{RHom}_{\text{Ab}}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ contient l'information de l'extension $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ de \mathbb{F}_p par \mathbb{F}_p . Cette information ne peut pas exister dans $D(\mathbb{F}_p)$ puisque tout \mathbb{F}_p -espace vectoriel extension de \mathbb{F}_p par \mathbb{F}_p est une extension triviale.

Dans AbCond , nous avons deux sous-catégories pleines liées au premier p formées respectivement des \mathbb{F}_p -modules et des $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ -modules. À première vue, la catégorie $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z})$ fait le tri en soulignant que $D_{\blacksquare}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z})$ se voit comme une sous-catégorie pleine stable par \otimes_{\blacksquare}^L , ce qui n'est pas le cas de $D_{\blacksquare}(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z})$.

5.2 Où sont les algèbres d'Iwasawa dans le monde solide ?

Dans la correspondance de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, la construction de (φ, Γ) -modules à partir de représentations du groupe linéaire faire intervenir l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p \llbracket \begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \rrbracket$ qui est la limite des \mathbb{Z}_p -algèbres libres sur les quotients du groupe par $\begin{pmatrix} 1 & p^n \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le quotient de niveau n s'identifie à

$$\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}_p[Y]/(Y^{p^n} - 1) = \mathbb{Z}_p[X]/((1 + X)^{p^n} - 1).$$

Topologiquement, l'anneau recherché est la limite des quotient par $(p^k, (1 + X)^{p^n} - 1)$. Cette famille et la famille $(p, X)^k$ sont cofinales l'une dans l'autre. L'algèbre d'Iwasawa obtenu est donc $\mathbb{Z}_p \llbracket X \rrbracket$ avec la topologie (p, X) -adique. Il est classique d'identifier cet anneau à un espace de mesures sur \mathbb{Z}_p à coefficients dans \mathbb{Z}_p . Nous allons démontrer cette identification dans un cadre plus général.

Soit S un espace profini. La topologie compacte-ouverte et la topologie de convergence uniforme coïncident sur $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}_p)$ et en font une \mathbb{Z}_p -algèbre topologique compacte et localement compacte. Nous prenons une présentation de S comme limite filtrante d'ensembles finis $S = \lim_{i \in I} S_i$. Nous appelons $\pi_i : S \rightarrow S_i$ la projection et pour $j \geq i$, $\pi_{j,i} : S_j \rightarrow S_i$ les morphismes définissant le diagramme. En choisissant $s_{i,t} \in \pi_i^{-1}(t)$ pour chaque couple (i, t) avec $t \in S_i$, nous pouvons exhiber la densité des fonctions localement constants dans $\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}_p)$: toute fonction f est limite uniforme des $f_i = \sum_{t \in S_i} f(s_{i,t}) \mathbb{1}_{\pi_i^{-1}(t)}$.

Définition 5.7. Pour chaque $i \in I$, il existe un morphisme de \mathbb{Z}_p -algèbres

$$\mathcal{CHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p) \rightarrow \prod_{t \in S_i} \mathbb{Z}_p, \quad \mu \mapsto \int \mathbb{1}_{\pi_i^{-1}(t)} \mu.$$

Ils fournissent une morphisme vers le diagramme défini par I qui envoie

$$\prod_{t \in S_i} \mathbb{Z}_p \rightarrow \prod_{t' \in S_j} \mathbb{Z}_p, \quad (x_t)_t \mapsto \left(\sum_{t \in \pi_{i,j}^{-1}(t')} x_t \right)_{t'}$$

en remarquant que $\mathbb{1}_{\pi_i^{-1}(t')} = \sum_{t \in \pi_{i,j}^{-1}(t')} \mathbb{1}_{\pi_j^{-1}(t)}$, qui fournit l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p \llbracket S \rrbracket$.

Proposition 5.8. 1. Le morphisme précédent est une bijection.

2. Si l'on munit l'algèbre d'Iwasawa de la topologie limite et l'espace de mesures de la topologie de convergence uniforme²⁰, le morphisme est continu sans être un homéomorphisme si S est infini.

²⁰. Qui est à nouveau la topologie compacte-ouverte.

3. La topologie de convergence uniforme est la topologie p -adique.

Démonstration. 1. Par commutation des limites au "souligné", il s'agit d'un énoncé dans les groupes topologiques localement compacts. Pour l'injectivité, considérer que l'image du morphisme détermine la mesure μ sur les fonctions localement constantes, qui sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ pour la convergence uniforme. Pour la surjectivité, soit $(x_t)_{i \in I, t \in S_i}$ une famille d'entiers p -adiques. Pour tout couple (i, t) choisissons $s_{i,t}$ dans l'image réciproque de t par π_i . Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, la famille

$$\left(\sum_{t \in S_i} f(s_{i,t}) x_{i,t} \right)_{i \in I}$$

est de Cauchy²¹. Démontrons-le. Soit $i \in I$ et $n \geq 0$, la continuité de f implique qu'il existe $j \geq i$ tel que $(f \bmod p^n \mathbb{Z}_p)$ se factorise par S_j . Dans ce cas, pour tout $k \geq j$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{t \in S_k} f(s_{k,t}) x_{k,t} &= \sum_{t' \in S_j} \left(\sum_{t \in \pi_{k,j}^{-1}(t')} f(s_{k,t}) x_{k,t} \right) \\ &\cong \sum_{t' \in S_j} \left(\sum_{t \in \pi_{k,j}^{-1}(t')} f(s_{j,t'}) x_{k,t} \right) \bmod p^n \mathbb{Z}_p \\ &\cong \sum_{t' \in S_j} f(s_{j,t'}) x_{j,t'} \end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne se fait par hypothèse sur S_j et celui à la troisième par appartenance de $(x_{i,t})$ à la limite indexée par i . La famille étant de Cauchy et la catégorie I filtrante, nous pouvons définir sans ambiguïté sa "limite" comme un élément de \mathbb{Z}_p . Cette attribution définit une mesure continue μ telle que l'intégrale de $\mathbb{1}_{\pi_i^{-1}(t)}$ est $x_{i,t}$.

2. Chaque évaluation est continue si l'on munit $\mathcal{CHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$ de la convergence uniforme. Par définition de la topologie limite, le morphisme construit est donc continu.

Pour démontrer que ce n'est pas un homéomorphisme, prenons le voisinage autour la mesure nulle constitué des mesures d'images contenue dans $p\mathbb{Z}_p$ et démontrons qu'il ne contient l'image réciproque d'aucun ouvert de la limite. Puisque la catégorie I est cofiltrante, tout ouvert de la limite autour de zéro s'écrit $U = \{\mu \mid \forall l, \int \mathbb{1}_{U_l} \mu \in p^n \mathbb{Z}_p\}$ pour un certain entier n et une certaine famille d'ouverts U_l vivant au-dessus d'un S_i . Grâce au caractère infini de S , nous pouvons choisir $j \geq i$ et $t \in S_i$ tel que $\pi_{j,i}^{-1}(t)$ n'est pas un singleton. Prenons $t_1 \neq t_2$ dedans. N'importe quelle mesure μ de poids 1 sur $\pi_j^{-1}(t_1)$, de poids $p^n - 1$ sur $\pi_j^{-1}(t_2)$ et de poids nul ailleurs²² appartient à U mais vérifie que

$$\int \mathbb{1}_{\pi_j^{-1}(t_1)} \mu = 1.$$

3. Les mesures d'images contenue dans $p^n \mathbb{Z}_p$ sont exactement les multiples p^n -ièmes de mesures. □

En appliquant le foncteur des espaces topologiques vers les ensembles condensés, l'algèbre d'Iwasawa devient la limite des $\mathbb{Z}_p[S_i]$, autrement dit $\mathbb{Z}_{p\blacksquare}[S]$. Grâce à la proposition précédente, il s'agit du \mathbb{Z}_p -module condensé correspondant à $\mathcal{CHom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{C}(S, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$ si on le munit d'une topologie un peu mystérieuse.

Remarque 5.9. Pour $S = \mathbb{Z}_p$, cette algèbre joue un rôle cruciale dans la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dans [Col10, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules, §IV.1], P. Colmez définit un (φ, Γ) -module à partir d'une \mathbb{Z}_p -représentation lisse Π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour ce faire, il considère l'action du groupe des matrices unipotentes entières $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque Π est lisse le module Π est en réalité un module sur l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]]$ qui s'identifie à $\mathbb{Z}_p[[t]]$. Pour des représentations de p -torsion, nous obtenons plutôt une

21. Une famille $(y_i)_{i \in I}$ est dite de Cauchy si pour tout $i \in I$ et $n \geq 0$, il existe $j \geq i$ tel que $\forall k_1, k_2 \geq j, y_{k_1} - y_{k_2} \in p^n \mathbb{Z}_p$.

22. Qui existe puisque le système de \mathbb{Z}_p -algèbres définissant l'algèbre d'Iwasawa est filtrant et ne possède que des morphismes surjectifs. Ses morphismes structuraux vers chaque produit sont surjectifs.

structure de $\mathbb{F}_p[[t]]$ -module. La construction de P. Colmez passe par le dual de certains sous-modules²³ de Π . Ainsi, différents éléments de ce sous-module seront invariants par des sous-groupes de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de plus en plus petits²⁴ d'où l'idée de considérer des mesures. Enfin, pour comprendre pourquoi cet anneau est muni de la topologie (p, t) -adique, il faut considérer à nouveau que la correspondance modulo p passe par des (φ, Γ) -modules sur $\mathbb{F}_p((t))$, que nous voulons munir de la topologie t -adique précisément pour garder en mémoire la continuité des actions. La topologie p -adique sur $\mathbb{Z}_p[[t]]$ semble donc moins adaptée.

Il serait intéressant de savoir si la version avec la topologie de convergence uniforme apparaît dans une alcôve de la théorie des anneaux analytiques.

23. Pour les plus familiers ou ceux qui liraient [Col10, Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules, §III.1], le dual des sous-modules engendrés par une présentation standard et ses translatés sur un demi-arbre de Bruhat-Tits enraciné en 0

24. Toujours pour les plus familiers, plus l'on part à l'infini dans l'arbre de Bruhat-Tits, plus les translatés d'une présentation standard sont invariants par de petits groupes.

6 ANNEXE. Ludothèque catégorique

Cette section est dédiée à toutes les adeptes de diagrammes et aux mordue·e·s de la flèche pour vérifier avec une détermination qui confine à la folie légère que certaines constructions catégoriques générales fonctionnent bien. Vous pouvez lire cette section sans rentrer dans le détail des preuves et en vous contentant d'admirer les formes qu'elles produisent. Si vous êtes de ceux qu'étoffer un diagramme pour le faire commuter satisfait au-delà du raisonnable, vous pourrez toutefois constater que les catégories, ça marche bien.

6.1 Catégories monoïdales et objets monoïdaux

Pour toutes ces notions, circuler autour de la page [, Monoidal Category]. Par soucis de simplicité pour les lecteur·trice·s peu habitué·e·s aux infinies catégories²⁵, nous rédigeons cette ludothèque dans le cadre des catégories classiques. Nous utilisons cependant les résultats dans le cadre des infinies catégories pour s'attaquer au formalisme des anneaux analytiques.

Définition 6.1. Une catégorie monoïdale est un sexuplet $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ où \mathcal{C} est une catégorie, \otimes est un foncteur de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans \mathcal{C} , 1 est un objet, et où les trois dernières lettres représentent des *isomorphismes* naturels

$$a : (- \otimes -) \otimes - \Rightarrow - \otimes (- \otimes -)$$

appelée associativité,

$$l : 1 \otimes - \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}} \text{ et } r : - \otimes 1 \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$$

appelés unitarité à gauche et à droite. On impose de plus que ces trois isomorphismes naturels fassent commuter les *diagrammes de cohérence* suivants appelés identités triangulaire et pentagonale pour tout quadruplet d'objet (w, x, y, z) :

$$\begin{array}{ccccc} (x \otimes 1) \otimes y & \xrightarrow{a_{x,1,y}} & x \otimes (1 \otimes y) & & \\ & \searrow r_x \otimes \text{Id}_y & \swarrow \text{Id}_x \otimes l_y & & \\ & & x \otimes y & & \\ & & & & \\ & & & & (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) \\ & \nearrow a_{w \otimes x, y, z} & & \nwarrow a_{w, x, y \otimes z} & \\ ((w \otimes x) \otimes y) \otimes z & & & & w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) \\ & \searrow a_{w, x, y} \otimes \text{Id}_z & & \nearrow \text{Id}_w \otimes a_{x, y, z} & \\ & & (w \otimes (x \otimes y)) \otimes z & \xrightarrow{a_{w, x \otimes y, z}} & w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) \end{array}$$

Définition 6.2. Soient $(\mathcal{C}, \bullet, 1^\bullet, a^\bullet, l^\bullet, r^\bullet)$ et $(\mathcal{D}, \otimes, 1^\otimes, a^\otimes, l^\otimes, r^\otimes)$ deux catégories monoïdales. Un foncteur lax monoïdal est un triplet (F, i, m) où $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur, où

$$i : 1^\otimes \rightarrow F(1^\bullet)$$

est un morphisme dans \mathcal{C} et où

$$m : F \otimes F \Rightarrow F(- \bullet -)$$

est une transformation naturelle. On impose de plus que le foncteur soit associatif et unitaire, i.e. que les diagrammes suivants commutent pour tout triplet (x, y, z) d'objets de \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} (F(x) \otimes F(y)) \otimes F(z) & \xrightarrow{a_{F(x), F(y), F(z)}^\otimes} & F(x) \otimes (F(y) \otimes F(z)) \\ \downarrow m_{x,y} \otimes \text{Id}_{F(z)} & & \downarrow \text{Id}_{F(x)} \otimes m_{y,z} \\ F(x \bullet y) \otimes F(z) & & F(x) \otimes F(y \bullet z) \\ \downarrow m_{x \bullet y, z} & & \downarrow m_{x, y \bullet z} \\ F((x \bullet y) \bullet z) & \xrightarrow{F(a_{x,y,z}^\bullet)} & F(x \otimes (y \otimes z)) \end{array}$$

25. dont l'auteur fait évidemment partie

$$\begin{array}{ccc}
1 \otimes F(x) & \xrightarrow{l_{F(x)}^\otimes} & F(x) \\
i \otimes \text{Id}_{F(x)} \downarrow & \nearrow m_{1^\bullet, x} & \\
F(1^\bullet) \otimes F(x) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F(x) \otimes 1 & \xrightarrow{r_{F(x)}^\otimes} & F(x) \\
\text{Id}_{F(x)} \otimes i \downarrow & \nearrow m_{x, 1^\bullet} & \\
F(x) \otimes F(1^\bullet) & &
\end{array}$$

On dit que le foncteur est puissamment monoïdal si i est un isomorphisme et m un isomorphisme naturel.

On dit que le foncteur est strictement monoïdal si i et m sont des égalités.

Définition 6.3. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ une catégorie monoïdale. Un objet monoïdal dans \mathcal{C} est un triplet (A, π, η) où A est un objet de \mathcal{C} , et π et η sont des morphismes

$$\pi : A \otimes A \rightarrow A, \quad \eta : 1 \rightarrow A$$

qui font commuter les diagrammes d'associativité et d'unitarité suivants :

$$\begin{array}{ccc}
(A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{a_{A, A, A}} & A \otimes (A \otimes A) \\
\pi \otimes \text{Id}_A \downarrow & & \downarrow \text{Id}_A \otimes \pi \\
A \otimes A & \xrightarrow{\pi} & A \\
& \nwarrow \pi & \nearrow \pi \\
& A &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 \otimes A & \xrightarrow{l_A} & A \\
\eta \otimes \text{Id}_A \downarrow & \nearrow \pi & \\
A \otimes A & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A \otimes 1 & \xrightarrow{r_A} & A \\
\text{Id}_A \otimes \eta \downarrow & \nearrow \pi & \\
A \otimes A & &
\end{array}$$

La catégorie des objets monoïdaux possède pour morphismes les morphismes $f : A \rightarrow B$ qui commutent à la multiplication et à l'unité, i.e. tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\
\pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& A & \\
\eta_A \nearrow & & \downarrow f \\
1 & & B \\
\eta_B \searrow & &
\end{array}$$

Proposition 6.4. Soit (F, i, m) un foncteur lax monoïdal entre catégories monoïdales pour lesquelles nous conservons les notations de la définition 6.2. Soit (A, π, η) un objet monoïdal dans \mathcal{C} . L'objet $F(A)$ muni de la multiplication

$$\pi_{F(A)} : F(A) \otimes F(A) \xrightarrow{m_{A, A}} F(A \bullet A) \xrightarrow{F(\pi)} F(A)$$

et de l'unité

$$\eta_{F(A)} : 1 \otimes \xrightarrow{i} F(1^\bullet) \xrightarrow{F(\eta)} F(A)$$

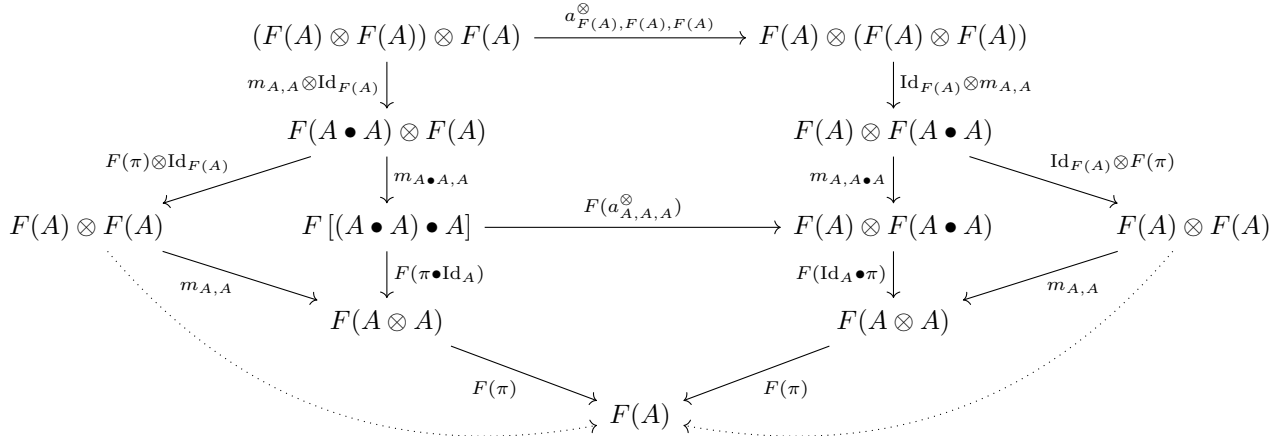
est un objet monoïdal de \mathcal{D} .

Aieus, l'association $(A, \pi, \eta) \mapsto (F(A), F(\pi) \circ m_{A, A}, F(\eta) \circ i)$ et $f \mapsto F(f)$ fournit un foncteur de la catégorie des objets monoïdaux de \mathcal{C} vers celle des objets monoïdaux de \mathcal{D} .

Démonstration. Voici venu le moment où la ludothèque mérite son nom. Vérifions par exemple que le diagramme d'associativité pour l'objet $F(A)$ commute. Nous partons du diagramme d'associativité pour l'objet A auquel nous appliquons F ce qui fournit un diagramme commutatif :

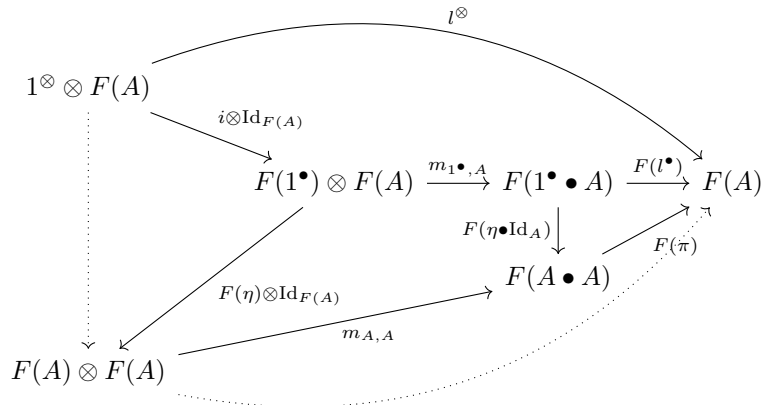
$$\begin{array}{ccc}
F[(A \bullet A) \bullet A] & \xrightarrow{F(a_{A, A, A}^\otimes)} & F(A) \otimes F(A \bullet A) \\
F(\pi \bullet \text{Id}_A) \downarrow & & \downarrow F(\text{Id}_A \bullet \pi) \\
F(A \otimes A) & & F(A \otimes A) \\
& \searrow F(\pi) & \swarrow F(\pi) \\
& F(A) &
\end{array}$$

Nous étoffons ensuite le diagramme comme suit en ajoutant le diagramme d'associativité pour F au sommet et des ailes sur les côtés :



Les deux "carrés" triangulaires des côtés commutent par naturalité de m . Les deux flèches en pointillés qui font commuter les triangles correspondent par définition à la multiplication sur $F(A)$. Ainsi, l'enveloppe de ce diagramme commute et correspond exactement au diagramme d'associativité pour $F(A)$.

Faisons également le diagramme d'unitarité à gauche. Nous écrivons le diagramme suivant :



Le carré supérieur correspond au diagramme d'unitarité à gauche de (F, i, m) donc commute ; le carré central commute parce que m est un bifoncteur ; le triangle à droite commute par application de F à l'unitarité à gauche de (A, π, η) ; la flèche en pointillés verticale correspond qui fait commuter le triangle correspond par définition à l'unité sur $F(A)$ tensorisée par $\text{Id}_{F(A)}$; la flèche en pointillés en bas qui fait commuter le triangle correspond par définition à la multiplication sur $F(A)$. L'enveloppe de ce diagramme commutatif est précisément l'unitarité à gauche pour $F(A)$. On s'épargne, malgré notre folie du diagramme l'unitarité à droite. \square

Remarque 6.5. Il serait possible de rajouter la symétrie partout, mais l'auteur se réserve la rédaction du cas symétrique monoïdale pour un autre zoomie de diagrammes.

6.2 Objets monoïdaux idempotents

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$ une catégorie monoïdale. Pour tout objet monoïdal (A, π, η) , il est possible de définir une nouvelle catégorie des A -objets à gauche de \mathcal{C} . Dans le cas particulier où A est idempotent, que nous allons introduire, cette catégorie s'identifiera à une sous-catégorie monoïdale pleine de \mathcal{C} .

Définition 6.6. Un A -objet est un couple (M, μ) où M est un objet de \mathcal{C} et $\mu : A \otimes M \rightarrow M$ est un morphisme. On impose de plus que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
(A \otimes A) \otimes M & \xrightarrow{a_{A,A,M}} & A \otimes (A \otimes M) \\
\pi \otimes \text{Id}_M \downarrow & & \downarrow \text{Id}_A \otimes \mu \\
A \otimes M & & A \otimes M \\
& \searrow \mu & \swarrow \mu \\
& M &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 \otimes M & \xrightarrow{l_M} & M \\
\eta \otimes \text{Id}_M \downarrow & & \uparrow \mu \\
A \otimes M & &
\end{array}$$

Les morphismes sont ceux commutant à la multiplication, i.e. les morphismes $f : M \rightarrow N$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes M & \xrightarrow{\mu_M} & M \\
\text{Id}_A \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\
A \otimes N & \xrightarrow{\mu_N} & N
\end{array}$$

Définition 6.7. Un objet monoïdal (A, π, η) est dit idempotent si π est un isomorphisme.

Remarque 6.8. Grâce aux diagrammes d'unitarité à gauche et à droite, il est équivalent d'imposer que $\pi, \eta \otimes \text{Id}_A$ ou $\text{Id}_A \otimes \eta$ est un isomorphisme. Dès que l'un des trois est un isomorphisme, les deux autres le sont et (A, π, η) est idempotent.

Proposition 6.9. Soit (A, π, η) un objet monoïdal idempotent.

1. Le foncteur $A \otimes - : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un adjoint à gauche de l'inclusion de son image essentielle dans \mathcal{C} .
2. Pour tout A -objet (M, μ) , le morphisme $\eta \otimes \text{Id}_M : 1 \otimes M \rightarrow A \otimes M$ est alors également un isomorphisme et la multiplication μ est également l'isomorphisme par

$$\mu : A \otimes M \xrightarrow{(\eta \otimes \text{Id}_M)^{-1}} 1 \otimes M \xrightarrow{l_M} M.$$

3. Un objet M de \mathcal{C} appartient à l'image essentielle de $A \otimes -$ si et seulement si $\eta \otimes \text{Id}_M$ est un isomorphisme. La catégorie des A -objets est équivalente à l'image essentielle de $A \otimes -$ qui est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C} .

Démonstration. 1. D'après [Lur09, Proposition 5.2.7.4], il faut et suffit qu'il existe une transformation naturelle α de $\text{Id}_{\mathcal{C}}$ vers $A \otimes -$ telle que $\alpha(A \otimes -)$ et $A \otimes (\alpha(-))$ sont des isomorphismes. Considérons la transformation naturelle donnée par

$$\alpha(M) : M \xrightarrow{l_M^{-1}} 1 \otimes M \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_M} A \otimes M.$$

Démontrer que $\alpha(A \otimes M)$ est un isomorphisme revient à prouver que $\eta \otimes \text{Id}_{A \otimes M}$ est un isomorphisme. Le diagramme suivant commute par naturalité de a :

$$\begin{array}{ccc}
1 \otimes (A \otimes M) & \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_{A \otimes M}} & A \otimes (A \otimes M) \\
a_{1,A,M} \uparrow & & \uparrow a_{A,A,M} \\
(1 \otimes A) \otimes M & \xrightarrow{(\eta \otimes \text{Id}_A) \otimes \text{Id}_M} & (A \otimes A) \otimes M
\end{array}$$

Puisque $\eta \otimes \text{Id}_A$ est un isomorphisme par idempotence de A , nous avons bien démontré que $\alpha(A \otimes M)$ est un isomorphisme. En utilisant les mêmes arguments et le fait que $\text{Id}_A \otimes \eta$ est également un isomorphisme, nous démontrons que $A \otimes \alpha(M)$ est un isomorphisme.

2. Nous commençons par montrer que l'image essentielle de $A \otimes -$ est stable par rétracts dans \mathcal{C} . Nous le démontrons dans le cas général d'un endofoncteur L d'une catégorie \mathcal{C} qui est adjoint à gauche de l'inclusion de son image essentielle dans \mathcal{C} . Soient X un rétract d'un objet $M(Y)$. Autrement dit, nous considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{f} & L(Y) & \xrightarrow{g} & X \\
& \searrow & & \swarrow & \\
& & \text{Id}_X & &
\end{array}$$

En utilisant l'adjonction, il existe un morphisme $\alpha(X) : X \rightarrow L(X)$ correspondant à l'identité de $L(X)$ et par lequel f se factorise. Ceci correspond à étoffer le diagramme comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha(X)} & L(X) & \xrightarrow{f_0} & L(Y) & \xrightarrow{g} & X \xrightarrow{\alpha(X)} L(X) \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & \text{Id}_X \end{array}$$

Le morphisme de $L(X)$ vers lui-même qui apparaît par composition dans ce diagramme vaut, par précomposition par $\alpha(X)$, la composée $\alpha(X) \circ \text{Id}_X = \alpha(X)$. L'adjonction affirme alors que ce morphisme est l'identité de $L(X)$. Le morphisme $\alpha(X)$ est ainsi un isomorphisme, d'inverse à droite f et d'inverse à droite $\alpha(X) \circ g \circ f_0$. A fortiori, $X \cong L(X)$ est dans l'image essentielle de L .

Revenons à notre cas particulier en prenant un A -objet (M, μ) . Le deuxième diagramme de la définition illustre que M est un retract de $A \otimes M$ de projection μ . Le premier point de cette proposition couplée avec le paragraphe précédent entraîne alors que M est dans l'image essentielle de $A \otimes -$ et même que $\alpha(M)$ est un isomorphisme, a fortiori que $\eta \otimes \text{Id}_M$ l'est par définition de α . À ce moment, le deuxième diagramme de la définition de A -objet fournit aisément l'expression de μ et le fait que μ est un isomorphisme.

3. La première assertion résulte du premier point et du fait que $1 \otimes M \cong M$. De plus, le foncteur

$$A \otimes \mathcal{C} \rightarrow A\text{-Objets}, \quad M \mapsto (M, l_M \circ (\eta \otimes \text{Id}_M)^{-1})$$

est essentiellement surjectif grâce au deuxième point. Puisque $A \otimes -$ est adjoint à gauche de l'inclusion de son image essentielle, il est également pleinement fidèle. □

Remarque 6.10. La proposition précédente illustre que pour algèbre idempotente A , être un A -objet est une propriété et non une structure. La structure de A -objet est unique et tout morphisme entre deux A -objets est automatiquement A -linéaire.

Regardons la catégorie monoïdale $(\text{AbGp}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, a, l, r)$ des groupes abéliens dont nous nous épargnons d'explicitier l'associativité et les unitarités. Nous pouvons y illustrer le comportement des objets monoïdaux idempotents par deux exemples. Un objet monoïdal A est exactement un anneau et un A -objet correspond à une A -algèbre. L'anneau \mathbb{Q} est idempotent, de même que les anneaux \mathbb{F}_p pour tout premier p . Or, être un \mathbb{Q} -espace vectoriel pour un groupe abélien n'est pas une structure, c'est simplement la propriété d'être divisible et tout morphisme additif entre \mathbb{Q} -espaces vectoriels est automatiquement \mathbb{Q} -linéaire. De même, être une \mathbb{F}_p -algèbre s'exprime par la propriété $p = 0$.

Corollaire 6.11. *La sous-catégorie des A -objets munie des données $(\otimes, A, a, l^A, r^A)$ est une catégorie monoïdale où nous allons expliciter l^A et r^A . De plus, c'est un idéal à gauche de \mathcal{C} au sens où*

$$\forall X \in \mathcal{C}, \forall M \in A\text{-Objets}, \quad M \otimes X \text{ est un } A\text{-objet}.$$

Démonstration. Commençons par vérifier que la catégorie des A -objets est un idéal à gauche, ce qui prouvera en particulier qu'elle est stable par \otimes . Soient $X \in \mathcal{C}$ et M un A -objet. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes (M \otimes X) & \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_{M \otimes X}} & A \otimes (M \otimes X) \\ a_{1, M, X} \uparrow & & \uparrow a_{A, M, X} \\ (1 \otimes M) \otimes X & \xrightarrow{(\eta \otimes \text{Id}_M) \otimes \text{Id}_X} & (A \otimes M) \otimes X \end{array}$$

commute par naturalité de a . Les deux morphismes verticaux sont des isomorphismes ce qui démontre que le caractère isomorphisme de $\eta \otimes \text{Id}_{M \otimes X}$ se retreint à celui de $\eta \otimes \text{Id}_M$. Par la caractérisation des A -objets au dernier point de la proposition 6.9, $M \otimes X$ appartient bien à la sous-catégorie pleine des A -objets.

On définit l^A comme l'inverse de $(\eta \circ \text{Id}_-) \circ l^{-1}$ et r de manière analogue. reste à démontrer l'identité triangulaire. On écrit un diagramme étoffé comme suit :

$$\begin{array}{ccccc}
(M \otimes A) \otimes N & \xrightarrow{a_{M,A,N}} & M \otimes (A \otimes N) \\
\swarrow (\text{Id}_M \otimes \eta) \otimes \text{Id}_N & & \searrow \text{Id}_M \otimes (\eta \otimes \text{Id}_N) \\
(M \otimes 1) \otimes N & \xrightarrow{a_{M,1,N}} & M \otimes (1 \otimes N) \\
\swarrow r_M^{-1} \otimes \text{Id}_N & & \searrow \text{Id}_M \otimes l_M^{-1} \\
(r_M^A)^{-1} \otimes \text{Id}_N & M \otimes N & \text{Id}_M \otimes (r_N^A)^{-1}
\end{array}$$

$\xrightarrow{\quad (r_M^A)^{-1} \otimes \text{Id}_N \quad}$
 $\xrightarrow{\quad \text{Id}_M \otimes (r_N^A)^{-1} \quad}$

Les morphismes en pointillés sont ceux annoncés par définition de l^A et r^A ; le triangle intérieur commute par identité triangulaire pour $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, l, r)$; le carré du haut commute par naturalité de a . Ainsi, l'enveloppe commute et c'est précisément l'identité triangulaire désirée. Il n'y a rien à prouver pour l'identité pentagonale. \square

Remarque 6.12. Si \mathcal{C} est symétrique monoïdale, le résultat peut-être amélioré en disant qu'il s'agit d'un idéal bilatère et c'est à première vue surprenant : pour un anneau commutatif A et deux A -modules M, N , le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ semble posséder deux structures de A -modules données par la structure à gauche et à droite, d'où l'étrangeté de voir $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ de manière univoque comme A -module. Ce serait oublier qu'être un A -objet est une propriété dans ce cadre, autrement dit, les deux structures que nous voudrions donner coïncident automatiquement.

Références

- [Gle58] M. GLEASON. « Projective topological spaces ». In : *Illinois J. Math.* 2 (1 1958), p. 482-489.
- [GV72] A. GROTHENDIECK et J.L. VERDIER. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schemas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4)*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1972.
- [Lew78] G. LEWIS. « The Stable Category and Generalized Thom Spectra ». Thèse de doct. University of Chicago, 1978.
- [Lur09] Jacob LURIE. *Higher Topos Theory*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 2009.
- [Col10] COLLECTIF. *Représentations p -adiques de groupes p -adiques II : Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*. Sous la dir. de Laurent BERGER, Christophe BREUIL et Pierre COLMEZ. Astérisque 330. Société mathématique de France, 2010.
- [CS19] D. CLAUSEN et P. SCHOLZE. *Lectures on Condensed Mathematics*. Condensed.pdf. 2019.
- [CS20] D. CLAUSEN et P. SCHOLZE. *Lectures on Analytic Geometry*. Analytic.pdf. 2020.
- [CS22] D. CLAUSEN et P. SCHOLZE. *Condensed Mathematics and Complex Geometry*. Complex.pdf. 2022.
- [] *nLab*. Page d'accueil.