
Équivalences de Fontaine multivariables Lubin-Tate et plectiques pour un corps local p -adique

par Nataniel Marquis

Abstract. — Let Δ be a finite set. We adapt the techniques of Carter-Kedlaya-Zábrádi to obtain a multivariable Fontaine equivalence which relates continuous finite dimensional \mathbb{F}_q -representations of $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{F}_q((X))}$ to multivariable φ -modules over a \mathbb{F}_q -algebra which is a domain. From this, we deduce a multivariable Lubin-Tate Fontaine equivalence for continuous finite type \mathcal{O}_K -representations of $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_K$, where $K|\mathbb{Q}_p$ is a finite extension. We also obtain a plectic Fontaine equivalence and two equivalences for the subgroup $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ of the plectic Galois group.

Résumé. — Soit Δ un ensemble fini. Nous adaptons les méthodes de Carter-Kedlaya-Zábrádi pour obtenir une équivalence de Fontaine multivariable pour les représentations continues de $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\mathbb{F}_q((X))}$ de dimension finie sur \mathbb{F}_q qui les fait correspondre à des φ -modules multivariés sur une \mathbb{F}_q -algèbre intègre. Nous en déduisons une équivalence de Fontaine multivariable Lubin-Tate pour les représentations continues de $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_K$ de type fini sur \mathcal{O}_K , où $K|\mathbb{Q}_p$ est une extension finie. Nous en déduisons également une équivalence de Fontaine plectique et deux équivalences pour le sous-groupe $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ du groupe de Galois plectique.

Table des matières

1	L'équivalence de Fontaine Lubin-Tate	5
1.1	Lois de Lubin-Tate	5
1.2	Corps de normes imparfait dans \tilde{A}_K	6
2	Équivalence de Fontaine multivariable pour certains corps perfectoides de caractéristique p	8
2.1	Construction du foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ modulo p	8
2.2	Équivalence de Fontaine multivariable perfectoid modulo p pour certains corps perfectoides de caractéristique p	13
2.3	Construction du foncteur pleinement fidèle \mathbb{D}_Δ modulo p	28
2.4	Équivalence de Fontaine multivariable modulo p pour certains corps de caractéristique p	32
2.5	Dévisage vers une équivalence de Fontaine multivariable pour certains corps de caractéristique p	35
2.6	Comment récupérer les équivalences de Carter-Kedlaya-Zábrádi?	37
3	Équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable	39
4	Variantes pour les groupes de Galois plectiques et glectiques	42
4.1	Préliminaires sur le groupe de Galois plectique	42
4.2	Équivalence de Fontaine plectique	44
4.3	Équivalence de Fontaine glectique semi-linéaire pour des extensions galoisiennes de \mathbb{Q}_p	45
4.4	Équivalence de Fontaine glectique	50
A	Étude détaillée des anneaux $\tilde{E}_\Delta, E_{\Delta,p}^{\text{sep}}$, etc	51
A.1	Plongement dans les anneaux de séries de Hahn-Mal'cev multivariables	51
A.2	Relations de coinduction perfectoides	58
A.3	Étude des anneaux imparfaits	60
A.4	Étude des anneaux de caractéristique mixte	62
B	Monoïdes topologiques	63

Introduction

Soit p un nombre premier et K une extension finie de \mathbb{Q}_p de corps résiduel fini k_K . L'archétype d'une équivalence de Fontaine est le Théorème 3.4.3 dans l'article de J.-M. Fontaine [Fon91]. Ce théorème établit une équivalence de catégories explicite

$$\mathbb{D} : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{G}_K \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi^{\mathbb{N}} \times \Gamma_K, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}) : \mathbb{V}.$$

Ici, la source est la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de type fini continues de $\mathcal{G}_K := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|K)$. La catégorie de droite est celle des (φ, Γ_K) -modules étales cyclotomiques (topologiques), des objets qui se sont avérés cruciaux en théorie de Hodge p -adique (voir [Her98], [Col10] et [EG23]).

Ces équivalences ont été généralisées dans deux directions. Bien que l'équivalence de Fontaine originelle considère l'extension cyclotomique $K(\mu_{p^\infty})$ pour se ramener à un corps de caractéristique p , il est possible de lui substituer extension de Lubin-Tate $K_{\text{LT},\pi}$. On obtient dans ce cas une équivalence de catégories explicite (voir [Fou05, §1.4.1], ou [Sch17a] pour une exposition détaillée)

$$\mathbb{D}_{\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_K \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \Gamma_{K,\text{LT}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}) : \mathbb{V}_{\text{LT}}$$

entre les \mathcal{O}_K -représentations de \mathcal{G}_K de type fini et continues et les $(\varphi_q, \mathcal{O}_K^\times)$ -modules étales (topologiques). Cette équivalence rend transparente la théorie du corps de classes locale dans la description des $(\varphi_q, \mathcal{O}_K^\times)$ -modules de dimension 1. De plus, remarquer que $\Gamma_{\text{LT}} \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \text{GL}_2(K)$ donne des espoirs pour adapter certaines idées de [Col10].

Simultanément, de récents travaux sur un foncteur de Colmez pour des groupes réductifs \mathbb{Q}_p -déployé [Záb18a] et sur une compatibilité locale globale pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$ [Bre+22] utilisent des catégories de (φ, Γ) -modules sur des anneaux multivariables. Parallèlement, [Záb18b] et [CKZ21] établissent des équivalences de catégories entre les \mathbb{Z}_p -représentations libres et continues du produit finis $\mathcal{G}_{K,\Delta} = \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_K$ et des catégories de (φ, Γ) -modules cyclotomiques sur des anneaux multivariables.

Nous proposons dans un premier temps dans cet article de résoudre une question mentionnée dans l'introduction de [CKZ21] : comment mixer les deux directions ci-dessus et obtenir une équivalence de Fontaine multivariable Lubin-Tate ? Pour énoncer notre équivalence, nous avons besoin des constructions suivantes. Fixons une uniformisante π de \mathcal{O}_K , un polynôme de Lubin-Tate f associé à π et une famille $\pi^b = (\pi_n)_{n \geq 1}$ telle que $f(\pi_1) = 0$, $\pi_1 \neq 0$ et $\forall n$, $f(\pi_{n+1}) = \pi_n$. Nous utiliserons les séries formelles $[\gamma]_{\text{LT},f} \in \mathcal{O}_K[[T]]$ pour $\gamma \in \mathcal{O}_K$ qui apparaissent dans le \mathcal{O}_K -module formel construit par la théorie de Lubin-Tate. Soit Δ un ensemble fini. Définissons le monoïde $\Phi_{\Delta,q} := \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha,q}^{\mathbb{N}}$ équipé de la topologie discrète et le groupe topologique $\Gamma_{K,\text{LT},\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_K^\times$. Soit

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} := (\mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}])^{\wedge p}, \quad X_\Delta = \prod X_\alpha$$

muni de la topologie d'anneau dont une base de voisinages de 0 est donnée par les

$$(\pi^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} + X_\Delta^n \mathcal{O}_K[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]])_{n,m \geq 0}.$$

Il est également muni d'une action \mathcal{O}_K -linéaire continue du monoïde $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta})$. L'action de $\Phi_{\Delta,q}$ vérifie

$$\forall \varphi = (\varphi_{\alpha,q}^{n_\alpha})_{\alpha \in \Delta} \in \Phi_{\Delta,q}, \quad \forall \beta \in \Delta, \quad \varphi(X_\beta) = f^{n_\beta}(X_\beta).$$

L'action de $\Gamma_{K,\text{LT},\Delta}$ vérifie

$$\forall \gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \quad \forall \beta \in \Delta, \quad \gamma(X_\beta) = [\gamma_\beta]_{\text{LT},f}(X_\beta).$$

Cet article démontre le théorème suivant.

Théorème 0.1 (Voir Théorème 3.4). *Il existe une équivalence explicite de catégories symétriques monoïdales fermées*

$$\mathbb{D}_{\Delta,\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) : \mathbb{V}_{\Delta,\text{LT}},$$

où la catégorie au but est celle¹ des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ -modules de type fini D dont le dévissage $\pi^n D / \pi^{n+1} D$ est fini projectif sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} / \pi \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$, munis d'une action semi-linéaire continue de $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ pour laquelle l'image par l'action des $\varphi_{\alpha,q}$ engendre encore D .

La preuve de notre théorème commence, comme dans [Fon91], par établir une équivalence de Fontaine pour des représentations modulo p de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Ici, le corps perfectoïde \tilde{E} choisi est $\mathbb{F}_q((X^{q^{-\infty}})) \cong \widehat{K_{\text{LT},\pi}^b}$ pour $q = |k_K|$. La démonstration de ce résultat intermédiaire suit la stratégie de [CKZ21] qui consiste à utiliser le lemme de Drinfeld pour les diamants. Nous la modifions en nous assurant de conserver tous nos anneaux de coefficients de φ -modules et tous nos diamants sur \mathbb{F}_q . Grâce au lemme de Drinfeld pour les diamants, il suffit de construire un objet en \mathbb{F}_p -espaces vectoriels dans une certaine catégorie de diamants FÉt $(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}, \tilde{E}^\circ) \mid \Phi_{\Delta,q})$ pour obtenir une représentation de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$.

Nous obtenons alors une équivalence de Fontaine multivariable pour \tilde{E} dont l'anneau de coefficients \tilde{E}_Δ des φ -modules correspondants est intègre : il s'agit d'une \mathbb{F}_q -algèbre et non d'une $(\otimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q)$ -algèbre. Cette intégrité est un premier ajout aux résultats de [CKZ21]. À ce stade de l'article, elle permet de contourner certains des arguments les plus délicats dans l'analyse des morphismes de comparaison et l'essentielle surjectivité du foncteur \mathbb{D}_Δ . Plus tard, avoir une structure canonique de \mathbb{F}_q -algèbre sera cruciale pour l'équivalence multivariable Lubin-Tate.

Dans un second temps, un choix de topologie adéquat sur \tilde{E}_Δ permet de déperfectoïdiser l'équivalence précédente pour que nos φ -modules soient à coefficients dans $E_\Delta := \mathbb{F}_q[[X_\alpha \mid \alpha \in \Delta]][X_\Delta^{-1}]$. Dans un troisième temps, l'utilisation du (π, μ) -dévissage introduit dans [Mar24b, Section 4] permet d'obtenir une équivalence entre des \mathcal{O}_K -représentations de type fini continues de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ et une catégorie $\text{Mod}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ -modules. Notons également que notre équivalence capture les représentations sur \mathbb{Z}_p qui ne sont pas nécessairement libres² pour des corps de caractéristiques p . L'article [Záb18b] obtenait une telle équivalence en utilisant l'action de Γ_Δ et [CKZ21] ne traite que les représentations libres³. Nous retrouvons également par coinduction les équivalences de Carter-Kedlaya-Zàbradi.

Pour terminer la preuve du théorème comme dans le cas univariable, nous regardons plus attentivement l'anneau de comparaison $\widehat{\mathcal{O}_{\tilde{E},\Delta}^{\text{nr}}}$, caché jusque là. Pour obtenir l'équivalence pour le corps \tilde{E} , nous avons utilisé une

1. Pour une définition plus précise, se référer à [Mar24b, Définition 5.19].

2. Nous renvoyons à [Mar24a] pour des exemples d'extensions de représentations qui ne se décomposent pas comme somme directe de représentations libres sur chaque $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}_p . Ce sont ces représentations dont l'image par une équivalence de Fontaine est caractérisée en utilisant [Mar24b].

3. Voir les énoncés de [CKZ21, Théorèmes 4.5, 4.30, 4.31 et 6.15]. Dans la preuve de [CKZ21, Théorème 4.39], il est même explicitement dit que les $(\varphi_\Delta, \Gamma_{K,\Delta})$ -modules considérés sont finis projectifs.

action de $(\Phi_\Delta \times \mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta})$. Pour obtenir une équivalence Lubin-Tate il reste à étendre l'action précédente en une action de $(\Phi_{\Delta, q} \times \mathcal{G}_{K, \Delta})$, où l'on a identifié $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ à $\prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{K_{LT, \pi}} \subset \mathcal{G}_{K, \Delta}$, et que cette action induisent sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \Delta}}$ l'action déjà décrite.

Ce texte démontre également des équivalences de Fontaine plectique et glectique. Le groupe de Galois plectique, introduit par J. Nekovář et T. Scholl dans [NS16] et [NS17], est défini par

$$\mathcal{G}_{K, \text{plec}} := \text{Aut}_K(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}).$$

Pour des données de Shimura globales associées à la restriction $\text{Res}_{\mathbb{Q}}^F(H)$ d'un groupe algébrique H sur une extension finie $F|\mathbb{Q}$, ils remarquent que la cohomologie étale est munie d'une action ad hoc de $\mathcal{G}_{F, \text{plec}}$ (et non seulement d'une action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$) et conjecture que cette action peut-être construite fonctoriellement. En choisissant (π, f, π^b) comme dans le cas Lubin-Tate-multivariable, nous obtenons une équivalence de Fontaine pour ce groupe de Galois dans le cas local p -adique.

Théorème 0.2 (Voir Théorème 4.11). *Il existe une équivalence explicite de catégories symétriques monoidales fermées*

$$\mathbb{D}_{\text{plec}, LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{plec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}}) : \mathbb{V}_{\text{plec}, LT}.$$

Soit $\mathcal{P} := \{\tau : K \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$ qui est de cardinal $[K : \mathbb{Q}_p]$. Dans le théorème qui précède, le monoïde topologique $T_{K, \text{plec}}$ s'écrit

$$T_{K, \text{plec}} \cong (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \Gamma_{K, LT, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

où $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ agit sur le facteur de gauche en permutant les copies de $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ et $\Gamma_{K, LT}$. En écrivant comme un produit en couronne

$$\mathcal{G}_{K, \text{plec}} \cong \prod_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_K \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}}$ se comprend comme l'anneau multivariable Lubin-Tate à \mathcal{P} variables où l'on a ajouté une action de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ qui permute les variables.

Je me suis intéressé à un sous-groupe du groupe de Galois plectique, le groupe de Galois glectique, et nous obtenons également dans cet article plusieurs équivalences de Fontaine pour ce dernier. Énonçons nos résultats dans le cas où $K|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne. Le groupe glectique $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ contenant $\mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}$ qui correspond dont l'image dans $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est égale à l'image de $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$ par l'action de composition à droite sur les plongements. Nous établissons deux équivalences glectiques.

Théorème 0.3 (Voir Théorèmes 4.27 et 4.33). *Il existe deux équivalences explicites de catégories symétriques monoidales fermées*

$$\mathbb{D}_{\text{sglec}, LT} : s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}) : \mathbb{V}_{\text{sglec}, LT}.$$

$$\mathbb{D}_{\text{glec}, LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(T_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{glec}}}) : \mathbb{V}_{\text{glec}, LT}.$$

Ici, la catégorie $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ est celle des \mathcal{O}_K -représentations semi-linéaires continues de type fini où $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ agit sur \mathcal{O}_K via son quotient $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$. Le monoïde $T_{K, \text{glec}}$ s'écrit

$$T_{K, \text{glec}} \cong ((\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \Gamma_{K, LT, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K) / \sim W_K^+ / I_K \sim$$

où $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ agit en permutant les copies de $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ et $\Gamma_{K, LT}$ et où le quotient identifie $(\varphi_{\tau, q})_{\tau \in \mathcal{P}} \in \Phi_{\mathcal{P}, q}$ au générateur de W_K^+ / I_K . Les anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{glec}}}$ correspondent quant à eux à ajouter sur l'anneau multivariables Lubin-Tate $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}}$ une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_K$ qui permute les variables et se souvient des degrés des plongements. Pour $K = \mathbb{Q}_{p^f}$ par exemple, les variables sont indexées par $\llbracket 0, f-1 \rrbracket$ et le générateur $\text{Frob} \in W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{\mathbb{Q}_{p^f}}$ agit $\text{Frob}(X_i) = X_{i+1}$ et $\text{Frob}(X_{f-1}) = f(X_0)$. Le groupe de Galois glectique ouvre donc deux portes. D'un côté, la description de l'anneau de coefficients dans le cas non-ramifié rappelle les $(\varphi, \mathcal{O}_K^\times)$ de [Bre+22]. De l'autre, obtenir une représentation glectique à partir d'une représentation de $\mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}$ consiste à préciser l'action d'un sous-groupe canonique $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \subset \mathcal{G}_{K, \text{glec}}$, or ce genre d'action abondent dans les constructions provenant de la géométrie.

Les résultats de [Mar24b] donnent une liste de conditions à vérifier pour obtenir une équivalence de Fontaine. Dans le cas plectique, elles reviennent à construire le bon anneau de comparaison et le monoïde à faire agir, ou sont déjà démontrées par le cas multivariable Lubin-Tate.

Le *chapitre 1* propose une introduction aux lois de Lubin-Tate et aux anneaux de l'équivalence de Fontaine Lubin-Tate. Il s'agit principalement de fixer les notations pour la suite. Le *chapitre 2* établit l'équivalence de Fontaine multivariable pour des \mathcal{O}_K -représentations et groupes de Galois de corps perfectoides de caractéristique p . Nous commençons d'abord par établir la version perfectoïde en caractéristique p grâce au lemme de Drinfeld, puis à déperfectoïdiser et dévisser. Le *chapitre 3* construit les anneaux multivariables Lubin-Tate et établit le Théorème 0.1. Le *chapitre 4* démontre les Théorème 0.2 et 0.3. L'annexe A effectue une étude détaillée et technique des anneaux \tilde{E}_Δ , qui aurait coupé le rythme du chapitre 2. L'annexe B liste des constructions et résultats sur les monoïdes topologiques dont les équivalences plectique et glectiques ont besoin.

Notations et conventions

Dans tout cet article, nous fixons un premier p et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p . Nous notons \mathbb{C}_p la complétion p -adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ avec son anneau d'entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ et son idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$. La lettre q désigne toujours un entier de la forme p^f . Pour une telle puissance q et un anneau A dans lequel $p = 0$, nous appelons q -Frobenius l'endomorphisme d'anneaux donné par la puissance q -ième. Lorsque $q = p$, nous l'appelons parfois Frobenius absolu. Nous fixons également $\overline{\mathbb{F}_p}$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_p et nous appelons \mathbb{F}_q son sous-corps à q -éléments, sur lequel le q -Frobenius agit trivialement.

Écrire une extension de corps $l|k$ suppose la donnée d'un plongement $k \hookrightarrow l$. Pour un corps k et une clôture algébrique \bar{k} fixée, nous notons $\mathcal{G}_k := \text{Gal}(\bar{k}|k)$ le groupe de Galois absolu muni de la topologie profinie.

Quand nous parlons d'action continue d'un groupe (ou d'un monoïde) topologique G sur un espace topologique X , nous voulons dire que l'application déduite $G \times X \rightarrow X$ est continue. Ainsi, l'action de \mathcal{G}_k sur \bar{k} avec la topologie discrète est continue. Pour un monoïde (topologique) \mathcal{S} et un anneau (topologique) R muni d'une action de \mathcal{S} par morphismes d'anneaux, nous avons défini et étudié dans [Mar24b] la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{S}, R)$ des R -modules munis d'une action semi-linéaire de \mathcal{S} . Nous utilisons sans rappel la sous-catégorie pleine des modules étales finis projectifs de rang constant $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$. Lorsque l'on spécifie un élément r pour lequel R est séparé complet et sans torsion, nous utiliserons la variante $\text{Mod}_{r\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ des modules à r -dévissage projectif, i.e. tous les $r^n D / r^{n+1} D$ sont projectifs sur R/r . Lorsque nos anneaux et monoïdes sont munis de topologies, nous utiliserons les variantes $\mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$, $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$ et $\mathcal{M}\text{od}_{r\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathcal{S}, R)$.

1 L'équivalence de Fontaine Lubin-Tate

1.1 Lois de Lubin-Tate

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}|K|\mathbb{Q}_p$ une extension finie. Nous donnons ici les résultats essentiels de la construction des lois de groupes formels de Lubin-Tate et de l'extension abélienne associée. Pour une exposition plus détaillée ayant pour but la théorie du corps de classes locale, les lecteurs et lectrices pourront se référer à [Yos06]. Nous fixons pour ce chapitre une uniformisante π de K et nous notons q le cardinal de son corps résiduel.

Définition 1.1. Un polynôme de Lubin-Tate est un polynôme (de degré q) unitaire $f \in \mathcal{O}_K[T]$ tel que

$$f(T) \equiv T^q + \pi T \pmod{(\pi T^2)}.$$

Exemple 1.2. Pour $K = \mathbb{Q}_p$ et l'uniformisante p , il existe un polynôme de Lubin-Tate bien pratique $(1 + T)^p - 1$.

Pour K général, une choix naturel consiste à prendre $f = T^q + \pi T$.

Nous fixons pour la suite un polynôme de Lubin-Tate f .

Proposition 1.3. Il existe une unique série entière $T_1 +_{\text{LT},f} T_2 \in \mathcal{O}_K[[T_1, T_2]]$ telle que

$$T_1 +_{\text{LT}} T_2 \equiv T_1 + T_2 \pmod{(T_1, T_2)^2} \text{ et } f(T_1 +_{\text{LT},f} T_2) = f(T_1) +_{\text{LT},f} f(T_2).$$

Cette série est associative et commutative au sens où

$$(T_1 +_{\text{LT},f} T_2) +_{\text{LT},f} T_3 = T_1 +_{\text{LT},f} (T_2 +_{\text{LT},f} T_3) \text{ et } T_1 +_{\text{LT},f} T_2 = T_2 +_{\text{LT},f} T_1.$$

De plus, il existe une unique série $i \in \mathcal{O}_K[[T]]$ telle que $T +_{\text{LT},f} i(T) = 0$.

Pour tout $a \in \mathcal{O}_K$, il existe une unique $[a]_{\text{LT},f} \in \mathcal{O}_K[[T]]$ tel que

$$[a]_{\text{LT},f} \equiv aT \pmod{T^2} \text{ et } [a]_{\text{LT},f} \circ f = f \circ [a]_{\text{LT},f}.$$

Nous avons utilisé qu'il est possible de composer des séries formelles dans $T\mathcal{O}_K[[T]]$ et/ou $T_1\mathcal{O}_K[[T_1, T_2]] + T_2\mathcal{O}_K[[T_1, T_2]]$. Pour la suite, nous remarquons qu'une série dans l'un de ces deux anneaux s'évalue correctement sur $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}_p}$.

Corollaire 1.4. *Les séries construites précédemment vérifient*

$$[0]_{\text{LT},f} = 0, \quad [1]_{\text{LT},f} = T, \quad i = [-1]_{\text{LT},f} \text{ et } \forall n \geq 1, \quad [\pi^m]_{\text{LT},f} = f^{\circ m}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_K, \quad [a + b]_{\text{LT},f} = [a]_{\text{LT},f} +_{\text{LT},f} [b]_{\text{LT},f}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_K, \quad [ab]_{\text{LT},f} = [a]_{\text{LT},f} \circ [b]_{\text{LT},f}.$$

Exemple 1.5. Pour le cas particulier de $K = \mathbb{Q}_p$ et $f = (1 + T)^p - 1$, nous obtenons

$$T_1 +_{\text{LT},f} T_2 = T_1 + T_2 + T_1 T_2, \quad i(T) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n T^n$$

$$\text{et } [a]_{\text{LT},f} = (1 + T)^a - 1 := \sum_{n \geq 1} \binom{a}{n} T^n.$$

Définition 1.6. Pour $m \geq 1$, nous définissons l'extension finie galoisienne $\overline{\mathbb{Q}_p} | K_{\text{LT},f,m} | K$ comme le corps de décomposition de $f^{\circ m}$ sur K . Définissons

$$K_{\text{LT},f} = \bigcup_{m \geq 1} K_{\text{LT},f,m}.$$

Définissons l'ensemble $\mu_{f,m}$ des racines de $f^{\circ m}$ dans $K_{\text{LT},f,m}$ et $\mu_{f,m}^\times = \mu_{f,m} \setminus \mu_{f,m-1}$.

Théorème 1.7. 1. Pour tout $x \in \mu_{f,m}^\times$, l'extension $K_{\text{LT},f,m}$ est engendrée par x .

2. Pour tout $x \in \mu_{f,m}^\times$, les éléments de $\mu_{f,m}^\times$ sont précisément les éléments de la forme $[a]_{\text{LT},f}(x)$ pour $a \in \mathcal{O}_K^\times$.

3. Au regard des points précédents, l'application

$$\iota_\pi : \mathcal{O}_K^\times \rightarrow \text{Gal}(K_{\text{LT},f} | K), \quad a \mapsto \left[x \in \bigcup_{m \geq 1} \mu_{f,m} \mapsto [a]_{\text{LT},f}(x) \right]$$

est correctement définie. C'est un isomorphisme de groupes topologiques.

Définition 1.8. Par la suite, nous utiliserons le caractère

$$\chi_{\text{LT},f} : \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{O}_K^\times, \quad \sigma \mapsto \iota_\pi^{-1}(\sigma|_{K_{\text{LT},f}}).$$

1.2 Corps de normes imparfait dans \widetilde{A}_K

Nous définissons le corps complet de valuation discrète $E := \mathbb{F}_q((X))$ et fixons une clôture séparable E^{sep} . L'équivalence de Fontaine pour les corps de caractéristique p , dont on trouve l'énoncé original dans [Fon91, Proposition 1.2.6], établit en premier lieu une équivalence pour les représentations sur \mathcal{O}_K de \mathcal{G}_E . Récapitulons comment en déduire l'équivalence de Fontaine version Lubin-Tate.

Définition 1.9. Un système de Lubin-Tate associé à f est un générateur du \mathcal{O}_K -module libre de rang 1 donné par

$$\varprojlim_{\substack{m \geq 0 \\ a \mapsto f(a)}} \mu_{f,m}.$$

Concrètement c'est une famille $\pi^b = (\pi_m)$ telle que $\pi_0 = 0$, $\pi_1 \in \mu_{f,1}^\times$ et $\forall m, f(\pi_{m+1}) = \pi_m$. Un tel élément s'identifie à un élément de \mathbb{C}_p^b .

Proposition 1.10. Le corps $\widehat{K_{\text{LT},f}}$ est un corps perfectoïde. L'élément π^b de son basculé est une pseudo-uniformisante et le morphisme de corps topologiques

$$j : \mathbb{F}_q((X^{p^{-\infty}})) \rightarrow \widehat{K_{\text{LT},f}}^b, \quad X \mapsto \pi^b$$

est un isomorphisme de corps perfectoïdes.

Puisque la théorie de Galois d'un corps ne change pas en complétant, en prenant des extensions radicielles et en basculant des corps perfectoides, les corps E et K_{LT} ont la même théorie de Galois. Plus précisément, pour des clôtures séparables de $\mathbb{F}_q((X^{q^{-\infty}}))$ fixées et un choix d'extension de l'isomorphisme j précédent de la clôture séparable vers \mathbb{C}_p^b , la flèche qui à toute extension finie de E envoie $K_{LT,f}^{\text{alg}} \cap j(E\mathbb{F}_q((X^{q^{-\infty}})))^\sharp$ est une bijection entre extensions finies, respecte le caractère galoisien et donne des isomorphismes de groupe de Galois. Nous définissons $\mathcal{H}_{K,LT,f} := \mathcal{G}_{K_{LT,f}} \triangleleft \mathcal{G}_K$, isomorphe à \mathcal{G}_E , canoniquement si l'on fixe des clôtures séparables et une extension de j . Il devient plausible de promouvoir l'équivalence de Fontaine pour \mathcal{G}_E quitte à définir correctement nos anneaux.

Définition 1.11. Définissons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ := \mathcal{O}_K[[X]] \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+[X^{-1}]^{\wedge p}.$$

Proposition 1.12. 1. Il existe une $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -algèbre $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ qui est π -adiquement séparée et complète, telle que $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}/\pi \cong E^{\text{sep}}$. Elle est unique à isomorphisme près.

Nous supposons désormais une telle algèbre fixée.

2. Pour tout $h \in \text{End}_{\text{Ann}}(E^{\text{sep}})$ tel que $h(E) \subseteq E$ et tout $f \in \text{End}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ tel que $(f \bmod \pi) = h|_E$, il existe une unique $f_1 \in \text{End}_{\mathcal{O}_K}\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ telle que $(f_1)|_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} = f$ et $(f_1 \bmod \pi) = h$.
3. Pour toute extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, il existe une unique sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$, π -adiquement complète et séparée, de corps résiduel F . Nous notons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^+$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.
4. Dans le cadre du deuxième point, si h stabilise F (resp. F^+), alors l'extension de f stabilise $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}^+$).

Démonstration. Conséquences de [Stacks, Tag 04GK] et [Stacks, Tag 08HQ]. □

Nous avons donc choisi un \mathcal{G}_E -anneau topologique $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ avec la topologie π -adique tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{G}_E}$.

Soit $\tilde{A}_K := W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^b)$ que l'on munit de la topologie faible, i.e. la topologie produit en écrivant que $(\mathbb{C}_p^b)^{\mathbb{N}} \cong W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^b)$ via $(x_n) \mapsto \sum_{n \geq 0} \pi^n [x_n]$. Il est également muni d'une structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique en relevant \mathcal{O}_K -linéairement les actions sur \mathbb{C}_p^b .

Proposition 1.13. Il existe un élément⁴ $\{\pi^b\}_{LT}$ dans \tilde{A}_K , topologiquement nilpotent, tel que :

- a) Nous avons $\{\pi^b\}_{LT} \bmod \pi = \pi^b$.
- b) L'application

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{A}_K, \quad X \mapsto \{\pi^b\}_{LT}$$

est injective, d'image contenue dans $W_{\mathcal{O}_K}(\widehat{K_{LT,f}^b})$ et stable par $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$.

- c) L'image est invariante par $\mathcal{H}_{K,LT,f}$ et l'action \mathcal{O}_K -linéaire de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{O}_K^{\times})$ déduite sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vérifie

$$\varphi_q(X) = f(X) \text{ et } \forall a \in \mathcal{O}_K^{\times}, \quad a \cdot X = [a]_{LT,f}(X).$$

- d) La topologie d'anneau induite sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est la topologie faible qui a pour base de voisinage de zéro les $(p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + X^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+)_{n,m \geq 0}$.

- e) L'application précédente s'étend en une injection de $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ dans \tilde{A}_K . Son image est canonique, stable par $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$. L'action de $\mathcal{G}_{K_{LT}}$ s'identifie, via l'identification des théories de Galois précédemment construite, à l'action de \mathcal{G}_E sur la hensélisation.

La topologie induite est encore la topologie faible.

On appelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ et $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ les $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques obtenus ci-dessus.

Remarque 1.14. Pour toute extension galoisienne $K_{\infty}|K$ de groupe de Galois localement isomorphe à \mathbb{Z}_p , la théorie du corps des normes imparfait dans [Win83] permet d'identifier la théorie de Galois de K_{∞} avec celle de $\mathbb{F}_q((X))$. C'est une autre méthode pour construire une action de \mathcal{G}_K sur E .

4. Notons que l'on peut retrouver f à partir de π^b : nous nous épargnons donc des indices inutiles.

2 Équivalence de Fontaine multivariable pour certains corps perfectoïdes de caractéristique p

Dans ce chapitre, nous commençons par établir une équivalence de Fontaine pour les représentations p -adiques de produits de groupes de Galois absolus de corps perfectoïdes de caractéristique p . Suivant l'idée de [CKZ21], nous commençons par utiliser le lemme de Drinfeld pour les diamants pour passer de modules sur un anneau perfectoïdes multivariables \tilde{E}_Δ à des \tilde{E}_Δ -algèbres finies étales puis à des ensembles avec action du produit de groupes souhaité. Nous nous attachons à conserver l'intégrité de nos anneaux. Le cas qui nous intéresse pour les corps locaux p -adiques est celui des corps perfectoïdes $\mathbb{F}_q((X^{q^{-\infty}}))$; nous avons déjà dit qu'ils ont la même théorie de Galois que des extensions de Lie de nos corps locaux p -adiques. Nous établirons en un deuxième temps une équivalence de Fontaine imparfaite pour ces corps, d'abord pour des représentations de caractéristiques p puis en dévissant grâce à [Mar24b] pour capturer toutes les représentations p -adiques de type fini.

2.1 Construction du foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta$ modulo p

Le formalisme développé dans [Mar24b] souligne que les points délicats d'une équivalence de Fontaine sont de deux natures : la définition correcte de l'anneau de comparaison avec sa topologie et son action de monoïde d'un côté, l'obtention des isomorphismes de comparaison de l'autre. Nous commençons ainsi par définir anneaux adaptés à une équivalence de Fontaine pour des corps perfectoïdes de caractéristique p . En caractéristique p , les conditions topologiques pour appliquer le formalisme dans [Mar24b] sont aisées : pour les anneaux de ce chapitre 1, si l'action de \mathcal{G}_K sur le corps de normes imparfait est uniquement continue pour la topologie X -adique, celle de \mathcal{G}_E est continue pour la topologie discrète sur E^{sep} . Malheureusement, nous voulons utiliser ici la théorie des perfectoïdes ce qui nous force à considérer tout de même des topologies plus malines sur nos anneaux.

Fixons pour cette section un corps perfectoïde \tilde{E} de caractéristique p tel que $\tilde{E} \cap \mathbb{F}_p^{\text{sep}}$ est fini de cardinal q . Nous fixons une structure de \mathbb{F}_q -algèbre sur \tilde{E} , une clôture séparable \tilde{E}^{sep} et un plongement de \mathbb{F}_p dans ladite clôture séparable. Le groupe de Galois absolu $\mathcal{G}_{\tilde{E}}$ sera toujours muni de sa topologie profinie. Fixons également ϖ une pseudo-uniformisante de \tilde{E} , et notons $\tilde{E}^+ := \tilde{E}^\circ$ son anneau d'entiers. Pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$, l'élément ϖ est encore une pseudo-uniformisante et la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans \tilde{F} est encore finie. Nous noterons q^f son cardinal.

L'adjectif *multivariable* implique de se fixer un ensemble fini Δ . Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous considérons un corps perfectoïde \tilde{E}_α muni d'un isomorphisme avec \tilde{E} et d'une extension de cet isomorphisme à leurs clôtures séparables. Ainsi, nous fixons pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension isomorphe $\tilde{F}|\tilde{E}_\alpha$ et une structure de \mathbb{F}_{q^f} -algèbre. De manière générale, pour chaque objet obtenu à partir de \tilde{E} , nous notons avec un indice α l'objet obtenu pour \tilde{E}_α à partir d'un objet choisi pour \tilde{E} et du choix d'isomorphismes précédents. Nous définissons

$$\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{G}_{\tilde{E}_\alpha}.$$

Nous voulons établir une équivalence pour des représentations \mathbb{F}_r -linéaires de $\mathcal{G}_{\tilde{E}, \Delta}$ pour $\mathbb{F}_r \subseteq \mathbb{F}_q$.

Définition 2.1. Définissons le monoïde⁵ $\Phi_{\Delta, p} = \prod_{\alpha \in \Delta} \varphi_{\alpha, p}^{\mathbb{N}}$. Il sera toujours muni de la topologie discrète. Pour $b \geq 1$, nous notons

$$\varphi_{\alpha, p^b} := \varphi_\alpha^b \text{ et } \varphi_{\Delta, p^b} := (\varphi_{\alpha, p^b})_{\alpha \in \Delta}.$$

Pour $p^a | p^b$, nous définissons

$$\Phi_{\Delta, p^b, p^a} = \langle \varphi_{\Delta, p^a}, \varphi_{\alpha, p^b} \mid \alpha \in \Delta \rangle < \Phi_{\Delta, p}.$$

Pour $a = b$, nous simplifions cette notation en Φ_{Δ, p^b} .

Nous pouvons plonger les monoïdes simplifiables Φ_{Δ, p^b, p^a} dans leurs symétrisés $\Phi_{\Delta, p^b, p^a}^{\text{gp}}$.

Commençons par définir une \mathbb{F}_q -algèbre analogue du E de Fontaine dans le cas multivariable perfectoïde. Ici, nous faisons agir le groupe $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$: des q -Frobenius sur chaque copie qui encodent les actions des différents $\mathcal{G}_{\tilde{E}_\alpha}$ et un Frobenius r -Frobenius global qui permet de redescendre à des \mathbb{F}_r représentations. La construction entre dans le cadre de [CKZ21, Section 4.1].

5. Il est effectivement isomorphe à \mathbb{N}^Δ mais nous préférons nommer une base de manière suggestive.

Définition 2.2. Soit $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie. Dans le produit tensoriel

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^+,$$

appelons encore ϖ_α l'image de $\varpi_\alpha \in \tilde{F}_\alpha^+$, notons $(\varpi) = (\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta)$ et $\varpi_\Delta = \prod_{\alpha \in \Delta} \varpi_\alpha$.

Définissons

$$\tilde{F}_{\Delta,q}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^+ \right)^{\wedge(\varpi)}$$

$$\tilde{F}_{\Delta,q} := \tilde{F}_{\Delta,q}^+ \left[\frac{1}{\varpi_\Delta} \right].$$

Trois topologies seront utilisées pour ces deux anneaux⁶. Sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ ces trois topologies sont la topologie discrète, la topologie ϖ_Δ -adique et la topologie (ϖ) -adique. Sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$, ce sont la topologie discrète, la topologie d'anneau⁷ ayant pour base de voisinages de 0 la famille⁸ $(\varpi_\Delta^n \tilde{F}_{\Delta,q}^+)_{n \geq 0}$ que nous appelons *topologie adique* et la topologie colimite des topologies (ϖ) -adiques via l'écriture

$$\tilde{F}_{\Delta,q} = \text{colim}_{n \geq 0} \frac{1}{\varpi_\Delta^n} \tilde{F}_{\Delta,q}^+$$

que nous appelons *topologie colimite*.

Le produit tensoriel des \tilde{F}_α^+ est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique pour la topologie (ϖ) -adique, l'élément $\varphi_{\alpha,q}$ agissant par le q -Frobenius sur \tilde{F}_α^+ et l'identité sur les \tilde{F}_β^+ et l'élément $\varphi_{\Delta,r}$ agissant par le r -Frobenius. En complétant, on obtient une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ muni de la topologie (ϖ) -adique. Cette action du monoïde est également une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ muni de la topologie ϖ_Δ -adique ou de topologie discrète. Après localisation, l'action du monoïde fournit donc une structure $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$ pour chacune des trois topologies ci-dessus⁹.

Soient $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie et q^f le cardinal de la clôture séparable de \mathbb{F}_q dans \tilde{F} . Nous utiliserons les $\Phi_{\Delta,q^f,r}^{\text{gp}}$ -anneaux topologiques \tilde{F}_Δ^+ et \tilde{F}_Δ obtenus comme à la définition précédente en considérant \tilde{F} comme extension finie de lui-même, i.e. en faisant les produits tensoriels sur \mathbb{F}_{q^f} .

Puisque nos produits tensoriels ne sont pas sur \mathbb{F}_p , nous ne pouvons décomposer le Frobenius absolu et obtenir un $\Phi_{\Delta,p}^{\text{gp}}$ -anneau contrairement aux anneaux dans [CKZ21]. En revanche, nous prouvons que l'anneau \tilde{E}_Δ est intègre.

Proposition 2.3. *Pour une extension finie $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$, l'anneau $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_Δ^+ -torsion. En particulier l'anneau \tilde{E}_Δ^+ est intègre.*

Il en découle que l'application $\tilde{F}_{\Delta,q}^+ \rightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}$ est injective. L'anneau $\tilde{F}_{\Delta,q}$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_Δ -torsion. En particulier l'anneau \tilde{E}_Δ est intègre.

Démonstration. Reléguée en annexe au Corollaire A.14. □

Remarque 2.4. Le balancier entre les idéaux (ϖ) et (ϖ_Δ) est une subtilité importante de ces anneaux. Puisque nous commençons par prendre la complétion (ϖ) -adique, il serait naturel d'essayer d'en conserver une trace topologique. Malheureusement, la famille d'idéaux de \tilde{E}_Δ^+ donnée par $(\varpi)^k$ ne définit par sur \tilde{E}_Δ une structure d'anneau topologique¹⁰. Pour en garder une trace, il faut considérer la topologie colimite, dont nous nous servirons d'ailleurs à la section 2.4. Toutefois, nous voudrions utiliser nos anneaux dans contextes pour lesquels cette

6. Les trois topologies sont utiles respectivement pour les considérer comme coefficients de catégories de φ -modules, comme espace adique à la section 2.2 ou pour un raisonnement fin à la section 2.4.

7. Voir [Bou71, §6.3] pour les axiomes que doivent vérifier une telle base de voisinages.

8. Il n'est pas si clair que à ce stade que $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ s'injecte dans $\tilde{F}_{\Delta,q}$. L'abus de notations sera vite réparé (voir Proposition 2.3).

9. C'est plus subtile pour la topologie colimite car les Frobenius ne stabilisent par les termes de la colimite.

10. Par exemple, chaque idéal $(\varpi)^k/\varpi_\Delta$ contient un élément $\varpi_\Delta^k/\varpi_\Delta$ ce qui démontre que le produit n'est pas continu au point $(\varpi_\Delta^{-1}, 0)$

topologie n'est pas adéquate : dans la section 2.2, nous voulons considérer $(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ comme une paire de Huber. Pour la topologie colimite, une base de voisinage de zéro s'écrit

$$\left\{ \bigcup_{n \geq 0} \frac{(\varpi)^{m_n}}{\varpi_\Delta^n} \mid (m_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \text{ telle que } m_{n+1} \geq m_n + |\Delta| \right\}$$

dont aucun n'est contenu dans \tilde{E}_Δ^+ . Nous n'aurions pas une paire de Huber. Le ticket d'entrée dans la théorie des espaces adiques est précisément d'utiliser la topologie adique.

Dans cette section cependant, nous n'aurons besoin que de la topologie discrète puisque les actions de Galois considérées pour notre équivalence de Fontaine sont toutes à stabilisateurs ouverts. En réalité, pour l'équivalence modulo p , nous pourrions appliquer les méthodes dans [Mar24b] avec n'importe laquelle des trois topologies ; les conditions de continuité sont vides dans chacun des cas pour les $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -modules finis projectifs sur \tilde{E}_Δ . Cependant, le dévissage de la section 2.5 fonctionne bien mieux avec la topologie discrète.

Remarque 2.5. Nous spécifierons notre étude à des corps perfectoides plus agréables à la section 2.4 et nous décrirons complètement l'anneau \tilde{E}_Δ dans ce cas. Les lecteurs et lectrices souhaitant avoir une prise plus concrète sur ces anneaux pourront lire dès à présent la Remarque 2.60.

Nous définissons à présent l'analogue de E^{sep} dans le cadre multivariable perfectoid.

Définition 2.6. Soit $\tilde{E}^{\text{sep}}|\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie galoisienne. L'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E}}$ sur \tilde{F}^+ est \mathbb{F}_q -linéaire, continue pour les topologies discrète et ϖ -adique, commutant au Frobenius. L'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ sur le produit tensoriel des \tilde{F}_α^+ facteur par facteur se complète (ϖ) -adiquement en une action sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ continue pour la topologie discrète, commutant à l'action de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$.

Nous obtenons donc une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$. En localisant, nous obtenons une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique sur $\tilde{F}_{\Delta,q}$.

Lemme 2.7. Soit $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ la catégorie des sous-extensions finies galoisiennes de \tilde{E} dans \tilde{E}^{sep} avec les inclusions pour morphismes. La construction

$$\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_{\Delta,q}$$

où l'on met la topologie discrète est canoniquement un foncteur de $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ vers la catégorie des $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneaux topologiques. Tous les morphismes déduits sont injectifs.

La construction

$$\tilde{F} \mapsto \tilde{F}_\Delta$$

est canoniquement un foncteur depuis la catégorie de $\mathcal{Gal}_{\tilde{E}}$ vers la catégorie des anneaux topologiques. Pour toute tour d'extensions finies galoisiennes $\tilde{F}'|\tilde{F}|\tilde{E}$, le morphisme associé

$$\tilde{F}_\Delta \rightarrow \tilde{F}'_\Delta$$

est une injection $\Phi_{\Delta,qf',r}^{\text{gp}}$ -équivariante.

Démonstration. Grossièrement, il faut prendre le produit tensoriel, compléter puis localiser les injections $\varphi_{\alpha,p}$ -équivariantes

$$\tilde{F}_\alpha^+ \hookrightarrow \tilde{F}'_\alpha^+.$$

Pour la deuxième construction et $\tilde{E} \subset \tilde{F}$, nous écrivons \tilde{E}' le corps de décomposition de $X^{q^f} - X$. Le morphisme à déconstruire se décompose via \tilde{E}'_Δ . Le morphisme $\tilde{E}'_\Delta \rightarrow \tilde{F}_\Delta$ est simplement donné par la première construction. Pour $\tilde{E}'|\tilde{E}$, on sait grâce à [Bou81, V §5, Proposition 9] que $\tilde{E}'|\mathbb{F}_q$ est régulière : l'anneau $\tilde{E}' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^f}$ est donc un corps et une analyse des dimension montre qu'il est canoniquement isomorphe à \tilde{E}' . On peut donc compléter et localiser l'injection

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ \hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}'_\alpha^+ \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^f} \cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_{q^f}} \tilde{E}'_\alpha^+.$$

□

Définition 2.8. Définissons le $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau topologique discret

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} = \text{colim}_{\tilde{F} \in \mathcal{G}_{\text{al}}^{\tilde{E}}} \tilde{F}_{\Delta,q}.$$

Proposition 2.9. *L'anneau $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ est parfait, réduit et sans \tilde{E}_{Δ} -torsion.*

Démonstration. Rassembler les résultats de la Proposition 2.3 et du Lemme 2.7. \square

Remarque 2.10. La topologie est toujours discrète ici. Nous ne complétons pas ϖ_{Δ} -adiquement; si nous le faisons, l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ cesserait d'être continue pour la topologie discrète sur le complété et certains groupes de cohomologie continue ne s'annulent pas pour la topologie adique.

Remarque 2.11. Nos φ -modules multivariés vivront sur \tilde{E}_{Δ} . Si cet anneau de coefficients intègre, ce n'est pas le cas de l'anneau de comparaison $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$. En effet, il existe une injection

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}.$$

Nous imitons la construction du foncteur de Fontaine et obtenir un foncteur

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} \rightarrow \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right).$$

Pour cela, il reste essentiellement à démontrer que la descente galoisienne fonctionne pour des anneaux multivariés.

Lemme 2.12. *Le morphisme canonique*

$$\tilde{E}_{\alpha}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_{\alpha}} \left(\tilde{E}_{\beta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_{\beta}} \cdots \left(\tilde{E}_{\delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{F}_{\delta}} \tilde{F}_{\Delta,q} \right) \right) \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -équivariant.

Démonstration. Puisque les injections $\tilde{F}_{\alpha}^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ sont $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -équivariantes, l'équivariance est automatique.

De plus, quitte à passer à la colimite, on se restreint à prouver une identité similaire entre $\tilde{F}'_{\Delta,q}$ et $\tilde{F}_{\Delta,q}$ pour une extension finie $\tilde{F}'|\tilde{F}$.

Nous introduisons, pour toute paire (A, ϖ) formée d'un anneau et d'un élément admettant des racines p^n -ièmes pour n arbitraire, la catégorie $(A, \varpi)\text{-Mod}$ des presque- A -modules par rapport à l'idéal $\text{Rad}(\varpi)$. De la même manière, nous appelons presque- (A, ϖ) -isomorphisme un morphisme de A -modules qui devient un isomorphisme dans $(A, \varpi)\text{-Mod}$.

Grâce à [Sch12, Proposition 5.23], nous savons que \tilde{F}'^+ est un (\tilde{F}^+, ϖ) -module uniformément libre de type fini. Choisissons une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq d}$ dans \tilde{F}'^+ telle que

$$\bigoplus_{k=1}^d \tilde{F}^+ x_k \rightarrow \tilde{F}'^+$$

est un presque- (\tilde{F}^+, ϖ) -isomorphisme. Le morphisme

$$\bigoplus_{(i_{\alpha}) \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\Delta}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_{\alpha}^+ \right) \prod_{\alpha \in \Delta} x_{i_{\alpha}, \alpha} \rightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_{\alpha}'^+ \right)$$

est un presque- $\left(\left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_{\alpha}^+ \right), \varpi_{\Delta} \right)$ -isomorphisme en le décomposant comme suite de changement de base du presque-isomorphisme précédent. Puisque la structure monoïdale sur $(A, \varpi)\text{-Mod}$ vient du produit tensoriel sur les A -modules (voir [GR02, §2.2.5]), le morphisme ci-dessus est encore un presque-isomorphisme après quotient par $(\varpi)^n$. En passant à la limite¹¹, nous en déduisons que

$$\bigoplus_{(i_{\alpha}) \in \llbracket 1, d \rrbracket^{\Delta}} \tilde{F}_{\Delta,q}^+ \prod_{\alpha \in \Delta} x_{i_{\alpha}, \alpha} \rightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}'^+$$

11. La catégorie $(A, \varpi)\text{-Mod}$ admet toutes les limites puisque la localisation $A\text{-Mod} \rightarrow (A, \varpi)\text{-Mod}$ admet un adjoint à gauche (voir [GR02, Corollaire 2.2.15]).

est un presque- $(\tilde{F}_{\Delta,q}^+, \varpi_\Delta)$ -isomorphisme. En décomposant à nouveau, le terme de gauche est presque- $(\tilde{F}_{\Delta,q}^+, \varpi_\Delta)$ -isomorphe à

$$\tilde{F}_{\alpha'}^+ \otimes_{\tilde{F}_{\alpha}^+} \left(\tilde{F}_{\beta'}^+ \otimes_{\tilde{F}_{\beta}^+} \cdots \left(\tilde{F}_{\delta'}^+ \otimes_{\tilde{F}_{\delta}^+} \tilde{F}_{\Delta,q}^+ \right) \right).$$

En inversant ϖ_Δ , nous obtenons l'isomorphisme escompté. \square

Corollaire 2.13. 1. Pour toute extension finie $\tilde{E}^{\text{sep}} | \tilde{F} | \tilde{E}$, l'inclusion $\tilde{F}_{\Delta,q} \subseteq \left(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \right)^{\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}}$ est une égalité.
2. Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \right)$, le morphisme de comparaison

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Grâce à la description ci-dessus, nous pouvons appliquer [Mar22, Théorème 3.6]. La descente fidèlement plate des modules projectifs pour $\tilde{F}_{\Delta,q} \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ (resp. pour $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$) établit une équivalence de catégorie entre les $\tilde{F}_{\Delta,q}$ -modules finis projectifs et les $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ -modules finis projectifs munis d'une action lisse de $\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}$. Cela implique les deux énoncés. \square

Définition/Proposition 2.14. Le foncteur

$$\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} \rightarrow \text{Mod} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right), \quad V \mapsto \left(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V \right)^{\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}$$

est correctement défini et son image essentielle est incluse dans $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right)$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée et $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Nous identifions la catégorie de représentations à $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r \right)$ et nous décomposons le foncteur $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ comme suit.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} : & \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r \right) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r \right) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \text{Mod} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \right) \end{array}$$

Pour montrer que Ex et Inv préservent les sous-catégories, nous utilisons [Mar24b, Propositions 5.14 et 5.15] respectivement pour le morphisme de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneaux topologiques discrets $\mathbb{F}_r \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ et pour $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ avec comme sous-monoïde $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} < (\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$. Les conditions de [Mar24b, Proposition 5.14] sont déjà démontrées lors la construction des anneaux. Nous listons et démontrons les conditions de [Mar24b, Proposition 5.15].

Condition 1 : le sous-monoïde $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ est distingué et le groupe topologique quotient s'identifie à $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$. Tout découle de ce que $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ est un produit direct.

Condition 2 : l'anneau topologique \tilde{E}_{Δ} s'identifie à $\left(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \right)^{\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}$. L'identification ensembliste est l'objet du premier point du Corollaire 2.13. Puisque les anneaux sont discrets, la condition topologique est vide.

Condition 3 : l'inclusion $\tilde{E}_{\Delta} \subset \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ est fidèlement plate. Le Lemme 2.12 démontre que c'est une suite de changement de bases le long de morphismes de corps, a fortiori un morphisme fidèlement plat.

Condition 4 : les morphismes de comparaison sont des isomorphismes. C'est l'objet du deuxième point du Corollaire 2.13. \square

Remarque 2.15. Puisque $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ est discret les catégories $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right)$ et $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}} \left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta} \right)$ coïncident (voir [Mar24b, Exemple 5.6]) pour n'importe quelle topologie.

2.2 Équivalence de Fontaine multivariable perfectoïde modulo p pour certains corps perfectoïdes de caractéristique p

Pour démontrer une équivalence de Fontaine perfectoïde modulo p , il nous reste à montrer que le candidat naturel à être quasi-inverse de $\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta$ est correctement défini. Pour ce faire, nous aurons besoin de démontrer un autre isomorphisme de comparaison, beaucoup plus délicat. Nous suivons la stratégie dans [CKZ21] qui consiste à utiliser le lemme de Drinfeld pour les diamants afin d'obtenir d'une autre manière une \mathbb{F}_r -représentation de $\mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}$ à partir d'un $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -module sur \widetilde{E}_Δ . Dans la preuve de [CKZ21, Proposition 4.20], les trois auteurs utilisent la commutation de leur foncteur au dual, peu évidente à ce stade de démonstration. Nous préférons utiliser activement l'intégrité des anneaux dans notre version de l'équivalence pour contourner une partie des arguments.

Lemme 2.16. *L'inclusion $\mathbb{F}_r \subset \left(\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}}\right)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}$ est une égalité d'anneaux topologiques.*

Démonstration. Puisque les topologies sont discrètes, c'est un énoncé algébrique relégué au Corollaire A.15. \square

En admettant le Théorème 2.19 qui occupera la majorité de cette section, nous pouvons démontrer que $\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta$ est une équivalence de catégories.

Définition/Proposition 2.17. Le foncteur

$$\widetilde{\mathbb{V}}_\Delta : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \widetilde{E}_\Delta\right) \rightarrow \text{Mod}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r\right), \quad D \mapsto \left(\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\widetilde{E}_\Delta} D\right)^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}$$

est correctement défini et son image essentielle est incluse dans $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}$. De plus, le foncteur $\widetilde{\mathbb{V}}_\Delta$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Nous décomposons le foncteur $\widetilde{\mathbb{V}}_\Delta$ comme suit en se souvenant que la condition de continuité à la source est automatique :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{V}}_\Delta : & \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \widetilde{E}_\Delta\right) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}, \widetilde{E}_\Delta\right) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \text{Mod}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \mathbb{F}_r\right) & \xleftarrow{\text{Inv}} \text{Mod}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}, \widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}}\right) \end{array}$$

Puisque $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}$ s'identifie à $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_r\right)$, il faut prouver que Ex et Inv préservent la sous-catégorie considérée. Nous utilisons [Mar24b, Propositions 5.14 et 5.15] respectivement pour le morphisme de $(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta})$ -anneaux topologiques discrets $\widetilde{E}_\Delta \rightarrow \widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ et pour $\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ avec comme sous-monoïde $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} < (\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta})$. Les conditions pour Ex sont encore une fois démontrées au fil de la construction des anneaux. La liste des conditions à démontrer pour Inv est similaire à la Proposition 2.14. La condition 1 est automatique ; la condition 2 est contenue dans le Lemme 2.16 ; la condition 3 découle de ce que \mathbb{F}_r est un corps ; la condition 4 est l'objet du Théorème 2.19. \square

Théorème 2.18. *Les foncteurs $\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta$ et $\widetilde{\mathbb{V}}_\Delta$ forment une paire de foncteurs quasi-inverses et établissent une équivalence de catégories symétriques monoidales fermées*

$$\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta} \rightleftarrows \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \widetilde{E}_\Delta\right) : \widetilde{\mathbb{V}}_\Delta.$$

Démonstration. Reste à prouver que les foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre. Grâce aux isomorphismes de comparaison naturels que nous avons obtenus en étudiant les foncteurs, prouver que $\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta \circ \widetilde{\mathbb{V}}_\Delta$ est isomorphe à l'identité revient à passer aux $\mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}$ -invariants l'isomorphisme de comparaison naturel

$$\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \mathbb{V}_\Delta(D) = \widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \text{Inv}\left(\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\widetilde{E}_\Delta} D\right) \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\widetilde{E}_\Delta} D$$

et à prouver que

$$\forall D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}\left(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \widetilde{E}_\Delta\right), \quad \text{l'application } D \rightarrow \left(\widetilde{E}_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\widetilde{E}_\Delta} D\right)^{\mathcal{G}_{\widetilde{E},\Delta}} \text{ est un isomorphisme.}$$

La Proposition 2.9 permet d'utiliser [Mar24b, Proposition 3.10] pour conclure. L'autre composition se traite de même. \square

Il reste à démontrer que le morphisme de comparaison est un isomorphisme pour $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})$. Grâce au Corollaire 2.13, la descente galoisienne établit une équivalence de catégories

$$\text{Inv} : \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}) \rightarrow \mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}) : \text{Ex.}$$

On se ramène donc à prouver le théorème suivant.

Théorème 2.19. [voir Théorème 2.58] *Pour tout objet D de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$, le morphisme de comparaison*

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}(D) \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D$$

est un isomorphisme.

Suivant l'idée de [CKZ21] et adaptant les preuves à notre contexte, nous construisons par une méthode géométrique un foncteur $V_{\tilde{E}}$ puis nous l'analysons pour obtenir l'isomorphisme de comparaison. Nous aurons besoin d'utiliser tous les foncteurs $V_{\tilde{F}}$ avec $\tilde{F}|\tilde{E}$ finie pour analyser $\tilde{\mathbb{V}}_{\Delta}$. Bien que ce qui suit est rédigé avec \tilde{E} et q , gardons en tête que nous démontrons les résultats également pour chaque \tilde{F} et q' .

Nous définissons la notion de catégorie galoisienne que nous pouvons comprendre comme une liste de conditions pour être équivalente à une catégorie de représentations d'un groupe profini. Les lecteurs et lectrices souhaitant un exposé détaillé de la théorie pourront se référer à [GR04, V, §4].

Définition 2.20. 1. Soit \mathcal{C} une catégorie ayant toutes les limites et colimites. On dit qu'un objet X est \mathcal{C} -connexe si pour tout monomorphisme $f : Y \rightarrow X$, l'objet Y est initial ou le morphisme f est un isomorphisme.
2. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories ayant toutes les limites et colimites finies. On dit qu'il est exact s'il envoie les objets initiaux (et finaux) sur des objets initiaux (et finaux), et que pour tout diagrammes $(X \rightarrow Y \leftarrow Z)$ et $(X' \leftarrow Y' \rightarrow Z')$, les morphismes naturels

$$F(X \times_Y Z) \rightarrow F(X) \times_{F(Y)} F(Z) \text{ et } F(X') \sqcup_{F(Y')} F(Z') \rightarrow F(X' \sqcup_{Y'} Z')$$

sont des isomorphismes.

3. Toujours pour un tel foncteur F , on dit que F reflète les isomorphismes si pour tout morphisme f de \mathcal{C} , si $F(f)$ est un isomorphisme alors f aussi.

Définition 2.21. Une *catégorie galoisienne* est un couple (\mathcal{C}, F) , où \mathcal{C} est une catégorie essentiellement petite et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ est un foncteur, tel que :

- La catégorie \mathcal{C} a toutes les limites et colimites finies.
- Tout objet de \mathcal{C} est une union disjointe finie d'objets \mathcal{C} -connexes.
- Le foncteur F est à valeurs dans les ensembles finis.
- Le foncteur F est exact.
- Le foncteur F reflète les isomorphismes.

Théorème 2.22. Soit (\mathcal{C}, F) une catégorie galoisienne. Définissons le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ comme le groupe d'automorphismes du foncteur F . Il s'identifie à un sous-groupe du groupe topologique profini

$$\prod_{X \in \mathcal{D}} \mathfrak{S}_{F(X)}$$

où \mathcal{D} est une petite sous-catégorie de \mathcal{C} qui lui est équivalente. Pour tout objet X , l'action de $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ sur $F(X)$ est donc à stabilisateurs ouverts et F se promeut en une équivalence de catégories

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C}, F)\text{-EnsFinis}$$

où cette dernière catégorie est celles des $\pi_1(\mathcal{C}, F)$ -ensembles finis à stabilisateurs ouverts.

La géométrie fournit quantité de catégories galoisiennes intéressantes parmi le groupes fondamentaux desquelles nous pouvons trouver $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Pour cela, nous utilisons la théorie des diamants dont nous donnons ici une exposition adaptée à nos besoins, avec pour référence [SW14] et [Sch17b]. La première référence fournit une approche plus accessible et plus vaste aux perfectoides, diamants et objets qui en découlent. La deuxième est plus compacte et technique mais nous servira pour avoir des énoncés millimétrés. Les lecteurs et lectrices souhaitant d'abord de familiariser avec la géométrie adique et les perfectoides pourront se référer à [Mor].

Définition 2.23. Une *paire de Tate perfectioïde* est une paire (A, A^+) où A est un anneau topologique, A^+ un sous-anneau ouvert borné et intégralement clos et possédant un élément π vérifiant que :

- La topologie sur A^+ est la topologie π -adique et A^+ est π -adiquement complet.
- Nous avons $p \in \pi^p A^+$.
- Le morphisme d'anneaux déduit $A^+/\pi A^+ \rightarrow A^+/\pi^p A^+$, $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme.

Un tel élément π s'appelle une *pseudo-uniformisante*. La définition de paire de Tate perfectioïde requiert l'existence d'une pseudo-uniformisante et non d'en choisir une.

À toute paire de Tate perfectioïde, nous associons un espace topologique $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ muni de deux faisceaux d'anneaux que nous appelons *espace affinoïde*. L'ensemble sous-jacent sera

$$\left\{ \text{Semi-norme multiplicative } |\cdot| : A \rightarrow \Gamma \cup \{0\} \begin{array}{l} \text{à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné,} \\ \text{continue pour la topologie de l'ordre sur } \Gamma, \\ \text{telle que } |A^+| \subseteq \Gamma_{\leq 1}. \end{array} \right\} / \sim.$$

La topologie a pour base d'ouverts les ouverts rationnels

$$U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right) := \{|\cdot| \text{ telle que } \forall i, |f_i| \leq |g| \neq 0\} \text{ pour } (f_1, \dots, f_r) = A.$$

Cet espace est spectral. Les faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+$ sont caractérisés par leurs valeurs sur les ouverts rationnels :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}\left(U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right)\right) = \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} \left[\frac{1}{\pi}\right],$$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+\left(U\left(\frac{f_1, \dots, f_r}{g}\right)\right) = \text{clôture intégrale de } \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} \text{ dans } \left(A^+ \left[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right]\right)^{\wedge \pi} \left[\frac{1}{\pi}\right].$$

Définition 2.24. Un *espace perfectioïde* est un triplet $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+)$ formé d'un espace topologique et de deux faisceaux d'anneaux, localement isomorphe à un espace affinoïde $(\mathrm{Spa}(A, A^+), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(A, A^+)}^+)$. On note souvent X un tel triplet par négligence. Les morphismes d'espaces perfectioïdes sont les morphismes d'espaces annelés $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ induit localement par un morphisme continu d'anneaux tel que l'image de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y^+)$ soit contenue dans \mathcal{O}_X^+ .

On dit qu'il est de caractéristique p (resp. de caractéristique mixte) si \mathcal{O}_X a pour valeurs des anneaux de caractéristique p (resp. de caractéristique mixte).

Proposition 2.25. La catégorie des paires de Tate perfectioïdes a pour morphismes $(A, A^+) \rightarrow (B, B^+)$ les morphismes d'anneaux continus $f : A \rightarrow B$ tel que $f(A^+) \subset B^+$. L'association $(A, A^+) \mapsto \mathrm{Spa}(A, A^+)$ fournit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie opposée des paires de Tate perfectioïdes vers celle des espaces perfectioïdes.

Remarque 2.26. Pour toute paire de Tate perfectioïde (K, K^+) telle que K est un corps, l'ensemble des éléments bornés \mathcal{O}_K vérifie que (K, \mathcal{O}_K) est une paire de Tate perfectioïde. L'espace $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$ n'a qu'un seul point donné par la classe d'équivalence des valuations π -adiques¹² pour toute pseudo-uniformisante π et \mathcal{O}_K est l'anneau de valuation associé. L'espace $\mathrm{Spa}(K, K^+)$ peut avoir plus de points, mais $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$ y est dense.

Définition 2.27 (voir Définitions 6.2 et 7.8 dans [Sch17b]). Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme d'espaces perfectioïdes.

1) Le morphisme f est dit *fini étale* si pour tout ouvert affinoïde $\mathrm{Spa}(R, R^+) = U \subset X$, son image réciproque est affinoïde disons $f^{-1}(U) = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ et le morphisme $R \rightarrow A$ est fini étale, identifiant A^+ à la clôture intégrale de R^+ dans A . Il suffit de le vérifier sur un recouvrement ouvert du but (voir [Sch12, Section 7]).

2) Le morphisme f est dit *étale* s'il se factorise localement sur Y comme la composée d'une immersion ouverte et d'un morphisme fini étale.

3) Le morphisme f est *pro-étale* s'il existe un recouvrement de Y en ouverts affinoïdes $V = \mathrm{Spa}(A, A^+) \subset Y$, tels qu'il existe $f(V) \subset U = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde, un petit système cofiltré d'espaces affinoïdes $(\mathrm{Spa}(A_i, A_i^+))_I$ et un morphismes de diagrammes formé de morphismes étales $(\mathrm{Spa}(A_i, A_i^+))_I \rightarrow \mathrm{Spa}(R, R^+)$ tel que $f|_V$ s'identifie à la limite de ce diagramme.

12. C'est une valuation de rang 1 non discrète définie par $|x|_\pi = \lim_n p^{-\min\{k \in \mathbb{Z} \mid x^n \in \pi^k A^+\}/n}$.

Exemple 2.28. Soit F un corps perfectoïde. Les espaces perfectoïdes finis étales sur $\mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F)$ sont isomorphes aux

$$\bigsqcup_{i \in I} \mathrm{Spa}(F_i, \mathcal{O}_{F_i})$$

où I est fini et où les $F_i|F$ sont des extensions finies séparables.

En particulier si F est algébriquement clos, les seuls espaces finis étales sur $\mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F)$ sont des unions de copies de ce point.

Définition 2.29 (voir Définition 8.1 dans [Sch17b]). Nous définissons la sous-catégorie pleine Perf des espaces perfectoïdes dont les objets sont les espaces perfectoïdes de caractéristique p . Nous la munissons canoniquement de la topologie pro-étale : les recouvrement de X sont les familles $(f_i : X_i \rightarrow X)_I$ de morphismes pro-étales tels que pour tout ouvert quasi-compact U de X , il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ et des ouverts quasi-compacts $V_j \subset X_j$ vérifiant que $U \subseteq \bigcup_J f_j(V_j)$. La catégorie Perf munie de cette topologie sera appelée le site pro-étale Perf .

Grâce à [Sch17b, Corollaire 8.6], il se trouve que la topologie sur le site pro-étale Perf est sous-canonique, au sens où pour tout espace perfectoïde X de caractéristique p , le préfaisceau $Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perf}}(Z, X)$ est un faisceau sur le site pro-étale Perf (voir [Stacks, Tag 00WP] and [Stacks, Tag 00WQ]). Nous n'opérerons aucune différence de notation entre l'espace perfectoïde et le faisceau associé, d'autant plus que cette identification est pleinement fidèle. Les propriétés générales des topos, en particulier lorsqu'une topologie sous-jacente est sous-canonique, et plus généralement la notion de morphismes représentables de faisceaux peuvent se trouver dans [Stacks, Tag 00UZ] et [Stacks, Tag 0021].

Définition 2.30. Un *diamant* est un faisceau X sur le site pro-étale Perf de la forme X_0/R . Ici X_0 est un espace perfectoïde de caractéristique p et R est une relation d'équivalence¹³ sur X_0 telle que R est un faisceau représentable et que les compositions $R \rightarrow X_0 \times X_0 \rightrightarrows X_0$ sont des morphismes pro-étales d'espaces perfectoïdes.

Les espaces perfectoïdes de caractéristiques p , vus comme faisceaux représentables, forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des diamants.

Tout espace perfectoïde de caractéristique p étant muni d'une action du Frobenius absolu, c'est encore le cas de tout diamant. Tout morphisme de diamant est Frobenius-équivariant.

Définition 2.31. Pour tout corps discret k de caractéristique p , nous notons abusivement $\mathrm{Spd}(k)$ le faisceau sur le site pro-étale Perf qui à un affinoïde $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ envoie l'ensemble des morphismes d'anneaux $k \rightarrow A$. Ce n'est pas un diamant.

Pour notre puissance q de p et pour tout diamant X sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$, le q -Frobenius est un automorphisme de diamant sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$.

Proposition 2.32 (Similaire à la Proposition 11.4 dans [Sch17b]). Soient X, Y deux diamants sur $\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Le faisceau pro-étale $X \times_{\mathrm{Spd}(\mathbb{F}_q)} Y$ est un diamant.

Pour une introduction plus complète que les définitions qui suivront, nous renvoyons les lecteurs et lectrices à [Sch17b, Section 11].

Définition 2.33 (voir Définitions 10.1 et 10.7 dans [Sch17b]). Un morphisme de diamants $X' \rightarrow X$ est appelé *fini étale* (resp. *immersion ouverte*) lorsque, pour tout espace perfectoïde X et tout morphisme de faisceaux $Y \rightarrow X$, le produit fibré $Y \times_X X'$ est représentable et le morphisme d'espaces perfectoïdes $Y \times_X X' \rightarrow Y$ est fini étale (resp. est une immersion ouverte).

Dans le cas d'une immersion ouverte, nous dirons par abus de langage que X' est un ouvert de X .

Proposition 2.34 (voir Proposition 10.4 dans [Sch17b]). Soient $f : Y \rightarrow Y_1$, $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ et $h : X \rightarrow Y$ des morphismes de diamants.

- 1) Si f et g sont finis étales alors $g \circ f$ aussi.
- 2) Si $g \circ f$ et g sont finis étales, alors f aussi.
- 3) Si f est fini étale, alors le morphisme $Y \times_{Y_1} X \rightarrow X$ est fini étale.

Définition/Proposition 2.35. 1. Un *point géométrique* d'un diamant X est un morphisme de faisceaux sur Perf

$$\bar{x} : \mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K) \rightarrow X$$

où K est un corps perfectoïde algébriquement clos.

¹³. Une relation d'équivalence sur un faisceau X_0 est sous-faisceau R de $X_0 \times X_0$ qui induit une relation d'équivalence au niveau des sections sur chaque objet de Perf .

2. Deux points \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont dits équivalents s'il existe un corps perfectoïde algébriquement clos K et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spa}(K_1, \mathcal{O}_{K_1}) & \\ & \nearrow & \searrow \bar{x}_1 \\ \text{Spa}(K, \mathcal{O}_K) & & X \\ & \searrow & \nearrow \bar{x}_2 \\ & \text{Spa}(K_2, \mathcal{O}_{K_2}) & \end{array}$$

Soit X un diamant. L'ensemble des points géométriques à isomorphisme près est noté $|X|$. Si X est un espace perfectoïde, l'ensemble $|X|$ s'identifie à l'espace topologique sous-jacent et le munir de cette topologie. Si $X = X_0/R$ est un écriture comme quotient d'un espace perfectoïde, la topologie quotient sur $|X|$ induite par $|X_0|$ ne dépend pas de l'écriture. Nous appelons espace sous-jacent au diamant, encore noté X , l'ensemble $|X|$ muni de cette topologie.

3. Les ouverts de X correspondent exactement aux ouverts de l'espace topologique $|X|$.
 4. Un diamant X est dit connexe s'il n'admet pas d'écriture comme union disjointe de deux ouverts non vides. Cela équivaut à ce que $|X|$ soit connexe.

Définition 2.36. Soit X un diamant. La catégorie $\text{FÉt}(X)$ a pour objets les morphismes de diamants finis étales $Y \rightarrow X$ et pour morphismes les morphismes de X -diamants (qui sont automatiquement finis étales).

Soit \bar{x} un point géométrique de X . Nous définissons le foncteur fibre

$$\text{Fib}_{\bar{x}} : \text{FÉt}(X) \rightarrow \text{Ens}, [Y \rightarrow X] \mapsto |Y \times_X \bar{x}|.$$

Théorème 2.37. Soit X un diamant connexe et \bar{x} un point géométrique. Le couple $(\text{FÉt}(X), \text{Fib}_{\bar{x}})$ est une catégorie galoisienne dont on notera $\pi_1^{\text{fét}}(X, \bar{x})$ le groupe fondamental. Les diamants $\text{FÉt}(X)$ -connexes sont les diamants connexes.

Exemple 2.38. Soit F un corps perfectoïde. Soit \bar{x} un point géométrique de $\text{Spd}(F, \mathcal{O}_F)$ donné par le choix d'une clôture algébrique F^{alg} et le morphisme

$$\bar{x} : \text{Spd}(\widehat{F^{\text{alg}}}, \widehat{\mathcal{O}_{F^{\text{alg}}}}) \rightarrow \text{Spd}(F, \mathcal{O}_F).$$

L'exemple 2.28 décrit les diamants X dans $\text{FÉt}(\text{Spd}(F, \mathcal{O}_F))$. Le foncteur $\text{Fib}_{\bar{x}}$ est isomorphe au foncteur qui envoie $\text{Spd}(F_i, \mathcal{O}_{F_i})$, où $F_i|F$ est finie, sur l'ensemble de plongements de F_i dans $\widehat{F^{\text{alg}}}$. L'action du groupe de Galois \mathcal{G}_F par post-composition sur ces plongements fournit des endotransformations du foncteur fibre. Elle identifie $\pi_1^{\text{fét}}(\text{Spd}(F, \mathcal{O}_F), \bar{x})$ à \mathcal{G}_F .

Nous souhaitons ajouter l'action d'un groupe localement profini.

Définition 2.39. Soit Γ un groupe localement profini.

1. Nous définissons $\underline{\Gamma}$ le faisceau en groupes sur Perf donné par $\underline{\Gamma}(X) = \mathcal{C}(|X|, \Gamma)$.
 2. Une action de Γ sur un diamant X est un morphisme de faisceau sur Perf

$$\underline{\Gamma} \times X \rightarrow X$$

qui fait commuter les diagrammes d'actions de groupes.

3. Un diamant X avec action de Γ est dit Γ -connexe s'il n'est pas l'union de deux ouverts non vides stables par Γ .

Remarque 2.40. Une telle action de Γ sur X induit une action continue de Γ sur $|X|$. Les ouverts Γ -stables de X correspondent bijectivement aux ouverts Γ -stables de $|X|$.

Définition 2.41. Soit Γ un groupe localement profini et X un diamant muni d'une action de Γ . La catégorie $\text{FÉt}(X|\Gamma)$ a pour objets les morphismes finis étales Γ -équivalents $Y \rightarrow X$ où Y est un diamant avec action de Γ . Les morphismes sont les morphismes de X -diamants Γ -équivalents.

Soit \bar{x} un point géométrique de X , nous définissons le foncteur fibre

$$\text{Fib}_{\bar{x}} : \text{FÉt}(X|\Gamma) \rightarrow \text{Ens}, [Y \rightarrow X] \mapsto |Y \times_X \bar{x}|.$$

Théorème 2.42. Soit X un diamant muni d'une action de Γ qui le rend Γ -connexe. On suppose également que l'action est libre, i.e. que $\forall Z$, l'action de $\Gamma \subset \mathcal{C}(|Z|, \Gamma)$ sur $X(Z)$ est libre. Alors, le couple $(\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma), \text{Fib}_{\bar{x}})$ est une catégorie galoisienne dont on note $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})$ le groupe fondamental.

Les objets $\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma)$ -connexes sont les diamants Γ -connexes.

Démonstration. Se déduit du Théorème 2.37 en construisant le diamant X/Γ et en prouvant que le couple $(\mathcal{F}\acute{E}t(X/\Gamma), \text{Fib}_{\bar{x}})$ est équivalent à la catégorie galoisienne $(\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma), \text{Fib}_{\bar{x}})$. \square

Proposition 2.43. Soit $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un morphisme continu de groupes localement profinis. Soit Y un diamant avec action de Γ_1 et X un diamant avec action de Γ_2 , qui le munit en particulier X d'une action de Γ_1 . Supposons que les deux diamants vérifient les conditions du théorème 2.42. Soit $Y \rightarrow X$ un morphisme de diamants Γ_1 -équivariant. Soit \bar{y} un point géométrique de Y . Le foncteur suivant est correctement défini.

$$\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma_2) \longrightarrow \mathcal{F}\acute{E}t(Y|\Gamma_1)$$

$$Z \longmapsto Z \times_X Y$$

$$f \longmapsto f \times_X \text{Id}_Y$$

Il existe un morphisme de groupes profinis

$$\pi_1^{\text{fét}}(Y|\Gamma_1, \bar{y}) \rightarrow \pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma_2, \bar{y})$$

qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma_2) & \xrightarrow[\sim]{\text{Fib}_{\bar{y}}} & \pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma_2, \bar{y}) - \text{EnsFinis} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}\acute{E}t(Y|\Gamma_1) & \xrightarrow[\sim]{\text{Fib}_{\bar{y}}} & \pi_1^{\text{fét}}(Y|\Gamma_1, \bar{y}) - \text{EnsFinis} \end{array}$$

où le foncteur de droite est obtenu grâce au morphisme entre groupes fondamentaux ci-dessus.

Démonstration. La définition du foncteur ne pose aucun problème. Pour ce qui est du morphisme entre groupes, soit T un automorphisme de $\text{Fib}_{\bar{y}} : \mathcal{F}\acute{E}t(Y|\Gamma_1) \rightarrow \text{EnsFinis}$. Pour tout objet Z de $\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma_2)$, l'ensemble $Z \times_X \bar{y}$ peut s'identifier à $(Z \times_X Y) \times_Y \bar{y}$ sur lequel agit la bijection $T(Z \times_X Y)$. Cette famille de bijections étant naturelle en Z , elle fournit un automorphisme du foncteur $\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Gamma_2) \rightarrow \text{EnsFinis}$, soit un élément de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma_2, \bar{y})$. Nous vérifions qu'il s'agit d'un morphisme de groupes topologiques et qu'il fait commuter le diagramme. \square

Après cette introduction assez générale, nous allons nous replacer dans un contexte plus propice à notre équivalence. Resaisissons-nous de notre puissance q du premier p et l'ensemble fini Δ .

Proposition 2.44. Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ des diamants sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Le diamant donné par

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha$$

possède une unique action du groupe $\Phi_{\Delta, q}^{\text{gp}}$ telle que l'action de $\varphi_{\beta, q}$ est un morphisme de $\prod_{\alpha \neq \beta} X_\alpha$ -diamants $\varphi_{\Delta, q}$ est celle du q -Frobenius.

Définition 2.45. Soit X un diamant sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$ muni d'une action de $\Phi_{\Delta, q}^{\text{gp}}$ telle que l'action de $\varphi_{\Delta, q}$ est le q -Frobenius. Nous appelons $\mathcal{F}\acute{E}t(X \parallel \Phi_{\Delta, q})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\acute{E}t(X|\Phi_{\Delta, q}^{\text{gp}})$ dont les objets sont les diamants tels que l'action de $\varphi_{\Delta, q}$ est le q -Frobenius.

Théorème 2.46 (Lemme de Drinfeld). Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ des diamants connexes et localement spatiaux sur $\text{Spd}(\mathbb{F}_q)$. Soit également \bar{x} un point géométrique du diamant $\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha$. La paire

$$\left(\mathcal{F}\acute{E}t \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \parallel \Phi_{\Delta, q} \right), \text{Fib}_{\bar{x}} \right)$$

est une catégorie galoisienne.

De plus, la famille de morphismes $\varphi_{\alpha,q}$ -équivalents

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$$

construit un morphisme

$$\pi_1^{\text{fét}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \left\| \Phi_{\Delta,q}, \bar{x} \right\| \right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta} \pi_1^{\text{fét}}(X_\alpha, \bar{x})$$

qui est un isomorphisme de groupes profinis.

Démonstration. Montrer que la catégorie est galoisienne se fait en deux étapes. Singularisons $\beta \in \Delta$. D'abord, il faut montrer que

$$\left(\text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha \left\| \Phi_{\Delta,q} \right\|, \text{Fib}_{\bar{x}} \right), \text{Fib}_{\bar{x}} \right) \cong \left(\text{FÉt} \left(X_\beta \times_{\text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \prod_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} X_\alpha / \varphi_{\alpha,q}^{\mathbb{N}} \right), \text{Fib}_{\bar{x}} \right).$$

Puis, il faut démontrer que ce dernier produit est un diamant connexe. \square

Proposition 2.47. Soit \tilde{E} un corps perfectoïde de caractéristique p , extension de \mathbb{F}_q . Soit $\tilde{F}|\tilde{E}$ une extension finie, extension de $\mathbb{F}_{q'}$ pour $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$. Soit Δ un ensemble fini. Il existe un foncteur canonique

$$\text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) \left\| \Phi_{\Delta,q'} \right\| \right) \rightarrow \text{FÉt} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+) \left\| \Phi_{\Delta,q} \right\| \right).$$

Soit $\bar{x} \rightarrow \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+)$ un point géométrique. Le morphisme déduit

$$\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta} \cong \pi_1^{\text{fét}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) \left\| \Phi_{\Delta,q'}, \bar{x} \right\| \right) \rightarrow \pi_1^{\text{fét}} \left(\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+) \left\| \Phi_{\Delta,q}, \bar{x} \right\| \right) \cong \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$$

déduit grâce au lemme de Drinfeld correspond à l'inclusion.

Démonstration. Par propriétés universelles, nous construisons un morphisme $\Phi_{\Delta,q'}^{\text{gp}}$ -équivalent

$$\prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+).$$

Le tiré en arrière par ce morphisme fournit le foncteur annoncé entre catégories galoisiennes.

Pour tout $\beta \in \Delta$, la construction de notre morphisme canonique fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_{q'})} \text{Spd}(\tilde{F}_\alpha, \tilde{F}_\alpha^+) & \longrightarrow & \text{Spd}(\tilde{F}_\beta, \tilde{F}_\beta^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+) & \longrightarrow & \text{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) \end{array}$$

Dans le diagramme obtenu en passant aux groupes fondamentaux, l'énoncé précis du théorème 2.46 affirme que les morphismes horizontaux s'identifient aux projections

$$\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{F}_\beta} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} \rightarrow \mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}.$$

Or, en se rappelant comment on identifie $\mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}$ aux automorphismes du foncteurs fibres sur $\text{FÉt}(\text{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+))$, les morphismes verticaux de droite correspondent aux inclusions $\mathcal{G}_{\tilde{F}_\beta} \subset \mathcal{G}_{\tilde{E}_\beta}$ ce qui conclut. \square

Lemme 2.48. Soit Γ un groupe localement profini, X un diamant muni d'une action libre de Γ qui le rend Γ -connexe et \bar{x} un point géométrique de X . Notons \mathbf{T} l'équivalence de catégories $\text{FÉt}(X|\Gamma) \cong \pi_1^{\text{fét}}(X|\Gamma, \bar{x})$ -Ens.

1. Il y a un isomorphisme naturel entre foncteurs de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})\text{-Ens}$ dans Ens

$$H_\Gamma^0 \xrightarrow{\sim} \text{Orb} \circ \mathbf{T}$$

où H_Γ^0 est le foncteur des composantes Γ -connexes et Orb est le foncteur des orbites.

2. Soit k un corps fini et V un k -espace vectoriel. Soit Z un objet en k -espaces vectoriels de $\text{FÉt}(X|\underline{\Gamma})$ qui représente le faisceau constant associé à V

$$\text{FÉt}(X|\underline{\Gamma}) \rightarrow k\text{-EspacesVect}, Y \mapsto V^{H_\Gamma(Y)}.$$

Alors $\mathbf{T}(Z)$ isomorphe au k -espace vectoriel V avec action triviale de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})$.

Démonstration. 1. Conséquence de la théorie générale des catégories galoisiennes et de la description des objets connexes dans $\text{FÉt}(X|\underline{\Gamma})$.

2. Le k -espace vectoriel V avec action triviale de $\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})$ représente le foncteur

$$\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})\text{-Ens} \rightarrow k\text{-EspacesVect}, A \mapsto \text{Hom}_{\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})\text{-Ens}}(A, V) = V^{\text{Orb}(A)}.$$

Or, $\mathbf{T}(Z)$ représente par hypothèse le foncteur

$$\pi_1^{\text{fét}}(X|\underline{\Gamma}, \bar{x})\text{-Ens} \rightarrow k\text{-EspacesVect}, A \mapsto \text{Hom}_{\text{FÉt}(X|\underline{\Gamma})}(\mathbf{T}^{-1}(A), Z) = V^{H_\Gamma \circ \mathbf{T}^{-1}(A)}.$$

D'après le premier point, les deux foncteurs sont isomorphes ce qui conclut. \square

Nous sommes prêts à construire le foncteur $V_{\tilde{E}}$ qui nous permettra de mieux comprendre appréhender l'isomorphisme de comparaison.

Proposition 2.49. Soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}, \tilde{E}_\Delta)$, le foncteur

$$\mathfrak{I}_D : \tilde{E}_\Delta\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens}, T \mapsto (T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta, r} = \text{Id}},$$

où $\varphi_{\Delta, r}$ agit sur T comme de r -Frobenius, est représentable par une \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale que l'on nomme S_D .

Démonstration. Étape 1 : soit R une \mathbb{F}_r -algèbre et φ_r le r -Frobenius. Soit D un objet de $\text{Mod}^{\text{ét}}(\varphi_r^{\mathbb{N}}, R)$ qui est libre de rang fini comme R -module. Alors le foncteur

$$R\text{-Alg} \rightarrow \text{Ens}, T \mapsto (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}}$$

est représentable par une R -algèbre finie étale. Fixons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de D et A la matrice de $\varphi_{r, D}$ dans la base \mathcal{B} , autrement dit

$$\forall (x_i) \in R^d, \varphi_{r, D} \left(\sum_{1 \leq i \leq d} x_i e_i \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} x_i^r a_{i, j} e_j.$$

Pour toute R -algèbre T , le produit tensoriel $T \otimes_R D$ est un T -module libre de base \mathcal{B} et $\sum_i t_i e_i \in (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}}$ si et seulement si

$$\sum_j t_j e_j = \sum_j \left(\sum_i t_i^r a_{i, j} \right) e_j.$$

Ceci équivaut à

$$\forall j, t_j = \sum_i t_i^r a_{i, j}.$$

Comme D est étale, la matrice A est inversible d'inverse B et on obtient

$$\sum_j t_j e_j \in (T \otimes_R D)^{\varphi_r = \text{Id}} \Leftrightarrow \forall j, t_j^r = \sum_i t_i b_{i, j}.$$

Le foncteur est donc représenté par la R -algèbre $R[T_i]/(T_j^r - \sum_i b_{i, j} T_i)_{1 \leq j \leq d}$. La jacobienne de la famille de polynômes définissant le quotient vaut B en tout point d'annulation ce qui prouve que la R -algèbre est finie étale. Par Yoneda, cette R -algèbre ne dépend pas de \mathcal{B} à isomorphisme près.

Étape 2 : en général, puisque D est fini projectif, le Lemme [Stacks, Tag 00NX] affirme qu'il est localement libre de rang fini. Sur tout ouvert affine $V(z)$ tel que $D[z^{-1}]$ est libre, nous construisons S_z avec la première étape. Yoneda fournit une immersion ouverte $f_{y,z} : \text{Spec}(S_y) \rightarrow \text{Spec}(S_z)$ pour toute inclusion $V(y) \subseteq V(z)$. D'après [Duc, §5.2.2.2], on peut recoller les $\text{Spec}(S_z)$ le long des $f_{y,z}$. On vérifie que le schéma sur $\text{Spec}(\tilde{E}_\Delta)$ obtenu est le spectre de l'algèbre finie étale escomptée. \square

Nous démontrons au Corollaire A.16 que la paire $(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ est une paire de Huber perfectoïde. Comme l'anneau S_D est une \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale, nous pouvons le voir comme un diamant muni d'un morphisme fini étale

$$\text{Spd}(S_D, S_D^+) \rightarrow \text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+).$$

Proposition 2.50. *Le diamant $\text{Spd}(S_D, S_D^+)$ est naturellement muni d'une structure d'objet de FÉt $(\text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$.*

Démonstration. Le sous-anneau S_D^+ est par définition la clôture intégrale de \tilde{E}_Δ^+ . Puisque \tilde{E}_Δ^+ est un sous- $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau de \tilde{E}_Δ , toute structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau sur S_D compatible à la structure de \tilde{E}_Δ -algèbre se restreint-corestreint en une structure sur S_D^+ et fournit une action sur le diamant. Pour obtenir un objet de FÉt $(\text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$, il reste donc à construire une action telle que $\varphi_{\Delta,q}$ coïncide avec le q -Frobenius.

Construisons l'action de $\Phi_{\Delta,q}$. Soit $\alpha \in \Delta$ et T une \tilde{E}_Δ -algèbre. Le morphisme

$$T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D \rightarrow \varphi_{\alpha,q}^* T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D, \quad t \otimes d \mapsto (1 \otimes t) \otimes \varphi_{\alpha,q,D}(d)$$

est $\varphi_{\Delta,r}$ -équivariant et naturel en T , ce qui fournit une application naturelle en T

$$(T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \rightarrow (\varphi_{\alpha,q}^* T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}}$$

qui se réinterprète en une transformation naturelle

$$\Psi_\alpha : \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, -) \Rightarrow \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* -).$$

Définissons $\psi_{\alpha,D} := \Psi_\alpha(S_D)(\text{Id}_{S_D})$.

Pour n'importe quel $\varphi_1 \in \Phi_\Delta$, nous construisons de même Ψ_1 et $\psi_{1,D} : S_D \rightarrow \varphi_1^* S_D$ à partir de l'action de φ_1 . Commençons par prouver que les $\psi_{-,D}$ se comportent bien vis-à-vis de la composition. Pour tout morphisme de \tilde{E}_Δ -algèbres $g : S_D \rightarrow T$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, S_D) & \xrightarrow{\Psi_\alpha(S_D)} & \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* S_D) \\ \downarrow - \circ g & & \downarrow - \circ \varphi_{\alpha,q}^* g \\ \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, T) & \xrightarrow{\Psi_\alpha(T)} & \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_{\alpha,q}^* T) \end{array}$$

et en suivant l'image de Id_{S_D} , on trouve que $\Psi_\alpha(T)(g) = \varphi_{\alpha,q}^* g \circ \psi_{\alpha,D}$. En particulier,

$$\varphi_{\alpha,q}^* \psi_{\beta,D} \circ \psi_{\alpha,D} = \Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* S)(\psi_{\beta,D}) = [\Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* S_D) \circ \Psi_\beta(S_D)](\text{Id}_{S_D}) \quad (*)1$$

Appelons i_T l'isomorphisme naturel en T de $(\varphi_{\alpha,q} \varphi_{\beta,q})^* T$ à $\varphi_{\alpha,q}^* (\varphi_{\beta,q}^* T)$. Grâce à un diagramme similaire, il fournit une égalité les foncteurs $(f \mapsto i_- \circ f) \circ \Psi_{\alpha\beta}$, où $\Psi_{\alpha\beta}$ est associé à $\varphi_{\alpha,q} \varphi_{\beta,q}$ et $\Psi_\alpha(\varphi_{\beta,q}^* -) \circ \Psi_\beta$. Appliqué à l'équation (*)1, cela donne

$$i_{S_D} \circ \psi_{\alpha\beta,D} = \varphi_{\alpha,q}^* \psi_{\beta,D} \circ \psi_{\alpha,D}.$$

Nous pouvons généraliser ce résultat à $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_{\Delta,q}$. En particulier, nous avons

$$i \circ \psi_{\Delta,D} = \varphi_{\alpha_1,q}^* \psi_{\alpha_2 \dots \alpha_{|\Delta|},D} \circ \dots \circ \psi_{\alpha_{|\Delta|},D}$$

où $i : \varphi_{\Delta,q}^* S_D \xrightarrow{\sim} \varphi_{\alpha_1,q}^* \dots \varphi_{\alpha_{|\Delta|},q}^* S_D$ et où $\psi_{\Delta,D}$ est construit à partir du Frobenius relatif $\varphi_{\Delta,q}$. Ainsi, démontrer que les $\psi_{\alpha,D}$ sont inversibles se réduit à démontrer que $\psi_{\Delta,D}$ est inversible.

Soit Ψ la transformation naturelle obtenu à partir du Frobenius relatif. Pour tout \tilde{E}_Δ -algèbre T , nous considérons le linéarisé du Frobenius relatif

$$\varphi_{q,T}^* : \varphi_q^* T \rightarrow T, \quad x \otimes t \mapsto xt^q.$$

Nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} & \longrightarrow & (\varphi_q^* T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} & \xrightarrow{\mathcal{I}_D(\varphi_q^*)} & (T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, T) & \xrightarrow{\Psi(T)=\varphi_q^*(-)\circ\psi_{\Delta,D}} & \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \varphi_q^* T) & \xrightarrow{\varphi_q^*\circ\cdot} & \text{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, T)
\end{array}$$

Si l'on considère $\sum t_i \otimes d_i$ en haut à gauche, son image en haut à droite est exactement

$$\sum t_i^q \otimes \varphi_{\Delta,q,D}(d_i) = \varphi_{\Delta,q,T \otimes D}(\sum t_i \otimes d_i) = \sum t_i \otimes d_i.$$

Il en découle que la composée du bas est l'identité. En appliquant à $T = S_D$ et à Id_{S_D} , il vient que $\varphi_q^* \circ \psi_{\Delta,D} = \text{Id}_{S_D}$, autrement dit que $\psi_{\Delta,D}$ est simplement l'inverse du Frobenius absolu sur S_D .

Nous venons de finir de prouver que les $\psi_{\alpha,D}$ sont inversibles. Le fait qu'ils soient \mathcal{E}_Δ -linéaires, les relations qu'ils vérifient et l'expression de $\psi_{\Delta,D}$ prouvent précisément que leurs inverses fournissent une structure d'objet de FÉt $(\text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$. \square

Notre construction atterrit désormais dans une catégorie davantage adaptée au lemme de Drinfeld. En revanche, nous vivons toujours sur $\text{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ et non sur $X_{\tilde{E}} = \prod_{\alpha \in \Delta, \text{Spd}(\mathbb{F}_q)} \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+)$. Ce sont deux espaces distincts : philosophiquement, certaines valuations autorisent que tous les ϖ_α ne sont pas topologiquement nilpotents sur le premier espace, là où le deuxième les force à être tous topologiquement nilpotents. Nous donnons un énoncé précis.

Lemme 2.51. *Définissons $U_m := \{|\cdot| \in \text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \mid \forall \alpha, \beta, |\varpi_\alpha|^m \leq |\varpi_\beta|\}$. C'est un ouvert rationnel¹⁴ de $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$.*

Appelons $Y_{\tilde{E}}$ l'espace perfectoïde réunion des ouverts U_m de $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$, et le diamant associé.

Les diamants $Y_{\tilde{E}}$ et $X_{\tilde{E}}$ sont canoniquement isomorphes. L'action de $\Phi_{\Delta,q}^{\text{gp}}$ sur $\text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ se restreint-corestreint sur $Y_{\tilde{E}}$ et correspond à l'action sur $X_{\tilde{E}}$ construite à la Proposition 2.44.

Démonstration. Prouvons d'abord que les points de $Y_{\tilde{E}}$ sont précisément les valuations $|\cdot| \in \text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ telles que $\forall \alpha, |\varpi_\alpha|^n \rightarrow 0$. Soit $|\cdot| \in U_m$. Puisque $\varpi_\Delta \in \tilde{F}_\Delta^{\circ\circ}$, nous avons $|\varpi_\Delta|^n \rightarrow 0$. Puisque $|\cdot| \in U_m$, nous obtenons

$$\forall \alpha, |\varpi_\alpha|^{m|\Delta|} \leq |\varpi_\Delta|$$

d'où $|\varpi_\alpha|^n \rightarrow 0$. Réciproquement, supposons que $\forall \alpha, |\varpi_\alpha|^n \rightarrow 0$. Pour tout couple (α, β) l'identité $|\varpi_\alpha|^m \leq |\varpi_\beta|$ est vraie pour m assez grand. Pour m assez grand, elles sont toutes vérifiées et $|\cdot| \in U_m$.

Pour prouver que les deux diamants coïncident, commençons par trouver une famille de morphismes $Y_{\tilde{E}} \rightarrow \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+)$. Posons jusqu'à la fin de la section $(\tilde{E}_{\Delta,m}, \tilde{E}_{\Delta,m}^+)$ la paire de Huber correspondant à l'ouvert rationnel U_m . Soit $m \geq 1$ et $\alpha \in \Delta$. Nous venons de prouver que pour tout $|\cdot| \in U_m$, nous avons $|\varpi_\alpha|^n \rightarrow 0$, ce qui implique que $\varpi_\alpha \in \tilde{E}_{\Delta,m}^{\circ\circ}$ puis que l'application canonique

$$\tilde{E}_\alpha \rightarrow \tilde{E}_\Delta \rightarrow \tilde{E}_{\Delta,m}$$

est continue¹⁵. L'image de \tilde{E}_α^+ est contenue dans \tilde{E}_Δ^+ puis dans $\tilde{E}_{\Delta,m}^+$. Nous avons construit un morphisme $U_m \rightarrow \text{Spa}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+)$. En passant à la colimite, nous obtenons un morphisme $g_\alpha : Y_{\tilde{E}} \rightarrow \text{Spd}(\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\alpha^+)$.

Nous prouvons l'isomorphisme en construisant une naturelle au niveau des $\text{Spa}(A, A^+)$ -points des faisceaux sur $\text{Perf } X_{\tilde{E}}$ et $Y_{\tilde{E}}$. À $f \in \text{Hom}_{\text{Perf}}(\text{Spa}(A, A^+), Y_{\tilde{E}})$, on associe la famille des $(g_\alpha \circ f)_\alpha \in X_{\tilde{E}}(\text{Spa}(A, A^+))$. Réciproquement, pour une famille $(f_\alpha)_\alpha$, l'image de chaque ϖ_α appartient à $A^{\circ\circ}$ ce qui permet de compléter (ϖ) -adiquement et localiser $\otimes f_\alpha$ en un morphisme $f : \text{Spa}(A, A^+) \rightarrow \text{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. Or,

$$\forall |\cdot| \in \text{Spa}(A, A^+), \alpha \in \Delta, f(|\cdot|)(\varpi_\alpha)^n = |f_\alpha(\varpi_\alpha)|^n \rightarrow 0$$

puisque $f_\alpha(\varpi_\alpha) \in A^{\circ\circ}$. Ainsi, f se factorise par $Y_{\tilde{E}}$. Nous laissons les lecteurs et lectrices vérifier que les deux applications tout juste définies sont inverses l'une de l'autre.

14. En effet, puisque tous les ϖ_β sont inversibles dans \tilde{F}_Δ les conditions $|\varpi_\beta| \neq 0$ peuvent être sous-entendues. De plus, les ϖ_α^m engendrent un idéal ouvert de \tilde{F}_Δ^+ , de type fini.

15. N'oublions pas que ϖ_α est une pseudo-uniformisante pour \tilde{E}_α . Attention au fait que la première application de cette composée n'est pas continue puisque ϖ_α n'est pas topologiquement nilpotente dans \tilde{E}_Δ .

L'action sur $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ se retreint-corestreint à $Y_{\tilde{E}}$ puisque $(\varphi_{\alpha,q}^{n_\alpha})_\alpha(U_m) \subset U_{m+q \max |n_\alpha - n_\beta|}$. L'action de $\varphi_{\alpha,q}$ s'identifie à celle sur $X_{\tilde{E}}$: cette dernière est caractérisée par la commutation des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) & \xrightarrow{\varphi_q \text{ si } \beta=\alpha \text{ et Id sinon}} & \mathrm{Spd}(\tilde{E}_\beta, \tilde{E}_\beta^+) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_{\tilde{E}} & \xrightarrow{\varphi_{\alpha,q}} & X_{\tilde{E}} \end{array}$$

□

Remarque 2.52. Le lemme précédent retrouve, dans le cas de $X_{\tilde{E}}$, qu'un produit d'affinoïdes est un diamant union strictement croissante d'affinoïdes perfectoides.

Lemme 2.53. *Considérons les morphismes d'anneaux*

$$\tilde{E}_\Delta \rightarrow H^0\left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}\right)$$

et

$$\tilde{E}_\Delta^+ \rightarrow H^0\left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+\right).$$

Le deuxième est injectif et ϖ_Δ -presque surjectif. En particulier, le premier morphisme est injectif.

Démonstration. Voir [CKZ21, Proposition 4.27].

□

Remarque 2.54. Les deux derniers lemmes terminent de justifier notre définition de \tilde{E}_Δ et sa topologie. Le Lemme 2.51 fonctionnerait pour la complétion ϖ_Δ -adique du produit tensoriel à la place de \tilde{E}_Δ^+ . Cela signifie que notre espace $X_{\tilde{E}}$ possède deux épaissements affinoïdes, le plus petit étant $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. Les points supplémentaires de l'autre épaissement correspondent par exemple aux valuations ϖ_α -adiques. Il semblerait raisonnable de les considérer mais ce second épaissement est un peu trop gros et le Lemme 2.53 ne fonctionnerait plus. Il est donc important de compléter (ϖ) -adiquement dans la définition de \tilde{E}_Δ .

En revanche, comme nous l'avons déjà évoqué à la Remarque 2.4, équiper \tilde{E}_Δ^+ de sa topologie ϖ_Δ -adique est primordial pour lui associer un espace perfectoïde.

Définition 2.55. Grâce à la Proposition 2.50, le produit fibré

$$Z_D := Y_{\tilde{E}} \times_{\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)} \mathrm{Spd}(S_D, S_D^+)$$

est un objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Soit \bar{y} un point géométrique de $Y_{\tilde{E}}$. Le lemme de Drinfeld équipe l'ensemble fini $V_{\tilde{E}}(D) := |Z_D \times_{Y_{\tilde{E}}} \bar{y}|$ d'une action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$.

Lemme 2.56. *Le diamant Z_D possède une structure canonique d'objet en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels dans $\mathrm{F\acute{E}t}(X_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q'})$. L'ensemble $V_{\tilde{E}}(D)$ appartient canoniquement à $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$.*

Démonstration. Chaque $(T \otimes_{\tilde{E}_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r} = \mathrm{Id}}$ est muni d'une structure de \mathbb{F}_r -espace vectoriel naturelle en T . Cela munit S_D d'une structure naturelle de \tilde{E}_Δ -algèbre en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels. Puisque $\mathbb{F}_r \subset \tilde{E}_\Delta^{\Phi_{\Delta,q}}$, l'action de $\Phi_{\Delta,q}$ est \mathbb{F}_r -linéaire ce qui fait de $\mathrm{Spd}(S_D, S_D^+)$ un objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels. Nous en déduisons¹⁶ la structure sur Z_D par restriction à $Y_{\tilde{E}}$.

L'équivalence de catégorie entre $\mathrm{F\acute{E}t}(X_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$ et les $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -ensembles finis conclut pour $V_{\tilde{E}}(D)$. □

Proposition 2.57. *Supposons que $V_{\tilde{E}}(D)$ est isomorphe à la représentation triviale \mathbb{F}_r^d . Alors D est isomorphe à \tilde{E}_Δ^d dans $\mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$.*

Démonstration. Étape 1 : soit S_{base} la \tilde{E}_Δ -algèbre finie étale donnée par $\tilde{E}_\Delta[X]/(X^r - X)$ avec l'action semi-linéaire de $\Phi_{\Delta,q}$ qui laisse fixe la classe de X . Cette action fournit une structure d'objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ sur $\mathrm{Spd}(S_{\mathrm{base}}, S_{\mathrm{base}}^+)$. Nous notons Z_{base} sa restriction à $Y_{\tilde{E}}$ qui est encore un objet de $\mathrm{F\acute{E}t}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Remarquons que S_{base} est l'algèbre finie étale associée à $\tilde{E}_\Delta \in \mathcal{M}\mathrm{od}_{\mathrm{prj}}^{\mathrm{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\mathrm{gp}}, \tilde{E}_\Delta)$.

16. Considérer plutôt qu'une structure d'objet en espaces vectoriels est une famille de morphismes avec conditions pour le déduire.

Montrons que $\mathrm{Spd}(S_{\mathrm{base}}, S_{\mathrm{base}}^+)$, vu comme faisceau en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels sur $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$ est le faisceau constant associé à \mathbb{F}_r . Soit Z un objet connexe de $\mathrm{F\acute{E}t}(\mathrm{Spd}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+) \parallel \Phi_{\Delta,q})$. Un morphisme vers $\mathrm{Spd}(S_{\mathrm{base}}, S_{\mathrm{base}}^+)$ correspond à une section globale $\Phi_{\Delta,q}$ -invariante z de Z telle que $\prod_{a \in \mathbb{F}_r} (z - a) = 0$. Les sections $(z - a)$ engendrent deux à deux le faisceau d'idéaux structural \mathcal{O}_Z ; leur lieux d'annulation sont donc disjoints. De plus, leurs lieux d'annulations sont des fermés $\Phi_{\Delta,q}$ -stables. Par connexité, on en déduit que z appartient à \mathbb{F}_r . La décomposition des objets en union disjointe de composantes Γ -connexes montre qu'un morphisme vers $\mathrm{Spd}(S_{\mathrm{base}}, S_{\mathrm{base}}^+)$ correspond à une fonction à valeurs dans \mathbb{F}_r constante sur les composantes Γ -connexes. Par tiré en arrière, Z_{base} est encore le faisceau constant associé à \mathbb{F}_r et le Lemme 2.48 affirme alors que la représentation de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ obtenue grâce au lemme de Drinfeld est la représentation triviale sur \mathbb{F}_r .

Étape 2 : dans cette étape, nous cherchons à décrire S_D .

L'étape 1 montre que l'objet $\sqcup_d Z_{\mathrm{base}}$ dans la catégorie galoisienne $\mathrm{F\acute{E}t}(Y_{\tilde{E}} \parallel \Phi_{\Delta,q})$ à la représentation triviale \mathbb{F}_r^d . Ainsi, nous obtenons $Z_D \cong \sqcup_d Z_{\mathrm{base}}$ dans cette catégorie galoisienne. Bien que le terme de droite coïncide avec $Z_{\tilde{E}_\Delta^d}$, tout notre travail consiste à remonter cette identification à S_D puis à D . Nous venons de calculer $\mathrm{Spd}(S_D, S_D^+)_{|Y_{\tilde{E}}}$. Nous allons en déduire un calcul sur l'épaississement $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. Il s'agit de la partie la plus technique de la preuve.

Puisque S_D est finie étale, elle est plate et de présentation finie d'où l'existence d'une présentation comme module fini projectif : on se fixe une telle présentation sous la forme d'un isomorphisme de \tilde{E}_Δ -module

$$S_D \oplus M = \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j.$$

En localisant et complétant¹⁷, on obtient pour tout ouvert affine V de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_D & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} H^0(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}) e_j & \longrightarrow & H^0(V, \tilde{M}) \end{array}$$

où f désignera toujours le morphisme structural vers $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$. En passant à la limite ce diagramme sur la famille des ouverts U_m , on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_D & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} \tilde{E}_\Delta e_j & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(Y_{\tilde{E}}, f_* \mathcal{O}_{Z_D}) & \longrightarrow & \bigoplus_{j \leq N} H^0(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}) e_j & \longrightarrow & H^0(Y_{\tilde{E}}, \tilde{M}) \end{array}$$

Le Lemme 2.53 affirmant que le morphisme vertical central est injectif donc celui de gauche aussi. Dans la suite de la preuve, nous identifions les quatre modules du carré de gauche à des sous-modules les uns des autres. En inversant les rôles de S_D et M , le morphisme vertical de droite est également injectif. Le lemme du serpent affirme alors qu'un élément de $\varprojlim S_{D,m}$ appartient à S_D si et seulement si ses coordonnées dans la base e_j appartiennent à \tilde{E}_Δ .

Soit x une section $\Phi_{\Delta,q}$ -invariante de $H^0(Y_{\tilde{E}}, f_* \mathcal{O}_{Z_D})$ et prouvons qu'elle appartient à S_D .

Soit $\alpha \in \Delta$. Par définition de $Y_{\tilde{E}}$, pour tout $|\cdot| \in Y_{\tilde{E}}$, $\exists n, \forall \beta, |\varpi_\beta|^{q^n} \leq |\varpi_\alpha|$. Autrement dit, $\prod_{\beta \neq \alpha} \varphi_{\beta,q'}^n$ envoie $|\cdot|$ dans l'ouvert rationnel $U = \mathrm{Spa}(\tilde{F}_\Delta, \tilde{F}_\Delta^+) \left(\frac{\varpi_\alpha^2, \varpi_\beta}{\varpi_\alpha} \mid \beta \neq \Delta \right)$. Ce dernier est quasi-compact et contient donc un domaine fondamental. Sur le domaine U , l'écriture

$$\varpi_\alpha^{|\Delta|} = \varpi_\Delta \times \prod_{\beta \neq \alpha} \varpi_\beta / \varpi_\alpha$$

17. Ne pas oublier que la topologie sur S_D est la topologie initiale sur un module fini projectif.

illustre que ϖ_α est une pseudo-uniformisante. Nous fixons alors un entier k tel que

$$x|_U \in \varpi_\alpha^{-k} \sum H^0 \left(U, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right).$$

L'action du Frobenius absolu est triviale sur les points de $Y_{\tilde{E}}$; l'espace $Y_{\tilde{E}}$ est donc recouvert par les $\prod_{\beta \neq \alpha} \varphi_{\beta, q}^{n_\beta}(U)$. Prenons $\psi \in \Phi_{\Delta \setminus \{\alpha\}, q}$. L'invariance de x donne

$$x|_{\psi(U)} = (\psi(x))|_{\psi(U)} = \psi(x|_U)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} x_{\psi(U)} &\in \psi \left(\varpi_\alpha^{-k} H^0(U, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+) \right) \\ &\subseteq \varpi_\alpha^{-k} \sum H^0 \left(\psi(U), f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right) \end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne utilise le fait que $\varphi_{\alpha, q}$ n'apparaît pas dans ψ et se souvient que $\Phi_{\Delta, q, r}$ agit sur $\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)$ dans la catégorie des $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$ -espaces perfectoides (voir la discussion au début de la Proposition 2.50). Comme la topologie sur S_D est la topologie initiale, il se trouve que $S_D \cap (\sum_j \tilde{E}_\Delta^+ e_j)$ est ouvert et nous savons également que S_D^+ est borné; nous pouvons fixer m tel que

$$S_D^+ \subset \sum_j \varpi_\Delta^{-m} \tilde{E}_\Delta^+ e_j.$$

Pour tout ouvert affine V de $\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)$, nous avons encore

$$H^0 \left(V, f_* \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(S_D, S_D^+)}^+ \right) \subset \sum_j \varpi_\Delta^{-m} H^0 \left(V, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right) e_j.$$

Ainsi, les coordonnées de x dans la base (e_j) appartiennent à $\varpi_\alpha^{-k} \varpi_\Delta^{-m} H^0 \left(\psi(U), \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right)$ pour tout $\psi(U)$. En recollant, les coordonnées de x appartiennent donc à

$$\varpi_\Delta^{-(k+m)} H^0 \left(Y_{\tilde{E}}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)}^+ \right) \subset \varpi_\Delta^{-(k+m+1)} \tilde{E}_\Delta^+$$

grâce au lemme 2.53. Les coordonnées sont donc dans \tilde{E}_Δ , ce qui conclut.

Nous savons que

$$Z_D \cong \bigsqcup_d Z_{\mathrm{base}} = Y_{\tilde{E}} \times_{\mathrm{Spa}(\tilde{E}_\Delta, \tilde{E}_\Delta^+)} \mathrm{Spa} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} \tilde{E}_\Delta[X_i]/(X_i^r - X_i), \prod_{1 \leq i \leq d} \tilde{E}_\Delta[X_i]/(X_i^r - X_i)^+ \right).$$

Les X_i s'interprètent comme des sections globales $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$ -invariantes de Z_D . Tous les monômes en X_i sont des sections globales et $\Phi_{\Delta, q, r}^{\mathrm{gp}}$ -invariantes de Z_D et appartiennent donc à S_D . Elles vérifient les mêmes relations ce qui permet de déduire un isomorphisme de \tilde{E}_Δ -algèbres

$$S_D \cong \prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}.$$

Étape 3 : construisons une bijection de $V_{\tilde{E}}(D)$ dans $D^{\Phi_{\Delta, q, r}}$.

Grâce à l'isomorphisme de l'étape 2, il est possible d'écrire la suite de bijections suivantes :

$$\begin{aligned} V_{\tilde{E}}(D) &\cong \mathbb{F}_r^d \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\mathrm{base}}, \tilde{E}_\Delta \right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{E}_\Delta\text{-Alg}}(S_D, \tilde{E}_\Delta) \\ &\cong D^{\varphi_{\Delta, r} = \mathrm{Id}} \end{aligned}$$

Nous construisons le diagramme commutatif de \mathbb{F}_r -espaces vectoriels suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
D^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} & \xrightarrow{1 \otimes \text{Id}_{\tilde{E}_{\Delta}} \otimes \varphi_{\alpha,q,D}} & \left(\varphi_{\alpha,q}^* \tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D \right)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} & \xrightarrow{\quad} & D^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\text{base}}, \tilde{E}_{\Delta} \right) & \xrightarrow{\varphi_{\alpha,q}^*(\cdot) \circ \psi_{\alpha,q,\text{base}}} & \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\text{base}}, \varphi_{\alpha,q}^* \tilde{E}_{\Delta} \right) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}} \left(\prod_{1 \leq i \leq d} S_{\text{base}}, \tilde{E}_{\Delta} \right)
\end{array}$$

Le carré de gauche est issu des définitions à la Proposition 2.50. Le deuxième carré est donné par Yoneda. L'image d par la ligne supérieure devient $\varphi_{\alpha,q,D}(d)$. L'élément d est envoyé en bas à gauche sur un morphisme g tel que $g(X_i) \in \mathbb{F}_r$. Une application de cette forme est laissée fixe par la ligne inférieure. Ainsi, pour notre module, nous avons $D^{\Phi_{\Delta,q,r}} = D^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}}$.

Étape 4 : nous avons construit un isomorphisme \mathbb{F}_r -linéaire $\mathbb{F}_r^d \cong D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$. En tensorisant par \tilde{E}_{Δ} , nous obtenons un isomorphisme \tilde{E}_{Δ} -linéaire

$$\tilde{E}_{\Delta}^d \cong \tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$$

Sa post-composition par $\tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \rightarrow D$ est un morphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}, \tilde{E}_{\Delta})$ dont nous voulons prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Prouvons que $\tilde{E}_{\Delta} \otimes_{\mathbb{F}_r} D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \rightarrow D$ est injectif. Puisque \tilde{E}_{Δ} est intègre, cette injectivité se vérifie après tensorisation par $\text{Frac}(\tilde{E}_{\Delta})$. Soit alors $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i \otimes d_i$ dans le noyau de ce dernier morphisme, dont on suppose le nombre de termes non nuls minimal. Quitte à diviser par x_1 , nous pouvons supposer que $x_1 = 1$. L'identité $\sum x_i d_i = 0$ se transforme par application de $\varphi_{\Delta,r}$ en $d_1 + \sum_{2 \leq i \leq k} x_i^r d_i = 0$. En soustrayant, ceci implique que $\sum_{2 \leq i \leq k} (x_i - x_i^r) \otimes d_i$ est également dans le noyau. Par hypothèse de minimalité, tous les x_i valent x_i^r . Puisque $\text{Frac}(\tilde{E}_{\Delta})$ est un corps, ceci implique que tous les x_i sont des éléments de \mathbb{F}_r . La relation $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i d_i = 0$ originelle s'avère être une relation dans $D^{\Phi_{\Delta,q,r}}$, soit $\sum_{1 \leq i \leq k} x_i \otimes d_i = 0$.

Le résultat du paragraphe précédent est un morphisme injectif dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \tilde{E}_{\Delta})$ que nous notons $i : \tilde{E}_{\Delta}^d \hookrightarrow D$. L'identification de S_D à l'étape 2 affirme de plus que d est la dimension locale de D . Soit $z \in \tilde{E}_{\Delta}$ tel que $D[z^{-1}]$ est libre de rang d . L'action de $\varphi_{\Delta,r}$ s'étend à $\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}]$. Par extension des scalaires comme en [Mar24b, Proposition 3.3], nous obtenons un morphisme injectif dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}}, \tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}])$ de la forme

$$i_z : \left(\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}] \right)^d \hookrightarrow D[z^{-1}].$$

Posons \mathcal{B} une base de $D[z^{-1}]$ et $A \in \text{M}_d(\tilde{E}_{\Delta}[z^{-1}])$ la matrice de l'image de la base canonique par i_z dans \mathcal{B} . Soit également B la matrice de $\varphi_{\Delta,r,D[z^{-1}]}$ dans la base \mathcal{B} . Puisque i_z est $\varphi_{\Delta,r}$ -équivariante, son image est stable par $\varphi_{\Delta,r,D[z^{-1}]}$ et l'image de la base canonique est formé d'éléments invariants. Matriciellement, cela se traduit par $B\varphi(A) = A$ dans $\text{M}_d(\tilde{E}_{\Delta})$. En termes de déterminant, cela implique que $\det(B) \det(A)^r = \det(A)$. Puisque i_z est injective, son déterminant est non nul. Par intégrité de \tilde{E}_{Δ} , on en déduit que $\det(A)$ est inversible dans \tilde{F}_{Δ} , d'inverse $\det(B) \det(A)^{r-2}$. On en déduit que l'image de i_z engendre $D[z^{-1}]$. Autrement dit que i_z est un isomorphisme. Par conséquent, le morphisme i est un isomorphisme ce qui conclut. \square

Nous démontrons à présent le théorème au centre de toutes les équivalences de cet article. Pour ce faire, nous utilisons la discussion qui précède pour toutes les extensions finies de \tilde{E} .

Théorème 2.58. *Pour tout objet D de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$, le morphisme de comparaison*

$$\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \tilde{\nabla}_{\Delta}(D) \rightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons encore la notation $V_{\tilde{E}}$ puisqu'il nous faut absolument garder en mémoire le corps de base sur lequel nous travaillons. Pour toute extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ et q' associé, nous appellerons dans cette preuve $\text{Ex}_{\tilde{F}}$ le foncteur défini en [Mar24b, Définition 3.2] pour le groupe $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ et le morphisme d'anneaux $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{F}_{\Delta}$ du Lemme 2.7. Nous appellerons également dans cette preuve $\text{Ex}_{\tilde{F},q}$ l'analogue pour le groupe $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ et le morphisme d'anneaux $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}$.

Étape 1 : soit \tilde{F} une extension finie de \tilde{E} . Nous commençons par montrer que l'extension des scalaires $\text{Ex}_{\tilde{F}}$ correspond à un foncteur d'oubli. Plus précisément, soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$. Montrons que

$$\text{V}_{\tilde{F}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong \text{V}_{\tilde{E}}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}}.$$

Pour toute \tilde{F}_{Δ} -algèbre T , nous avons la suite de bijections naturelles suivante :

$$\begin{aligned} (T \otimes_{\tilde{F}_{\Delta}} \text{Ex}_{\tilde{F}}(D))^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} &\cong (T \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \\ &\cong \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}\text{-Alg}}(S_D, T) \\ &\cong \text{Hom}_{\tilde{F}_{\Delta}\text{-Alg}}(\tilde{F}_{\Delta} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} S_D, T) \end{aligned}$$

Ainsi, la \tilde{F}_{Δ} -algèbre finie étale $S_{\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)}$ s'identifie $\tilde{F}_{\Delta} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} S_D$. Cette identification est compatible à l'action de $\Phi_{\Delta,q'}^{\text{gp}}$ et à la structure de \mathbb{F}_r -espace vectoriel. En restreignant à $Y_{\tilde{F}}$, on obtient

$$\begin{aligned} Z_{\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)} &= Y_{\tilde{F}} \times_{Y_{\tilde{E}}} \left(Y_{\tilde{E}} \times_{\text{Spa}(\tilde{E}_{\Delta}, \tilde{E}_{\Delta}^+)} \text{Spa}(S_D, S_D^+) \right) \\ &= Y_{\tilde{F}} \times_{Y_{\tilde{E}}} Z_D \end{aligned}$$

en tant qu'objet en \mathbb{F}_r -espaces vectoriels de $\text{FÉt}(Y_{\tilde{F}} | \Phi_{\Delta,q'})$. La Proposition 2.43 conclut que

$$\text{V}_{\tilde{F}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong \text{V}_{\tilde{E}}(D)|_{\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}}.$$

Étape 2 : prenons toujours D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta})$ et fixons d son rang. Considérons une extension finie $\tilde{F}|\tilde{E}$ telle que l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{F},\Delta}$ de la $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$ -représentation lisse $\text{V}_{\tilde{E}}(D)$ est triviale. D'après la première étape, cela signifie que la représentation $\text{V}_{\tilde{F}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D))$ est triviale. Puisque $\text{Ex}_{\tilde{F}}$ préserve le rang, la première étape fournit un isomorphisme dans $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta})$ entre \tilde{F}_{Δ}^d et $\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)$.

La Proposition A.13 démontre que

$$\tilde{F}_{\Delta,q} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_{\Delta}).$$

En appliquant [Mar24b, Lemma 3.13] pour $R = \tilde{F}_{\Delta,q}$, $T = \tilde{F}_{\Delta}$, $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}} < \Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ d'indice fini et i la projection sur la coordonnée du neutre, nous obtenons un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta,q})$

$$\text{Ex}_{\tilde{F},q}(D) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)),$$

puis une suite d'isomorphismes dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{F}_{\Delta,q})$

$$\text{Ex}_{\tilde{F},q}(D) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\text{Ex}_{\tilde{F}}(D)) \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_{\Delta}^d) \cong \tilde{F}_{\Delta,q}^d.$$

En particulier, en étendant des scalaires à $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$, nous obtenons un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})$ entre $(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} D)$ et $(\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}})^d$. Le caractère isomorphe du morphisme de comparaison découle¹⁸ du Corollaire 2.13. \square

18. On démontre un isomorphisme uniquement algébriquement, puisque l'on ne s'est pas fatigués à s'occuper de l'action de $\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$. Comme le morphisme de comparaison est automatiquement équivariant et ne dépend pas ensemblistement de l'action galoisienne, cela suffit.

2.3 Construction du foncteur pleinement fidèle \mathbb{D}_Δ modulo p

Dans cette section et la suivante, nous cherchons à déperfectoïdiser notre équivalence. Nous fixons E un corps de caractéristique p , de valuation discrète et complet pour cette valuation, tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans son corps résiduel k est de cardinal fini q . En fixant X une uniformisante, nous savons que E est isomorphe à $k((X))$. Définissons également \tilde{E} le complété de la clôture radicielle de E . C'est un corps perfectoïde et nous pouvons le décrire par

$$\tilde{E} = \left(\bigcup_{n \geq 0} k[[X^{q^{-n}}]] \right)^{\wedge X} \left[\frac{1}{X} \right]$$

que l'on nomme traditionnellement $k((X^{q^{-\infty}}))$. Les théories de Galois de E et de \tilde{E} étant identiques, nous cherchons à obtenir une équivalence de Fontaine pour $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}$ à partir de l'équivalence perfectoïde précédente, tout en obtenant des anneaux de coefficients imparfaits plus aisément manipulables du côté des φ -modules.

Nous nous plaçons dans le contexte de la section 2.1 pour le corps \tilde{E} , avec X comme choix de pseudo-uniformisante. En fixant \tilde{E}^{sep} , nous fixons aussi une clôture séparable E^{sep} de E . Nous imitons dans la suite les définitions de la section 2.1, ce qui nous épargne des preuves identiques.

Définition 2.59. Soit $E^{\text{sep}}|F|E$ une extension finie. Nous définissons

$$F_{\Delta,q}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} F_\alpha^+ \right)^{\wedge (\underline{X})}$$

$$F_{\Delta,q} := F_{\Delta,q}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right].$$

Trois topologies seront utilisées pour ces deux anneaux respectivement pour le considérer comme coefficients de catégories de φ -modules, comme coefficients d'une catégories de (φ, Γ) -modules et pour un raisonnement fin à la section suivante. Sur $F_{\Delta,q}^+$ ces trois topologies sont respectivement la topologie discrète, la topologie X_Δ -adique et la topologie (\underline{X}) -adique. Sur $F_{\Delta,q}$, ce sont la topologie discrète, la topologie d'anneau ayant pour base de voisinages de 0 la famille $(X_\Delta^n F_{\Delta,q}^+)_{n \geq 0}$ que nous appelons *topologie adique* et la topologie colimite des topologies (\underline{X}) -adiques que nous appelons *topologie colimite*.

Le produit tensoriel des F_α^+ est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique pour la topologie (\underline{X}) -adique, l'élément $\varphi_{\alpha,q}$ agissant par le q -Frobenius arithmétique sur F_α^+ et l'identité sur les F_β^+ et l'élément $\varphi_{\Delta,r}$ agissant par le r -Frobenius arithmétique. En complétant, on obtient une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}^+$ pour chacune des trois topologies. Après localisation, elle fournit une structure $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}$ pour chacune des trois topologies ci-dessus.

Lorsque $E^{\text{sep}}|F|E$ est finie galoisienne, l'action de \mathcal{G}_E sur F^+ est \mathbb{F}_q -linéaire, continue pour les topologies discrète et X -adique, et commute au Frobenius. L'action de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ facteur par facteur sur le produit tensoriel des F_α^+ se complète en une action sur $F_{\Delta,q}^+$ continue en particulier pour les topologies discrètes et adique, et commutant à l'action de $\Phi_{\Delta,q,r}$. Nous obtenons donc deux structures de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}^+$. En localisant, nous obtenons deux structures de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique sur $F_{\Delta,q}$.

Remarque 2.60. Nous avons annoncé que dans le cadre de cette section, nous pouvions décrire explicitement les anneaux perfectoïdes et les anneaux imparfaits. Commençons par les anneaux perfectoïdes. Nous décrivons \tilde{E}^+ comme

$$\tilde{E}^+ = \left\{ \sum_{d \in \mathbb{N}[q^{-1}]} a_d X^d \mid \begin{array}{l} (a_d) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{N}[q^{-1}]} \text{ telle que} \\ \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{d \leq r \mid a_d \neq 0\} \text{ est fini.} \end{array} \right\}.$$

Nous obtenons que

$$\tilde{E}_\Delta^+ = \left\{ \sum_{\underline{d} \in (\mathbb{N}[q^{-1}])^\Delta} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta} \text{ tel que} \\ \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{\underline{d} \mid \sum d_\alpha \leq r, \text{ et } a_{\underline{d}} \neq 0\} \text{ est fini} \end{array} \right\}.$$

Pour cet anneau perfectoïde, notons que les complétions (\underline{X}) -adiques et (X_Δ) -adiques du produit tensoriel ne coïncident même pas algébriquement : à deux variables par exemple, l'élément $\sum_n X_\alpha^{q^{-n}} X_\beta^{q^n}$ appartient à la complétion (X_α, X_β) -adique mais pas à la complétion $X_{\{\alpha,\beta\}}$ -adique.

Pour comprendre de manière graphique les complétions pour deux variables, nous représentons une série par une famille de points dans une grille labellisés par les coefficients correspondants. Par exemple, la représentation du polynôme

$$Q = X_\alpha^{1/q} X_\beta - X_\alpha X_\beta^{2+1/q+1/q^2} - X_\alpha^{1+1/q^2} X_\beta^{1+1/q^2} + X_\alpha^{1+1/q+1/q^2} X_\beta^{1/q^2} + X_\alpha^{2+1/q} X_\beta^{3+1/q}$$

est illustré comme suit.

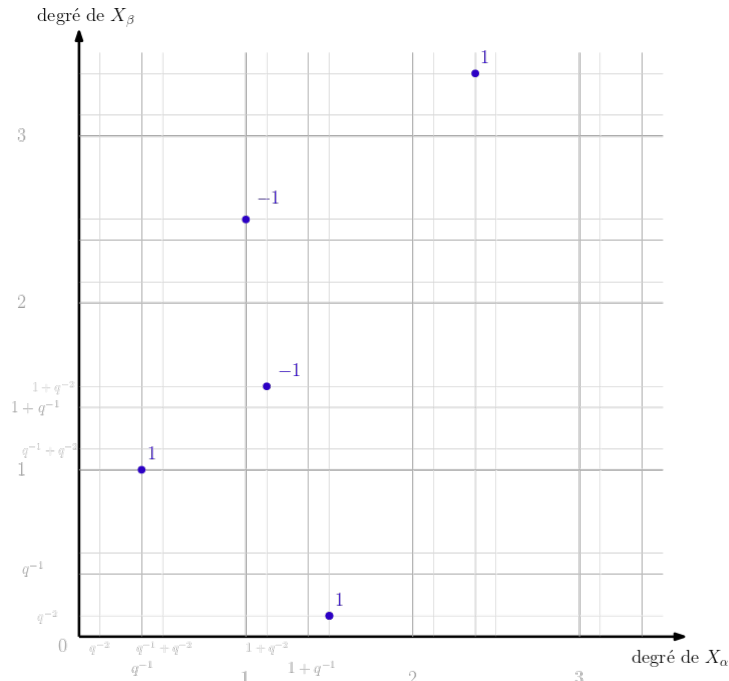
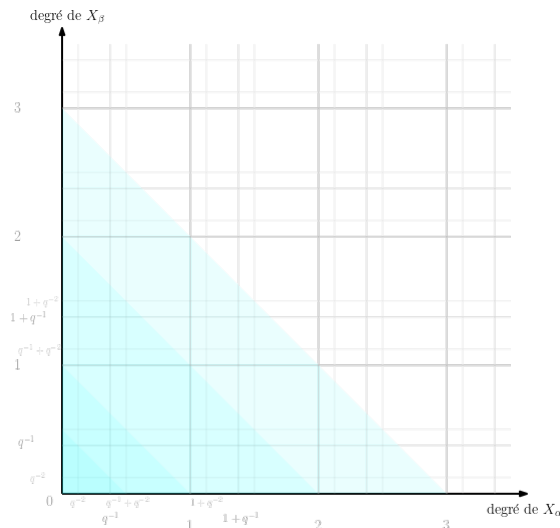


FIGURE 1 – Représentation du polynôme Q sur la grille pour $q = 3$

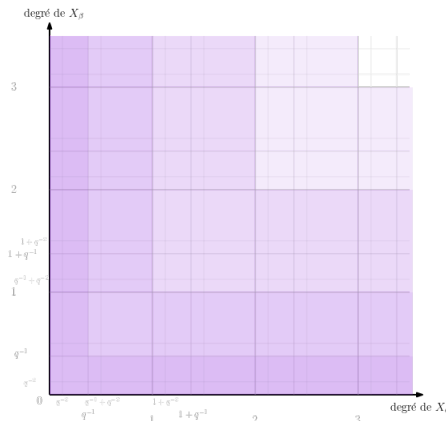
Un élément de la complétion (X_α, X_β) -adique possède une représentation telle que son intersection avec toutes les zones triangulaires¹⁹ coïncide avec la représentation d'un élément de $\widetilde{E}_\alpha^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \widetilde{E}_\beta^+$.



Cela signifie exactement que l'intersection avec toute zone triangulaire ne contient qu'un nombre fini de points.

19. Les zones triangulaires correspondent à des quotients par $I_{n,\Delta}$. De manière équivalente, nous pourrions considérer les quotients par $(\underline{X})^n$ et obtenir des zones carrées

De manière analogue, un élément de la complétion $X_\alpha X_\beta$ -adique possède une représentation telle que son intersection avec chaque zone en L provient de la représentation d'un élément de $\tilde{E}_\alpha^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{E}_\beta^+$.



ce qui revient à choisir une représentation telle que l'intersection avec toute partie rectangulaire verticale d'une zone en L ne contient qu'un nombre fini d'abscisses, que sur les droites correspondant à ces abscisses la représentation soit d'intersection finie avec tout compact, et la condition analogue pour les parties rectangulaires horizontales et les ordonnées.

Ceci nous permet de comprendre pourquoi $\sum_{n \geq 0} X_\alpha^{q^{-n}} X_\beta^{q^n}$ appartient à une complétion mais pas à l'autre via sa représentation :

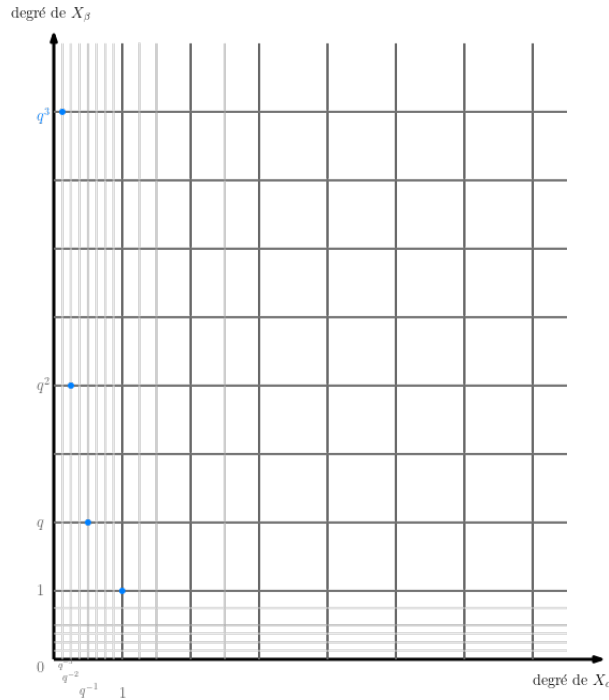


FIGURE 2 – Représentation de $\sum_{n \geq 0} X_\alpha^{q^{-n}} X_\beta^{q^n}$ pour $q = 2$

En inversant X_Δ , nous pouvons écrire

$$\tilde{E}_\Delta = \left\{ \sum_{\underline{d} \in (\mathbb{Z}[q^{-1}])^\Delta} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{Z}[q^{-1}]^\Delta} \text{ tel que} \\ \forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \{ \underline{d} \mid \sum d_\alpha \leq r, \text{ et } a_{\underline{d}} \neq 0 \} \text{ est fini et que} \\ \exists N > 0, \forall \underline{d}, \forall \alpha, a_{\underline{d}} \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

De manière similaire, nous obtenons

$$E_\Delta = \left\{ \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^\Delta} a_{\underline{d}} X^{\underline{d}} \mid \begin{array}{l} (a_{\underline{d}}) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k \right)^{\mathbb{Z}^\Delta} \text{ tel que} \\ \exists N > 0, \forall \underline{d}, \forall \alpha, a_{\underline{d}} \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

Remarquons que dans le cas imparfait, les complétions (\underline{X}) - et X_Δ -adiques coïncident algébriquement puisque la finitude de l'intersection avec chaque zone triangulaire implique la condition sur les zones en L .

Toute extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$ s'écrit $l((Y))$ pour une uniformisante Y et une extension finie $l|k$ ce qui fournit une description semblable de $\tilde{F}_{\Delta,q}$ et $F_{\Delta,q}$ en remplaçant \underline{X} par \underline{Y} et $(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} k)$ par $(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} l)$.

Cette description explicite nous fournit également sans argument technique une famille d'injections $F_{\Delta',q} \hookrightarrow F_{\Delta,q}$ pour $\Delta' \subseteq \Delta$.

Nous pouvons faire le lien entre les anneaux perfectoides et imparfaits.

Lemme 2.61. *Pour toute extension finie galoisienne $E^{\text{sep}}|F|E$ nous appelons $\tilde{F} = \tilde{E}F$ l'extension finie galoisienne de \tilde{E} associée.*

Il existe une injection de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux $F_{\Delta,q}^+ \hookrightarrow \tilde{F}_{\Delta,q}^+$ naturelle en F .

Pour toute famille finie de multi-indices $(\underline{d}_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{N}^\Delta)^n$, l'image réciproque de l'idéal $(X^{\underline{d}_i})$ est engendrée par les mêmes éléments.

Démonstration. Construire l'application et calculer les images réciproques des idéaux s'obtient à partir de la description de nos anneaux à la Remarque 2.60. Nous vérifions que l'application construite coïncide avec le produit tensoriel des injections $F_\alpha^+ \hookrightarrow \tilde{F}_\alpha^+$, complété et localisé. L'équivariance et la naturalité découlent de cette seconde construction. \square

Corollaire 2.62. 1. *Les anneaux $F_{\Delta,q}^+$ sont réduits et sans E_Δ^+ -torsion. Il en découle que l'application $F_{\Delta,q}^+ \rightarrow F_{\Delta,q}$ est injective, que $F_{\Delta,q}$ est réduit et sans E_Δ -torsion. En particulier, l'anneau E_Δ est intègre.*

2. *Soit Gal_E la catégorie des extensions finies galoisiennes de E dans E^{sep} avec les inclusions pour morphismes. La construction*

$$F \mapsto F_{\Delta,q}$$

où l'on met la topologie discrète est canoniquement un foncteur de Gal_E vers la catégorie des $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques. Tous les morphismes déduits sont injectifs. De plus, localiser les injections du Lemme 2.61 fournit une transformation naturelle vers le foncteur du Lemme 2.7.

Définition 2.63. Définissons les $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux

$$E_{\Delta}^{\text{sep},+} = \text{colim}_{F \in \text{Gal}_E} F_{\Delta,q}^+ \quad \text{et} \quad E_{\Delta}^{\text{sep}} = \text{colim}_{F \in \text{Gal}_E} F_{\Delta,q}.$$

Nous pourrions munir ce dernier de la topologie discrète ou de la topologie adique, ayant pour base de voisinages de 0 les $(X_\Delta^n E_{\Delta}^{\text{sep},+})_{n \geq 0}$. Les deux fournissent une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique. Nous n'utilisons que la topologie discrète dans cette section.

Lemme 2.64. *Pour toute extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, le morphisme canonique*

$$E_{\alpha}^{\text{sep}} \otimes_{F_{\alpha}} \left(E_{\beta}^{\text{sep}} \otimes_{F_{\beta}} \cdots (E_{\delta}^{\text{sep}} \otimes_{F_{\delta}} F_{\Delta,q}) \right) \rightarrow E_{\Delta}^{\text{sep}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ -équivariant.

Démonstration. Identique au Lemme 2.12, les presque mathématiques en moins. En effet, le F^+ -module F'^+ est libre de rang fini pour toute extension finie $F'|F$ ce qui donne même un isomorphisme

$$F_{\alpha}^{\prime+} \otimes_{F_{\alpha}^+} \left(F_{\beta}^{\prime+} \otimes_{F_{\beta}^+} \cdots (F_{\delta}^{\prime+} \otimes_{F_{\delta}^+} F_{\Delta,q}^+) \right) \rightarrow F_{\Delta,q}^{\prime+}.$$

\square

Corollaire 2.65. *Nous obtenons que :*

1. *L'anneau E_{Δ}^{sep} est réduit et sans E_{Δ} -torsion.*
2. *L'inclusion $E_{\Delta} \subseteq (E_{\Delta}^{\text{sep}})^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$ est une égalité.*
3. *Pour tout objet D de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$, le morphisme de comparaison*

$$E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}} \text{Inv}(D) \rightarrow D$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Identique à la Proposition 2.9 et au Corollaire 2.13. \square

Définition/Proposition 2.66. Le foncteur

$$\mathbb{D}_\Delta : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta), \quad V \mapsto (E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V)^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$$

est correctement défini, pleinement fidèle et son image essentielle est incluse dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée. Le foncteur \mathbb{D}_Δ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Identique à la Proposition 2.14, mise à part la pleine fidélité que nous n'avons alors pas traitée. Soit $V_1, V_2 \in \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}$. En utilisant la commutation naturelle de \mathbb{D}_Δ au Hom interne puis l'isomorphisme de comparaison pour $\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2)$, nous obtenons des isomorphismes dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$

$$E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2)) \xleftarrow{\sim} E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{E_\Delta} \mathbb{D}_\Delta(\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2)) \xrightarrow{\sim} E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} \underline{\text{Hom}}(V_1, V_2).$$

Calculons les invariants par $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$. À gauche en utilisant [Mar24b, Proposition 3.10] pour $\mathcal{G}_{E,\Delta}$, la E_Δ -algèbre sans torsion²⁰ E_Δ^{sep} et le E_Δ -module fini projectif $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2))$. À droite, le Corollaire 2.16 couplé à l'injection $E_\Delta^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^{\text{sep}}$ donne $\mathbb{F}_r = (E_\Delta^{\text{sep}})^{\Phi_{\Delta,q,r}}$; on applique ensuite [Mar24b, Proposition 3.10] à l'inclusion $\mathbb{F}_r \subset E_\Delta^{\text{sep}}$. On obtient

$$\text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}}(V_1, V_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)}(\mathbb{D}_\Delta(V_1), \mathbb{D}_\Delta(V_2))$$

et l'on vérifie qu'il s'agit de l'application donnée par functorialité²¹. □

2.4 Équivalence de Fontaine multivariable modulo p pour certains corps de caractéristique p

Il reste à démontrer que \mathbb{D}_Δ est essentiellement surjectif et à expliciter son quasi-inverse. À dessein, nous avons commencé par l'équivalence de Fontaine perfectoïde pour pouvoir en déduire des propriétés de \mathbb{D}_Δ .

Définition 2.67. Appelons $\tilde{\text{Ex}} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta) \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \tilde{E}_\Delta)$ le foncteur obtenu à partir de l'inclusion de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneaux du Lemme 2.61 en suivant [Mar24b, Proposition 3.3 1.].

La stratégie consiste à démontrer que $\tilde{\mathbb{D}}_\Delta \cong \tilde{\text{Ex}} \circ \mathbb{D}_\Delta$ puis que $\tilde{\text{Ex}}$ est pleinement fidèle. Grâce à la commutation au Hom interne [Mar24b, Proposition 3.3 3.], il suffit de démontrer que

$$\forall D \in \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta), \quad D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \cong \tilde{\text{Ex}}(D)^{\Phi_{\Delta,q,r}}.$$

Rappelons brièvement la stratégie de preuve de ce énoncé dans le cas univariable. Soit $d \in (\tilde{E} \otimes_E D)^{\varphi=\text{Id}}$ que l'on écrit $d = \sum x_i e_i$ pour une E -base (e_i) de D . Nous munissons $(\tilde{E} \otimes_E D)$ de son unique structure de \tilde{E} -espace vectoriel topologique pour la topologie adique sur \tilde{E} . Quitte à choisir correctement la base, nous pouvons supposer que

$$\left(\bigoplus X \tilde{E}^+ e_i \right) \subset (\tilde{E} \otimes_E D)^{++} := \{d \in \tilde{E} \otimes_E D \mid \varphi_D^n(d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

et que $(\bigoplus E^+ e_i)$ est stable par φ_D . Pour N assez grand, on peut écrire $\varphi_D^N(x_i) \in E + X \tilde{E}^+$. Nous en déduisons que

$$d = \varphi_D^N(d) = \sum \varphi_D^N(x_i) \varphi_D^N(e_i) \in D + (\tilde{E} \otimes_E D)^{++}.$$

En appliquant φ_D^n pour n arbitrairement grand on en déduit que d est dans l'adhérence de D , i.e. dans D .

Dans le cas multivariable, la topologie adique sur \tilde{E}_Δ ne permet pas de décaler la preuve. En effet, si l'on considère $x = \sum_{n \geq 0} X_\alpha^{q^n + q^{-n}}$, aucun $\varphi_{\Delta,q}^N(x)$ n'appartient à $E_\Delta + X_\Delta \tilde{E}_\Delta^+$. Il faut considérer la topologie colimite, malgré son apparence tarabiscotée.

Lemme 2.68. *Le sous-anneau E_Δ est fermé dans \tilde{E}_Δ muni de la topologie colimite.*

20. Nous utilisons les deux premiers points du Corollaire 2.65.

21. Cette identification de l'application est déjà contenu dans [Mar24b, Propositions 3.3].

Démonstration. Au niveau entier, utilisons la description de nos anneaux à la Remarque 2.60. Soit $x \in \widetilde{E}_\Delta^+ \setminus E_\Delta^+$. Il existe un monôme aX^d apparaissant dans x avec $d \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \setminus \mathbb{N}^\Delta$. Ce terme apparaît encore (\underline{X}) -adique localement, d'où l'on tire que E_Δ^+ est fermé dans \widetilde{E}_Δ^+ . Avec l'égalité $E_\Delta \cap X_\Delta^{-n} \widetilde{E}_\Delta^+ = X_\Delta^{-n} E_\Delta^+$ on fait le même raisonnement sur chaque terme de la colimite. \square

Lemme 2.69. Soient $R \subseteq T$ un sous-anneau fermé d'un anneau topologique T et D un R -module fini projectif. Puisque D est plat sur R , il est possible de voir D comme un sous-espace du T -module fini projectif $(T \otimes_R D)$. Le sous-espace D est fermé pour la topologie initiale.

Démonstration. Fixons une présentation $D \oplus D' = R^k$ de D . L'écriture $(T \otimes_R D) \oplus (T \otimes_R D') = T^k$ fournit une présentation de $(T \otimes_R D)$. Puisque $R \subseteq T$ est fermé, c'est encore le cas de $R^k \subseteq T^k$ avec les topologies produits. La topologie initiale sur $T \otimes_R D$ étant la topologie induite depuis T^k , on en déduit que $D = (T \otimes_R D) \cap R^k$ est fermé dans $T \otimes_R D$. \square

Proposition 2.70. Soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. L'inclusion

$$D^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}} \subseteq \widetilde{\text{Ex}}(D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}}$$

est une égalité.

Démonstration. Prenons $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ une famille génératrice de D et posons $A = (a_{i,j}) \in M_d(E_\Delta)$ une matrice de $\varphi_{\Delta,r,D}$ dans la famille (e_i) . Quitte à considérer la famille génératrice $(X_\Delta^n e_i)$, on A est à coefficients dans E_Δ^+ . Nous avons alors par récurrence immédiate

$$\forall N \geq 0, \quad \varphi_{\Delta,r}^N \left(\sum_i (\underline{X}) \widetilde{E}_\Delta^+ e_i \right) \subseteq \sum_i (\underline{X})^{r^N} \widetilde{E}_\Delta^+ e_i$$

En particulier

$$\sum_i (\underline{X}) \widetilde{E}_\Delta^+ e_i \subseteq (\widetilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{++} := \left\{ d \in (\widetilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D) \mid \begin{array}{l} \varphi_{\Delta,r,\widetilde{\text{Ex}}(D)}^n(d) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{pour la topologie initiale déduite de} \\ \text{la topologie colimite sur } \widetilde{E}_\Delta \end{array} \right\}.$$

Prenons à présent une écriture $d = \sum x_i e_i$ de $d \in (\widetilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{\varphi_{\Delta,r}=\text{Id}}$. Grâce à la description de la Remarque 2.60, nous savons que les monômes des x_i de degré total inférieur à 1 sont en nombre fini. En particulier, leurs dénominateurs sont des puissances de p divisant un certain r^N . Nous en déduisons

$$d = \varphi_{\Delta,r,\widetilde{\text{Ex}}(D)}^N(d) = \sum_i \varphi_{\Delta,r}^N(x_i) \varphi_{\Delta,r,D}^N(e_i) \in \left[D + \sum_i (\underline{X}) \widetilde{E}_\Delta^+ e_j \right] \subseteq \left[D + (\widetilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)^{++} \right].$$

Écrivons une telle décomposition $d = d_0 + d^{++}$. Alors,

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{\Delta,r,D}^n(d_0)$$

pour la topologie initiale associée à la topologie colimite sur \widetilde{E}_Δ . Les Lemmes 2.68 et 2.69 combinés démontrent que D est fermé dans $(\widetilde{E}_\Delta \otimes_{E_\Delta} D)$ pour la topologie initiale, d'où $d \in D$. \square

Nous en tirons le corollaire qui nous servira vraiment en prenant les invariants dans la Proposition 2.70.

Corollaire 2.71. Soit D un objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta)$. L'inclusion suivante est une égalité

$$D^{\Phi_{\Delta,q,r}} \subseteq \widetilde{\text{Ex}}(D)^{\Phi_{\Delta,q,r}}.$$

Nous identifions les deux catégories $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}, \widetilde{E}_\Delta)$ et $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, \widetilde{E}_\Delta)$ dans la suite..

Proposition 2.72. 1) Les foncteurs $\widetilde{\mathbb{D}}_\Delta$ et $\widetilde{\text{Ex}} \circ \mathbb{D}_\Delta$ sont isomorphes.

2) Le foncteur $\widetilde{\text{Ex}}$ est pleinement fidèle.

Démonstration. 1) Soit V un objet de $\text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}$. Considérons le morphisme d'anneaux $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -équivariant $E_{\Delta}^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ obtenu à partir de la Proposition 2.61. En tensorisant par V et passant aux invariants par $\mathcal{G}_{E,\Delta}$, il fournit une application E_{Δ} -linéaire et $\Phi_{\Delta,q,r}$ -équivariante $\mathbb{D}_{\Delta}(V) \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}(V)$, puis comme $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}(V)$ est un \tilde{E}_{Δ} -module, une transformation naturelle $S : \text{Ex} \circ \mathbb{D}_{\Delta} \Rightarrow \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$.

Puisque $\tilde{E}_{\Delta} \rightarrow E_{\Delta}^{\text{sep}}$ est fidèlement plat, nous vérifions qu'il s'agit d'un isomorphisme de foncteur après changement de base. La transformation naturelle entre foncteur au Corollaire 2.62 fournit l'isomorphisme de gauche du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} \left(\tilde{E}_{\Delta} \otimes_{E_{\Delta}} \mathbb{D}_{\Delta}(V) \right) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes S(V)} & \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\tilde{E}_{\Delta}} \tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}(V) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}^{\text{sep}}} \left(E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}} \mathbb{D}_{\Delta}(V) \right) & \longrightarrow & \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}^{\text{sep}}} \left(E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V \right) \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V \end{array}$$

où les flèches non labellisées sont les isomorphismes de comparaison déjà étudiés. Pour que $S(V)$ soit un isomorphisme, il suffit de vérifier la commutation du diagramme.

2) Soient D_1, D_2 deux objets de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_{\Delta})$. L'application donnée par $\tilde{\text{Ex}}$ au niveau des morphismes s'obtient selon [Mar24b, Proposition 3.5] en prenant les $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants de la composée

$$\text{Hom}_{E_{\Delta}}(D_1, D_2) \rightarrow \text{Ex}(\text{Hom}_{E_{\Delta}}(D_1, D_2)) \xrightarrow[\sim]{\iota_{D_1, D_2}} \text{Hom}_{\tilde{E}_{\Delta}}(\text{Ex}(D_1), \text{Ex}(D_2)),$$

où ι_{D_1, D_2} est construit dans [Mar24b, Lemme 2.14]. C'est un isomorphisme puisque D_1 est fini projectif. En passant aux invariants par $\Phi_{\Delta,q,r}$, le premier morphisme devient un isomorphisme d'après le Corollaire 2.71. \square

Lemme 2.73. *L'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq (E_{\Delta}^{\text{sep}})^{\Phi_{\Delta,q,r}}$ est une égalité.*

Démonstration. Combiner le résultat sur $\tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ au Lemme 2.16 et l'injection $E_{\Delta}^{\text{sep}} \hookrightarrow \tilde{E}_{\Delta}^{\text{sep}}$ obtenue en passant à la limite dans le Lemme 2.61. \square

Théorème 2.74. *Le foncteur*

$$\mathbb{D}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta} \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_{\Delta})$$

est une équivalence de catégories monoïdales fermées. Un quasi-inverse est donné par

$$\mathbb{V}_{\Delta} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_{\Delta}) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_r} \mathcal{G}_{E,\Delta}, \quad D \mapsto (E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}} D)^{\Phi_{\Delta,q,r}}.$$

Démonstration. Nous avons vu que $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta} \cong \tilde{\text{Ex}} \circ \mathbb{D}_{\Delta}$ en Proposition 2.72, que $\tilde{\mathbb{D}}_{\Delta}$ est une équivalence au Théorème 2.18 et que \mathbb{D}_{Δ} et $\tilde{\text{Ex}}$ sont pleinement fidèles aux Propositions 2.66 et 2.72. Cela suffit à prouver que \mathbb{D}_{Δ} est une équivalence de catégories.

Soit V une représentation. Nous avons prouvé en Proposition 2.66 un isomorphisme de comparaison naturel

$$E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta}} \mathbb{D}_{\Delta}(V) \xrightarrow{\sim} E_{\Delta}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_r} V.$$

En décomposant dans une \mathbb{F}_r -base de V , les $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants du terme de droite redonnent V . Passer aux invariants fournit donc un isomorphisme naturel

$$\mathbb{V}_{\Delta} \circ \mathbb{D}_{\Delta} \xrightarrow{\sim} \text{Id}.$$

\square

2.5 Dévissage vers une équivalence de Fontaine multivariable pour certains corps de caractéristique p

Dans cette section nous cherchons à démontrer une équivalence de Fontaine multivariable imparfaite pour des coefficients de caractéristique mixte. Nous fixons encore E un corps de caractéristique p , de valuation discrète, complet pour cette valuation, tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans son corps résiduel k est de cardinal fini q . Nous fixons également K une extension finie de \mathbb{Q}_p de corps résiduel de cardinal r tel que $q = r^f$. Soit $L = K\mathbb{Q}_q$. La lettre π dénote toujours une uniformisante de K , qui est également une uniformisante de L .

Nous fixons un ensemble fini Δ . Puisque $\mathbb{Q}_r = K \cap \mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$, il existe un r -Frobenius canonique sur L . L'action de $\Phi_{\Delta,q,r}$ sur \mathcal{O}_L par son quotient $\Phi_{\Delta,q,r}/\Phi_{\Delta,q} \cong \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}/f\mathbb{N}}$ fournit une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau topologique pour la topologie π -adique.

Nous fixons une famille $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha}^+$ de \mathcal{O}_L -algèbres π -adiquement séparées et complète, d'anneau résiduel en l'idéal π égal à E_α^+ et munies d'un relèvement semi-linéaire $\phi_{\alpha,r}$ du r -Frobenius sur E_α^+ . On notera toujours X_α une uniformisante de E_α ou un relevé dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha}$. Exactement comme dans la Proposition 1.12 et la Définition 1.12, on choisit des \mathcal{G}_{E_α} -anneaux $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\alpha^{\text{nr}}}}$ ainsi que leurs sous-anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}^+$ pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$. En appliquant [Stacks, Tag 08HQ] pour le r -Frobenius sur les corps résiduels, on peut étendre l'endomorphisme $\phi_{\alpha,r}$ en un endomorphisme \mathcal{O}_L -semi-linéaire de $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\alpha^{\text{nr}}}}$ qui stabilise chaque $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}$ et commute à l'action galoisienne.

Définition 2.75. On note alors

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}^+ \right)^{\wedge(\pi, X)} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta} = \left(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right] \right)^{\wedge \pi}.$$

Ces anneaux ne dépendent pas du choix de π ni de celui des X_α . Ce sont des \mathcal{O}_L -algèbres π -adiquement séparées et complètes d'anneaux résiduels en π $F_{\Delta,q}^+$ et $F_{\Delta,q}$.

Nous les munissons de deux topologies. D'abord de la topologie π -adique. Parallèlement, nous munissons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ de la topologie (π, X_Δ) -adique et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ de la topologie ayant pour base de voisinages de 0 les sous-groupes $(\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+)_{n,m \geq 0}$. Cette deuxième topologie sera appelée *topologie faible*.

Le produit tensoriel des $\phi_{\alpha,r}$ tous \mathcal{O}_L -semi-linéaires par rapport au r -Frobenius, les $\phi_{\alpha,r}^{\circ f}$ et l'action de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ terme à terme fournissent après complétion et/ou localisation une structure de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ pour chacune des deux topologies. Les injections depuis \mathcal{O}_L sont des morphismes de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneaux topologiques.

Définition 2.76. Nous définissons comme au Corollaire 2.62 deux diagrammes de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux dont nous définissons

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta^{\text{nr}}}}^+ := \left(\text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+ \right)^{\wedge \pi} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta^{\text{nr}}}} := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta^{\text{nr}}}}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right].$$

Nous munissons ce dernier anneaux de deux topologies d'anneau : la topologie π -adique et la topologie dont une base de voisinages de 0 est donnée par $(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta^{\text{nr}}}}^+ + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_\Delta^{\text{nr}}}})_{n,m \geq 0}$ que nous nommons topologie faible. Les deux fournissent une structure de $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau topologique. Dans cette section, nous ne nous servons que de la topologie π -adique.

Lemme 2.77. Nous avons $H^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta^{\text{sep}}) = \{0\}$.

Démonstration. La suite restriction-inflation et le résultat du Leme 2.16 pour $r = q$ donnent

$$0 \rightarrow H^1 \left(\varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}} / \varphi_{\Delta,q}^{\mathbb{N}}, \mathbb{F}_q \right) \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_\Delta^{\text{sep}}) \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta,q}, E_\Delta^{\text{sep}}).$$

La base normale de Hilbert affirme que \mathbb{F}_q est induit comme \mathbb{F}_r -module avec action de $\text{Gal}(\mathbb{F}_q|\mathbb{F}_r) = \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{N}}/\varphi_{\Delta,q}^{\mathbb{N}}$. Il est acyclique.

Pour analyser le terme de droite, nous avons besoin des deux résultats qui suivent.

Premier résultat : soit $\beta \in \Delta$. Il y a une égalité $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}} = (E_\Delta^{\text{sep}})^{\varphi_{\beta,q} = \text{Id}}$. Soit $F|E$ une extension finie que nous écrivons $l((Y))$ pour une certaine uniformisante Y et $l|k$. Selon la Remarque 2.60 nous pouvons décrire

$$F_{\Delta,q} = \left\{ \sum_{d \in \mathbb{Z}^\Delta} a_d Y^d \mid \begin{array}{l} (a_d) \in \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} l \right)^{\mathbb{Z}^\Delta} \text{ tel que} \\ \exists N > 0, \forall d, \forall \alpha, a_d \neq 0 \implies d_\alpha \geq -N \end{array} \right\}.$$

De cette description se déduit l'inclusion $F_{\Delta \setminus \{\beta\}, q} \subseteq F_{\Delta, q}^{\varphi_{\beta, q} = \text{Id}}$. Soit $x = \sum a_{\underline{d}} Y^{\underline{d}}$ non nul dans les invariants. Munissons \mathbb{Z}^{Δ} de l'ordre lexicographique par rapport à un ordre sur Δ de minimum β et considérons $d_{\min} = \min\{\underline{d} \mid a_{\underline{d}} \neq 0\}$. Le coefficient de $(qd_{\min, \beta}, d_{\alpha}, \dots)$ dans $\varphi_{\beta, q}(x)$ vaut $\varphi_{\beta, q}(a_{d_{\min}})$. Puisque $\varphi_{\beta, q}$ est injectif sur $(\otimes_{\mathbb{F}_q} l)$, c'est donc le degré minimal de $\varphi_{\beta, q}(x)$. Il en découle que $d_{\min, \beta} = 0$. Appelons

$$y = \sum_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^{\Delta \setminus \{\beta\}}} a_{(0, \underline{d})} Y^{(0, \underline{d})} \in F_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}.$$

Il se trouve que $x - y$ est encore invariant mais n'a aucune terme de degré en β nul. Nous obtenons donc $x - y = 0$ soit $x \in F_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}$.

Deuxième résultat : soit $\beta \in \Delta$. L'endomorphisme de $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}$ -espaces vectoriels $(\varphi_{\alpha, q} - \text{Id})$ est surjectif sur E_{Δ}^{sep} . Chaque polynôme $T^q - T - x$ étant scindé sur E_{β}^{sep} , nous savons que l'endomorphisme est inversible sur E_{β}^{sep} . Le Lemme 2.64 affirme en particulier que

$$E_{\beta}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\beta}} \left(E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta \setminus \{\beta\}}} E_{\Delta} \right) \cong E_{\Delta}^{\text{sep}}$$

ce qui permet de conclure.

Utilisation des résultats : nous choisissons $\beta \in \Delta$ et utilisons la suite exacte restriction-inflation pour $\varphi_{\beta, q}^{\mathbb{N}} < \Phi_{\Delta, q}$:

$$0 \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta \setminus \{\beta\}, q}, (E_{\Delta}^{\text{sep}})^{\varphi_{\beta, q} = \text{Id}}) \rightarrow H^1(\Phi_{\Delta, q}, E_{\Delta}^{\text{sep}}) \rightarrow H^1(\varphi_{\beta, q}^{\mathbb{N}}, E_{\Delta}^{\text{sep}}).$$

Le premier résultat identifie le terme de gauche à la cohomologie de $E_{\Delta \setminus \{\beta\}}^{\text{sep}}$. Par récurrence sur $|\Delta|$, on se ramène donc à démontrer que le terme de droite s'annule. Or, soit f un 1-cocycle. Les relations de cocycles imposent que

$$\forall n \geq 0, f(\varphi_{\beta, q}^n) = \sum_{0 \leq i < n} \varphi_{\beta, q}^{\circ i}(f(\varphi_{\beta, q})).$$

Ainsi, pour $(\varphi_{\beta, q} - \text{Id})(y) = f(\varphi_{\beta, q})$, qui existe grâce au deuxième résultat, le cocycle f est le cobord associé à y . \square

Lemme 2.78. La K-théorie de E_{Δ} vérifie $K_0(E_{\Delta}) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. Voir [Záb18b, Lemma 2.3]. \square

Théorème 2.79. Les foncteurs

$$\mathbb{D}_{\Delta} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E, \Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta, q, r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}), \quad V \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{G}_{E, \Delta}}$$

$$\mathbb{V}_{\Delta} : \mathcal{M}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{E, \Delta}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}} D \right)^{\Phi_{\Delta, q, r}},$$

où les topologies en jeu sont les topologies π -adiques, sont correctement définis et sont lax monoïdaux fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta, q, r}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E, \Delta}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. Démontrer la définition correcte et les propriétés sur leurs images essentielles se fait en décomposant les deux foncteurs comme aux Proposition 2.14 et 2.17. Nous appliquons pour chaque foncteur [Mar24b, Proposition 5.22] respectivement aux inclusions $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}}$, puis [Mar24b, Proposition 5.26] au $(\Phi_{\Delta, q, r} \times \mathcal{G}_{E, \Delta})$ -anneau $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}}$ muni de la topologie π -adique pour seule topologie respectivement pour les sous-monoïdes $\mathcal{G}_{E, \Delta}$ et $\Phi_{\Delta, q, r}$. Il nous faut pour cela vérifier plusieurs conditions que nous listons. Les deux premières vérifient que nous nous plaçons dans un cadre cohérent avec [Mar24b, Section 4]. La troisième justifie les utilisations de [Mar24b, Proposition 5.22]. Les suivantes vérifient les conditions multiples de [Mar24b, Proposition 5.26].

Condition 1 : les couples (π, \mathcal{O}_K) , $(\pi, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}})$ et $(\pi, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}})$ sont des contextes de dévissages (voir [Mar24b, Définition 4.1]).

Les anneaux sont par construction π -adiquement séparés et complets. Reste à démontrer qu'ils sont sans π -torsion. C'est évident pour \mathcal{O}_K . Le produit tensoriel des $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}^+$ est sans π -torsion puisque chacun des termes l'est, a fortiori sont complété et séparé. De même, en passant à la colimite puis en complétant, $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\Delta}^{\text{ur}}}}$ est sans π -torsion.

Condition 2 : pour chacun des trois anneaux, et chaque endomorphisme f dans l'action des monoïdes, les idéaux engendrés par $f(\pi)$ et π coïncident. Ici, π est même invariant par chaque action.

Condition 3 : les inclusions $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{ur}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{ur}}}$ soient π -adiquement continues et équivariantes. C'est le cas par construction.

Condition 4 : les anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{ur}}}^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\Delta}^{\text{ur}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}}$ coïncident respectivement avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}$ et \mathcal{O}_K . L'identification des topologies π -adiques (resp. l'égalité algébrique) s'obtient par dévissage (resp. et complétion) à partir de l'injectivité du morphisme modulo π (resp. d'une identification algébrique modulo π). C'est alors exactement l'injectivité dans le Corollaire 2.62 ou simplement la définition de la caractéristique (resp. les résultats du deuxième point du Corollaire 2.65 et du Lemme 2.16).

Condition 5 : les inclusions $E_{\Delta} \subset E_{\Delta}^{\text{sep}}$ et $\mathbb{F}_r \subset E_{\Delta}^{\text{sep}}$ sont fidèlement plates. La deuxième était déjà utilisée dans la Proposition 2.66 et est conséquence du Lemme 2.64.

Condition 6 : l'élément π est irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\Delta}}$ et \mathcal{O}_K . Cela équivaut à l'intégrité de E_{Δ} démontrée au Corollaire 2.62 et à celle de \mathbb{F}_r .

Condition 7 : nous avons $K_0(E_{\Delta}) = \mathbb{Z}$ et $K_0(\mathbb{F}_r) = \mathbb{Z}$. La première est démontrée au Lemme 2.78. De plus \mathbb{F}_r est un corps.

Condition 8 : la topologie π -adique a de bonnes propriétés de π -dévissage. C'est une remarque nous faisons dans [Mar24b, Exemple 5.27].

Condition 9 : les groupes de cohomologie de monoïdes $H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$ et $H_{\text{cont}}^1(\Phi_{\Delta,q,r}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$ s'annulent. Le deuxième équivaut à l'énoncé du Lemme 2.77 puisque tous les objets en jeu sont discrets. Pour le premier, nous utilisons le résultat du Lemme 2.64 pour des extensions finies. Comme nous l'avons déjà évoqué pour démontrer la descente galoisienne, cela implique par base normale de Hilbert que chaque $F_{\Delta,q}$ est un E_{Δ} -module induit pour l'action de $\prod \text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha})$, a fortiori acyclique. Nous en déduisons l'énoncé puisque

$$H_{\text{cont}}^1(\mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}}) := \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} H^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha}), (E_{\Delta}^{\text{sep}})^{\mathcal{G}_{F,\Delta}} \right) = \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} H^1 \left(\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(F_{\alpha}|E_{\alpha}), F_{\Delta,q} \right).$$

Condition 10 : les deux morphismes de comparaison sont des isomorphismes pour les objets de $\mathcal{M}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$. Le troisième point du Corollaire 2.65 prouve déjà l'isomorphisme de comparaison pour les invariants par $\mathcal{G}_{E,\Delta}$. Comme cela implique que l'extension des scalaires et la prise de $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ -invariants fournissent une équivalence de catégorie entre $\mathcal{M}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r}, E_{\Delta})$ et $\mathcal{M}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$, le Théorème 2.74 et la décomposition des deux foncteurs implique que l'extension des scalaires et la prise de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -invariants fournissent une équivalence de catégorie entre $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{E,\Delta}$ et $\mathcal{M}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$. Ceci contient en particulier l'autre isomorphisme de comparaison.

Une fois que nos deux foncteurs sont construits, démontrer qu'ils sont quasi-inverses l'un de l'autre se fait comme à la démonstration du Théorème 2.18 en passant aux invariants l'isomorphisme de comparaison et en utilisant [Mar24b, Proposition 4.16]. Ceci utilise la première partie du Corollaire 2.65 affirmant que E_{Δ}^{sep} est sans E_{Δ} -torsion. \square

2.6 Comment récupérer les équivalences de Carter-Kedlaya-Zábrádi ?

Dans les sections précédentes, deux versions des premières équivalences de Carter-Kedlaya-Zábrádi ont été démontrées. Précisément, le Théorème 2.18 pour $r = p$ fournit un analogue de [CKZ21, Théorème 4.6] où tous les corps sont identiques.

Les versions de ce texte ont plusieurs avantages. Nous avons conservé l'obtention d'une équivalence pour les corps de caractéristique p sans avoir besoin d'utiliser l'action supplémentaire de Γ ; c'est déjà un avantage de [CKZ21] par rapport à [Záb18b]. Enfin, ces équivalences, contrairement à celles de [CKZ21], considèrent des catégories de modules étales sur des anneaux *intègres* ; les sections précédentes utilisent d'ailleurs ces questions d'intégrité pour faire fonctionner différemment les preuves²². Cette section est consacrée à retrouver à partir de nos versions sur des anneaux intègres l'un des théorèmes de [CKZ21].

Le lien entre les équivalences de ce texte et celles de [CKZ21] repose sur le fait que les anneaux non intègres introduits par Carter-Kedlaya-Zábrádi sont coinduits à partir des anneaux intègres considérés dans ce texte, idée déjà présentes pour se ramener au cas intègre dans le Théorème 2.58. De surcroît, les sections précédentes illustrent que l'essentiel du travail consiste à obtenir une équivalence en modulo p pour des corps perfectoides. Le reste

²². Voir les preuves de la Proposition 2.57 puis celle du Théorème 2.58 qui s'en sert.

consiste à dévisser, passer à la limite, ajouter des actions, en bref tout un tas de joyeuseries qui s'adaptent pour obtenir l'équivalence de votre choix. Pour ne pas surcharger ce texte, on se contente de retrouver une version imparfaite de [CKZ21, Théorème 4.6] avec nos méthodes.

Nous continuons de fixer un corps E de caractéristique p , de valuation discrète, séparé complet pour cette valuation, et tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans le corps résiduel k est finie. La complétion de sa perfection est notée \tilde{E} .

Définition 2.80. En imitant les définitions 2.59 et 2.63 avec des produits tensoriels sur \mathbb{F}_p , nous définissons pour tout extension finie galoisienne $F|E$ les $(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques discrets

$$F_{\Delta,p}^+ := \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_p} F_\alpha^+ \right)^{\wedge(X)}, \quad F_{\Delta,p} := F_{\Delta,p}^+ \left[\frac{1}{X_\Delta} \right]$$

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} = \text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} F_{\Delta,p}.$$

Proposition 2.81. 1. Il existe un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,p}$ -anneaux topologiques discrets

$$E_{\Delta,p} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(E_\Delta),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

2. Il existe un isomorphisme de $(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques discrets

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}}^{\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}}(E_\Delta^{\text{sep}}),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

Démonstration. Reléguée à la Proposition A.19, sous une écriture simplifiée. □

Définition/Proposition 2.82. Le foncteur

$$\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{E,\Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p}), \quad V \mapsto \left(E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \right)^{\mathcal{G}_{E,\Delta}}$$

est correctement défini, pleinement fidèle et son image essentielle est incluse dans $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p})$. Cette dernière catégorie est une sous-catégorie pleine monoïdale fermée et $\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}}$ commute naturellement au produit tensoriel et au Hom interne.

Démonstration. Identique à la Proposition 2.66 en démontrant des analogues des lemmes qui la précèdent pour $E_{\Delta,p}^{\text{sep}}$. □

Une version imparfaite du Théorème 4.6 de [CKZ21], dans le cas où tous les corps perfectoides considérés sont isomorphes à \tilde{E} , se formule comme suit :

Théorème 2.83. Le foncteur

$$\mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} \rightarrow \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p})$$

est une équivalence de catégories monoïdales fermées. Un quasi-inverse est donné par

$$\mathbb{V}_{\Delta, \text{CKZ}} : \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p}) \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \quad D \mapsto \left(E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \otimes_{E_{\Delta,p}} D \right)^{\Phi_{\Delta,p}}.$$

Démonstration. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q,p}, E_\Delta) & \xrightarrow{\text{Coindu}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}} & \text{Mod}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p}) \\ \cup & & \cup \\ \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q,p}, E_\Delta) & \cdots \cdots \cdots \rightarrow & \text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p}) \\ \mathbb{D}_\Delta \uparrow \wr & \nearrow \mathbb{D}_{\Delta, \text{CKZ}} & \\ \text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta} & & \end{array}$$

Le foncteur \mathbb{D}_Δ est une équivalence d'après le Théorème 2.74. Le premier morphisme horizontal l'identification de $E_{\Delta,p}$ à $\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(E_\Delta)$ comme $\Phi_{\Delta,p}$ -anneau à la Proposition A.19 et par la construction dans [Mar24b, Proposition 3.11]. La flèche en pointillé indique que $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p})$ est contenu dans l'image essentielle de la coinduction; ceci découle du Lemme A.18 et de [Mar24b, Proposition 3.19].

Prouvons que l'enveloppe de ce diagramme commute. Soit V une représentation dans $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p} \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}$, que nous voyons comme objet de $\text{Mod}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, \mathbb{F}_p)$. La première étape de \mathbb{D}_Δ et $\mathbb{D}_{\Delta,\text{CKZ}}$ consiste à étendre les scalaires. Nous appliquons [Mar24b, Lemme 3.18 2.] au sous-monoïde d'indice subtil fini $\Phi_{\Delta,q,p} < \Phi_{\Delta,p}$, au $(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau \mathbb{F}_p , au $(\Phi_{\Delta,q,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta})$ -anneau E_Δ^{sep} , à l'inclusion $\mathbb{F}_p \hookrightarrow E_\Delta^{\text{sep}}$ et à la représentation V ; on obtient un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}, E_\Delta^{\text{sep}})$

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}^{\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}(E_\Delta^{\text{sep}}) \otimes_{\mathbb{F}_p} V \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}^{\Phi_{\Delta,p} \times \mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}(E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V).$$

En passant aux invariants, on obtient un isomorphisme dans $\text{Mod}(\Phi_{\Delta,p}, E_{\Delta,p})$ naturel en V

$$\mathbb{D}_{\Delta,\text{CKZ}}(V) := (E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}((E_\Delta^{\text{sep}} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\mathcal{G}_{\tilde{E},\Delta}}) = \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(\mathbb{D}_\Delta(V)).$$

C'est exactement la commutativité du diagramme que nous recherchions.

La flèche pointillée démontre alors que $\mathbb{D}_{\Delta,\text{CKZ}}$ est essentiellement surjective. On trouve l'expression d'un quasi-inverse comme pour le Théorème 2.74. \square

Nous pourrions établir la version perfectoïde [CKZ21, Théorème 4.6] de manière similaire. Malheureusement, l'anneau \bar{R} dans l'article de Carter-Kedlaya-Zábrádi est un complété de la colimite $\tilde{E}_{\Delta,p}^{\text{sep}}$ que nos stratégies nous poussent à définir. Nous préférons ainsi éluder une telle preuve pour nous épargner un énoncé de décomplétion des invariants. Il est d'ailleurs à noter une subtilité dans [CKZ21] puisque l'espace $\text{Spa}(\bar{R}, \bar{R}^+)$ obtenu par construction produit n'est pas pro-étale sur $\text{Spa}(R, R^+)$. Pour appliquer la descente pro-étale, il faudrait remplacer \bar{R}^+ par la complétion ϖ_Δ -adique de la colimite des constructions produits sur les extensions finies de E , et non sa complétion (ϖ) -adique.

3 Équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}[K][\mathbb{Q}_p]$ une extension finie dont le corps résiduel est de cardinal q . Soit Δ un ensemble fini. Dans ce chapitre, nous obtenons une équivalence de Fontaine Lubin-Tate multivariable laissée ouverte dans [CKZ21]. Pour préparer l'équivalence glectique semi-linéaire, nous autorisons un choix de loi de Lubin-Tate différent pour chaque $\alpha \in \Delta$. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous nous donnons une uniformisante π_α de K , un polynôme de Lubin-Tate f_α associé à π_α et un système de Lubin-Tate π_α^b associé à f_α .

Définition 3.1. Considérons la situation de la section 2.5 pour $E = \mathbb{F}_q((X))$, pour l'extension $K = L$, l'ensemble fini Δ , une famille (E_α) de corps valués isomorphes à E et la famille de \mathcal{O}_K -algèbres π -adiquement séparées et complètes d'anneau résiduel E_α^+ en π données comme à la Définition 1.12 par

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\alpha} = \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha]] \left[\frac{1}{X_\alpha} \right] \right)^{\wedge \pi},$$

munies du relèvement \mathcal{O}_K -linéaire du q -Frobenius vérifiant $\phi_{\alpha,q}(X_\alpha) = f_\alpha(X_\alpha)$.

Pour toute extension finie galoisienne $E^{\text{sep}}[F|E]$, considérons les $(\varphi_{\alpha,q}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_{E_\alpha})$ -anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\alpha}^+$ de la Définition 2.75. Les plongements dans \tilde{A}_K construits à la Proposition 1.13 à partir²³ des π_α^b les munissent d'une structure de $(\varphi_{q,\alpha}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques pour la topologie faible que l'on appelle $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K,\alpha}}^+$. L'action de

23. Et de choix de clôtures séparables de chaque $\mathbb{F}_q((X_\alpha^{q^{-\infty}}))$ et d'isomorphismes avec $\bigcup_{[K'|K]_{\text{LT}} < \infty} (K' \widehat{K_{\text{LT}}})^b$. Puisque nous avons déjà choisi une identification des clôtures séparables de \tilde{E}_α et \tilde{E} , cela revient à faire un unique choix pour E .

$(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ terme à terme sur le produit tensoriel des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K,\alpha}}^+$ se complète et localise sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$ en une structure de $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ -anneau topologique pour la topologie faible que nous appelons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K,\Delta}}$.

Dans la Définition 2.76, les injections sont $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ -équivariantes. Cela permet de passer à la colimite et compléter en une structure de $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ -anneau topologique sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}}$ que l'on nomme $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K,\Delta}}}$. Comme dans le paragraphe qui précède la Définition 1.12, après choix des π_α^b et d'une extension de j , le groupe $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$ de $\mathcal{G}_{K,\Delta}$. Via cette identification, le $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneau sous-jacent à $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{K,\Delta}}}$ est $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}$.

Nous notons également $\Gamma_{K,LT,\Delta} := \prod_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_K^\times$ que nous identifierons canoniquement à $\prod_{\alpha \in \Delta} \text{Gal}(K_{LT,f_\alpha} | K) = \mathcal{G}_{K,\Delta} / \mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$.

Remarque 3.2. Nous pouvons décrire le $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta})$ -anneau topologique obtenu explicitement. Nous avons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^+ \cong \mathcal{O}_K[[X_\alpha | \alpha \in \Delta]] \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \cong \left(\mathcal{O}_K[[X_\alpha | \alpha \in \Delta]] \left[\frac{1}{X_\Delta} \right] \right)^{\wedge \pi}$$

avec la topologie d'anneau ayant pour base de voisinages de 0 les $(\pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}^+)_{n,m \geq 0}$. L'action de $(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta})$ est donnée par la seule action de \mathcal{O}_K -algèbre topologique telle que

$$(\varphi_{\alpha,q}^{n_\alpha})_\alpha (X_\beta) = f_\beta^{o_{n_\beta}}(X_\beta)$$

$$\forall (x_\alpha)_\alpha \in \Gamma_{K,LT,\Delta}, (x_\alpha)_\alpha (X_\beta) = [x_\beta]_{LT,f_\beta}(X_\beta).$$

Pour obtenir une équivalence de Fontaine multivariable Lubin-Tate, il nous reste à analyser la topologie faible, dont nous n'avons pas l'usage pour les corps de caractéristique p . Cela conduit à se replonger dans les topologies adiques sur nos anneaux de caractéristiques p , également évincées des précédents raisonnements.

Lemme 3.3. *Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, nous avons les égalités suivantes.*

1. Dans E_Δ^{sep} , l'égalité

$$X_\Delta^n E_\Delta^{\text{sep},+} \cap E_\Delta = X_\Delta^n E_\Delta^+.$$

2. Dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}$, l'égalité

$$\left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+ \right) \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} = \pi^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+.$$

3. Si $m > 0$, dans $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}$, l'égalité

$$\left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+ \right) \cap \mathcal{O}_K = \pi^n \mathcal{O}_K.$$

Démonstration. 1. On se ramène à le prouver pour chaque $F_{\Delta,q}^+$. Pendant la démonstration du Lemme 2.64, nous avons démontré un isomorphisme de E_Δ^+ -modules

$$F_\alpha^+ \otimes_{E_\alpha^+} \left(F_\beta^+ \otimes_{E_\beta^+} \cdots \left(F_\delta^+ \otimes_{E_\delta^+} E_\Delta^+ \right) \right) \cong F_{\Delta,q}^+.$$

Puisque chaque F_α^+ est un E_α^+ -module libre de type fini et l'on peut compléter $\{1\}$ en une base²⁴, il existe une E_Δ -base de $F_{\Delta,q}^+$ de la forme $\{1\} \cup \mathcal{B}$ telle que $F_{\Delta,q}^+ = E_\Delta^+ \oplus \bigoplus_{b \in \mathcal{B}} E_\Delta^+ b$. L'appartenance à $X_\Delta^n F_{\Delta,q}^+$ se lit sur les coordonnées ce qui conclut.

2. On établit le résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$, le résultat est vide. Supposons le résultat vérifié pour $n \geq 0$ et soit x dans l'intersection pour $(n+1)$. En considérant $(x \bmod \pi)$, nous savons qu'il appartient à $X_\Delta^m E_\Delta^{\text{sep},+} \cap E_\Delta$, donc à $X_\Delta^n E_\Delta^+$ par le premier point. Ainsi, il existe $y \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$ tel que $x - X_\Delta^m y$ est nul modulo π . Grâce au premier point du Corollaire 2.65 nous savons que E_Δ^{sep} est sans X_Δ^m -torsion; nous savons aussi que $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}$ est sans π -torsion (voir la condition 1 dans la démonstration du Théorème 2.79). Il en découle que $X_\Delta^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+ \cap \pi \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} = \pi X_\Delta^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+$. En écrivant par hypothèse $x = \pi^{n+1} z_1 + X_\Delta^m z_2$ avec $z_2 \in \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+$. Nous obtenons que $\pi | X_\Delta^m (z_2 - y)$ donc que $z_2 - y \in \pi X_\Delta^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+$. Ainsi $(x - y) \in \pi \left(\pi^n \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} + X_\Delta^m \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}}}^+ \right)$ et l'hypothèse de récurrence conclut.

24. Pour le voir, considérer que pour une extension finie non ramifiée ou totalement ramifiée, il existe un élément primitif tel que $F^+ = E^+[x]$. Toute extension finie se décompose comme extension totalement ramifiée d'une extension non ramifiée.

3. Raisonnement similaire. □

Théorème 3.4. *Les foncteurs*

$$\mathbb{D}_{\Delta,LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\Delta} \rightarrow \text{Mod}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}), \quad V \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}}$$

$$\mathbb{V}_{\Delta,LT} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q}},$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$, sont correctement définis, lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\Delta}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. La démonstration est similaire au Théorème 2.79 et utilise même des résultats démontrés audit théorème. Ici, nous aurons crucialement besoin de la variante des \mathcal{S} -modules topologiques sur R à r -dévissage projectif introduit dans [Mar24b, Définition 5.24]. Nous décomposons alors le foncteur $\mathbb{D}_{\Delta,LT}$ comme d'habitude comme $\text{Inv} \circ \text{Ex} \circ \text{triv}$ mais nous voudrions à présent qu'il se corestreigne comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{\Delta,LT} : & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_K) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) & \xleftarrow{\text{Inv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{H}_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}) \end{array}$$

où les topologies sont : la topologie π -adique sur la première ligne, la topologie faible pour le premier monoïde et π -adique pour le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}$ en bas à droite, la topologie faible en bas à gauche. De même, le foncteur $\mathbb{V}_{\Delta,LT}$ se décompose comme $\text{Inv} \circ \text{Ex} \circ \text{triv}$ et nous voudrions qu'il corestreigne comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{\Delta,LT} : & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) & \xrightarrow{\text{triv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \\ & & \downarrow \text{Ex} \\ & \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathcal{G}_{K,\Delta}, \mathcal{O}_K) & \xleftarrow{\text{Inv}} \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}) \end{array}$$

où les topologies sont faibles pour les premiers monoïdes et π -adiques pour les seconds. On remarquera que, puisque la topologie sur $\Phi_{\Delta,q}$ est discrète et que son action sur chaque anneau est continue pour les deux topologies, nous avons bien coïncidence des deux sous-catégories

$$\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \Phi_{\Delta,q}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) \text{ et } \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}).$$

Pour justifier la définition correcte, nous devons vérifier une liste de condition pour utiliser les mêmes résultats de [Mar24b] qu'au Théorème 2.79.

Conditions 1, 2, 5, 6, 7 et 8 : ce sont les mêmes conditions puisque les anneaux sous-jacents sont ceux du Théorème 2.79.

Condition 3 : les inclusions $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}$ sont continues pour les topologies π -adiques et faibles. Elles sont $(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{K,\Delta})$ -équivariantes. C'est le cas par construction.

Condition 4 : les anneaux topologiques $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\Delta}}$ et $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\Delta}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\Delta,q}}$ coïncident avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}$ et $\Phi_{\Delta,q}$ pour les topologies π -adique et faible. Seule la coïncidence des topologies faibles n'est pas contenue ad verbatim dans la condition analogue au Théorème 2.79. Nous avons même démontré une version forte au Lemme 3.3.

Condition 9 : identique à la condition 9 du Théorème 2.79. Nous soulignons cependant que les énoncés cohomologiques requis par [Mar24b] ne concernent que la topologie discrète, bien que nos modules prennent deux topologies différentes en compte, une pour l'action du le monoïde, l'autre pour l'action du sous-monoïde afin de contrôler aisément le dévissage et pour garantir l'annulation de la cohomologie galoisienne continue.

Condition 10 : les morphismes de comparaisons sont exactement ceux des objets de $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \mathcal{G}_{E,\Delta}, E_{\Delta}^{\text{sep}})$, sauf qu'ils ont le bon goût d'être aussi $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ -équivariants. La condition se déduit donc immédiatement de celle au Théorème 2.79. □

Nous voyons que la démonstration du théorème à partir de l'équivalence pour les corps de caractéristique p revenait à construire les bons anneaux, choisir les bonnes topologies et utiliser le formalisme général.

Remarque 3.5. En utilisant la même stratégie que [Záb18b, Proposition 2.2] mais en remplaçant l'utilisation de [Záb18a, Proposition 2.1] par la généralisation de Grosse-Klönne au cas Lubin-Tate dans [Gro18], nous obtenons que $\mathcal{M}\text{od}_{\text{prj}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, E_{\Delta}) = \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, E_{\Delta})$. Nous en déduisons que $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-div}}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}}) = \mathcal{M}\text{od}^{\text{ét}}(\Phi_{\Delta,q} \times \Gamma_{K,LT,\Delta}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\Delta}})$. Il est cependant intéressant de se souvenir de la décomposition des modules à (π, μ) -dévissage projectif obtenu en [Mar24b, Corollaire A.8].

Remarque 3.6. Pour obtenir une version Lubin-Tate multivariable de l'équivalence, il était crucial de pouvoir considérer le produit tensoriel sur \mathcal{O}_K et d'obtenir un anneau dont les invariants par $\Phi_{\Delta,q}$ valent \mathcal{O}_K . Avec l'anneau non intègre de [CKZ21], il n'est pas clair de savoir comment relever en caractéristique mixte nos anneaux, et même si nous y parvenions par exemple pour une extension non ramifiée, les invariants par $\Phi_{\Delta,p}$ seraient \mathbb{Z}_p et non \mathcal{O}_K . Le problème est encore plus visible modulo p : il faut trouver un sous-monoïde de $M < \Phi_{\Delta,p}$ par lequel quotienter, qui fasse encore marcher le formalisme d'une équivalence de Fontaine et tel que $E_{\Delta,p}^M = \mathbb{F}_q$. Mais de quel \mathbb{F}_q est-il question ?

4 Variantes pour les groupes de Galois plectiques et glectiques

Dans [NS16] et [NS17], J. Nekovář et T. Scholl formulent différentes conjectures plectiques. Elles prédisent que, pour un corps de nombres F , les représentations obtenues dans la cohomologie de la donnée de Shimura associée à la restriction à \mathbb{Q}_p d'un groupe algébrique sur F , qui viennent naturellement avec une action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, devraient hériter en réalité d'une action d'un groupe plus gros $\mathcal{G}_{F,\text{plec}}$. Nous appelons ce dernier *groupe de Galois plectique*. Ce chapitre établit des équivalences de Fontaine pour le groupe de Galois plectique d'un corps local p -adique et pour l'un de ses sous-groupes que nous introduisons : le groupe de Galois glectique. Comme pour déduire l'équivalence multivariable Lubin-Tate de l'équivalence pour les corps de caractéristiques p , il reste essentiellement à définir un anneau de comparaison correct dans chacun des cas et un monoïde adéquat agissant dessus.

4.1 Préliminaires sur le groupe de Galois plectique

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}|K|_{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie.

Définition 4.1. Nous définissons le *groupe de Galois plectique*

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} := \text{Aut}_K(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}).$$

Nous définissons une structure de groupe topologique en prenant pour base de voisinages du neutre les intersections finies de stabilisateurs.

Nous notons $\mathcal{P} = \{\text{plongements } \tau : K \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$, de cardinal $[K : \mathbb{Q}_p]$, sur lequel $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ agit par post-composition. Pour tout plongement τ , nous notons K_{τ} son image. Enfin, pour chaque plongement τ , on choisit une extension $\tau_{\text{ext}} : \overline{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_p}$. Il existe un isomorphisme d'anneaux canonique

$$K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\tau \in \mathcal{P}} \overline{\mathbb{Q}_p}, \quad x \otimes y \mapsto (\tau(x)y)_{\tau \in \mathcal{P}}.$$

La structure de K -algèbre est donnée par τ sur la composante indexée par τ . Considérons le monomorphisme

$$\prod \mathcal{G}_{K_{\tau}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad (g_{\tau}) \mapsto [(y_{\tau}) \mapsto (g_{\tau}(y_{\tau}))].$$

Le choix des τ_{ext} permet de tordre ce monomorphisme en

$$\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad (g_\tau) \mapsto [(y_\tau) \mapsto (\tau_{\text{ext}} g_\tau \tau_{\text{ext}}^{-1})(y_\tau)] .$$

Ce choix détermine également un morphisme

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \quad \omega \mapsto [(y_\tau) \mapsto ((\tau_{\text{ext}}(\omega^{-1}(\tau))_{\text{ext}}^{-1})(y_{\omega^{-1}(\tau)})] .$$

Si la formule est absconce, nous pouvons la résumer en disant que la copie indexée par τ de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est envoyée sur la copie indexée $\omega(\tau)$, de la seule manière possible obtenue à partir des τ_{ext} et qui respecte les structures de K -algèbres.

Lemme 4.2. *L'image de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ est distinguée dans $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ et a pour complément l'image de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Cela exhibe le groupe topologique $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ comme produit en couronne*

$$\mathcal{G}_{K,\text{plec}} \cong \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

où $\text{plec}(\omega)(g_\tau) = (g_{\omega^{-1}(\tau)})$.

Cette description est la plus concise en termes de notations. Elle repose en revanche drastiquement sur le choix des τ_{ext} et l'isomorphisme n'est donc pas canonique. L'image de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ est quant à elle canonique, de même que la projection sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. De plus, agir sur le terme de droite de $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}$ produit un plongement canonique de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow \mathcal{G}_{K,\text{plec}}$.

Définition 4.3. Nous appelons *groupe de Galois glectique*, et notons $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$, le sous-groupe de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ engendré par $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ et par $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

Appelons K_{gal} l'extension composée des K_τ . C'est une extension galoisienne de \mathbb{Q}_p et le noyau de l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur \mathcal{P} est exactement $\mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$. Nous en déduisons un monomorphisme de groupes $\text{Per} : \text{Gal}(K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Dans tout le chapitre 4, on notera aussi f_{gal} le degré d'inertie de $K_{\text{gal}}|K$.

Proposition 4.4. *La projection de $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ correspond l'image de Per . Le groupe $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec}} \circ \text{Per} \text{Gal}(K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p)$, canoniquement au choix des τ_{ext} près.*

En prenant les notations de la Définition B.10, le groupe $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ est canoniquement isomorphe à

$$(\prod_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau} \rtimes_{\text{glec}} \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}) / \sim \mathcal{G}_{K_{\text{gal}}} \sim$$

où $\text{glec}(\sigma)(g_\tau) = (\sigma g_{\sigma^{-1}(\tau)} \sigma^{-1})$ et où $\mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$ est plongé diagonalement dans $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$.

Démonstration. Puisque l'image de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ est distinguée dans $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$, les sous-groupes contenant $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ correspondent aux sous-groupes du quotient $\mathcal{G}_{K,\text{plec}} / \prod \mathcal{G}_{K_\tau} \cong \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et $\tau \in \mathcal{P}$. On considère $\sum_i x_i \otimes y_i$ appartenant au facteur τ . Cela signifie que

$$\forall \tau' \neq \tau, \sum_i \tau'(x_i) y_i = 0.$$

Alors $\sigma(\sum x_i \otimes y_i) = \sum x_i \otimes \sigma(y_i)$ vérifie

$$\forall \tau' \neq \sigma\tau, \sum \tau'(x_i) \sigma(y_i) = \sigma(\sum (\sigma^{-1} \tau')(x_i) y_i) = 0.$$

Donc l'image de σ dans $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est donnée par son action sur \mathcal{P} .

Nous avons déjà construit deux morphismes de $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ vers $\mathcal{G}_{K,\text{glec}}$. Pour montrer qu'ils induisent un morphisme depuis le quotient du produit semi-direct, nous vérifions les conditions de la Définition B.10. La première est aisée. Pour la deuxième, on a que $K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p$ galoisienne implique $\mathcal{G}_{K_{\text{gal}}} \triangleleft \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Pour la dernière, soit $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, $\chi \in \mathcal{G}_{K_{\text{gal}}}$ et $(y_\tau)_\tau \in \oplus \overline{\mathbb{Q}_p}$:

$$[\text{glec}(\sigma)(\chi)](y_\tau)_\tau = (\sigma \chi \sigma^{-1})(y_\tau)_\tau = ((\sigma \chi \sigma^{-1})(y_\tau))_\tau = [(\sigma)(\chi)(\sigma^{-1})](y_\tau)_\tau.$$

Nous laissons les lecteurs et lectrices vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme. □

4.2 Équivalence de Fontaine plectique

Pour commencer, nous établissons une équivalence pour des représentations du groupe de Galois plectique. Comme pour l'équivalence multivariable, il suffit d'étendre les actions en jeu dans le Théorème 2.79. Dans cette section, toutes les constructions de monoïdes sont automatiquement munies de topologies. Pour un petit bestiaire de constructions et de lemmes sur les monoïdes topologiques, se référer à l'Annexe B.

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}[K][\mathbb{Q}_p]$ une extension finie²⁵. Nous nous fixons une uniformisante π de K , une loi de Lubin-Tate f associée à π et un système de Lubin-Tate π^b .

Nous commençons dans le cadre du chapitre 3 avec $\Delta = \mathcal{P}$, le choix de (π, f, π^b) pour chaque plongement, le choix d'un $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau}^{\text{nr}}}}$ pour chaque plongement et d'une extension aux clôtures séparables de l'isomorphisme

$$j_{\tau} : \mathbb{F}_q((X_{\tau}^{q^{-\infty}})) \rightarrow \widehat{K_{\text{LT},f}^b}, \quad X_{\tau} \mapsto \pi^b.$$

Ces données déterminent comme à la Proposition 1.13 une structure de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneau topologique sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau}^{\text{nr}}}}$ et d'un plongement équivariant i_{τ} dans $W_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C}_p^b)$ dont l'image de dépend pas de τ . Pour tout couple (τ_1, τ_2) , nous notons $i_{\tau_2, \tau_1} : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau_1}^{\text{nr}}}} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\tau_2}^{\text{nr}}}}$ l'isomorphisme de $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -anneaux topologiques donné par $i_{\tau_2}^{-1} i_{\tau_1}$. Pour toute extension galoisienne $E^{\text{sep}}|F|E$, le morphisme i_{τ_2, τ_1} envoie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau_1}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau_2}}$. De plus, ces isomorphismes sont \mathcal{O}_K -linéaires et vérifient

$$\forall \tau_1, \tau_2, \tau_3, \quad i_{\tau_3, \tau_1} = i_{\tau_3, \tau_2} i_{\tau_2, \tau_1}. \quad (*)2$$

Définition 4.5. Soit $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, on définit sur $\otimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau}}^+$ l'endomorphisme

$$\omega \cdot_{\text{plec}} (\otimes y_{\tau}) = \otimes i_{\tau, \omega^{-1}(\tau)} (y_{\omega^{-1}(\tau)}).$$

Puisque chaque i_{τ_2, τ_1} est continu pour la topologie faible, cet endomorphisme est continu pour la topologie (π, \underline{X}) -adique, se complète, passe à la colimite et se complète π -adiquement en un endomorphisme $\omega \cdot_{\text{plec}}$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$.

Définition 4.6. Nous appelons $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ le monoïde topologique défini par

$$\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}} := (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$$

où le produit semi-direct est donné par

$$\forall \omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}, \quad \text{plec}(\omega) \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\tau}} g_{\tau} \right) = \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\omega^{-1}(\tau)}} g_{\omega^{-1}(\tau)} \right)$$

avec la topologie usuelle sur $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ et la topologie discrète sur $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$.

Définition/Proposition 4.7. La définition précédente fournit une action continue pour la topologie faible de $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$. Combinée à l'action de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}^{\text{nr}}}}$, nous obtenons une action de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ continue pour la topologie faible.

Définissons $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}^{\text{nr}}}}$ le $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ -anneau topologique obtenu.

Démonstration. D'après le deuxième point des Propositions B.5 et B.9, il suffit de vérifier des relations sur les actions. C'est le cas sur les produits tensoriels en utilisant à la fois la relation (*)2 et le fait que les i_{τ_2, τ_1} sont des morphismes $(\varphi_q^{\mathbb{N}} \times \mathcal{G}_K)$ -équivariants. Les relations sont conservées en complétant et passant à la limite. \square

Proposition 4.8. Le sous-monoïde $\Phi_{\mathcal{P}, q} < \text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ est distingué et le quotient $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{plec}} / \Phi_{\mathcal{P}, q}$ s'identifie à $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ comme monoïde topologique, canoniquement au vu du choix des τ_{ext} . De plus, l'inclusion

$$\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\mathcal{P}, q}}$$

est une égalité.

Démonstration. Pour le caractère distingué, remarquer que les endomorphismes de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ définissant le produit semi-direct avec $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ induisent des endomorphismes surjectifs de $\Phi_{\Delta, q}$. L'identification de $\mathcal{G}_{K, \text{plec}}$ au sous-monoïde ouvert et distingué $\mathcal{G}_{K, \mathcal{P}} \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$, qui est un complément de $\Phi_{\Delta, q}$ conclut pour l'identification du quotient. Quant aux invariants, il s'agit exactement de la condition 4 dans la preuve du Théorème 2.79. \square

25. Nous fixons ainsi un plongement de K dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Il sera parfois utile pour intuiter les formules correctes de se dire que K vit à part dans une autre clôture algébrique, contrairement aux K_{τ} qui vivent dans \mathbb{Q}_p .

Nous définissons de manière ad hoc l'anneau plectique puis décrivons un peu mieux nos constructions.

Définition 4.9. Le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}} < \mathcal{T}\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$ est distingué. Nous définissons le monoïde topologique

$$\mathbb{T}_{K,\text{plec}} := \mathcal{T}\mathcal{G}_{K,\text{plec}} / \mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}}.$$

Nous définissons aussi le $\mathbb{T}_{K,\text{plec}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}} := \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}}}.$$

Proposition 4.10. *Le monoïde topologique $\mathbb{T}_{K,\text{plec}}$ s'identifie canoniquement à*

$$(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,LT,\mathcal{P}}) \rtimes_{\text{plec}} \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$$

où

$$\forall \omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}, \text{plec}(\omega) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\tau}}, x_{\tau} \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\omega^{-1}(\tau)}}, x_{\omega^{-1}(\tau)} \right).$$

Le $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,LT,\mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$ construit au chapitre 3. En reprenant sa description à la remarque 3.2, l'action de $\omega \in \mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ est le seul morphisme de \mathcal{O}_K -algèbre topologique vérifiant $\forall \tau \in \mathcal{P}, \omega \cdot X_{\tau} = X_{\omega(\tau)}$.

Démonstration. On utilise le troisième point de la Proposition B.9 pour la description du quotient et la condition 4 dans la démonstration du Théorème 2.79 pour l'identification de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$. Pour écrire l'action, considérons que par définition chaque X_{τ} est envoyé par i_{τ} sur $\{\pi^b\}_{LT} \in \tilde{A}_K$. Ainsi, $i_{\tau_2, \tau_1}(X_{\tau_1}) = X_{\tau_2}$ et l'écriture (*2) conclut. \square

Une fois les anneaux construits correctement, nous obtenons gratuitement l'équivalence de Fontaine plectique.

Théorème 4.11. *Les foncteurs*

$$\mathbb{D}_{\text{plec},LT} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}), \quad V \mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,LT,\mathcal{P}}}$$

$$\mathbb{V}_{\text{plec},LT} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathbb{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q}},$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}}$, sont correctement définis, lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\mathbb{T}_{K,\text{plec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{plec}}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{plec}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Démonstration. La stratégie est la même qu'au Théorème 3.4 et les conditions à vérifier découlent des constructions ci-dessus et des conditions vérifiées pour le Théorème 3.4. \square

Remarque 4.12. En conservant les objets de [Bre+22], notre équivalence plectique fait correspondre les fibrés vectoriels sur Z_{LT} à des \mathbb{F}_q -représentations continues de dimension finie de $\mathcal{G}_{K,\text{plec}}$.

4.3 Équivalence de Fontaine plectique semi-linéaire pour des extensions galoisiennes de \mathbb{Q}_p

Pour $K|\mathbb{Q}_p$ galoisienne, une philosophie adjacente se détache en regardant un peu mieux \tilde{A}_K . Nous écrivons $\tilde{A}_K = \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_q} W(\mathbb{C}_p^b)$ et considérons l'action \mathcal{O}_K -semi-linéaire de $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ par $\sigma \otimes \varphi^{\deg(\sigma)}$. L'image du plongement de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est stable par l'action de W_K^+ mais pas nécessairement par celle de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. En choisissant pour chaque plongement τ une extension $\tau_{\text{ext}} \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ de degré minimal, nous pouvons considérer le morphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}^+ \rightarrow \tilde{A}_K, \quad X_{\tau} \mapsto \tau_{\text{ext}} \cdot \{\pi^b\}_{LT}.$$

Son image est la plus petite sous- \mathcal{O}_K -algèbre fermée de \tilde{A}_K contenant l'un des $\{(\pi^b)\}_{LT}$ et stable par $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Le morphisme est injectif²⁶ ce qui s'interprète comme l'apparition de $|\mathcal{P}|$ variables cachées. Cela suggère également que nous devrions voir apparaître sur notre anneau multivariable $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}$ une action additionnelle de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et peut-être une équivalence de Fontaine reliant les (φ, Γ) -modules sur cet anneau à une certaine catégorie de représentations. Cette section répond à ces attentes.

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ une sous-extensions finie de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Nous fixons encore un choix d'extension τ_{ext} de chaque plongement à $\overline{\mathbb{Q}_p}$, que l'on suppose appartenir à $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et de degré minimal.

Définition/Proposition 4.13. Nous avons

$$\forall \tau \in \mathcal{P}, \forall \sigma \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \exists! g_{\sigma, \tau} \in \mathcal{G}_K, (\sigma\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma, \tau} = \sigma\tau_{\text{ext}}.$$

Si $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$, alors $g_{\sigma, \tau} \in W_K^+$. Son degré absolu est noté $fd_{\sigma, \tau}$ avec $d_{\sigma, \tau} \in \mathbb{N}$ et ne dépend pas du choix des τ_{ext} puisqu'ils sont de degré positif minimal.

Démonstration. L'existence provient de ce que $\sigma\tau_{\text{ext}}$ coïncide avec $(\sigma\tau)_{\text{ext}}$ sur K . Ainsi, l'élément $(\sigma\tau)_{\text{ext}}^{-1}\sigma\tau_{\text{ext}}$ fixe K . Si $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$, le degré de $\sigma\tau_{\text{ext}}$ est positif. Or, c'est aussi une extension de $\sigma\tau$, d'où la le choix des extensions tire que $\deg(\sigma\tau_{\text{ext}}) \geq \deg((\sigma\tau)_{\text{ext}})$. \square

Remarque 4.14. La définition précédente capture donc l'information des degrés dans $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ que le choix des τ_{ext} oublie. Cela servira entre autre à garantir que l'action sur l'anneau de Fontaine plectique d'une extensions du p -Frobenius dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est une racine du q -Frobenius.

Lemme 4.15. Les $g_{\sigma, \tau}$ vérifient la relation

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \forall \tau \in \mathcal{P}, g_{\sigma_2\sigma_1, \tau} = g_{\sigma_2, \sigma_1\tau} g_{\sigma_1, \tau}.$$

A fortiori, les $d_{\sigma, \tau}$ vérifient la relation

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}, \forall \tau \in \mathcal{P}, d_{\sigma_2\sigma_1, \tau} = d_{\sigma_2, \sigma_1\tau} + d_{\sigma_1, \tau}.$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} (\sigma_2\sigma_1\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma_2, \sigma_1\tau} g_{\sigma_1, \tau} &= (\sigma_2(\sigma_1\tau))_{\text{ext}} g_{\sigma_2, \sigma_1\tau} g_{\sigma_1, \tau} \\ &= \sigma_2(\sigma_1\tau)_{\text{ext}} g_{\sigma_1, \tau} \\ &= \sigma_2\sigma_1\tau_{\text{ext}} \end{aligned}$$

\square

Par la suite, le groupe de Weil W_L d'un corps local L sera muni de la topologie d'union disjointe $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Frob}^{\circ n}$. I_L et sa version monoïdale W_L^+ de même. Nous appelons *topologie localement profinie* cette topologie.

Définition/Proposition 4.16. Nous appelons $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ le monoïde topologique défini en utilisant B.10 par

$$\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{glec}} := ((\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}) \rtimes_{\text{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{K_{\text{gal}}}^+) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \sim$$

où le produit semi-direct est donné par

$$\forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \text{glec}(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\tau}}, g_{\tau} \right) = \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\omega^{-1}(\tau)}}, g_{\omega^{-1}(\tau)} \right)$$

et avec le morphisme $\kappa_{\text{glec}} : W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \rightarrow (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ qui envoie le Frobenius arithmétique sur $\varphi_{\mathcal{P}, q}^{f_{\text{gal}}}$, avec la topologie usuelle sur $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ et la topologie localement profinie sur le groupe de Weil.

Démonstration. Pour les mêmes raisons que précédemment, le noyau de glec contient $I_{K_{\text{gal}}}$. Il faut ensuite vérifier les trois conditions de la Définition B.10. Le Frobenius arithmétique est dans le noyau de plec et donne donc la même "action de conjugaison" que $\varphi_{\mathcal{P}, q}^{f_{\text{gal}}}$. Puisque $K_{\text{gal}}|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne $W_{K_{\text{gal}}} \triangleleft W_{\mathbb{Q}_p}$ d'où nous déduisons que $W_{K_{\text{gal}}}^+ / I_{K_{\text{gal}}} \triangleleft W_{\mathbb{Q}_p}^+ / I_{K_{\text{gal}}}^+$. Ce dernier sous-groupe est dans le centre, de même que son image dans $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$. Cela démontre la troisième condition. \square

26. Pour $K = \mathbb{Q}_q$ et $\pi = p$, le résultat de L. Berger [Ber13, Corollaire 3.7] implique en particulier l'injectivité de notre morphisme. On peut généraliser cette technique à une extension finie quelconque.

Lemme 4.17. *La restriction de la projection sur produit semi-direct vers $\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ se restreint en des injections depuis $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}}$. Ce sont des homéomorphismes sur leur image.*

Démonstration. Ajoutons que $\mathrm{glec}(W_{\mathbb{Q}_p}^+)$ est constituée d'automorphismes pour appliquer la Proposition B.12. Cela permet notamment de prouver que les éléments de $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}}$ sont dans des classes disjointes. De plus, le sous-groupe $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ est ouvert dans le produit semi-direct et stable par la relation définissant le quotient. Nous en déduisons que la topologie induite sur $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}}$ par l'injection est effectivement discrète. L'autre plongement se démontre de manière analogue. \square

Proposition 4.18. *Le sous-monoïde $\Phi_{\mathcal{P},q} < \mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ est distingué et le quotient $\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}/\Phi_{\mathcal{P},q}$ s'identifie à $\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ comme monoïde topologique, canoniquement au choix des τ_{ext} près.*

Démonstration. En utilisant le premier résultat de la Proposition B.13 grâce au fait que $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ agit par automorphismes sur $\Phi_{\mathcal{P},q}$, on obtient $\Phi_{\mathcal{P},q} \triangleleft [(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}) \rtimes_{\mathrm{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}}]$. On utilise le deuxième résultat de la même proposition pour conclure que son image via le plongement dans $\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ est distinguée. Enfin, le troisième point de ladite proposition permet d'identifier le quotient. Puisque κ_{glec} prend ses valeurs dans $\Phi_{\mathcal{P},q}$ nous obtenons que

$$\mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}/\Phi_{\mathcal{P},q} \cong \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}} \rtimes_{\mathrm{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+/W_{K_{\mathrm{gal}}}^+$$

où $\overline{\mathrm{glec}}(\sigma)(g_\tau) = (g_{\sigma^{-1}\tau})$. En identifiant $W_{\mathbb{Q}_p}^+/W_{K_{\mathrm{gal}}}^+$ à $\mathrm{Gal}(K_{\mathrm{gal}}|\mathbb{Q}_p)$, nous retombons sur la description de $\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ donné par le choix des τ_{ext} à la Proposition 4.4. \square

Définition 4.19. Le sous-monoïde $\mathcal{H}_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}} < \mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ est distingué pour les mêmes raisons qu'à la proposition précédente. Nous définissons le monoïde topologique

$$\mathrm{T}_{K,\mathrm{glec}} := \mathrm{T}\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}/\mathcal{H}_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}}.$$

Proposition 4.20. *Le monoïde topologique $\mathrm{T}_{K,\mathrm{glec}}$ s'identifie canoniquement à*

$$((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}}) \rtimes_{\mathrm{glec}} W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}}) / \sim W_{K_{\mathrm{gal}}}^+/I_{K_{\mathrm{gal}}} \sim$$

où

$$\forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \quad \mathrm{glec}(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, x_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, x_{\omega^{-1}(\tau)} \right)$$

et où l'on identifie le Frobenius arithmétique à $\varphi_{\mathcal{P},q}^{f_{\mathrm{gal}}}$.

Démonstration. Similaire à celle de la Proposition 4.10. \square

Supposons jusqu'à la fin de cette section que $K|\mathbb{Q}_p$ est galoisienne. Nous identifierons canoniquement \mathcal{P} à $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$ dans cette section. Dans ce cas, nous avons $K_{\mathrm{gal}} = K$ et $f_{\mathrm{gal}} = f$.

Définition 4.21. Le quotient $\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}/\Pi_{\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)} \mathcal{G}_K$ s'identifiant à $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$, l'action de ce dernier sur \mathcal{O}_K le munit d'une structure de $\mathcal{G}_{K,\mathrm{glec}}$ -anneau topologique que l'on note $\mathcal{O}_{K,\mathrm{sl}}$.

Nous notons $\mathrm{sRep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\mathrm{plec}}$ la catégorie des représentations²⁷ semi-linéaires continues de $\mathcal{G}_{K,\mathrm{plec}}$ de type fini sur \mathcal{O}_K .

Nous considérons toujours un choix de (π, f, π^b) pour K . Nous commençons à nouveau dans le cadre du chapitre 3 avec $\Delta = \mathcal{P}$, le choix de $(\tau(\pi), \tau(f), \tau_{\mathrm{ext}}(\pi^b))$ pour le plongement τ et un choix d'extensions de

$$j_\tau : \mathbb{F}_q((X_\tau^{q^{-\infty}})) \rightarrow \widehat{K_{\mathrm{LT},\tau(f)}}^b$$

aux clôtures séparables. Comme au chapitre 3, cela détermine une structure de $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ -anneau topologique sur $\widehat{\mathcal{O}_{K,\mathcal{P}}}^b$ et une identification de $\mathcal{G}_{E,\mathcal{P}}$ au sous-groupe $\mathcal{H}_{K,\mathrm{LT},\mathcal{P}} = \prod \mathcal{G}_{K_{\mathrm{LT},\tau(f)}} < \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$.

Chaque τ_{ext} induit un endomorphisme τ -semi-linéaire de K -algèbres de \mathbb{C}_p qui envoie $K_{\mathrm{LT},f}$ sur $K_{\mathrm{LT},\tau(f)}$. En basculant, on obtient τ_{ext}^b un endomorphisme de \mathbb{F}_q -algèbres $\phi^{\deg \tau}$ -semi-linéaire²⁸ de \mathbb{C}_p^b qui envoie $\widehat{K_{\mathrm{LT},f}}^b$ sur $\widehat{K_{\mathrm{LT},\tau(f)}}^b$ et π^b sur $\tau_{\mathrm{ext}}(\pi^b)$. Cet endomorphisme est $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariant. En revanche, il n'est pas \mathcal{G}_K -équivariant : nous obtenons que

$$\forall g \in \mathcal{G}_K, \forall x \quad \tau_{\mathrm{ext}}^b(g \cdot x) = (\tau_{\mathrm{ext}} g \tau_{\mathrm{ext}}^{-1}) \cdot (\tau_{\mathrm{ext}}^b(x)). \quad (*3)$$

En passant aux vecteurs de Witt, on obtient un diagramme commutatif

27. Elle s'écrit $\mathcal{M}_{\pi\text{-dv}}^{\mathrm{od\acute{e}t}}(\mathcal{G}_{K,\mathrm{plec}}, \mathcal{O}_{K,\mathrm{sl}})$ dans le langage de [Mar24b].

28. Ici ϕ est le Frobenius absolu et $\deg \tau$ est bien défini modulo f , ce qui définit correctement $\phi^{\deg \tau}$ sur \mathbb{F}_q .

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_{\mathcal{E}} & \xrightarrow{X \mapsto \{\pi^b\}_{LT,f}} & W_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{K_{LT,f}}^b \right) & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_K} (\mathbb{C}_p^b) \\
\downarrow X \mapsto X_{\tau} & & \downarrow & & \downarrow W_{\mathcal{O}_K} (\tau_{\text{ext}}^b) \\
\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\tau}} & \xrightarrow{X_{\tau} \mapsto \{\tau_{\text{ext}}(\pi^b)\}_{LT,\tau(f)}} & W_{\mathcal{O}_K} \left(\widehat{K_{LT,\tau(f)}}^b \right) & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_K} (\mathbb{C}_p^b)
\end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des morphismes τ -semi-linéaires de \mathcal{O}_K -algèbres. Or, $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ est la complétion de la hensélisation stricte de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Le diagramme précédent montre alors que $W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{\text{ext}}^b)$ induit un isomorphisme entre les $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -anneaux topologiques $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ et $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}$ construits comme en Proposition 1.12, respectivement pour (π, f, π^b) et $(\tau(\pi), \tau(f), \tau_{\text{ext}}(\pi^b))$. Les actions de \mathcal{G}_K vérifient encore l'équation (*3). Ce morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres est également τ -semi-linéaire. Définissons $j_{\tau_2, \tau_1} : \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}_{\tau_1} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{nr}}}}_{\tau_2}$ par $j_{\tau_2, \tau_1} := W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{2,\text{ext}}^b) \circ W_{\mathcal{O}_K}(\tau_{1,\text{ext}}^b)^{-1}$. C'est un isomorphisme de \mathcal{O}_K -algèbres topologiques $(\tau_2 \tau_1^{-1})$ -semi-linéaire, $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariant et tel que

$$\forall g \in \mathcal{G}_K, \forall x, j_{\tau_2, \tau_1}(g \cdot x) = (\tau_{2,\text{ext}} \tau_{1,\text{ext}}^{-1} g \tau_{1,\text{ext}} \tau_{2,\text{ext}}^{-1}) \cdot (j_{\tau_2, \tau_1}(x)). \quad (*4)$$

Ils vérifient que

$$\forall \tau_1, \tau_2, \tau_3, j_{\tau_3, \tau_1} = j_{\tau_3, \tau_2} \circ j_{\tau_2, \tau_1}.$$

Définition/Proposition 4.22. Soit $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$, on définit sur $\otimes_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_K \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\tau}}^+$ l'endomorphisme

$$\sigma \cdot_{\text{sglec}} (\otimes y_{\tau}) = \otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma, \sigma^{-1}\tau}} (j_{\tau, \sigma^{-1}\tau}(y_{\sigma^{-1}\tau})) .$$

Bien que les $j_{\tau, \sigma^{-1}\tau}$ ne soient pas \mathcal{O}_K -linéaires, ils sont tous $\sigma|_K$ -semi-linéaires ce qui rend correcte la définition. Ces endomorphismes se complètent (π, X) -adiquement, passent à la colimite et se complètent π -adiquement en une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$. Son noyau est précisément I_K .

Démonstration. Nous montrons en détail, pour cette fois-ci uniquement, qu'il s'agit d'une action sur le produit tensoriel. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et $\otimes y_{\tau}$ appartenant au produit tensoriel. Alors,

$$\begin{aligned}
(\sigma_2 \sigma_1) \cdot_{\text{sglec}} (\otimes y_{\tau}) &= \otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma_2 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_1^{-1}\tau}} (j_{\tau, \sigma_2 \sigma_1^{-1}\tau}(y_{\sigma_2 \sigma_1^{-1}\tau})) \\
&= \otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma_2, \sigma_2^{-1}\tau} + d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau}} \left(\left[j_{\tau, \sigma_2^{-1}\tau} \circ j_{\sigma_2^{-1}\tau, \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau} \right] (y_{\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau}) \right) \\
&= \otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma_2, \sigma_2^{-1}\tau}} \left(j_{\tau, \sigma_2^{-1}\tau} \left(\varphi_{\sigma_2^{-1}\tau, q}^{d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau}} (j_{\sigma_2^{-1}\tau, \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau}(y_{\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\tau})) \right) \right) \\
&= \sigma_2 \cdot_{\text{sglec}} \left(\otimes \varphi_{\tau, q}^{d_{\sigma_1, \sigma_1^{-1}\tau}} (j_{\tau, \sigma_1^{-1}\tau}(y_{\sigma_1^{-1}\tau})) \right) \\
&= \sigma_2 \cdot_{\text{sglec}} (\sigma_1 \cdot_{\text{sglec}} (\otimes y_{\tau}))
\end{aligned}$$

où le passage à la deuxième ligne utilise les relations sur les d et les j et où celui à la troisième utilise la $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariance de j_{τ_2, τ_1} .

Prouvons à présent que le noyau sur les produits tensoriels est précisément I_K . Soit σ dans le noyau. En regardant l'action sur les X_{τ} , on obtient que σ agit trivialement sur \mathcal{P} , autrement dit que $\sigma \in W_K^+$. Dans ce cas $(\sigma\tau)_{\text{ext}} = \tau_{\text{ext}}$ et on obtient que $g_{\sigma, \tau} = \tau_{\text{ext}}^{-1} \sigma \tau_{\text{ext}}$, en particulier que son degré absolu vaut $\deg \sigma$. Pour que chaque $d_{\sigma, \tau}$ soit nul, il faut donc que $\deg \sigma = 0$.

Puisque $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_K$ est discret, la continuité de l'action est automatique dès lors que l'on peut compléter. \square

Définition/Proposition 4.23. Considérons l'action de $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}})$ sur $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ obtenue en tordant l'action définie au chapitre 3 par l'automorphisme

$$(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}) \xrightarrow{\sim} (\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \mathcal{G}_{K, \mathcal{P}}), \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\tau}}, g_{\tau} \right) \rightarrow \left(\prod \varphi_{\tau, q}^{n_{\tau}}, \tau_{\text{ext}} g_{\tau} \tau_{\text{ext}}^{-1} \right).$$

Considérons également l'action \cdot_{sglec} de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Ensemble, elles fournissent une structure de $\text{TG}_{K, \text{sglec}}$ -anneau topologique pour la topologie faible que l'on note $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}}$.

Petite remarque, l'action est \mathcal{O}_K -semi-linéaire, au sens où $\mathcal{O}_{K, \text{sl}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}}$ est un morphisme de $\text{TG}_{K, \text{sglec}}$ -anneau.

Démonstration. D'après les propriétés universelles des Proposition B.9 et B.5, il faut vérifier deux conditions de compatibilité des actions. La compatibilité à sglec utilise que les j_{τ_2, τ_1} sont $\varphi_q^{\mathbb{N}}$ -équivariants et vérifient (*4). Pour le passage au quotient, nous avons déjà énoncé que le Frobenius arithmétique Frob dans $W_{K_{\text{gal}}}^+$ agit trivialement sur \mathcal{P} et que $\forall \tau, d_{\text{Frob}, \tau} = f$. Ceci dit précisément que Frob agit comme $\varphi_{\mathcal{P}, q}^f$. \square

L'action de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}}$ est fidèle mais nous ne l'utiliserons pas. Nous nous intéressons aux invariants par les deux sous-monoïdes des équivalences de Fontaines multivariables.

Proposition 4.24. *L'inclusion $\mathcal{O}_{K, \text{sl}} \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\mathcal{P}, q}}$ est une égalité de de $\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ -anneaux topologiques.*

Démonstration. Combiner la condition 4 dans la preuve du Théorème 2.79 et la semi- \mathcal{O}_K -linéarité de l'action. \square

Définition 4.25. Nous définissons le $\text{T}_{K, \text{glec}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}} := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \mathcal{P}}}.$$

Proposition 4.26. *Le $(\Phi_{\mathcal{P}, q} \times \Gamma_{K, \text{LT}, \mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{plec}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \mathcal{P}}}$ construit au chapitre 3. En reprenant sa description à la remarque 3.2, l'action continue et semi-linéaire de $\text{T}\mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ est caractérisée par*

$$\begin{aligned} \forall \tau, \varphi_{\tau, q}(X_\tau) &= \tau(f)(X_\tau), \\ \forall x = (x_\tau) \in \Gamma_{K, \text{LT}, \mathcal{P}}, \forall \tau', x \cdot X_{\tau'} &= [x_{\tau'}]_{\text{LT}, \tau'(f)}(X_{\tau'}) \\ \text{et } \forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \forall \tau, [\sigma] \cdot X_\tau &= (\sigma\tau)(f)^{d_{\sigma, \tau}}(X_{\sigma\tau}). \end{aligned}$$

Démonstration. Similaire à la Proposition 4.10 en utilisant que $j_{\tau_2, \tau_1}(X_{\tau_1}) = X_{\tau_2}$. \square

Une fois les anneaux construits correctement, nous obtenons gratuitement l'équivalence de Fontaine glectique semi-linéaire.

Théorème 4.27. *Les foncteurs*

$$\mathbb{D}_{\text{sglec}, \text{LT}} : s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}} \rightarrow \text{Mod}(\text{T}_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}), \quad V \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K, \text{LT}, \mathcal{P}}}$$

$$\mathbb{V}_{\text{sglec}, \text{LT}} : \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}} D \right)^{\Phi_{\mathcal{P}, q}},$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}}$, sont correctement définis, lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K, \text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K, \text{sglec}}})$ et $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K, \text{glec}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Remarque 4.28. Nous avons ici une action du sous-monoïde $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_K$ qui est une extension en générale non scindée de $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)$ par $\varphi_q^{\mathbb{N}}$.

Dans le cas où K n'est pas galoisienne, il existe encore des variables cachées dans $W_{\mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}}(\mathbb{C}_p^b)$. Nous espérons une équivalence de Fontaine semi-linéaire glectique pour $s\text{Rep}_{\mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}} \mathcal{G}_{K, \text{glec}}$ en considérant des anneaux du type

$$\bigotimes_{\tau \in \mathcal{P}, \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}} \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_\tau}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K_\tau}}.$$

Il faudrait refaire une série de définitions et de lemmes concernant les invariants, ce que nous laissons de côté dans ce présent article.

4.4 Équivalence de Fontaine glectique

Dans le cas général d'un corps local p -adique, nous pouvons cependant construire une (voire trois) équivalences pour les représentations linéaires de $\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$. Toutes les preuves absentes sont similaires à celles du cas semi-linéaire.

Définition/Proposition 4.29. Soit $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$. Pour chaque extension finie $E^{\text{sep}}|F|E$ on définit sur $\otimes_{\tau \in \mathcal{P}} \mathcal{O}_K \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\tau}^+$ l'endomorphisme

$$\sigma \cdot_{\text{glect}} (\otimes y_\tau) = \otimes \varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}} (i_{\tau,\sigma^{-1}\tau}(y_{\sigma^{-1}\tau})).$$

Ces endomorphismes se complètent (π, \underline{X}) -adiquement, passent à la colimite et se complètent π -adiquement en une action de $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$. Son noyau est précisément $I_{K,\text{gal}}$.

Définition/Proposition 4.30. L'action de $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \mathcal{G}_{K,\mathcal{P}})$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ et l'action de glect de $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K,\text{gal}}$ sont continues pour la topologie faible fournissent une structure de $\text{T}\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ -anneau topologique que l'on note $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}^{\text{nr}}}}$.

Proposition 4.31. *L'inclusion*

$$\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}^{\text{nr}}}}^{\Phi_{\mathcal{P},q}}$$

est une égalité.

Définition/Proposition 4.32. Nous définissons le $\text{T}_{K,\text{glect}}$ -anneau topologique

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}} := \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}^{\text{nr}}}}^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}}.$$

Le $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}})$ -anneau topologique sous-jacent à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}$ coïncide avec $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}}$ construit au chapitre 3. En reprenant sa description à la remarque 3.2, l'action continue et semi-linéaire de $\text{T}\mathcal{G}_{K,\text{glect}}$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} \forall \tau, \quad \varphi_{\tau,q}(X_\tau) &= f(X_\tau), \\ \forall \tau', \forall x &= (x_\tau)_\tau \in \Gamma_{K,\text{LT},\mathcal{P}}, \quad x \cdot X_{\tau'} = [x_{\tau'}]_{\text{LT},f}(X_{\tau'}) \\ \text{et } \forall \sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+, \forall \tau, \quad [\sigma] \cdot X_\tau &= f^{d_{\sigma,\tau}}(X_{\sigma\tau}). \end{aligned}$$

Théorème 4.33. *Les foncteurs*

$$\mathbb{D}_{\text{glect},\text{LT}} : \text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glect}} \rightarrow \text{Mod}(\text{T}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}), \quad V \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_K} V \right)^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}}$$

$$\mathbb{V}_{\text{glect},\text{LT}} : \mathcal{M}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{G}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_K), \quad D \mapsto \left(\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}} D \right)^{\Phi_{\Delta,q}},$$

où les topologies en jeu sont respectivement la topologie π -adique sur \mathcal{O}_K et la topologie faible sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}$, sont correctement définis, lax monoïdaux et fermés. Leurs images essentielles sont contenues respectivement dans $\mathcal{M}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\text{T}_{K,\text{glect}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}})$ et $\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glect}}$. Leurs corestrictions forment une paire de foncteurs quasi-inverses.

Le monoïde $\text{T}_{K,\text{glect}}$ est intéressant car ses deux sous-monoïdes $\Phi_{\mathcal{P},q}$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{K,\text{gal}}$ contiennent $\varphi_{\mathcal{P},q}^{f_{\text{gal}}\mathbb{N}}$ comme sous-monoïde distingué sans que la suite exacte déduite soit scindée. Dans le cas non ramifié où $K = \mathbb{Q}_q$, on a simplement rajouté à $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod \mathbb{Z}_q^\times)$ une racine f -ième de $\varphi_{\mathcal{P},q}$.

Remarque 4.34. Toujours dans le cas $K = \mathbb{Q}_q$, nous pouvons faire un lien entre notre $\text{T}_{K,\text{glect}}$ -anneau et l'anneau de coefficients A dans [Bre+22]. Choisissons $f = T^q + \pi T$ et voyons $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ comme sous-monoïde de $\text{T}_{K,\text{glect}}$ en identifiant $\varphi_p^{\mathbb{N}}$ à $W_{\mathbb{Q}_p}^+/I_{\mathbb{Q}_q}$ et en plongeant \mathbb{F}_q^\times dans $\prod_{0 \leq i < f} \mathbb{Z}_q^\times$ par les représentants de Teichmüller $x \mapsto ([x])_i$. Alors, le $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ -anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}^+/\pi \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glect}}}^+$ s'identifie à un sous- $(\varphi_p^{\mathbb{N}} \times \mathbb{F}_q^\times)$ -anneau de A en envoyant X_{Frob^i} sur $Y_{f-1_i}^{p^i}$. Cela ouvre des perspectives quant au lien entre représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules glectiques.

Remarque 4.35. Nous esquissons une autre équivalence aux saveurs glectiques dont la preuve suivrait trait pour trait celle qui précède. Nous changeons légèrement l'action du monoïde $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{K,\mathcal{P}}^{\text{nr}}}}$ en décrétant que

$$\sigma(\otimes y_\tau) = \otimes \left(\varphi_{\tau,q}^{d_{\sigma,\sigma^{-1}\tau}} \circ g_{\sigma,\sigma^{-1}\tau} \circ i_{\tau,\sigma^{-1}\tau} \right) (y_{\sigma^{-1}\tau}).$$

Autrement dit, au lieu de faire tourner les plongements en se souvenant des problèmes de degrés, on se souvient en plus de toute l'information l'élément $g_{\sigma,\tau}$. En identifiant l'action de $\mathcal{G}_{K,\mathcal{P}}$ à une action de $\prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}$ par conjugaison par chacun des τ_{ext} , les deux actions s'assemblent en action continue du monoïde

$$\text{TG}'_{K,\text{glec}} := \left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}) \rtimes_{\text{glec}'} W_{\mathbb{Q}_p}^+ \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ \sim$$

avec

$$\text{glec}'(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, g_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, \sigma g_{\sigma^{-1}\tau} \sigma^{-1} \right)$$

et l'identification via le morphisme $\kappa'_{\text{glec}}(\sigma) = \left(\varphi_{\mathcal{P},q}^{\deg \sigma/f}, \sigma, \dots, \sigma \right)$. Autrement dit, nous faisons tourner les \mathcal{G}_{K_τ} par la conjugaison par $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ et nous identifions ceux de $W_{K_{\text{gal}}}^+$ à une puissance convenable du Frobenius $\varphi_{\mathcal{P},q}$ et à la diagonale dans $\prod \mathcal{G}_{K_\tau}$. Nous pouvons à nouveau vérifier que les morphismes $(\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod \mathcal{G}_{K_\tau})$ et $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sont des plongements de monoïdes topologiques. Nous notons $\widehat{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}^{\text{nr}}$ le $\text{TG}'_{K,\text{glec}}$ -anneau topologique obtenu.

Le quotient par $\Phi_{\mathcal{P},q}$ s'identifie à $(\prod_{\mathcal{P}} \mathcal{G}_{K_\tau}) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}^+ / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ \sim$. Après quotient, $W_{\mathbb{Q}_p}^+$ s'injecte encore, mais la topologie induite est désormais celle induite par $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Grâce à cette remarque, on peut établir que le morphisme $\text{TG}'_{K,\text{glec}} / \Phi_{\mathcal{P},q} \rightarrow \mathcal{G}_{K,\text{glec}}$ induit par $W_{\mathbb{Q}_p}^+ \subset \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un isomorphisme de monoïdes topologiques.

Le quotient par $\text{T}'_{K,\text{glec}} := \text{TG}'_{K,\text{glec}} / \mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}$ s'identifie à

$$\left((\Phi_{\mathcal{P},q} \times \prod_{\mathcal{P}} \mathcal{O}_{K_\tau}^\times) \rtimes_{\text{glec}'} W_{\mathbb{Q}_p}^+ / \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}} \right) / \sim W_{K_{\text{gal}}}^+ / \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}} \sim$$

où nous avons

$$\text{glec}'(\sigma) \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_\tau}, x_\tau \right) = \left(\prod \varphi_{\tau,q}^{n_{\sigma^{-1}\tau}}, \sigma(x_{\sigma^{-1}\tau}) \right)$$

et

$$\kappa_{\text{glec}'}(\sigma \mathcal{G}_{K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}}) = (\varphi_{\mathcal{P},q}^{\deg \sigma/f}, \text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma)).$$

Ici, $K_{\mathcal{P}}^{\text{ab}}$ est l'extension composée des K_τ^{ab} qui contient donc K^{nr} et correspond au sous-groupe

$$\{x \in \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}^\times \mid \forall \tau, N_{K_{\text{gal}}|K_\tau}(x) = 1\} \triangleleft \mathcal{O}_{K_{\text{gal}}}^\times$$

par la théorie du corps de classes locale.

En définissant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}} = \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}}^{\mathcal{H}_{K,\text{LT},\mathcal{P}}}$, nous obtenons à nouveau une équivalence de catégories

$$\text{Rep}_{\mathcal{O}_K} \mathcal{G}_{K,\text{glec}} \rightleftarrows \mathcal{M}\text{od}_{\pi\text{-dv}}^{\text{ét}}(\text{T}'_{K,\text{glec}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}).$$

De plus, l'action de $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}^+$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{K,\text{glec}'}}$ est l'unique morphisme de \mathcal{O}_K -algèbres topologiques tel que

$$\forall \tau \in \mathcal{P}, \quad \sigma \cdot X_\tau = [\tau_{\text{ext}}^{-1}(\text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma))]_{\text{LT},f}(X_{\sigma\tau}).$$

Notons que $\tau_{\text{ext}}^{-1}(\text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\sigma)) = \text{Art}_{K_\tau}^{-1}(\tau_{\text{ext}}^{-1}\sigma\tau_{\text{ext}})$.

A Étude détaillée des anneaux \widetilde{E}_Δ , $E_{\Delta,p}^{\text{sep}}$, etc

A.1 Plongement dans les anneaux de séries de Hahn-Mal'cev multivariables

La plupart des propriétés des anneaux $\widetilde{F}_{\Delta,q}$ sont déduites de propriétés des anneaux de séries de Hahn-Mal'cev multivariables que nous introduisons ici. Dans le cas univariable, l'étude des corps maximalement valués dans [Kap42] démontre que les anneaux d'entiers de notre corps perfectioïde \widetilde{E} et de ses extensions se plongent dans un anneau de séries formelles généralisées $k^{\text{alg}}[[t^{\mathbb{R}}]]$. Nous introduisons un analogue multivariable, démontrons un plongement similaire et l'étudions de manière fine pour en déduire les propriétés de $\widetilde{F}_{\Delta,q}$.

Définition A.1. Soit A un anneau et $(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ une famille finie de groupes abéliens totalement ordonnés. Définissons l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariables associé par

$$A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket = \left\{ \sum_{\underline{\gamma} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}} a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \mid \begin{array}{l} \forall \underline{\delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}, \forall \alpha \in \Delta, \text{ l'ensemble} \\ \left\{ \gamma_\alpha \leq \delta_\alpha \mid \exists \underline{\gamma}' \in \prod_{\beta \neq \alpha} \Gamma_{\beta, \geq 0, \leq \delta_\beta}, a_{(\gamma_\alpha, \underline{\gamma}')} \neq 0 \right\} \\ \text{est bien ordonné} \end{array} \right\}.$$

Proposition A.2. Les applications

$$A \rightarrow A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket, \quad a \mapsto at^0,$$

$$\left(\sum a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) + \left(\sum b_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) := \left(\sum (a_{\underline{\gamma}} + b_{\underline{\gamma}}) t^{\underline{\gamma}} \right)$$

$$\text{et } \left(\sum a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) \times \left(\sum b_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \right) := \left(\sum_{\underline{\gamma} \in \prod \Gamma_{\alpha, \geq 0}} \left(\sum_{\substack{\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2 \in \prod \Gamma_{\alpha, \geq 0} \\ \underline{\gamma}_1 + \underline{\gamma}_2 = \underline{\gamma}}} a_{\underline{\gamma}_1} b_{\underline{\gamma}_2} \right) t^{\underline{\gamma}} \right)$$

munissent $A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket$ d'une structure de A -algèbre. Elle est séparée et complète par rapport à la famille d'idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$ pour $\underline{\gamma} \in \prod_{\alpha \in \Delta} \Gamma_{\alpha, \geq 0}$. Elle est intègre (resp. réduite) dès que A est intègre (resp. réduit).

Démonstration. Laissée aux lecteurs et lectrices. \square

Remarque A.3. 1. De manière informelle, il s'agit de l'anneau des séries multivariables telle que pour tout multi-indice $\underline{\gamma}$, l'ensemble d'indices de la réduction modulo $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$ de notre série a toutes ses projections bien ordonnées.

2. Cet anneau est en général légèrement plus gros que la complétion de l'anneau

$$\bigotimes_{A, \alpha \in \Delta} A \llbracket t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \rrbracket$$

par rapport aux idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$. Par exemple, nous avons

$$\sum_{n \geq 1} (t_1 t_2)^{1 - \frac{1}{n}} \in A \llbracket t_1^{\mathbb{Q}}, t_2^{\mathbb{Q}} \rrbracket$$

sans qu'il n'appartienne à la complétion. Il est toutefois moins aisé de décrire la complétion, a fortiori de la manipuler.

3. Si nous imposons uniquement que les projections des indices apparaissant soient bien ordonnées, nous aurions un anneau non-complet par rapport aux idéaux $(t_\alpha^{\Gamma_\alpha} \mid \alpha \in \Delta)$. Il serait inadapté pour plonger \tilde{E}_Δ^+ .
4. La définition précédente coïncide avec les séries de Hahn-Mal'cev (voir [Hah07]) lorsque $|\Delta| = 1$.

Nous nous concentrons sur le cas qui nous servira où tous les groupes Γ_α sont égaux à un même sous-groupe Γ de \mathbb{R} .

Définition A.4. Soit A un anneau, Δ un ensemble fini et Γ un sous-groupe de \mathbb{R} . Pour $\gamma \in \Gamma$ et $\underline{c} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^\Delta$, définissons l'idéal $J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}$ de $A \llbracket t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta \rrbracket$ par

$$J_{\gamma, \Delta, \underline{c}} := \left(t^{\underline{\delta}} \mid \underline{\delta} \in \Gamma_{\geq 0}^\Delta, \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \delta_\alpha \geq \gamma \right).$$

Lorsque $\underline{c} = (1)_{\alpha \in \Delta}$, nous notons $J_{\gamma, \Delta}$ l'idéal obtenu.

Définition/Proposition A.5. Dans le cadre de la définition précédente, soit $\underline{c} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^\Delta$. Alors,

$$\forall x = \sum_{\underline{\gamma} \in \Gamma_{\geq 0}^\Delta} a_{\underline{\gamma}} t^{\underline{\gamma}} \in A \llbracket t_\alpha^\Gamma \mid \alpha \in \Delta \rrbracket, \quad \left\{ \sum c_\alpha \gamma_\alpha \mid \underline{\gamma} \text{ tel que } a_{\underline{\gamma}} \neq 0 \right\} \text{ est bien ordonné}$$

et la formule

$$|x|_{\Delta, \underline{c}} := e^{-\max\{\gamma \mid x \in J_{\gamma, \Delta, \underline{c}}\}}$$

définit une norme sous-multiplicative. Lorsque A est intègre, la norme $|\cdot|_{\Delta, \underline{c}}$ est multiplicative.

Démonstration. Dans cet article, nous laissons ces vérifications aux lecteurs et lectrices. \square

Corollaire A.6. Dans le cadre précédent, soit $\beta \in \Delta$. Si A est intègre, la norme t_β -adique est multiplicative sur $A[[t_\alpha^\Gamma | \alpha \in \Delta]]$.

Démonstration. Considérer les $|\cdot|_{\Delta, c_n}$ pour $c_{n,\beta} = n$ et $\forall \alpha \neq \beta, c_{n,\alpha} = 1$ puis faire diverger n . \square

Lemme A.7. Soit k un corps et A une k -algèbre noethérienne. Soit Δ un ensemble fini et Γ un groupe abélien totalement ordonné. L'application naturelle

$$\iota_0 : \bigotimes_{\alpha \in \Delta, k} A[[t_\alpha^\Gamma]] \rightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, k} A \right) [[t_\alpha^\Gamma | \alpha \in \Delta]]$$

est injective.

Pour toute famille finie de multi-indices $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$, nous avons un égalité d'idéaux

$$\iota_0^{-1}((t^{\gamma_i} | 1 \leq i \leq m)) = (t^{\gamma_i} | 1 \leq i \leq m).$$

Démonstration. Énoncé intermédiaire : soit $\alpha \in \Delta$. Nous commençons par montrer que le morphisme

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]] \otimes_k A[[t_\alpha^\Gamma]] \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta]]$$

est injectif. Considérons $\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes g_i$ dans le noyau. On écrit $g_i = \sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} a_{i,\gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha}$. En identifiant les termes en $t_\alpha^{\gamma_\alpha}$ au but, nous obtenons

$$\forall \gamma_\alpha, \sum_{1 \leq i \leq n} f_i a_{i,\gamma_\alpha} = 0 \text{ dans } \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]].$$

Par noethérianité de A , nous choisissons une famille de vecteurs $(e_k)_{1 \leq k \leq r}$ qui engendre le noyau

$$A^n \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]], \quad (a_i) \mapsto \sum_i f_i a_i.$$

Nous écrivons ensuite $(a_{i,\gamma_\alpha})_{1 \leq i \leq n} = \sum_k b_{k,\gamma_\alpha} e_k$ avec $\forall k, \gamma_\alpha, b_{k,\gamma_\alpha} \in A$. Le support de chaque famille $(b_{k,\gamma_\alpha})_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}}$ peut être choisi contenu dans l'union de tous les supports des $(a_{i,\gamma_\alpha})_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}}$: ce support vérifie les conditions des séries de Hahn-Mal'cev ce qui donne du sens aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes g_i &= \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} a_{i,\gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} \left(\sum_{1 \leq k \leq r} b_{k,\gamma_\alpha} e_{k,i} \right) t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r} f_i \otimes \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} b_{k,\gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) e_{k,i} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq r} \left(\sum_{\gamma_\alpha \in \Gamma_{\geq 0}} b_{k,\gamma_\alpha} t_\alpha^{\gamma_\alpha} \right) \left(\sum_{1 \leq i \leq n} f_i \otimes e_{k,i} \right) \end{aligned}$$

et chaque $\sum_i f_i \otimes e_{k,i}$ est dans le noyau de

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]] \otimes_k A \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right) [[t_\beta^\Gamma | \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]].$$

Prouver que cette dernière application est injective suffit à conclure. À nouveau, on identifie les coefficients. De plus, le noyau de l'application

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right)^n \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta, k} A \right), \quad (b_i) \mapsto \sum_i e_i \otimes b_i$$

est de type fini sur $(\otimes_{\beta \neq \alpha, k} A)$ puisqu'il s'agit du changement de base de

$$k^n \rightarrow A, \quad (x_i) \mapsto \sum_i x_i e_i$$

dont le noyau est de type fini sur k . On se ramène de cette manière à prouver que

$$\left(\bigotimes_{\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, k} A \right) \otimes_k A \rightarrow \left(\bigotimes_{\beta \in \Delta} A \right)$$

est injective, ce qui est tautologique.

Démonstration de l'injectivité : la flèche dont nous voulons montrer l'injectivité est une composée de changements de base au-dessus de k du morphisme ci-dessus.

Étude des idéaux : Soit $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille finie de multi-indices. Appelons J l'idéal engendré par les $t^{\underline{\gamma}_i}$ au but et J^\otimes celui engendré à la source. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous posons $\sigma_\alpha \in \mathfrak{S}_m$ telle que

$$\gamma_{\sigma_\alpha(1), \alpha} \leq \gamma_{\sigma_\alpha(2), \alpha} \leq \dots \leq \gamma_{\sigma_\alpha(m), \alpha}.$$

Supposons que $x = \sum_{1 \leq j \leq n} \otimes_{\alpha \in \Delta} f_{j, \alpha} \in J$. Nous découpons chaque $f_{j, \alpha}$ en

$$f_{j, \alpha} = \sum_{k=1}^m t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k), \alpha}} f_{j, \alpha, k}$$

où les monômes en t_α de $f_{j, \alpha, k}$ sont de degré strictement inférieur à $(\gamma_{\sigma_\alpha(k+1), \alpha} - \gamma_{\sigma_\alpha(k), \alpha})$. Il est alors possible d'écrire

$$x = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \in \llbracket 1, m \rrbracket^\Delta} \otimes_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha}.$$

Appelons Λ l'ensemble des uplets \underline{i} tels que

$$\exists i, \forall \alpha, \gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha} \geq \gamma_{i, \alpha}.$$

Autrement dit, nous sélectionnons les tranches qui appartiendront automatiquement à l'idéal J^\otimes . Pour chaque uplet $\underline{k} \in \Lambda$, choisissons $i_{\underline{k}}$ qui souligne son appartenance à Λ . Il est alors possible d'écrire

$$x_\geq := \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \in \Lambda} \otimes_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha} = \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq m} t^{\underline{\gamma}_i} \left(\sum_{\substack{\underline{k} \in \Lambda \\ \text{tel que } i_{\underline{k}} = i}} \otimes_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha} - \gamma_{i, \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha} \right) \in J^\otimes.$$

Par conséquent, l'image par ι_0 de

$$x_< := \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{\underline{k} \notin \Lambda} \otimes_{\alpha \in \Delta} t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha}$$

doit également appartenir à J . Or,

$$\forall \underline{k} \notin \Lambda, \forall i, \exists \alpha, \gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha} < \gamma_{i, \alpha}$$

ce qui implique immédiatement par définition des σ_α

$$\forall \underline{k} \notin \Lambda, \forall i, \exists \alpha, \gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha+1), \alpha} \leq \gamma_{i, \alpha}$$

Si un monôme $t^{\underline{\gamma}}$ apparaît dans $\iota_0(\sum_j \otimes t_\alpha^{\gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha), \alpha}} f_{j, \alpha, k_\alpha})$ nous avons par construction des $f_{j, \alpha, k}$ que

$$\forall \alpha, \gamma_\alpha < \gamma_{\sigma_\alpha(k_\alpha+1), \alpha}.$$

Il en découle que $\nexists i, \forall \alpha, \gamma_\alpha \geq \gamma_{i, \alpha}$. Dans l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariées, l'appartenance à J se teste sur les monômes qui apparaissent. Il en découle que $\iota_0(x_<) = 0$. Puisque nous avons déjà démontré que ι_0 est injective, il en découle que $x_< = 0$ soit $x = x_\geq \in J^\otimes$. \square

Nous reprenons à présent les notations de la section 2.1. Nous fixons \tilde{E} un corps perfectioïde de caractéristique p , tel que la clôture algébrique de \mathbb{F}_p dans \tilde{E} est munie d'un isomorphisme avec \mathbb{F}_q . Nous fixons également un ensemble fini Δ . Nous étudions tout d'abord l'anneau \tilde{E}_Δ (et par conséquent tous les \tilde{F}_Δ).

Définition A.8. Pour tout $r \in \mathbb{N}[q^{-1}]$, nous définissons l'idéal $I_{r,\Delta}$ de \tilde{E}_Δ^+ par

$$I_{r,\Delta} := \left(\varpi^{\underline{r}} \mid \underline{r} \in (\mathbb{N}[q^{-1}])^\Delta, \sum r_\alpha = r \right) = \bigcup_{k \gg k_r} \varphi_{\Delta,q}^{-k} \left((\varpi)^{q^k r} \right)$$

où k_r est tel que $q^{k_r} r \in \mathbb{N}$.

On définit de même la famille d'idéaux

$$I_{r^-, \Delta} := \bigcap_{\substack{r' \in \mathbb{N}[q^{-1}] \\ \text{tel que } r' < r}} I_{r', \Delta}.$$

Proposition A.9. *Il existe une injection d'anneaux*

$$\hat{\iota} : \tilde{E}_\Delta^+ \hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket.$$

De plus, nous pouvons choisir cette injection de telle sorte que

$$\forall r \in \mathbb{N}[q^{-1}], \quad \hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r^-, \Delta}.$$

Démonstration. Grâce à [Bou81, V §17, Proposition 9], l'extension $\tilde{E}|\mathbb{F}_q$ est régulière. Il en découle que l'anneau $\tilde{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ est intègre. Sa complétion ϖ -adique est encore un corps perfectioïde, de pseudo-uniformisante ϖ et de corps résiduel muni d'un plongement de $\overline{\mathbb{F}_q}$; nous le notons \tilde{E}' . Il est lui-même plongé dans un corps perfectioïde²⁹ \tilde{F} de pseudo-uniformisante ϖ et de corps résiduel k^{alg} . Nous obtenons grâce à [Kap42, Corollaire du Théorème 8] que \tilde{F} est analytiquement isomorphe à un sous-corps de $k^{\text{alg}}(\llbracket t^{\mathbb{R}} \rrbracket)$, avec ϖ envoyé sur t : notre corps est perfectioïde de corps résiduel algébriquement clos et de groupe de valeurs contenu dans \mathbb{R} ce qui permet de vérifier sans problème les hypothèses du théorème de Kaplansky. De plus, en examinant attentivement la preuve de [Kap42, Lemme 13], nous pouvons garantir que chaque $\varpi^{q^{-n}}$ est envoyé sur $t^{q^{-n}}$. Il existe ainsi une suite d'injections d'anneaux

$$\tilde{E} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \tilde{E}'^+ \hookrightarrow \tilde{F}^+ \hookrightarrow k^{\text{alg}} \llbracket t^{\mathbb{R}} \rrbracket$$

qui envoie $\varpi^{q^{-n}}$ sur $t^{q^{-n}}$. Nous obtenons une suite d'injections

$$\begin{aligned} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha^+ &\hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha^+ \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \cong \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \left(\tilde{E}_\alpha^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \right) \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}'_\alpha^+ \\ &\hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \rrbracket \\ &\hookrightarrow \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket \end{aligned}$$

où la dernière provient du lemme A.7. Appelons ι la composée.

Commençons par considérer une famille finie $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$ de multi-indices à valeurs dans $\mathbb{N}[q^{-1}]$ et I^\otimes (resp. I'^\otimes , resp. J^\otimes , resp. J) l'idéal engendré par la famille $(\varpi^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$ (resp. $(\varpi^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$, resp. $(t^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$, resp. $(t^{k_i})_{1 \leq i \leq m}$) à la source du morphisme ι (resp. chaque étape de sa décomposition ci-dessus par ordre croissant). Nous démontrons que $\iota^{-1}(J) = I^\otimes$.

Nous savons déjà grâce au Lemme A.7 réciproque de J par le dernier morphisme est J^\otimes . Pour passer de J^\otimes à I^\otimes , fixons n tel que $\forall i, \alpha, k_{i,\alpha} \in q^{-n}\mathbb{N}$. Pour démontrer que l'image réciproque de J^\otimes est I^\otimes , nous commençons par une remarque. Prenons une famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ dans \tilde{E}^+ telle que la famille des réductions est une

29. Considérer par exemple la complétion de sa clôture algébrique.

\mathbb{F}_q -base de $\tilde{E}^+/\varpi^{q^{-n}}$. Puisque \tilde{E}^+ est $\varpi^{q^{-n}}$ -adiquement séparé et complet, tout élément s'écrit de manière unique comme

$$\sum_{k \geq 0, i \in \mathcal{I}} a_{k,i} e_i \varpi^{k/q^n}$$

pour une famille presque nulle $((a_{k,i})_{k \geq 0})_{i \in \mathcal{I}}$ d'éléments de \mathbb{F}_q . Autrement dit, nous avons l'égalité algébrique

$$\tilde{E}^+ = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi^{q^{-n}} \rrbracket e_i.$$

Pour tout multi-indice $\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta$, nous appelons $e_{\underline{i}} = \otimes e_{i_\alpha}$ de tel sorte que

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) e_{\underline{i}}.$$

Appelons

$$A_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket, \quad A'_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket \varpi_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \text{ et } B_n := \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket.$$

Puisque $\tilde{E}^+/\varpi^{q^{-n}} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q} \cong \tilde{E}'^+/\varpi^{q^{-n}} \hookrightarrow k^{\text{alg}} \llbracket t^\mathbb{R} \rrbracket / t^{q^{-n}}$, nous pouvons étendre la famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ en une famille indexée par $\mathcal{J} \supset \mathcal{I}$ telle que $(f_j)_{j \in \mathcal{J}}$ soit une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base de $k^{\text{alg}} \llbracket t^\mathbb{R} \rrbracket / t^{q^{-n}}$ et que l'image de e_i coïncide avec f_i . La famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ s'identifie aussi à une $\overline{\mathbb{F}_q}$ -base de $\tilde{E}'^+/\varpi^{q^{-n}}$. Nous obtenons donc trois décompositions comme A_n -module (resp. A'_n - ou B_n -module)

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} A_n e_{\underline{i}}, \quad \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha^+ = \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}^\Delta} A'_n e_{\underline{i}} \text{ et } \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^\mathbb{R} \rrbracket = \bigoplus_{\underline{j} \in \mathcal{J}^\Delta} B_n f_{\underline{j}}.$$

Les idéaux I^\otimes , I'^\otimes et J sont engendrés par des éléments qui appartiennent respectivement à A_n , A'_n et B_n . Nous appelons $I^{\otimes, \text{res}}$ l'idéal engendré dans A_n , $I'^{\otimes, \text{res}}$ dans A'_n et $J^{\otimes, \text{res}}$ dans B_n . Un élément appartient à I^\otimes (resp. I'^\otimes , resp. J^\otimes) si et seulement si³⁰ toutes ses coordonnées appartiennent à $I^{\otimes, \text{res}}$ (resp. $I'^{\otimes, \text{res}}$, resp. $J^{\otimes, \text{res}}$).

Nous allons exécuter des manipulations lourdes en notations, qui reviennent au fond à considérer les coordonnées dans une décomposition sur la famille des $e_{\underline{i}} \varpi^{k/q^n}$. Toutefois, en se contentant de décomposer ainsi, on perdrait la trace de l'appartenance des coordonnées au produit tensoriel des séries formelles à l'intérieur des séries multivariées. Cette justification sur le caractère hideux de ce qui suit terminée, prenons le morphisme

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha'^+ \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^\mathbb{R} \rrbracket.$$

Nous obtenons donc un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha'^+ & \xrightarrow{=} & \bigoplus_{\underline{i} \in \mathcal{I}'^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket \varpi_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) e_{\underline{i}} \\ \downarrow & & \downarrow \varpi^{q^{-n}} \mapsto t^{q^{-n}} \text{ et } \mathcal{I}' \subset \mathcal{J} \\ \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \llbracket t_\alpha^\mathbb{R} \rrbracket & \xrightarrow{=} & \bigoplus_{\underline{j} \in \mathcal{J}^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) f_{\underline{j}} \end{array}$$

L'idéal J^\otimes est exactement les éléments de coordonnées dans $J^{\otimes, \text{res}}$, qui s'identifie à $I'^{\otimes, \text{res}}$ via $\varpi \mapsto t$. L'image réciproque de J^\otimes est constituée des éléments de coordonnées dans $I'^{\otimes, \text{res}}$, i.e. les éléments de I'^\otimes .

Regardons le morphisme

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha'^+$$

Puisque \tilde{E}'^+ est le complété de $\tilde{E}^+ \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$, il se trouve qu'une famille $(e_i)_{i \in \mathcal{I}}$ pour \tilde{E}^+ et \mathbb{F}_q fournit également une famille pour \tilde{E}'^+ et $\overline{\mathbb{F}_q}$. Nous obtenons ainsi un diagramme commutatif

30. Pour remonter, faire attention que seulement un nombre fini de coordonnées sont non nulles et l'idéal considéré est de type fini.

$$\begin{array}{ccc}
\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ & \xrightarrow{=} & \bigoplus_{i \in \mathcal{I}^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket \varpi_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) e_i \\
\downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbb{F}_q} \\
\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \tilde{E}_\alpha^{'+} & \xrightarrow{=} & \bigoplus_{j \in \mathcal{I}^\Delta} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) e_i
\end{array}$$

Comme les appartenances à I^\otimes et I'^\otimes se voient coordonnée par coordonnée, il suffit de démontrer que l'image réciproque de I'^\otimes, res par la tensorisation par $\overline{\mathbb{F}_q}$ est I^\otimes, res . Prenons $\{1\} \sqcup \mathcal{B}$ une \mathbb{F}_q -base de $\overline{\mathbb{F}_q}$. Il est possible d'écrire

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} \overline{\mathbb{F}_q} \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) \oplus \left[\bigoplus_{b \in \mathcal{B}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q \llbracket t_\alpha^{q^{-n}} \rrbracket \right) b \right].$$

À nouveau, l'appartenance à I'^\otimes, res se lit sur les coordonnées : il faut qu'elles appartiennent à I^\otimes, res . Cela conclut.

Nous avons démontré par circonvolutions et tourbillons de notations que $\iota^{-1}(J) = I^\otimes$ pour toute famille finie de multi-indices. En prenant l'union, on obtient le résultat pour des familles quelconques de multi-indices.

En particulier, pour tout entier $k \geq 1$, l'image réciproque de l'idéal $(\underline{t})^k$ est l'idéal $(\underline{\varpi})^k$. L'anneau \tilde{E}_Δ^+ est la complétion de $\bigotimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+$ par rapport aux idéaux $(\underline{\varpi})^k$ pour $k \geq 1$. Dire que l'image réciproque de $(\underline{t})^k$ est $(\underline{\varpi})^k$ implique exactement que ι se complète en un morphisme d'anneaux

$$\hat{\iota} : \tilde{E}_\Delta^+ = \varprojlim_k \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+ \right) / (\underline{\varpi})^k \hookrightarrow \varprojlim_k \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket / (\underline{t})^k = \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket$$

Revenons aux énoncés sur les idéaux. Nous commençons par raffiner notre propriété sur les images inverses en remplaçant ι par $\hat{\iota}$. Considérons une famille de multi-indice $(\underline{k}_i)_{i \in \mathcal{J}}$ telle que

$$\exists n, \forall \alpha \in \Delta, \exists k_\alpha \leq n, (0, \dots, 0, k_\alpha, 0, \dots, 0) \in \{\underline{k}_i \mid i \in \mathcal{J}\}.$$

Cette condition sur les indices équivaut à ce que l'idéal $(\underline{t}^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{J})$ est ouvert pour la topologie (\underline{t}) -adique dans les séries de Hahn-Mal'cev multivariées. Prouver que $\hat{\iota}^{-1}((\underline{t}^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{J})) = (\underline{\varpi}^{\underline{k}_i} \mid i \in \mathcal{J})$ dans \tilde{E}_Δ^+ se restreint alors à le prouver pour $\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{E}_\alpha^+$.

Cette remarque va nous permettre de conclure quant à l'image réciproque de $J_{r,\Delta}$. A première vue, nous voudrions que $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r,\Delta}$ mais $J_{r,\Delta}$ n'est pas engendré par $\{t^{\underline{s}} \mid \underline{s} \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \text{ tel que } \sum s_\alpha = r\}$. En réalité,

$$J_{r,\Delta} = \bigcap_{\substack{r' \in \mathbb{N}[q^{-1}] \\ \text{tel que } r' < r}} \left(t^{\underline{s}} \mid \underline{s} \in \mathbb{N}[q^{-1}]^\Delta \text{ tel que } \sum s_\alpha = r' \right).$$

Le calcul des images réciproques des idéaux ouverts passent à l'intersection en $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r^-, \Delta}$. □

Corollaire A.10. *L'anneau \tilde{E}_Δ^+ est intègre.*

Démonstration. Puisque $\overline{\mathbb{F}_q}$ est parfait et algébriquement clos, nous savons grâce à [Bou81, V §5, Proposition 9] que toutes ses extensions sont régulières, en particulier $\left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right)$ est intègre. Nous déduisons que l'anneau de séries de Hahn-Mal'cev multivariable est intègre, puis que \tilde{E}_Δ^+ est intègre par injectivité de $\hat{\iota}$. □

Corollaire A.11. 1. *La formule*

$$|x|_{\tilde{E}, \Delta} = e^{-\sup\{r \in \mathbb{N}[q^{-1}] \mid x \in I_{r^-, \Delta}\}}$$

fournit une norme multiplicative sur \tilde{E}_Δ^+ .

2. *Nous avons*

$$\forall \underline{k} \in (\mathbb{N}[q^{-1}])^\Delta, \quad \hat{\iota}^{-1}((\underline{t}^{\underline{k}})) = (\underline{\varpi}^{\underline{k}}).$$

Démonstration. 1. Les propriétés de $|\cdot|_{\tilde{E}, \Delta}$ se déduisent alors de celles de $|\cdot|_{\Delta, 1}$ à la Proposition A.5 et des égalités $\hat{\iota}^{-1}(J_{r,\Delta}) = I_{r^-, \Delta}$ à la Proposition A.9.

2. Il faut démontrer que $\hat{\iota}^{-1}((t^k)) \subseteq (\varpi^k)$. Soit x dans l'image réciproque. Nous avons

$$\forall n, \hat{\iota}(x) \in (t^k, J_{n,\Delta}).$$

Ce dernier idéal étant (ϖ) -adiquement ouvert, nous avons démontré en prouvant la Proposition A.9 que $\forall n, x \in (\varpi^k, I_{n-,\Delta})$. Écrivons $x = \varpi^k x'_n + y_n$ avec $y_n \in I_{n-,\Delta}$. Alors, $x = \lim \varpi^k x'_n$ pour la norme $|\cdot|_{\tilde{E},\Delta}$. Cette dernière étant multiplication, la suite x'_n est également de Cauchy pour la norme $|\cdot|_{\tilde{E},\Delta}$. Puisque

$$I_{(n+1)|\Delta|-\Delta} \subset I_{n|\Delta|,\Delta} \subset (\varpi^n) \subset (\varpi)^n,$$

la suite (x'_n) est également (ϖ) -adiquement de Cauchy et possède une limite $x' \in \tilde{E}_\Delta^+$ qui vérifie que $x = \varpi^k x'$. □

A.2 Relations de coinduction perfectoïdes

Pour comprendre les anneaux $\tilde{F}_{\Delta,q}$ nous les exprimons comme des coinduites des \tilde{F}_Δ , que nous venons d'analyser. L'intuition nous vient du lemme suivant sur les corps finis.

Lemme A.12. *Définissons une structure de $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ -anneau sur $\mathbb{F}_{q'}$ en en faisant agir le générateur $\varphi_{\Delta,r}$ du quotient $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}/\Phi_{\Delta,q'}^{\text{gp}} \cong \varphi_{\Delta,r}^{\mathbb{Z}}/\varphi_{\Delta,q'}^{\mathbb{Z}}$ comme le r -Frobenius. Il existe un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux*

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}).$$

Démonstration. Pour tout $\psi \in \Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$, nous définissons

$$\psi_{\text{spé}} : \bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \rightarrow \mathbb{F}_{q'}, \quad \otimes x_\alpha \mapsto \prod \psi_\alpha(x_\alpha)$$

et nous considérons

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \rightarrow \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}), \quad x \mapsto [\psi \mapsto \psi_{\text{spé}}(x)] \quad (*)$$

pour lequel nous laissons aux lecteurs et lectrices le soin de vérifier qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux. □

Gardons en tête les notations de la preuve précédente pour établir un analogue pour nos anneaux multivariables. Nous nous plaçons dans le même contexte qu'à la section précédente.

Proposition A.13. *Rappelons que \tilde{F}_Δ^+ est muni d'une structure de $\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$ -anneau et $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ d'une structure de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneau. Il existe un isomorphisme canonique de $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}$ -anneaux*

$$\tilde{F}_{\Delta,q}^+ \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\tilde{F}_\Delta^+).$$

C'est un homéomorphisme pour les topologies discrètes (resp. adiques) sur $\tilde{F}_{\Delta,q}^+$ et \tilde{F}_Δ^+ , et la topologie produit sur la coinduite. Le même résultat est vrai pour $\tilde{F}_{\Delta,q}$ et \tilde{F}_Δ .

Démonstration. Nous appelons encore $\psi_{\text{spé}}$ le morphisme de $\tilde{F}_{\Delta,q}$ dans \tilde{F}_Δ donné par la même formule que dans la démonstration du lemme A.12.

Choisissons un système \mathcal{R} de représentants du quotient fini $\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}/\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}$. Nous avons un isomorphisme d'anneaux

$$\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta,q,r}^{\text{gp}}}(\mathbb{F}_{q'}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \mathbb{F}_{q'}, \quad f \mapsto (f(\psi))_{\psi \in \mathcal{R}}.$$

Pour n'importe quel $\beta \in \Delta$, nous pouvons établir la suite d'isomorphismes d'anneaux suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta \setminus \{\beta\}, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_q} \tilde{F}_\beta^+ &\cong \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_{q', \beta}} \tilde{F}_\beta^+ \\
&\cong \left(\prod_{\psi \in \mathcal{R}} \mathbb{F}_{q'} \right) \otimes_{\mathbb{F}_{q', \beta}} \tilde{F}_\beta^+ \\
&\cong \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \left(\mathbb{F}_{q'} \otimes_{\psi_\beta, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_\beta^+ \right) \\
&\cong \prod_{\psi \in \mathcal{R}} \tilde{F}_\beta^+ \\
&\cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}} (\tilde{F}_\beta^+)
\end{aligned}$$

où $\mathbb{F}_{q', \beta}$ est une notation pour indiquer que le produit tensoriel est vu comme $\mathbb{F}_{q'}$ -algèbre via son facteur β et où ψ_β est la composante de ψ sur $\varphi_{\beta, p}^{\mathbb{N}}$. Le passage à la troisième ligne correspond simplement à expliciter cette structure d'algèbre sur chaque facteur du produit, et à faire commuter le produit fini au produit tensoriel. Le passage à la quatrième ligne correspond à appliquer au facteur ψ l'isomorphisme $x \otimes y \mapsto x\psi_\beta(y)$. Nous vérifions que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneau en suivant l'image de

$$\chi \left(\left(\bigotimes_{\alpha \neq \beta} x_\alpha \right) \otimes y_\beta \right) = \bigotimes_{\alpha \neq \beta} \chi_\alpha(x_\alpha) \otimes \chi_\beta(y_\beta)$$

le long des isomorphismes et en vérifiant qu'elle vaut

$$\left[\psi \mapsto \prod_{\alpha \neq \beta} (\psi \chi)_\alpha(x_\alpha) \times (\psi \chi)_\beta(y_\beta) \right].$$

Une itération de ces arguments fournit un isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneaux :

$$\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_q} \tilde{F}_\alpha^+ \xrightarrow{\sim} \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}} \left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_\alpha^+ \right), \quad \otimes y_\alpha \mapsto [\psi \mapsto \psi_{\text{spé}}(\otimes y_\alpha) = \otimes \psi_\alpha(y_\alpha)]. \quad (**)$$

Attention, les arguments de $\psi_{\text{spé}}$ sont des tenseurs sur \mathbb{F}_q mais les valeurs de sortie sont des tenseurs sur $\mathbb{F}_{q'}$.

Grâce à l'expression explicite du morphisme, chaque ϖ_α est envoyé dans la coinduite sur $(\psi_\alpha(\varpi_\alpha))_{\psi \in \mathcal{R}}$. Les puissances de l'idéal $((\psi_\alpha(\varpi_\alpha))_{\psi \in \mathcal{R}} \mid \alpha \in \Delta)$ et de l'idéal $((\varpi_\alpha)_{\psi \in \mathcal{R}} \mid \alpha \in \Delta)$ étant cofinales les unes dans les autres, l'isomorphisme est un homéomorphisme pour la topologie (ϖ) -adique à la source et et le produit des topologies (ϖ) -adiques au but. L'isomorphisme se complète donc en un isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneaux

$$\tilde{F}_{\Delta, q}^+ \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta, q', r}^{\text{gp}}}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}} (\tilde{F}_\Delta^+).$$

C'est évidemment un homéomorphisme pour les topologies discrètes partout.

Par intégrité de \tilde{F}_Δ^+ , un élément $x \in \tilde{F}_\Delta^+$ appartient à $\varpi_\Delta \tilde{F}_{\Delta, q}^+$ si et seulement si chaque $\psi_{\text{spé}}(x)$ appartient à $\psi_{\text{spé}}(\varpi_\Delta) \tilde{F}_\Delta^+$. En écrivant la coinduite comme un produit fini et en remarquant que tous les $(\psi_{\text{spé}}(\varpi_\Delta))$ ont même radical, c'est un homéomorphisme pour la topologie ϖ_Δ -adique et le produit des topologies ϖ_Δ -adiques.

En inversant ϖ_Δ et en remarquant que (ϖ_Δ) et $(\psi_{\text{spé}}(\varpi_\Delta))$ ont même radical dans \tilde{F}_Δ , on obtient l'isomorphisme de $\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}$ -anneaux continus pour les topologies adiques. \square

Corollaire A.14. *L'anneau $\tilde{F}_{\Delta, q}^+$ est réduit et sans \tilde{E}_Δ^+ -torsion.*

Démonstration. La coinduite est un anneau de fonctions à valeurs dans \tilde{F}_Δ^+ . Nous avons prouvé que ce dernier est intègre au Corollaire A.10 donc la coinduite est réduite.

Pour la torsion, utiliser que le plongement de \tilde{E}_Δ^+ dans la coinduite s'écrit $\prod \psi$, que chaque ψ est injectif et que \tilde{F}_Δ^+ est sans \tilde{E}_Δ^+ -torsion. \square

Corollaire A.15. *L'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq \tilde{F}_{\Delta, q}^{\Phi_{\Delta, q, r}^{\text{gp}}}$ est une égalité.*

Démonstration. Grâce à l'identification à une coinduite, on se ramène à prouver que l'inclusion $\mathbb{F}_r \subseteq \tilde{F}_{\Delta}^{\Phi^{\text{gp}}_{\Delta, q', r}}$ est une égalité.

Soit y un élément invariant. Nous fixons n tel que $\varpi_{\Delta}^n y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. En appliquant $\varphi_{\Delta, r}$, on trouve

$$(\varpi_{\Delta}^n y)^r = \varpi_{\Delta}^{rn} \varphi_{\Delta, r}(y) = \varpi_{\Delta}^{(r-1)n} (\varpi_{\Delta}^n y).$$

En appliquant $|\cdot|_{\tilde{F}, \Delta}$ dont nous avons prouvé au Corollaire A.5 qu'elle est multiplicative, nous trouvons $|\varpi_{\Delta}^n y|_{\tilde{F}, \Delta} = 0$ ou $|\varpi_{\Delta}^n y|_{\tilde{F}, \Delta} = |\varpi_{\Delta}^n|_{\tilde{F}, \Delta}$. En utilisant la séparation de la norme, sa multiplicativité et le fait que ϖ_{Δ}^n n'est pas diviseur de zéro, on en déduit que $y = 0$ ou $y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$ de norme 1. Il existe donc $y_0 \in \mathbb{F}_{q'}$ tel que $|y - y_0|_{\tilde{F}, \Delta} < 1$. En appliquant le même raisonnement à cette différence, on trouve $y = y_0$. \square

Corollaire A.16. *Si l'on munit $\tilde{F}_{\Delta, q}$ de topologie adique, la paire $(\tilde{F}_{\Delta, q}, \tilde{F}_{\Delta, q}^+)$ est une paire de Huber perfectoïde.*

Démonstration. La définition de la topologie adique implique que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+$ est un anneau de définition. Il est de plus parfait de pseudo-uniformisant ϖ_{Δ} . Nous savons alors que $\tilde{F}_{\Delta, q}$ est un anneau de Tate perfectoïde. Pour conclure, il reste à démontrer que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+$ est intégralement clos. Nous montrons même que $\tilde{F}_{\Delta, q}^+ = \tilde{F}_{\Delta, q}^{\circ}$.

Avec l'expression de $\tilde{F}_{\Delta, q}$ comme coinduite, la topologie adique est produit des topologies sur \tilde{F}_{Δ} ; son anneau de définition comme anneau de Huber est la limite des anneaux des définitions terme à terme; son idéal de définition canonique est la limite de différents idéaux de définitions pour chaque terme. Ainsi, ses éléments bornés sont exactement la limite des éléments bornés : on se restreint à démontrer le résultat pour \tilde{F}_{Δ} . Soit $y \in \tilde{F}_{\Delta}^{\circ}$ que l'on écrit z/ϖ_{Δ}^k avec $z \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. Par hypothèse, fixons $l \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq 0, \varpi_{\Delta}^l y^{q^n} \in \tilde{F}_{\Delta}^+.$$

Puisque \tilde{F}_{Δ}^+ est parfait, cela implique que

$$\forall n \geq 0, z \in \varpi_{\Delta}^{k-l/q^n} \tilde{F}_{\Delta}^+.$$

Dans l'anneau des séries de Hahn-Mal'cev multivariables, nous en déduisons

$$\forall n \geq 0, \hat{\iota}(z) \in (t_{\Delta}^{k-l/q^n})$$

puis $\hat{\iota}(z) \in (t_{\Delta}^k)$. Grâce au Corollaire A.11, ceci implique que $z \in \varpi_{\Delta}^k \tilde{F}_{\Delta}^+$, i.e. que $y \in \tilde{F}_{\Delta}^+$. \square

A.3 Étude des anneaux imparfaits

Pour obtenir une version imparfaite de l'équivalence de Carter-Kedlaya-Zábrádi, nous établissons des relations de coinductions sur ces anneaux imparfaits. Nous aurons besoin de la notion de sous-monoïde d'indice subtil fini introduite dans [Mar24b, Section 3.3].

Définition A.17. Soit \mathcal{T} un monoïde et $\mathcal{S} < \mathcal{T}$ un sous-monoïde. L'ensemble des classes à gauche $\{t\mathcal{S} \mid t \in \mathcal{T}\}$ est muni d'un ordre par l'inclusion. Soit $\mathcal{R}_{\min} \subset \mathcal{T}$ tels que les $(t\mathcal{S})_{t \in \mathcal{R}_{\min}}$ sont distincts et parcourent toutes les classes maximales pour l'inclusion. Définissons $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}) := \{(s_1, s_2, t_1, t_2) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{R}_{\min}^2 \mid s_1 t_1 = s_2 t_2\}$ et munissons-le d'un ordre en fixant que

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall (s_1, s_2, t_1, t_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}), (ss_1, ss_2, t_1, t_2) \leq (s_1, s_2, t_1, t_2).$$

Remarquons que l'ensemble ordonné $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$ ne dépend pas à isomorphisme près du choix de représentants. Nous l'appelons \mathcal{L} par abus de notation.

Le sous-monoïde \mathcal{S} est dit d'indice subtil fini si les classes à gauche maximales sont en nombre fini et cofinales parmi les classes à gauche et si les quadruplets maximaux de \mathcal{L} sont en nombre finis et cofinaux.

Avec les notations précédentes, si l'on suppose simplement que les classes à gauches maximales sont cofinales, nous obtenons déjà

$$\text{Coind}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{T}}(X) \cong \left\{ (x_t) \in \prod_{t \in \mathcal{R}_{\min}} X \mid \forall (s_1, s_2, t_1, t_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min}), \varphi_{s_1}(x_{t_1}) = \varphi_{s_2}(x_{t_2}) \right\}.$$

La condition peut se restreindre à une famille cofinale de $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$. L'indice subtil fini garantit que la coinduction s'exprime comme une limite finie.

Lemme A.18. *Le sous-monoïde $\Phi_{\Delta,q,p} < \Phi_{\Delta,p}$ est d'indice subtil fini.*

Démonstration. En posant $q = p^f$, on réécrit cette inclusion de monoïdes comme $(f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^\Delta$. Toute classe à gauche $(n_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$ où $(n_i) \in \mathbb{N}^\Delta$ est contenue dans l'une des classes minimales pour l'inclusion

$$\{(k_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N} \mid \forall i, 0 \leq k_i < f \text{ et } \exists i, k_i = 0\}.$$

Pour finir la démonstration, nous allons démontrer que pour toute paire $((n_i), (m_i))$ de Δ -uplets, les relations entre classes à gauche associées ont une famille finie et cofinale de relations minimales. Puisque tout élément de \mathbb{N}^Δ est régulier, une relation est $(n_i) + (k_i) = (m_i) + (l_i)$ est entièrement déterminée par (k_i) .

Considérons

$$R = \{(r_i, r) \in \mathbb{N}^\Delta \times \mathbb{N} \mid (n_i) + (fr_i) + r(1, \dots, 1) \in (m_i) + (f\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{N}^\Delta \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre partiel produit est un bel ordre (utiliser le lemme de Dickson pour comprendre les antichaînes). Ainsi R possède une famille finale et finie. Les relations données par ces éléments minimaux forment un système fini cofinal des relations entre $(n_i) + (d\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$ et $(m_i) + (d\mathbb{N})^\Delta + (1, \dots, 1)\mathbb{N}$. \square

Proposition A.19. 1. *Pour $F|E$ finie galoisienne, il existe un isomorphisme de $(\mathcal{G}_{E,\Delta} \times \Phi_{\Delta,p})$ -anneaux topologiques discrets*

$$F_{\Delta,p} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(F_{\Delta,q}),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

2. *Il existe un isomorphisme de $(\mathcal{G}_{E,\Delta} \times \Phi_{\Delta,p})$ -anneaux topologiques discrets*

$$E_{\Delta,p}^{\text{sep}} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(E_{\Delta}^{\text{sep}}),$$

où la coinduite est munie de la topologie limite.

Démonstration. 1. La démonstration suit la même stratégie que la Proposition A.13, avec plusieurs changements notables. Tout d'abord, le morphisme similaire à celui donné dans la preuve en (**) est invariant par $\mathcal{G}_{E,\Delta}$ puisque l'action commute à chaque $\psi_{\text{spé}}$. Cette invariance est ensuite conservée par complétion et localisation. Il faut également prendre en compte que nos actions ne sont plus que des actions de monoïdes. Fixons \mathcal{R}_{\min} un système fini de représentants des classes à gauche minimales pour l'inclusion, qui sont finales pour l'inclusion, pour le sous-monoïde $\Phi_{\Delta,q,p} < \Phi_{\Delta,p}$. Fixons $\mathcal{L}_{\min} \subset \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\min})$ un système fini et final des éléments minimaux. Ceci est possible grâce au Lemme A.18. Notons $(\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}$ la petite catégorie ayant pour objets $\mathcal{R}_{\min} \sqcup \{\psi_1 \tau_1 \mid (\psi_1, \tau_1, \psi_2, \tau_2) \in \mathcal{L}_{\min}\}$ et pour flèches les identités et les $\tau_1 \rightarrow \psi_1 \tau_1$ pour toute relation dans \mathcal{L}_{\min} . Pour tout $\Phi_{\Delta,q,p}$ -anneau A , nous avons alors un isomorphisme

$$\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(A) \xrightarrow{\sim} \lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} A, \quad f \mapsto [\psi \mapsto f(\psi)] \quad (*)2$$

où le diagramme dont on prend la limite associe l'endomorphisme ψ de A au morphisme $[\tau \rightarrow \psi\tau]$ dans $(\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}$. Cette description ne suffit pas : en effet le passage à la quatrième ligne dans la première suite d'isomorphismes en Proposition A.13 utilise que

$$\mathbb{F}_{q'} \otimes_{\psi_\beta, \mathbb{F}_{q'}} \tilde{F}_\beta^+ \rightarrow \tilde{F}_\beta^+, \quad x \otimes y \mapsto x\psi_\beta(y)$$

est un isomorphisme. Pour F_β^+ , il sera seulement injectif. Bonne nouvelle, les projections sur chaque facteur dans la limite de (*)2 ne sont pas non plus surjectives. Pour réparer l'argument, il suffit de démontrer que

$$\lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} F_\beta^+ = \lim_{\psi \in (\mathcal{R} \nearrow \mathcal{L})_{\min}} \psi_\beta(F_\beta^+).$$

Démontrons que si la fonction f appartient à $\text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q,p}}^{\Phi_{\Delta,p}}(F_\beta^+)$ et $\psi \in \Phi_{\Delta,p}$, alors $f(\psi) \in \psi_\beta(F_\beta^+)$. Supposons que $\psi_\beta = \varphi_{\beta,p}^n$ et fixons m, k tels que $\varphi_{\beta,p}^{n+m} = \varphi_{\beta,q}^k$. Nous pouvons alors écrire $\varphi_{\Delta,p}^m \psi = \varphi_{\Delta,q}^k \psi_1$. Par propriétés de la coinduite, nous avons

$$\varphi_{\beta,p}^m(f(\psi)) = \varphi_{\Delta,p}^m(f(\psi)) = f(\varphi_{\Delta,p}^m \psi) = f(\varphi_{\Delta,q}^k \psi_1) = \varphi_{\beta,q}^k(f(\psi_1)) = \varphi_{\beta,p}^m(\varphi_{\beta,p}^n(f(\psi_1))).$$

L'injectivité de $\varphi_{\beta,p}^m$ conclut.

2. Puisque les colimites filtrantes sont tamisées, elles commutent en particulier naturellement à la coinduction. Il s'agit donc simplement de prendre la colimite des isomorphismes précédents. \square

A.4 Étude des anneaux de caractéristique mixte

Nous reprenons les notations de la section 2.5. Nous définissons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ de manière identique à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+$ en remplaçant E par F et L par $L' = K\mathbb{Q}_{q'}$.

Proposition A.20. *Il existe une injection d'anneau*

$$\hat{j} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+ \hookrightarrow W_L \left(\left(\bigotimes_{\alpha \in \Delta, \overline{\mathbb{F}_q}} k^{\text{alg}} \right) \llbracket t_\alpha^{\mathbb{R}} \mid \alpha \in \Delta \rrbracket \right)$$

telle que chaque $\hat{j}(X_\alpha)$ est un relevé de t_α et que

$$\forall n \geq 1, \hat{j}^{-1}((\pi, [t])^n) = (\pi, \underline{X})^n.$$

Démonstration. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}^+$ est une \mathcal{O}_L -algèbre π -adiquement séparée et complète, d'anneau résiduel E_Δ^+ en π et munie du relèvement $\phi_{\Delta,q}$ du q -Frobenius. Considérons la composée de l'injection $E_\Delta^+ \hookrightarrow \tilde{E}_\Delta^+$ du Lemme 2.61 et de celle \hat{i} en Proposition A.9. Elle envoie chaque X_α sur t_α . La propriété universelle des vecteurs de Witt ramifiés construit alors le morphisme de \mathcal{O}_L -algèbres \hat{j} annoncé. Il est injectif puisque la source est séparée et qu'il est injectif modulo π .

Intéressons-nous aux images réciproques des idéaux. Le Lemme 2.61 et la Proposition A.9 obtiennent que pour tout idéal ouvert $\hat{i}((t^{\underline{d}_i} \mid i \in \mathcal{I})) \cap E_\Delta^+ = (X^{\underline{d}_i})$. Soit à présent $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'entiers et $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ de multi-indices. Les Teichmüller $[t]^{\underline{d}_i}$ et les $\hat{j}(X)^{\underline{d}_i}$ diffèrent par des éléments inversibles. Soit $x \in \hat{j}^{-1}((\pi^{k_i} [t]^{\underline{d}_i}))$. Soit $k = \min k_i$ et $I = \{1 \leq i \leq n \mid k_i = k\}$. Nous savons que $x = \pi^k y \bmod \pi^{k+1}$ où $(y \bmod \pi \in \hat{j}^{-1}((t^{\underline{d}_i} \mid i \in I)))$. Avec l'énoncé juste prouvé, cela implique que $x = \pi^k z_0 + \pi^{k+1} z_1$ où $z_0 \in (\pi^{k_i} X^{\underline{d}_i} \mid i \in I)$ et $z_1 \in \hat{j}^{-1}((\pi^{k_i} X^{\underline{d}_i} \mid i \notin I))$. On conclut en répétant l'opération. \square

Proposition A.21. *Soit $F|E$ finie galoisienne. Il existe un isomorphisme de $(\Phi_{\Delta,q,r} \times \mathcal{G}_{E,\Delta})$ -anneaux topologiques pour la topologie π -adique*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta,q}} \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',r}}^{\Phi_{\Delta,q,r}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}).$$

Démonstration. Comme au Lemme A.18, on prouve que $\Phi_{\Delta,q',r} < \Phi_{\Delta,q,r}$ est d'indice subtil fini. Nous choisissons \mathcal{R}_{\min} un système de représentants des classes minimales pour l'inclusion et \mathcal{L}_{\min} les relations minimales déduites. Nous considérons le morphisme que nous obtenons comme aux Propositions A.13 et A.19

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta,q}}^+ \cong \text{Coind}_{\Phi_{\Delta,q',q}}^{\Phi_{\Delta,q}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+) = \lim_{(\mathcal{R}/\mathcal{L})_{\min}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}^+.$$

De même qu'auxdites propositions, nous démontrons que c'est un isomorphisme modulo π . La limite étant finie, les deux côtés sont π -adiquement séparés et complets ce qui conclut que le morphisme est un isomorphisme. Remarquons que le choix de L et L' fournit bien des structures de $\Phi_{\Delta,q,r}$ -anneau (resp. $\Phi_{\Delta,q',r}$ -anneau), qui sont coinduits l'un de l'autre puisque la réduction modulo π s'identifie à la relation de coinduction du Lemme A.12. \square

Corollaire A.22. *L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ est intègre et l'anneau $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}_{\text{ur}}}}$ est sans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ -torsion.*

Démonstration. L'intégrité est une conséquence de la Proposition A.20. Le caractère sans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$ -torsion de chaque $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\Delta,q}}$ se déduit de la coinduction comme au Corollaire A.14. Nous voulons passer à la complétion $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\text{ur}}}}$ de leur colimite. Soit $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_\Delta}$. Écrivons $x = \pi^n y$ avec $(y \bmod \pi) \neq 0$. Puisque chaque $\mathcal{F}_{\Delta,q}$ est sans $(y \bmod \pi)$ -torsion, on en déduit que la multiplication par x est un homéomorphisme sur son image pour la topologie π -adique sur $\text{colim}_{F \in \mathcal{G}_{\text{al}_E}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\Delta}$. La complétion π -adique est alors encore une injection, ce qui conclut. \square

B Monoïdes topologiques

Dans cette annexe, nous donnons une suite d'énoncés qui nous aiderons à manipuler les monoïdes topologiques. Nous nous épargnerons de rédiger la plupart des preuves ; il s'agit surtout de fixer ce qui est vrai.

Définition B.1. Rappelons qu'un monoïde topologique est un objet en monoïdes dans la catégorie des espaces topologiques. Nous appelons \mathbf{MndTop} la catégorie des monoïdes topologiques.

Proposition B.2. La catégorie des monoïdes topologiques admet toutes les limites et le foncteur d'oubli vers les espaces topologiques commute naturellement aux limites.

Définition B.3. Soit M un monoïde et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur M telle que

$$\forall m, m', n, n' \in M, m\mathcal{R}m' \text{ et } n\mathcal{R}n' \implies mm'\mathcal{R}nn'. \quad (\text{Q1})$$

La loi sur M passe au quotient en une loi de monoïde sur M/\mathcal{R} ayant pour élément neutre la classe du neutre. Si M était un monoïde topologique, la topologie quotient sur M/\mathcal{R} en fait encore un monoïde topologique.

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{Q} \subset M \times M$, il existe une relation d'équivalence sur M contenant \mathcal{Q} minimale pour l'inclusion et vérifiant (Q1). On appelle M/\mathcal{Q} le quotient par cette dernière relation.

Définition B.4. Soit M un monoïde topologique et X un espace topologique. Une *action continue de M sur X* est morphisme de monoïdes $M \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ens}}(X, X)$ tel que l'application déduite $M \times X \rightarrow X$ est continue.

Lorsque X est muni de structure algébriques additionnelles, par exemple lorsque c'est un groupe topologique, on définit une action continue de M sur X de manière identique, en imposant que l'image soit contenue dans les morphismes de groupes.

Proposition B.5. Soit M un monoïde topologique et $\mathcal{Q} \subset M \times M$.

1. Le quotient M/\mathcal{Q} représente le foncteur

$$\mathbf{MndTop} \rightarrow \text{Ens}, S \mapsto \{a : M \rightarrow S \text{ continu tel que } \forall (m, n) \in \mathcal{Q}, a(m) = a(n)\}.$$

2. Les foncteurs

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \{\text{Actions continues de } M/\mathcal{Q} \text{ sur } X\}$$

et

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{Actions continues de } M \text{ sur } X \\ \text{telles que } \forall (m, n) \in \mathcal{Q}, x \in X, m \cdot x = n \cdot x \end{array} \right\}$$

sont isomorphes. Le même résultat est vrai avec les catégories \mathbf{MndTop} , \mathbf{AnnTop} , etc comme catégories sources.

3. La relation d'équivalence par laquelle on quotient est la clôture réflexive, symétrique et transitive de $\{(amb, anb) \mid a, b \in M \text{ et } (m, n) \in \mathcal{Q}\}$.

Exemple B.6. Un sous-monoïde $N < M$ est appelé distingué si $\forall m, mN = Nm$. On notera alors $N \triangleleft M$. Dans ce cas, la relation $m_1\mathcal{R}m_2 \iff m_1N = m_2N$ est une relation d'équivalence qui vérifie (Q1). On note M/N le quotient. Il est en bijection avec les classes à gauche et représente le foncteur

$$\mathbf{MndTop} \rightarrow \text{Ens}, S \mapsto \{a : M \rightarrow S \text{ continu tel que } N \subseteq \text{Ker}(a)\}.$$

Remarque B.7. Attention, cette notion de sous-monoïde distingué est à prendre avec des pincettes puisqu'un monoïde n'est pas nécessairement distingué dans lui-même : considérer par exemple le monoïde des matrices carrées de taille d . La propriété universelle du quotient admet toujours un représentant, mais le monoïde peut être bien plus petit que l'ensemble des classes à gauche. De la même manière, le noyau d'un morphisme de monoïdes n'est pas toujours distingué.

Lorsque X est localement compact une action continue est exactement un morphisme de monoïdes vers $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, X)$ muni de la topologie compacte ouverte. En revanche, rien ne garantit en général ni l'adjonction, ni même que cette topologie soit une topologie de monoïde. La seule topologie de monoïde sur $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, X)$ serait la topologie "ouverte-ouverte" qui donne une notion d'action continue plus forte.

Définition B.8. Soient M et N deux monoïdes topologiques et $\lambda : N \rightarrow \text{End}_{\mathbf{Mnd}}(M)$ un morphisme de monoïdes tel que l'action $N \times M \rightarrow M$ déduite est continue. L'ensemble $M \times N$ muni de la loi

$$\forall (m_1, m_2, n_1, n_2) \in M^2 \times N^2, (m_1, n_1) \cdot_\lambda (m_2, n_2) = (m_1 \lambda(n_1)(m_2), n_1 n_2)$$

est un monoïde topologique que l'on note $M \rtimes_\lambda N$.

Proposition B.9. Soient M et N deux monoïdes topologiques et $\lambda : N \rightarrow \text{End}_{\text{Mnd}}(M)$ un morphisme de monoïdes tel que l'action de N sur M déduite est continue.

1. Le monoïde topologique $M \rtimes_{\lambda} N$ représente le foncteur

$$\text{MndTop} \rightarrow \text{Ens}, S \mapsto \left\{ \text{tels que } \forall (n, m) \in N \times M, \begin{matrix} (b : M \rightarrow S, c : N \rightarrow S) \text{ continus} \\ c(n)b(m) = b(\lambda(n)(m))c(n) \end{matrix} \right\}.$$

2. Les deux foncteurs

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \{\text{Actions continues de } M \rtimes_{\lambda} N \text{ sur } X\}$$

et

$$\text{Top} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \left\{ \text{telles que } \forall (m, n, x) \in M \times N \times X, \begin{matrix} \text{Paire d'actions continues de } M \text{ et } N \text{ sur } X \\ n \cdot_N (m \cdot_M x) = (\lambda(n)(m)) \cdot_M (n \cdot_N x) \end{matrix} \right\}$$

sont isomorphes. Le même résultat est vrai avec les catégories MndTop , AnnTop , etc comme catégories sources.

Définition B.10. Soit M, N deux monoïdes topologiques et λ une action continue de M sur le monoïde N . Soit également $I \triangleleft N$ et $\kappa : I \rightarrow M$ un morphisme de monoïde. Nous supposons de plus que $I \triangleleft N$, que

$$\forall (i, m) \in I \times M, \kappa(i)m = \lambda(i)(m)\kappa(i)$$

et que

$$\forall (i, j, n) \in I^2 \times N \text{ tels que } ni = jn, \lambda(n)(\kappa(i)) = \kappa(j).$$

Nous définissons

$$(M \rtimes_{\lambda} N) / \sim_{I \sim} := \text{quotient de } (M \rtimes_{\lambda} N) \text{ par l'ensemble de couples } \{((\kappa(i), 1_N), (1_M, i)) \mid i \in I\}.$$

Remarque B.11. Les trois conditions ne sont pas nécessaire à la définition mais servent à capturer une famille de quotients raisonnables à décrire. Le première condition semble raisonnable quitte à remplacer I par le sous-groupe distingué engendré. Le deuxième condition impose que i et $\lambda(i)$ ait la même "action par conjugaison" sur M , la troisième que les actions par conjugaison de N sur I et sur $\kappa(I)$ soient cohérentes.

Proposition B.12. Conservons le cadre de la Définition B.10 et supposons que $\lambda(I)$ est formé d'automorphismes. La relation d'équivalence par laquelle nous quotientons est exactement la clôture symétrique de

$$\forall (m, n, i) \in M \times N \times I, (\kappa(i), 1_N)(m, n) = (\kappa(i)m, n)\mathcal{Q}(\lambda(i)(m), in) = (1_M, i)(m, n).$$

Démonstration. La Proposition B.5 dit déjà que la relation d'équivalence par laquelle nous quotientons est la clôture symétrique et transitive de

$$\begin{aligned} \forall (m, m', n, n', i) \in M^2 \times N^2 \times I, \\ (m\lambda(n)(\kappa(i)m'), nn') = (m, n)(\kappa(i), 1_N)(m, m')\mathcal{Q}(m, n)(1_M, i)(m', n') = (m\kappa(ni)(m'), nin'). \end{aligned}$$

Fixons (m, m', n, n', i) comme ci-dessus. Pour j tel que $ni = jn$ et $n'' = nn'$ et $m'' = \lambda(n'')^{-1}(m)\lambda(n)(m')$, nous obtenons que

$$(m, n)(\kappa(i), 1_N)(m, m') = (\kappa(j), 1_N)(m'', n'') \text{ et } (m, n)(1_M, i)(m', n') = (1_M, j)(m'', n'').$$

Il nous reste simplement à démontrer que sa clôture symétrique est transitive. Pour cela, considérons une suite

$$(\kappa(i)m, n)\mathcal{Q}(\lambda(i)(m), in) = (\kappa(j)m', n')\mathcal{Q}(\lambda(j)(m'), jn').$$

De l'égalité centrale nous déduisons que $\lambda(i)(m) = \kappa(j)m'$ et $in = n'$. Le terme de droite se réécrit donc

$$(\lambda(j)(m'), jn') = (\lambda(ji) (\lambda(i)^{-1}(m')), jin)$$

En posant $m'' = \lambda(i)^{-1}(m')$, on obtient que

$$\begin{aligned} \kappa(ji)m'' &= \kappa(j)\kappa(i)\lambda(i)^{-1}(m') \\ &= \kappa(j)m'\kappa(i) \\ &= \lambda(i)(m)\kappa(i) \\ &= \kappa(i)m \end{aligned}$$

où le passage à la troisième ligne utilise l'égalité ci-dessus et où les passages à la deuxième ligne à la quatrième utilise les hypothèses de définition de $(M \rtimes_{\lambda} N) / \sim_{I \sim}$. Les deux extrêmes de la ligne appartiennent donc à la relation comme $(\kappa(ji)m'', n)\mathcal{Q}(\lambda(ji)(m''), jin)$. \square

Donnons à présent quelques propriétés sur les sous-groupes distingués et les quotients.

Proposition B.13. 1. Soit $N \triangleleft M$ deux monoïdes et \mathcal{R} une relation d'équivalence vérifiant (Q1). Alors, l'image de N est distinguée dans M/\mathcal{R} .

2. Soit $M_0 < M$. Pour que $(M_0 \times \{1_N\}) \triangleleft (M \rtimes_\lambda N)$, il faut et suffit que $M_0 \triangleleft M$ et que pour tout $n \in N$, l'endomorphisme $\lambda(n)$ se restreigne-corestreigne en un endomorphisme surjectif de M_0 . Dans ce cas, il existe un isomorphisme naturel de monoïdes topologiques

$$(M \rtimes_\lambda N)/(M_0 \times \{1_N\}) \xrightarrow{\sim} (M/M_0) \rtimes_\lambda N.$$

3. Gardons les notations du point précédent avec des monoïdes topologiques, supposons que λ induit une action continue $N \times M \rightarrow M$ et ajoutons la donnée d'un sous-monoïde $I < N$ et d'un morphisme continu $\kappa : I \rightarrow M$ qui vérifie les hypothèses de la Définition B.10 et tels que $\kappa^{-1}(M_0) \triangleleft N$. Alors les morphismes λ et κ passent au quotient en $\bar{\lambda} : N/\kappa^{-1}(M_0) \rightarrow \text{End}_{\text{Mnd}}(M/M_0)$ qui fournit une action continue et $\bar{\kappa} : I/\kappa^{-1}(M_0) \rightarrow M/M_0$ qui vérifient encore les hypothèses de la Définition B.10. En appelant M_1 l'image de M_0 dans $(M \rtimes_\lambda N)/\sim_I$, elle y est distinguée et nous avons une identification naturelle

$$((M \rtimes_\lambda N)/\sim_I)/M_1 \xrightarrow{\sim} (M/M_0 \rtimes_{\bar{\lambda}} N/\kappa^{-1}(M_0))/\sim_{I/\kappa^{-1}(M_0)}.$$

Démonstration. Les deux premiers énoncés se démontrent à la main en écrivant des égalités entre classes. Pour le troisième énoncé, utilisez les deux premiers pour démontrer les distinctions et construisez l'isomorphisme par propriété universelle. \square

Références

- [Ber13] Laurent BERGER. « Multivariable Lubin-Tate (φ, Γ) -modules and filtered φ -modules ». In : *Math. Res. Lett.* 20 3 (2013), p. 409-428.
- [Bou71] Nicolas BOURBAKI. *Topologie générale, Chapitre III*. Springer, 1971.
- [Bou81] Nicolas BOURBAKI. *Algèbre, Chapitre V*. Springer, 1981.
- [Bre+22] Christophe BREUIL et al. « Multivariable $(\varphi, \mathcal{O}_K^\times)$ -modules and local-global compatibility ». In : *pré-publication* (2022).
- [CKZ21] Annie C. CARTER, Kiran KEDLAYA et Gergely ZÁBRÁDI. « Drinfeld's lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ) -modules ». In : *Documenta Mathematica* (2021), p. 1329-1393.
- [Col10] Pierre COLMEZ. « REPRÉSENTATIONS DE $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ET (φ, Γ) -MODULES ». In : *Astérisque* 330 (2010), p. 345-389.
- [Duc] Antoine DUCROS. *Introduction à la théorie des schémas, 3.2.12*. <https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/Cours-schemas.pdf>.
- [EG23] Matthew EMERTON et Toby GEE. *Moduli stacks of étale (φ, Γ) -modules and the existence of crystalline lifts*. T. 215. Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 2023.
- [Fon91] Jean-Marc FONTAINE. « Représentations p -adiques des corps locaux, 1^{ère} partie ». In : *The Groten-dieck Festschrift II* (1991), p. 249-309.
- [Fou05] Lionel FOURQUAUX. « Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate ». In : *Thèse de doctorat* (2005).
- [GR02] Ofer GABBER et Lorenzo RAMERO. *Almost ring theory - sixth release*. 2002. arXiv:math/0201175 [math.AG].
- [GR04] Alexander GROTHENDIECK et Michel RAYNAUD. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA I)*. 2004.

- [Gro18] Elmar GROSSE-KLÖNNE. « A note on multivariable (φ, Γ) -modules ». In : *Research in Number Theory* 5.1 (nov. 2018).
- [Hah07] Hans HAHN. « Über die nichtarchimedischen Größensysteme ». In : *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, Mathematisch – Naturwissenschaftliche Klasse* 116 (1907).
- [Her98] Laurent HERR. « Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 126.4 (1998), p. 563-600.
- [Kap42] Irving KAPLANSKY. « Maximal fields with valuations ». In : *Duke Mathematical Journal* 9.2 (1942), p. 303-321.
- [Mar22] Nataniel MARQUIS. *Note sur la descente galoisienne*. https://www.math.ens.psl.eu/~nmarquis/note_galois_cut.pdf. 2022.
- [Mar24a] Nataniel MARQUIS. *Computations of some (φ, Γ) -modules*. Notes on personal webpage. 2024.
- [Mar24b] Nataniel MARQUIS. « Study of various categories gravitating around (φ, Γ) -modules ». In : (2024).
- [Mor] Matthew MORROW. *Adic and perfectoid spaces*. <https://webusers.imj-prg.fr/~matthew.morrow/Espaces/Perf%20spaces%20IMJ-PRG%20final.pdf>.
- [NS16] Jan NEKOVAR et Anthony J. SCHOLL. « Introduction to plectic cohomology ». In : *Contemporary Mathematics* 664 (2016), p. 321-337.
- [NS17] Jan NEKOVAR et Anthony J. SCHOLL. « Plectic Hodge theory I ». In : (2017).
- [Sch12] Peter SCHOLZE. « Perfectoid Spaces ». In : *Publications mathématiques de l’IHÉS* 116 (2012), p. 245-313.
- [Sch17a] Peter SCHNEIDER. *Galois Representations and (φ, Γ) -Modules*. Cambridge University Press, 2017.
- [Sch17b] Peter SCHOLZE. « Étale Cohomology of Diamonds ». In : *SSRN Electronic Journal* (sept. 2017). DOI : 10.2139/ssrn.3542189.
- [Stacks] The STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2018.
- [SW14] Peter SCHOLZE et Jared WEINSTEIN. *Berkeley Lectures on p -adic Geometry*. T. 207. Annals of Mathematical Studies, 2014.
- [Win83] Jean-Pierre WINTENBERGER. « Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications ». In : *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure* 4e série, 16.1 (1983), p. 59-89.
- [Yos06] Teruyoshi YOSHIDA. « Local Class Field Theory via Lubin-Tate Theory ». In : *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques* 17 (2006).
- [Záb18a] Gergely ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ) -modules and smooth o -torsion representations ». In : *Selecta Mathematica* 24(2) (2018), p. 935-995.
- [Záb18b] Gergely ZÁBRÁDI. « Multivariable (φ, Γ) -modules and products of Galois groups ». In : *Maths Research Letter* 25(2) (2018), p. 687-721.

Nataniel Marquis – IMJ-PRG, 4 place Jussieu, 75005 Paris et DMA, 45 rue d’Ulm, 75005 Paris.
E-mail : marquis@imj-prg.fr