

## TD n°7 : Simplicité classiques 19 et 22/11/2024

● Nous traiterons les exercices dans l'ordre. Les questions les plus délicates de la feuille sont marquées d'un ●.

Je reste disponible pour toute question concernant le TD, des maths, ou toute autre chose au bureau T13 (j'y suis à coups sûrs les mardis juste avant le TD). Vous pouvez également m'envoyer un mail à [nataniel.marquis@dma.ens.fr](mailto:nataniel.marquis@dma.ens.fr).

### Exercice 1. Deux isomorphismes exceptionnels

Démontrer que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$  est isomorphe à  $\mathfrak{A}_4$ . Démontrer que si  $k$  est un corps à 4 éléments, alors  $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$ .

### Exercice 2. Groupes simples d'ordre 60

Soit  $G$  un groupe simple d'ordre 60.

1. Démontrer que toute action de  $G$  sur 3 ou 4 éléments est triviale.
2. Démontrer que les 5-Sylows de  $G$  sont au nombre de 6.
3. Démontrer que les 2-Sylows de  $G$  sont au nombre de 5 ou 15.
4. ● Supposons que  $H_1$  et  $H_2$  sont deux 2-Sylows et que  $g \in H_1 \cap H_2$  est non trivial. En regardant le centralisateur de  $g$ , démontrer qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans  $G$ .
5. Dans le cas où toutes les intersections sont triviales, compter les éléments pour démontrer que les 2-Sylows sont au nombre de 5. En déduire qu'il existe un sous-groupe d'ordre 12 dans  $G$ .
6. Conclure.
7. Donner une autre preuve de : si  $k$  est un corps à 4 éléments, alors  $\mathrm{PSL}_2(k) \cong \mathfrak{A}_5$ .

### Exercice 3. Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

On propose dans cet exercice une application du critère d'Iwasawa à la simplicité de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ .

1. Démontrer que les blocs non triviaux de l'action de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  sont les paires de points antipodaux.
2. En considérant l'action de  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  et le critère d'Iwasawa, démontrer que  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$  est simple.

### ● Exercice 3. Un sacré isomorphisme

Démontrer que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \cong \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$ .

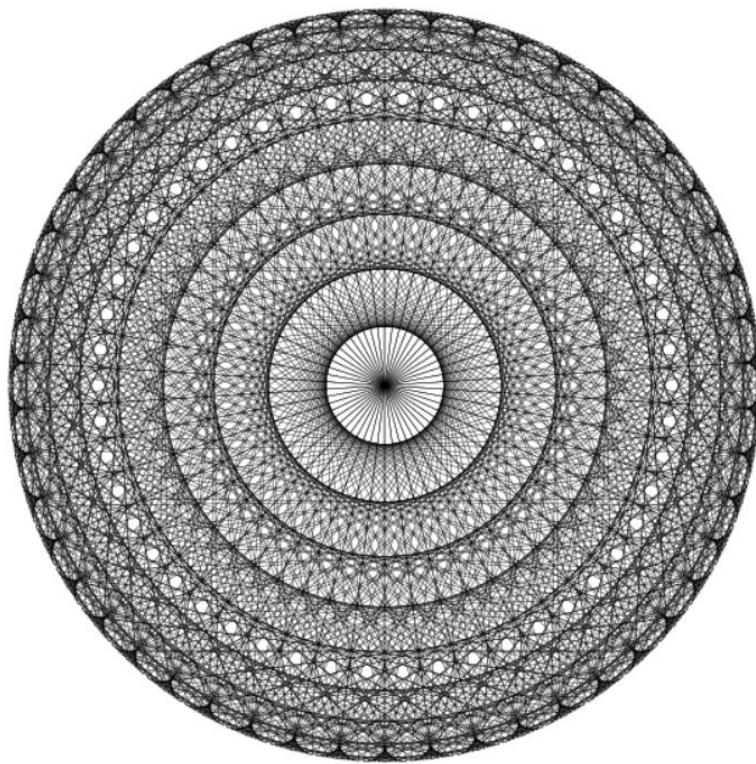


FIGURE 1 – Puissance  $451^e$  appliquée aux racines 1000-ièmes de l'unité.