Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$ ограниченной контуром γ, рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона:

$-\Delta u = f(x, y)$, (1)

где оператор Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$f(x, y)$ - известна.

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле:

$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \gamma$ (2)

Необходимо найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевому условию (2) на ее границе.

Вариант 10.

$f(x, y) = 1$ при всех $(x, y) \in D$,

D - область, ограниченная дугой гиперболы и отрезком прямой:

$\{(x, y) : x^2 - 4y^2 > 1, \ 1 < x < 3\}$

Численный метод решения задачи

Метод фиктивных областей

Пусть область $D \subset \Pi = \{(x, y) : A1 < x < B1, \ A2 < y < B2\}$.

$\hat{D} = \Pi \backslash \overline{D}$ - фиктивная область, $\overline{D}$ - замыкание D.

Выберем и зафиксируем малое $\epsilon > 0$

В прямоугольнике П рассматривается задача Дирихле:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}\right) = F(x, y),$$

(3)

$v(x, y) = 0, \ (x, y) \in \Gamma, \quad \Gamma$ - граница прямоугольника

С кусочно-постоянным коэффициентом:

$$k(x,y) = \begin{cases} 1,\ (x,y) \in D \\ 1/\epsilon,\ (x,y) \in \hat{D} \end{cases}$$

И правой частью:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y),\ (x,y) \in D \\ 0,\ (x,y) \in \hat{D} \end{cases}$$

Требуется найти непрерывную в П функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению задачи (3) всюду в $\Pi \setminus \gamma$, равную нулю на границе Г прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x,y) = -k(x,y)\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника П.

Функция $v(x,y)$ равномерно приближает решение $u(x,y)$ задачи (1),(2) в области D, то есть:

$$\max_{P \in D} |v(x,y) - u(x,y)| < C\epsilon,\ C > 0.$$

Таким образом, искомую функцию $u(x,y)$ можно получить с любой наперед заданной точностью $\epsilon > 0$. То есть задача Дирихле в криволинейной области приближенно заменяется задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом $k(x,y)$.

Вариант 10.

Был выбран прямоугольник $\Pi = \{1 < x < 3,\ -1.5 < y < 1.5\}$.

Разностная схема решения задачи

В замыкании прямоугольника $\overline{\Pi}$ определим равномерную прямоугольную сетку

$\overline{w}_h = \overline{w}_1 \times \overline{w}_2$, где

$$\overline{w}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1,\ i = 0,...,M\},\ \ h1 = (B1 - A1)/M$$
$$\overline{w}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2,\ j = 0,...,N\},\ \ h2 = (B2 - A2)/N$$

w_h - множество внутренних узлов сетки $\overline{w}_h$.

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке w_h.
w_{ij} - значение сеточной функции H в узле сетки$(x_i, y_j) \in w_h$.
Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций H:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}$$

$$\|u\|_E = \sqrt{(u, u)}$$

Метод конечных разностей заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$Aw = B,$ где

$A : H \rightarrow H$

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1}\left(a_{i+1j}\frac{w_{i+1j} - w_{ij}}{h_1} - a_{ij}\frac{w_{ij} - w_{i-1j}}{h_1}\right) - \frac{1}{h_2}\left(b_{ij+1}\frac{w_{ij+1} - w_{ij}}{h_2} - b_{ij}\frac{w_{ij} - w_{ij-1}}{h_2}\right) = F_{ij},$$

$$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1,$$

Где коэффициенты:

$$a_{ij} = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t)dt,$$

$$b_{ij} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j-1/2})dt,$$

$$i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, N,$$

Полуцелые узлы:

$$x_{i\pm1/2} = x_i \pm 0.5h_1,$$

$$y_{j\pm1/2} = y_j \pm 0.5h_2$$

Правая часть разностопного уравнения:

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy$$

$$\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2},\ y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\},$$

$$i = 1, \ldots, M-1, \quad j = 1, \ldots, N-1$$

Краевые условия Дирихле в задаче (3) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0,\ (x_i, y_j) \in \Gamma$$

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин w_{ij} и может быть представлена в виде $Aw = B$ с самосопряженным и положительно определенным оператором A. Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы a_{ij}, b_{ij} вычисляем по формуле : $a_{ij} = h_2^{-1} l_{ij} + (1 - h_2^{-1} l_{ij})/\epsilon$,

где l_{ij} – длина части отрезка $\left[P_{ij}, P_{ij+1}\right]$, которая принадлежит области D.

b_{ij} - аналогично.

F_{ij} приближенно заменяем на значение в центре квадрата Π_{ij}.

$$F_{ij} = F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1,\ (x_i, y_j) \in D \\ 0,\ (x_i, y_j) \in \hat{D} \end{cases}$$

Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Приближенное решение разностной схемы может быть получено итерационным методом наименьших невязок.

Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций $w^{(k)} \in H, k = 1,2,...$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы, т.е.

$\|w - w^{(k)}\|_E \to 0, k \to +\infty$.

Начальное приближение $w^{(0)}$ берем равным нулю во всех точках расчетной сетки.

Итерация $(k+1)$ вычисляется по формуле:

$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$, где

$r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$ - невязка

$\tau_{k+1} = \dfrac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E}$ - инерционный параметр.

В качестве критерия останова итерационного процесса использовалось неравенство: $\|r^{(k)}\|_E < \delta$, где δ выбиралась различной в зависимости от числа точек сетки.

Описание OpenMP программы.

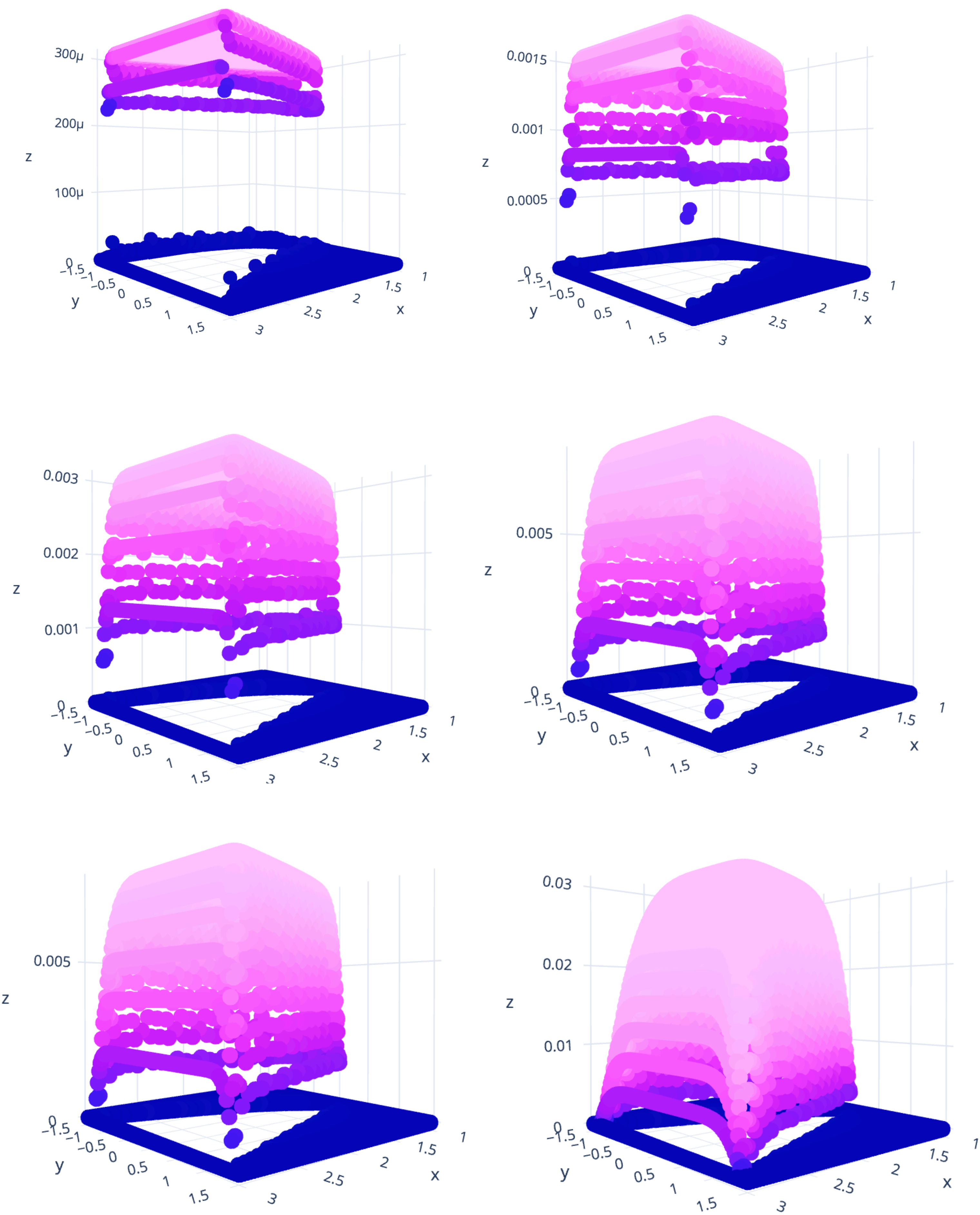
Был разработан последовательный код программы на языке Си, вычисляющий приближенное решение разностной схемы методом наименьших невязок. Выполнены расчеты на сгущающихся сетках:
(M,N)=(10,10), (20,20), (40,40);

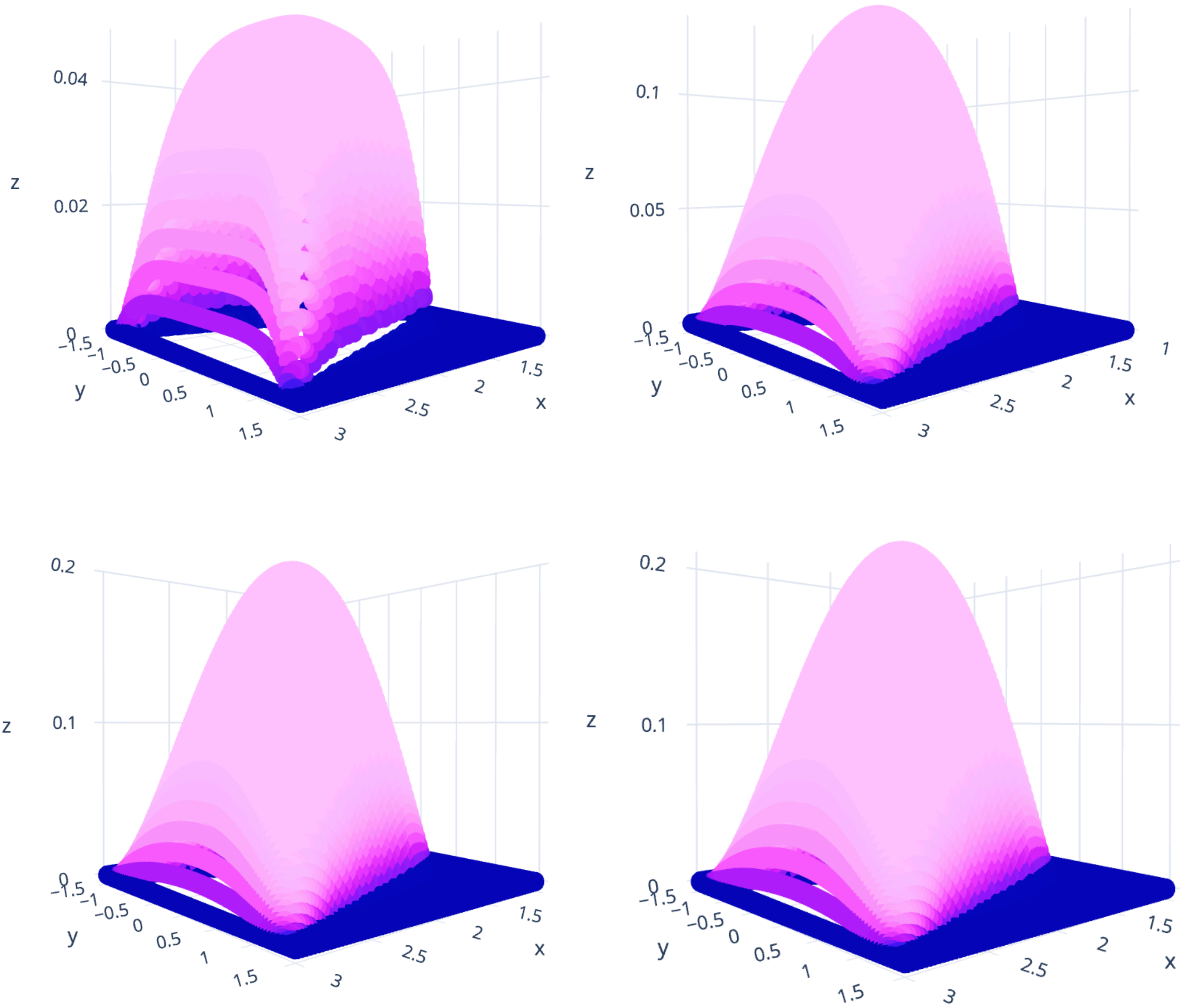
С помощью средств OpenMP, разработан параллельный код программы, вычисляющий приближенное решение разностной схемы. Использовалась директива OpenMP: pragma omp parallel for collapse(2).
Выполнены расчеты на сетке (M,N) = (40,40), (80,80), (160,160) на двух, четырех и шестнадцати нитях.
Результаты расчетов приведены в Таблице 1.

Таблица 1

Число OpenMP нитей	Число точек сетки MxN	Время решения	Ускорение
2	40x40	52.186256	1.149728
4	40x40	49.297645	1.217097
8	40x40	40.335287	1.487531
16	40x40	11.072925	5.418622
2	80x80	278.47896	1.156281
4	80x80	126.419113	2.547083
8	80x80	67.502084	4.770223
16	80x80	66.349032	4.853123
4	160x160	265.912563	1.444084
8	160x160	69.678694	5.511010
16	160x160	56.844923	6.755221
32	160x160	40.335287	9.520200

Промежуточные результаты сходимости





z
0.04
0.02
0
y
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x
1.5
2
2.5
3
z
0.1
0.05
0
y
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x
1
1.5
2
2.5
3
z
0.2
0.1
0
y
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x
1.5
2
2.5
3
z
0.2
0.1
0
y
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x
1.5
2
2.5
3

Проекция на плоскость OXY:

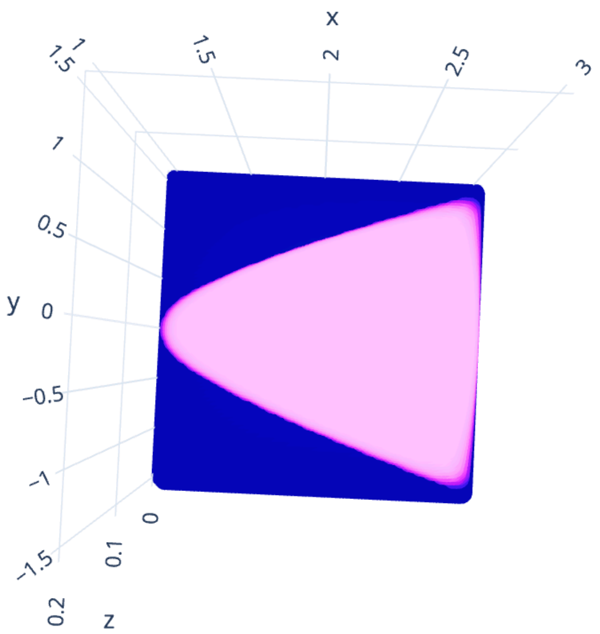


График зависимостей ускорений от числа потоков

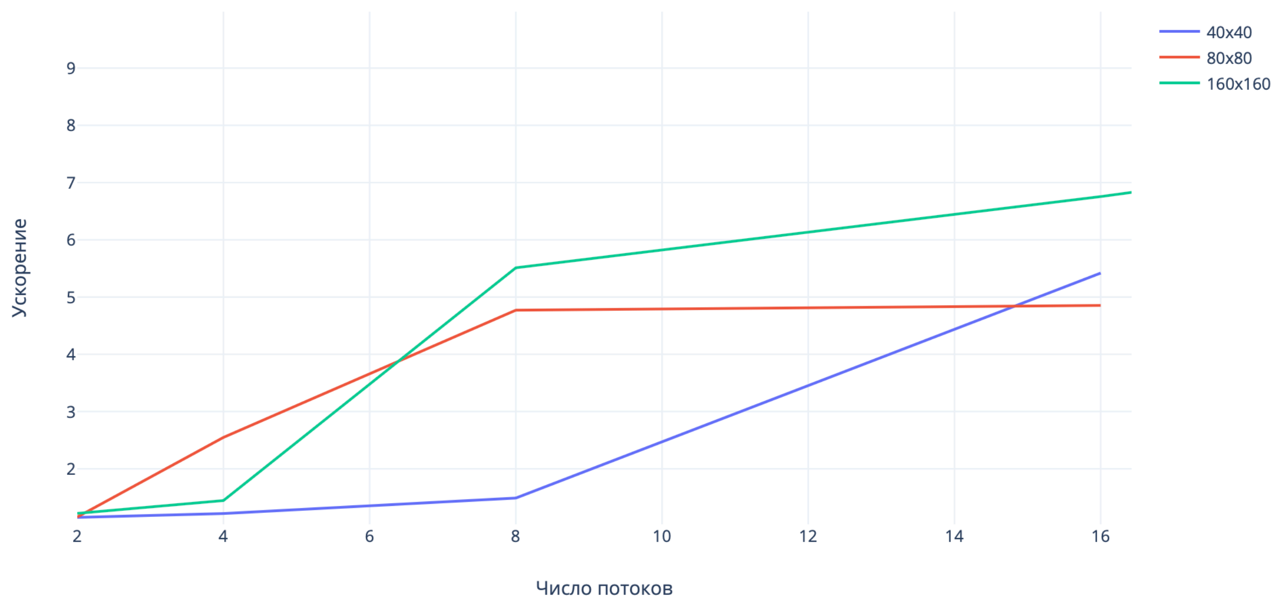
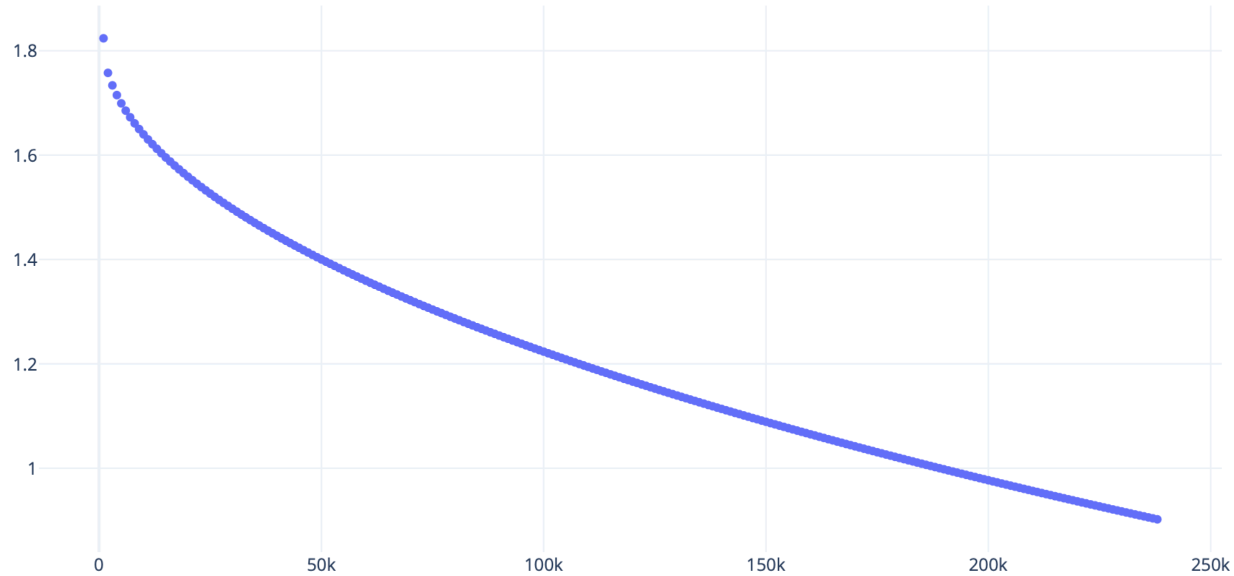


График L_2 нормы невязки



Число процессов MPI	Число точек сетки (MxN)	Время решения	Ускорение
1	40x40	24.861549	0.910557
2	40x40	13.508046	1.859929
4	40x40	11.387203	2.206336
8	40x40	10.218199	2.45875
1	80x80	368.886505	0.99877
2	80x80	193.802199	1.92012
4	80x80	135.274827	2.75087
8	80x80	108.319475	3.43542
1	160x160	721.816253	0.95812
2	160x160	373.190478	1.85318
4	160x160	237.677747	2.90978
8	160x160	171.771272	4.02623

Число процессов MPI	Число OpenMP нитей	Число точек сетки (MxN)	Время решения	Ускорение
2	1	80x80	297.655303	1.392775
2	2	80x80	223.785642	1.85251
2	4	80x80	167.102467	2.48092
2	8	80x80	105.764682	3.91971
4	1	160x160	237.651234	2.164619
4	2	160x160	147.560271	3.486199
4	4	160x160	92.612079	5.55461
4	8	160x160	54.302172	9.47337