Дроби

Пусть A - произвольная область целостности.

Опр: 1. В множестве $A \times (A \setminus \{0\})$ будем говорить, что $(a, b) \sim (a', b')$, если $a{\cdot}b' = a'{\cdot}b$.

Утв. 1. Заданное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Опр: 2. Классы эквивалентности отношения $\sim$ назовём дробями элементов из кольца A.

Обозначение: $\dfrac{a}{b}$ - класс, содержащий (a, b).

Правило пропорции: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow a{\cdot}b' = a'{\cdot}b$. В частности, из правила следует: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, $\forall c \neq 0$.

Операции над дробями:

$(+)$: $\forall \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in A \times (A \setminus \{0\})$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$;

$(\cdot)$: $\forall \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in A \times (A \setminus \{0\})$, $\dfrac{a}{b}{\cdot}\dfrac{c}{d} = \dfrac{a{\cdot}c}{b{\cdot}d}$;

Корректность: Пусть $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$, $ab' = a'b$, тогда:

$(+)$: $\dfrac{ad + bc}{bd} = \dfrac{ab'd + bb'c}{bb'd} = \dfrac{a'bd + bb'c}{bb'd} = \dfrac{a'd + b'c}{b'd} \Rightarrow$ операция сложения - корректна;

$(\cdot)$: $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{ab'c}{bb'd} = \dfrac{a'c}{b'd} \Rightarrow$ операция умножения - корректна;

Опр: 3. Множество всех дробей (классов эквивалентностей) $Q(A)$ с введенными операциями сложения и умножения дробей называется полем дробей или полем частных или полем отношений кольца A:

$$Q(A) = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in A,\ b \neq 0 \right\}$$

Проверка аксиом поля:

1)-5) **Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность сложения и умножения**:
Приводим дроби к общему знаменателю $\Rightarrow$ тождества сводятся к соответствующим тождествам для числителей, которые выполнены, поскольку это элементы коммутативного, ассоциативного кольца A. Например, коммутативность сложения:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ab + bc}{b^2} = \frac{ab + cb}{b^2} = \frac{(a + c)b}{bb} = \frac{a + c}{b} = \frac{c + a}{b} = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

где во четвертом равенстве мы воспользовались правилом пропорции. Аналогично, для коммутативности умножения:

$$\frac{a}{b}{\cdot}\frac{c}{b} = \frac{ac}{b^2} = \frac{ca}{b^2} = \frac{c}{b}{\cdot}\frac{a}{b}$$

6) **Существование нулевого элемента**: $\forall \dfrac{a}{b} \in Q(A)$:

$$\exists \frac{0}{1} \in Q(A)\colon \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a{\cdot}1 + b{\cdot}0}{b{\cdot}1} = \frac{a}{b}$$

Также заметим, что $\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{b}$, $\forall b \neq 0$;

7) **Существование единичного элемента**: $\forall \dfrac{a}{b} \in Q(A)$:

$$\exists \frac{1}{1} \in Q(A)\colon \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a\cdot 1}{b\cdot 1} = \frac{a}{b}$$

8) **Существование противоположного элемента**: $\forall \dfrac{a}{b} \in Q(A)$:

$$\exists -\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} \in Q(A)\colon \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab + b(-a)}{bb} = \frac{(a+(-a))b}{bb} = \frac{a+(-a)}{b} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$$

9) **Существование обратного элемента**: $\forall \dfrac{a}{b} \in Q(A),\ \dfrac{a}{b} \neq \dfrac{0}{1} \Rightarrow a\cdot 1 = a \neq 0\cdot b = 0$:

$$\exists \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in Q(A)\colon \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$$

Это поле хорошо тем, что оно содержит в себе исходное кольцо A, то есть мы расширили A до поля.

Утв. 2. Поле дробей $Q(A)$ содержит подкольцо: $\dfrac{A}{1} = \left\{\dfrac{a}{1} \mid a \in A\right\} \simeq A$. При отождествлении $\dfrac{A}{1}$ с A верно следующее:

$$\forall q \in Q(A),\ \exists,\ a, b \in A,\ b \neq 0\colon q = a\cdot b^{-1}$$

□ Проверим замкнутость множества $\dfrac{A}{1}$ относительно сложения и умножения:

$$\forall \frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in \frac{A}{1},\ \frac{a}{1} \pm \frac{b}{1} = \frac{a \pm b}{1} \in \frac{A}{1}$$

$$\forall \frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in \frac{A}{1},\ \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1} = \frac{ab}{1} \in \frac{A}{1}$$

Следовательно, $\dfrac{A}{1}$ является подкольцом. Соответствие $\varphi\colon A \to \dfrac{A}{1},\ \varphi(a) = \dfrac{a}{1}$ является изоморфизмом:

1) **Согласованность с операциями**:

$$\forall a, b \in A,\ \varphi(a \pm b) = \frac{a \pm b}{1} = \frac{a}{1} \pm \frac{b}{1} = \varphi(a) \pm \varphi(b)$$

$$\forall a, b \in A,\ \varphi(a\cdot b) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1} = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

2) **Биективность**: $\dfrac{a}{1} = \dfrac{a'}{1} \Leftrightarrow a = a\cdot 1 = a'\cdot 1 = a' \Rightarrow$ будет взаимнооднозначное соответствие;

Пусть $q \in Q(A)$, тогда:

$$q = \frac{a}{b} = \frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{1}\cdot\left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = ab^{-1}$$

■

Rm: 1. Полученное расширение кольца до поля в каком-то смысле является минимальным, поскольку мы присоеденили то, что нужно присоединить, чтобы получить поле.

Итог: Поскольку мы доказали, что дробь вида $\dfrac{a}{b}$ является частным дробей, отождествляемых с элементами исходного кольца ab^{-1}, то поэтому знак дроби можно понимать как знак деления.

Примеры:

1) $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$;
2) $Q(K[x]) = K(x)$ - поле рациональных дробей от одной переменной с коэффициентами из поля K;

Поле рациональных дробей

Опр: 4. Полем рациональных дробей от одной переменной с коэффициентами из поля K называется поле дробей от кольца многочленов $K[x]$: $Q(K[x]) = K(x)$.

Опр: 5. Рациональная дробь: $r = \dfrac{f}{g} \in K(x)$ задаёт рациональную функцию:

$$r\colon K \setminus \{x_1, \dots, x_s\} \to K, \quad \forall c \in K \setminus \{x_1, \dots, x_s\},\ r(c) = \frac{f(c)}{g(c)}$$

где $x_1, \dots, x_s$ - корни многочлена g.

Равенство рациональных дробей: $\dfrac{f_1}{g_1} = \dfrac{f_2}{g_2} \Leftrightarrow f_1{\cdot}g_2 = f_2{\cdot}g_1$ по правилу пропорции, тогда:

$$\forall c \in K,\ f_1(c){\cdot}g_2(c) = f_2(c){\cdot}g_1(c) \Rightarrow \frac{f_1(c)}{g_1(c)} = \frac{f_2(c)}{g_2(c)},\ g_1(c), g_2(c) \neq 0$$

Таким образом, если две дроби равны формально, как элементы поля дробей, то они равны и функционально, то есть соответствующие рациональные функции равны. Обратное, как и в случае многочленов, верно не всегда, но для бесконечного поля K обратное будет верно.

Утв. 3. Для бесконечного поля K, формальное равенство дробей равносильно функциональному.

$\square$ Если $\dfrac{f_1(c)}{g_1(c)} = \dfrac{f_2(c)}{g_2(c)}$ при $g_1(c), g_2(c) \neq 0$, тогда:

$$f_1(c){\cdot}g_2(c) = f_2(c){\cdot}g_1(c),\ \forall c \in K\colon g_1(c), g_2(c) \neq 0$$

Поле - бесконечное, а количество корней - конечно $\Rightarrow f_1g_2 - f_2g_1$ имеет бесконечно много корней в K, но это возможно лишь в случае, когда это тождественно нулевой многочлен (у ненулевого многочлена число корней не больше его степени), тогда:

$$f_1g_2 - f_2g_1 \equiv 0 \Leftrightarrow f_1g_2 = f_2g_1 \Leftrightarrow \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

$\blacksquare$

Структура поля рациональных дробей

Нашей целью будет изучение структуры рациональных дробей. Применение результатов, которые докажем находят применение в математическом анализе, нежели в алгебре: интегрирование рациональных функций и изучение поведения рациональных функций вблизи их особых точек, то есть там, где они не определены (они ещё называются полюсами).

В связи с такой постановкой задачи возникает вопрос, к какому виду можно привести любую рациональную дробь? Первое упрощение - сократить числитель и знаменатель на общий множитель, то есть привести к виду в котором у числителя и знаменателя нет общих множителей.

Опр: 6. Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется несократимой, если f и g взаимно просты.

Утв. 4. $\forall r \in K(x)$, $r \neq 0$, можно представить в виде $r = \dfrac{f}{g}$, где r - несократимая дробь, причем f и g определены однозначно, с точностью до умножения на константу.

□ Пусть $r = \dfrac{f}{g}$, $f, g \neq 0$, тогда: $d = (f, g) = \text{НОД}(f, g)$. Положим:

$$f_0 = \frac{f}{d},\; g_0 = \frac{g}{d} \Rightarrow f = f_0 \cdot d,\; g = g_0 \cdot d \Rightarrow r = \frac{f}{g} = \frac{f_0 \cdot d}{g_0 \cdot d} = \frac{f_0}{g_0}$$

Получили несократимую дробь. Пусть $r = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_0}{g_0}$ - ещё одна несократимая дробь, тогда по правилу пропорции мы можем написать:

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_0}{g_0} \Leftrightarrow f_0 \cdot g_1 = f_1 \cdot g_0$$

Левая часть делится на $f_0 \Rightarrow$ правая часть тоже должна делиться на f_0, но $(f_0, g_0) = 1$, тогда $f_1 \,\vdots\, f_0$:

$$f_1 = f_0 \cdot h \Rightarrow f_0 \cdot g_1 = f_1 \cdot g_0 = f_0 \cdot h \cdot g_0 \Rightarrow g_1 = g_0 \cdot h$$

Поскольку $(f_1, g_1) = 1$, то никаких общих делителей нет $\Rightarrow h \in K^\times$. ■

Опр: 7. Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется правильной, если $\deg(f) < \deg(g)$ или $f = 0$.

Утв. 5. Правильные дроби образуют подкольцо (без единицы) в $K(x)$.

□ Проверим замкнутость относительно сложения и умножения:

$$\forall \frac{f_0}{g_0}, \frac{f_1}{f_1} \in K(x),\; \frac{f_0}{g_0} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_0 f_1}{g_0 g_1},\; \deg(f_0 f_1) = \deg(f_0) + \deg(f_1) < \deg(g_0) + \deg(g_1) = \deg(g_0 g_1)$$

При сложении/вычитании будем считать, что дроби приведены к общему знаменателю:

$$\forall \frac{f_0}{g}, \frac{f_1}{g} \in K(x),\; \frac{f_0}{g} \pm \frac{f_1}{g} = \frac{f_0 \pm f_1}{g},\; \deg(f_0 \pm f_1) \leq \max\{\deg(f_0), \deg(f_1)\} < \deg(g)$$

Получаем, что множество правильных дробей замкнуто относительно операций сложения и умножения, следовательно, это подкольцо. ■

Утв. 6. $\forall r = \dfrac{f}{g} \in K(x)$, $\exists!$ представление дроби: $r = q + \dfrac{h}{g}$, где q - многочлен, а $\dfrac{h}{g}$ - правильная дробь.

$\square$ Поделим f на g с остатком, тогда:

$$f = g{\cdot}q + h, \ \deg(h) < \deg(g)$$

Поделим это равенство на g уже в поле дробей, тогда:

$$\frac{f}{g} = q + \frac{h}{g}$$

где q это многочлен, а $\dfrac{h}{g}$ - правильная дробь, так как $\deg(h) < \deg(g)$. Единственность такого представления следует из единственности деления с остатком. Можно дополнительно проверить пусть у нас есть два таких разложения:

$$q + \frac{h}{g} = q_1 + \frac{h_1}{g_1} \Rightarrow q - q_1 = \frac{h_1}{g_1} - \frac{h}{g} = \frac{h_2}{g_2}$$

то есть снова получили правильную дробь. Тогда: $(q - q_1){\cdot}g_2 = h_2$, следовательно:

$$\deg((q - q_1)g_2) = \deg(q - q_1) + \deg(g_2) \geq \deg(g_2) > \deg(h_2)$$

Получаем противоречие, за исключением случая, когда $h_2 = 0 \Rightarrow q = q_1 \Rightarrow \dfrac{h_1}{g_1} = \dfrac{h}{g}$. $\blacksquare$

Остается вопрос, что делать с правильными дробями?

Опр: 8. Простейшая дробь - это рациональная дробь вида: $\dfrac{h}{p^k}$, где p - это неприводимый многочлен, где $k \in \mathbb{N}$ и верно: $\deg(h) < \deg(p)$.

Класс простейших дробей зависит от того поля, над которым мы все рассматриваем.

Примеры простейших дробей:

1) $K = \mathbb{C} \Rightarrow$ в знаменателе должна стоять степень неприводимого многочлена $\Rightarrow$ степени линейного двухчлена, тогда простейшие дроби имеют вид:

$$\frac{a}{(x - z_0)^k}, \ a, z_0 \in \mathbb{C}$$

2) $K = \mathbb{R} \Rightarrow$ в знаменателе должна стоять степень неприводимого многочлена $\Rightarrow$ либо степени линейного двухчлена, либо степени квадратного трехчлена без действительных корней, тогда простейшие дроби имеют вид:

$$\frac{a}{(x - x_0)^k}, \ a, x_0 \in \mathbb{R}, \quad \frac{dx + e}{(x^2 + bx + c)^l}, \ b^2 - 4c < 0, \ d, e, b, c \in \mathbb{R}$$

Разложение правильной дроби в простейшие дроби

Теорема 1. Пусть $r = \dfrac{f}{g} \in K(x)$ - правильная дробь. Представим знаменатель дроби в виде:

$$g = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ - неприводимые, попарно не пропорциональны. Тогда $\exists!$ разложение правильной дроби в сумму простейших дробей следующего вида:

$$r = \frac{h_{11}}{p_1} + \frac{h_{12}}{p_1^2} + \ldots + \frac{h_{1k_1}}{p_1^{k_1}} + \frac{h_{21}}{p_2} + \frac{h_{22}}{p_2^2} + \ldots + \frac{h_{2k_2}}{p_2^{k_2}} + \ldots + \frac{h_{s1}}{p_s} + \frac{h_{s2}}{p_s^2} + \ldots + \frac{h_{sk_s}}{p_s^{k_s}} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,s \\ k=1,\ldots,k_i}} \frac{h_{ik}}{p_i^k}$$

$\square$
<u>**Существование**</u>: Существование представления в требуемом виде следует из серии лемм.

Лемма 1. Если $g = g_1 \cdot g_2$, где $(g_1, g_2) = 1$, то $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f_1}{g_1} + \dfrac{f_2}{g_2}$, где все дроби - правильные.

$\square$ Так как $(g_1, g_2) = 1$, тогда: $(g_1, g_2) = 1 = u_1 \cdot g_1 + u_2 \cdot g_2$, где u_1, u_2 - многочлены. Домножим на это выражение нашу исходную дробь:

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{g} \cdot 1 = \frac{f \cdot (u_1 \cdot g_1 + u_2 \cdot g_2)}{g_1 g_2} = \frac{f \cdot u_2}{g_1} + \frac{f \cdot u_1}{g_2}$$

Поделим с остатком:

$$f \cdot u_1 = g_1 \cdot q_1 + f_1, \quad f \cdot u_2 = g_2 \cdot q_2 + f_2, \quad \deg(f_i) < \deg(g_i),\ i = 1, 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f \cdot u_2}{g_1} + \frac{f \cdot u_1}{g_2} = q_1 + \frac{f_1}{g_1} + q_2 + \frac{f_2}{g_2} = \underbrace{(q_1 + q_2)}_{\text{многочлен}} + \underbrace{\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}}_{\text{правильные дроби}}$$

Сумма правильных дробей даёт правильную дробь, исходная дробь также была правильной $\Rightarrow$ поскольку представление дроби в виде суммы правильной дроби и многочлена - единственно, то $q_1 + q_2 = 0$. $\blacksquare$

Следствие 1. $\exists$ разложение $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f_1}{p_1^{k_1}} + \dfrac{f_2}{p_2^{k_2}} + \ldots + \dfrac{f_s}{p_s^{k_s}}$, где все слагаемые - правильные дроби.

$\square$ Индукция по s.

<u>База индукции</u>: $s = 1 \Rightarrow g = p_1^{k_1} \Rightarrow \dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{p_1^{k_1}}$.

<u>Шаг индукции</u>: По лемме 1, нашу дробь можно представить так:

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{\widetilde{f}}{p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}}$$

где обе дроби - правильные. Тогда по предположению индукции будет верно:

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \ldots + \frac{f_s}{p_s^{k_s}}$$

$\blacksquare$

Лемма 2. Правильная дробь $\dfrac{f}{p^k}$, где p - неприводим, может быть разложена в виде суммы простейших:

$$\frac{f}{p^k} = \frac{h_1}{p} + \frac{h_2}{p^2} + \ldots + \frac{h_k}{p^k},\ \deg(h_i) < \deg(p),\ i = \overline{1,k}$$

$\square$ Индукцией по k.

База индукции: $k = 1 \Rightarrow \dfrac{f}{p} = \dfrac{h_1}{p}$, поскольку исходная дробь правильная, то $\deg(f) = \deg(h_1) < \deg(p) \Rightarrow$ это простейшая дробь.

Шаг индукции: Поделим числитель нашей дроби с остатком на p:

$$f = p{\cdot}\widetilde{f} + h_k,\ \deg(h_k) < \deg(p) \Rightarrow \frac{f}{p^k} = \frac{\widetilde{f}}{p^{k-1}} + \frac{h_k}{p^k}$$

Второе слагаемое будет простейшей дробью, первое - правильной дробью, поскольку:

$$\deg(p\widetilde{f}) = \deg(\widetilde{f}) + \deg(p) = \deg(f - h_k) \leq \deg(f) < \deg(p^k) \Rightarrow \deg(\widetilde{f}) < \deg(p^{k-1})$$

или просто как разница правильных дробей (одна из которых - простейшая). Применим предположение индукции, тогда:

$$\frac{f}{p^k} = \frac{\widetilde{f}}{p^{k-1}} + \frac{h_k}{p^k} = \frac{h_1}{p} + \frac{h_2}{p^2} + \ldots + \frac{h_k}{p^k}$$

где все дроби - простейшие. $\blacksquare$

Следовательно, мы представляем исходную дробь в виде разложения из следствия 1 и затем каждую раскладываем по лемме 2 в виде суммы простейших $\Rightarrow$ существование разложения доказано.

Единственность: Предположим, что есть два разложения:

$$\frac{f}{g} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,s\\ k=1,\ldots,k_i}} \frac{h_{ik}}{p_i^k} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,s\\ k=1,\ldots,k_i}} \frac{\widetilde{h}_{ik}}{p_i^k}$$

Предположим, что $\exists\, i, k\colon h_{ik} \neq \widetilde{h}_{ik}$. Домножим это равенство на $g = p_1^{k_1}{\cdot}p_2^{k_2}{\cdot}\ldots{\cdot}p_s^{k_s}$, тогда:

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,s\\ k=1,\ldots,k_i}} h_{ik}{\cdot}p_1^{k_1}{\cdot}\ldots{\cdot}p_i^{k_i-k}{\cdot}\ldots{\cdot}p_s^{k_s} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,s\\ k=1,\ldots,k_i}} \widetilde{h}_{ik}{\cdot}p_1^{k_1}{\cdot}\ldots{\cdot}p_i^{k_i-k}{\cdot}\ldots{\cdot}p_s^{k_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1,\ldots,s\\ k=1,\ldots,k_i}} (h_{ik} - \widetilde{h}_{ik}){\cdot}p_1^{k_1}{\cdot}\ldots{\cdot}p_i^{k_i-k}{\cdot}\ldots{\cdot}p_s^{k_s} = 0$$

Выберем $i = i_0$, $k = k_0$ так, чтобы $h_{i_0k_0} \neq \widetilde{h}_{i_0k_0}$, но $h_{i_0k} = \widetilde{h}_{i_0k}$ при $k > k_0$. Тогда:

$$(h_{i_0k_0} - \widetilde{h}_{i_0k_0}){\cdot}p_1^{k_1}{\cdot}\ldots{\cdot}p_{i_0}^{k_{i_0}-k_0}{\cdot}\ldots{\cdot}p_s^{k_s} \neq 0,\ \not\vdots\ p_{i_0}^{k_{i_0}-k_0+1}$$

Отдельно заметим, что:

$$\deg(h_{i_0k_0} - \widetilde{h}_{i_0k_0}) < \deg(p_{i_0})$$

и соответственно не делится на p_{i_0}. Остальные слагаемые в сумме делятся на $p_{i_0}^{k_{i_0}-k_0+1}$ поскольку при $i = i_0$ верно либо $k < k_0$ и тогда: $k_{i_0} - k \geq k_{i_0} - k_0 + 1$, либо $k > k_0$ и тогда слагаемое равно 0. Если $i \neq i_0$, то ничего из степени $p_{i_0}^{k_{i_0}}$ не вычитается и делится на $p_{i_0}^{k_{i_0}-k_0+1}$. Следовательно, мы получаем сумму равную нулю, в которой одно слагаемое на что-то не делится, а остальные слагаемые на это делятся $\Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Многочлены от нескольких переменных

Пусть K - коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей. Дадим аксиоматическое определение.

Опр: 9. Кольцо многочленов от n переменных с коэффициентами из кольца K это ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $K \subset K[x_1, \ldots, x_n]$;

2) $x_1, \ldots, x_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $x_1, \ldots, x_n \notin K$;

3) $\forall f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $\exists!$ представление:

$$f = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} a_{k_1 \ldots k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$$

С точностью до добавления нулевых слагаемых;

Обозначение: $K[x_1, \ldots, k_n]$.

Опр: 10. Элементы $x_1, \ldots, x_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$ называются переменными.

Опр: 11. Элементы $a_{k_1 \ldots k_n} \in K$ в представлении $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ называются коэффициентами.

Опр: 12. Элементы $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ в представлении $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ называются одночленами.

Rm: 2. Свойство 3) определения кольца многочленов от нескольких переменных можно переформулировать так: любой элемент кольца многочленов от n переменных представляется единственным способом, с точностью до добавления нулевых слагаемых, в виде линейной комбинации одночленов от этих переменных с коэффициентами из исходного кольца K.

Теорема 2. $K[x_1, \ldots, x_n]$ - существует и единственно с точностью до изоморфизма.