Применение теории определителей

Нахождение обратной матрицы

Пусть A - произвольная квадратная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр: 1. Присоединенной матрицей к A называется матрица из алгебраических дополнений вида:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где $\widehat{a}_{ij} = A_{ji}$ - алгебраическое дополнение к симметричному элементу $a_{ji} = a_{ij}^T$ исходной матрицы A.

Теорема 1. Пусть A - обратима, тогда будет верно:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widehat{A}$$

□ Рассмотрим матрицу $A \cdot \widehat{A}$, её элемент на месте (i, j):

$$a_{i1} \cdot \widehat{a}_{1j} + a_{i2} \cdot \widehat{a}_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot \widehat{a}_{nj} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn}$$

Если $i = j$, то эта сумма есть разложение по i-ой строке определителя матрицы A и равна $\det A$. Если же $i \neq j$, то эта сумма есть фальшивое разложение определителя и равна 0. Тогда:

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

Аналогично для $\widehat{A} \cdot A$, её элемент на месте (i, j):

$$\widehat{a}_{i1} \cdot a_{1j} + \widehat{a}_{i2} \cdot a_{2j} + \ldots + \widehat{a}_{in} \cdot a_{nj} = A_{1i} \cdot a_{1j} + A_{2i} \cdot a_{2j} + \ldots + A_{ni} \cdot a_{nj} = \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

где опять, если $i = j$, то получаем разложение по i-ому столбцу, если $i \neq j$, то получаем фальшивое разложение по столбцу. Тогда:

$$\widehat{A} \cdot A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

Пусть A - обратима $\Rightarrow$ невырождена $\Rightarrow \det A \neq 0$. Тогда, каждую формулу поделим на $\det A$ и получим:

$$A \cdot \frac{\widehat{A}}{\det A} = \frac{\widehat{A}}{\det A} \cdot A = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{\widehat{A}}{\det A}$$

■

Пример: пусть A - квадратная матрица 2×2, тогда:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \widehat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

Рассмотрим квадратную СЛУ (число уравнений = числу неизвестных):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде:

$$A \cdot x = b,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Мы умеем решать системы методом Гаусса, правда у него есть большой недостаток в том, что он не дает явных формул. Метод решения квадратной СЛУ, называемый методом Крамера, позволяет дать явные формулы для решения квадратной СЛУ. Введем обозначения:

$$\Delta = |A| = \det A, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \forall j = \overline{1, n}$$

Утв. 1. (**правило Крамера**)

1) **Критерий определенности**: Квадратная СЛУ определена $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$;
2) **Условие несовместности**: Если $\Delta = 0$, но $\exists\, j \in \{1, \dots, n\} \colon \Delta_j \neq 0$, то тогда система несовместна;
3) **Формулы Крамера**: В случае, если СЛУ определена (т.е. имеет единственное решение) её единственное решение имеет вид:
$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \forall j = \overline{1, n}$$
эти формулы называются формулами Крамера;

Rm: 1. В случае если $\Delta = 0$ и $\forall j = \overline{1, n}$, $\Delta_j = 0$ правило Крамера ничего не говорит.

□ Заметим, что A это матрица $n \times n$, а расширенная матрица $\widetilde{A}$ это матрица $n \times n+1$, тогда мы получаем:

$$\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} \widetilde{A} \leq n$$

1) **Критерий определенности**: у нас есть этот критерий в терминах рангов:

$$\text{СЛУ определена} \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A} = n \Leftrightarrow \operatorname{rk} A$$

где последнее следует из нашего замечания выше. Мы знаем, что $\operatorname{rk} A = n$ означает, что матрица невырождена, тогда:

$$\operatorname{rk} A = n \Leftrightarrow \det A = \Delta \neq 0$$

2) **Условие несовместности**: по условию $\Delta = 0 \Rightarrow \operatorname{rk} A < n$, вместе с этим $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\} \colon \Delta_j \neq 0$, тогда соответствующая матрица невырождена $\Rightarrow$ её столбцы линейно независимы:

$$\operatorname{rk}\left\{A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right\} = n$$

Если мы добавим к этой системе j-ый столбец матрицы A, то ранг может только увеличиться:

$$\operatorname{rk}\left\{A^{(1)}, \ldots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \ldots, A^{(n)}\right\} \leq \operatorname{rk}\left\{A^{(1)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(n)}, b\right\} = \operatorname{rk} \widetilde{A} \Rightarrow \operatorname{rk} \widetilde{A} \geq n$$

А в силу нашего замечания, ранг расширенной матрицы не может быть больше n, тогда:

$$\operatorname{rk} \widetilde{A} = n > \operatorname{rk} A$$

Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли эта СЛУ несовместна;

3) **Формулы Крамера**: по условию $\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1} = \frac{\widehat{A}}{\det A}$, тогда:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1} \cdot Ax = E \cdot x = x = A^{-1} \cdot b = \frac{\widehat{A}}{\det A} \cdot b$$

$$\forall j = \overline{1, n},\ x_j = \frac{\widehat{a}_{j1} \cdot b_1 + \widehat{a}_{j2} \cdot b_2 + \ldots + \widehat{a}_{jn} \cdot b_n}{\Delta} = \frac{b_1 \cdot A_{1j} + b_2 \cdot A_{2j} + \ldots + b_n \cdot A_{nj}}{\Delta}$$

Заметим, что в числителе записано разложение Δ_j по j-ому столбцу, тогда:

$$\forall j = \overline{1, n},\ x_j = \frac{b_1 \cdot A_{1j} + b_2 \cdot A_{2j} + \ldots + b_n \cdot A_{nj}}{\Delta} = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

■

Вычисление ранга матрицы

Рассмотрим определения миноров в произвольной матрице A размера $m \times n$.

Опр: 2. Минором порядка k матрицы A, стоящего на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, называется определитель соответствующей подматрицы:

$$M_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} = |\widehat{A}|, \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_k} & \ldots & \cdot \\ \cdot & a_{i_2 j_1} & \ldots & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \cdot \\ \cdot & a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_2} & a_{i_k j_k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{pmatrix}$$

Опр: 3. Главным минором порядка k матрицы A называется минор порядка k такой, что номера столбцов и строк соответствующей подматрицы совпадают:

$$i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k,\ M_{i_1\ldots i_k}^{i_1\ldots i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \ldots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & a_{i_1i_1} & \ldots & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & a_{i_2i_1} & \ldots & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \cdot \\ \cdot & a_{i_ki_1} & \ldots & a_{i_ki_2} & \ldots & a_{i_ki_k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \end{pmatrix}$$

Опр: 4. Угловым минором порядка k матрицы A называется главный минор порядка k такой, что номера столбцов и строк соответствующей подматрицы идут по порядку от 1 до k:

$$i_1 = j_1 = 1, \ldots, i_k = j_k = k,\ M_{1\ldots k}^{1\ldots k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & \ldots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \end{pmatrix}$$

Теорема 2. (**о ранге матрицы**) Ранг произвольной матрицы равен наибольшему порядку её ненулевого минора.

$\square$ Пусть r - наибольший порядок ненулевого минора в A:

$$M_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r} \neq 0$$

Переставим строки и столбцы в A (такая операция может повлиять на миноры только сменой знака) так, чтобы этот минор был сосредоточен в верхнем левом углу матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ & \overline{A} & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn} \\ \hline a_{r+11} & \ldots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \ldots & a_{r+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{mr+1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right), \quad M_{1\ldots r}^{1\ldots r} = \det \overline{A} \neq 0$$

следовательно $\overline{A}$ - невырождена $\Rightarrow$ её строки линейно независимы. Введем обозначение:

$$\forall i = 1, \ldots, m,\ \overline{A}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir}) \in \mathbb{R}^r$$

Тогда $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_r$ - линейно независимы и их r штук $\Rightarrow$ они образуют базис $\mathbb{R}^r$. Тогда:

$$\forall i > r,\ \exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \colon \overline{A}_i = \lambda_1\overline{A}_1 + \ldots + \lambda_r\overline{A}_r$$

Строки $A_1, \ldots, A_r$ тем более линейно независимы, поскольку иначе:

$$\exists\, \mu_1, \ldots, \mu_r \colon \mu_i \neq 0,\ \mu_1 A_1 + \ldots \mu_r A_r = 0 \Rightarrow \mu_1 \overline{A}_1 + \ldots + \mu_r \overline{A}_r = 0$$

Добавим к первым r строкам и первым r столбцам ещё i-ую строку и j-ый столбец. Тогда на пересечении этих строк и столбцов мы получим минор порядка $r+1$, называемый окаймляющим для исходного:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} & & & a_{1r+1} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ & \overline{A} & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{rr+1} & \ldots & a_{rj} & \ldots & a_{rn} \\ \hline a_{r+11} & \ldots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \ldots & a_{r+1j} & \ldots & a_{r+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ir+1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{mr+1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right), \quad \overline{\overline{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1j} \\ & \overline{A} & & \vdots \\ & & & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{array}\right)$$

Он равен нулю в силу того, что наибольший порядок ненулевого минора равен r:

$$\forall i, j > r,\ M_{1\ldots ri}^{1\ldots rj} = \det \overline{\overline{A}} = 0$$

Строки $\overline{\overline{A}}_1, \ldots, \overline{\overline{A}}_r$ - линейно независимы, иначе строки $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_r$ были бы линейно зависимы. При этом все строки $\overline{\overline{A}}_1, \ldots, \overline{\overline{A}}_r, \overline{\overline{A}}_{r+1}$ - линейно зависимы, так как определитель равен 0. По свойствам линейной зависимости отсюда следует:

$$\overline{\overline{A}}_{r+1} = \lambda_1' {\cdot} \overline{\overline{A}}_1 + \ldots + \lambda_r' {\cdot} \overline{\overline{A}}_r \Rightarrow \overline{A}_{r+1} = \lambda_1' {\cdot} \overline{A}_1 + \ldots + \lambda_r' {\cdot} \overline{A}_r$$

где последнее верно при отбрасывании последнего столбца. Но в силу однозначности разложения коротких строк по базису, коэффициенты будут такими же, как и в этом разложении:

$$\lambda_1' = \lambda_1, \ldots, \lambda_r' = \lambda_r$$

Следовательно, если мы добавляем i-ую строку к матрице $\overline{A}$ и любой столбец j, то строка i будет выражаться через первые r строк всегда с одними и теми же коэффициентами. Таким образом:

$$\forall j = 1, \ldots, n,\ a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \ldots + \lambda_r a_{rj}$$

Это будет верно $\forall j = 1, \ldots, n$, поскольку $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ от выбора столбца j не зависят, тогда:

$$\forall i > r,\ A_i = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_r A_r$$

В результате, $\{A_1, \ldots, A_r\}$ это базис системы строк матрицы A и тогда $\operatorname{rk} A = r$. ■

Rm: 2. Доказательство теоремы показывает, что ранг матрицы равен r, если $\exists\, M_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_r} \neq 0$ такой, что:

$$\forall i \neq i_1, \ldots, i_r,\ \forall j \neq j_1, \ldots, j_r,\ M_{i_1\ldots i_r i}^{j_1\ldots j_r j} = 0$$

то есть, все окаймляющие миноры равны нулю.

Из этого замечания получается метод нахождения ранга матрицы, который теоретически бывает полезен (хотя и не очень полезен на практике).

Метод окаймляющих миноров

1) Если $A = 0$, то $\operatorname{rk} A = 0$.

2) Если $A \neq 0$, то возьмем в ней $a_{i_1 j_1} \neq 0$, это минор первого порядка, отличный от нуля. Рассмотрим ещё какую-нибудь строку i и какой-нибудь столбец j. Посмотрим на окаймляющий минор:

$$\forall i \neq i_1,\, \forall j \neq j_1,\, M_{i_1 i}^{j_1 j} =?$$

Если все такие миноры равны нулю, то $\operatorname{rk} A = 1$. Если же нашелся окаймляющий минор не равный нулю, то возьмем его для следующего шага.

3) Обозначим минор с шага 2) как $M_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \neq 0$. Рассмотрим ещё какую-нибудь строку i и какой-нибудь столбец j. Посмотрим на окаймляющий минор:

$$\forall i \neq i_1, i_2,\, \forall j \neq j_1, j_2,\, M_{i_1 i_2 i}^{j_1 j_2 j} =?$$

Если все такие миноры равны нулю, то $\operatorname{rk} A = 2$. Если же нашелся окаймляющий минор не равный нулю, то возьмем его для следующего шага. И так далее.

В конце получим ненулевой минор порядка r такой, что все окаймляющие миноры $r + 1$-го порядка равны нулю:

$$\forall i \neq i_1, i_2,\, \forall j \neq j_1, j_2,\, M_{i_1 \dots i_r i}^{j_1 \dots j_r j} = 0$$

Тогда можем сделать вывод, что $\operatorname{rk} A = r$.