ДЗ: 20.8б, 20.10б, 21.1влух, 21.2вж, 21.9вг, 21.10, 22.1, 22.2, 22.5, 22.6, 22.7авзио

Комплексные числа в тригонометрической форме

Задача 1. (**К21.1**) Найти тригонометрическую форму чисал:

а) 5;

□ $5 = 5(1 + i{\cdot}0) = 5(\cos 0 + i \sin 0)$; ■

б) i;

□ $i = 1(0 + i{\cdot}1) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; ■

в) -2;

□ $-2 = 2(-1 + i{\cdot}0) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$; ■

г) $-3i$;

□ $-3i = 3{\cdot}(0 + i{\cdot}(-1)) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; ■

д) $1 + i$;

□ $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; ■

е) $1 - i$;

□ $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; ■

ж) $1 + i\sqrt{3}$;

□ $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; ■

з) $-1 + \sqrt{3}$;

□ $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; ■

и) $-1 - i\sqrt{3}$;

□ $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; ■

к) $1 - i\sqrt{3}$;

□ $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; ■

л) $\sqrt{3} + i$;

$\square$ $\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right);$ $\blacksquare$

м) $-\sqrt{3}+i;$

$\square$ $-\sqrt{3}+i=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right);$ $\blacksquare$

н) $-\sqrt{3}-i;$

$\square$ $-\sqrt{3}-i=-(\sqrt{3}+i)=-2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right);$ $\blacksquare$

о) $\sqrt{3}-i;$

$\square$ $\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right);$ $\blacksquare$

п) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3};$

$\square$ $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow 1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6});$ $\blacksquare$

р) $2+\sqrt{3}+i;$

$\square$

$$|2+\sqrt{3}+i|=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\Rightarrow 2+\sqrt{3}+i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{i}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=15^\circ=\frac{-15}{180}\pi=\frac{\pi}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{3}+i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$\blacksquare$

с) $1-(2+\sqrt{3})i;$

$\square$

$$|1-(2+\sqrt{3})i|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\Rightarrow 1-(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\frac{i\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1}=-(2+\sqrt{3})\Rightarrow\varphi=-75^\circ=\frac{-75}{180}\pi=\frac{-5\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-(2+\sqrt{3})i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right)$$

$\blacksquare$

т) $\cos(\alpha)-i\sin(\alpha);$

□ $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha);$ ■

у) $\sin\alpha + i\cos\alpha;$

□ $|\sin\alpha + i\cos\alpha| = 1,\ \sin\alpha + i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$ ■

ф) $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha};$

□ $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha);$ ■

х) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in (-\pi, \pi);$

□

$$|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{1 + 2\cos\varphi + 1} = \sqrt{2(1 + \cos\varphi)} = \sqrt{4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}} = \pm 2\cos\tfrac{\varphi}{2}$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \tfrac{\varphi}{2} \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}} = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 2\cos\tfrac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\right) = 2\cos\tfrac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)$$

■

ц) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi};$

□

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i\varphi}\cdot e^{-i\psi} = e^{i(\varphi - \psi)} = \cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)$$

■

Задача 2. (**K21.2**)

а) $(1 + i)^{1000};$

□

$$(1 + i)^{1000} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\pi 4\right)\right)^{1000} = 2^{500}(\cos(250\pi) + i\sin(250\pi)) = 2^{500}$$

■

б) $(1 + i\sqrt{3})^{150};$

□

$$(1 + i\sqrt{3})^{150} = \left(2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)\right)^{150} = 2^{150}\left(\cos(50\pi) + i\sin(50\pi)\right) = 2^{150}$$

■

в) $(\sqrt{3} + i)^{30};$

□

$$(\sqrt{3} + i)^{30} = \left(2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}\right)\right)^{30} = 2^{30}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right) = -2^{30}$$

■

г) $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{24};$

$\square$

$$\left|1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}\right|=\sqrt{1+\sqrt{3}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\Rightarrow 1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\tfrac{i}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}\Rightarrow-\operatorname{tg}15^\circ=-2+\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{12}$$

$$\left(1+\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{i}{2}\right)^{24}=(2+\sqrt{3})^{12}\cdot\left(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\right)=(2+\sqrt{3})^{12}$$

$\blacksquare$

д) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$;

$\square$

$$\left|2-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3+1}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\Rightarrow 2-\sqrt{3}+i=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\tfrac{i}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})\Rightarrow\varphi=-75^\circ=-\frac{75}{180}\pi=-\frac{5\pi}{12}$$

$$(2-\sqrt{3}+i)^{12}=2^{12}(2-\sqrt{3})^{6}\cdot(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))=-2^{12}(2-\sqrt{3})^{6}$$

$\blacksquare$

е) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$;

$\square$

$$|z|=\tfrac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|}=\sqrt{2}\Rightarrow|z|^{12}=2^6=64$$

$$\tfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos(-\beta)+i\sin(-\beta))=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3},\ \arg(1+i)=\frac{\pi}{4},\ \arg\left(\tfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\tfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}=64(\cos(-7\pi)+i\sin(-7\pi))=64(\cos\pi+i\sin\pi)=-2^6$$

где $-7\pi\equiv\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. $\blacksquare$

ж) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$;

$\square$

$$\left(\tfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}=\tfrac{(\sqrt{3}+i)^{30}}{(1-i)^{30}}$$

$$(1-i)^{30}=2^{15}(\cos\left(\tfrac{90\pi}{4}\right)+i\sin\left(\tfrac{90\pi}{4}\right))=2^{15}(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2})=i2^{15}$$

$$(\sqrt{3}+i)^{30}=2^{30}\left(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)\right)=-2^{30}$$

$$\left(\tfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}=\tfrac{-2^{30}}{i2^{15}}=2^{15}i$$

$\blacksquare$

з) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;

□

$$(1-i)^{20} = 2^{10}(\cos(15\pi) + i\sin(15\pi)) = -2^{10}$$
$$(1+i)^{20} = 2^{10}(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)) = -2^{10}$$
$$(-1+i\sqrt{3})^{15} = 2^{15}(\cos(10\pi) + i\sin(10\pi)) = 2^{15}$$
$$(-1-i\sqrt{3})^{15} = 2^{15}(\cos(20\pi)) + i\sin(20\pi)) = 2^{15}$$
$$\tfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \tfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} = \tfrac{2^15}{-2^{10}} + \tfrac{2^{15}}{-2^{10}} = -2^5 - 2^5 = -2^6$$

■

Задача 3. (**K21.3**) Решить уравнения:

а) $|z| + z = 8 + 4i$;

□

$$|z| + z = |z|\cdot(1+\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|((1+\cos\alpha) + i\sin\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z| + z = |z|\cdot\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}\right)$$
$$8+4i = 4(2+i) = 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ |z|\cdot\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 4\sqrt{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+\cos\alpha = \frac{8}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5},\ |z| = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2\cdot\frac{8}{5}}} = 5 \Rightarrow z = 5\cdot\left(\frac{3}{5} + i\sqrt{\frac{25-9}{5}}\right) = 3+4i$$

■

б) $|z| - z = 8 + 12i$;

□

$$|z| - z = |z|\cdot(1-\cos\alpha - i\sin\alpha) = |z|((1-\cos\alpha) - i\sin\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z| - z = |z|\cdot\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}\right)$$
$$8+12i = 4(2+3i) = 4\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{i3}{\sqrt{13}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}},\ |z|\cdot\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 4\sqrt{13} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-\cos\alpha = \frac{8}{13} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13},\ |z| = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{2\cdot\frac{8}{13}}} = 13 \Rightarrow z = 13\cdot\left(\frac{5}{13} - i\sqrt{\frac{169-25}{13}}\right) = 5-12i$$

■

Задача 4. (**K21.4**) Доказать следующие свойства модуля комплексных чисел:

а) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

□ Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Тогда:

$$z_1 \pm z_2 = |z_1|\cos\alpha \pm |z_2|\cos\beta + i(|z_1|\sin\alpha \pm |z_2|\sin\beta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |z_1 \pm z_2| = \sqrt{(|z_1|\cos\alpha \pm |z_2|\cos\beta)^2 + (|z_1|\sin\alpha \pm |z_2|\sin\beta)^2} =$$
$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2|z_1||z_2|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)}$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cdot(1)\Rightarrow$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)\le|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cdot(-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2\pm2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)}\le\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|}=\sqrt{(|z_1|+|z_2|)^2}=|z_1|+|z_2|$$

■

б) $||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|$;

□ Воспользуемся доказательством предыдущей задачи:

$$|z_1\pm z_2|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2\pm2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)\ge|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cdot(-1)=(|z_1|-|z_2|)^2$$
$$\Rightarrow|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)\ge|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cdot1=(|z_1|-|z_2|)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|z_1\pm z_2|\ge\sqrt{(|z_1|-|z_2|)^2}=||z_1|-|z_2||$$

■

в) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|\Leftrightarrow z_1$ и z_2 имеют одинаковые направления;

□ Воспользуемся результатом пункта а). Если z_1 и z_2 имеют одинаковые направления, то угол между положительной действительной осью и векторами z_1, z_2 будет одинаковым, тогда:

$$\alpha=\beta\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos(0)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{(|z_1|+|z_2|)^2}=|z_1|+|z_2|$$

■

г) $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||\Leftrightarrow z_1$ и z_2 имеют противоположные направления;

□ Воспользуемся результатом пункта б). Если z_1 и z_2 имеют противоположные направления, то угол между векторами будет равен π, тогда:

$$\alpha=\pi+\beta\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos(0+\pi)=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{(|z_1|-|z_2|)^2}=||z_1|-|z_2||$$

■

Задача 5. (**K21.5**) Доказать, что:

а) Если $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$;

□ Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$|z^2-z+i|\le|z^2|+|z+i|\le|z^2|+|z|+|i|=|z|^2+|z|+|i|<1+1+1=3$$

■

б) Если $|z|\le2$, то $1\le|z^2-5|\le9$;

□ Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$|z^2-5|\le|z^2|+|5|=|z|^2+5\le4+5=9$$
$$|z^2-5|\ge||z^2|-|5||=||z|^2-5|=5-|z|^2\ge5-4=1$$

■

в) Если $|z| < 1/2$, то $|(1+i)z^3 + iz| < 3/4$;

$\square$ Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$|(1+i)z^3 + iz| \le |z^3 + iz^3| + |iz| \le |z|^3 + |i|\cdot|z|^3 + |i|\cdot|z| < \frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\blacksquare$

Задача 6. (**K21.6**) Доказать неравенство:

$$|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2|| + \min\{|z_1|, |z_2|\}\cdot|\arg z_1 - \arg z_2|$$

В каком случае неравенство обращается в равенство?

$\square$ Воспользуемся задачей 21.4:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos(\alpha - \beta)}$$

$\blacksquare$

Задача 7. (**K21.9**) При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1+i)^n$;

$\square$ $1 + i = \sqrt{2}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$; $\blacksquare$

б) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

$\square$ $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \cos\frac{\pi n}{6} + i\sin\frac{\pi n}{6}$. $\blacksquare$

в) $\left(\dfrac{1 - i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$;

$\square$

$$\frac{1 - i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 = \cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1 - i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \cos(2n\alpha) - i\sin(2n\alpha)$$

$\blacksquare$

г) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$;

$\square$ $\blacksquare$

Задача 8. (**K21.10**) Доказать, что если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\varphi)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$z + z^{-1} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha = 2\cos\varphi \Rightarrow r = 1,\ \alpha = \pm\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),\ z^{-n} = \cos(n\varphi) - i\sin(n\varphi) \Rightarrow z^n + z^{-n} = 2\cos(n\varphi)$$

■

Задача 9. (**K21.11**) Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

а) $\sin(4x)$

□ Воспользуемся формулой Муавра и биномом Ньютона:

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x$$

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos(4x) + i\sin(4x) \Rightarrow \sin(4x) = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$$

■

б) $\cos(4x)$

□ Воспользуемся результатами предыдущего пункта:

$$\cos(4x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$$

■

в) $\sin(5x)$

□ Воспользуемся формулой Муавра и биномом Ньютона:

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$$

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos(5x) + i\sin(5x) \Rightarrow \sin(5x) = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$$

■

г) $\cos(5x)$

□ Воспользуемся результатами предыдущего пункта:

$$\cos(5x) = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$

■

Задача 10. (**K21.13**) Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x функции:

а) $\sin^4 x$;

□

$$z = \cos x + i\sin x = e^{ix},\ \overline{z} = \cos x - i\sin x = e^{-ix} \Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} =$$

$$= \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 6 - 4\cos(-2x) + \cos(-4x)}{16} = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}$$

■

б) $\cos^4 x$;

□

$$z = \cos x + i\sin x = e^{ix} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 =$$
$$= \frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-ix}+e^{-4ix}}{16} = \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+6+4\cos(2x)+\cos(4x)}{16} =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right)$$

■

в) $\sin^5 x$;

□

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i} =$$
$$= \frac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x-10\sin(-x)+5\sin(-3x)-\sin(-5x)}{32} =$$
$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin x\right)$$

■

г) $\cos^5 x$;

□

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}}{32} =$$
$$= \frac{2\cos(5x)+10\cos(3x)+20\cos(x)}{32} = \frac{1}{16}(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos x)$$

■

Задача 11. (**К22.1**) Доказать, что если комплексное число z является одним из корней степени n из числа вещественного a, то и сопряженное число $\overline{z}$ является одним из корней степени n из a.

□ Пусть $z = \sqrt[n]{a}$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда:

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)) = a \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{a} \\ \varphi = \dfrac{2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

Таким образом, если z - это корень, то он имеет вид:

$$z = \sqrt[n]{a}\cos\left(\tfrac{2\pi k}{n}\right) = \overline{z}$$

Следовательно, $\overline{z}$ тоже корень. Или ещё можно показать это так:

$$z^n = a \Rightarrow \overline{z^n} = \overline{a} \Leftrightarrow \overline{z}^n = \overline{a} = a \in \mathbb{R}$$

■

Задача 12. (**К22.2**) Доказать, что если $\sqrt[n]{z} = \{z_1, \ldots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\overline{z}} = \{\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n\}$.

$\square$ По определению:
$$\sqrt[n]{z} = \{w \mid w^n = z\} = \{z_1, \ldots, z_n\}$$
Пусть $z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, тогда:
$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k,\ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \varphi = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$
Тогда для сопряженного числа будет верно:
$$\overline{z} = R(\cos\alpha - i\sin\alpha) = R(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)),\ \sqrt[n]{\overline{z}} = \{w \mid w^n = \overline{z}\}$$
$$w^n = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = -\alpha + 2\pi k,\ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \varphi = \dfrac{-\alpha + 2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$
$$z_i = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\tfrac{\alpha+2\pi(i-1)}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\alpha+2\pi(i-1)}{n}\right)\right) \Rightarrow \overline{z}_i = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(\tfrac{\alpha+2\pi(i-1)}{n}\right) - i\sin\left(\tfrac{\alpha+2\pi(i-1)}{n}\right)\right) =$$
$$= \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(-\tfrac{\alpha}{n} - \tfrac{2\pi(i-1)}{n}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\alpha}{n} - \tfrac{2\pi(i-1)}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{R}\left(\cos\left(-\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{2\pi(n+1-i)}{n}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{2\pi(n+1-i)}{n}\right)\right)$$
Поскольку $i = \overline{1, n}$, то мы получим все корни степени n из $\overline{z}$. $\blacksquare$

Задача 13. (**K22.6**) Верно ли равенство: $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$, $s > 1$.

$\square$
$$\sqrt[ns]{z^s} = \{w \mid w^{ns} = z^s\},\ \sqrt[n]{z} = \{w \mid w^n = z\}$$
Пусть $z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0$, $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$, тогда:
$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k,\ k = \overline{0, n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \varphi = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$
$$w^{ns} = z^s \Leftrightarrow \begin{cases} r^{ns} = R^s \\ ns\varphi = \alpha s + 2\pi k,\ k = \overline{0, ns-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \varphi = \dfrac{\alpha s + 2\pi k}{ns},\ k = \overline{0, ns-1} \end{cases}$$
Таким образом, $\sqrt[ns]{z^s} \neq \sqrt[n]{z}$ для $s > 1$. $\blacksquare$