Теория определителей

Утв. 1. Всякая полилинейная и кососимметрическая функция строк квадратной матрицы пропорциональна определителю.

☐ В самом деле, пусть f - такая функция. Возьмем произвольную квадратную матрицу A и ЭП строк приведем к A^* - треугольной матрице.

$$A \xrightarrow{\text{ЭП строк}} A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда, в силу линейности и кососимметричности функции строк, будет верно:

$$f(A) = f(A^*)\cdot(-1)^p\cdot\frac{1}{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\mu_q}$$

где p - количество ЭП2, $\mu_1, \ldots, \mu_q$ - множители в ЭП3. Это следует сразу из аналогичного доказательства для определителя. Проверим ещё раз:

$$f(A_1, \ldots, \mu A_k' + \lambda A_k'', \ldots, A_n) = \mu\cdot f(A_1, \ldots, A_k', \ldots, A_n) + \lambda\cdot f(A_1, \ldots, A_k'', \ldots, A_n)$$

$$f(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_l, \ldots, A_n) = -f(A_1, \ldots, A_l, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$$

Тогда будет верны свойства определителя:

$$A_k = 0 \Rightarrow f(A) = 0,\ A_k = A_l \Rightarrow f(A) = 0,\ A_l = \lambda\cdot A_k \Rightarrow f(A) = 0$$

$$f(A_1, \ldots, A_k + \lambda\cdot A_l, \ldots, A_l, \ldots, A_n) = f(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$$

Таким образом, аналогично тому, как это проводилось для определителя, воспользуемся однородностью и ЭП1 строк, тогда:

$$f(A^*) = \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot f(E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(A) = (-1)^p\cdot\frac{1}{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\mu_q}\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot f(E) = \det A\cdot f(E) = \lambda\cdot\det A$$

■

Rm: 1. Заметим, что в силу полилинейности и кососимметричности, можно разложить функцию f так:

$$f(A_1, \ldots, A_n) = f(a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n, \ldots, a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n) = \sum_{j_1\cdots j_n} a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\cdot f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$

Совершим перестановки строк σ:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Тогда функция поменяет знак на знак подстановки $\operatorname{sgn}\sigma$ и мы получим:

$$f(A) = \sum_{j_1\cdots j_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\cdot f(e_1, \ldots, e_n) = \det A\cdot f(e_1, \ldots, e_n)$$

Определители специального вида

Опр: 1. Пусть A - квадратная матрица, устроенная следующим образом:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right),\ B \in \mathrm{Mat}_k,\ C \in \mathrm{Mat}_{(n-k)},\ D \in \mathrm{Mat}_{k,n-k},\ 0 \in \mathrm{Mat}_{n-k,k}$$

Такие матрицы называются матрицами с углом нулей.

Утв. 2. Пусть A - матрица с углом нулей, тогда: $\det A = \det B \cdot \det C$.

☐ Рассмотрим частный случай, когда A является треугольной матрицей $\Rightarrow$ B и C тоже будут треугольными. Тогда:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_k & * & \dots & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & \gamma_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \gamma_{n-k} \end{array}\right) \Rightarrow \det A = \beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_k \cdot \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_{n-k} = \det B \cdot \det C$$

Рассмотрим общий случай и сведем его к частному. Приведем произвольную матрицу A к треугольному виду. Путём ЭП первых k строк получим матрицу A' из матрицы A так, чтобы получить из квадратной матрицы B ступенчатую матрицу B', затем ЭП последних $n-k$ строк получим матрицу A'' со ступенчатой матрицей C':

$$A \xrightarrow[1,\ldots,k]{\text{ЭП строк}} A' = \left(\begin{array}{c|c} B' & D' \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \xrightarrow[k+1,\ldots,n]{\text{ЭП строк}} A'' = \left(\begin{array}{c|c} B' & D' \\ \hline 0 & C' \end{array}\right)$$

Поскольку B, C - квадратные матрицы, то после преобразования в ступенчатые они становятся треугольными матрицами B', C' соответственно. Тогда:

$$\det A = \det A' \cdot (-1)^p \cdot \frac{1}{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\mu_q}$$

где p - количество ЭП2, $\mu_1, \ldots, \mu_q$ - множители в ЭП3 для первых k строк. Аналогично:

$$\det A' = \det A'' \cdot (-1)^r \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\nu_s}$$

где r - количество ЭП2, $\nu_1, \ldots, \nu_s$ - множители в ЭП3 для последних $n-k$ строк. Следовательно:

$$\det A = \det A'' \cdot (-1)^{p+r} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\nu_s} \cdot \frac{1}{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\mu_q} = \det B' \cdot \det C' \cdot (-1)^{p+r} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\nu_s} \cdot \frac{1}{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\mu_q}$$

где последнее верно в силу частного случая, который мы доказали ранее. Тогда:

$$\det B' \cdot (-1)^p \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\nu_s} \cdot \det C' \cdot (-1)^{r+r} \cdot \frac{1}{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\mu_q} = \det B \cdot \det C$$

Поскольку матрицы B и C связаны ЭП с матрицами B' и C'. ■

Определитель Вандермонда

Опр: 2. Определителем Вандермонда называется определитель порядка n следующего вида:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Теорема 1.

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

□ Воспользуемся ЭП1: из последней строки вычтем предпоследнюю с коэффициентом x_1, затем из строки $n-1$ вычтем $n-2$ строку с коэффициентом x_1. И продолжим процедуру далее. Как известно, при таком преобразовании определитель не меняется, тогда:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-3} - x_1 x_2^{n-4} & \dots & x_n^{n-3} - x_1 x_n^{n-4} \\ 0 & x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & \dots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Заметим, что мы получили определитель матрицы с углом нулей, тогда:

$$V(x_1, \dots, x_n) = |1| \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-3} - x_1 x_2^{n-4} & \dots & x_n^{n-3} - x_1 x_n^{n-4} \\ x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & \dots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} \\ x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) \cdot 1 & \dots & (x_n - x_1) \cdot 1 \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2 & \dots & (x_n - x_1) \cdot x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-4} & \dots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-4} \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-3} & \dots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-3} \\ (x_2 - x_1) \cdot x_2^{n-2} & \dots & (x_n - x_1) \cdot x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Используя свойство однородности, вынесем из каждого столбца соответствующие множители:

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot V(x_2, \dots, x_n)$$

Далее можно по индукции раскрыть определители Вандермонда меньших степеней, тогда:

$$(x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot V(x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_2) \cdot V(x_3, \dots, x_n) =$$

$$= \ldots = (x_2 - x_1)\cdot \ldots \cdot(x_n - x_{n-2})\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\cdot \ldots \cdot(x_n - x_{n-2})\cdot(x_n - x_{n-1})$$

Следовательно, короткая запись для этого определителя будет иметь вид:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

■

Следствие 1. (основное свойство определителя Вандермонда)

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \exists\, i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j\colon x_i = x_j$$

□ Следует сразу из короткой записи определителя Вандермонда. ■

Определители невырожденных матриц

Теорема 2. Квадратная матрица A - невырождена $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

□ Приведем матрицу A ЭП строк к ступенчатому виду:

$$A \xrightarrow{\text{ЭП строк}} A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Поскольку матрица A квадратная, то ступенчатый вид = треугольная матрица. Заметим, что не обязательно все числа $\lambda_i \neq 0$, но ниже диагонали точно будут нули. При ЭП ранг матрицы не меняется, тогда матрица A невырождена $\Leftrightarrow$ матрица A^* также невырождена $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A^* = n$. У ступенчатой квадратной матрицы её ранг равен $n \Leftrightarrow$ её ступеньки будут идти по диагонали, иначе в низу матрицы будут нулевые строки и ранг будет меньше n. Таким образом, A^* невырождена $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1, n},\ \lambda_i \neq 0$. Тогда:

$$\det A^* = \lambda_1\cdot \ldots \cdot\lambda_n \neq 0 \Rightarrow \det A = \lambda\cdot \det A^*,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = \lambda\cdot\lambda_1\cdot \ldots \cdot\lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, n},\ \lambda_i \neq 0$$

■

Теорема 3. Пусть A, B - матрицы $n \times n$. Тогда:

$$\det (A\cdot B) = \det A\cdot \det B$$

□ Рассмотрим 2 случая:

Случай 1: матрица A - вырождена. Тогда:

$$\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A < n$$

Следовательно, матрица AB тоже будет вырожденной, тогда:

$$|A\cdot B| = 0 = |A|\cdot|B| = 0\cdot|B|$$

Случай 2: матрица A - невырождена. Тогда её можно представить в виде произведения элементарных матриц:

$$A = U_1 \cdot \ldots \cdot U_N$$

Следовательно, можно сказать, что A получается из единичной матрицы умножением слева на элементарные матрицы, а это тоже самое, что и ЭП строчек:

$$E \xrightarrow{\text{ЭП}_1} \ldots \xrightarrow{\text{ЭП}_N} U_1 \cdot \ldots \cdot U_N \cdot E$$

где ЭП_i это ЭП строк, соответствующее элементарной матрице U_i. Тогда:

$$A \cdot B = U_1 \cdot \ldots \cdot U_N \cdot B$$

То есть, матрица AB получается теми же самыми ЭП из матрицы B:

$$B \xrightarrow{\text{ЭП}_1} \ldots \xrightarrow{\text{ЭП}_N} U_1 \cdot \ldots \cdot U_N \cdot B$$

Мы знаем, что при ЭП строчек определитель меняется определенным образом, тогда:

$$\det A = \lambda \cdot \det E = \lambda$$

где λ - множитель, возникающий при $\text{ЭП}_1, \ldots, \text{ЭП}_N$. Аналогично:

$$\det (A \cdot B) = \lambda \cdot \det B = \det A \cdot \det B$$

∎

Миноры

Пусть A - произвольная матрица размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выберем в ней какие-нибудь k строчек $i_1, i_2, \dots, i_k$ и какие-нибудь k столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$. Тогда на пересечении этих k строк и k столбцов мы получаем квадратную подматрицу:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \\ \\ i_1 \\ \vdots \\ i_k \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & \dots & \boldsymbol{a_{i_1 j_1}} & \dots & \boldsymbol{a_{i_1 j_k}} & \dots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k 1} & \dots & \boldsymbol{a_{i_k j_1}} & \dots & \boldsymbol{a_{i_k j_k}} & \dots & a_{i_k n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj_1} & \dots & a_{mj_k} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} \qquad\qquad j_1 & \dots & j_k \qquad\qquad \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

Опр: 3. Минором порядка k матрицы A, стоящего на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$, называется определитель соответствующей подматрицы:

$$M_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} = |\widehat{A}|$$

В частности, пусть $m = n$ и рассмотрим миноры порядка $k = n - 1 \Rightarrow$ получается, что мы вычеркиваем из квадратной матрицы какую-то строчку и какой-то столбец $\Rightarrow$ на пересечении вычеркнутой строки и вычеркнутого столбца стоит какой-то элемент исходной матрицы и тот минор, который мы получаем будет дополнительным к этому элементу.

Опр: 4. Дополнительным минором к элементу a_{ij} матрицы A это определитель исходной матрицы без i-ой строчки и j-го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

то есть, это определитель матрицы размера $n - 1 \times n - 1$.

Опр: 5. Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} матрицы A называется число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Теорема 4. Пусть A - матрица $n \times n$. Тогда:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

эта формула называется разложением определителя по i-ой строке. Аналогичная формула есть для разложения по столбцу:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

эта формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.

Rm: 2. Определитель квадратной матрицы можно разложить по любой строке и по любому столбцу.

□ Докажем разложение по столбцу:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{1j} \cdot e_1 + \ldots + a_{ij} \cdot e_i + \ldots + a_{nj} \cdot e_n$$

Поскольку определитель это аддитивная функция, то отсюда следует его вид:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left| A^{(1)} \ldots a_{ij} \cdot e_i \ldots A^{(n)} \right|$$

В каждом определителе внутри суммы переставим j-ый столбец с 1-ым, меняя его по очереди с предыдущими столбцами ($j-1$ столбец). Каждая перестановка столбцов меняет знак определителя, тогда:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \left| a_{ij} \cdot e_i A^{(1)} \ldots A^{(n)} \right| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \ldots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Проделаем теперь аналогичную операцию для строчек. В каждом определителе внутри суммы переставим i-ую строчку с 1-ой, меняя её по очереди с предыдущими строчками ($i-1$ строка). Каждая перестановка строк меняет знак определителя, тогда:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \ldots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \ldots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \ldots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \ldots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \ldots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \ldots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Видим, что здесь у нас получилась матрица с углом нулей, тогда:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j-2}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$$

Разложение по строке сводится к разложению по столбцу путём транспонирования. Пусть M_{ji}^T - дополнительный минор к элементу a_{ji}^T в матрице A^T, тогда $M_{ji}^T = M_{ij}$. Следовательно:

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^T\cdot A_{ji}^T = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{j+i}\cdot M_{ji}^T = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{j+i}\cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$$

■

Лемма 1. (**о фальшивом разложении определителя**) Пусть $i \neq j$, тогда:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

это выражение называется фальшивым разложением по строке. Аналогично:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

это выражение называется фальшивым разложением по столбцу.

□ Докажем первую формулу (вторая доказывается аналогично). Рассмотрим определитель матрицы:

$$|A'| = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Разложим этот определитель по j-ой строке, тогда:

$$|A'| = a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{jn} = 0$$

Здесь мы пользуемся тем, что алгебраические дополнения $A_{j1}, \ldots, A_{jn}$ не зависят от элементов j-ой строки. И таким образом, мы получаем требуемую формулу. Аналогично для столбцов. ■