Вводный семинар

Курс делится на три части:

1) Элементарная алгебра: многочлены, комплексные числа, вычеты;
2) Введение в линейную алгебру: СЛУ, векторные пространства, матрицы, определители;
3) Введение в алгебраические структуры (высшую алгебру);

Разберём некоторые задачи из школы.

Задача 1. Разложить многочлены на множители (многочлены с действительными коэффициентами меньшей степени) над $\mathbb{R}$:

1) x^4+1;
2) $x^4+x^3+x^2+x+1$;
3) x^6+x^3+1;

Rm: 1. Над $\mathbb{R}$ означает на многочлены с действительными коэффициентами (коэффициентами из $\mathbb{R}$).

□

1) Действительных корней нет, можем разложить на квадратные трехчлены:

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

2) Если есть корень a у многочлена, то он делится на $(x-a)$. Здесь видим геометрическую прогрессию:

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}$$

Видим, что числитель и знаменатель имеют один и тот же знак $\Rightarrow$ их отношение всегда положительно. $x=1$ - не является корнем исходного многочлена $\Rightarrow$ действительных корней у этого многочлена нет. Вынесем из-под многочлена x^2:

$$x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1\right),\, y=x+\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=y^2-2+y+1=y^2+y-1$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y^2+y-1=\left(y+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(y+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(x^2+1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x^2+1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

3) Действительных корней нет, так как это неполный квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, относительно x^3 (или можно показать также через геом. прогрессию):

$$x^6+x^3+1=\frac{x^9-1}{x-1}$$

Также этот многочлен не может разложиться в два кубических трехчлена, потому что у кубического трехчлена есть хотя бы один действительный корень (в силу поведения на $+\infty$ и $-\infty$).

Следовательно, раскладывается либо на два квадратных трехчлена, либо не раскладывается. Вынесем из-под многочлена x^3:

$$x^3\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right),\ x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)=y^3-3y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3\left(x^3+\frac{1}{x^3}+1\right)=x^3(y^3-3y+1)$$

С помощью уравнений Кардано можно записать корни этого уравнения, но они будут достаточно громоздкие. Ответ будет таким:

$$x^6+x^3+1=(x^2-2\cos 20^\circ x+1)(x^2-2\cos 40^\circ x+1)(x^2-2\cos 80^\circ+1)$$

Это на самом деле можно показать так:

$$y^3-3y+1=|y=2t|=8t^3-6t+1=2(4t^3-3t)+1$$

И тут уже применима формула косинусов тройного угла:

$$2(4t^3-3t)+1=|t=\cos\varphi|=2\cos 3\varphi+1\Rightarrow\cos 3\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow 3\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\varphi=\pm\frac{2\pi}{9}=\pm 20^\circ$$

■

Rm: 2. Косинус тройного угла выводится следующим образом:

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cdot\cos x-\sin 2x\cdot\sin x=(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot\cos x-2\sin x\cos x\sin x=$$

$$=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=$$
$$=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x$$

Все эти многочлены легко раскладываются на множители с помощью комплексных чисел абсолютно стандартным способом, далее мы это будем изучать.

Задача 2. Решите в целых числах:

$$4x^2-1=y^3$$

□

$$(2x-1)(2x+1)=y^3$$

Заметим, что оба множителя - нечетны и отличаются друг от друга на 2 $\Rightarrow$ эти числа взаимно просты, поскольку при отличии на 2 общими делителями могут быть 1 и 2, здесь числа нечетные $\Rightarrow$ только один делитель 1 $\Rightarrow$ поскольку произведение двух взаимно простых чисел это полный куб, то оба числа это кубы. Осталось найти пары соседних кубов, отличных на 2:

$$\ldots,-27,-8,-1,0,1,8,27,\ldots\Rightarrow 2x-1=-1,\ 2x+1=1\Rightarrow x=0,\ y=-1$$

■

Задача 3. Решите в целых числах:
$$4x^2 + 1 = y^3$$

$\square$ Почему сумма квадратов a^2+b^2 не раскладывается на множители (кроме 0)? Пусть раскладывается, тогда:
$$a^2 + b^2 = (\lambda_1 a + \mu_1 b)(\lambda_2 a + \mu_2 b)$$
где коэффициенты не равны нулю в каждой скобке одновременно. Тогда, каждая из этих скобок обнуляется на целой прямой, а левая часть обнуляется только в одной точке: $(a, b) = (0, 0)$. Но так верно только для $\mathbb{R}$. Определим $i^2 = -1$, тогда:
$$a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a - ib)\cdot(a + ib)$$
$$4x^2 + 1 = y^3 \Leftrightarrow (2x + i)(2x - i) = y^3$$
Любой общий делитель является делителем разности, то есть является делителем числа $2i$. Пусть мы доказали, что $(2x + i)$ и $(2x - i)$ - взаимно просты и мы хотим доказать, что они являются полными кубами, для целых чисел надо было разложить на простые множители по основной теореме арифметики. В целых комплексных числах (целых Гауссовых) этот факт тоже справедлив и можно приравнять эти две скобки к кубам комплексных чисел:
$$2x + i = (a + bi)^3,\ a, b \in \mathbb{R}$$
Это требует доказательства. Более того, в этом случае мы получим:
$$2x - i = (a - bi)^3$$
Далее раскрываются скобки и приравниваются слагаемые:
$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2 b - b^3) \Rightarrow 2x = a^3 - 3ab^2,\ 1 = 3a^2 b - b^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b(3a^2 - b^2) = 1 \Rightarrow b = 3a^2 - b^2 = \pm 1 \Rightarrow 3a^2 - 1 = \pm 1 \Rightarrow 3a^2 - 1 = -1$$
Это верно, поскольку если у нас будет стоять знак $+$, то мы получим уравнение, которые в целых числах не решается:
$$3a^2 - 1 = 1 \Rightarrow 3a^2 = 2$$
Тогда:
$$3a^2 - 1 = -1 \Rightarrow 3a^2 = 0 \Rightarrow a = 0,\ b = -1 \Rightarrow 2x = 0,\ y = 1$$
$\blacksquare$

Таким образом, мы посмотрели, что комплексные числа помогают решать некоторые задачи. Приступим к их изучению.

Комплексные числа

Рассмотрим координатную плоскость. Ось абсцисс отождествим с $\mathbb{R}$, а базисный вектор на оси ординат обозначим буквой i - обозначение Эйлера, где $i^2 = -1$.

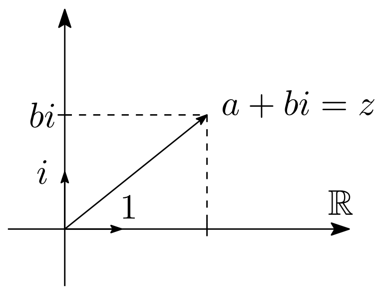

Рис. 1: Визуализация комплексного числа.

Мы натягиваем на $\mathbb{R}$ и на новый символ i плоскость $\Rightarrow$ каждый вектор записывается в виде:

$$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$$

где a - действительная часть, b - мнимая часть:

$$\mathrm{Re}\,(z) = a \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}\,(z) = b \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$$

геометрически действительная часть - абсцисса, мнимая часть - ордината. Формально, комплексное число это пара чисел (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$. Переменожение комплексных чисел равно:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Модуль комплексного числа это геометрическое расстояние до нуля:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Задача 4. (K20.1 а))

$$(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$$

□

$$(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i) = 6 + 1 + (-2 + 3)i + 6 - 12 + (8 + 9)i = 1 + 18i$$

■

Задача 5. (K20.1 и))

$$(2 + i)^3 + (2 - i)^3$$

□

$$(2 + i)^3 + (2 - i)^3 = 8 + 3{\cdot}4{\cdot}i + 3{\cdot}2{\cdot}i^2 + i^3 + 8 - 3{\cdot}4{\cdot}i + 3{\cdot}2{\cdot}i^2 - i^3 = 16 - 12 = 4$$

■

Задача 6. (**K20.2**) Вычислить:

1) i^{77};
2) i^{98};
3) i^{-57};
4) i^n, $n \in \mathbb{Z}$;

$\square$

1) $i^{77} = i^{76} \cdot i = i^{19 \cdot 4} \cdot i = 1 \cdot i = i$;
2) $i^{98} = i^{96} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, $96 = 4 \cdot 24$;
3) $i^{-57} = i^{-1} \cdot i^{-14 \cdot 4} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = -i$

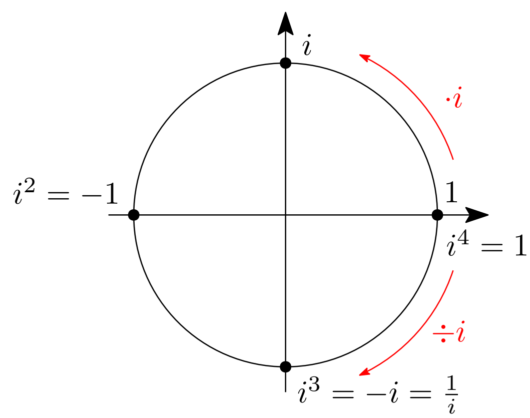

Рис. 2: Визуализация умножения и деления на комплексное число.

4) Рассмотрим 4 случая:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}, \; k \in \mathbb{Z}$$

поскольку $n = 4k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow i^n = (i^4)^k \cdot i^r = i^r$;

$\blacksquare$

Задача 7. (**K20.11** а)) Решить уравнение:

$$z^2 = i$$

$\square$ Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, тогда:

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i \Rightarrow \begin{cases} 2ab = 1 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ 2ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$\blacksquare$

Сопряженным к комплексному числу $z = a + bi$ называется число:

$$\overline{z} = a - bi$$

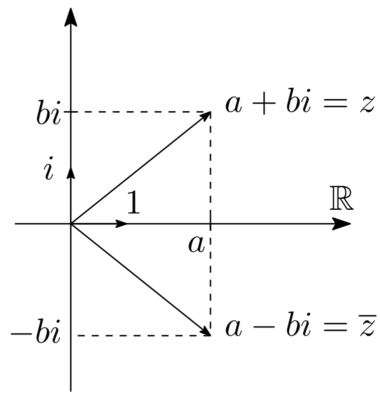

Рис. 3: Сопряженное комплексное число $\overline{z}$ к z.

геометрически это число симметричное числу z относительно $\mathbb{R}$ (действительной прямой). Произведение сопряженных равно:

$$z{\cdot}\overline{z} = a^2 + b^2 + (ab - ab)i = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Свойства сопряжения:

1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2) $\overline{z{\cdot}w} = \overline{z}{\cdot}\overline{w}$;
3) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

□

1) Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, тогда:

$$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}$$

2) Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$, тогда:

$$\overline{z{\cdot}w} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z}{\cdot}\overline{w}$$

3) Пусть $z = a + bi$, тогда по индукции:

$$n = 1 \Rightarrow \overline{z^1} = \overline{z}$$

Пусть верно для n, рассмотрим для $n + 1$:

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n{\cdot}z} = \overline{z^n}{\cdot}\overline{z} = \overline{z}^n{\cdot}\overline{z} = \overline{z}^{n+1}$$

■

Деление комплексных чисел имеет следующий вид:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a}{|z|^2} - \frac{b}{|z|^2}i = \frac{1}{|z|^2}(a - bi) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Задача 8. (**К20.1 л**))

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

□

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^5 \cdot (1+i)^3}{|(1+i)|^3} = \frac{(1+i)^8}{8} = \frac{((1+i)^2)^4}{8} = \frac{(1+2i-1)^4}{8} = \frac{2^4 \cdot i^4}{8} = 2$$

■

Отметим некоторые свойства комплексных чисел:

1) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
2) $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$;
3) $z = \dfrac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$;

□

1) $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$;
2) $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + bi = -a + bi \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z = ib \in i\mathbb{R}$;
3) $z = \dfrac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$;

■

Rm: 3. Числа, которые обратны своим сопряженным это в точности числа, которые лежат на еденичной окружности.

Задача 9. (**К24.3**) Какой геометрический смысл у $|z_1 - z_2|$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

□ Как и на прямой, смысл разности - расстояние между z_1, z_2.

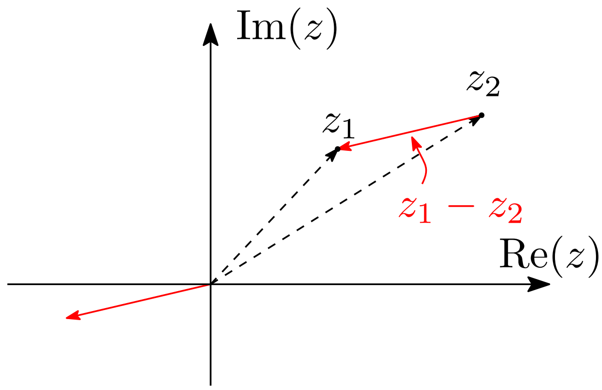

Рис. 4: Геометрический смысл $|z_1 - z_2|$.

Геометрический смысл модуля разности - расстояние до нуля: производится параллельный сдвиг (от этого расстояние не меняется) и получается расстояние от z_1 до z_2. ■

Задача 10. (**K24.6**) Изобразить на плоскости множество точек:
а) $|z| = 1$;
в) $|z| \le 2$;
г) $|z - 1 - i| < 1$;
к) $-1 < \operatorname{Re}(iz) < 0$;

$\square$
а) единичная окружность.

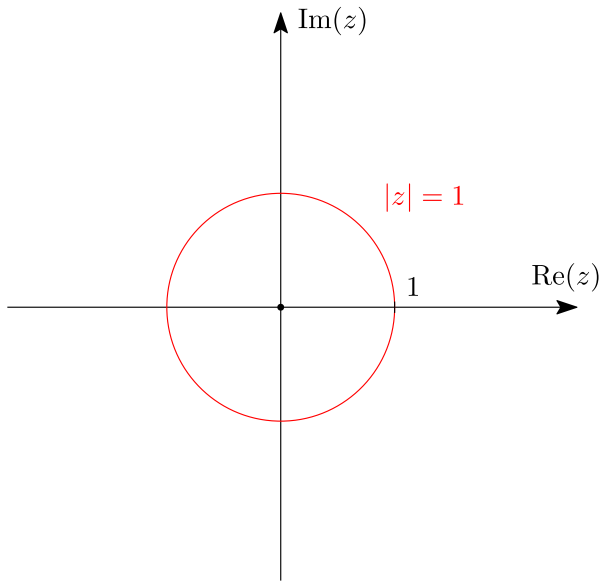

Рис. 5: Пункт а).

в) круг с центром в 0 радиуса 2.

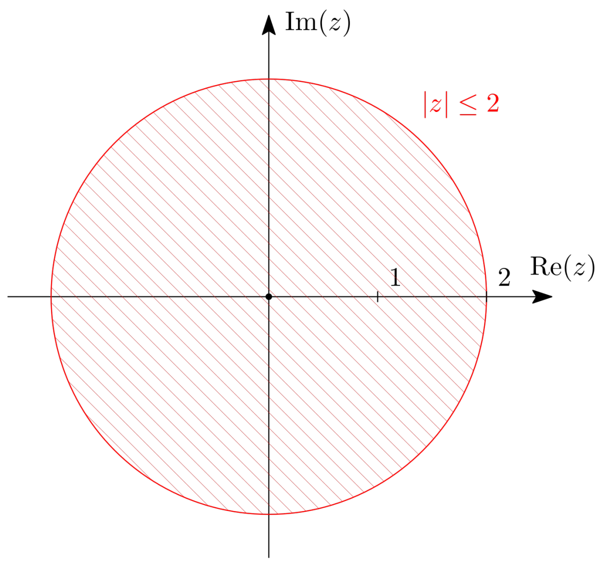

Рис. 6: Пункт в).

г) открытый круг радиусом 1 и центром в точке $1+i$.

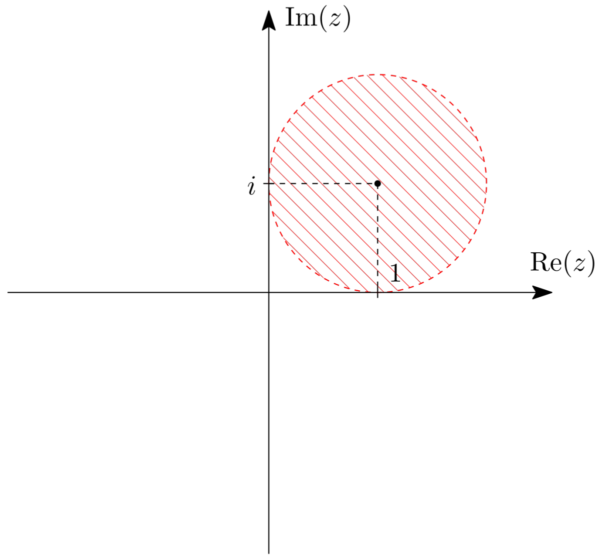

Рис. 7: Пункт г).

к) пусть $z = a + bi \Rightarrow iz = -b + ai$, $\mathrm{Re}\,(iz) = -b \Rightarrow$ получаем полосу $0 < b < 1$.

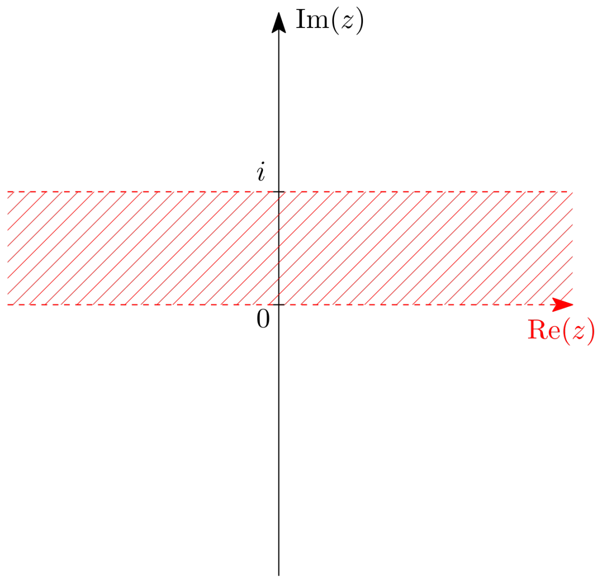

Рис. 8: Пункт к).

■

ДЗ: 20.1 бгем, 20.3 б, 20.5 а, 20.7 б, 20.8 а, 24.2 б, 24.6 дмн.