Геометрическая интерпритация поля комплексных чисел

Пусть $z = x + iy$, изобразим это число в комплексной плоскости. Пусть $r = |z|$ - длина этого вектора, φ - угол на который надо повернуть направление Re оси, чтобы получить направление вектора z.

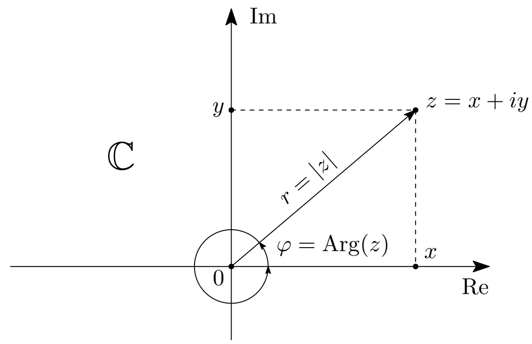

Рис. 1: Геометрическое представление комплексного числа.

Опр: 1. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$: $\mathrm{Arg}\,(z)$ называется угол поворота от положительного направления действительной оси Re к направлению вектора z. Если поворот идёт против часовой стрелки, то этот угол берётся со знаком плюс, если по часовой, то - со знаком минус.

Rm: 1. Знак поворота - это общепринятое соглашение.

Также заметим, что угол определён неоднозначно, поскольку можно делать полные обороты оси и таких полных оборотов можно сделать сколь угодно много. То есть, аргумент комплексного числа z определен с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ аргумент это многозначная функция.

Иногда бывает удобно выделить среди всех значений аргумента какое-нибудь одно, но в каком-то диапазоне и тогда говорят, что мы выбираем ветвь аргумента.

Опр: 2. Главной ветвью аргумента комплексного числа $z \neq 0$: $\arg\,(z)$ называется значение аргумента лежащего в диапазоне $[0, 2\pi)$.

Rm: 2. 2π не включается, для того, чтобы была однозначность.

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z| = r$, $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$, тогда:

$$\begin{cases} x &= \mathrm{Re}(z) = r\cdot\cos\varphi \\ y &= \mathrm{Im}(z) = r\cdot\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Опр: 3. Запись комплексного числа в виде:

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Обозначение: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, (**формула Эйлера**).

Rm: 3. Подчеркнем, что это лишь обозначение. В анализе эту формулу можно доказать.

Опр: 4. Запись комплексного числа в виде:

$$z = r\cdot e^{i\varphi} = |z|\cdot e^{i\varphi}$$

называется экспоненциальной формой записи комплексного числа.

Свойства записи комплексных чисел

Утв. 1.

1) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\operatorname{Arg}(z \cdot w) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$;
2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$, $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z)$;
3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, (**формула Муавра**);
4) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\left|\dfrac{w}{z}\right| = \dfrac{|w|}{|z|}$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{w}{z}\right) = \operatorname{Arg}(w) - \operatorname{Arg}(z)$;

□

1) Пусть $z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ и $w = s \cdot (\cos\psi + i \sin\psi)$, перемножим их:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i \sin\psi) =$$

$$= r \cdot s \cdot (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi + i(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi)) = r \cdot s \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot w = r \cdot s \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \Rightarrow |z \cdot w| = r \cdot s, \ \operatorname{Arg}(z \cdot w) = \varphi + \psi = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$$

Перепишем это в экспоненциальной форме:

$$z = re^{i\varphi}, \ w = se^{i\psi} \Rightarrow z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = r \cdot s \cdot e^{i(\varphi + \psi)}$$

Таким образом, в этой форме это удобнее запомнить;

2) Это видно сразу из геометрических соображений: соответствующий вектор получается отражением относительно оси абсцисс (действительной оси) и его длина не меняется, а аргумент меняет направление, поскольку угол поворота тот же самый, но меняет направление.

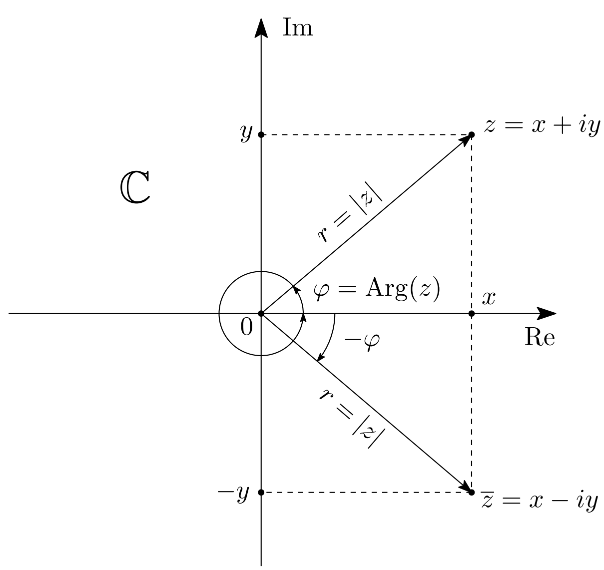

Рис. 2: Модуль и аргумент для сопряженного числа.

Если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$, следовательно:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$$

$$\begin{cases} x &= \operatorname{Re}(\overline{z}) = r \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos(-\varphi) \\ -y &= \operatorname{Im}(\overline{z}) = -r \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin(-\varphi) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\varphi = -\operatorname{Arg}(z)$$

3) Пусть $n > 0$, тогда по индукции из пункта 1):

$$z^n = \underbrace{z\cdot\ldots\cdot z}_{n} \Rightarrow |z^n| = |z\cdot\ldots\cdot z| = |z|\cdot\ldots\cdot|z| = r\cdot\ldots\cdot r = r^n$$

$$\mathrm{Arg}(z^n) = \mathrm{Arg}(z) + \ldots + \mathrm{Arg}(z) = \underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n} = n\cdot\varphi$$

Пусть $n = 0$, тогда: $z^0 = 1$, $|1| = 1 = r^0$, $\mathrm{Arg}(1) = 0 = 0\cdot\varphi$, поскольку единица это число на действительной оси на положительном направлении, её угол наклона к оси абсции равен нулю.

Пусть $n = -1$, тогда:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{r^2} = r^{-1}\cdot(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Пусть $n < 0$, тогда по пункту доказательству для $n > 0$ будет верно:

$$z^n = (z^{-1})^{|n|} = \left[r^{-1}\cdot(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right]^{|n|} = (r^{-1})^{|n|}\cdot(\cos(-|n|\cdot\varphi) + i\sin(-|n|\cdot\varphi)) =$$

$$= r^n\cdot(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

4) Это следует из 1) и формулы Муавра для $n = -1$:

$$\frac{w}{z} = w\cdot z^{-1} \Rightarrow \left|\frac{w}{z}\right| = |w\cdot z^{-1}| = |w|\cdot|z^{-1}| = |w|\cdot|z|^{-1} = \frac{|w|}{|z|}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{w}{z}\right) = \mathrm{Arg}\left(w\cdot z^{-1}\right) = \mathrm{Arg}(w) + \mathrm{Arg}(z^{-1}) = \mathrm{Arg}(w) - \mathrm{Arg}(z)$$

■

Геометрический смысл операции умножения или деления на фиксированное комплексное число: весь смысл заключается в свойствах 1) и 4), когда умножаем на $z \in \mathbb{C}$, то модуль числа умножается на $|z|$ (то есть происходит растяжение или сжатие - гомотетия), а к аргументу прибавляется $\mathrm{Arg}(z)$ (то есть происходит поворот) $\Rightarrow$ умножение/деление на $z \in \mathbb{C}$ это поворотная гомотетия.

Подводя итоги, можем определить **геометрический смысл**:

1) $+/-$ **комплексного числа**: как параллельный перенос на комплексной плоскости;
2) $\cdot/\div$ **комплексного числа**: как поворотную гомотетияю;

Применение формулы Муавра

Одним из очевидных применений формулы Муавра является быстрый расчет $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$, для этого нужно раскрыть скобки в биноме соответствующей степени n:

$$(\cos(x) + i\sin(x))^5 = \cos(5x) + i\sin(5x) \Rightarrow (\cos(x) + i\sin(x))^5 =$$

$$= \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x)$$

$$\Rightarrow \cos(5x) = \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x)$$

$$\Rightarrow \sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$$

Извлечение корней в $\mathbb{C}$

Мы расширяли поле $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$ для того, чтобы была возможность извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Оказывается, что в поле $\mathbb{C}$ можно делать больше - извлекать корни любой степени из любых комплексных чисел. Извлечение корня это решение уравнений вида:

$$w^n = z \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = w$$

Наша задача - найти все w. Запишем это уравнение в тригонометрической форме:

$$\begin{cases} z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ w = s\cdot(\cos\psi + i\sin\psi) \end{cases} \Rightarrow w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} s^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

где аргумент w^n должен быть равен аргументу z, но поскольку аргумент это многозначная функция, то значение $n\psi$ должно быть равно одному из значений аргумента z: не обязательно значению φ, например, может отличаться от φ на целое кратное полного оборота. Тогда, поскольку $r, s > 0$, то:

$$\begin{cases} s^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, что $k \in \mathbb{Z}$, но при этом аргументы будут повторяться по модулю 2π с периодом $n \Rightarrow$ значения аргумента будут различными, если, например, $k = \overline{0, n-1}$, то есть все остатки при делении на n.

Утв. 2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, уравнение $w^n = z$ имеет n различных решений $w_0, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$:

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|},\ \arg(w_k) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1}$$
$$w_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k = \overline{0, n-1}$$

Rm: 4. Заметим, что здесь получится именно главная ветвь аргумента, поскольку если $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, то тогда $\frac{\arg(z)}{n} \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right) \Rightarrow \arg(w_k) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \in [0, 2\pi)$, так как $0 \le k \le n-1$.

Геометрическая интерпритация

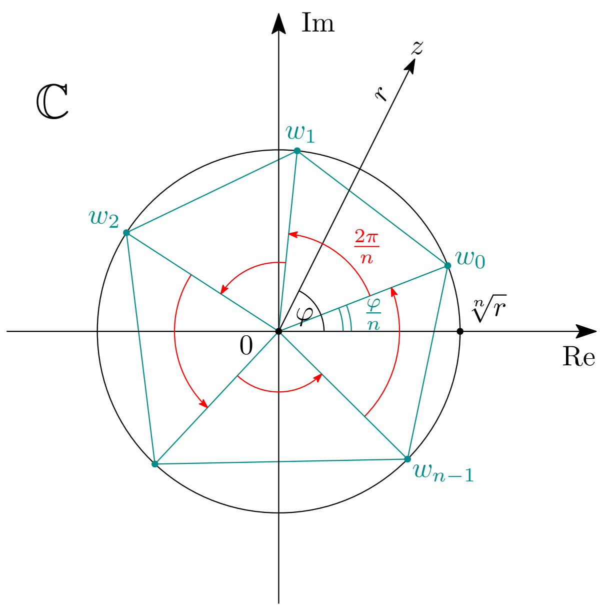

Рис. 3: Геометрическая интерпритация извлечения корней в $\mathbb{C}$.

Пусть есть какое-то число z, у него есть модуль равный r и аргумент φ. Корни n-ой степени из числа z имеют одинаковую длину $\sqrt[n]{r} \Rightarrow$ расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Число w_0 имеет аргумент $\frac{\varphi}{n}$, остальные числа также расположены на окружности и каждое следующее число получается прибавлением $\frac{2\pi}{n}$ к аргументу предыдущего числа. Последним числом будет w_{n-1}, а следующее снова будет w_0.

В результате, все корни находятся в вершинах правильного n-угольника, вписаного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке 0 и одна из вершин имеет угол $\frac{\varphi}{n}$ по отношению к оси абсцисс, остальные получаются поворотом на $\frac{2\pi}{n}$.

Корни степени n из единицы

Пусть $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ - корни n-ой степени из 1, то есть решения уравнения: $z^n = 1$. Всего таких корней n штук по утверждению выше. Рассмотрим k-ый корень:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \forall k = \overline{0, n-1}$$

$$|\varepsilon_k| = 1, \ \arg(\varepsilon_k) = \frac{2\pi k}{n}, \ \forall k = \overline{0, n-1}$$

Используя формулу Эйлера, мы можем переписать k-ый корни степени n из единицы в следующем виде:

$$\varepsilon_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \ \forall k = \overline{0, n-1}$$

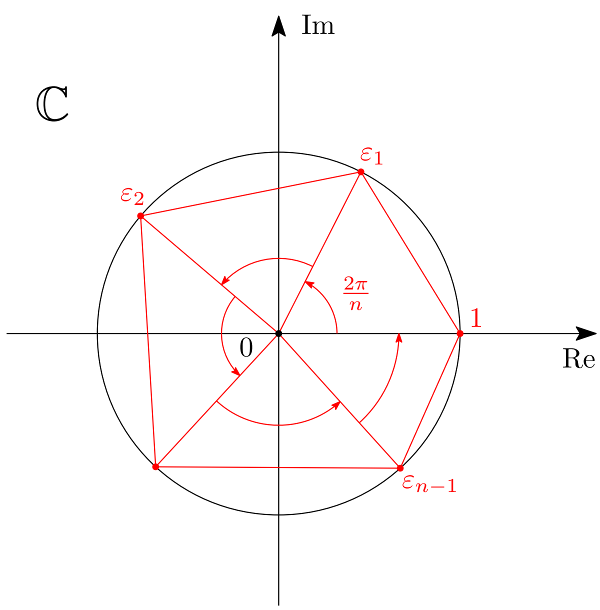

Рис. 4: Единичные корни в комплексной плоскости.

Геометрически, корни n-ой степени из 1 расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность на комплексной плоскости, начиная с вершины в точке единицы.

Утв. 3. Свойства корней n-ой степени из единицы

1) Пусть w_k - корни n-ой степени из $z \in \mathbb{C}$, тогда: $w_k \cdot \varepsilon_l = w_{k+l(\bmod n)}$;
2) $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = \varepsilon_{k+l(\bmod n)}$;
3) $\varepsilon_k^{-1} = \overline{\varepsilon_k} = \varepsilon_{-k} = \varepsilon_{n-k}$;

□

1) По утверждениям выше:

$$|w_k| = \sqrt[n]{r},\ \arg(w_k) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |w_k \cdot \varepsilon_l| = |w_k| \cdot |\varepsilon_1| = |w_k| \cdot 1 = |w_k|,\ \arg(w_k \cdot \varepsilon_l) = \arg(w_k) + \arg(\varepsilon_l) =$$
$$= \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} + \frac{2\pi l}{n} = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi(k+l)}{n} = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi(k+l) \bmod m}{n} = \arg(w_{k+l(\bmod m)})$$

2) Применяя свойство 1) к ε_k получаем требуемое;
3) По свойствам записи комплексных чисел:

$$\varepsilon_k^{-1} = \frac{\overline{\varepsilon_k}}{|\varepsilon_k|^2} = \frac{\overline{\varepsilon_k}}{1^2} = \overline{\varepsilon_k},\ |\varepsilon_k| = |\overline{\varepsilon_k}| = 1$$

$$\arg(\overline{\varepsilon_k}) = -\arg(\varepsilon_k) = -\frac{2\pi k}{n} = 2\pi - \frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi(n-k)}{n} = \arg(\varepsilon_{-k}) = \arg(\varepsilon_{n-k})$$

■

Rm: 5. Свойство 1) сразу дает следующий факт: если мы знаем какой-нибудь w_k - один из корней n-ой степени из числа z и если мы знаем все корни n-ой степени из единицы, то умножая w_k на всевозможные корни степени n из единицы мы получим все остальные корни степени n из числа z, потому что ε_k соответствуют кратным поворотам на угол $\frac{2\pi}{n}$.

Свойства 2) и 3) говорят, что множество корней из единицы при фиксированном n замкнуты относительно умножения и взятия обратного элемента. Введём обозначение:

$$\mathbb{U}_n = \{1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$$

Тогда $\mathbb{U}_n$ - будет подгруппой в группе $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ - мультипликативной группе комплексных чисел.

Упр. 1. Доказать, что существует изоморфизм $\mathbb{U}_n \simeq \mathbb{Z}_n$ к аддитивной группе вычетов по модулю n.

Первообразные корни из единицы

Опр: 5. Первообразный корень степени n из единицы - это корень степени n из единицы, не являющийся корнем из единицы никакой меньшей степени $m < n$.

Rm: 6. Любой корень из 1 является первообразным для какой-то степени n.

Пример: при $n = 6$ первообразными корнями будут ε_1 и ε_5:

$$\varepsilon_k^m = \left(\cos\left(\tfrac{2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi k}{6}\right)\right)^m = \cos\left(\tfrac{2\pi km}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi km}{6}\right) = \cos(2\pi l) + i\sin(2\pi l),\ m < 6,\ l \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi km}{6} = 2\pi l \Leftrightarrow km = 6l \Rightarrow \begin{cases} k = 0, m = 1, l = 0 \\ k = 1, m = 6, l = 1 \\ k = 2, m = 3, l = 1 \\ k = 3, m = 2, l = 1 \\ k = 4, m = 3, l = 2 \\ k = 5, m = 6, l = 5 \end{cases}$$

Утв. 4. Число ε_k является первообразным корнем степени n из единицы $\Leftrightarrow$ k взаимно просто с n, или по-другому: $(k, n) = 1$. В частности, первообразные корни существуют для любого n.

$\square$ Возьмем ε_k и возведем его в степень m:

$$(\varepsilon_k)^m = \varepsilon_{km} = \cos\left(\tfrac{2\pi km}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi km}{n}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{km}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow km \,\vdots\, n$$

($\Leftarrow$) Пусть k взаимно просто с n, тогда:

$$km \,\vdots\, n,\ (k, n) = 1 \Rightarrow m \,\vdots\, n$$

Следовательно, наименьшее m делящееся на n это $n \Rightarrow \varepsilon_k$ - первообразный корень степени n из 1.

($\Rightarrow$) (От противного) Пусть $(k, n) = d > 1$, тогда $k = d{\cdot}l$, $n = d{\cdot}m$, тогда:

$$k{\cdot}m = d{\cdot}l{\cdot}m = l{\cdot}n \,\vdots\, n \Rightarrow (\varepsilon_k)^m = 1,\ m < n$$

Тогда ε_k не является первообразным корнем степени n из 1 $\Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Утв. 5. Если ε_k - первообразный корень степени n, то $\forall \varepsilon_s$ степени n, $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_s = \varepsilon_k^m$.

$\square$ Пусть ε_k - первообразный корень $\Rightarrow \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \ldots, \varepsilon_k^n$ - попарно различны. Если $\varepsilon_k^p = \varepsilon_k^l$, $l < p$, тогда:

$$\varepsilon_k^l(\varepsilon_k^{p-l} - 1) = 0,\ \varepsilon_k^l \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_k^{p-1} = 1$$

Получаем противоречие с первообразностью, так как $1 \leq p, l \leq n \Rightarrow p - l < n \Rightarrow \varepsilon_k^{p-1} \neq 1$. Тогда, среди всех степеней: $\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \ldots, \varepsilon_k^n$ должны встретится все корни: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. $\blacksquare$

Пример: $z^{12} = 1 \Rightarrow$ корни $\varepsilon_0 = 1, \ldots, \varepsilon_{11}$. Найти первообразные корни.

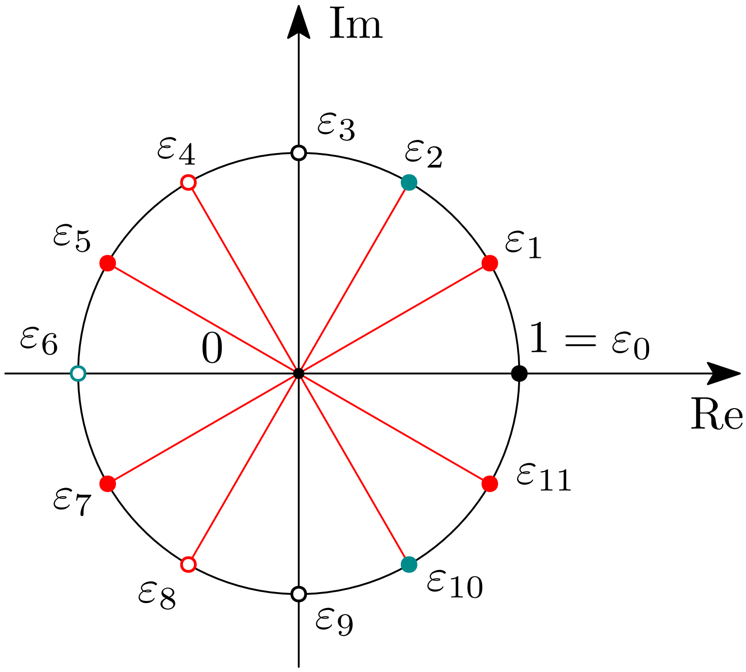

Рис. 5: Единичные корни при $n = 12$.

Первообразными корнями из 1 степени 12 являются: ε_1, ε_5, ε_7, ε_{11} - отмечены красным.

Первообразными корнями из 1 степени 6 являются: ε_2, ε_{10} - отмечены зеленым.

Первообразными корнями из 1 степени 4 являются: ε_3, ε_9 - отмечены черным выколотым.

Первообразными корнями из 1 степени 3 являются: ε_4, ε_8 - отмечены красным выколотым.

Первообразными корнями из 1 степени 2 являются: ε_6 - отмечены зеленым выколотым.

Первообразными корнями из 1 степени 1 являются: ε_0 - отмечены черным.

Многочлены

Что такое многочлен? Это алгебраическое выражение некоторого специального вида:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

где x - переменная, а $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - коэффициенты из поля $\mathbb{R}$ или другого поля K. Выражение задает функцию: $f\colon K \to K$. Получается многочлены это функции определенного вида? Так можно понимать, но у такого понимания есть определенный недостаток.

Недостаток функциональной точки зрения на многочлены: пусть $K = \mathbb{Z}_p$, где p - простое число. Рассмотрим два разных многочлена:

$$f(x) = x,\ g(x) = x^p,\ x \in \mathbb{Z}_p \Rightarrow g(x) \equiv f(x)$$

Разные многочлены задают одинаковые функции по малой теореме Ферма. Но выражения разные и хочется их воспринимать как разные многочлены $\Rightarrow$ точка зрения на многочлены как на функции для конечных полей плохо работает $\Rightarrow$ правильно понимать многочлен, как формальное алгебраическое выражение, а над этими выражениями можно осуществлять арифметические операции $(+/\cdot)$ по формальным правилам $\Rightarrow$ получается кольцо.

Опр: 6. Пусть K - кольцо (коммутативное, ассоциативное, с единицей). Кольцо многочленов от одной переменной над кольцом K это кольцо $K[x]$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $K \subset K[x]$ или $K[x]$ содержит подкольцо, изоморфное K;

2) $x \in K[x]\colon x \notin K$, где выделенный элемент x называется переменной;

3) $\forall f \in K[x],\ f \neq 0,\ \exists!$ представление элемента f в следующем виде:

$$f = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in K,\ a_n \neq 0$$

Rm: 7. Если отказаться от последнего условия в 3), $a_n \neq 0$, то тогда таких представлений может быть бесконечно много, поскольку можно дописать какое угодно число нулей.

Таким образом, кольцо многочленов это некое расширение исходного кольца K, которое получается добавлением элемента x и только необходимых свойств, чтобы этот объект был кольцом.

Опр: 7. Число $n \geq 0$ - номер последнего ненулевого коэффициента называется степенью многочлена f и обозначается $n = \deg f$.

Rm: 8. Иногда удобно считать, что для $f = 0$ его степень $\deg f = \deg 0 = -\infty$.

Опр: 8. Элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются коэффициентами многочлена f.

Опр: 9. Степени элемента $x\colon 1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ называются одночленами.

Тогда свойство 3) можно записать так: любой многочлен единственным образом представляется в виде линейной комбинации одночленов с коэффициентами из исходного кольца K.

Rm: 9. Если линейная комбинация одночленов с коэффициентами $c_0, \ldots, c_n$ оказалась равна 0, то тогда можно утверждать, что все коэффициенты обязаны быть равны нулю:

$$c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$$

Иначе, возьмем $f = a_0 + a_1{\cdot}x + \ldots + a_n{\cdot}x^n \neq 0$ и тогда существует другое представление для f:

$$f = (a_0 + c_0) + (a_1 + c_1){\cdot}x + \ldots + (a_n + c_n){\cdot}x^n$$

что противоречит свойству 3) из определения.

Rm: 10. Если разрешить бесконечные линейные комбинации одночленов, то получим:

$$a_0 + a_1{\cdot}x + a_2{\cdot}x^2 + \ldots + a_k{\cdot}x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{\cdot}x^k$$

где все коэффициенты кроме конечного числа равны нулю:

$$\exists\, n\colon \forall k > n,\ a_k = 0$$

Тогда такой бесконечной сумме можно придать корректный смысл, потому что от прибавления нулевых слагаемых сумма не меняется и формально можно считать, что прибавим даже бесконечно много нулевых слагаемых и сумма не изменится $\Rightarrow$ такая сумма сводится к конечной сумме, которая имеет смысл в нашем кольце и, более того, свойство 3) можно сформулировать более общим образом:

$$\forall f \in K[x],\ \exists!\,\text{представление}\ f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{\cdot}x^k,\ a_k \in K,\ \exists\, n\colon \forall k > n,\ a_k = 0$$

Тогда не нужно делать оговорок про $f \neq 0$ и $a_n \neq 0$. Сумма формально является бесконечной, но фактически является конечной суммой и имеет смысл:

1) $f \equiv 0 \Rightarrow$ все коэффициенты будут равны нулю, единственность представления будет следовать из предыдущего замечания;

2) $f \not\equiv 0 \Rightarrow$ если есть какая-то конечная сумма, то можем дописать бесконечно много нулевых слагаемых;

Поскольку разные многочлены имеют разную степень и представляются суммами разной длины, то удобно чтобы эти суммы имели одну и ту же длину.

Rm: 11. Заметим, что поскольку определение кольца многочленов является аксиоматическим, то потребуется доказать существование этого объекта и выяснить его единственность с точностью до изоморфизма.