Теория перестановок и подстановок

Транспозиции

Опр: 1. Транспозиция это цикл длины 2:

$$\tau = (i, j) = (ij),\ \tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k,\ \forall k \neq i, j$$

Утв. 1. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ разлагается в произведение транспозиций.

□ Разложим σ в произведение попарно независимых циклов, воспользовавшись предыдущей теоремой:

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_s$$

Достаточно разложить каждый σ_i в произведение транспозиций. Можно считать, что исходная подстановка $\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_l)$ это цикл длины l. Тогда этот цикл разлагается в произведение цикла длины $l-1$ и транспозиции двух последних номеров σ:

$$\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_{l-1}) \cdot (i_{l-1} i_l)$$

Понятно, что все числа, которые не вошли в орбиту σ они с помощью σ и с помощью подстановки справа остаются на месте. Докажем, что на числа из орбиты σ обе подстановки действуют одинаково:

$$\begin{aligned} \tau = (i_{l-1} i_l)\colon &\quad i_{l-1} \to i_l \to i_{l-1} \\ \pi = (i_1 i_2 \ldots i_{l-1})\colon &\quad i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_{l-1} \to i_1 \\ \pi \cdot \tau\colon &\quad i_1 \xrightarrow{\tau} i_1 \xrightarrow{\pi} i_2 \xrightarrow{\tau} i_2 \xrightarrow{\pi} i_3 \xrightarrow{\tau} \ldots \xrightarrow{\tau} i_{l-2} \xrightarrow{\pi} i_{l-1} \xrightarrow{\tau} i_l \xrightarrow{\pi} i_l \xrightarrow{\tau} i_{l-1} \xrightarrow{\pi} i_1 \end{aligned}$$

Таким образом, подстановка $(i_1 i_2 \ldots i_{l-1}) \cdot (i_{l-1} i_l)$ действует на числа $i_1, \ldots, i_l$ также, как и σ. Далее, мы можем аналогично разложить цикл длины $l-1$, затем цикл длины $l-2$ и так далее, тогда:

$$\sigma = (i_1 i_2 \ldots i_{l-1}) \cdot (i_{l-1} i_l) = (i_1 i_2 \ldots i_{l-2}) \cdot (i_{l-2} i_{l-1}) \cdot (i_{l-1} i_l) = \ldots = (i_1 i_2) \cdot (i_2 i_3) \cdot \ldots \cdot (i_{l-1} i_l)$$

И таким образом, мы можем разложить каждый независимый цикл $\Rightarrow$ получаем требуемое. ■

Опр: 2. Инверсия (беспорядок) в перестановке $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ это пара чисел $(i_k i_l)$, где $k < l$, но $i_k > i_l$.

Опр: 3. Перестановка чётна, если количество инверсий в этой перестановке чётно.

Опр: 4. Перестановка нечётна, если количество инверсий в этой перестановке нечётно.

Опр: 5. Знак перестановки $\operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_l) = \begin{cases} 1, & (i_1 \ldots i_l) \text{ - чётна} \\ -1, & (i_1 \ldots i_l) \text{ - нечётна} \end{cases}$.

Пример: рассмотрим перестановку номеров $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: (25413). Число инверсий:

$$1\colon (21), (51), (41),\ 2\colon 0,\ 3\colon (53), (43),\ 4\colon (54),\ 5\colon 0 \Rightarrow 3 + 0 + 2 + 1 + 0 = 6$$

то есть перестановка является чётной и её знак равен 1.

Опр: 6. Подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется чётной, если перестановка $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ чётна.

Опр: 7. Подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется нечётной, если перестановка $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ нечётна.

Опр: 8. Знак подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & n \end{pmatrix}$ равен $\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \dots i_n)$.

Утв. 2. При транспозиции двух элементов в перестановке, её четность меняется.

□ Рассмотрим перестановку:

$$(i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_n)$$

Предположим, что мы переставили местами два элемента: $i_k \leftrightarrow i_l$. Теперь мы получили новую перестановку:

$$(i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_n)$$

Выясним число инверсий в новой перестановке.

1) Среди пар (i_p, i_q), где $p, q \neq k, l$ число инверсий не меняется, поскольку они остаются на местах;

2) Среди пар (i_p, i_k), $p < k \vee p > l$:

$$(i_1, \dots, {\color{red}i_p}, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, i_n) \vee (i_1, \dots, i_k, \dots, i_l, \dots, {\color{red}i_p}, \dots, i_n)$$

Если $p < k$, то порядок следования элементов среди i_p не изменился: i_p все ещё идут перед i_k. Аналогично для $p > l$: i_p все ещё идут после i_k:

$$(i_1, \dots, {\color{red}i_p}, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, i_n) \vee (i_1, \dots, i_l, \dots, i_k, \dots, {\color{red}i_p}, \dots, i_n)$$

3) Аналогично, среди пар (i_p, i_l), $p < k \vee p > l$ количество инверсии не меняется;

4) Среди пар (i_q, i_k), $k < q < l$, количество инверсий меняется на $\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1$. При этом слагаемых столько, сколько этих пар = количество чисел q между k и l: $l - k - 1$;

$$(i_1, \dots, i_k, \underbrace{\dots, {\color{red}i_p}, \dots,}_{l-k-1} i_l, \dots, i_n)$$

5) Аналогично, среди пар (i_q, i_l), $k < q < l$, количество инверсий меняется на $\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1$. При этом слагаемых столько, сколько этих пар = количество чисел q между k и l: $l - k - 1$;

6) В паре $(i_k i_l)$ после перестановки либо инверсия появилась, либо она исчезла, если она была;

Общее изменение количества инверсий равно:

$$\underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_{l-k-1} \underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_{l-k-1} \pm 1 = \underbrace{\pm 1, \dots, \pm 1}_{2(l-k-1)+1}$$

Поскольку $2(l - k - 1) + 1$ - нечетно, то число инверсий изменилось на нечетное число $\Rightarrow$ чётность изменится. ■

Следствие 1. # чётных и нечётных перестановок (а значит и подстановок) одинаковое и равно $\dfrac{n!}{2}$.

□ Установим взаимнооднозначное соответствие между множествами чётных и нечётных перестановок:

$$(i_1 i_2 i_3 \dots i_l) \leftrightarrow (i_2 i_1 i_3 \dots i_n)$$

Перестановка первых двух номеров меняет четность перестановки $\Rightarrow$ это взаимнооднозначное отображение между чётными и нечётными перестановками $\Rightarrow$ на каждое множество приходится одинаковое число элементов $\Rightarrow \frac{n!}{2}$. ■

Rm: 1. Заметим, что взаимооднозначность отображения выше можно легко понять из-за конечности множества перестановок и инъективности отображения.

Утв. 3. Если подстановка $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_N$, где τ_i - транспозиции, то тогда $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^N$.

□ Индукцией по числу множителей:

<u>База</u>: $N = 0 \Rightarrow \sigma = \varepsilon \Rightarrow$ инверсий нет, поскольку верхняя и нижняя строки совпадают $\Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = 1$.

<u>Шаг</u>: $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_{N-1} \cdot \tau_N = \sigma' \cdot \tau_N$, где $\tau_N = (kl)$, запишем σ' в стандартной двухрядной записи:

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_k & \ldots & i_l & \ldots & i_n \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_l & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, произошла перестановка двух номеров местами. По-доказанному ранее предложению, чётность поменялась: $\operatorname{sgn}\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma'$. По предположению индукции:

$$\operatorname{sgn}\sigma' = (-1)^{N-1} \Rightarrow \operatorname{sgn}\sigma = -(-1)^{N-1} = (-1)^N$$

■

Утв. 4. $\forall \sigma, \sigma' \in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma'$.

□ Разложим подстановку σ и σ' в произведение транспозиций:

$$\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_N,\ \sigma' = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_M'$$

где τ_i, τ_i' - транспозиции. Тогда:

$$\sigma \cdot \sigma' = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_N \cdot \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_M'$$

По доказанному предложению выше, мы получаем:

$$\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = (-1)^{N+M} = (-1)^N \cdot (-1)^M = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma'$$

■

Утв. 5. Знак обратной подстановки равен знаку самой подстановки: $\forall \sigma \in S_n$, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\sigma$.

□ Рассмотрим произведение $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \varepsilon$, тогда:

$$\operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\varepsilon = 1$$

Но поскольку $\operatorname{sgn}\sigma = \pm 1$, $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \pm 1$ и их произведение равно $1 \Rightarrow$ они равны. ■

Теория определителей

Опр: 9. Пусть A - квадратная матрица размера $n \times n$. Её определитель это число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 i_2 \dots i_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn} \sigma$$

эта формула называется развернутой формулой для определителя.

Rm: 2. Запись определителя в терминах подстановок вместо перестановок обусловлена тем, что каждая подстановка может быть записана в стандартной двухрядной записи, а тогда в нижней строке будет фигурировать как раз перестановка из первой формулы:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Rm: 3. Это число ещё называют определителем порядка n или определителем n-го порядка. Возможно обозначение $|A| = \det A$.

По смыслу, в определителе суммирование ведется по перестановкам $\Rightarrow$ там $n!$ слагаемых (столько, сколько перестановок), причем эти слагаемые берутся со знаками $\Rightarrow$ ровно половина слагаемых с плюсом, половина - с минусом.

Каждое слагаемое это произведение элементов матрицы, которые берутся по одному из каждой строки и из каждого столбца. И каждое такое произведение берется со знаком, которое равно знаку подстановки, устанавливающей соответствие между номерами строк и номерами столбцов в этом произведении.

Пример: рассмотрим простейший нетривиальный пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \operatorname{sgn}(12) + a_{12} \cdot a_{21} \cdot \operatorname{sgn}(21) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

то есть произведение элементов по главной диагонали минус произведение элементов по побочной:

$$+ \begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & * \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & * \\ * & \cdot \end{pmatrix}$$

Свойства определителя матрицы

Удобно рассматривать определитель как функцию от набора строчек (столбцов) этой матрицы:

$$\det A = \det (A_1, \dots, A_n)$$

где $A_1, \dots, A_n$ - строки матрицы A (векторы из $\mathbb{R}^n$).

1) **Аддитивность**: при разложении k-ой строчки в сумму двух строк, определитель будет равен сумме определителей со слагаемыми k-ой строчки:

$$\det (A_1, \dots, A_k' + A_k'', \dots, A_n) = \det (A_1, \dots, A_k', \dots, A_n) + \det (A_1, \dots, A_k'', \dots, A_n)$$

□

$$\det A = \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ki_k} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n),\ a_{ki_k} = a'_{ki_k} + a''_{ki_k} \Rightarrow \det A =$$

$$= \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a'_{ki_k} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n) + \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a''_{ki_k} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n) =$$

$$= \det(A_1, \ldots, A'_k, \ldots, A_n) + \det(A_1, \ldots, A''_k, \ldots, A_n)$$

■

2) **Однородность**: при умножении строчки на λ, исходный определитель умножиться на λ:

$$\det(A_1, \ldots, \lambda \cdot A_k, \ldots, A_n) = \lambda \cdot \det A$$

□

$$\det(A_1, \ldots, \lambda \cdot A_k, \ldots, A_n) = \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda \cdot a_{ki_k}) \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n) =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} \cdot \ldots \cdot a_{ki_k} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n) = \lambda \cdot \det A$$

■

3) **Линейность определителя по k-ой строке**: определитель - **полилинейная функция** от строк матрицы, то есть он линеен по каждой $k = 1, \ldots, n$ строке;

□ Следует сразу из первых двух свойств. ■

4) **Кососимметричность**: при перестановке двух строк местами, определитель меняет знак:

$$\det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_l, \ldots, A_n) = -\det(A_1, \ldots, A_l, \ldots, A_k, \ldots, A_n)$$

□

$$A \xrightarrow[k\text{-ой и } l\text{-ой строки}]{\text{транспозиция}} A',\ \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{l\sigma(l)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l\sigma(l)} \cdot \ldots \cdot a_{k\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma$$

$$\pi = \sigma \cdot \tau,\ \tau = (kl) \Rightarrow \pi \cdot \tau = \sigma \cdot \tau \cdot \tau = \sigma,\ \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau \cdot \operatorname{sgn}\pi = -\operatorname{sgn}\pi$$

Заметим, что π пробегает всё S_n по одному разу, если $\sigma = \pi \cdot \tau$ пробегает всё S_n по одному разу, поскольку σ можно однозначно восстановить по π: число разных σ = числу разных $\pi = n!$, а если для разных σ две π совпали, то и σ должны совпасть $\Rightarrow$ инъективность и конечность множества дают биективность. Следовательно, можно суммировать по π:

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{l\sigma(l)} \cdot \ldots \cdot a_{k\sigma(k)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma = \sum_{\pi \in S_n} a'_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{k\pi(k)} \cdot \ldots \cdot a'_{l\pi(l)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\pi(n)} \cdot \operatorname{sgn}\sigma =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} a'_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{k\pi(k)} \cdot \ldots \cdot a'_{l\pi(l)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\pi(n)} \cdot (-\operatorname{sgn}\pi) = -\det A'$$

■

5) $\exists\, k\colon A_k = 0 \Rightarrow \det A = 0$;

$\square$

$$\det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_n) = \det(A_1,\ldots,0{\cdot}A_k,\ldots,A_n) = 0{\cdot}\det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_n) = 0$$

$\blacksquare$

6) $\exists\, k \neq l\colon A_k = A_l \Rightarrow \det A = 0$;

$\square$

$$\det A = \det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_l,\ldots,A_n) = -\det(A_1,\ldots,A_l,\ldots,A_k,\ldots,A_n) = |A_k = A_l| =$$
$$= -\det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_l,\ldots,A_n) = -\det A \Rightarrow \det A = 0$$

$\blacksquare$

7) $\exists\, k \neq l\colon A_l = \lambda{\cdot}A_k \Rightarrow \det A = 0$;

$\square$

$$\det A = \det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_l,\ldots,A_n) = \det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,\lambda{\cdot}A_k,\ldots,A_n) =$$
$$= \lambda{\cdot}\det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_k,\ldots,A_n) \Rightarrow \det A = 0$$

$\blacksquare$

8) При ЭП строк 1-го типа (прибавление к одной строке другой, умноженной на скаляр), определитель не меняется:

$$A \xrightarrow{\text{ЭП1}} A' \Rightarrow \det A = \det A'$$

$\square$

$$\det A' = \det(A_1,\ldots,A_k + \lambda{\cdot}A_l,\ldots,A_l,\ldots,A_n) =$$
$$= \det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_l,\ldots,A_n) + \lambda{\cdot}\det(A_1,\ldots,A_l,\ldots,A_l,\ldots,A_n) = \det A + 0 = \det A$$

$\blacksquare$

9) При транспонировании определитель матрицы не меняется:

$$\det A = \det A^T$$

$\square$

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} a^T_{1\sigma(1)}{\cdot}\ldots{\cdot}a^T_{n\sigma(n)}{\cdot}\operatorname{sgn}\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}{\cdot}\ldots{\cdot}a_{\sigma(n)n}{\cdot}\operatorname{sgn}\sigma$$

Переставим множители в этом произведении. Посмотрим, какая будет перестановка:

$$\sigma(j) = i \Rightarrow j = \sigma^{-1}(i)$$

где i - это номер строки, а j - это номер столбца. Тогда:

$$\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)1}{\cdot}\ldots{\cdot}a_{\sigma(n)n}{\cdot}\operatorname{sgn}\sigma = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma^{-1}(1)}{\cdot}\ldots{\cdot}a_{n\sigma^{-1}(n)}{\cdot}\operatorname{sgn}\sigma$$

Заметим, что если σ пробегает все подстановки по одному разу, то $\pi = \sigma^{-1}$ тоже пробегает множество всех подстановок по одному разу: если две подстановки разные, то и обратные подстановки у них будут разные. Можем переписать нашу сумму:

$$\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma^{-1}(1)}{\cdot}\ldots{\cdot}a_{n\sigma^{-1}(n)}{\cdot}\operatorname{sgn}\sigma = \sum_{\pi\in S_n} a_{1\pi(1)}{\cdot}\ldots{\cdot}a_{n\pi(n)}{\cdot}\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)} \cdot \operatorname{sgn} \pi = \det A$$

■

10) Все свойства выше будут верны для определителя, как функции от столбцов матрицы;

□ При транспонировании строки и столбцы меняются ролями, а поскольку определитель транспонированной матрицы такой же, то свойства будут верными. ■

Мы определили определитель с помощью развернутой формулы, но на самом деле она не очень удобна для его вычисления, поскольку в ней очень много слагаемых и оно очень растёт с ростом n. Нужен более эффективный метод вычисления определителей.

Метод вычисления $\det$ привидением матрицы к треугольному виду

Пусть у нас есть матрица A и ЭП строк мы её приводим к ступенчатому виду A^*. Поскольку матрица квадратная, то ниже диагонали у неё всегда должны быть нули и она будет иметь вид:

$$A \xrightarrow{\text{ЭП строк}} A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Данный вид называется треугольным. Любую квадратную матрицу мы можем сделать треугольной, тогда определитель новой матрицы запишется так:

$$\det A^* = \det A \cdot (-1)^p \cdot \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_q$$

где p - количество ЭП2, которые мы совершали перед приведением к A^*, а когда мы делаем ЭП3, то определитель тоже умножается на коэффициенты этих ЭП: $\mu_1, \ldots, \mu_q$. При ЭП1 определитель не меняется, как мы уже знаем.

Утв. 6.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

□ Воспользуемся однородностью и рассмотрим последнюю строку матрицы:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Применим ЭП1 и будем вычитать последнюю строку из остальных строк с подходящими коэффициентами, чтобы обнулить все элементы выше 1 в столбце, тогда:

$$\lambda_n \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Аналогично проделываем операции с λ_{n-1}:

$$\lambda_n\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1 & * & \dots & * & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & * & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix} = \lambda_n\cdot\lambda_{n-1}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1 & * & \dots & * & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & * & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix} = \lambda_n\cdot\lambda_{n-1}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1 & * & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix} = \dots$$

И так далее, в итоге мы получим:

$$\dots = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix} = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\operatorname{sgn}\varepsilon = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot$$

■

Собирая всё в одном месте, после приведения нашей матрицы к треугольной, мы найдем определитель исходной матрицы A:

$$\det A = \det A^*\cdot(-1)^p\cdot\frac{1}{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\mu_q} = \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\cdot(-1)^p\cdot\frac{1}{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\mu_q}$$