Линейные отображения

Опр: 1. Пусть V, W - векторные пространства. Отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ называется линейным, если оно согласованно с операциями в этих пространствах:

1) $\forall x, y \in V$, $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$;
2) $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\lambda{\cdot}x) = \lambda{\cdot}\mathcal{A}(x)$;

Примеры линейных отображений

(1) $V = W = \{$геом. векторы на плоскости$\}$, $\mathcal{A}$ - поворот на угол α относительно 0.

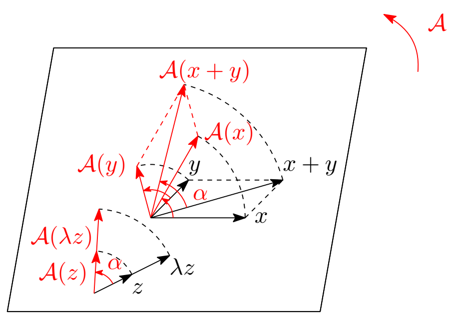

Рис. 1: Поворот в геометрическом пространстве.

☐ Оба свойства линейного отображения очевидно выполнены:

1) после поворота длина векторов не меняется, угол между векторами сохраняется $\Rightarrow$ параллелограмм переходит в параллелограмм;
2) растяжение вектора переходит в то же растяжение, только после поворота;

Можно это же показать, используя матричный подход (см. матрицу поворота). ■

(2) $V = \{$геом. векторы в пространстве$\}$, $W = \{$геом. векторы на плоскости P в пространстве$\}$ и рассмотрим $\mathcal{A}$ - проекцию на плоскость P.

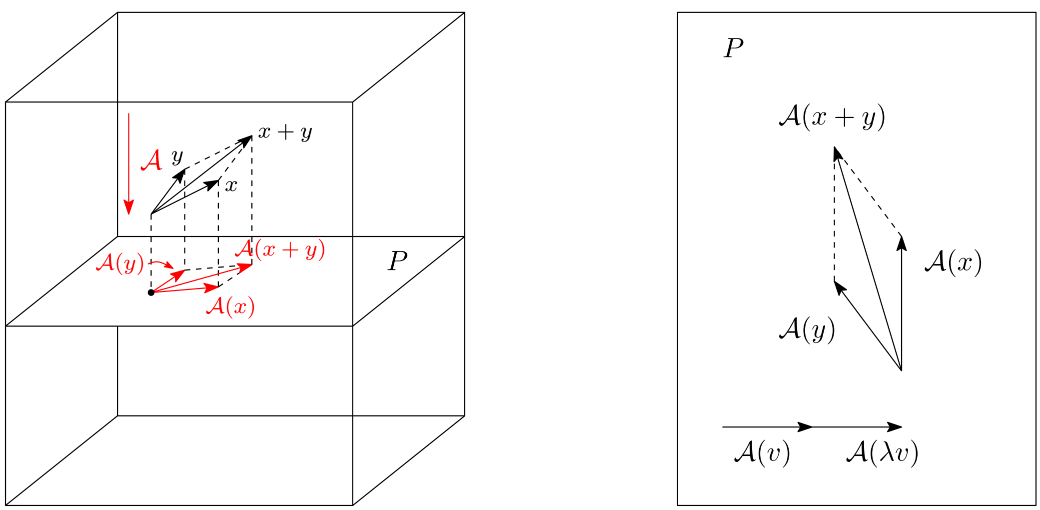

Рис. 2: Проекция вектора на плоскость.

☐ Оба свойства линейного отображения выполнены:

1) проекция суммы двух векторов будет равна сумме проекций, поскольку векторы проектируются параллельно прямой $\Rightarrow$ начала и концы векторов на плоскости будут проектироваться однозначно $\Rightarrow$ параллелограмм проектируется в параллелограмм;

2) растяжение векторов дает такое же увеличение их проекций;

Можно это же показать, используя матричный подход (см. проекторы). ■

Линейные отображения арифметических пространств

Далее будем рассматривать только линейные отображения арифметических пространств $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Будем интерпретировать арифметические пространства, как пространства столбцов.

Rm: 1. Заметим, что любое конечномерное пространство можно отождествить с арифметическим пространством: выбрать базис и тогда каждый вектор будет задаваться столбцом своих координат.

Оказывается, что линейные отображения арифметических пространств можно задавать с помощью матриц.

Опр: 2. Матрицей линейного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется матрица A размера $m \times n$, столбцы которой определяются следующим образом:

$$A^{(j)} = \mathcal{A}(e_j),\ \forall j = \overline{1, n}$$

где $(e_1, \ldots, e_n)$ - стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, то есть $A = (\mathcal{A}(e_1), \ldots, \mathcal{A}(e_j), \ldots \mathcal{A}(e_n))$.

Соглашение по обозначениям: линейные отображение - заглавные рукописные латинские буквы, а их матрицы - заглавные печатные латинские буквы.

Утв. 1. Линейное отображение $\mathcal{A}$ однозначно определяется своей матрицей A.

☐ Матрица показывает каковы образы базисных векторов, но если мы знаем образы базисных векторов, то мы можем посчитать образ любого вектора. В самом деле:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1 \cdot e_1) + \ldots + \mathcal{A}(x_n \cdot e_n) = x_1 \cdot \mathcal{A}(e_1) + \ldots + x_n \cdot \mathcal{A}(e_n) = A^{(1)} \cdot x_1 + \ldots + A^{(n)} \cdot x_n$$

где мы воспользовались свойствами линейного отображения. То есть мы получили линейную комбинацию столбцов матрицы A с коэффициентами, которые равны координатам вектора $x \Rightarrow$ зная матрицу можно написать образ любого вектора $\Rightarrow$ линейное отображение однозначно задается матрицей. Заметим, что это по сути тоже самое, что и инъективность отображения из множества линейных отображений в множество матриц:

$$\forall i = \overline{1, n},\ \mathcal{A}(e_i) = \mathcal{B}(e_i) \Rightarrow A^{(i)} = B^{(i)} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$$

■

Утв. 2. Любая матрица A размера $m \times n$ определяет линейное отображение $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ по формуле:

$$\mathcal{A}(x) = A^{(1)}{\cdot}x_1 + \ldots + A^{(n)}{\cdot}x_n$$

$\square$ По формуле мы определяем образ вектора $x \in \mathbb{R}^n$ как линейную комбинацию столбцов матрицы A с коэффициентами, которые равны координатам вектора x. Легко видеть, что эта формула задает линейное отображение:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{A}(x+y) = A^{(1)}(x_1+y_1) + \ldots + A^{(n)}(x_n+y_n) = A^{(1)}{\cdot}x_1 + \ldots + A^{(n)}{\cdot}x_n +$$

$$+A^{(1)}{\cdot}y_1 + \ldots + A^{(n)}{\cdot}y_n = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(\lambda{\cdot}x) = A^{(1)}{\cdot}(\lambda{\cdot}x_1) + \ldots + A^{(n)}{\cdot}(\lambda{\cdot}x_n) = \lambda{\cdot}(A^{(1)}{\cdot}x_1 + \ldots + A^{(n)}{\cdot}x_n) = \lambda{\cdot}\mathcal{A}(x)$;

По сути, это тоже самое, что и сюръективность отображения из множества линейных отображений в множество матриц. $\blacksquare$

Следствие 1. Между множеством линейных отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и множеством матриц размера $m \times n$ существует взаимнооднозначное соответствие:

$$\{\text{линейные отображения: } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\} \leftrightarrow \mathrm{Mat}_{m,n}$$

Интерпритация СЛУ на языке линейных отображений

Пусть у нас есть произвольная СЛУ с матрицей коэффициентов A:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2j}x_j & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mj}x_j & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Матрица $\underset{m\times n}{A} \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ - матрица коэффициентов СЛУ и столбец $\underset{m\times 1}{b} \in \mathbb{R}^m$ - столбец свободных членов. Вектор-столбец $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ является решением СЛУ $\Leftrightarrow$ при подстановке вместо неизвестных значений, мы получим верные равенства, то есть если мы сложим столбцы матрицы A с коэффициентами равными координатам x°, то мы получим столбец b:

$$A^{(1)}{\cdot}x_1^\circ + \ldots + A^{(j)}{\cdot}x_j^\circ + \ldots + A^{(n)}{\cdot}x_n^\circ = b \Leftrightarrow \mathcal{A}(x^\circ) = b$$

где $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, соответствующее матрице A.

Множество решений СЛУ: это множество тех векторов, которые отображатся в b при линейном отображении $\mathcal{A}$, то есть это: $\mathcal{A}^{-1}(b)$ - полный прообраз вектора b при отображении A.

Алгебраические операции над линейными отображениями и матрицами

Операции над линейными отображениями можно определять и исследовать на языке линейных отображений, а можно на языке матриц, поскольку есть взаимнооднозначное соответствие между отображениями и матрицами. Мы будем изначально давать определения для линейных отображений (поскольку это проще), а затем смотреть во что это превращается для матриц.

(1) **Сложение**:

Линейные отображения: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x), \, \forall x \in \mathbb{R}$$

Матрицы: $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n} \Rightarrow C = A + B \in \mathrm{Mat}_{m,n}$:

$$C^{(j)} = \mathcal{C}(e_j) = \mathcal{A}(e_j) + \mathcal{B}(e_j) = A^{(j)} + B^{(j)} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

(2) **Умножение на число**:

Линейные отображения: $\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathcal{C} = \lambda{\cdot}\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{C}(x) = \lambda{\cdot}\mathcal{A}(x), \, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Матрицы: $A \in \mathrm{Mat}_{m,n} \Rightarrow C = \lambda{\cdot}A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$:

$$C^{(j)} = \mathcal{C}(e_j) = \lambda{\cdot}\mathcal{A}(e_j) = \lambda{\cdot}A^{(j)} \Rightarrow c_{ij} = \lambda{\cdot}a_{ij}, \, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

(3) **Умножение**:

Линейные отображения: $\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B} \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(x)\big), \, \forall x \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "\mathcal{B}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{C}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathcal{A}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Рис. 3: Композиция линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Матрицы: $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p} \Rightarrow C = A{\cdot}B \in \mathrm{Mat}_{m,p}$:

$$C^{(j)} = \mathcal{C}(e'_j) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(e'_j)\big) = \mathcal{A}\left(B^{(j)}\right) = \mathcal{A}(b_{1j}{\cdot}e_1 + \ldots + b_{nj}{\cdot}e_n) =$$

$$= \mathcal{A}(e_1){\cdot}b_{1j} + \mathcal{A}(e_2){\cdot}b_{2j} + \ldots + \mathcal{A}(e_n){\cdot}b_{nj} = A^{(1)}{\cdot}b_{1j} + A^{(2)}{\cdot}b_{2j} + \ldots + A^{(n)}{\cdot}b_{nj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}{\cdot}b_{ij}, \, \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

то есть это умножение строки на столбец;

Пример: Рассмотрим перемножение матриц размера 2×3 и 3×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}(-1) + 2{\cdot}0 + 3{\cdot}1 & 1{\cdot}0 + 2{\cdot}1 + 3{\cdot}(-1) \\ 6{\cdot}(-1) + 5{\cdot}0 + 4{\cdot}1 & 6{\cdot}0 + 5{\cdot}1 + 4{\cdot}(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Утв. 3. (**проверка корректности определения операций над линейными отображениями**) Операции заданные над линейными отображениями - корректны.

□ Проверим, что все полученные отображения - линейные.

(1) **Сложение**: $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{A}(x+y) + \mathcal{B}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) + \mathcal{B}(x) + \mathcal{B}(y) = \mathcal{C}(x) + \mathcal{C}(y)$;

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\lambda \cdot x) = \mathcal{A}(\lambda \cdot x) + \mathcal{B}(\lambda \cdot y) = \lambda \cdot \mathcal{A}(x) + \lambda \cdot \mathcal{B}(x) = \lambda \cdot (\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{C}(x)$;

(2) **Умножение на число**: $\mathcal{C} = \mu \cdot \mathcal{A}$

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(x+y) = \mu \cdot \mathcal{A}(x+y) = \mu \cdot \mathcal{A}(x) + \mu \cdot \mathcal{A}(y) = \mathcal{C}(x) + \mathcal{C}(y)$;

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\lambda \cdot x) = \mu \cdot \mathcal{A}(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \mu \cdot \mathcal{A}(x) = \lambda \cdot \mathcal{C}(x)$;

(3) **Умножение**: $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x+y)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x) + \mathcal{B}(y)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(y)) = \mathcal{C}(x) + \mathcal{C}(y)$;

2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\lambda \cdot x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda \cdot x)) = \mathcal{A}(\lambda \cdot \mathcal{B}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \lambda \cdot \mathcal{C}(x)$;

■

Матричная запись линейного отображения

Пусть $\mathcal{A} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, хотим записать $\mathcal{A}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Запишем в матричном виде:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; y = \mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Распишем y подробнее и рассмотрим i-ую координату:

$$y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n) = A^{(1)} \cdot x_1 + A^{(2)} \cdot x_2 + \ldots + A^{(n)} \cdot x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \begin{pmatrix} a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots, & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Запишем все эти равенства одно под другим, тогда мы получаем:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = A \cdot x$$

Таким образом, получили формулу матричной записи линейного отображения: $y = A \cdot x$.

Матричная запись СЛУ

Рассмотрим ту же систему, что мы рассматривали выше, где матрица коэффициентов A, столбец неизвестных x и столбец свободных членов b:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

На языке линейных отображений эта СЛУ записывается так: $\mathcal{A}(x) = b \Rightarrow \mathcal{A}(x) = A{\cdot}x = b$.

Подстановка или замена переменных

Подставим вместо x_i другие переменные y_j, которые линейно выражаются через x_i:

$$\begin{cases} x_1 & = & c_{11}y_1 & + & c_{12}y_2 & + & \dots & + & c_{1s}y_s \\ x_2 & = & c_{21}y_1 & + & c_{22}y_2 & + & \dots & + & c_{2s}y_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & c_{n1}y_1 & + & c_{n2}y_2 & + & \dots & + & c_{ns}y_s \end{cases}$$

СЛУ тогда примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{s} c_{jk}y_k\right) = \sum_{jk} a_{ij}c_{jk}y_k = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\right) y_k = b_j, \; \forall j = \overline{1, m}$$

Таким образом, мы получаем: $A{\cdot}X = (A{\cdot}C){\cdot}Y = B$.

Свойства матричных операций

$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) **Коммутативность сложения**: $A + B = B + A$;

(2) **Ассоциативность сложения**: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(3) **Нулевая матрица**: $\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $0 + A = A$;

(4) **Ассоциативность умножения на числа**: $\lambda\cdot(\mu\cdot A) = (\lambda\cdot\mu)\cdot A$;

(5) **Дистрибутивность умножения на числа относительно сложения**:

  (a) **Чисел**: $(\lambda + \mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$;

  (b) **Матриц**: $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$;

(6) **Свойство умножения на ноль**: $0\cdot A = \underset{m\times n}{0}$;

(7) **Свойство умножения скаляра на нулевую матрицу**: $\lambda\cdot \underset{m\times n}{0} = \underset{m\times n}{0}$;

(8) **Свойство умножения на единицу**: $1\cdot A = A$;

(9) **Существование противоположной матрицы**: $A + (-A) = 0$, $-A = (-1)\cdot A$;

Утв. 4. Множество $\mathrm{Mat}_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ с операциями сложения и умножения на числа это векторное пространство. Его можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{mn}$.

□ Следует сразу из свойств выше. Отождествление можно провести последовательным прикладыванием строк справа в одну длинную строчку. ■

(10) **Ассоциативность умножения матриц**: $(\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B})\cdot \underset{p\times k}{C} = \underset{m\times n}{A} \cdot(\underset{n\times p}{B} \cdot \underset{p\times k}{C})$;

(11) **Коммутативность**: вообще говоря: $A\cdot B \neq B\cdot A$;

Пример: Матричное умножение не коммутативно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

(12) **Смешанная ассоциативность**: $(\lambda\cdot A)\cdot B = \lambda\cdot(A\cdot B) = A\cdot(\lambda\cdot B)$;

(13) **Дистрибутивность**: для любых матриц A, B, C, D согласованных размеров:

  (a) **Справа**: $(A + B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

  (b) **Слева**: $C\cdot(A + B) = C\cdot A + C\cdot B$;

□ Большинство свойств практически очевидны:

(1) $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \Rightarrow C = B + A$;

(2) $D = (A + B) + C \Rightarrow d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \Rightarrow D = A + (B + C)$;

(3) $B = 0 + A \Rightarrow b_{ij} = 0_{ij} + a_{ij} = 0 + a_{ij} = a_{ij} \Rightarrow B = A$;

(4) $B = \lambda\cdot(\mu\cdot A) \Rightarrow b_{ij} = \lambda\cdot(\mu\cdot a_{ij}) = (\lambda\cdot\mu)\cdot a_{ij} \Rightarrow B = (\lambda\cdot\mu)\cdot A$;

(5)

(a) $B = (\lambda + \mu)\cdot A \Rightarrow b_{ij} = (\lambda + \mu)\cdot a_{ij} \Rightarrow \lambda\cdot a_{ij} + \mu\cdot a_{ij} \Rightarrow B = \lambda\cdot A + \mu\cdot A$;

(b) $C = \lambda\cdot(A + B) \Rightarrow c_{ij} = \lambda\cdot(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda\cdot a_{ij} + \lambda\cdot b_{ij} \Rightarrow C = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$;

(6) $B = 0\cdot A \Rightarrow b_{ij} = 0\cdot a_{ij} = 0 \Rightarrow B = \underset{m\times n}{0}$;

(7) $B = \lambda\cdot \underset{m\times n}{0} \Rightarrow b_{ij} = \lambda\cdot 0 = 0 \Rightarrow B = \underset{m\times n}{0}$;

(8) $B = 1\cdot A \Rightarrow b_{ij} = 1\cdot a_{ij} = a_{ij} \Rightarrow B = A$;

(9) $B = A + (-A) \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} + (-1)\cdot a_{ij} = 1\cdot a_{ij} + (-1)\cdot a_{ij} = (1-1)\cdot a_{ij} = 0\cdot a_{ij} = 0 \Rightarrow B = 0$;

(10) **Матричное доказательство**:

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p}$, $C \in \mathrm{Mat}_{p,q}$. Обозначим:

$$\underset{m\times q}{S} = (A\cdot B)\cdot C,\ T = A\cdot(B\cdot C),\ \underset{m\times p}{F} = A\cdot B,\ \underset{n\times q}{G} = B\cdot C$$

Надо доказать: $S = T$. Посчитаем это в явном виде:

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{p} f_{ik}\cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lk}\right)\cdot c_{kj} = \sum_{\substack{k=1,\ldots,p\\ l=1,\ldots,n}} a_{il}\cdot b_{lk}\cdot c_{kj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}\cdot b_{lk}\cdot c_{kj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}\cdot c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot g_{lj} = t_{ij},\ \forall i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,q}$$

Доказательство для линейных отображений:

Пусть заданы отображения: $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$. Надо доказать, что композиция $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ это тоже самое, что и композиция $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$. Проверим это:

$$\forall x \in \mathbb{R}^q\colon (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}(x) = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}(\mathcal{C}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{C}(x))) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}(x)) = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})(x)$$

(11) Контрпример приведен выше;

(12) $C = (\lambda\cdot A)\cdot B \Rightarrow c_{ij} = \sum\limits_{k}(\lambda\cdot a_{ik})\cdot b_{kj} = \lambda\cdot \sum\limits_{k} a_{ik}\cdot b_{kj} \Rightarrow C = \lambda\cdot(A\cdot B)$;

(13)

(a) $D = (A + B)\cdot C \Rightarrow d_{ij} = \sum\limits_{k}(a_{ik} + b_{ik})\cdot c_{kj} = \sum\limits_{k} a_{ik}\cdot c_{kj} + \sum\limits_{k} b_{ik}\cdot c_{kj} \Rightarrow D = A\cdot C + B\cdot C$;

(b) $D = C\cdot(A + B) \Rightarrow d_{ij} = \sum\limits_{k} c_{ik}\cdot(a_{kj} + b_{kj}) = \sum\limits_{k} c_{ik}\cdot a_{kj} + \sum\limits_{k} c_{ik}\cdot b_{kj} \Rightarrow D = C\cdot A + C\cdot B$;

■

Rm: 2. Заметим, что все свойства выше также справедливы для линейных отображений в силу взаимной однозначности между матрицами и линейными отображениями. Более того, это справедливо в силу того, что операции над матрицами мы специально определели так, что они согласованы с операциями над соответствующими линейными отображениями.

Утв. 5.

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(2) $(\lambda\cdot A)^T = \lambda\cdot A^T$;

(3) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$;

□

(1) Пусть $C = A+B \Rightarrow \forall i,j,\ c^T_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a^T_{ij} + b^T_{ij} \Rightarrow C^T = A^T + B^T$;

(2) Пусть $C = \lambda\cdot A \Rightarrow \forall i,j,\ c^T_{ij} = c_{ji} = \lambda\cdot a_{ji} = \lambda\cdot a^T_{ij} \Rightarrow C^T = \lambda\cdot A^T$;

(3) Пусть $C = A\cdot B \Rightarrow \forall i,j,\ c^T_{ij} = c_{ji} = \sum\limits_k a_{jk}\cdot b_{ki} = \sum\limits_k a^T_{kj}\cdot b^T_{ik} = \sum\limits_k b^T_{ik}\cdot a^T_{kj} \Rightarrow C^T = B^T\cdot A^T$;

■