Дискриминант

Пусть у нас есть многочлен $f(x)$ от одной переменной:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$$

Он имеет $n = \deg(f)$ корней: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с учётом кратности. Его дискриминант будет равен:

$$D(f) = a_n^{2n-2}\cdot \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 = a_n^{2n-2}\cdot \begin{vmatrix} n & \ldots & s_{i-1} & \ldots & s_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & \ldots & s_{i+j-2} & \ldots & s_{n+j-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

где $s_k = s_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k$ и на месте (i, j) стоит элемент s_{i+j-2}. Из теории симметрических многочленов вытекает, что $D(f)$ это многочлен от коэффициентов f и его основное свойство это то, что он обращается в ноль тогда и только тогда, когда f имеет кратные корни.

Пример вычисления дискриминанта:

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$, найдем дискриминант этого многочлена:

$$D(f) = a^{4-2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = a^2\cdot \begin{vmatrix} 2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{vmatrix}$$

Воспользуемся теоремой Виета:

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{b}{a},\ \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{c}{a} \Rightarrow D(f) = a^2\cdot \begin{vmatrix} 2 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{b}{a} & \frac{b^2-2ac}{a^2} \end{vmatrix} = a^2\cdot \left(\frac{2b^2 - 4ac}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\right) = b^2 - 4ac$$

2) Для вычисления дискриминантов высоких степеней полезно сделать замену переменной:

$$y = x + c \Rightarrow f(x) = f(y - c) = g(y) = a_0 + a_1(y - c) + \ldots + a_n(y - c)^n$$

Корни многочлена $g(y)$ получаются из корней многочлена $f(x)$ сдвигом на c:

$$g(\alpha_1 + c) = g(\alpha_2 + c) = \ldots = g(\alpha_n + c) = 0$$

При этом разности корней не меняются: $D(f) = D(g)$. Рассмотрим $g(y)$:

$$g(y) = a_ny^n - a_n\cdot n\cdot c\cdot y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots = a_ny^n + (a_{n-1} - na_nc)y^{n-1} + \ldots$$

За счёт правильного подбора c можно занулить слагаемое при y^{n-1}:

$$c = \frac{a_{n-1}}{n\cdot a_n} \Rightarrow g(y) = a_ny^n + b_{n-2}y^{n-2} + \ldots + b_0 = a_n\cdot(\underbrace{y^n + c_{n-2}y^{n-2} + \ldots + c_0}_{h(y)})$$

Многочлены вида $h(y)$ называются неполными многочленами степени n. Отметим, что корни у g и h одинаковы, тогда:

$$D(f) = D(g) = a_n^{2n-2}D(h)$$

Таким образом, достаточно уметь вычислять дискриминант для неполного многочлена;

3) $f(x) = x^3 + px + q$ - неполный кубический трехчлен, найдем его дискриминант:

$$D(f) = \begin{vmatrix} 3 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - корни f, рассмотрим степенные суммы и их значения при $x_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$:

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ s_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ s_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,\ s_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{0}{1} = 0,\ \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{p}{1} = p,\ \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{q}{1} = -q$$
$$s_1 = \sigma_1 = 0,\ s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -2p,\ s_3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$$

Чтобы найти s_3 мы пойдем немного другим путём, вместо поиска в лоб. Поскольку $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ это корни нашего многочлена, то будут верны равенства:

$$\forall i = \overline{1,3},\ \alpha_i^3 + p\alpha_i + q = 0 \Rightarrow \alpha_i^3 = -q - p\alpha_i \Rightarrow s_3 = -p(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 3q = -p{\cdot}s_1 - 3q = -3q$$

Аналогично для s_4, домножим предыдущие равенства на α_i:

$$\forall i = \overline{1,3},\ \alpha_i^4 + p\alpha_i^2 + q\alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i^4 = -q\alpha_i - p\alpha_i^2 \Rightarrow s_4 = -p{\cdot}s_2 = 2p^2 \Rightarrow$$

$$D(f) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -12p^3 + 8p^3 - 27q^2 = -4p^3 - 27q^2$$

Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f) = 3$. Хотим понять сколько у него вещественных корней. Вспомним, что у многочлена с вещественными коэффициентами мнимые корни существуют парами такой же кратности. Тогда у кубического многочлена возможны следующие случаи (с точностью до перестановок корней):

(1) $\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Кратный корень не может быть мнимым, поскольку в этом случае было бы 4 мнимых корня $\Rightarrow$ он обязательно вещественный, тогда:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3 \vee \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

Поскольку есть кратный корень, то:

$$D(f) = a_3^4(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = 0$$

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ попарно различные, тогда:

$$D(f) = a_3^4(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2 > 0$$

(3) $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\alpha_2 = \overline{\alpha}_3$, тогда:

$$D(f) = a_3^4(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \overline{\alpha_2})^2(\alpha_2 - \overline{\alpha_2})^2 = a_3^4|\alpha_1 - \alpha_2|^4(2i\,\mathrm{Im}(\alpha_2))^2 = -4a_3^4|\alpha_1 - \alpha_2|^4(\mathrm{Im}(\alpha_2))^2 < 0$$

Вывод: Если $D(f) > 0 \Rightarrow 3$ различных корня, если $D(f) < 0 \Rightarrow 1$ вещественный корень, если же $D(f) = 0 \Rightarrow$ либо 2 корня из $\mathbb{R}$: однократный и двухкратный, либо 1 трехкратный корень из $\mathbb{R}$.

Результант

С помощью дискриминанта можно выяснить, есть ли у многочлена кратные корни. Есть похожий инвариант, который позволяет ответить на вопрос: есть ли у двух многочленов общие корни? Он называется результантом, попробуем его определить. Рассмотрим многочлен:

$$\rho(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \prod_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (x_i - y_j) \in K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$$

Видно, что этот многочлен симметричен по $x_1, \dots, x_n$: если мы их переставим, то разности переставятся, но произведение не изменится. Тогда, по основной теореме о симметрических многочленах, его можно выразить через элементарные симметрические многочлены от этой группы переменных:

$$\rho = \sum_{k_1,\dots,k_n \geq 0} \rho_{k_1,\dots,k_n} \cdot \sigma_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{k_n}, \quad \rho_{k_1,\dots,k_n} \in K[y_1, \dots, y_m]$$

где $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$, $\forall i = \overline{1, n}$. Грубо говоря, мы рассматриваем многочлен ρ, как многочлен от переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из $K[y_1, \dots, y_m]$:

$$\rho \in (K[y_1, \dots, y_m])\,[x_1, \dots, x_n]$$

Переставляя $y_1, \dots, y_m$ местами ρ не изменится, а поскольку полученное выражение по основной теореме единственное, то и оно тоже не изменится $\Rightarrow$ $\rho_{k_1,\dots,k_n}$ не изменятся $\Rightarrow$ они симметричны по переменным $y_1, \dots, y_m$ $\Rightarrow$ к ним применима основная теорема. Следовательно, $\rho_{k_1,\dots,k_n}$ будут выражаться через элементарные симметрические многочлены: $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$ от $y_1, \dots, y_m$. Получаем:

$$\rho = \rho(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma'_1, \dots, \sigma'_m)$$

Кроме того, основная теорема говорит чему равна степень ρ по $\sigma_1, \dots, \sigma_n$:

$$\deg_{x_i}(\rho) = m$$

Аналогично, степень ρ по $\sigma'_1, \dots, \sigma'_m$:

$$\deg_{y_j}(\rho) = n$$

Пусть у нас есть два многчлена:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x],\; g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \in K[x]$$

где f имеет $n = \deg(f)$ корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ и g имеет $m = \deg(g)$ корней $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ и все корни указаны с учётом кратностей. Рассмотрим следующее выражение:

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (\alpha_i - \beta_j) \in K[a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$$

Это выражение будет многочленом от коэффициентов f и g, поскольку само произведение выражается через элементарные симметрические многочлены от этих корней, они в свою очередь выражаются через коэффициенты f и g, деленные на старший коэффициент $\Rightarrow$ домножая на старший коэффициент в нужных степенях все знаменатели пропадут и останется многочлен от коэффициентов f и g.

Опр: 1. Многочлен от коэффициентов f и g, выраженный через их корни в виде:

$$R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (\alpha_i - \beta_j) \in K[a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_m]$$

называется результантом многочленов f и g.

Rm: 1. Как и в случае дискриминанта, чтобы посчитать результант не нужно знать корни многочленов, надо знать выражение результанта в виде многочлена от коэффициентов, получаемых через элементарных симметрических многочленов.

Свойства результанта

1) $R(f,g)=0 \Leftrightarrow f$ и g имеют общий корень;

   $\square$ f,g имеют общий корень $\Leftrightarrow \exists\, i,j\colon \alpha_i=\beta_j \Leftrightarrow \alpha_i-\beta_j=0 \Leftrightarrow R(f,g)=0$; $\blacksquare$

2) $R(g,f)=(-1)^{m\cdot n}\cdot R(f,g)$;

   $\square$
$$R(g,f) = b_m^n a_n^m \prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (\beta_j-\alpha_i) = a_n^m b_m^n (-1)^{m\cdot n} \prod_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (\alpha_i-\beta_j) = (-1)^{m\cdot n} R(f,g)$$
$\blacksquare$

3) $R(f,g)=a_n^m\cdot g(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot g(\alpha_n) = (-1)^{m\cdot n}\cdot b_m^n\cdot f(\beta_1)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m)$;

   $\square$
$$g(x)=b_m\cdot(x-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_m) \Rightarrow g(\alpha_i)=b_m\cdot(\alpha_i-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_i-\beta_m)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot g(\alpha_n) = b_m^n\cdot\prod_{i,j}(\alpha_i-\beta_j) \Rightarrow a_n^m\cdot g(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot g(\alpha_n)=R(f,g)$$

   Используем второе свойство, тогда:
$$R(f,g) = (-1)^{mn}R(g,f) = (-1)^{mn} b_m^n\cdot f(\beta_1)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m)$$
$\blacksquare$

Как уже поняли ранее, результант двух многочленов можно выразить в виде многочлена от их коэффициентов. Встает вопрос: есть ли какая-то явная формула для этого? Оказывается есть.

Утв. 1.

$$R(f,g) = \left|\begin{matrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_1 & b_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_2 & b_1 & b_0
\end{matrix}\right| \begin{matrix} 1\\ 2\\ \vdots\\ m-1\\ m\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ n-1\\ n\end{matrix}$$

Rm: 2. Заметим, что этот определитель это многочлен от коэффициентов f и g, а поэтому и явная формула для результанта. Также отметим, что определитель выше имеет размеры $(m+n)\times(m+n)$.

☐ Рассмотрим частный случай, когда все корни α_i, β_j попарно различные. Обозначим определитель в формуле для краткости через R. Переставим в R первые m строк и последние n строк, затем заменим порядок строк и порядок столбцов на обратный. Поскольку со столбцами будет происходить столько же операций сколько и со строками, то знак поменяется чётное число раз. Тогда:

$$R = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & * & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & * & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\cdot|R'|$$

Домножим R на определитель Вандермонда от корней в обратном порядке (сначала β затем α):

$$R\cdot V(\beta_1,\dots,\beta_m,\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (-1)^{mn}|R'|\cdot\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_m & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^n & \dots & \beta_m^n & \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^{m+n-1} & \dots & \beta_m^{m+n-1} & \alpha_1^{m+n-1} & \dots & \alpha_n^{m+n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{mn}\left|\begin{array}{ccc|ccc} f(\beta_1) & \dots & f(\beta_m) & f(\alpha_1) & \dots & f(\alpha_n) \\ f(\beta_1)\beta_1 & \dots & f(\beta_m)\beta_m & f(\alpha_1)\alpha_1 & \dots & f(\alpha_n)\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\beta_1)\beta_1^{m-1} & \dots & f(\beta_m)\beta_m^{m-1} & f(\alpha_1)\alpha_1^{m-1} & \dots & f(\alpha_n)\alpha_n^{m-1} \\ \hline g(\beta_1) & \dots & g(\beta_m) & g(\alpha_1) & \dots & g(\alpha_n) \\ g(\beta_1)\beta_1 & \dots & g(\beta_m)\beta_m & g(\alpha_1)\alpha_1 & \dots & g(\alpha_n)\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\beta_1)\beta_1^{n-1} & \dots & g(\beta_m)\beta_m^{n-1} & g(\alpha_1)\alpha_1^{n-1} & \dots & g(\alpha_n)\alpha_n^{n-1} \end{array}\right|$$

Визуально, можно разбить полученный определитель на 4 части. На побочной диагонали будут нулевые блоки, поскольку $f(\alpha_i) = 0$, $\forall i$ и $g(\beta_j) = 0$, $\forall j$, тогда:

$$R{\cdot}V(\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \dots & f(\beta_m) & 0 & \dots & 0 \\ f(\beta_1)\beta_1 & \dots & f(\beta_m)\beta_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\beta_1)\beta_1^{m-1} & \dots & f(\beta_m)\beta_m^{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g(\alpha_1) & \dots & g(\alpha_n) \\ 0 & \dots & 0 & g(\alpha_1)\alpha_1 & \dots & g(\alpha_n)\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g(\alpha_1)\alpha_1^{n-1} & \dots & g(\alpha_n)\alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{mn} f(\beta_1){\cdot}\ldots{\cdot}f(\beta_m){\cdot}V(\beta_1, \dots, \beta_m){\cdot}g(\alpha_1){\cdot}\ldots{\cdot}g(\alpha_n){\cdot}V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R{\cdot}\prod_{i>j}(\beta_i - \beta_j)\prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j)\prod_{i,j}(\beta_i - \alpha_j) =$$

$$= (-1)^{mn} f(\beta_1){\cdot}\ldots{\cdot}f(\beta_m){\cdot}\prod_{i>j}(\beta_i - \beta_j){\cdot}g(\alpha_1){\cdot}\ldots{\cdot}g(\alpha_n){\cdot}\prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R{\cdot}\prod_{i,j}(\beta_i - \alpha_j) = (-1)^{mn} f(\beta_1){\cdot}\ldots{\cdot}f(\beta_m){\cdot}g(\alpha_1){\cdot}\ldots{\cdot}g(\alpha_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R{\cdot}\prod_{i,j}(\beta_i - \alpha_j){\cdot}a_n^m b_m^n = \underbrace{(-1)^{mn}{\cdot}b_m^n{\cdot}f(\beta_1){\cdot}\ldots{\cdot}f(\beta_m)}_{R(f,g)} \cdot \underbrace{a_n^m{\cdot}g(\alpha_1){\cdot}\ldots{\cdot}g(\alpha_n)}_{R(f,g)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R{\cdot}R(f,g) = R(f,g){\cdot}R(f,g) \Rightarrow R = R(f,g)$$

В общем случае, вместо f и g рассмотрим многочлены $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, x]$:

$$\widetilde{f} = a_n(x - x_1){\cdot}(x - x_2){\cdot}\ldots{\cdot}(x - x_n) = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 x + \ldots + \widetilde{a}_n x^n,\ \forall i = \overline{0, n},\ \widetilde{a}_i \in K[x_1, \dots, x_n]$$

$$\widetilde{g} = b_m(x - y_1){\cdot}(x - y_2){\cdot}\ldots{\cdot}(x - y_m) = \widetilde{b}_0 + \widetilde{b}_1 x + \ldots + \widetilde{b}_m x^m,\ \forall j = \overline{0, m},\ \widetilde{b}_j \in K[y_1, \dots, y_m]$$

Эти многочлены можно рассматривать как многочлены от $n{+}m{+}1$ переменной, а можно рассматривать как многочлены от 1 переменной, но с коэффициентами из кольца многочленов от $n + m$ переменных. Во втором случае мы можем к этим двум многочленам от переменной x применить предыдущий случай, потому что у $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ все корни различные: корни $\widetilde{f}$: $x_1, \dots, x_n$ это разные переменные, корни $\widetilde{g}$: $y_1, \dots, y_m$ это тоже разные переменные и x_i отличаются от y_j, то есть $n + m$ различных переменных. Тогда:

$$R(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{R}$$

где $\widetilde{R}$ - определитель, составленный из коэффициентов $\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_j$ аналогично определителю R. Подставим значения: $\forall i = \overline{1, n}$, $x_i = \alpha_i$, $\forall j = \overline{1, m}$, $y_j = \beta_j$, тогда:

$$\widetilde{f} = f,\ \widetilde{g} = g,\ \widetilde{a}_i = a_i,\ \widetilde{b}_j = b_j \Rightarrow R(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = R(f, g),\ \widetilde{R} = R \Rightarrow R(f, g) = R$$

Таким образом, мы свели общий случай к частному. ■

Связь результанта с дискриминантом

Утв. 2. Пусть $f(x) \in K[x]$, тогда:

$$R(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_n \cdot D(f)$$

где f' - это производная многочлена f.

$\square$ Разложим многочлен f на множители:

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_i)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_i)'\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n) =$$

$$= a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}\cdot(x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{i-1})\cdot(x-\alpha_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

Подставим корни многочлена в производную:

$$\forall i = \overline{1,n},\ f'(\alpha_i) = a_n\cdot\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)$$

По свойству 3) результанта будет верно:

$$R(f,f') = a_n^{n-1}\cdot f'(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot f'(\alpha_i)\cdot\ldots\cdot f'(\alpha_n) = a_n^{2n-1}\cdot\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}(\alpha_i-\alpha_j) = a_n^{2n-1}\cdot\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot\prod_{j<i}(\alpha_i-\alpha_j) =$$

$$= a_n^{2n-1}\cdot\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\prod_{j<i}(\alpha_j-\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_n^{2n-1}\cdot\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2 =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_n\cdot\underbrace{a_n^{2n-2}\cdot\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}_{D(f)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_n\cdot D(f)$$

$\blacksquare$

Следствие 1. Пусть $f \in K[x]$, тогда: $D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_n^{-1}\cdot R(f,f')$.

Rm: 3. Отметим, что общей формулы для выражения дискриминанта через коэффициенты нет, при этом используя результант можно находить дискриминант через коэффициенты многочлена и его производной (которые также легко выражаются через коэффициенты многочлена). Формало это и есть искомая формула, но по такому определителю всё ещё сложно оценить, входит ли некоторый член в определитель и если да, то с каким коэффициентом.

Пример: Рассмотрим многочлен $f(x) = ax^2+bx+c$, $n=2$, тогда: $f'(x) = 2ax+b$, найдем $R(f,f')$:

$$R(f,f') = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 0 \\ 2a & b \end{vmatrix} - 2a\begin{vmatrix} b & c \\ 2a & b \end{vmatrix} = ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c = -a(b^2-4ac) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f) = (-1)^1\cdot a^{-1}\cdot(-a)(b^2-4ac) = b^2-4ac$$