Многочлены

Опр: 1. Пусть K - кольцо (коммутативное, ассоциативное, с единицей). Кольцо многочленов от одной переменной над кольцом K это кольцо $K[x]$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $K \subset K[x]$ или $K[x]$ содержит подкольцо, изоморфное K;
2) $x \in K[x]\colon x \notin K$, где выделенный элемент x называется переменной;
3) $\forall f \in K[x]$, $\exists!$ представление $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k{\cdot}x^k$, $a_k \in K$, $\exists\, n\colon \forall k > n$, $a_k = 0$;

Теорема 1. Кольцо многочленов от одной переменной $K[x]$ единственно с точностью до изоморфизма.

□

1) Пусть $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in K[x]$, тогда:

$$f + g = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n){\cdot}x^n$$

$$f{\cdot}g = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{\cdot}x^k{\cdot}\sum_{l=0}^{\infty} b_l{\cdot}x^l = \sum_{k,l\geq 0} a_k{\cdot}b_l{\cdot}x^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n{\cdot}x^n,\ \forall n \geq 0,\ c_n = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} a_k{\cdot}b_l$$

Вывод: коэффициенты суммы и произведения многочленов зависят только от коэффициентов исходных многочленов;

2) Пользуясь 1) мы можем построить изоморфизм между любыми двумя кольцами многочленов. Пусть $K[y]$ - другое кольцо многочленов. Построим изоморфизм $\varphi\colon K[x] \underset{\sim}{\to} K[y]$:

$$\forall f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ \varphi(f) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n$$

Биективность: вытекает из того, что каждый многчлен единственным образом представляется в виде линейной комбинации одночленов $\Rightarrow$ взаимнооднозначно соответствует последовательности коэффициентов $\Rightarrow$ два многочлена имеют одну и ту же последовательность коэффициентов $\Rightarrow$ соответствие взаимно однозначно.

Согласованность с операциями: вытекат из того, что результат операции над двумя многочленами определяется только тем, какие были коэффициенты у исходных многочленов:

$$\varphi(f+g) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n){\cdot}y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n{\cdot}y^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n{\cdot}y^n = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(f{\cdot}g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n{\cdot}y^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k{\cdot}y^k{\cdot}\sum_{l=0}^{\infty} b_l{\cdot}y^l = \varphi(f){\cdot}\varphi(g),\ \forall n \geq 0,\ c_n = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} a_k{\cdot}b_l$$

Таким образом, любые два кольца многочленов от одной переменной над кольцом коэффициентов K изоморфны друг другу;

■

Существование кольца многочленов

Построим модель кольца, которое удовлетворяет определению кольца многочленов.

Модель кольца многочленов: Многочлен задается последовательностью своих коэффициентов $\Rightarrow$ можно считать, что эта последовательность бесконечна, но просто продолжена 0 до бесконечности, но реально в ней лишь конечное число ненулевых членов.

Опр: 2. Последовательность $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ элементов $a_k \in K$ называется финитной, если начиная с некоторого места, её члены равны нулю:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\colon \forall k > n,\ a_k = 0$$

Обозначение: Пусть K^∞ - множество финитных последовательностей элементов кольца K.

Хотим превратить множество K^∞ в кольцо, которое бы удовлетворяло определению кольца многочленов. Введем в нём операции, которые происходят над последовательностями коэффициентов в кольце многочленов, если бы это кольцо существовало.

Операции:

$(+)$: $\forall a, b \in K^\infty,\ a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots)$;

$(\,\cdot\,)$: $\forall a, b \in K^\infty,\ a{\cdot}b = (a_0{\cdot}b_0, a_0{\cdot}b_1 + a_1{\cdot}b_0, a_0{\cdot}b_2 + a_1{\cdot}b_1 + a_2{\cdot}b_0, \dots, a_0{\cdot}b_n + a_1{\cdot}b_{n-1} + \ldots + a_n{\cdot}b_0, \dots)$, где:

$$(a{\cdot}b)_n = a_0{\cdot}b_n + a_1{\cdot}b_{n-1} + \ldots + a_n{\cdot}b_0 = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} a_k{\cdot}b_l$$

Заметим, что при сложении сумма будет финитна, поскольку обе последовательности финитны, а сложение идёт покомпонентно. При умножении сумма также будет финитна, поскольку либо k будет достаточно большое, либо l так, чтобы $a_k b_l = 0$, в силу финитностни исходных последовательностей.

Утв. 1. Множество K^∞ замкнуто относительно операций сложения и умножения, определенных выше.

□ Рассмотрим операции в явном виде:

$$\forall a, b \in K^\infty,\ \exists\, n, m \in \mathbb{N}\colon \forall k > n,\ a_k = 0,\ \forall l > m,\ b_l = 0 \Rightarrow \forall p > r = \max(n, m),\ a_p = 0, b_p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_r + b_r, 0, \dots) \Rightarrow a + b \in K^\infty$$

$$\Rightarrow a{\cdot}b = (a_0{\cdot}b_0, \dots, a_0{\cdot}b_r + a_1{\cdot}b_{r-1} + \ldots + a_r{\cdot}b_0, \dots, a_0{\cdot}b_{2p} + a_1{\cdot}b_{2p-1} + \ldots + a_p{\cdot}b_p + \ldots + a_{2p}{\cdot}b_0, \dots)$$

$$a_0{\cdot}b_{2p} + \ldots + a_p{\cdot}b_p + \ldots + a_{2p}{\cdot}b_0 = a_0{\cdot}0 + \ldots + 0{\cdot}0 + \ldots + 0{\cdot}b_0 = 0 \Rightarrow a{\cdot}b \in K^\infty$$

■

Проверка аксиом кольца:

1) **Коммутативность сложения**: следует из коммутативности операции в кольце K, $\forall a, b \in K^\infty$:

$$a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n, \dots) = b + a$$

2) **Коммутативность умножения**: следует из коммутативности операции в кольце K, $\forall a, b \in K^\infty$:

$$a{\cdot}b = (a_0{\cdot}b_0, \dots, a_0{\cdot}b_n + a_1{\cdot}b_{n-1} + \ldots + a_n{\cdot}b_0, \dots) = (b_0{\cdot}a_0, \dots, b_0{\cdot}a_n + b_1{\cdot}a_{n-1} + \ldots + b_n{\cdot}a_0, \dots) = b{\cdot}a$$

3) **Ассоциативность сложения**: следует из ассоциативности операции в кольце K, $\forall a, b, c \in K^\infty$:

$$a+(b+c) = (a_0+(b_0+c_0), \ldots, a_n+(b_n+c_n), \ldots) = ((a_0+b_0)+c_0, \ldots, (a_n+b_n)+c_n, \ldots) = (a+b)+c$$

4) **Ассоциативность умножения**: $\forall a, b, c \in K^\infty$:

$$a{\cdot}b = f,\ (a{\cdot}b){\cdot}c = g,\ b{\cdot}c = u,\ a{\cdot}(b{\cdot}c) = v$$

$$\forall n \geq 0,\ g_n = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} f_k{\cdot}c_l = \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} \Bigg(\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} a_i{\cdot}b_j\Bigg){\cdot}c_l = \sum_{\substack{i,j,l\geq 0\\ i+j+l=n}} a_i{\cdot}b_j{\cdot}c_l$$

$$\forall n \geq 0,\ v_n = \sum_{\substack{i,m\geq 0\\ i+m=n}} a_i{\cdot}u_m = \sum_{\substack{i,m\geq 0\\ i+m=n}} a_i{\cdot}\Bigg(\sum_{\substack{j,l\geq 0\\ j+l=m}} b_j{\cdot}c_l\Bigg) = \sum_{\substack{i,j,l\geq 0\\ i+j+l=n}} a_i{\cdot}b_j{\cdot}c_l$$

Следовательно, $g = v \Rightarrow$ ассоциативность умножения выполнена;

5) **Дистрибутивность**: $\forall a, b, c \in K^\infty$:

$$a{\cdot}(b+c) = (a_0{\cdot}(b_0+c_0), \ldots, a_0{\cdot}(b_n+c_n) + a_1{\cdot}(b_{n-1}+c_{n-1}) + \ldots + a_n{\cdot}(b_0+c_0), \ldots) =$$

$$= (a_0{\cdot}b_0 + a_0{\cdot}c_0, \ldots, a_0{\cdot}b_n + a_1{\cdot}b_{n-1} + \ldots + a_n{\cdot}b_0 + a_0{\cdot}c_n + a_1{\cdot}c_{n-1} + \ldots + a_n{\cdot}c_0, \ldots) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$$

6) **Существование нулевого элемента**: $\forall a \in K^\infty$, $\exists 0$:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)\colon a + 0 = (a_0+0, \ldots, a_j+0, \ldots) = (a_0, \ldots, a_j, \ldots) = a$$

7) **Существование противоположного элемента**: $\forall a \in K^\infty$, $\exists -a \in K^\infty$:

$$-a = (-a_0, -a_1, \ldots, -a_j, \ldots),\ a + (-a) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1, \ldots, a_j - a_j, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0) = 0$$

8) **Существование единичного элемента**: $\forall a \in K^\infty$, $\exists 1$:

$$1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots),\ a{\cdot}1 = (a_0{\cdot}1, a_0{\cdot}0 + a_1{\cdot}0, 0 + 0 + a_2, \ldots, 0 + 0 + \ldots + a_n{\cdot}1, \ldots) = a$$

Таким образом, множество финитных последовательностей K^∞ является коммутативным, ассоциативным кольцом с единицей.

Проверка свойств кольца многочленов:

1) $K^\infty \supset \{a = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)\colon a_0 \in K\}$, поймем как они складываются и умножаются:

$$(a_0, 0, \ldots, 0, \ldots) + (b_0, 0, \ldots, 0, \ldots) = (a_0 + b_0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$$(a_0, 0, \ldots, 0, \ldots){\cdot}(b_0, 0, \ldots, 0, \ldots) = (a_0{\cdot}b_0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

Видим, что это множество замкнуто относительно сложения и умножения. Очевидно, оно непусто, противоположные элементы есть из свойств кольца $\Rightarrow$ это подкольцо. При этом это подкольцо будет изоморфно кольцу K, его элементы можно отождествить с элементами K:

$$\varphi\colon \{a = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)\colon a_0 \in K\} \underset{\sim}{\to} K$$

$$\forall x = (x_0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \{a = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)\colon a_0 \in K\},\ \varphi(x) = x_0$$

Следовательно, K^∞ содержит **подкольцо**, изоморфное кольцу K. Ради простоты, можем считать, что K содержится в K^∞;

2) **Переменная**: $x = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in K^\infty$ и $x \notin \{a = (a_0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)\colon a_0 \in K\} \simeq K$;

3) **Одночлены**: $x^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$, где $x^n_n = 1$, $\forall m \neq n$, $x^n_m = 0$. Докажем это:

   База: $n = 0$:
   $$x^0 = 1 \Rightarrow x^0 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

   Шаг индукции: пусть верно для n, рассмотрим $n+1$:
   $$x^{n+1} = x^n \cdot x = (0, 0, \ldots, 0, x^n_n = 1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) =$$
   $$= (x^n_0 x_0, \ldots, x^n_0 x_n + \ldots + x^n_n x_0, x^n_0 x_{n+1} + \ldots + x^n_n x_1 + x^n_{n+1} x_0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, x^{n+1}_{n+1} = 1, 0, \ldots)$$

   Таким образом, мы можем доказать последнее свойство: $\forall a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in K^\infty$:
   $$a = (a_0, 0, \ldots, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) + \ldots$$
   $$\forall n \geq 0,\ (0, \ldots, 0, \underset{n}{a_n}, 0, \ldots) = (\underset{0}{a_n}, 0, \ldots, 0, \ldots) \cdot (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots) = a_n \cdot x^n \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow a = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n + \ldots$$

   Коэффициенты в этой линейной комбинации однозначно определяются элементами исходной последовательности a, поскольку если мы проведем все выкладки в обратную сторону, то получим в точности такую же последовательность $a \Rightarrow$ всякая финитная последовательность, единственным способом представляется в виде линейной комбинации одночленов;

Следовательно, $K^\infty = K[x]$.

Алгебраические свойства кольца многочленов

Опр: 3. Кольцо K называется целостным или областью целостности, если K это коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Примеры целостных колец:

1) $K = \mathbb{Z}$;
2) K - любое поле, так как в поле любой элемент обратим $\Rightarrow$ не является делителем нуля (обратное не верно, смотри $K = \mathbb{Z}$);

Далее везде будем считать, что кольцо коэффициентов K является областью целостности.

Утв. 2. Пусть $f, g \in K[x]$, $f, g \neq 0$, тогда $f \cdot g \neq 0$, $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

□ Пусть верно:
$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0,\ \deg(f) = n$$
$$g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ b_m \neq 0,\ \deg(g) = m$$

Перемножим многочлены:
$$f \cdot g = \sum_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,m}} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j} = a_n b_m x^{n+m} + \text{члены меньших степеней},\ a_n b_m \neq 0$$

Старший член степени $n+m$ ни с кем не сокращается, поскольку остальные члены - меньших степеней. Таким образом, $f \cdot g \neq 0$ и $\deg(f \cdot g) = n + m = \deg(f) + \deg(g)$. ■

Rm: 1. Мы предполагаем, что $f, g \neq 0$, но на самом деле формула верна и когда $f = 0$ или $g = 0$, если договориться, что $\deg(0) = -\infty$ и $\forall k > 0,\ -\infty + k = -\infty$.

Следствие 1. $K[x]$ над областью целостности K - тоже является областью целостности.

□ Следует сразу из предыдущего утверждения, потому что предложение говорит, что если есть два ненулевых многочлена, то их произведение тоже ненулевое $\Rightarrow$ нет делителей нуля. ■

Следствие 2. $K[x]^\times = K^\times$.

□
($\Leftarrow$) Очевидно, поскольку $\forall f \in K^\times,\ \exists\, g \in K^\times\colon f \cdot g = 1 \Rightarrow f, g \in K[x],\ f \cdot g = 1 \Rightarrow f, g \in K[x]^\times$.

($\Rightarrow$) Пусть $f \cdot g = 1$, тогда используя формулу из утверждения мы получаем:

$$\deg(f) + \deg(g) = \deg(f \cdot g) = \deg(1) = 0$$

$$\deg(f), \deg(g) \geq 0 \Rightarrow \deg(f) = \deg(g) = 0 \Rightarrow f, g \in K$$

То есть, такие многочлены лежат в K и их произведение равно $1 \Rightarrow$ они обратимы в K.
Следовательно: f обратим в $K[x] \Rightarrow f \in K$ и обратим в $K \Rightarrow K[x]^\times = K^\times$. ■

Утв. 3. Пусть $f, g \in K[x],\ f, g \neq 0$, тогда $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

□ Если $\deg(f) \neq \deg(g)$, то $\deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$, поскольку последним ненулевым элементом будет тот, у которого максимальный номер среди f и g. Если же $\deg(f) = \deg(g)$, то возможна ситуация, когда это два многочлена вида:

$$f(x) = a_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \ldots + b_0,\ g(x) = -a_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0 \Rightarrow \deg(f + g) < \deg(f) = \deg(g)$$

■

Далее будем считать, что K - это поле. Всякий многочлен $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$ задает функцию $f\colon K \to K$ (обозначаемую той же буквой), которая определяется следующим образом:

$$\forall c \in K,\ f(c) = a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + \ldots + a_n \cdot c^n \in K$$

Опр: 4. Полиномиальными функциями называются такие функции, которые задаются с помощью некоторого многочлена.

Задача о полиномиальной интерполяции

Пусть дано n различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in K$ и ещё n элементов (не обязательно различных) $y_1, \ldots, y_n \in K$. Требуется найти (полиномиальную) функцию f, для которой $\forall i = \overline{1, n},\ f(x_i) = y_i$.

Теорема 2. (**Об интерполяции**) Для любых различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in K$ и $\forall y_1, \ldots, y_n \in K$ существует ровно один многочлен $f \in K[x]$, $\deg(f) < n$, для которого выполнено:

$$\forall i = \overline{1, n},\ f(x_i) = y_i$$

Rm: 2. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ поля K принято называть узлами интерполяции.

□ Будем искать многочлен f в виде линейной комбинации одночленов, степени меньше n:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$

Условия интерполяции:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
f(x_1) & = & a_0 & + & a_1x_1 & + & a_2x_1^2 & + & \ldots & + & a_{n-1}x_1^{n-1} & = & y_1 \\
f(x_2) & = & a_0 & + & a_1x_2 & + & a_2x_2^2 & + & \ldots & + & a_{n-1}x_2^{n-1} & = & y_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f(x_n) & = & a_0 & + & a_1x_n & + & a_2x_n^2 & + & \ldots & + & a_{n-1}x_n^{n-1} & = & y_n
\end{array}$$

Можно посмотреть на эту систему, как на квадратную СЛУ относительно неизвестных $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Она квадратная, так как n уравнений и n неизвестных. Решим её методом Крамера и рассмотрим определитель матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \neq 0$$

Видим, что Δ с точностью до транспонирования это определитель Вандермонда, а по предположению, что все x_i - различны получается, что этот определитель не равен нулю. Тогда по правилу Крамера, СЛУ - определена $\Rightarrow \exists!$ набор коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, для которого соответствующий многочлен удовлетворяет условиям интерполяции. ■

Найдем многочлен f по формулам Крамера:

$$\forall j = \overline{0, n-1},\ a_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ \Delta = V(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{j-1} & y_1 & x_1^{j+1} & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{j-1} & y_2 & x_2^{j+1} & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{j-1} & y_n & x_n^{j+1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

где $j+1$-ый столбец заменен на столбец свободных членов y, поскольку нумерация столбцов сдвинута на 1. Посчитаем этот определитель в явном виде, разложив по $j+1$-ому столбцу:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (-1)^{i+j+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{j-1} & x_1^{j+1} & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \ldots & x_{i-1}^{j-1} & x_{i-1}^{j+1} & \ldots & x_{i-1}^{n-1} \\ 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+1}^{j-1} & x_{i+1}^{j+1} & \ldots & x_{i+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{j-1} & x_n^{j+1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (-1)^{i+j+1} \cdot \Delta_{-ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot x^j = \frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{j=0,\ldots,n-1 \\ i=0,\ldots,n}} (-1)^{i+j+1} \cdot y_i \cdot \Delta_{-ij} \cdot x^j = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j+1} \cdot x^j \cdot \Delta_{-ij}$$

Здесь мы получаем формулу разложения определителя по строке i, состоящей из членов x^j, тогда:

$$f(x)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x & x^2 & \dots & x^j & \dots & x^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^j & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot V(x_1,\dots,\underset{i}{x},\dots,x_n)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{V(x_1,\dots,x,\dots,x_n)}{V(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{\prod\limits_{k>l,\,k,l\neq i}(x_k-x_l)\cdot\prod\limits_{k>i}(x_k-x)\prod\limits_{i>l}(x-x_l)}{\prod\limits_{k>l,\,k,l\neq i}(x_k-x_l)\cdot\prod\limits_{k>i}(x_k-x_i)\prod\limits_{i>l}(x_i-x_l)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

где в числителе мы поменяли порядок x и x_k из-за таких же перестановок в знаменателе.

Опр: 5. Интерполяционной формулой Лагранжа называется явный вид многочлена f построенного по формулам Крамера для задачи полиномиальной интерполяции:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$