Список литературы

1) А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры.

2) Э.Б. Винберг. Курс алгебры. Главы 1 – 4.

Введение

Алгебра - от арабского "аль-джабр" = "восполнение". В данном случае имеется в виду одна из операций, которая используется при решении уравнений, а именно перенос вычитаемого члена из одной части уравнения в другую с заменой знака. Это часть трактата Аль-Хорезми, 825 г.

Системы линейных уравнений

Опр: 1. Система линейных уравнений (алгебраических) сокращенно СЛУ, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Опр: 2. Переменные $x_1, \dots, x_n$ в указанной системе линейных уравнений называются неизвестными.

Опр: 3. Коэффициенты $\{a_{ij}\}$ - это заданные конкретные числа, которые называются коэффициентами при неизвестных, где $i = \overline{1, m}$ - номер уравнения, $j = \overline{1, n}$ - номер того неизвестного при котором стоит данный коэффициента.

Опр: 4. $\{b_i\}$ - заданные конкретные числа, которые называются свободными членами, где $i = \overline{1, m}$.

Опр: 5. Решением СЛУ называется упорядоченный набор чисел $(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$, при подстановке которых вместо неизвестных: $x_1 = x_1^\circ, \dots, x_n = x_n^\circ$ уравнения обращаются в верные равенства. Решить систему означает найти все её решения или показать, что их нет.

Опр: 6. Система линейных уравнений называется совместной, если у неё $\exists$ решение.

Опр: 7. Система линейных уравнений называется несовместной, если у неё $\nexists$ решений.

Опр: 8. Система линейных уравнений называется определенной, если у неё $\exists!$ решение.

Опр: 9. Система линейных уравнений называется неопределенной, если у неё $\exists$ больше одного решения.

Опр: 10. Матрица коэффициентов СЛУ это прямоугольная таблица (m строк, n столбцов), составленная из всех коэффициентов при всех неизвестных (таблица чисел):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Опр: 11. Расширенной матрицей СЛУ называется прямоугольная таблица (m строк, $n+1$ столбец), составленная из матрицы коэффициентов A, дописыванием справа столбца свободных членов:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Rm: 1. Имея расширенную матрицу мы можем восстановить все исходные уравнения, поскольку каждая строчка содержит информацию об i-ом уравнении. На практике удобнее работать с матрицами.

Элементарные преобразования СЛУ и их матриц

Опр: 12. Сложение строк матриц определим, как:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1+d_1 & c_2+d_2 & \dots & c_n+d_n \end{pmatrix}$$

Или в эквивалентной записи:

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) + (d_1, d_2, \dots, d_n) = (c_1+d_1, c_2+d_2, \dots, c_n+d_n)$$

Опр: 13. Умножение строки матрицы на скаляр определим, как:

$$\lambda\cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot c_1 & \lambda\cdot c_2 & \dots & \lambda\cdot c_n \end{pmatrix}$$

Или в эквивалентной записи:

$$\lambda\cdot(c_1, c_2, \dots, c_n) = (\lambda\cdot c_1, \lambda\cdot c_2, \dots, \lambda\cdot c_n)$$

Опр: 14. Элементарные преобразования СЛУ и их матриц называются преобразования трёх типов:

1) Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

   Символически: $\underset{\text{новое } i\text{-ое уравнение}}{(i)'} = \underset{\text{старое } i\text{-ое уравнение}}{(i)} + \underset{j\text{-ое уравнение, умнож. на } \lambda}{\lambda\cdot(j)}$.

   В матрицах: $\widetilde{A}'_i = \widetilde{A}_i + \lambda\cdot\widetilde{A}_j$, $\widetilde{A}'_k = \widetilde{A}_k$, $\forall k \neq i$, где $\widetilde{A}_i$ - i-ая строка матрицы $\widetilde{A}$;

2) Перестановка двух уравнений местами.

   Символически: $(i) \longleftrightarrow (j)$.

   В матрицах: $\widetilde{A}'_i = \widetilde{A}_j$, $\widetilde{A}'_j = \widetilde{A}_i$, $\widetilde{A}'_k = \widetilde{A}_k$, $\forall k \neq i, j$;

3) Умножение одного уравнения на ненулевое число:

   Символически: $(i)' = (i)\cdot\lambda$, $\lambda \neq 0$;

   В матрицах: $\widetilde{A}'_i = \lambda\cdot\widetilde{A}_i$, $\widetilde{A}'_k = \widetilde{A}_k$, $\forall k \neq i$, $\lambda \neq 0$;

Опр: 15. Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если множество их решений совпадают.

Утв. 1. Элементарные преобразования СЛУ приводят к эквивалентной СЛУ.

$\square$ Пусть изначально была СЛУ $(*)$ и мы элементарными преобразованиями перешли к СЛУ $(*)'$. Следовательно, уравнения в $(*)'$ следуют из уравнений в $(*)$:

1) Если мы складываем два верных равенства, умножив одно из них на число, эти равенства сохраняются верными;

2) Изменение уравнений местами не меняет верных равенств;

3) Умножение верного равенства на число не меняет верного равенства;

Например, пусть $(\widetilde{x}_1, \ldots \widetilde{x}_n)$ - решение системы $(*)$, тогда:

$$\begin{cases} a_{i1}\widetilde{x}_1 + \ldots + a_{in}\widetilde{x}_n = b_i \\ a_{j1}\widetilde{x}_1 + \ldots + a_{jn}\widetilde{x}_n = b_j \end{cases} \Rightarrow (a_{i1} + \lambda{\cdot}a_{j1})\widetilde{x}_1 + \ldots + (a_{in} + \lambda{\cdot}a_{jn})\widetilde{x}_n = b_i + \lambda{\cdot}b_j$$

Следовательно, любое решение $(*)$ является решением $(*)'$. Новых решений не появляется, поскольку элементарные преобразования - обратимы, то есть существуют обратные ЭП такие, что: $(*)' \Rightarrow (*)$.

1) $(i)' = (i) + \lambda{\cdot}(j) \Rightarrow (i)^i = (i) - \lambda{\cdot}(j)$;

2) $(i) \leftrightarrow (j) \Rightarrow (j)' \leftrightarrow (i)'$;

3) $(i)' = (i){\cdot}\lambda,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow (i)' = \dfrac{1}{\lambda}(i)$;

По соображениям, аналогичным выше, используя обратные преобразования к новой системе мы получим, что любое решение $(*)'$ есть решение $(*)$. Следовательно, две системы эквивалентны. $\blacksquare$

Метод Гаусса

Опр: 16. Назовем ведущим элементом (лидером) строки $(a_1, \ldots, a_n)$ такой $a_i \neq 0$, что все элементы левее его равны нулю: $a_j = 0,\ \forall j < i$.

Метод Гаусса решения СЛУ: последовательное исключение неизвестных из уравнений.

Шаг 1: Выбираем в $\widetilde{A}$ строку с самым левым лидером.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \color{red}{*} & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}$$

где $*$ - любое значение и $\color{red}{*} \neq 0$.

Шаг 2: Переставим эту строку на 1-ое место с помощью ЭП2.

$$\widetilde{A} \to \widetilde{A}' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \color{red}{*} & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a'_{1j} & \ldots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a'_{kj} & \ldots & a'_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a'_{mj} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Шаг 3: Обнуляем коэффициенты под лидером 1-ой строки с помощью ЭП1, то есть вычитанием из всех строк первой строки, умноженной на $-\dfrac{a^{'}_{kj}}{a^{'}_{1j}}$.

$$\widetilde{A}' \to \widetilde{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{'}_{1j} & \dots & a^{'}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a^{'}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a^{'}_{mn} \end{pmatrix}$$

Шаг 4: Временно забываем про 1-ую строку и получаем матрицу $\overline{A}$.

$$\widetilde{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1(j+1)} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{2(j+1)} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{m(j+1)} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \to \overline{A} = \begin{pmatrix} a'_{2(j+1)} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m(j+1)} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Шаг 5: Если $\overline{A} = 0$, то останавливаем алгоритм, если это не так, то проделываем шаги $1 - 4$.

В итоге: матрица $\widetilde{A}$ путем проведения ЭП придёт к матрице A^*, которая имеет вид ступенчатой матрицы:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

то есть в каждом следующем уравнении (сверху вниз) неизвестных меньше, чем в предыдущем.

Опр: 17. Ступенчатой матрицей называется матрица у которой ненулевые строки идут в начале, нулевые строки идут в конце и лидер каждой ненулевой строки стоит правее лидера предыдущей строки. Или более формально, матрица называется **ступенчатой**, если:

1) номера лидеров её строк образуют строго возрастающую последовательность;
2) все нулевые строки стоят после всех ненулевых;

Шаг 6: В ступенчатой матрице A^* с помощью ЭП3 можем на местах лидеров всех строк сделать 1, поделив на подходящие числа.

$$A^* \to A^{**} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

После чего, мы можем вычитать каждую строчку из предыдущих с подходящими коэффициентами, чтобы как ниже, так и выше лидеров были 0:

$$A^{**} \to \widetilde{A}^{**} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

такой вид матрицы называется улучшенным ступенчатым видом матрицы.

Опр: 18. Улучшенный ступенчатый вид матрицы это ступенчатый вид матрицы, у которой лидеры всех ненулевых строк равны 1 и каждый лидер это единственный ненулевой элемент своего столбца. Или более формально, матрица имеет **улучшенный ступенчатый вид**, если:

1) номера лидеров её строк образуют строго возрастающую последовательность;
2) все нулевые строки стоят после всех ненулевых;
3) лидеры всех ненулевых строк равны 1;
4) каждый лидер - единственный ненулевой элемент своего столбца;

Опр: 19. Ступенчатая матрица называется строго ступенчатой, если число ненулевых строк этой матрицы равно числу столбцов.

Опр: 20. Рангом ступенчатой матрицы называется число ненулевых строк в этой матрице.

Анализ ступенчатой СЛУ и обратный ход метода Гаусса

Пусть $r =$ ранг A^* - матрицы в ступенчатом виде, $\widetilde{r} =$ ранг расширенной матрицы $\widetilde{A}^*$ в ступенчатом виде. Возможны следующие случаи:

1) $r < \widetilde{r} = r + 1 \Rightarrow$ из $(r+1)$-ой строки мы получаем, что в левой части уравнения стоит 0, а в правой части стоит ненулевой член:

$$\widetilde{A}^* = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & * & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = b^*_{r+1} \neq 0$$

Такое уравнение не зависит от неизвестных $\Rightarrow$ противоречивое уравнение $\Rightarrow$ СЛУ не имеет решений, то есть она несовместна. Также такие уравнения называют экзотическими:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \neq 0$$

2) $r = \widetilde{r}$, запишем расширенную матрицу и пронумеруем столбцы, которые проходят через лидеров строчек:

$$\widetilde{A}^* = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & * & * & * & \dots & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & * & \dots & * & \dots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ m \end{array} \\ \begin{array}{cccccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & \dots & j_r & & & \end{array} & \end{array}$$

Неизвестные с этими номерами $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ назовём главными неизвестными, неизвестные с оставшимися номерами x_j, $(j \neq j_1, \dots, j_r)$ назовём свободными.

Опр: 21. Неизвестные соответствующие лидерам строк в расширенной матрице СЛУ в ступенчатом виде называются главными. В противном случае, они называются свободными.

Для решения такой системы используют **обратный ход метода Гаусса** $\Rightarrow$ рассмотрим последнее r-ое уравнение в системе:

$$(r)\colon\ a^*_{rj_r}x_{j_r} + \sum_{j>j_r} a^*_{rj}x_j = b^*_r \Rightarrow x_{j_r} = \frac{b^*_r - \sum\limits_{j>j_r} a^*_{rj}x_j}{a^*_{rj_r}}$$

Таким образом, получилось выразить x_{j_r} через неизвестные с большими номерами x_j, $j > j_r$, которые все являются свободными. Поднимаемся на уравнение выше - на $(r-1)$-ую строку расширенной матрицы и поступаем абсолютно аналогично:

$$(r-1)\colon\ x_{j_{r-1}} = \frac{b^*_{r-1} - \sum\limits_{j>j_{r-1}} a^*_{(r-1)j}x_j}{a^*_{(r-1)j_{r-1}}}$$

В полученном будут неизвестные с большими номерами, среди которых будет и главная неизвестная x_{j_r}, но мы уже выразили её через свободные неизвестные $\Rightarrow$ подставляя это выражение мы получим, что $x_{j_{r-1}}$ также может быть выражено через свободные неизвестные x_j, $j > j_{j-1}$, $j \neq j_r$. Продолжаем такую процедуру далее.

<u>В итоге</u>: СЛУ после всех преобразований превратиться в систему уравнений вида:

$$x_{j_k} = \sum_{j \neq j_1,\dots,j_k} c_{kj}x_j + c_k,\ \forall k = \overline{1,r}$$

то есть набор уравнений, которые выражают главные неизвестные через свободные.

Опр: 22. Набор уравнений, в которых главные неизвестные выражены через свободные называется общим решением СЛУ.

Подставляя вместо свободных неизвестных произвольные значения мы можем однозначно найти значения главных неизвестных:

$$x_j = x_j^\circ,\ \forall j \neq j_1, \dots, j_r \Rightarrow x_{j_k} = x^\circ_{j_k},\ \forall k = \overline{1,r}$$

И получить частное решение: $(x_1^\circ, \dots, x_n^\circ)$. В частности, видим что СЛУ оказывается совместна.

Опр: 23. Частное решение это набор значений всех неизвестных, превращающий уравнения в верные равенство.

Rm: 2. Преимущество улучшенного ступенчатого вида заключается в том, что можно сразу написать общее решение, потому что в каждом уравнении такой системы содержится ровно одно главное неизвестное с коэффициентом 1, а остальные главные неизвестные идут с коэффициентом 0. Следовательно, перенося из левой части все остальные слагаемые направо, мы сразу получим выражение для главного неизвестного.

Утв. 2. Пусть r ранг это матрицы коэффициентов СЛУ в ступенчатом виде и $\widetilde{r}$ ранг этой расширенной матрицы в ступенчатом виде. Тогда:

1) СЛУ совместна $\Leftrightarrow r = \widetilde{r}$;
2) СЛУ несовместна $\Leftrightarrow r < \widetilde{r}$;
3) СЛУ определена $\Leftrightarrow r = \widetilde{r} = n$;
4) СЛУ неопределена $\Leftrightarrow r = \widetilde{r} < n$;

$\square$

1) Доказали в методе Гаусса;
2) Доказали в методе Гаусса;
3) Пусть СЛУ совместна, тогда верно:

$$|\#\text{ свободных неизвестных в ней}| = |\#\text{ неизвестных}| - |\#\text{ главных неизвестных}| = n - r$$

   СЛУ определена $\Leftrightarrow$ нет свободных неизвестных, поскольку все решения системы получаются подстановкой в общее решение произвольных значений свободных неизвестных, а если все неизвестные главные, то подставлять нечего и решение будет единственным, в противном случае можно подставлять разные значения и получать разные решения. Все неизвестные - главные $\Leftrightarrow n = r$.

4) Следует сразу из 3).

$\blacksquare$

Пример: Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 11 \\ 4x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 17x_4 = 21 \end{cases} \Rightarrow \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 8 & 13 & 17 & 21 \end{array}\right)$$

Обнулим все коэффициенты под лидером первой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 7 & 9 & 11 \end{array}\right) + (-2)\cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & 13 & 17 & 21 \end{array}\right) + (-4)\cdot \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

В результате получим ступенчатый вид матрицы и перейдем к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 8 & 13 & 17 & 21 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы коэффициентов и равен 2 $\Rightarrow$ система совместна, но число неизвестных равно 4 $\Rightarrow$ СЛУ будет неопределена. Заметим, что: x_1, x_3 - главные неизвестные, x_2, x_4 - свободные неизвестные, тогда общее решение будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 &= 2 - 2x_2 - x_4 \\ x_3 &= 1 - x_4 \end{cases}$$

Пусть: $x_2 = x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 1 = 0$, $x_1 = 2 - 2 - 1 = -1 \Rightarrow (-1, 1, 0, 1)$ - пример частного решения.

Опр: 24. Однородной системой линейных уравнений (ОСЛУ) называется СЛУ следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Утв. 3. У ОСЛУ всегда существут нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то есть эта система всегда совместна.

$\square$ Подстановкой нулевого решения все уравнения становятся верными равенствами. $\blacksquare$

Утв. 4. ОСЛУ, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных: $m < n$, всегда имеет ненулевое решение.

$\square$ Приведем ОСЛУ к ступенчатому виду $\Rightarrow$ расширенная матрица отличается только нулевым столбцом справа $\Rightarrow$ ранги обычной и расширенной матриц совпадают, но ранг ступенчатой матрицы заведомо не превосходит количества строк в этой матрице (ранг это число ненулевых строк): $r = \widetilde{r} \leq m < n \Rightarrow$ по утверждения 2 СЛУ неопределена $\Rightarrow$ у неё больше одного решения, нулевое решение уже известно $\Rightarrow$ существует ненулевое решению. $\blacksquare$