Комплексные числа

Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $R > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, извлекаем корни так:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right) \middle| k = 0, 1 \ldots, n-1 \right\}$$

Все эти числа лежат на одной окружности радиуса $\sqrt[n]{R}$ с центром в 0 и чтобы получить все их аргументы, мы берём какой-то аргумент исходного числа z, делим его на n частей (делим угол на n частей) и затем откладываем от этой части вершины правильного n-угольника на той же окружности.

Пример: $z = \sqrt[3]{i}$, построим корни геометрически. $|z| = 1$, корни всех степеней лежат на той же единичной окружности, $\arg i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ делим его на 3 равные части $\Rightarrow \frac{\pi}{6}$ и откладываем углы $\frac{2\pi}{3}$ в обе стороны. Тогда мы получим:

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ -i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right\}$$

Можно тоже самое записать по формуле Муавра. В простых случаях проще на картинке.

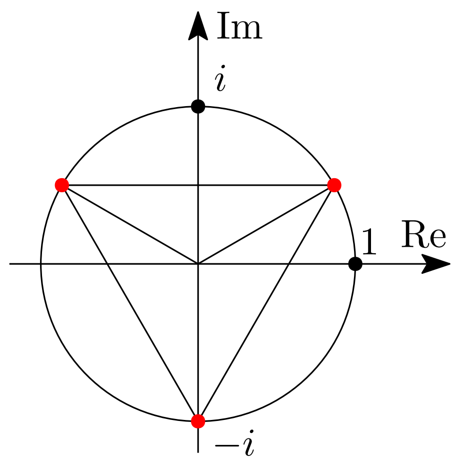


Рис. 1: Геометрический поиск корней.

Пусть $w \in \sqrt[n]{z}$, тогда нужно домножить w на числа с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$, которые будут в множестве:

$$\left\{ \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \middle| k = 0, 1 \ldots, n-1 \right\} = \sqrt[n]{1}$$

$$w = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha k}{n}\right) \Rightarrow w\cdot\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)$$

где последнее верно в силу того, что при перемножении комплексных чисел их аргументы складываются. Следовательно:

$$w \in \sqrt[n]{z} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = w\cdot\sqrt[n]{1}$$

Таким образом, умножить на n-ый корень из единицы $\Leftrightarrow$ отложить вершины правильного n-угольника.

Задача 1. (**K22.7**)

л) $\sqrt[6]{-27}$

□ $\sqrt[6]{-27} = \left\{ \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \middle| k = 0, 1, \ldots, 5 \right\}$. Геометрически это будет правильный 6-угольник у которого две вершины будут равны $\pm i\sqrt{3}$. ■

Задача 2. (К22.7)

м) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$

□

$$R = |8\sqrt{3}i - 8| = 8|\sqrt{3}i - 1| = 4^2 = 2^4 \Rightarrow \sqrt[4]{R} = 2,\ 8\sqrt{3}i - 8 = 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = \left\{ 2\left(\cos \frac{\pi + 3\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 3\pi k}{6} \right) \middle| k = 0, 1, 2, 3 \right\}$$

■

Свойства корней в комплексных числах

В $\mathbb{R}$: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если n-чётно, то накладывается ограничение $a, b \geq 0$.

В $\mathbb{C}$: $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ понимается, как равенство множеств. Произведение множеств это множество всевозможных произведений.

□ Пусть $u \in \sqrt[n]{z}$, $v \in \sqrt[n]{w}$, тогда $uv \in \sqrt[n]{zw}$, где верно:

$$uv \in \sqrt[n]{zw} \Leftrightarrow (uv)^n = u^n w^n = zw$$

$$\sqrt[n]{zw} = uv\sqrt[n]{1},\ \sqrt[n]{z} = u\sqrt[n]{1},\ \sqrt[n]{w} = v\sqrt[n]{1}$$

Подставляем в $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{w}$ и получаем, что нам надо доказать $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1} \cdot \sqrt[n]{1}$. Введем обозначение:

$$\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{1} = \left\{1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{n-1}\right\} = \{\varepsilon_n^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\forall k, l \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_n^k \cdot \varepsilon_n^l = \varepsilon_n^{k+l} = \varepsilon_n^{k+l \pmod n} \Rightarrow \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{1} \subset \sqrt[n]{1}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_n^k = \varepsilon_n^k \cdot 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1} \subset \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{1}$$

■

Говорят, что множество: $\left\{1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{n-1}\right\} = \{\varepsilon_n^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ замкнуто относительно умножения. По сути оно является группой по умножению: содержит единицу и для любого элемента есть обратный:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ (\varepsilon_n^k)^{-1} = \varepsilon_n^{-k},\ \varepsilon_n^k \cdot \varepsilon_n^{-k} = \varepsilon_n^{k-k} = \varepsilon_n^0 = 1$$

Геометрически, ε_n^{-k} находится под ε_n^k, то есть это тоже самое, что и комплексно сопряженное число.

Если два комплексных числа в произведении дают единицу, значит их аргументы противоположны. В нашем случае, поскольку модули у чисел равны единице, то они лежат на одной окружности.

$$z^{-1} = \overline{z} \Leftrightarrow |z| = 1$$

Вывод: для единичной окружности обратное число на ней совпадает с его сопряженным.

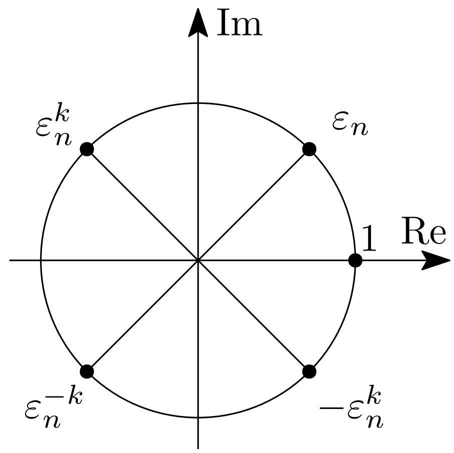


Рис. 2: Корни из единицы.

Задача 3.

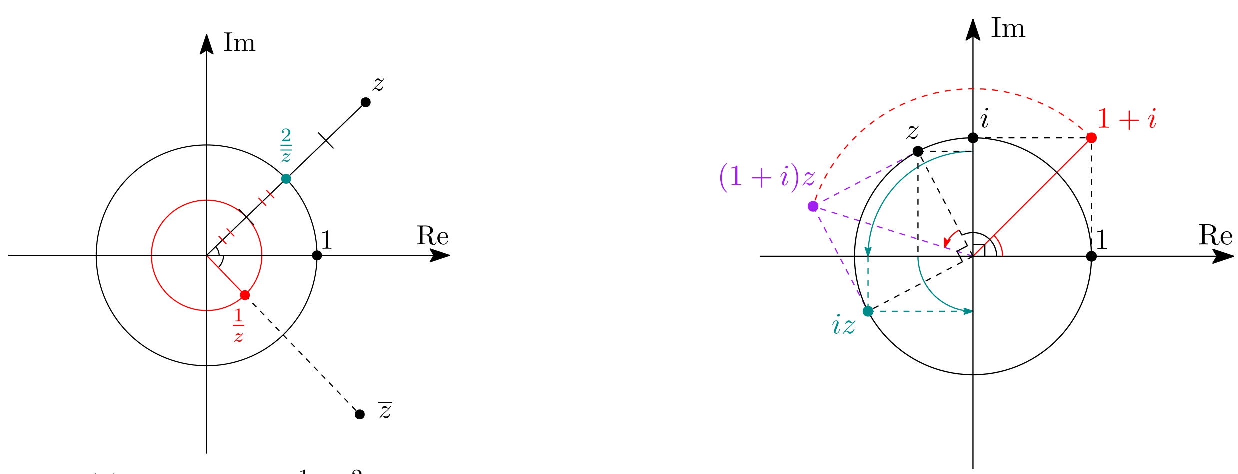
a) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 2$, с помощью циркуля и линейки построить числа: $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{2}{\overline{z}}$;

b) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, с помощью циркуля и линейки построить числа: iz, $(1+i)z$;

$\square$

$|z| = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{4}\overline{z} \Rightarrow$ длина уменьшится в 4 раза и число будет отражено по реальной оси.

$\dfrac{2}{\overline{z}} = \dfrac{2z}{|z|^2} = \dfrac{1}{2}z \Rightarrow$ длина уменьшится в 2 раза и число будет на единичной окружности.



(a) Построение $\frac{1}{z}$ и $\frac{2}{\overline{z}}$.

(b) Построение iz и $(1+i)z$.

Равенство с домножением на сопряженные можно компактно записывать так:

$$z\overline{z} = |z|^2 \Rightarrow \overline{z} = \frac{|z|^2}{z},\ \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Для z поворт на 90° это iz: $z = a + ib \in \mathbb{Z} \Rightarrow iz = ia + i^2 b = ia - b = -b + ia$.

$|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$ поворот на 45° и гомотетия: $|(1+i)z| = |1+i|\cdot|z| = \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. Но можно сделать попроще: $(1+i)z = z + iz \Rightarrow$ просто векторное сложение. ■

Рассмотрим два корня на единичной окружности: $\sqrt{z}$ и $\sqrt[4]{z^2}$, сколько у них будет значений? У первого будет 2 корня, у второго 4. При этом:

$$\sqrt{z} \subset \sqrt[4]{z^2} \subset \mathcal{U} = \{z \mid |z| = 1\}$$

$$w \in \sqrt{z} \Rightarrow w^2 = z \Rightarrow w^4 = z^2 \Rightarrow w \in \sqrt[4]{z}$$

Геометрически, если z лежит на единичной окружности, то чтобы получить его корень, надо поделить угол пополам и прибавить π, чтобы получить второй угол.

Когда есть корень 4-ой степени, значит значения лежат в вершинах квадрата. Две симметричные вершины уже построили, поэтому для получения всех корней $\sqrt[4]{z^2}$ строим перпендикуляр к прямой соединяющей предыдущие два корня и строим правильный квадрат.

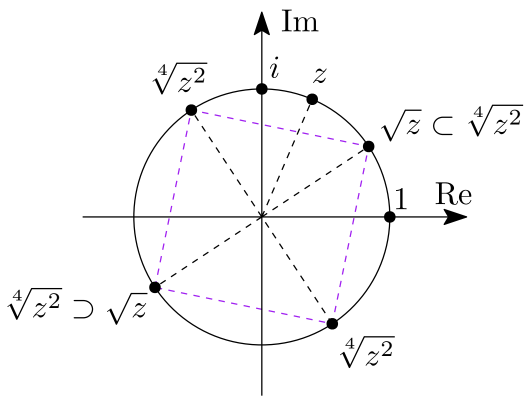


Рис. 4: Сравнение корней: $\sqrt{z}$ и $\sqrt[4]{z^2}$.

Задача 4. Изобразить множество корней $\sqrt[8]{1} \setminus \sqrt[4]{1}$.

□ На рисунке множество требуемых корней изображено красными точками. Один из корней в алгебраической форме: $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

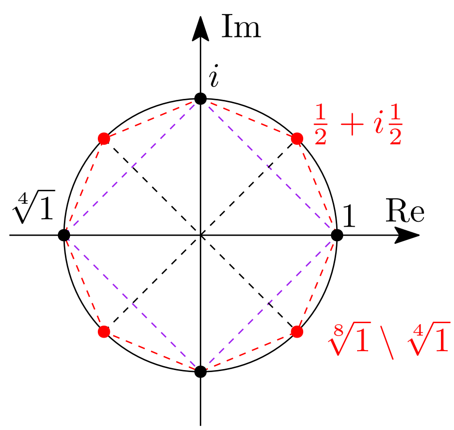


Рис. 5: Множество корней: $\sqrt[8]{1} \setminus \sqrt[4]{1}$.

■

Задача 5. (**К21.10**) Если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, тогда $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\varphi)$.

$\square$

$$z + z^{-1} = 2\cos\varphi \Leftrightarrow z^2 - 2\cos\varphi + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 2\cos\varphi + 1 = (z - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi =$$
$$= (z - \cos\varphi - i\sin\varphi)(z - \cos\varphi + i\sin\varphi) = 0 \Rightarrow z = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^n = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi),\ z^{-n} = \cos(n\varphi) \mp i\sin(n\varphi) \Rightarrow z^n + z^{-n} = 2\cos(n\varphi)$$

$\blacksquare$

Задача 6. (**К21.1 х)**) $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

$\square$

$$z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow |z| = \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi}$$
$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\tfrac{\varphi}{2},\ \varphi \in (-\pi, \pi) \Rightarrow \tfrac{\varphi}{2} \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \arg z = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\tfrac{\varphi}{2} \Rightarrow \alpha = \tfrac{\varphi}{2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2 + 2\cos\varphi} = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow z = 2\cos\tfrac{\varphi}{2}\left(\cos\tfrac{\varphi}{2} + i\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)$$

Как можно было сделать представление по-другому? Например, через сложение векторов на единичной окружностия:

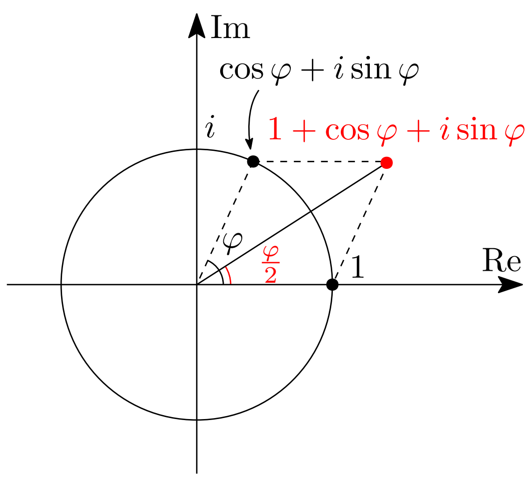


Рис. 6: Представление числа: $z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Поскольку стороны равны, то мы получаем ромб и его диагональ это биссектрисса угла $\Rightarrow \arg z = \frac{\varphi}{2}$. $\blacksquare$

Задача 7. $\sqrt[5]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4\}$. Как вычислить $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$?

$\square$

$$\varepsilon = \varepsilon_5 = \cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5}$$

Ключевая идея:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$$

Геометрическое объяснение: Пусть эта сумма не ноль, а какой-то вектор, повернем его на угол $\frac{2\pi}{5}$, тогда все векторы перейдут друг в друга $\Rightarrow$ их сумма должна перейти в себя. С другой стороны, если все векторы повернулись на один угол, то их сумма повернулась на тот же угол $\Rightarrow$ противоречие.

Алгебраическое объяснение: Можно увидеть из суммы геометрической прогрессии:

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4) = 1-\varepsilon^5 = 0,\ 1-\varepsilon \neq 0 \Rightarrow 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4 = 0$$

И тут можно заметить, что оно связано с геометрическим, поскольку уменожение на 1 ничего не дает, а умножение на ε делает сдвиг на $\frac{2\pi}{5}$.

Теорема Виета: Поскольку мы суммируем корни двучлена: x^5-1, то их сумма равна коэффициенту при одночлене x^4, то есть равна 0: $x^5+0{\cdot}x^4+0{\cdot}x^3+0{\cdot}x^2+0{\cdot}x-1$.

Итого, поскольку сумма чисел из $\mathbb{C}$ равна 0, то и сумма их действительных частей равна 0: сумма векторов равна $0 \Rightarrow$ сумма их проекций на любую ось равна 0, в частности на ось Re, тогда:

$$\mathrm{Re}(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4) = 1+\cos\frac{2\varphi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\varphi}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5} = 1+2c+2(2c^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^2+2x-1=0 \Rightarrow c = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} > 0 \Rightarrow c = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

А если бы мы обозначили за $c=\cos\frac{4\pi}{5}$, то было бы верно: $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} = 2c^2-1$ и мы бы получили тот же результат, но:

$$c = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} < 0 \Rightarrow c = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{4\pi}{5}$$

■

Rm: 1. Заметим также, что $\cos\frac{4\pi}{5}$ получается преобразованием в число золотого сечения (взять с обратным знаком и умножить на 2).

Биномиальные коэффициенты

Известна формула бинома Ньютона:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Как найти сумму всех коэффициентов?

Задача 8. Чему равна сумма:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

□ Подставим в биноме Ньютона вместо x единицу, тогда:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

■

Все биномиальные коэффициенты можно увидеть в треугольнике Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Такое возможно благодаря следующему тождеству:

Утв. 1.

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ C_n^0 = C_n^n = 1$$

□ Это тождество можно проверить через факториалы, но можно и исходя из комбинаторной логики, поскольку C_n^k означает количество способов выбрать k элементов из n: пусть у нас $n+1$ шар, один из которых черный, остальные - белые. Любое сочетание может либо включать черный шар, либо не включать, если оно не включает, то нам надо выбрать k белых шаров, если же включает, то надо выбрать $k-1$ белый шар. ■

Задача 9. Чему равна знакопеременная сумма:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$$

□ Аналогично нашему первому вопросу, возникает вопрос

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$$

■

Таким образом, мы можем эти суммы сложить и вычесть. Получим в результате:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$$

Комбинаторный смысл этого заключается в том, что в n-элементном множестве подмножеств из четного числа элементов и из нечётного поровну (всего подмножеств в n-элементном множестве равно 2^n).

Задача 10. Чему равна сумма с шагом 3:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$$

□ Докажем, что верна следующая формула:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi n}{3} \sim \frac{2^n}{3}$$

С первого взгляда это не очень очевидно, как можно сделать. Заметим, что 1 это корень 1-ой степени из единицы, -1 это корень 2-ой степени из единицы, теперь (когда берём с шагом 3) будем подставлять корень 3-ьей степени из единицы. Если обозначим все корни: $\sqrt[3]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, то:

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + C_n^3 + C_n^4\varepsilon + C_n^5\varepsilon^2 + \ldots = S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon_2$$

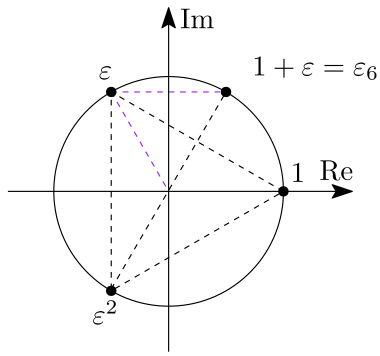


Рис. 7: Корень из единицы 3-ей степени.

$$\mathrm{Re}(\varepsilon)=\mathrm{Re}(\varepsilon^2)=-\tfrac{1}{2}\Rightarrow\mathrm{Re}((1+\varepsilon)^n)=S_0-\tfrac{1}{2}(S_1+S_2)$$

Также заметим, что $1+\varepsilon=\varepsilon_6$, для других n так уже могло не получитсься, а здесь получается правильный 6-угольник. Мы можем воспользоваться формулой Муавра:

$$1+\varepsilon=\varepsilon_6\Rightarrow\varepsilon_6^n=(1+\varepsilon)^n=\cos\tfrac{\pi n}{3}+i\sin\tfrac{\pi n}{3}$$

Заметим также, что:

$$S_0+S_1+S_2=2^n\Rightarrow 2S_0-S_1-S_2+S_0+S_1+S_2=2\cos\tfrac{\pi n}{3}+2^n\Rightarrow S_0=\frac{2^n}{3}+\frac{2}{3}\cos\tfrac{\pi n}{3}$$

■

Задача 11. Чему равна сумма с шагом 4:

$$C_n^0+C_n^4+C_n^8+\dots$$

□ В данном случае в качестве x возьмем i, тогда:

$$(1+i)^n=(C_n^0+C_n^4+C_n^8+\dots)+i(C_n^1+C_n^5+\dots)-(C_n^2+C_n^6+\dots)-i(C_n^3+C_n^7+\dots)=$$

$$=S_0+iS_1-S_2-iS_3\Rightarrow\mathrm{Re}((1+i)^n)=S_0-S_2=2^{n/2}\cos\tfrac{n\pi}{4}$$

$$S_0+S_2=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\dots=2^{n-1}\Rightarrow 2S_0=2^{n-1}+2^{n/2}\cos\tfrac{n\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_0=2^{n-2}+2^{n/2-1}\cos\tfrac{n\pi}{4}\sim 2^{n-2}=\frac{1}{4}2^n$$

■

Упр. 1. Доказать, что:

$$C_n^0+C_n^l+C_n^{2l}+\dots\sim\frac{1}{l}2^n$$