Связь функционального и формального равенства

Пусть K - поле. Два многочлена с коэффициентами в этом поле:

$$f = \sum_{k \geq 0} a_k \cdot x^k, g = \sum_{k \geq 0} b_k \cdot x^k \in K[x]$$

Опр: 1. Многочлены $f, g \in K[x]$ функционально равны, если верно: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(c) = g(c), \forall c \in K$.

Опр: 2. Многочлены $f, g \in K[x]$ формально равны, если верно: $\forall k \geq 0$, $a_k = b_k$.

Утв. 1. Пусть K - бесконечное поле, тогда функциональное равенство многочленов эквивалентно их формальному равенству:

$$f(c) = g(c),\ \forall c \in K \Leftrightarrow f = g,\ a_k = b_k,\ \forall k \geq 0$$

Если K - конечное поле, то из формального равенства следует функциональное.

□
($\Leftarrow$) Если многочлены равны покоэффициентно, то подставляя вместо x любое значение, мы получаем равенство значений - очевидно.

($\Rightarrow$) Можно считать, что и f, и g являются суммами одночленов до степени n:

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

Выберем $n+1$ различных элементов: $x_0, x_1, \ldots, x_n \in K$, это всегда можно сделать для сколь угодно большого n, в силу бесконечности поля K. Положим:

$$\forall i = \overline{0, n},\ y_i = f(x_i) = g(x_i)$$

Поскольку $\deg(f), \deg(g) \leq n$, то по теореме об интерполяции $f = g$, поскольку существует ровно один многочлен степени меньше $n+1$, который принимает в заданных $n+1$ точках заданные значения. ■

Деление с остатком

Теорема 1. (**О делении многочленов с остатком**) Пусть K - поле, тогда:

$$\forall f, g \in K[x],\ g \neq 0,\ \exists!\, q, r \in K[x]\colon f = g \cdot q + r,\ \deg(r) < \deg(g)$$

где f называется делимым, g - делителем, q - неполным частным, а r - остатком. В частности, если остатка нет: $r = 0$, то тогда говорят, что f делится на g, или g делит f (нацело, без остатка).

Обозначение: $f \vdots g$ или $g \mid f$.

Rm: 1. Если степень нулевого многочлена не определена как $-\infty$, то последнее условие необходимо заменить на $\deg(r) < \deg(g) \vee r = 0$.

□
Существование: Рассмотрим несколько случаев:

1) Если $f = 0 \Rightarrow$ очевидно: $q = r = 0$.

2) Пусть $f \neq 0$, обозначим: $\deg(f) = n$, $\deg(g) = m$, тогда:

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0, \quad g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ b_m \neq 0$$

Рассмотрим несколько случаев и воспользуемся индукцией.

<u>База индукции</u>: $n = 0$, рассмотрим случаи:

(1) Пусть $m > 0$, тогда: $q = 0$, $r = f \Rightarrow$ условие выполнено;

(2) Пусть $m = 0 \Rightarrow f = a_0 \neq 0$, $g = b_0 \neq 0 \Rightarrow q = \dfrac{a_0}{b_0}$, $r = 0$;

<u>Шаг индукции</u>: Пусть верно для $n - 1 > 0$, тогда покажем для n:

(1) Пусть $n < m$, тогда: $q = 0$, $r = f \Rightarrow$ условие выполнено;

(2) Пусть $n \geq m$, тогда возьмем g и умножим на одночлен $c{\cdot}x^{n-m}$ так, чтобы:

$$g{\cdot}c{\cdot}x^{n-m} = a_n x^n + \text{младшие члены} \Rightarrow c = \frac{a_n}{b_m}$$

Возьмем соответствующую разность:

$$f - g{\cdot}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} = \widetilde{f} \Rightarrow \deg\left(\widetilde{f}\,\right) \leq n - 1$$

Следовательно, возможны две ситуации:

a) $\widetilde{f} = 0 \Rightarrow q = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$, $r = 0$;

b) $\widetilde{f} \neq 0 \Rightarrow$ по предположению индукции $\widetilde{f} \,\vdots\, g$: $\widetilde{f} = g{\cdot}\widetilde{q} + \widetilde{r}$, $\deg(r) < \deg(g)$, тогда:

$$f = \widetilde{f} + g{\cdot}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} = g\cdot\underbrace{\left(\frac{a_n}{b_m} + \widetilde{q}\right)}_{=q} + r$$

<u>**Единственность**</u>: Пусть $f = g{\cdot}q_1 + r_1 = g{\cdot}q_2 + r_2$, где $\deg(r_i) < \deg(g)$, $i = 1, 2$. Вычтем одно выражение из другого, тогда:

$$g{\cdot}(q_1 - q_2) = r_2 - r_1,\ \deg(r_2 - r_1) < \deg(g),\ \deg(g{\cdot}(q_1 - q_2)) = \deg(g) + \deg(q_1 - q_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \deg(g{\cdot}(q_1 - q_2)) \geq \deg(g) \vee g(q_1 - q_2) = 0,\ \deg(g{\cdot}(q_1 - q_2)) < \deg(g) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g{\cdot}(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2, \quad \deg(g) \neq 0 \Rightarrow q_1 - q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = q_2$$

■

Теорема Безу

Рассмотрим частный случай теоремы деления с остатком - деление на линейный двучлен.

Теорема 2. (**Безу**) Пусть $f \in K[x]$, $x_0 \in K$, тогда

$$f(x) = (x - x_0){\cdot}q(x) + f(x_0)$$

□ По теореме о делении с остатком, мы можем представить многочлен f в виде:

$$f(x) = (x - x_0){\cdot}q(x) + c,\ \deg(c) < \deg(x - x_0) = 1 \Rightarrow \deg(c) = 0 \vee \deg(c) = -\infty \Rightarrow c \in K$$

Подставим в это равенство x_0, тогда мы получим:

$$f(x_0) = (x_0 - x_0){\cdot}q(x_0) + c = c$$

■

Опр: 3. Корнем многочлена $f \in K[x]$ называется такой элемент $x_0 \in K$, что $f(x_0) = 0$.

Следствие 1. x_0 это корень f тогда и только тогда, когда $f(x) \vdots (x - x_0)$.

□ Следует сразу из теоремы Безу. ■

Данное следствие позволяет уточнить понятие корня многочлена, поскольку многочлен может делиться не только на $x - x_0$, но и на $(x - x_0)^2$, $(x - x_0)^3$ или вообще $(x - x_0)^k$.

Опр: 4. Кратностью x_0 в $f \in K[x]$ называется наибольшее $k \geq 0$ такое, что:

$$f(x) \vdots (x - x_0)^k \wedge f(x) \not\vdots (x - x_0)^{k+1}$$

Или по-другому:

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot q(x),\ q(x_0) \neq 0$$

Опр: 5. Корни многочлена f кратности 1 называются простыми корнями f.

Опр: 6. Корни многочлена f кратности ≥ 1 называются кратными корнями f.

Отметим, что при $k = 0$, x_0 - не корень f, поскольку $(x - x_0)^0 = 1$, $f(x) \vdots 1$ и $f(x) \not\vdots (x - x_0)$.

Теорема 3. Число корней многочлена $f \neq 0$, с учётом их кратностей (т.е. каждый корень считается столько раз, какова его кратность) не превосходит степени этого многочлена $\deg(f)$.

Rm: 2. В частности, теорема говорит о том, что число корней - конечно.

□ Индукцией по $\deg(f) = n$.

База индукции: $n = 0 \Rightarrow f \in K$, $f \neq 0 \Rightarrow f$ не имеет корней.

Шаг индукции: Если f не имеет корней, то утверждение верно. Иначе, пусть $x_0 \in K$ - корень многочлена f, k_0 - его кратность, тогда:

$$f(x) = (x - x_0)^{k_0} \cdot g(x),\ g(x_0) \neq 0,\ \deg(g) = \deg(f) - k_0 < n$$

По индукции, многочлен g имеет конечное число корней $x_1, \ldots, x_m$ и если $k_1, \ldots, k_m$ - их кратности, то:

$$k_1 + \ldots + k_m \leq \deg(g) = n - k_0$$

Следовательно, $x_0, x_1, \ldots, x_m$ - это все корни многочлена f и их суммарная кратность $\leq n$:

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_m \leq k_0 + (n - k_0) = n = \deg(f)$$

■

Производные многочленов

Пусть $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$.

Опр: 7. Формальной производной многочлена f называется многочлен вида:

$$f' = a_1 + 2a_2{\cdot}x + 3a_3{\cdot}x^2 + \ldots + na_n{\cdot}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k{\cdot}a_k{\cdot}x^{k-1}$$

Такая производная определяется над любыми полем K по формуле выше. Но если $K = \mathbb{R}$, то значение этой формальной производной в $x_0 \in \mathbb{R}$ это настоящая производная полиномиальной функции $f(x)$ в смысле математического анализа:

$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

Но над произвольным полем K, понятие предела не имеет смысла $\Rightarrow$ f' над этим полем определяется формально. Далее, "формально" мы будем опускать и говорить просто производная.

Утв. 2. Свойства производной

1) $\forall f, g \in K[x]$, $(f + g)' = f' + g'$;

   $\square$ Пусть $n = \max(\deg(f), \deg(g))$, коэффициенты при степени больше своей будем считать нулевыми, тогда:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f + g)' = (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + \ldots + n(a_n + b_n)x^{n-1}$$
$$f' + g' = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + b_1 + 2b_2x + \ldots + nb_nx^{n-1} = (f + g)'$$

$\blacksquare$

2) $\forall \lambda \in K$, $\forall f \in K[x]$, $(\lambda{\cdot}f)' = \lambda{\cdot}f'$;

   $\square$

$$(\lambda{\cdot}f)' = (\lambda{\cdot}a_1) + 2(\lambda{\cdot}a_2) + \ldots + n(a_n{\cdot}\lambda)x^{n-1} = \lambda{\cdot}(a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}) = \lambda{\cdot}f'$$

$\blacksquare$

3) $\forall f, g \in K[x]$, $(f{\cdot}g)' = f'{\cdot}g + f{\cdot}g'$ (**правило Лейбница**);

   $\square$ Пусть $f = \sum\limits_{k \geq 0} a_kx^k$, $g = \sum\limits_{l \geq 0} b_l{\cdot}x^l$, перемножим их:

$$f{\cdot}g = \sum_{k,l \geq 0} a_kb_lx^{k+l} \Rightarrow (f{\cdot}g)' = \sum_{k,l \geq 0} a_kb_l(k + l)x^{k+l-1} =$$

$$= \left|a_kb_l(k + l)x^{k+l-1} = ka_kx^{k-1}b_lx^l + a_kx^klb_lx^{l-1}\right| = \sum_{k>0,l\geq 0} ka_kx^{k-1}b_lx^l + \sum_{k\geq 0,l>0} a_kx^klb_lx^{l-1} =$$

$$= \sum_{k>0} ka_kx^{k-1} \sum_{l\geq 0} b_lx^l + \sum_{k\geq 0} a_kx^k \sum_{l>0} lb_lx^{l-1} = f'{\cdot}g + f{\cdot}g'$$

$\blacksquare$

4) $\forall f_1, \ldots, f_k \in K[x]$, $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k'$;

$\square$ Индукцией по числу множителей:

База индукции: $n = 2 \Rightarrow$ верно по правилу Лейбница.

Шаг индукции: Пусть утверждение верно для k, покажем верность для $k+1$:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1})' = (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k)' \cdot f_{k+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1}' =$$
$$= (f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k') \cdot f_{k+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1}' =$$
$$= f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1} + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1} + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k' \cdot f_{k+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \cdot f_{k+1}'$$

$\blacksquare$

5) $\forall f \in K[x]$, $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$;

$\square$ Воспользуемся свойством 4), подставив $f_1 = f_2 = \ldots = f_k = f$, тогда:

$$(f^k)' = \underbrace{f' \cdot f^{k-1} + f' \cdot f^{k-1} + \ldots + f' \cdot f^{k-1}}_{k} = k \cdot f' \cdot f^{k-1}$$

$\blacksquare$

6) $\big((x - x_0)^k\big)' = k(x - x_0)^{k-1}$;

$\square$ Следует сразу из свойства 5) при подстановке $f = (x - x_0)$, поскольку $f' = 1$. $\blacksquare$

Rm: 3. Свойства 1) и 2) дают линейность производной.

Опр: 8. Высшей производной многочлена f называется многочлен, получаемый по индукции:

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)', \; f^{(0)} = f$$

Связь производной с корнями многочлена и их кратностями

Утв. 3.

1) Для любого поля K, $x_0 \in K$ - кратный корень $f \in K[x] \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) = 0$;
2) Пусть $\operatorname{char} K = 0$, тогда верно следующее:

$$x_0 \text{ - корень } f \text{ кратности } k \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

То есть, кратность корня многочлена над полем нулевой характеристики это наименьший порядок высшей производной этого многочлена, которая в этой точке не обращается в ноль;

Rm: 4. Таким образом, с помощью высших производных можно найти кратность корня для поля нулевой характеристики, а над полем любой характеристики можно с помощью производной (первого порядка) выяснить является ли корень кратным или является простым корнем.

$\square$ Пусть k - кратность x_0 в f, тогда f представим в виде:

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x), \; g(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = k(x - x_0)^{k-1} \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot g'(x) = (x - x_0)^{k-1} \cdot \big(\underbrace{kg(x) + g'(x) \cdot (x - x_0)}_{h(x)}\big)$$

1) Пусть $k > 1$, тогда:
$$k - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) \vdots (x - x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$
Пусть $k = 1$, тогда:
$$f'(x_0) = h(x_0) = 1{\cdot}g(x_0) + g'(x){\cdot}0 = g(x_0) \neq 0$$

2) Рассмотрим $h(x_0) = k{\cdot}g(x_0)$, k - это сумма k единиц в нашем поле, поскольку характеристика поля нулевая, то $k \neq 0$ в K. Если бы $k = 0$, то мы получли бы $h(x_0) \Rightarrow x_0$ - корень для $h(x) \Rightarrow$ кратность была бы выше, чем $k - 1$ у x_0 в многочлене $f'(x)$.

   Следовательно, $h(x_0) \neq 0$ и кратность x_0 в $f'(x)$ равна $k - 1$. Аналогично, кратность x_0 в $f''(x)$ равна $k - 2$, в $f'''(x)$ равна $k - 3$ и так далее. Кратность в $f^{(k-1)}(x)$ равна 1 и кратность в $f^{(k)}(x)$ равна 0. В результате, получим требуемое:
$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \wedge f^{(k)}(x_0) = 0$$

■

Разложение многочлена по степеням линейного двучлена

Утв. 4. $\forall x_0 \in K$, $K[x] = K[x - x_0]$, то есть $\forall f \in K[x]$, $f \neq 0$, $\exists!$ разложение:
$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c^2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n,\ c_n \neq 0$$

□

Существование: Предположим, что:
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
где $a_n \neq 0$. Обозначим через $y = x - x_0 \Rightarrow x = y + x_0$, тогда:
$$f(x) = a_0 + a_1(y + x_0) + a_2(y + x_0)^2 + \ldots + a_n(y + x_0)^n = c_0 + c_1y + c_2y^2 + \ldots + c_ny^n$$
где в последнем равенстве мы раскрыли скобки и привели подобные члены по y. Таким образом, мы выразили многочлен f в виде линейной комбинации степеней $y = (x - x_0)$.

Единственность: Проведём индукцию по $n = \deg(f)$:

База индукции: $n = 0 \Rightarrow f(x) = a_0 = f(x - x_0) = c_0$ - очевидно.

Шаг индукции: Пусть утверждение верно для $n - 1$, покажем верность для n. Раскроем скобки и приведем подобные члены по x:
$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = c_n{\cdot}x^n + \text{младшие члены} \Rightarrow c_n = a_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widetilde{f}(x) = f(x) - c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}$$
Многочлен $\widetilde{f}$ определён однозначно, поскольку $f(x)$ - определён однозначно и коэффициент c_n также однозначно определён по $f \Rightarrow$ набор коэффициентов: $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ - также определён однозначно по предположению индукции. ■

Утв. 5. Пусть $f(x) = \sum\limits_{l\geq 0} c_l(x-x_0)^l$, тогда $\forall k \geq 0$, $f^{(k)}(x_0) = c_k{\cdot}k!$.

□ Продифференцируем наш многочлен k раз, а поскольку операция дифференцирования - линейная, то достаточно продифференцировать каждый одночлен:

$$\left[(x-x_0)^l\right]^{(k)} = \begin{cases} l{\cdot}(l-1){\cdot}(l-2){\cdot}\ldots{\cdot}(l-k+1){\cdot}(x-x_0)^{l-k}, & k > l \\ l{\cdot}(l-1){\cdot}(l-2){\cdot}\ldots{\cdot}1 = k!, & k = l \\ 0, & k < l \end{cases}$$

Тогда, продифференцировав сам многочлен, мы получим:

$$f^{(k)}(x) = \sum_l c_l{\cdot}\left[(x-x_0)^l\right]^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = 0 + \ldots + c_k{\cdot}k! + \ldots + 0 = c_k{\cdot}k!$$

■

Следствие 2. (**Формула Тейлора**) Если $\operatorname{char} K = 0$, $f \in K[x]$, $\deg(f) = n$, то его можно разложить по степеням линейного двухчлена в следующем виде:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0){\cdot}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}{\cdot}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}{\cdot}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}{\cdot}(x-x_0)^k$$

□ Сразу следует из предыдущего утверждения, поскольку если $\operatorname{char} K = 0$, то $k! \neq 0$ и на него можно поделить $\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $\forall k \geq 0$. ■

Теорема о разложении на корни многочлена

Теорема 4. Пусть K - произвольное поле и $f \in K[x]$, тогда: число корней многочлена $f(x)$ с учетом кратностей равно $\deg(f) \Leftrightarrow f(x)$ разлагается над полем K на линейные множители.

□ Пусть $f(x)$ разложили в следующий вид:

$$f(x) = (x-x_0)^{i_0}{\cdot}(x-x_1)^{i_1}{\cdot}\ldots{\cdot}(x-x_k)^{i_k}{\cdot}q(x)$$

где у $q(x)$ нет корней над полем K, потому что $x_1, \ldots, x_k$ - не являются его корнями. Если у $q(x)$ был бы другой корень над K, то он был бы и корнем $f(x)$, а мы их все перечислили. Следовательно, чтобы $f(x)$ разлогался на линейные множители над полем K, необходимо:

$$q(x) \in K \Leftrightarrow \deg(q) = 0 \Leftrightarrow \deg(f) = \sum_{j=1}^{k} i_j$$

■