Матричная алгебра

Теорема 1. $\operatorname{rk}(A \cdot B) \le \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

□ Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,p} \Rightarrow C = A{\cdot}B \in \mathrm{Mat}_{m,p}$ и верно:

$$\forall i, j,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Если зафиксировать индекс i и менять индекс j, то мы получим элементы в i-ой строке матрицы C. Тогда, j-ый элемент i-ой строки матрицы C получается как линейная комбинация j-ых элементов строк матрицы B по $k = \overline{1,n}$ с коэффициентами a_{ik}:

$$C_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_k$$

Значит система строк: $\{C_1, \dots, C_m\}$ линейно выражается через систему строк: $\{B_1, \dots, B_n\}$, тогда:

$$\operatorname{rk} C = \operatorname{rk}\{C_1, \dots, C_m\} \le \operatorname{rk}\{B_1, \dots, B_n\} = \operatorname{rk} B$$

С рангом матрицы A ситуация аналогичная:

$$C^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)} b_{kj}$$

Следовательно, $\{C^{(1)}, \dots, C^{(p)}\}$ линейно выражается через $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$, тогда:

$$\operatorname{rk} C = \operatorname{rk}\{C^{(1)}, \dots, C^{(p)}\} \le \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$$

■

Упр. 1. $\operatorname{rk}(A + B) \le \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$

□ Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{m,n} \Rightarrow A + B \in \mathrm{Mat}_{m,n}$. Любая строка матрицы $A + B$ представляется в виде: $(a_{i1} + b_{i1}, \dots, a_{in} + b_{in}) \Rightarrow$ система строк имеет следующий вид:

$$\{A_1 + B_1, \dots, A_m + B_m\}$$

То есть это линейная комбинация системы строк обеих матриц:

$$\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$$

Тогда:

$$\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk}\{A_1 + B_1, \dots, A_m + B_m\} \le \operatorname{rk}\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$$

Пусть $e_a = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ - базис системы строк A и $e_b = \{B_{j_1}, \dots, B_{j_r}\}$ - базис системы строк B. Тогда будет верно: $|e_a| = \operatorname{rk} A$, $|e_b| = \operatorname{rk} B$. Пусть e_{ab} - базис системы строк $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$ составленный из векторов $e_a, e_b \Rightarrow$ очевидно, что $|e_{ab}| \le |e_a| + |e_b|$. Тогда:

$$\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk}\{A_1 + B_1, \dots, A_m + B_m\} \le \operatorname{rk}\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\} \le \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

■

Тождественное отображение

В прошлый раз мы посмотрели, что матрицы взаимнооднозначно связаны с линейными отображениями, в частности можно рассмотреть тождественное отображение.

Опр: 1. Тождественное отображение $\mathcal{E}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Утв. 1. Тождественное отображение линейно.

□ Это проверяется элементарно:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(x+y) = x + y = \mathcal{E}(x) + \mathcal{E}(y)$;
2) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(\lambda{\cdot}x) = \lambda{\cdot}x = \lambda{\cdot}\mathcal{E}(x)$;

■

Поскольку это линейное отображение, то ему соответсвтует некоторая матрица E. Матрица этого отображения определяется по общему правилу так: в столбцах этой матрицы стоят образы векторов стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ под действием этого отображения. А поскольку векторы переходят сами в себя, то там записаны стандартные базисные столбцы n-мерного пространства столбцов.

$$E = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & & j & & \end{matrix} &
\end{array}$$

Опр: 2. Матрица тождественного отображения называется единичной матрицей размера $n \times n$.

Опр: 3. Символом Кронекера назовем функцию вида: $\delta_{ij} = \delta(i,j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Элементы единичной матрицы являются символами Кронекера: $e_{ij} = \delta_{ij}$.

Утв. 2. (**основное свойство тождественного отображения**)

1) $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{E} = \mathcal{A}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;
2) $\mathcal{E}{\cdot}\mathcal{B} = \mathcal{B}$, $\forall \mathcal{B} \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$;

□

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{E}(x) = \mathcal{A}(\mathcal{E}(x)) = \mathcal{A}(x)$;
2) $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}{\cdot}\mathcal{B}(x) = \mathcal{E}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{B}(x)$;

■

В силу взаимнооднозначного соответствия, такое же свойство будет верно и для матриц.

Следствие 1. (**основное свойство единичной матрицы**)

1) $A{\cdot}E = A$, $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$;
2) $E{\cdot}B = B$, $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n,p}$;

Матричная единица

Опр: 4. Матричной единицей E_{ij} назовем квадратную матрицу у которой на ij-ом месте стоит 1, на остальных местах - нули:

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

Rm: 1. Всего таких матриц n^2 штук по числу элементов в квадртаной матрице размера $n \times n$.

Заметим, что любая квадратная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}$ представима в следующем виде:

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Лемма 1.

$$E_{ij}{\cdot}E_{kl} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ E_{il}, & j = k \end{cases}$$

□ Заметим, что: $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}{\cdot}\delta_{jl}$, тогда:

$$(E_{ij}{\cdot}E_{kl})_{sr} = \sum_{p=1}^{n} (E_{ij})_{sp}{\cdot}(E_{kl})_{pr} = \sum_{p=1}^{n} \delta_{is}\delta_{jp}\delta_{kp}\delta_{lr} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \text{ на месте } (i,l) \end{cases}$$

■

Обратные матрицы

Далее будем рассматривать квадратные матрицы размера $n \times n$. Множество таких матриц образует векторное пространство, будем записывать его так: $\mathrm{Mat}_{n,n} = \mathrm{Mat}_n$.

Опр: 5. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n$, матрица $B \in \mathrm{Mat}_n$ называется обратной к матрице A, если:

$$A{\cdot}B = B{\cdot}A = E$$

Опр: 6. Матрица A называется обратимой, если у неё существует обратная матрица.

Rm: 2. То есть понятие обратной матрицы это аналог понятия обратного числа.

Свойства обратных матриц

Утв. 3. Обратная к A матрица единственна (если она существует).

□ Пусть B, B' - обратные к A матрицы. Рассмотрим произведение:

$$(B{\cdot}A){\cdot}B' = E{\cdot}B' = B'$$

Поскольку произведение ассоциативно, то верно следующее:

$$(B{\cdot}A){\cdot}B' = B{\cdot}(A{\cdot}B') = B{\cdot}E = B \Rightarrow B = B'$$

■

Каноническое обозначение для обратной матрицы матрицы A: $B = A^{-1}$.

Утв. 4. Если матрица A соответствует линейному отображению $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то тогда A^{-1} соответствует обратному отображению: $\mathcal{A}^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое тоже будет линейно.

□ Если линейное отображение имеет обратное $\Rightarrow$ оно взаимнооднозначное и $x \in \mathbb{R}^n$ взаимнооднозначно переходит в $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{R}^n$, а поскольку отображение $\mathcal{A}$ - линейное, то:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y) = u + v \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) = w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(u+v) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x+y)) = x + y = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x)) + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(y)) = \mathcal{A}^{-1}(u) + \mathcal{A}^{-1}(v)$$
$$\mathcal{A}^{-1}(\lambda u) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda \mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\lambda x)) = \lambda x = \lambda \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(x)) = \lambda \mathcal{A}^{-1}(u)$$

То есть, обратное отображение тоже будет линейным. В силу взаимной однозначности, соответствие обратной матрице будет следовать из следующего свойства:

$$A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = E \Rightarrow \exists \mathcal{B}\colon \mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B} = \mathcal{B}{\cdot}\mathcal{A} = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$$

То есть два отображения обратны друг другу. ■

Следствие 2. Матрица A обратима $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ это обратимое (то есть взаимнооднозначное/биективное).

□ Следует сразу из утверждения выше. Но можем это ещё дополнительно проверить на основе определений, данных в предыдущей лекции.
$(\Rightarrow)$

$$\mathcal{A}(x) = A^{(1)}x_1 + \ldots + A^{(n)}x_n, \quad \mathcal{B}(x) = (A^{-1})^{(1)}x_1 + \ldots + (A^{-1})^{(n)}x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E^{(j)} = (A{\cdot}A^{-1})^{(j)} = \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_j)) = \mathcal{A}\left((A^{-1})^{(j)}\right) = \mathcal{A}((a^{-1})_{1j}e_1 + \ldots + (a^{-1})_{nj}e_n) =$$

$$= A^{(1)}{\cdot}(a^{-1})_{1j} + \ldots + A^{(n)}{\cdot}(a^{-1})_{nj} = e_j = \mathcal{E}(e_j),\ \forall j = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_1))x_1 + \ldots + \mathcal{A}(\mathcal{B}(e_n))x_n = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = x$$

$$E^{(j)} = (A^{-1}{\cdot}A)^{(j)} = \mathcal{B}(\mathcal{A}(e_j)) = e_j = \mathcal{E}(e_j),\ \forall j = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) = x$$

Таким образом, $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}{\cdot}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, то есть отображения обратные.

$(\Leftarrow)$ Пусть отображение $\mathcal{A}$ - обратимое, $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{E} \Rightarrow$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$:

$$A = (\mathcal{A}(e_1), \ldots, \mathcal{A}(e_n)) = \left(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\right)$$

Матрица B обратного линейного отображения будет иметь свойства:

$$B = \big(\mathcal{A}^{-1}(e_1), \ldots, \mathcal{A}^{-1}(e_n)\big) \Rightarrow (A{\cdot}B)^{(j)} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(e_j)) = \mathcal{E}(e_j) = e_j = E^{(j)},\ \forall j = \overline{1,n}$$

$$(B{\cdot}A)^{(j)} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(e_j)) = \mathcal{E}(e_j) = e_j = E^{(j)},\ \forall j = \overline{1,n} \Rightarrow A{\cdot}B = B{\cdot}A = E$$

А это и значит, что матрица линейного отображения обратима по определению. ■

Утв. 5. Пусть A, B - две обратимые матрицы. Тогда $A{\cdot}B$ тоже будет обратимо и будет верно:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}{\cdot}A^{-1}$$

□ Проверим, что $B^{-1}{\cdot}A^{-1}$ обратно к $A{\cdot}B$:

$$(AB){\cdot}(B^{-1}A^{-1}) = A{\cdot}(B{\cdot}B^{-1}){\cdot}A^{-1} = A{\cdot}E{\cdot}A^{-1} = A{\cdot}A^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1}){\cdot}(AB) = B^{-1}{\cdot}(A^{-1}{\cdot}A){\cdot}B = B^{-1}{\cdot}E{\cdot}B = B^{-1}{\cdot}B = E$$

■

Мы увидели, что если у матрицы существует обратная, то она единственна. У каких матриц существует обратная, как это понять?

Опр: 7. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_n$ называется невырожденной, если $\mathrm{rk}\, A = n$.

Теорема 2. Матрица $A \in \mathrm{Mat}_n$ обратима $\Leftrightarrow$ A невырождена.

□

($\Rightarrow$) Матрица обратима $\Rightarrow \exists\, A^{-1}\colon AA^{-1} = A^{-1}A = E$. По теореме 1 верно:

$$n = \mathrm{rk}\, E = \mathrm{rk}\,(AA^{-1}) \leq \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, A^{-1}\} \Rightarrow \mathrm{rk}\, A \geq n \wedge \mathrm{rk}\, A \leq n \Rightarrow \mathrm{rk}\, A = n$$

Таким образом, обратимая матрица невырождена.

($\Leftarrow$) Пусть A - невырождена $\Rightarrow$ $\mathrm{rk}\, A = n$ $\Rightarrow$ столбцы $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$ - линейно независимы. Таким образом, столбцы образуют систему n линейно независимых векторов $\Rightarrow$ они образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Иначе, можно было бы дополнить эту систему столбцов до базиса и там бы было больше, чем n векторов и мы бы получили противоречие. Таким образом:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\colon y = A^{(1)}{\cdot}x_1 + A^{(2)}{\cdot}x_2 + \ldots + A^{(n)}{\cdot}x_n$$

Эта формула есть ничто иное, как образ столбца из $x_1, \ldots, x_n$ при линейном отображении $\mathcal{A}$, тогда:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \exists! x \in \mathbb{R}^n\colon y = \mathcal{A}(x)$$

где $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение с матрицей $A \Rightarrow \mathcal{A}$ - взаимнооднозначное, так как для каждого вектора из образа существует единственный вектор-аргумент, который в него переходит при этом отображении $\Rightarrow \mathcal{A}$ - обратимое $\Rightarrow A$ - обратима. ■

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Пусть A - невырожденная матрица. Припишем к этой матрице единичную матрицу справа, отделив чертой: $(A|E)$ - матрица размера $n \times 2n$. Будем действовать ЭП строк над этой расширенной матрицей так, чтобы матрицу A привести к улучшенному ступенчатому виду.

Утв. 6. Улучшенный ступенчатый вид квадратной невырожденной матрицы это единичная матрица.

$\square$ Улучшенный ступенчатый вид означает, что на местах лидеров стоят единицы, а в столбцах под лидерами и над лидерами стоят нули. Поскольку матрица невырождена, то при приведении к ступенчатому виду её ранг сохраняется $\Rightarrow$ у ступенчатой матрицы число лидеров будет равно числу строк и равно числу столбцов, поскольку матрица квадратная. Следовательно, лидеры идут по диагонали и матрица имеет вид единичной. $\blacksquare$

Поскольку A - квадратная и невырожденная $\Rightarrow$ её улучшенный ступенчатый вид будет единичной матрицей. При этом на месте матрицы E появляется некая новая матрица B:

$$(A|E) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (E|B)$$

Утв. 7. При приведении расширенной невырожденной матрицы A к улучшенному ступенчатому виду, мы получим обратную к A матрицу:

$$(A|E) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} \left(E|A^{-1}\right)$$

$\square$ $X = A^{-1}$ является решением уравнения $A{\cdot}X = E$. Если мы хотим посчитать элемент (ij) в произведении матриц AX, то мы умножаем строку i матрицы A на столбец j матрицы $X \Rightarrow$ если мы хотим получить j-ый столбец произведения, то надо взять каждую строчку матрицы A и умножить на j-ый столбец матрицы X. Таким образом:

$$A{\cdot}X = E \Leftrightarrow A{\cdot}X^{(j)} = E^{(j)}, \forall j = \overline{1, n}$$

Каждое из таких уравнений можно рассматривать как СЛУ на $X^{(j)}$ с матрицей коэффициентов A и столбцом свободных членов $E^{(j)}$. Решаем такую матричную СЛУ методом Гаусса:

$$\left(A|E^{(j)}\right) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} \left(E|B^{(j)}\right)$$

Матрица коэффициентов одна и та же, различаются только столбцы свободных членов $\Rightarrow$ когда решаем СЛУ мы можем приводить эти n штук СЛУ ЭП к ступенчатому виду одними и теми же преобразованиями (теми, которые используются в алгоритме нахождения матрицы B). Тогда:

$$A{\cdot}X^{(j)} = E^{(j)} \Leftrightarrow E{\cdot}X^{(j)} = B^{(j)}, \forall j = \overline{1, n}$$

Соберём эти n штук СЛУ в одно матричное уравнение:

$$A{\cdot}X = E \Leftrightarrow E{\cdot}X = B$$

У второго матричного уравнения единственное решение это $X = B \Rightarrow$ и у первого это тоже будет единственным решением $\Rightarrow A^{-1} = X = B$. $\blacksquare$

Пример: рассмотрим невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдем её обратную матрицу:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1)\cdot(-3)+2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2)\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2)\cdot(-2)+1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Таким образом:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Элементарные матрицы

Всякую невырожденную матрицу ЭП строк можно привести к единичной матрице. Но и наоборот, всякая невырожденная матрица получается из единичной, если ЭП строк проделаем в обратном порядке. Рассмотрим класс матриц, получаемых из единичной матрицы с помощью одного ЭП строк.

Опр: 8. Элементарная матрица это матрица $n \times n$, получаемая из E с помощью ЭП строк или столбцов.

Элементарные матрицы бывают трёх типов в соответствии ЭП строк:

1) К строчке i прибавляем строчку j с коэффициентом λ:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad U_{ij}(\lambda) =
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

Ту же самую матрицу можно получить если к E применим ЭП столбцов: к столбце j прибавляем столбце i с коэффициентом λ;

2) Перестановка местами двух строк или столбцов:

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad U_{ij} =
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

3) Умножение i-ой строчки или i-го столбца на какое-то число $\lambda \neq 0$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array} \Rightarrow \quad U_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

Теорема 3. (**основное свойство элементарных матриц**) Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, тогда:

1) Применив к A одно ЭП строк мы получим матрицу: $A' = U{\cdot}A$, где U - получается из E с помощью того же ЭП строк;

2) Применив к A одно ЭП столбцов мы получим матрицу: $A'' = A{\cdot}V$, где V - получается из E с помощью того же ЭП столбцов;

□

1) Заметим, что при любом ЭП строк, строки новой матрицы линейно выражаются через строки исходной матрицы, это касается как матрицы A, так и матрицы E:

$$A'_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} A_k,\ U_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} E_k$$

Но k-ая строка единичной матрицы это k-ый вектор стандартного базиса в пространстве строк:

$$E_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow U_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} E_k = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{im})$$

Переходя от строк к конкретным координатам, мы получаем:

$$a'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik}{\cdot}a_{kj} = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{im}){\cdot} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = U_i{\cdot}A^{(j)} \Rightarrow A' = U{\cdot}A$$

2) Формула доказывается аналогично:

$$A''^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}{\cdot}\mu_{kj},\ V^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} E^{(k)}{\cdot}\mu_{kj}$$

Но k-ый столбец E это k-ый вектор стандартного базиса в пространстве столбцов:

$$E^{(k)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \Rightarrow V^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} E^{(k)}{\cdot}\mu_{kj} = \begin{pmatrix} \mu_{1j} \\ \vdots \\ \mu_{kj} \\ \vdots \\ \mu_{nj} \end{pmatrix}$$

Переходя от столбцов к конкретным координатам, мы получаем:

$$a''_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}\mu_{kj} = A_i{\cdot}V^{(j)} \Rightarrow A'' = A{\cdot}V$$

■

Следствие 3. Элементарные матрицы обратимы и обратная матрица к элементарной матрице будет тоже элементарной матрицей, которая соответствует обратному ЭП (строк или столбцов).

□ Пусть U - элементарная матрица, полученная ЭП одной строки E. Тогда применяя обратное ЭП строк мы из U получим E:

$$E \xrightarrow{\text{ЭП строки}} U \Rightarrow U \xrightarrow{\text{ЭП}^{-1}\text{ строки}} E$$

Применим это обратное ЭП не к U, а к E, то мы получим другую элементарную матрицу V:

$$E \xrightarrow{\text{ЭП}^{-1}\text{ строки}} V \Rightarrow V \xrightarrow{(\text{ЭП}^{-1})^{-1}\text{ строки}} E$$

где обратное к обратному ЭП строки есть просто ЭП строки:

$$V \xrightarrow{(\text{ЭП}^{-1})^{-1}\text{ строки}} E \Leftrightarrow V \xrightarrow{\text{ЭП строки}} E$$

Мы знаем, что ЭП над строками равносильно умножению слева на соответствующую элементарную матрицу $\Rightarrow$ применяя к матрице U обратное ЭП к исходному, мы получаем $E \Rightarrow E = V{\cdot}U$. С другой стороны, матрица E получается из матрицы V применением исходного ЭП строк $\Rightarrow E = U{\cdot}V$, тогда:

$$E = U{\cdot}V = V{\cdot}U \Rightarrow V = U^{-1}$$

Для столбцов аналогично, меняется лишь порядок сомножителей. ■

Отметим, что обратные преобразования выглядят так:

1) $(U_{ij}(\lambda))^{-1} = U_{ij}(-\lambda)$;
2) $(U_{ij})^{-1} = U_{ij}$;
3) $(U_i(\lambda))^{-1} = U_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;

Теорема 4. Всякая невырожденная матрица может быть разложена в произведение элементарных матриц. Обратное тоже верно в силу обратимости элементарных матриц.

□ Пусть A - невырождена, тогда цепочкой ЭП строк можно привести её к улучшенному ступенчатому виду, который будет единичной матрицей:

$$A \xrightarrow{\text{ЭП}_1}\xrightarrow{\text{ЭП}_2} \ldots \xrightarrow{\text{ЭП}_N} E$$

Но каждое ЭП над строчкой ⇔ умножению слева на матрицу ЭП:

$$\forall i = \overline{1, N},\ E \xrightarrow{\text{ЭП}_i} U_i \Rightarrow U_N \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A = E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (U_N \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1)^{-1} \cdot E = (U_N \cdot \ldots \cdot U_2 \cdot U_1)^{-1} = U_1^{-1} \cdot U_2^{-1} \cdot \ldots \cdot U_N^{-1}$$

Но как мы уже знаем, обратные к элементарным матрицам это тоже элементарные матрицы. Они соответствуют обратным ЭП. ■

Умножение матрицы на диагональную матрицу

Опр: 9. Квадратная матрица D называется диагональной, если её элементы вне главной диагонали равны нулю: $d_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим умножение диагональной матрицы D на матрицу A слева:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \ldots & d_1 a_{1m} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \ldots & d_2 a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \ldots & d_n a_{nm} \end{pmatrix}$$

То есть i-ая строчка A умножилась на диагональный элемент d_i.

Умножим диагональную матрицу D на матрицу B справа:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} d_1 b_{11} & d_2 b_{12} & \ldots & d_n b_{1n} \\ d_1 b_{21} & d_2 b_{22} & \ldots & d_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 b_{m1} & d_2 b_{m2} & \ldots & d_n b_{mn} \end{pmatrix}$$

То есть i-ый столбец умножился на диагональнаый элемент d_i.

Опр: 10. Скалярной матрицей называется диагональная матрица, в которой $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = \lambda$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

Домножим квадратную матрицу A на скалярную матрицу Λ:

$$A{\cdot}\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \Lambda{\cdot}A = \lambda{\cdot}A$$

След матрицы

Опр: 11. След матрицы A это сумма её диагональных элементов.

Обозначение: $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Утв. 8. (свойства следа матрицы)

1) $\mathrm{tr}\,(A + B) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$;
2) $\mathrm{tr}\,(\lambda{\cdot}A) = \lambda{\cdot}\,\mathrm{tr}\,(A)$;
3) $\mathrm{tr}\,(A{\cdot}B) = \mathrm{tr}\,(B{\cdot}A)$;
4) $\mathrm{tr}\,(A{\cdot}B{\cdot}C) \neq \mathrm{tr}\,(A{\cdot}C{\cdot}B)$

□

1) Пусть: $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$, $\mathrm{tr}\,(B) = b_{11} + \ldots + b_{nn}$, тогда:
$$\mathrm{tr}\,(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$$
2) Пусть: $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$:
$$\mathrm{tr}\,(\lambda{\cdot}A) = \lambda{\cdot}a_{11} + \ldots + \lambda{\cdot}a_{nn} = \lambda{\cdot}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = \lambda{\cdot}\,\mathrm{tr}\,(A)$$
3) $\mathrm{tr}\,(AB) = (AB)_{11} + (AB)_{22} + \ldots + (AB)_{nn}$, распишем подробнее:
$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \Rightarrow \mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}\,(BA)$$
4) Рассмотрим следующие матрицы:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = A^T,\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{tr}\,(A{\cdot}B{\cdot}C) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\,(A{\cdot}C{\cdot}B)$$

■