Симметрические многочлены

Пусть K это поле. Рассмотрим специальный тип многочленов в $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Опр: 1. Многочлен $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ называется симметрическим, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, для любой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ номеров $(1, 2, \ldots, n)$.

Rm: 1. В терминах перестановок: $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ - симметрический, если:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),\ \forall \sigma \in S_n$$

Примеры симметрических и несимметрических многочленов:

1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ - не будет симметрическим: поменяем местами x_2 и x_3:

$$f(x_1, x_3, x_2, x_4) = x_1x_3 + x_2x_4 \neq x_1x_2 + x_3x_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

2) **Константы**:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \in K$$

Очевидно, это симметрические многочлены;

3) **Степенные суммы**:

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Очевидно, это симметрические многочлены;

4) **Элементарные симметрические многочлены**:

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$$

Они симметрические. Отметим, что в сумме C_n^k слагаемых $\Rightarrow$ количество слагаемых в сумме $\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ равно количеству слагаемых в сумме $\sigma_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим частные случаи:

$$k = 1 \Rightarrow \sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$k = 2 \Rightarrow \sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_ix_j + \ldots + x_{n-1}x_n, \quad \forall i, j = \overline{1, n},\ i < j$$

$$k = n \Rightarrow \sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

$$\forall k > n,\ \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ \forall k \leq 0,\ \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

5) **Определитель Вандермонда**: $V(x_1, \ldots, x_n)$ не является симметрическим, поскольку:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i)$$

Переставить аргументы означает поменять местами столбцы, при этом определитель умножится на знак подстановки. Такие многочлены называются кососимметрическими. Сделать его симметрическим можно следующим образом:

$$V(x_1, \ldots, x_n)^2 = \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i)^2$$

Утв. 1. Сумма/произведение симметрических многочленов дает симметрический многочлен, то есть множество симметрических многочленов замкнуто относительно сложения/умножения. Другими словами, множество симметрических многочленов это подкольцо в $K[x_1, \ldots, x_n]$.

□ Сумма симметрических многочленов дают симметрический многочлен, поскольку перестановка аргументов не влияет на сумму. Аналогично, произведение симметрических многочленов дают симметрический многочлен, поскольку перестановка аргументов не влияет на произведение. ■

Теорема 1. (**Виета**) Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]$ имеет $n = \deg(f)$ корней с учётом кратностей: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда имеют место следующие формулы:

$$\forall k = \overline{1, n},\ \sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Эти формулы называются формулами Виета.

□ Разложим наш многочлен на линейные множители (поскольку он имеет столько же корней, сколько его степень) и раскроем скобки:

$$f(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) = a_n \cdot \sum_{\substack{k=0,\ldots,n \\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n}} \underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \ldots \cdot \underset{i_1}{(-\alpha_{i_1})} \cdot \ldots \cdot \underset{i_2}{(-\alpha_{i_2})} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{x}$$

Заметим, что у нас n множителей в произведении и в каждом множителе у нас два члена $\Rightarrow$ всего будет 2^n слагаемых в сумме. Номера $i_1, \ldots, i_k$ будем считать расположенными в порядке возрастания. Соберём слагаемые в сумме, тогда:

$$f(x) = a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \cdot \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} (-1)^k \cdot \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{i_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_k} = a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot x^{n-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k = \overline{0, n},\ (-1)^k \cdot a_n \cdot \sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot x^{n-k} = a_{n-k} x^{n-k} \Rightarrow \sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

■

Rm: 2. Теорема Виета применима к любым многочленам над полем $K = \mathbb{C}$. Более того, теорема Виета применима над любым алгебраически замкнутым полем K. В общем случае, если K - произвольно, то существует расширение поля $K \subset L$, которое уже будет алгебраически замкнуто и тогда можно будет применить теорему Виета считая, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Например, $\mathbb{R}$ можно расширить до $\mathbb{C}$.

Теорема 2. (**Основная теорема о симметрических многочленах**) Для любого симметрического многочлена $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ существует единственный многочлен $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ такой, что:

$$f = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

При этом $\deg(F) = \deg_{x_i}(f)$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Rm: 3. Другими словами: кольцо симметрических многочленов есть $K[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

Примеры применения основной теоремы о симметрических многочленах:

1) $s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sigma_1$;

2) $s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$

Лемма 1. Старший член $\widehat{f} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ симметрического многочлена f обладает свойством:

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$$

□ (От противного) Если $\exists\, i, j\colon k_i < k_j$, то в $\widehat{f}$ при перестановке x_i и x_j местами:

$$\widehat{f} = x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i} \ldots x_j^{k_j} \ldots x_n^{k_n} \prec x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_j} \ldots x_j^{k_i} \ldots x_n^{k_n}$$

Последний многочлен тоже входит в f с ненулевым коэффициентом, поскольку f - симметрический и от перестановки переменных он не изменится, просто его одночлены как-то переставятся. Подробнее, если старший член $\widehat{f}$ был в f, то после перестановки и $x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_j} \ldots x_j^{k_i} \ldots x_n^{k_n}$ должен быть в f. Получили противоречие с тем, что $\widehat{f}$ - самый старший среди одночленов, входящих в f. ■

Лемма 2. Для любого набора целых неотрицательных чисел: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$ существует единственный набор целых неотрицательных чисел: $l_1, \ldots, l_n \geq 0$ такой, что:

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = \widehat{g}, \quad g = \sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \ldots \sigma_n^{l_n}$$

□ Рассмотрим произведение: $g = \sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \ldots \sigma_n^{l_n}$ и его старший член $\widehat{g}$. Старший член произведения равен произведению старших членов сомножителей (по утверждению лекции 21):

$$\widehat{g} = \widehat{\sigma_1}^{l_1} \cdot \widehat{\sigma_2}^{l_2} \cdot \ldots \cdot \widehat{\sigma_j}^{l_j} \cdot \ldots \cdot \widehat{\sigma_n}^{l_n}$$

$$\sigma_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_j} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_j} \Rightarrow \widehat{\sigma_j} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{g} = x_1^{l_1} \cdot (x_1 \cdot x_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_j)^{l_j} \cdot \ldots \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{l_n}$$

Чтобы старший член g был равен требуемому многочлену необходимо и достаточно:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} k_1 & = & l_1 & + & \ldots & + & l_n \\ k_2 & = & l_2 & + & \ldots & + & l_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_j & = & l_j & + & \ldots & + & l_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_n & = & l_n & & & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} l_1 & = & k_1 & - & k_2 & \geq & 0 \\ l_2 & = & k_2 & - & k_3 & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_j & = & k_j & - & k_{j+1} & \geq & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n & = & k_n & & & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Видим, что существует ровно один набор $l_1, \ldots, l_n$ для которых выполнены равенства выше. ■

□ (**Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах**)

1) <u>**Существование**</u>: Рассмотрим разложение многочлена $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ в сумму однородных компонент (многочленов):

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d,\ d = \deg(f)$$

Заметим, что f_i будут симметрическими многочленами, так как при перестановке переменных полная степень одночлена не меняется $\Rightarrow$ можно считать дальше, что наш многочлен f однороден. Выделим в нём старший член и применим леммы 1 и 2:

$$f = a_0 \cdot \widehat{f} + \sum_i p_i,\ \forall i,\ \widehat{f} \succ p_i \Rightarrow \exists\, l_1, \ldots, l_n\colon \widehat{f} = \widehat{g},\ g = \sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \ldots \sigma_n^{l_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 = f - a_0{\cdot}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} \Rightarrow \widehat{f_1} \prec \widehat{f} \Rightarrow f_1 = a_1{\cdot}\widehat{f_1} + \sum_i q_i,\ \forall i,\ \widehat{f_1} \succ q_i$$

Снова применяем леммы 1 и 2:

$$\exists\, m_1,\ldots,m_n\colon \widehat{f_1} = \widehat{g_1},\ g_1 = \sigma_1^{m_1}\sigma_2^{m_2}\ldots\sigma_n^{m_n} \Rightarrow f_2 = f_1 - a_1{\cdot}\sigma_1^{m_1}\sigma_2^{m_2}\ldots\sigma_n^{m_n} \Rightarrow \widehat{f_2} \prec \widehat{f_1}$$

И так далее $\Rightarrow$ получаем последовательность однородных симметрических многочленов одинаковой степени: $f, f_1, f_2, \ldots$ у которых $\widehat{f} \succ \widehat{f_1} \succ \widehat{f_2} \succ \ldots$. Последовательность не может продолжаться бесконечно, так как существует лишь конечное число одночленов данной степени, тогда:

$$\exists\, s\colon f_s \neq 0,\ f_{s+1} = f_s - a_s{\cdot}\sigma_1^{p_1}\sigma_2^{p_2}\ldots\sigma_n^{p_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = a_0{\cdot}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} + f_1 = a_0{\cdot}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} + a_1{\cdot}\sigma_1^{m_1}\ldots\sigma_n^{m_n} + f_2 = \ldots =$$
$$= a_0{\cdot}\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} + a_1{\cdot}\sigma_1^{m_1}\ldots\sigma_n^{m_n} + \ldots + a_s{\cdot}\sigma_1^{p_1}\ldots\sigma_n^{p_n} = F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

2) Рассмотрим степень нашего многочлена по какой-либо переменной. Поскольку многочлен симметрический, то нам не важно по какой конкретно, пусть это будет x_1:

$$\deg_{x_1}(f) = \deg_{x_1}(\widehat{f}\ ) \geq \deg_{x_1}(\widehat{f_1}\ ) \geq \deg_{x_1}(\widehat{f_2}\ ) \geq \ldots \geq \deg_{x_1}(\widehat{f_s}\ )$$

Из леммы 2 степень x_1 в старших членах $\widehat{f_i}$ будет равна степени старшего члена $\sigma_1^{r_1}\ldots\sigma_n^{r_n}$:

$$\deg_{x_1}(\widehat{f}\ ) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,\ \deg_{x_1}(\widehat{f_1}\ ) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \ldots, \deg_{x_1}(\widehat{f_s}\ ) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

Видно, что самая большая из перечисленных выше степеней: $l_1 + \ldots + l_n$ есть ничто иное, как степень $F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$:

$$\deg(F) = l_1 + \ldots + l_n = \deg_{x_1}(f)$$

3) **Единственность**: Пусть многочлен: $f = F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = G(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $F, G \in K[x_1,\ldots,x_n]$. Рассмотрим разность многочленов F и G:

$$H = F - G \in K[x_1,\ldots,x_n],\ H(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = 0$$

Нужно доказать, что $H = 0$. От противного, пусть $H \neq 0$, тогда:

$$H = c_0x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n} + c_1x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n} + \ldots + c_sx_1^{p_1}\ldots x_n^{p_n},\ c_0, c_1, \ldots, c_s \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = c_0\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} + c_1\sigma_1^{m_1}\ldots\sigma_n^{m_n} + \ldots + c_s\sigma_1^{p_1}\ldots\sigma_n^{p_n}$$

Рассмотрим произведения как сумму старших членов и остальных:

$$\sigma_1^{l_1}\ldots\sigma_n^{l_n} = x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} + \ldots, \sigma_1^{m_1}\ldots\sigma_n^{m_n} = x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} + \ldots, \ldots, \sigma_1^{p_1}\ldots\sigma_n^{p_n} = x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n} + \ldots$$

По лемме 2, если у нас есть одночлен с нестрого убывающими степенями, то существует ровно одно произведение сигм в каких-то степенях для которого этот одночлен является старшим членом. Следовательно, самый старший из старших членов ни с кем не сокращается $\Rightarrow H(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \neq 0$ и мы получаем противоречие с тем, что $H(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = 0 \Rightarrow H = 0$.

■

Rm: 4. Заметим, что основная теорема и её доказательство переносится без любых изменений на случай, когда K это произвольное коммутатиное, ассоциативное кольцо с единицей, например, $K = \mathbb{Z}$.

Применение симметрических многочленов

Пусть у нас есть многочлен $f(x)$ от одной переменной:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$$

Он имеет $n = \deg(f)$ корней: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с учётом кратности. Тогда значение любого симметрического многочлена от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляется в виде многочлена от коэффициентов:

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Это следует из основной теоремы о симметрических многочленах и теоремы Виета:

1) По основной теореме, симметрический многочлен выражается в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов;

2) Значения этого многочлена на корнях f выражаются в виде многочлена от значений элементарных симметрических многочленов на этих корнях, которые по теореме Виета с точностью до знака равны коэффициентам выше;

Это важно, поскольку чтобы вычислить значение симметрического многочлена на корнях f, то не обязательно знать сами корни, достаточно знать элементарные симметрические многочлены от этих корней. Корни многочлена не всегда просто найти, а вот элементарные симметрические многочлены от них найти всегда можно: они выражаются через коэффициенты исходного многочлена.

Дискриминант

В условиях заданных выше, рассмотрим следующий симметрический многочлен от n переменных:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 \Rightarrow \exists\, \Delta \in K[x_1, \ldots, x_n]\colon \delta = \Delta(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

При этом, по основной теореме о симметрических многочленах будет верно:

$$\deg(\Delta) = \deg_{x_1}(\delta) = 2(n-1) = 2n - 2$$

Подставим корни $f(x)$ в δ, тогда получим:

$$\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = \Delta\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right)$$

где последнее равенство верно по теореме Виета. Поскольку: $\deg(\Delta) = 2(n-1) = 2n-2$, то:

$$\Delta\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots, (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\right) = \frac{D}{a_n^{2n-2}} \Rightarrow D = a_n^{2n-2} \cdot \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

где $D = D(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ - многочлен от $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Опр: 2. Дискриминантом D многочлена $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ называется многочлен от коэффициентов f, который выражается через его корни следующим образом:

$$D = D(a_0, a_1, \ldots, a_n) = D(f) = a_n^{2n-2} \cdot \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

Утв. 2. (**Основное свойство дискриминанта**) $D(f) = 0 \Leftrightarrow f$ имеет кратные корни.

$\square$ f имеет кратные корни $\Leftrightarrow \exists\, i, j \colon 1 \leq i < j \leq n,\ \alpha_i = \alpha_j \Leftrightarrow D(f) = 0.$ $\blacksquare$

Таким образом, вычислив дискриминант мы можем выяснить: есть ли у многочлена кратные корни или нет, а дискриминант, в свою очередь, можно вычислить не зная этих корней, поскольку он выражается в виде многочлена от коэффициентов $\Rightarrow$ надо только найти этот многочлен.

Вычисление дискриминанта

Рассмотрим один из способов вычисления Дискриминанта:

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_n)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \ldots & x_n^{i-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{j-1} & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{j-1} & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{j-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{i-1} & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_i & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{i+1} & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \ldots & s_{i+j-2} & \ldots & s_{n+j-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Заметим, что на каждой побочной диагонали стоят одинаковые суммы и номера сумм при сдвиге вправо или вниз увеличиваются на единицу. Отсюда получаем выражение для дискриминанта:

$$D(f) = a_n^{2n-2} \cdot \begin{vmatrix} n & \ldots & s_{i-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \ldots & s_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \ldots & s_{i+j-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \ldots & s_{n+j-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \ldots & s_{i+n-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \ldots & s_{2n-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{vmatrix}$$

Чтобы выразить дискриминант в виде многочлена от коэффициентов $f(x)$ надо каждую из степенных сумм выразить в виде многочлена от значений элементарных симметрических многочленов:

$$\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Соответственно, элементы матрицы выше будут состоять из многочленов таких дробей $\Rightarrow$ домножая определитель на a_n^{2n-2} все знаменатели пропадут и останется многочлен от $a_0, a_1, \ldots, a_n$, который и будет дискриминантом нашего многочлена f.