Вводный семинар

ДЗ: 20.1 бгем, 20.3 б, 20.5 а, 20.7 б, 20.8 а, 24.2 б, 24.6 дмн.

Перемножение чисел:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

Задача 1. (**K20.1**) Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$;

$\square$ $6+1+(-2+3)i+6-12+(8+9)i = 1+18i$; $\blacksquare$

б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

$\square$ $6-7+i(14+3)-1+6-(3+10)i = 4+4i$; $\blacksquare$

в) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$;

$\square$ $20-3+i(5+12)-10 = 7+17i$; $\blacksquare$

г) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

$\square$

$$\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i} = \frac{35+6+i(7-30)}{3+i} = \frac{(41-23i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{123-23+i(-69-41)}{10} = 10-11i$$

$\blacksquare$

д) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;

$\square$

$$\frac{(5+i)(3+5i)}{2i} = \frac{-i(15-5+i(3+25))}{2} = \frac{-i(10+28i)}{2} = 14-5i$$

$\blacksquare$

е) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

$\square$

$$\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2} = \frac{(2-i)^2(8+3+i(24-1))}{25} = \frac{(3-4i)(11+23i)}{25} = \frac{125+i25}{25} = 5+i$$

$\blacksquare$

ж) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$;

$\square$

$$\frac{(2+i)(4+i)}{1+i} = \frac{(7+i6)(1-i)}{2} = \frac{7+6+i(6-7)}{2} = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}i$$

$\blacksquare$

з) $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

$\square$
$$\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}=\frac{(2+i)(-1-i13)}{5}=\frac{-2+13+i(-26-1)}{5}=\frac{11}{5}-\frac{27}{5}i$$
$\blacksquare$

и) $(2+i)^3+(2-i)^3$;

$\square$
$$(2+i)^3+(2-i)^3=(2+i+2-i)((2+i)^2+(2-i)^2-5)=4(3+4i+3-4i-5)=4$$
$\blacksquare$

к) $(3+i)^3-(3-i)^3$;

$\square$
$$(3+i)^3-(3-i)^3=(3+i-3+i)(8+6i+8-6i+10)=52i$$
$\blacksquare$

л) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

$\square$ $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=\dfrac{(1+i)^8}{2^3}=\dfrac{(1+2i-1)^4}{8}=2i^4=2$; $\blacksquare$

м) $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;

$\square$
$$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\frac{1}{4}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$
$\blacksquare$

Задача 2. (**K20.3** б)) Доказать равенство:
$$(1+i)^{4n}=(-1)^n2^{2n},\ n\in\mathbb{Z}$$

$\square$
$$(1+i)^{4n}=(1+2i-1)^{2n}=i^{2n}\cdot 2^{2n}=(-1)^n\cdot 2^{2n}$$
$\blacksquare$

Задача 3. (**K20.5**) Найти вещественные числа $x,y\in\mathbb{R}$ удовлетворяющие уравнениям:

а) $(2+i)x+(1+2i)y=1-4i$;

$\square$
$$2x+y=1\wedge x+2y=-4\Rightarrow y=-3,x=2$$
$\blacksquare$

б) $(3+2i)x+(1+3i)y=4-9i$;

$\square$

$$3x+y=4,\ 2x+3y=-9 \Rightarrow x=3, y=-5$$

$\blacksquare$

Задача 4. (**K20.6** а)) Доказать, что комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\overline{z}=z$:

$$\forall z\in\mathbb{C},\ z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

$\square$

$$z=a+bi\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow \overline{z}=a-bi=a+bi=z$$

$\blacksquare$

Задача 5. (**K20.6** а)) Доказать, что комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\overline{z}=-z$:

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \overline{z}=-z\Leftrightarrow z=0+ib\in i\mathbb{R}$$

$\square$

$$z=a+bi\in\mathbb{C},\ z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow a=0\Leftrightarrow \overline{z}=a-bi=-a-bi=-z$$

$\blacksquare$

Задача 6. (**K20.7** а)) Доказать, что произведение двух комплексных чисел является вещественным тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряженного к другому вещественным множителем:

$$\forall z,w\in\mathbb{C},\ z\cdot w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=k\overline{w},\ k\in\mathbb{R}$$

$\square$

$(\Leftarrow)$

$$\forall z,w\in\mathbb{C},\ z=k\overline{w},\ k\in\mathbb{R}\Rightarrow z\cdot w=k\overline{w}\cdot w=k|w|^2\in\mathbb{R}$$

$(\Rightarrow)$

$$\forall z,w\in\mathbb{C},\ z=x+iy,\ w=a+ib,\ z\cdot w=ax-by+i(ay+bx)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow bx+ay=0\Leftrightarrow bx=-ay$$

$$a=0,\ b\neq 0\Rightarrow bx=0\Rightarrow x=0\Rightarrow z=iy=ib\frac{y}{b}=-\frac{y}{b}\overline{w}=k\overline{w},\ k\in\mathbb{R}$$

$$b=0,\ a\neq 0\Rightarrow ay=0\Rightarrow y=0\Rightarrow z=x=a\frac{x}{a}=kw=k\overline{w},\ k\in\mathbb{R}$$

$$a\neq 0,\ b\neq 0\Rightarrow \frac{x}{a}=-\frac{y}{b}\Rightarrow z=a\frac{x}{a}+ib\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\cdot(a-ib)=\frac{x}{a}\overline{w}=k\overline{w},\ k\in\mathbb{R}$$

$\blacksquare$

Задача 7. (**K20.7** б)) Сумма и произведение двух комплексных чисел являются вещественными тогда и только тогда, когда данные числа или сопряжены, или оба вещественны:

$$\forall z,w\in\mathbb{C},\ z+w\in\mathbb{R},\ z\cdot w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{w}\vee z,w\in\mathbb{R}$$

$\square$

$(\Leftarrow)$

$$\forall z, w \in \mathbb{C},\ z = \overline{w} \Rightarrow z + w = z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R},\ z{\cdot}w = z{\cdot}\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$$

$$\forall z, w \in \mathbb{R},\ z + w \in \mathbb{R},\ z{\cdot}w \in \mathbb{R}$$

$(\Rightarrow)$

$$\forall z = x + iy, w = a + ib \in \mathbb{C},\ z + w \in \mathbb{R},\ z{\cdot}w \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} b + y = 0 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -y \\ (a - x)y = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = x, w = a \in \mathbb{R}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow a = x \Rightarrow z = x + iy = a - ib = \overline{w}$$

$\blacksquare$

Задача 8. (**K20.8**) Найти все комплексные числа, сопряженные:

а) Своему квадрату: $z^2 = \overline{z}$;

б) Своему кубу: $z^3 = \overline{z}$;

$\square$

а)

$$z^2 = \overline{z} \Rightarrow z = x + iy,\ z^2 = x^2 + 2iyx - y^2 = x - iy \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$y \neq 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = y^2 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = 0 \vee z = 1 \vee z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

б)

$$z^3 = \overline{z} \Rightarrow z = x + iy,\ z^3 = x^3 - 3xy^2 + 3x^2iy - y^3i = x - iy \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ 3x^2y - y^3 = -y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$y \neq 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 = y^2 \Rightarrow x^3 - 9x^3 - 3x = x \Rightarrow -8x^3 = 4x$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$x \neq 0 \Rightarrow -2x^2 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$z = 0 \vee z = \pm 1 \vee z = \pm i$$

$\blacksquare$

Задача 9. (**K20.9**) Доказать, что если из данных комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ при применении конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и деления получается число z, то из чисел $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n}$, при применении тех же операций получается число $\overline{z}$.

□ Рассмотрим, что происходит при применении этих операций и операции сопряжения. По индукции можно показать, что:

$$z = z_1 \pm \ldots \pm z_n \Rightarrow \overline{z_1 \pm \ldots \pm z_n} = \overline{z}_1 \pm \ldots \pm \overline{z}_n = \overline{z}$$

$$z = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \Rightarrow \overline{z}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{z}_n = \overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z}$$

$$z = \frac{1}{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} = \frac{1}{|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n|} \cdot (\overline{z}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{z}_n) \Rightarrow \frac{1}{\overline{z}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{z}_n} = \frac{1}{|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n|} \cdot (z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) = \overline{z}$$

Таким образом, сочетание этих операций даст нам такой же результат. ■

Задача 10. (**K20.10**) Доказать, что определитель:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a \\ z_2 & \overline{z}_2 & b \\ z_3 & \overline{z}_3 & c \end{vmatrix}$$

где $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и $a, b, c \in \mathbb{R}$, является чисто мнимым числом.

□

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a \\ z_2 & \overline{z}_2 & b \\ z_3 & \overline{z}_3 & c \end{vmatrix} = z_1\overline{z}_2c + z_2\overline{z}_3a + \overline{z}_1bz_3 - z_3\overline{z}_2a - z_2\overline{z}_1c - \overline{z}_3bz_1$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C},\ z = x + iy,\ w = a + ib,\ z\overline{w} - \overline{z}w = (x+iy)(a-ib) - (x-iy)(a+ib) =$$

$$= ax + by + (ay - bx)i - (ax + by) - (bx - ay)i = 2(ay - bx)i \in i\mathbb{R}$$

$$z_1\overline{z}_2c + z_2\overline{z}_3a + \overline{z}_1bz_3 - z_3\overline{z}_2a - z_2\overline{z}_1c - \overline{z}_3bz_1 = a(z_2\overline{z}_3 - \overline{z}_2z_3) + b(\overline{z}_1z_3 - z_1\overline{z}_3) + c(z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1) \in i\mathbb{R}$$

Также, результат можно получить применив предыдущую задачу и взяв сопряженние. ■

Задача 11. (**K20.11**) Решить уравнения:

а) $z^2 = i$;

□

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i \Rightarrow \begin{cases} 2ab = 1 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ 2ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

■

б) $z^2 = 3 - 4i$;

□

$$\begin{cases} 2ab = -4 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2, b = \mp 1 \Rightarrow z = \pm(2 - i)$$

■

в) $z^2 = 5 - 12i$;

$\square$

$$\begin{cases} 2ab = -12 \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{6}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{36}{a^2} - 5 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 5a^2 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3, b = \mp 2 \Rightarrow z = \pm(3 - 2i)$$

$\blacksquare$

г) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0;$

$\square$

$$D = (1+i)^2 - 4(6+3i) = 1 - 1 + 2i - 24 - 12i = -24 - 10i$$

$$w^2 = -24 - 10i \Rightarrow w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} 2xy = -10 \\ x^2 - y^2 = -24 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{25}{x^2} + 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 24x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-24 \pm \sqrt{4 \cdot 169}}{2} = \frac{-24 \pm 26}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1,\ y = \mp 5 \Rightarrow w = \pm(1 - 5i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 + i \pm (1 - 5i)}{2} \Rightarrow z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3i$$

$\blacksquare$

д) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0;$

$\square$

$$D = 25 - 4(4 + 10i) = 9 - 40i$$

$$w^2 = 9 - 40i \Rightarrow w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} 2xy = -40 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{20}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{400}{x^2} - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 9x^2 - 400 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1600}}{2} = \frac{-24 \pm 26}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1,\ y = \mp 5 \Rightarrow w = \pm(1 - 5i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 + i \pm (1 - 5i)}{2} \Rightarrow z_1 = 1 - 2i, z_2 = 3i$$

$\blacksquare$

е) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0;$

$\square$

$$D = (2i - 7)^2 - 4(13 - i) = 49 - 4 - 28i - 52 + 4i = -7 - 24i$$

$$w^2 = -7 - 24i \Rightarrow w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} 2xy = -24 \\ x^2 - y^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{12}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{2} = \frac{7 \pm 25}{2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3,\ y = \mp 4 \Rightarrow w = \pm(3 - 4i) \Rightarrow$$

$$z = \frac{-2i + 7 \pm (3 - 4i)}{2} \Rightarrow z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 2 + i$$

$\blacksquare$

Задача 12. (**К24.2** б)) Найти комплексные числа, соответствующие:
б) вершинам правильного треугольника с центром в начале координат, стороной, параллельной оси координат, вершиной на отрицательной вещественной полуоси и радиусом описанного круга, равным 1;

☐ Построим фигуру в комплексной плоскости:

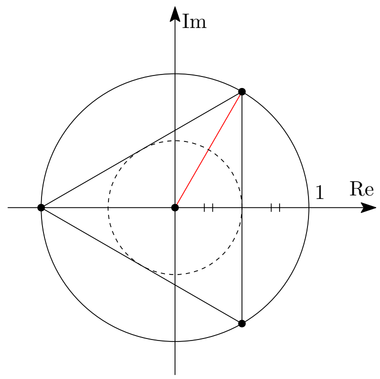

Рис. 1: Построение фигуры.

Таким образом, одним из чисел является $z = -1$. Поскольку радиус вписанной окружности равен половине радиуса описанной для правильного треугольника, то координата точек на вещественной оси будет равна $\frac{1}{2}$. Координаты на мнимой прямой найдем из теоремы Пифагора:

$$z = \frac{1}{2} + iy,\ y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

■

Задача 13. (**К24.6** дмн)) Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:
д) $|z + 3 + 4i| \leq 5$;
м) $|\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| < 1$;
н) $|z - 1| + |z + 1| = 3$;

☐ д) Получится круг с центом в точке $-3 - 4i$ радиуса 5:

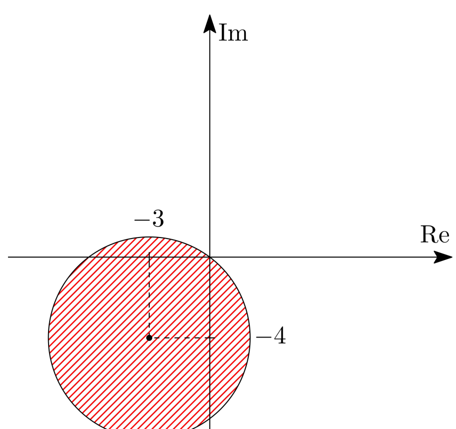

Рис. 2: Круг с центром в $-3 - 4i$ радиуса 5.

м) Получится область плоскости, где реальная и мнимая части отличаются друго от друга не больше, чем на 1, не включая границы $\Rightarrow$ область ограниченная прямыми $y = 1 - x$ и $y = x - 1$, не включая границы:

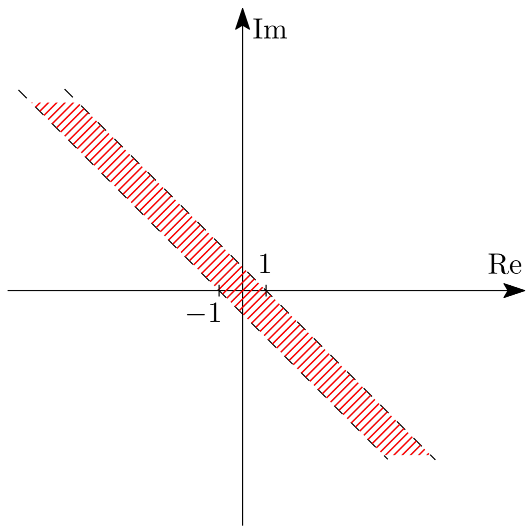

Рис. 3: Область плоскости.

н) Это эллипс с фокусами в точках -1 и 1, $a = \dfrac{3}{2}$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{3}{2}\sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ получим эллипс с канонической формой записи для $z = x + iy$ в следующем виде:

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{5} = 1$$

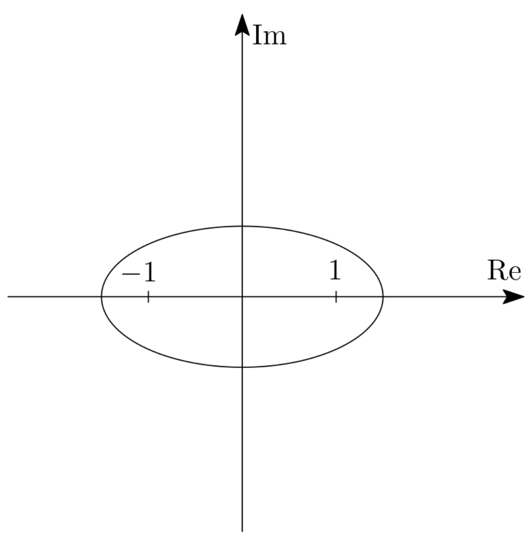

Рис. 4: Эллипс.

■