Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим произвольную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Обозначим через A её матрицу коэффициентов, а через $\widetilde{A}$ её расширенную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Теорема 1. (**Кронекера-Капелли**) СЛУ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A}$.

Rm: 1. По-другому теорема Кронекера-Капелли может быть названа критерием совместности.

Теорема 2. (**критерий определенности**) СЛУ определена $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A} = n$, где n - число неизвестных.

$\square$

(**I-ый способ**) Приведем матрицу $\widetilde{A}$ ЭП строк к ступенчатому виду $\widetilde{A}^*$. По методу Гаусса мы знаем, что система совместна $\Leftrightarrow r_e(A^*) = r_e\left(\widetilde{A}^*\right)$ и там же, система определена $\Leftrightarrow r_e(A^*) = r_e\left(\widetilde{A}^*\right) = n$. По теореме о совпадении трёх видов рангов матрицы мы можем утверждать:

$$r_e(A^*) = \operatorname{rk} A \wedge r_e\left(\widetilde{A}^*\right) = \operatorname{rk} \widetilde{A}$$

(**II-ый способ**) Набор чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - решение СЛУ $\Leftrightarrow \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)} = b$, где b - столбец свободных членов.

Критерий совместности:

($\Rightarrow$) пусть у СЛУ существует решение $\Leftrightarrow$ вектор-столбец b линейно выражается через $\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\} \Leftrightarrow \left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\}$ и $\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\right\}$ линейно эквивалентны $\Rightarrow$ у линейно эквивалентных систем ранги совпадают:

$$\operatorname{rk}\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\} = \operatorname{rk}\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b\right\} \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A}$$

($\Leftarrow$) Пусть $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A}$, тогда базис $\left\{A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}\right\}$ системы столбцов A является базисом и для $\widetilde{A}$, иначе ранг был бы больше $\Rightarrow b$ линейно выражается через $\left\{A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}\right\} \Rightarrow$ тем более линейно выражается через все столбцы $\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\} \Rightarrow$ есть решение.

Критерий определенности: Будем считать нашу СЛУ совместной. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A}$ и существует линейное выражение столбца $b = \lambda_1 A^{(1)} + \ldots + \lambda_n A^{(n)}$. Следовательно, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A} = n \Leftrightarrow$ все столбцы матрицы коэффициентов $\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\}$ линейно независимы $\Rightarrow b$ выражается через $\left\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right\}$ единственным способом $\Rightarrow$ существует единственное решение СЛУ $\Rightarrow$ она определена.

Пусть $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A} < n \Leftrightarrow \exists\, \mu_i \neq 0$: $\mu_1 A^{(1)} + \ldots + \mu_n A^{(n)} = 0 \Rightarrow b = (\mu_1 + \lambda_1)A^{(1)} + \ldots + (\mu_n + \lambda_n)A^{(n)}$ - другое линейное выражение $b \Rightarrow$ есть больше одного решения СЛУ $\Rightarrow$ система неопределена. $\blacksquare$

Подпространства векторных пространств

Пусть V - векторное пространство.

Опр: 1. Подпространством пространства V называется непустое подмножество: $U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$ для которого выполнены два свойства:

1) $\forall x, y \in U$, $x + y \in U$;
2) $\forall x \in U$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x \in U$;

То есть подпространство это непустое подмножество, замкнутое относительно операций, которые мы умеем производить над векторами.

Опр: 2. Подпространства $U = \{0\}$, $U = V$ называются несобственными. Все остальные подпространства - собственные.

Свойства подпространств

Утв. 1. $\overrightarrow{0} \in U$.

☐ В самом деле, $U \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, x \in U \Rightarrow 0 \cdot x = \overrightarrow{0} \in U$. ■

Утв. 2. U само является векторным пространством и операции на множестве U получаются ограничением операций на V.

☐ Операции не выходят за множество U по определению, аксиомы выполняются также автоматически, поскольку они выполняются на большем множестве V. ■

Примеры: геометрическое пространство

$V = \{$геом. векторы в пространстве$\}$, $U = \{$геом. векторы на заданной плоскости в пространстве$\}$.

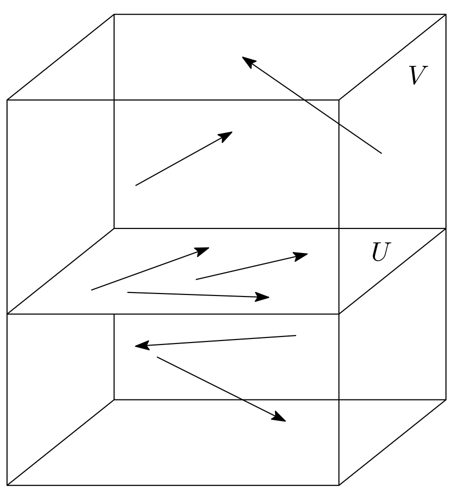

Рис. 1: Геометрические векторы в плоскости U пространства V.

☐ Сумма двух векторов в плоскости снова будет лежать в плоскости, при умножении вектора на число мы не выходим за пределы этой плоскости, поэтому это будет подпространством. ■

Примеры: линейные оболочки

Пусть $S \subseteq V$ - система векторов.

Опр: 3. Линейной оболочкой S назовём множество всех линейных комбинаций векторов из S:

$$U = \langle S \rangle = \{v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \mid v_i \in S,\, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

□
Если $S = \varnothing \Rightarrow \langle S \rangle = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \neq \varnothing$. Сумма в которой нет слагаемых по определению равна 0.

Если $S \neq \varnothing \Rightarrow \forall v_1, \ldots, v_m \in S,\, 0{\cdot}v_1 + \ldots + 0{\cdot}v_m = \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle \Rightarrow \langle S \rangle \neq \varnothing$.

1) $\forall x, y \in \langle S \rangle,\, x + y = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_m + \mu_m) v_m \in \langle S \rangle$;
2) $\forall x \in \langle S \rangle,\, \forall \lambda \in \mathbb{R},\, \lambda{\cdot}x = \lambda{\cdot}\mu_1 v_1 + \ldots + \lambda{\cdot}\mu_m v_m = (\lambda{\cdot}\mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda{\cdot}\mu_m) v_m \in \langle S \rangle$;

■

Опр: 4. Если $U = \langle S \rangle$, то говорят, что подмножество S порождает подпространство U.

Rm: 2. Заметим, что это наименьшее подпространство, содержащее S, поскольку если множество S лежит в каком-то подпространстве, то там же лежат и все линейные комбинации векторов из S.

Rm: 3. Также заметим, что линейная оболочка вссегда бесконечна, кроме того случая, когда является линейной оболочкой 0. В остальных случаях вместе с любым вектором она содержит и всю прямую.

Утв. 3. Если B - это базис в S, то B и базис в $\langle S \rangle$.

□ Пусть $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, тогда $\forall v \in S,\, v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n,\, \lambda_i \in \mathbb{R},\, i = \overline{1, n}$. Тогда:

$$\forall w \in \langle S \rangle,\, w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m,\, v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j \in S,\, i = \overline{1, m},\, \alpha_{ij} \in \mathbb{R},\, \forall i, j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \alpha_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \alpha_{ij} e_j = w_1 e_1 + \ldots + w_n e_n,\, w_j \in \mathbb{R},\, \forall j = \overline{1, n}$$

■

Следствие 1. $\dim \langle S \rangle = \operatorname{rk} S$.

□ Поскольку базисы у S и $\langle S \rangle$ одинаковые, то число векторов в них также одинаково. ■

Утв. 4. Любое подпространство U является линейной оболочкой своего базиса $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

□ Базис по определению обладает тем свойством, что любой вектор из подпространства является линейной комбинацией векторов из базиса:

$$\forall u \in U,\, u = \mu_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m,\, \mu_i \in \mathbb{R},\, i = \overline{1, m}$$

Взяв все линейные комбинации базисных векторов мы получим все векторы из этого подпространства:

$$U = \{u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_m e_m \mid e_i \in B,\, \lambda_i \in \mathbb{R}\} = \langle \{e_1, \ldots, e_m\} \rangle = \langle B \rangle$$

■

Фундаментальная система решений

Подпространства в арифметическом пространстве (а значит и в любом конечномерном пространстве) также можно задавать с помощью ОСЛУ.

Теорема 3. Рассмотрим произвольную ОСЛУ с матрицей коэффициентов A:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Тогда множество её решений: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ будет подпространством и $\dim U = n - \operatorname{rk} A$.

□ Докажем, что U - подпространство.

Множество решений всегда содержит нулевой вектор: $(0, \dots, 0) \in U \Rightarrow U \neq \varnothing$.

1) Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$, тогда будет верно:

$$\forall i = \overline{1, m},\ a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n = 0,\ a_{i1}z_1 + \dots + a_{in}z_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i1}(y_1 + z_1) + \dots + a_{in}(y_n + z_n) = 0 \Rightarrow y + z = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) \in U$$

2) Пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда будет верно:

$$\forall i = \overline{1, m},\ a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n = 0 \Rightarrow \lambda \cdot (a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) = a_{i1} \cdot \lambda y_1 + \dots + a_{in} \cdot \lambda y_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i1}(\lambda y_1) + \dots + a_{in}(\lambda y_n) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot y = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \in U$$

Найдем базис подпространства $U \Rightarrow$ построим его (поскольку во всех базисах одинаковое число векторов, то нам не важно какой это будет базис). Воспользуемся методом Гаусса и приведем ОСЛУ к ступенчатому виду $\Rightarrow$ возникают главные неизвестные: $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ и свободные неизвестные: x_j, $j \neq j_1, \dots, j_r$. Следовательно, мы получаем общее решение - выражение главных неизвестных через свободные:

$$\forall k = \overline{1, r},\ x_{j_k} = \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} c_{kj} x_j$$

Поскольку наша система однородна, то в выражении выше не будет свободного члена. Подставляя вместо свободных неизвестных конкретные числовые значения, мы будем получать частные решения. Построим частное решение v_j, $\forall j \neq j_1, \dots, j_r$ следующим образом:

$$x_j = 1,\ x_i = 0,\ \forall i \neq j_1, \dots, j_r, j \Rightarrow x_{j_k} = c_{kj}$$

Запишем это в векторной форме:

$$v_j = (0, \dots, \underset{j_1}{c_{1j}}, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, \underset{j_r}{c_{rj}}, \dots, 0)$$

Таких векторов у нас будет столько же, сколько и номеров свободных неизвестных, то есть $n - r$. Докажем, что их множество $\{v_j \mid j \neq j_1, \dots, j_r\}$ и будет искомым базисом U.

Линейная независимость: Пусть произвольная линейная комбинация равна нулю:

$$\sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} \lambda_j v_j = 0 \Rightarrow \forall j \neq j_1, \dots, j_r,\ \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} \lambda_j v_j = \lambda_j \cdot 1 + \sum_{i \neq j, j_1, \dots, j_r} \lambda_i \cdot 0 = \lambda_j = 0$$

Порождает U: Для любого решения $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ рассмотрим новый вектор z', который является линейной комбинацией векторов v_j с коэффициентами, которые равны соответствующим координатам вектора z:

$$z' = \sum_{j \neq j_1, \ldots, j_r} z_j v_j$$

По доказанному ранее, $z'_j = z_j, \forall j \neq j_1, \ldots, j_r \Rightarrow$ координаты свободных неизвестных совпадают $\Rightarrow$ координаты главных неизвестных также будут совпадать, поскольку они однозначно выражаются через свободные из общего решения $\Rightarrow z'_{j_k} = z_{j_k}, \forall k = 1, \ldots, r \Rightarrow z = z'$. Следовательно, любое решение выражается в виде комбинации v_j.

Таким образом, мы доказали, что $\{v_j \mid j \neq j_1, \ldots, j_r\}$ - базис $\Rightarrow \dim U = n - r = n - r_e(A^*)$, поскольку число главных неизвестных равно числу ненулевых строк в ступенчатой матрице. Следовательно:

$$\dim U = n - r_e(A^*) = n - \operatorname{rk} A$$

■

Опр: 5. Базис пространства U решений ОСЛУ называется фундаментальной системой решений (ФСР).

Неоднородная система линейных уравнений

Рассмотрим произвольную СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

И свяжем с этой системой ОСЛУ, заменив свободные члены на нули:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Опр: 6. Связанная с произвольной СЛУ однородная СЛУ называется ассоциированной.

Опр: 7. Линейным многообразием в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется подмножество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ для которого $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ и $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}^n$ такие, что:

$$L = v + U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = v + z,\ z \in U\}$$

Rm: 4. То есть, линейное многообразие это по сути сдвиг подпространства на какой-то вектор, вообще говоря в этом подпространстве не лежащий.

Утв. 5. Пусть СЛУ совместна, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ - пространство решений ассоциированной однородной СЛУ и $x^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$ - её частное решение. Тогда множество всех решений СЛУ имеет вид:

$$x^\circ + U = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x^\circ + z,\ z \in U\}$$

То есть множество решений неоднородной СЛУ является линейным многообразием.

□ Надо показать, что два множества совпадают $\Rightarrow$ покажем, что каждое решение СЛУ имеет вид $x^\circ + z$, $z \in U$ и наобоорт, что каждый вектор такого вида является решением.

($\Rightarrow$) Пусть y - решение СЛУ $\Rightarrow \forall i = \overline{1,m}$, $a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n = b_i$, вместе с этим x° - тоже решение СЛУ, тогда: $\forall i = \overline{1,m}$, $a_{i1}x_1^\circ + \ldots + a_{in}x_n^\circ = b_i \Rightarrow$ вычтем одно решение из другого:

$$a_{i1}(y_1 - x_1^\circ) + a_{i2}(y_2 - x_2^\circ) + \ldots + a_{in}(y_n - x_n^\circ) = 0$$

Следовательно, вектор $z = y - x^\circ \in U \Rightarrow y = x^\circ + z$.

($\Leftarrow$) Если $z \in U \Rightarrow \forall i = \overline{1,m}$, $a_{i1}z_1 + \ldots + a_{in}z_n = 0$. Сложим это равенство с равенствами при частном решении на x°:

$$\forall i = \overline{1,m},\ a_{i1}(x_1^\circ + z_1) + \ldots + a_{in}(x_n^\circ + z_n) = b_i$$

Таким образом, $y = x^\circ + z$, где $z \in U$ - произвольное, тоже будет решением исходной СЛУ. ■

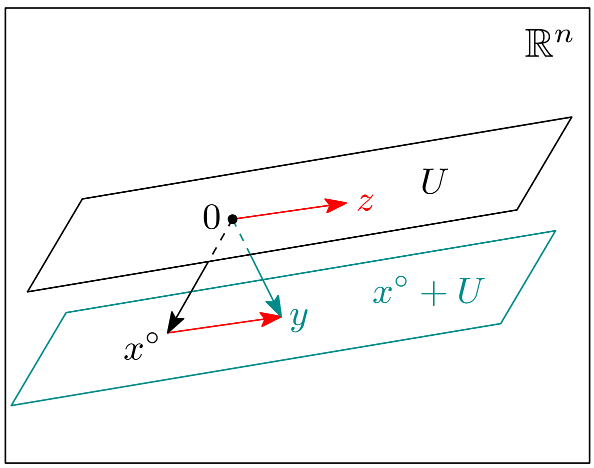

Рис. 2: Геометрическое устройство множества решений произвольной неоднородной СЛУ.

Пример

Пусть $n = 3$, рассмотрим следующую СЛУ:

$$\{x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

Её ассоциированная ОСЛУ будет иметь вид:

$$\{x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

Система уже приведена к ступенчатому виду, тогда:

1) **главные неизвестные**: x_1;
2) **свободные неизвестные**: x_2, x_3;
3) **общее решение ОСЛУ**: $x_1 = -2x_2 - 4x_3$;
4) **общее решение СЛУ**: $x_1 = 8 - 2x_2 - 4x_3$;

Обозначим $U \subseteq \mathbb{R}^3$ - пространство решений ОСЛУ, $\dim U = 3 - 1 = 2$. Получим ФСР, подставляя вместо какой-то свободной неизвестной 1, а остальным придаем значения 0 и находим значения главных неизвестных, тогда:

$$v_2 = (-2, 1, 0),\ v_3 = (-4, 0, 1)$$

Rm: 5. Фундаментальне решения нумеруются номерами тех свободных неизвестных, которым мы придаем значения 1.

Для описания линейного многообразия нам необходимо найти ещё какое-нибудь частное решение. Пусть все свободные неизвестные равны 0, тогда частное решение СЛУ будет иметь вид:

$$x^\circ = (8, 0, 0)$$

Изобразим графически множество решений. Выберем в пространстве координатные оси и будем по ним откладывать координаты: (x_1, x_2, x_3). Тогда каждый вектор в этом геометрическом пространстве имеет три координаты и его можно отождествить с арифметическим вектором (с тройкой из этих координат). Пространство решений ОСЛУ будет двумерным $\Rightarrow$ плоскостью.

Пересечение полученного множества с координатными осями будет в точках: $(8, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 2)$. То есть множество решений нашей СЛУ из одного линейного уравнения это плоскость, содержащая треугольник построенный пунктирными линиями на графике.

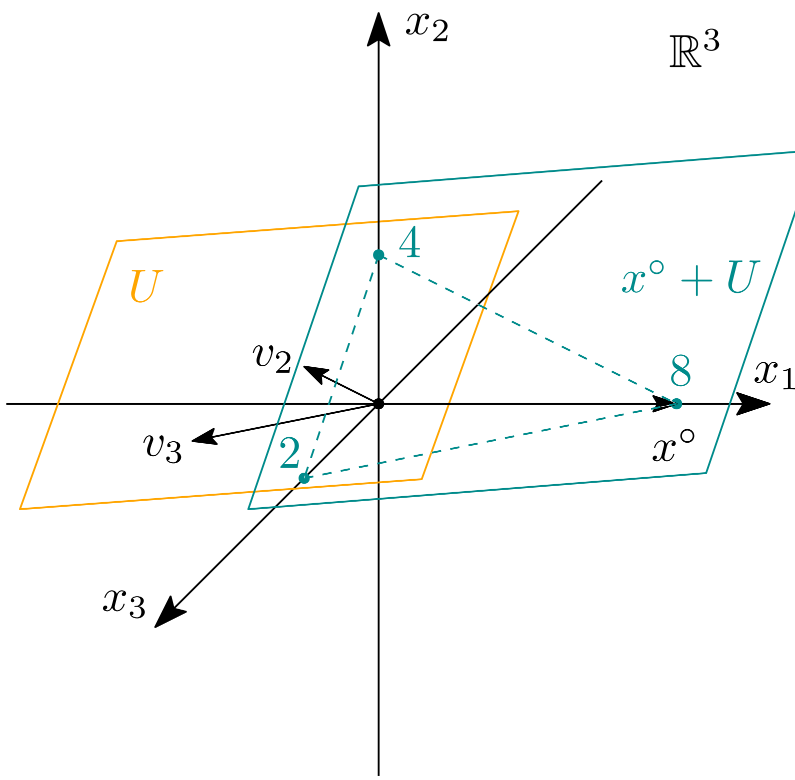

Рис. 3: Построение множества решений СЛУ.

Отметим, что можно двигаться и в обратную сторону и по подпространству построить СЛУ, множеством решения которой будет является это подпространство.

Теорема 4.

1) Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ - некоторое подпространство. Тогда существует ОСЛУ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, множество решений которой равно U;

2) Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ - линейное многообразие. Тогда существует СЛУ от n неизвестных, множество решений которой равно L;

$\square$

1) Пусть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ - базис U, где: $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $\forall i = \overline{1, k}$. Запишем СЛУ с матрицей коэффициентов A:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & 0 \end{cases}$$
Рассмотрим ФСР для этой системы: $\{w_1, \ldots, w_m\}$, где $w_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in})$, $\forall i = \overline{1, m}$. Тогда по теореме 3 будет верно: $m = n - \operatorname{rk} A$, если $\operatorname{rk} A = k$, то $m = n - k$. Рассмотрим систему с матрицей коэффициентов C:
$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & = & 0 \\ c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 & + & \ldots & + & c_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}x_1 & + & c_{m2}x_2 & + & \ldots & + & c_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$
Обозначим через V подпространство решений этой системы в $\mathbb{R}^n$. По построению $v_1, \ldots, v_k$ - это решение этой системы. Следовательно, $U \subseteq V$. С другой стороны:
$$\dim V = n - \operatorname{rk} C = n - m$$
Таким образом, мы получаем: $n - m = n - (n - k) = k = \dim U = \dim V$. А поскольку $U \subseteq V$ и $\dim U = \dim V$, тогда $U = V$;

2) Если $L = \varnothing$, то система может быть экзотической:
$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$$
Пусть $L \neq \varnothing$, тогда по определению линейного многообразия $L = v + U$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ - подпространство. Пусть:
$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & = & 0 \\ c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 & + & \ldots & + & c_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}x_1 & + & c_{m2}x_2 & + & \ldots & + & c_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$
это однородная система с множеством решений U (существует по первому пункту). Пусть верно:
$$v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ b_i = c_{i1}\alpha_1 + c_{i2}\alpha_2 + \ldots + c_{in}\alpha_n,\ \forall i = \overline{1, m}$$

Тогда система:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \ldots & + & c_{1n}x_n & = & b_1 \\ c_{21}x_1 & + & c_{22}x_2 & + & \ldots & + & c_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1}x_1 & + & c_{m2}x_2 & + & \ldots & + & c_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

будет СЛУ, множество решений которой равно L, то есть мы получили искомую СЛУ.

$\blacksquare$