Комплексные числа

Разбор ДЗ

Задача 1. (**К24.6** дмн)) Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:
м) $|\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| < 1$;
н) $|z - 1| + |z + 1| = 3$;

$\square$
м) Получится область плоскости, где реальная и мнимая части отличаются друго от друга не больше, чем на 1, не включая границы $\Rightarrow$ область ограниченная прямыми $y = 1 - x$ и $y = x - 1$, не включая границы.

$$z = a + bi \Rightarrow |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| < 1 \Leftrightarrow |a + b| < 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b < 1 \\ a + b > -1 \end{cases}$$

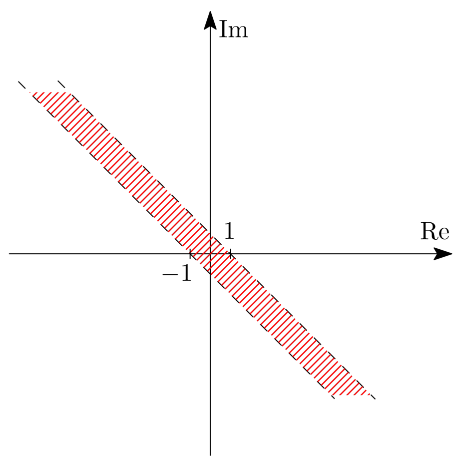

Рис. 1: Область плоскости.

н) По определению, эллипс это ГМТ, таких, что сумма расстояний до двух заданных точек (называемых фокусами) равна константе. Фокусы в точках -1 и 1, $a = \frac{3}{2}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ получим эллипс с канонической формой записи для $z = x + iy$ в следующем виде:

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{4y^2}{5} = 1$$

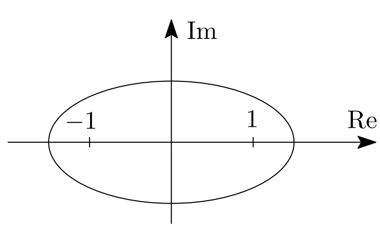

Рис. 2: Эллипс.

$\blacksquare$

Задача 2. (**К20.7** б))

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \begin{cases} z + w \in \mathbb{R} \\ z\cdot w \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z, w \in \mathbb{R} \\ z = \overline{w} \end{array} \right.$$

□

($\Leftarrow$) $z, w \in \mathbb{R} \Rightarrow z + w, z\cdot w \in \mathbb{R}$ - очевидно. $z = \overline{w} \Rightarrow z + w = 2\operatorname{Re}(w), \overline{w}\cdot w = |w|^2 \in \mathbb{R}$.

$$z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = a - bi \Rightarrow z + \overline{z} = 2a,\ z\cdot\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

($\Rightarrow$) Пара чисел однозначно восстанавливается по их сумме и произведения, с точностью до перестановки. Тогда:

$$z, w = \frac{z + 2 \pm (z - w)}{2} = \frac{z + w \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$(x - z)(x - w) = x^2 - (z + w)x + zw \Rightarrow D = (z + w)^2 - 4zw = (z - w)^2$$

$$z + w, z\cdot w \in \mathbb{R} \Rightarrow D = (z - w)^2 \in \mathbb{R}$$

Единственное, мы не знаем какого знака получится D. Если меньше нуля, то возникают комплексные числа, если больше или равно нуля, то действительные. Рассмотрим эти случаи:

1) $D \geq 0 \Rightarrow z, w \in \mathbb{R}$;

2) $D < 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm i\sqrt{|D|} \in \mathbb{C},\ \sqrt{|D|} \in \mathbb{R} \Rightarrow z, w = \dfrac{z + 2 \pm (z - w)}{2} = \dfrac{z + w}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{|D|}}{2} \Rightarrow z = \overline{w}$;

■

Поле комплексных чисел

В прошлый раз мы ввели: $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, ввели операции: $+, -, \cdot, \div$ (не на ноль). Можно выполнить проверки, что сложение/умножение коммутативно, ассоциативно и умножение дистрибутивно, относительно сложения. Это означает, что $\mathbb{C}$ - поле.

Rm: 1. Неформально говоря, поле - это множество на котором можно выполнять 4 арифметические опеpаации: $+, -, \cdot, \div$. Делить на ноль нельзя, всё остальное - можно. В поле обязательно есть два элемента: 0 и 1.

Примеры полей: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ - поля, $\mathbb{Z}$ - не поле. $\mathbb{C}$ - самое большое числовое поле.

Извлечение корней из комплексных чисел

Рассмотрим уравнение: $z^2 = w$ относительно z при фиксированном w. В $\mathbb{R}$ его можно решить только в случае, когда $w \geq 0$ и тогда возможно два случая:

1) Тривиальный, когда $w = 0$;

2) Два решения, если $w > 0$, тогда $z = \pm\sqrt{w}$, где $\sqrt{w} \geq 0$;

В $\mathbb{C}$ ситуация немного другая:

$$z^2 = i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow z = \pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{i} = \left\{\pm\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right\}$$

Вообще говоря, корнем из w мы называем множество: $\sqrt{w} = \{z \mid z^2 = w\}$.

Упр. 1. Из любого $w \neq 0 \in \mathbb{C}$ можно извлечь корень, причем двумя способами.

□

$$z = x + iy = ?,\ w = a + ib,\ (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Предположим, что $b \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 0$, тогда:

$$x = \frac{b}{2y} \Rightarrow \frac{b^2}{4y^2} - y^2 = a \Rightarrow y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \Rightarrow D = a^2 + b^2 = |w|^2 \Rightarrow y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ x = \pm\frac{b}{\sqrt{-2a + 2\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Если $b = 0 \Rightarrow$ или $x = 0$ или $y = 0$, тогда:

$$a < 0 \Rightarrow x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow x = 0, -y^2 < 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-a}$$

$$a > 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow y = 0, x^2 > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

■

Корень n-ой степени из w определяется аналогично: $\sqrt[n]{w} = \{z \mid z^n = w\}$. Хотелось бы понять, можем ли мы алгебраически извлечь корень? Для простоты попробуем взять $n = 3$:

$$(x+iy)^3 = a + bi \Rightarrow (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow \begin{cases} a = x^3 - 3xy^2 \\ b = 3x^2y - y^3 \end{cases}$$

Как такое решать пока не очень ясно, если $a = 0$ или $b = 0$, то задача легко решается, поскольку расщепляется соответствующее уравнение. В общем виде - не очень ясно. Попробуем разобрать немного другую задачу.

Корни из единицы (примеры)

Рассмотрим другую задачу, извлечем корень из 1. Какие корни мы можем вычислить чисто алгебраически?

1) $n = 2$:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Rightarrow x = \sqrt{1} = \{\pm 1\}$$

где $\sqrt{1} = \{\pm 1\}$ - комплексный корень в смысле определения:

$$\sqrt[n]{w} = \{z \mid z^n = w\}$$

2) $n = 3$:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow x^2 + x + 1 = x^2 + x + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{1} = \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

геометрически, мы получаем правильный треугольник, где корни - его вершины;

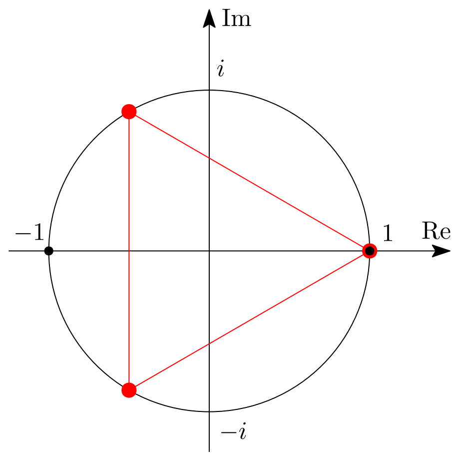

Рис. 3: Корень из единицы (черные точки) и кубический корень из единицы (красные точки).

3) $n = 4$:
$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) \Rightarrow \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$$
геометрически, мы получаем квадрат, где корни - его вершины;

4) $n = 6$:
$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = -(x^3-1)((-x)^3-1) \Rightarrow \sqrt[6]{1} = \sqrt[3]{1} \cup \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \cup -\sqrt[3]{1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{1} = \left\{\pm 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right\}$$
геометрически, мы получаем правильный 6-ти угольник, где корни - его вершины и корни $-\sqrt[3]{1}$ - противоположные корни $\sqrt[3]{1}$;

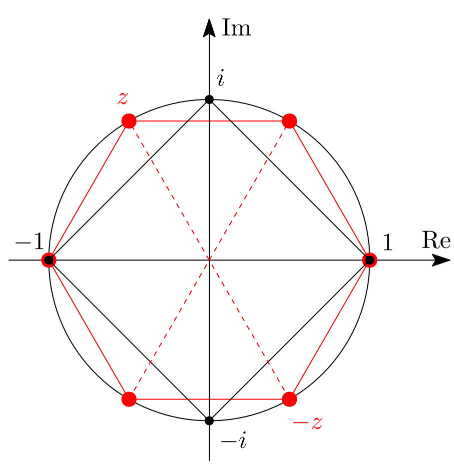

Рис. 4: $\sqrt[4]{1}$ (черные точки) и $\sqrt[6]{1}$ (красные точки).

5) $n = 8$:
$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{1} \cup \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \cup \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{1} \cup \sqrt{i} \cup \sqrt{-i} \Rightarrow \sqrt[8]{1} = \left\{\pm 1, \pm i, \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$$

где $\sqrt{-1} = \{\pm i\} = \{z \mid z^2 = -1\} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{i} \cup \sqrt{-i} = \{z \mid z^2 = \sqrt{-1}\}$. Геометрически, мы получаем правильный 8-ми угольник, где корни - его вершины;

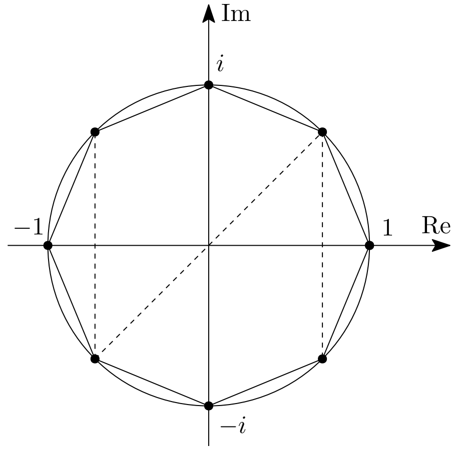

Рис. 5: $\sqrt[8]{1}$.

Rm: 2. Для уравнения $x^3 = 1$ в $\mathbb{R}$ мы говорили, что $y = x^3$ - строго возрастает $\Rightarrow$ кроме единицы другого корня у этого уравнения нет. Тогда как в $\mathbb{C}$ такие рассуждения уже не работают из-за того, что нельзя ввести порядок, согласованный с операциями.

Rm: 3. Геометрически, противоположное комплексное число - будет лежать центрально симметрично, относительно 0.

Как быть с правильным 5-угольником? Можно попробовать, но это алгебраический частный случай. И дальше хотелось бы понять, как можно извлекать корни $\Rightarrow$ нам нужно новое видение комплексных чисел, геометрическое.

Когда мы рассматриваем произведение положительных чисел это можно интерпритировать, как площадь прямоугольника. Какой геометрический смысл у $(-1)\cdot(-1) = 1$ и $i^2 = -1$?

(1) $(-1)\cdot(-1) = 1 \Rightarrow$ Если мы представим числа, как гомотетию, то есть растяжение, то тогда: 5 - растяжение в пять раз, $\frac{1}{2}$ - сжатие в два раза. В этом смысле -1 - это центральная симметрия. Применение двух раз симметрии возвращает нас в исходное состояние;

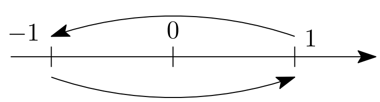

Рис. 6: Геометрический смысл $(-1)(-1) = 1$.

(2) $i^2 = -1 \Rightarrow$ Нам необходима операция, которая при повторении дает симметрию, то есть повроти на 180°. Такой операцией является поворот на 90° $\Rightarrow$ умножение на i это поворт на 90°;

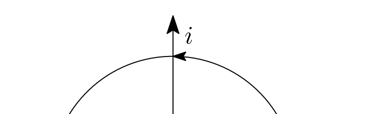

Рис. 7: Геометрический смысл $i^2 = -1$.

Геометрия умножения на комплексное число

Частный случай: Рассмотрим частный случай - умножение на i: $z \mapsto iz$.

Rm: 4. Такой стрелочкой с вертикальной чертой показывают куда переходит аргумент при отображении. Пусть X, Y - множества, тогда отображение из X в Y записывается так:

$$f\colon X \to Y$$

Когда же мы рассматриваем аргументы, то запись имеет вид:

$$f\colon x \mapsto f(x) = y$$

Мы хотим показать, что $z \mapsto iz$ - поворот на 90° против часовой стрелки. Пусть $z = a + ib$, тогда:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z = a + ib \Rightarrow iz = ia + bi^2 = ia - b = -b + ia$$

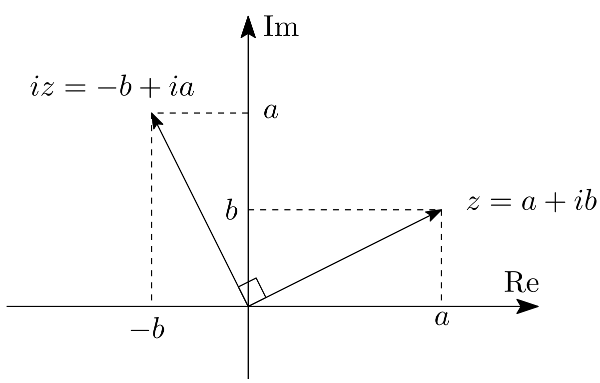

Рис. 8: Геометрический смысл умножения на i.

Общий случай:

1) Алгебраическая форма записи комплексного числа соответствует декартовой системе координат: действительная часть - абсцисса, мнимая - ордината:

$$z = x + yi$$

2) Тригонометрическая форма записи комплексного числа соответствует полярной системе координат: каждая точка (кроме начала координат) определяется расстоянием до нуля и углом, который образует этот вектор с положительной полуосью абсцисс:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z \neq 0,\ r = |z| > 0,\ \varphi = \arg(z)$$

где $\arg(z)$ - аргумент комплексного числа, определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Rm: 5. Заметим, что на окружности радиуса единица: $r = 1$, значение комплексных чисел будет равно: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Это есть ничто иное, как определение косинуса и синуса: косинус - абсцисса, синус - ордината. Любое произвольное комплексное число получается из числа на единичной окружности каким-то растяжением или сжатием.

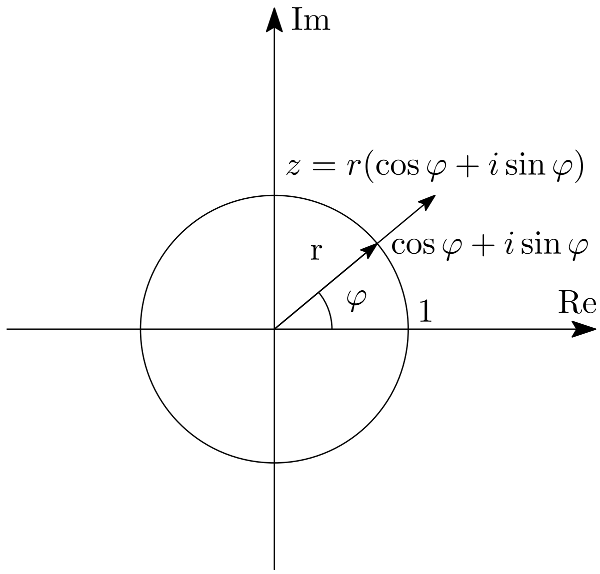

Рис. 9: Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Задача 3. (**K21.1**) Найти тригонометрическую форму:

а) $5 \Rightarrow 5 = 5{\cdot}(1 + i{\cdot}0) = 5{\cdot}(\cos 0 + i\sin 0)$;

б) $i \Rightarrow i = 1{\cdot}(0 + i{\cdot}1) = 1{\cdot}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

д) $1 + i \Rightarrow 1 + i = \sqrt{2}{\cdot}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

з) $-1 + i\sqrt{3} \Rightarrow -1 + i\sqrt{3} = 2{\cdot}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

с) $1 - (2+\sqrt{3})i \Rightarrow |1 - (2+\sqrt{3})i| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$, угол же найдется через арктангенс: $\varphi = -\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$. Чтобы найти его значение в явном виде, решим задачу по поиску угла на следующей картинке:

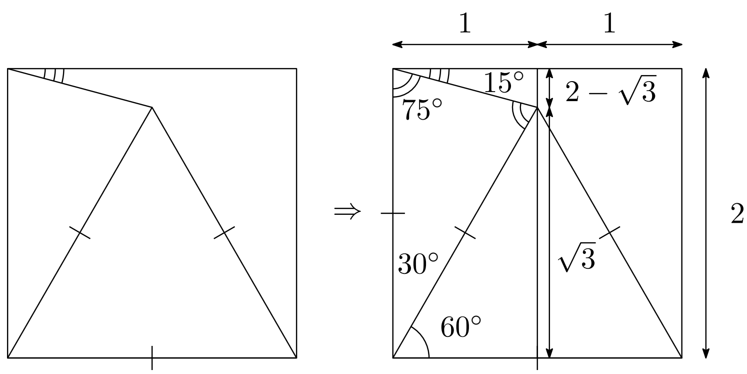

Рис. 10: Нахождение угла $\varphi = -\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$.

По картинке, мы можем увидеть, что $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$ мы можем задать аргумент в явном виде:

$$\varphi = -\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) = -75^\circ = -\frac{5\pi}{12}$$

т) $\cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$;

Теорема 1. Отображение $f\colon z \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot z$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ является композицией (в любом порядке) двух отображений плоскости:

1) Гомотетия с коэффициентом r с центром в 0;
2) Поворт на угол φ с центром в 0;

Пример: $z \mapsto (1+i)z$ - гомотетия с коэффициентоам $\sqrt{2}$ плюс поворот на $\frac{\pi}{4}$.

□ Пусть $z \neq 0$, запишем его в тригонометрическом виде:

$$z = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow f(z) = R\cdot r\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= Rr(\cos\alpha\cos\varphi + i\cos\alpha\sin\varphi + i\sin\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) = Rr(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R| \mapsto |R|\cdot|r|,\ \arg(z) = \alpha \mapsto \arg(f(z)) = \alpha + \varphi$$

Таким образом, получили растяжение и поворот на φ. ■

Следствие 1. (**формула Муавра I,** 1707)

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha),\ n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

□ Повернуть угол на α n раз это тоже самое, что и сразу повернуть угол на $n\alpha$. Отдельный случай для $n = -1$:

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$$

Дальше по индукции верно для любого n. ■

Задача 4. (**K21.2**)

а) $(1+i)^{1000} = ((1+i)^2)^{500} = (2i)^{500} = 2^{500}$ - алгебраический способ, но такое решение будет не всегда.

$$(1+i)^{1000} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\pi 4\right)\right)^{1000} = 2^{500}(\cos(250\pi) + i\sin(250\pi)) = 2^{500}$$

в) $(\sqrt{3}+i)^{30} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{30} = 2^{30}\left(\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)\right) = -2^{30}$;

е) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12} = z \Rightarrow |1-i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$, $|1+i| = \sqrt{2}$ найдем в отдельности модуль и аргумент z:

$$|z| = \frac{|1-i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \sqrt{2} \Rightarrow |z|^{12} = 2^6 = 64$$

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)) = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3},\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4},\ \arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12} = 64(\cos(-7\pi) + i\sin(-7\pi)) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = -64$$

где $-7\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Извлечение корней из комплексных чисел

Как мы уже говорили: $\sqrt[n]{w} = \{z \mid z^n = w\}$. Как будем находить корни? Сначала, перепишем всё в тригонометрических терминах.

$$w = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \neq 0,\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$$

Нам дано w и $n \in \mathbb{Z}$, необходимо найти z:

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \in \mathbb{R} \\ \varphi = \dfrac{\alpha + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Теорема 2. (**формула Муавра II,** 1707) $\forall R > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ справедлива формула:

$$\sqrt[n]{R(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \left\{ \sqrt[n]{R} \left(\cos\tfrac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{\alpha+2\pi k}{n}\right) \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$

Это n точек, лежащих на окружности радиуса $\sqrt[n]{R}$ в вершинах правильного n-угольника.

Rm: 6. Точки указанные в формуле будут повторяться с периодичностью в 2π.

Задача 5. (**K22.6** б)) Найти корни: $\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})}$:

$$\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})} = \sqrt[10]{2^{10}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)} = \left\{2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{30} + \tfrac{\pi k}{5}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{30} + \tfrac{\pi k}{5}\right)\right) \mid k = 0, \ldots, 9\right\}$$

ДЗ: 20.8б, 20.10б, 21.1влух, 21.2вж, 21.9вг, 21.10, 22.1, 22.2, 22.5, 22.6, 22.7авзио