Векторные пространства

Опр: 1. Векторным пространством называется множество V, элементы которого называются векторами, и на котором заданы 2 алгебраические операции: сложение векторов и умножение векторов на числа, которые удовлетворяют следующим свойствам (аксиомы векторного пространства):

1) **Коммутативность сложения**: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;
2) **Ассоциативность сложения**: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;
3) **Нулевой вектор**: $\exists\, 0 \in V : \forall v \in V$, $v + 0 = v$. Иногда нулевой вектор обозначают $\overrightarrow{0}$;
4) **Противоположный вектор**: $\forall v \in V$, $\exists\, w \in V : v + w = 0$. w это противоположный вектор к v;
5) **Ассоциативность умножения**: $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\cdot\mu)\cdot v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
6) **Дистрибутивность умножения отн. векторов**: $\lambda\cdot(u + v) = \lambda\cdot u + \lambda\cdot v$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$;
7) **Дистрибутивность умножения отн. чисел**: $(\lambda + \mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu\cdot v$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$;
8) **Нормировка**: $1\cdot v = v$, $\forall v \in V$;

Примеры векторных пространств

1) **Геометрическое пространство**: $V = \{$геометрические векторы в пространстве (незакрепленные)$\}$.

(1) **Вектор**: это направленный отрезок (причем незакрепленные векторы $\Leftrightarrow$ не откладываем от какой-то фиксированной точки), два вектора считаются одинаковыми если один в другой можно перевести параллельным переносом;

(2) **Сложение векторов**: определяется по правилу параллелограмма - откладываем два вектора от одной точки, строим на них параллелограмм, как на боковых сторонах параллелограмма. Сумма двух векторов это вектор, ведущий из этой точки в противоположную вершину параллелограмма;

(3) **Умножение на скаляр**: если $\lambda > 0$, то вектор будет направлен в ту же сторону, а его длина будет равна длине исходного вектора, умноженная на λ. Если $\lambda < 0$, то вектор будет направлен в противоположную сторону, а его длина будет равна длине исходного вектора, умноженная на $|\lambda|$. Если же $\lambda = 0$, то начало и конец у вектора будет в одной точке $\Rightarrow$ это будет нулевая точка;

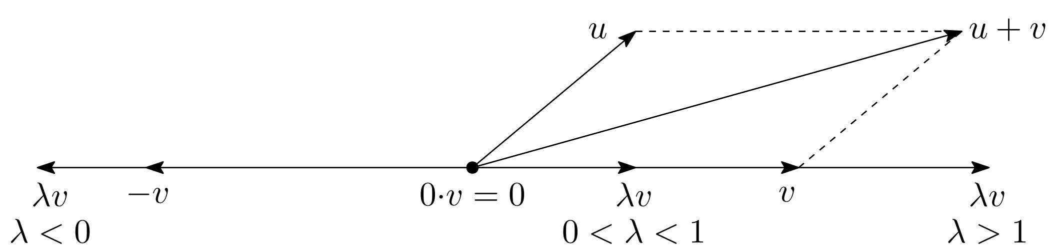

Рис. 1: Геометрические векторы в пространстве: операции сложения и умножения.

(4) **Нулевой вектор**: это вектор начало и конец у которого совпадают;

(5) **Противоположный вектор**: это вектор такой же длины, но смотрящий в противоположном направлении, в сумме с итоговым вектором, дающий ноль;

(6) **Аксиомы векторного пространства**: очевидно, что из геометрических соображений все аксиомы векторного пространства выполнены;

2) **Арифметическое векторное пространство**, обозначение $V = \mathbb{R}^n$.

(1) **Вектор**: это упорядоченный набор (вектор или столбец) из n чисел:

$$x = (x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}$$

(2) **Сложение векторов**: покомпонентное сложение чисел из двух векторов:

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in V \Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

(3) **Умножение на скаляр**: покомпонентное умножение числа λ на числа из вектора:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in V,\ \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

(4) **Аксиомы векторного пространства**: аксиомы выполнены, поскольку операции над строками или столбцами производятся покомпонетно, то есть отдельно на каждой компоненте и эти свойства сводятся к отдельным операциям над числами, а над числами все эти свойства выполнены;

(5) **Нулевой вектор**: $\overrightarrow{0} = (0, 0, \dots, 0)$;

(6) **Противоположный вектор**: $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$;

3) **Пространство функций на множестве** X, $V = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f \colon X \to \mathbb{R}\}$ - функции на X.

(1) **Вектор**: функция $f \colon X \to \mathbb{R}$;

(2) **Сложение векторов**:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(3) **Умножение на скаляр**:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda \cdot f(x)$$

(4) **Аксиомы векторного пространства**: легко видеть, что все аксиомы будут выполнены;

(5) **Нулевой вектор**: $f \equiv 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 0(x) = 0$;

(6) **Противоположный вектор**: $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \colon g(x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

Свойства векторных пространств

Утв. 1. (**Единственность нулевого вектора**) Нулевой вектор единственен.

□ Пусть $0'$ - другой нулевой вектор, сложим их:

$$0 + 0' = 0$$

Так как $0'$ - нулевой вектор. С другой стороны, 0 - тоже нулевой вектор, поэтому:

$$0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$$

■

Утв. 2. (**Единственность противоположного вектора**) $\forall v \in V, \exists!\, w \in V : v + w = 0$.

$\square$ Пусть w' - другой вектор, противоположный v, рассмотрим тройную сумму:

$$w + v + w' \colon (w + v) + w' = 0 + w' = w',\ w + (v + w') = w + 0 = w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = w + 0 = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0 + w' = w' \Rightarrow w = w'$$

$\blacksquare$

В силу единственности противоположного вектора, как-то канонически обозначим его.

Обозначение для противоположного вектора: $w = -v$.

Утв. 3. $\forall v \in V,\ 0{\cdot}v = \overrightarrow{0}$.

$\square$ Рассмотрим это произведение и представим 0 как сумму нулей:

$$\forall v \in V,\ 0{\cdot}v = (0 + 0){\cdot}v = 0{\cdot}v + 0{\cdot}v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{\cdot}v + (-0{\cdot}v) = 0{\cdot}v + 0{\cdot}v + (-0{\cdot}v) \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = 0{\cdot}v + \overrightarrow{0} = 0{\cdot}v \Rightarrow 0{\cdot}v = \overrightarrow{0}$$

$\blacksquare$

Утв. 4. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

$\square$ По аналогии выше:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} = \lambda{\cdot}(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} + \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} + (-\lambda{\cdot}\overrightarrow{0}) = \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} + \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} + (-\lambda{\cdot}\overrightarrow{0}) \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda{\cdot}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

$\blacksquare$

Утв. 5. $\forall v \in V,\ (-1){\cdot}v = -v$.

$\square$ Проверим, что написанный вектор является противоположным.

$$v + (-1){\cdot}v = 1{\cdot}v + (-1){\cdot}v = (1 + (-1)){\cdot}v = 0{\cdot}v = \overrightarrow{0}$$

А это и означает по определению, что $(-1){\cdot}v = -v$. $\blacksquare$

Линейная зависимость

Опр: 2. Линейная комбинация векторов $v_1, \ldots, v_m \in V$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ это выражение следующего вида:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m$$

Её значение это тоже вектор из пространства V.

Опр: 3. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Значение тривиальной линейной комбинации равно $\overrightarrow{0}$. В противном случае, она называется нетривиальной.

Опр: 4. Система векторов $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая равна нулю:

$$\exists\, i \colon \lambda_i \neq 0,\ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = \overrightarrow{0}$$

В противном случае, система называется линейно независимой

Пример: $S = \{v\} \Rightarrow$ эта система линейно зависима $\Leftrightarrow v = \overrightarrow{0}$.

□
($\Rightarrow$) В самом деле: $\exists\, \lambda \neq 0 \colon \lambda \cdot v = \overrightarrow{0}$, умножим равенство на число обратное к λ, тогда:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v = \overrightarrow{0}$$

($\Leftarrow$) Обратно: $v = \overrightarrow{0} \Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ - нетривиальная лин. комбинация $\Rightarrow S = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ - линейно зависима. ■

Пример: $S = \{v_1, v_2\}$ - линейно зависима $\Leftrightarrow$ когда векторы пропорциональны, то есть $v_1 = k v_2$.

□
($\Rightarrow$) Пусть $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \overrightarrow{0}$ - нетривиальная лин. комбинация, можно считать без ограничения общности, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда:

$$\lambda_1 v_1 = -\lambda_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2$$

($\Leftarrow$) Если $v_1 \sim v_2$, то без ограниения общности можно считать, что $v_1 = \mu \cdot v_2$, тогда:

$$1 \cdot v_1 + (-\mu) \cdot v_2 = \overrightarrow{0}$$

Таким образом, мы получили нетривиальную линейную комбинацию, поскольку $1 \neq 0 \Rightarrow$ система векторов $\{v_1, v_2\}$ - линейно зависима. ■

Свойства линейной зависимости

Утв. 6. Если система векторов S - линейно зависима, $S \subset S' \Rightarrow S'$ - линейно зависима.

□ Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $S' = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$. Поскольку S - линейно зависима, то $\exists$ нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow$ можем добавить к этим слагаемым оставшиеся векторы из S' с нулевыми коэффициентами:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$$

Это будет нетривиальной линейной комбинацией векторов из системы S', потому что осталась нетривиальная комбинация из $S \Rightarrow S'$ - линейно зависима. ■

Утв. 7. Если система векторов S - линейно независима, $\forall S' \subset S \Rightarrow S'$ - линейно независима.

$\square$ Пусть это не так и S' - линейно зависима, тогда по предыдущему утверждению S - тоже была бы линейно зависимой, поскольку $S' \subset S \Rightarrow S'$ линейно независима. $\blacksquare$

Опр: 5. Говорят, что вектор $v \in S$ линейно выражается через оставшиеся векторы системы S, если существует линейная комбинация векторов из $S \setminus \{v\}$ равная v:

$$\exists\, v_1, \ldots, v_m \in S \setminus \{v\},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}\colon v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$$

Утв. 8. Система векторов S линейно зависима $\Leftrightarrow \exists\, v \in S\colon v$ представляется в виде линейной комбинации векторов из оставшейся системы: $S \setminus \{v\}$ (линейно выражается через оставшиеся векторы).

$\square$
($\Rightarrow$) Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ - линейно зависима, тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная 0:

$$\exists \lambda_i \neq 0,\ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$$

Перенесем все слагаемые, кроме i-го перенсти в правую часть и поделим на λ_i:

$$v_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) \cdot v_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right) \cdot v_{i-1} + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right) \cdot v_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{\lambda_m}{\lambda_i}\right) \cdot v_m$$

То есть, v_i линейно выражается через векторы $S \setminus \{v_i\}$.

($\Leftarrow$) Пусть $v_i = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_m v_m$, перенесём все слагаемые и получим:

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_m v_m = 0$$

Следовательно, мы получили нетривиальную линейную комбинацию векторов из S, которая равна $0 \Rightarrow$ система S - линейно зависима. $\blacksquare$

Утв. 9. Предположим, что система векторов S - линейно независима, но $S \cup \{v\}$ - линейно зависима, тогда v линейно выражается через S, причем единственным способом.

$\square$ Обозначим $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \Rightarrow \exists$ нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m + \lambda \cdot v = 0$$

Тогда $\lambda \neq 0$ иначе мы бы получили нетривиальную систему: $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \Rightarrow$ система S была бы линейно зависима, вопреки условию. Следовательно, аналогично предыдущему утверждению:

$$v = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \cdot v_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_m}{\lambda}\right) \cdot v_m$$

В результате, v линейно выражается через векторы системы S. Проверим, что он выражается единственным способом. Пусть вектор v представляется неоднозначно:

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m) \cdot v_m = 0$$

Поскольку S - линейно независима, то линейная комбинация векторов из S может быть только тривиальной, следовательно:

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_m - \beta_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$$

И таким образом, представление единственное. $\blacksquare$

Rm: 1. Заметим, что линейная зависимость векторов $v_1, \ldots, v_k$ не означает, что любой из них выражается через остальные. Например, $V = \mathbb{R}^2$ с векторами:

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ v_3 = (0,2) \Rightarrow 0{\cdot}v_1 + 2{\cdot}v_2 + (-1){\cdot}v_3 = 0$$

Из этой линейной комбинации выразить v_1 нельзя.

Теорема 1. (**Основная лемма о линейной зависимости**)
Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$ - две системы векторов, причем система S линейно выражается через систему T и в системе S больше векторов, чем в T $(n > m)$. Тогда S линейно зависима.

Rm: 2. Можно теорему переформулировать так: Если система S линейно выражается через систему T и система S линейно независима, то в ней векторов не больше, чем в T $(n \leq m)$.

□ По условию $\forall j = \overline{1,n}$, $v_j = a_{1j}{\cdot}w_1 + a_{2j}{\cdot}w_2 + \ldots + a_{mj}{\cdot}w_m$. Найдем нетривиальную линейную комбинацию векторов из S, равную нулю. Для этого рассмотрим их произвольную линейную комбинацию:

$$\lambda_1{\cdot}v_1 + \lambda_2{\cdot}v_2 + \ldots + \lambda_n{\cdot}v_n = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j{\cdot}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}{\cdot}\lambda_j{\cdot}w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j\right){\cdot}w_i$$

Следовательно, линейную комбинацию векторов из системы $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ переписали в виде линейной комбинации векторов из системы $T = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Рассмотрим ОСЛУ у которой матрица коэффициентов будет составлена из $\{a_{ij}\}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

По условию у нас $n > m \Leftrightarrow$ уравнений меньше, чем неизвестных $\Rightarrow$ как мы уже знаем, существует ненулевое решение: $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n \Rightarrow$ при подстановке в уравнения даст верные равенства:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j = 0,\ \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j\right){\cdot}w_i = 0 \Rightarrow \lambda_1{\cdot}v_1 + \lambda_2{\cdot}v_2 + \ldots + \lambda_n{\cdot}v_n = 0$$

Но при этом, поскольку решение мы взяли ненулевое, то $\exists\,\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ система S - линейно зависима. ■

Rm: 3. Понятия линейной комбинации, линейной зависимости, линейного выражения одних векторов через другие можно обобщить на бесконечные системы векторов.

Линейная комбинация: $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i{\cdot}v_i$, система векторов $S = \{v_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ имеет смысл если $\lambda_i = 0$, $\forall i \in \mathrm{I}$, кроме конечного количества $\Rightarrow$ ненулевых лишь конечное число слагаемых.

В этом случае свойства линейной зависимости переносятся без изменений на бесконечные системы векторов, поскольку всё сводится к конечным подсистемам.