# Факториальные кольца

**Опр: 1.** Целостное кольцо $A$ называется факториальным, если $\forall a \in A$, $a \neq 0$, $a \notin A^\times$ можно разложить в произведение простых множителей единственным образом, с точностью до перестановки множителей и их замены на ассоциированные элементы.

**Пример нефакториального целостного кольца**: Рассмотрим кольцо состоящее из всех многочленов над полем $K$, у которых коэффициент при первой степени $x$ равен 0:

$$A = \{f = a_0 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in K\}$$

Легко видеть, что $A \subset K[x]$ - подкольцо. Оно коммутативно, ассоциативно, с единицей и без делителей нуля, но оно не факториально:

$$x^6 \in A \Rightarrow x^6 = x^2{\cdot}x^2{\cdot}x^2 = x^3{\cdot}x^3$$

где $x^2$ - простые элементы в $A$, поскольку их нельзя разложить на многочлены меньшей степени, лежащих в том же самом кольце, то есть не разлагается в произведение двух необратимых множителей. Тоже самое можно сказать и про $x^3$ - простые элементы. $x^2$ и $x^3$ - не ассоциированные элементы и количество множителей в обоих разложениях разное $\Rightarrow$ нарушается единственность разложения на простые множители $\Rightarrow$ $A$ - не факториальное кольцо.

# Неприводимые многочлены

В прошлый раз мы поняли, что в евклидовом кольце многочленов существует единственное разложение любого многочлена на неприводимые многочлены. Но возникает вопрос, как устроены неприводимые многочлены в $K[x]$? Оказывается, что ответ зависит от поля $K$.

**Пример**: $f(x) = x^2 + 1$. Этот многочлен неприводим в $\mathbb{R}[x]$, поскольку он мог бы разложиться на два множителя первой степени, но в этом случае у него были бы корни, но действительных корней у $f(x)$ нет, поскольку $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Но $f(x) = (x - i)(x + i)$ в $\mathbb{C}[x]$.

Тем не менее есть общие факты, которые справедливы над любым полем.

**Утв. 1.** (**Общие факты о неприводимых многочленах для** $K[x]$)

1) Многочлены степени 1 неприводимы в $K[x]$ для любого $K$;

   □ Очевидно, поскольку при перемножении степени суммируются, а число 1 нельзя представить в виде суммы двух меньших натуральных чисел. ■

2) Неприводимые многочлены степени больше 1 не имеют корней в $K$;

   □ Пусть $f(x)$ - неприводимый многочлен степени больше 1 и у него есть корень $x_0$, тогда по теореме Безу $f(x) = (x - x_0){\cdot}g(x)$. Поскольку $\deg(f) > 1$, тогда $\deg(g) > 0$ и тогда $f$ разложился на два многочлена, каждый из которых необратим $\Rightarrow$ $f(x)$ - приводим. ■

3) Если многочлены не имеют корней в $K$, то они могут быть приводимыми;

   □ $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$ - приводим в $\mathbb{R}[x]$, но не имеет корней в $\mathbb{R}$; ■

4) Многочлены наименьшей степени, не имеющие корей в $K$, неприводимы в $K[x]$;

   □ Пусть $f$ - не имеет корней и имеет самую маленькую степень среди многочленов, которые не имеют корней. Если $f = g{\cdot}h$, $0 < \deg(g), \deg(h) < \deg(f)$, то $g$ и $h$ тоже не имеют корней $\Rightarrow$ противоречие. ■

# Основная теорема алгебры комплексных чисел (ОТА)

**Теорема 1.** (**ОТА**) Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени $> 0$ имеет корень в $\mathbb{C}$.

**Следствие 1.** Неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ это многочлены 1-ой степени и только они.

☐ Из первого пункта утверждения выше следует, что многочлены первой степени неприводимы, а из второго пункта того же утверждения следует, что неприводимых многочленов степени больше 1 нет, потому что такой многочлен не имеет корней. В поле комплексных чисел же любой многочлен положительной степени имеет корни $\Rightarrow$ неприводимых многочленов степени больше 1 не бывает. ■

**Следствие 2.** $\forall f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(f) = n > 0$, $\exists$ разложение в произведение линейных множителей:

$$f(x) = c\cdot(x - z_1)\cdot\ldots\cdot(x - z_n),\ c \neq 0,\ z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$$

где $c$ - это ненулевой старший коэффициент.

☐ Любой многочлен разлагается на неприводимые множители над любым полем, а над полем $\mathbb{C}$ неприводимые множетели - это только множители первой степени $\Rightarrow$ любой многочлен разлагается на множители первой степени. ■

**Следствие 3.** Число комплексных корней многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(f) > 0$, с учетом их кратностей, равно $\deg(f)$.

☐ По следствию 2, корни многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(f) = n$ это $z_1, \ldots, z_n$. Они могут повторяться, причем каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность в многочлене $f$ и общее количество равно $n$ с учетом кратностей. ■

**Опр: 2.** Поле $K$ называется алгебраически замкнутым, если $\forall f \in K[x]$ степени $> 0$ имеет корень в $K$.

С учетом этого определения, можно более лаконично сформулировать ОТА.

**Теорема 2.** (**ОТА**) Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

**Rm: 1.** Заметим, что следствия верны для любого алгебраически замкнутого поля $K$. Более того, будет верна следующая теорема (без доказательства).

**Теорема 3.** Любое поле $K$ можно расширить до алгебраически замкнутого поля $L \supseteq K$.

Существует около 10 доказательств ОТА, одно из первых строгих доказательств было придумано Гауссом, но ни одно из этих доказательств не является чисто алгебраическим, все они в той или иной степени используют аналитические соображения.

**Rm: 2.** Это так, поскольку $\mathbb{C}$ само не является чисто алгебраическим объектом, оно строится из $\mathbb{R}$ с помощью алгебраической конструкции, но $\mathbb{R}$ строится не чисто алгебраически, оно строится из поля $\mathbb{Q}$ с помощью аналитической идеи пополнения.

Доказательство ОТА также не будет чисто алгебраическим, поэтому придется перенести основные простейшие понятия математического анализа с поля $\mathbb{R}$ на поле $\mathbb{C}$.

# Доказательство ОТА

## Основные понятия математического анализа для $\mathbb{C}$

**Опр: 3.** ε-окрестностью точки $z_0$ называется множество чисел: $\mathcal{U}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$.

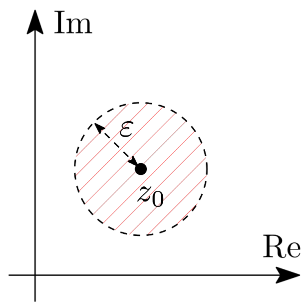


Рис. 1: $\varepsilon$-окрестность точки $z_0$.

**Опр: 4.** Предел последовательности: $z_n \to z$ при $n \to \infty$, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0, \forall n \geq n_0 \colon z_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$$

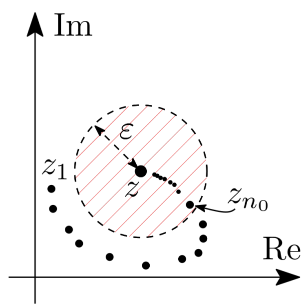


Рис. 2: Предел последовательности в $\mathbb{C}$.

Предел функции, непрерывность и остальные понятия определяются дословно так же, как для $\mathbb{R}$, после определения $\varepsilon$-окрестности и предела последовательности.

## Основные свойства математического анализа для $\mathbb{C}$

Аналогично основным понятиям, основные факты и свойства этих понятий также переносятся с поля $\mathbb{R}$ на поле $\mathbb{C}$ вместе с доказательствами без изменений. Отметим лишь некоторые из них.

**Лемма 1.** Пусть $z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0$, тогда:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 \Leftrightarrow x_n \to x_0,\, y_n \to y_0$$

□
(⇒)

$$|z_n - z_0| = \sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2} \geq |x_n - x_0|, |y_n - y_0|$$
$$\Rightarrow |z_n - z_0| \to 0 \Rightarrow |x_n - x_0| \to 0 \wedge |y_n - y_0| \to 0$$

(⇐)

$$|x_n - x_0| \to 0 \wedge |y_n - y_0| \to 0 \Rightarrow |z_n - z_0| \to 0$$

■

<u>**Основные свойства**</u>:

1) **Неравенство треугольника**: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

   □
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 =$$
$$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

   ■

2) **Обратное неравенство треугольника**: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$;

   □
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$
$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1| \Rightarrow |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$$
$$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_2| \Rightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

   ■

3) $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \Rightarrow |z_n| \to |z|$;

   □ $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| \to 0 \Rightarrow |z_n| \to |z|$; ■

4) $z_n \to z_0,\ w_n \to w_0 \Rightarrow z_n + w_n \to z_0 + w_0$, при $n \to \infty$;
5) $z_n \to z_0,\ w_n \to w_0 \Rightarrow z_n \cdot w_n \to z_0 \cdot w_0$, при $n \to \infty$;
6) $f(z) \to f(z_0),\ g(z) \to g(z_0) \Rightarrow f(z) + g(z) \to f(z_0) + g(z_0)$, при $z \to z_0$;
7) $f(z) \to f(z_0),\ g(z) \to g(z_0) \Rightarrow f(z)\cdot g(z) \to f(z_0)\cdot g(z_0)$, при $z \to z_0$;
8) Если $f$ и $g$ - непрерывны, тогда $f + g$ и $f\cdot g$ - тоже будут непрерывными;

**Rm: 3.** Все доказательства, как для $\mathbb{R}$.

**Утв. 2.** Многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ задает непрерывную функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

□ Следует непосредственно из свойства 5): тождественная функция $f(z) = z$ - непрерывна, далее мы берём одночлены и саму эту функцию на себя умножаем ⇒ получаем функцию $z^k$ ⇒ произведение непрерывных функций - непрерывно. Умножаем на коэффициенты - непрерывность сохраняется, а затем мы получившиеся одночлены складываем ⇒ сумма опять будет непрерывной. ■

**Утв. 3.** Пусть $K \subset \mathbb{C}$ - компакт, то есть замкнутое, ограниченное подмножество, тогда любая непрерывная функция $h\colon K \to \mathbb{R}$ достигает своего минимума в некоторой точке этого компакта.

□ Пусть $K \subset \mathbb{C}$ - компакт. Пусть $M = \inf\limits_{z\in K} h(z)$, она всегда существует у множества вещественых чисел (возможно, что $M = -\infty$). Тогда существует последовательность: $z_n \in K\colon h(z_n) \to M$ при $n \to \infty$.

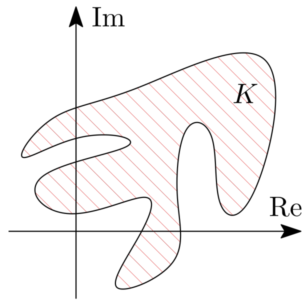


Рис. 3: Компакт $K \subset \mathbb{C}$.

Вместе с этим, $z_n$ не обязана сходиться. Обозначим её в виде: $z_n = x_n + iy_n$ и рассмотрим в отдельности последовательности действительной части и мнимой. Поскольку $z_n$ - ограниченная, так как $z_n \in K$, то тогда и $x_n$ - ограниченная последовательность $\Rightarrow$ можно выделить сходяющуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, без ограничения общности, можно считать, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Аналогично, можно считать, что и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, тогда:

$$z_n = x_n + iy_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 = x_0 + iy_0$$

Поскольку $K$ - замкнутое множество, то тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in K$. Поскольку $h(z)$ - непрерывна, и поскольку значение этой функции от $z_n$ стремится к $M$, то будет верно:

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(z_0) = M$$

Следовательно, $z_0$ - это точка минимума. ■

## Доказательство ОТА

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(f) = n > 0$.

**Лемма 2.** $|f(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$.

□ Представим $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = z^n \cdot \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |z|^n \cdot \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right|$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{z}\right| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} \to 0 \Rightarrow \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$$

Тогда:

$$\exists\, R > 0\colon \forall z \in \mathbb{C},\ |z| > R \Rightarrow \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \le \frac{|a_n|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(z)| \ge R^n \cdot \frac{|a_n|}{2} \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty \Rightarrow \forall C > 0,\ \exists\, R > 0,\ \forall |z| \ge R\colon |f(z)| > C \Rightarrow |f(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} \infty$$

■

**Лемма 3.** (**Даламбера**) Если $z_0 \in \mathbb{C}$, , $f(z_0) \neq 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, z \in \mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$: $|f(z)| < |f(z_0)|$.

**Rm: 4.** Лемма Даламбера неформально говорит, что ненулевое значение многочлена всегда можно уменьшить по модулю.

□ Разложим многочлен $f(x)$ по степеням $x - z_0$, пропустив те члены, которые будут равны нулю:

$$f(x) = c_0 + c_k{\cdot}(x - z_0)^k + (x - z_0)^{k+1}{\cdot}g(x), \quad c_0, c_k \neq 0$$

Ненулевой коэффициент $c_k$ найдется, иначе многочлен $f$ был бы константой, а у нас $\deg(f) > 0$. Также, заметим, что $c_0 \neq 0$ потому, что $f(z_0) = c_0 \neq 0$. После $c_k$ также могут идти ненулевые коэффициенты, мы их объединили и вынесли общий множитель $(x - z_0)^{k+1}$, всё остальное объединили в $g(x)$. Подберём число $z \in \mathcal{U}_\varepsilon(z_0)$ так, чтобы:

$$\mathrm{Arg}(c_k(z - z_0)^k) = \mathrm{Arg}(c_0) + \pi$$

Два вектора имеют противоположное направление $\Rightarrow$ комплексные числа имеют аргумент отличающийся на $\pi$. При этом, мы хотим, чтобы:

$$|c_k(z - z_0)^k| < |c_0|$$

Пусть $\varphi = \mathrm{Arg}(c_0)$, $\psi = \mathrm{Arg}(c_k)$ и $z - z_0 = r{\cdot}e^{i\alpha}$, где $r$ - фиксированно.

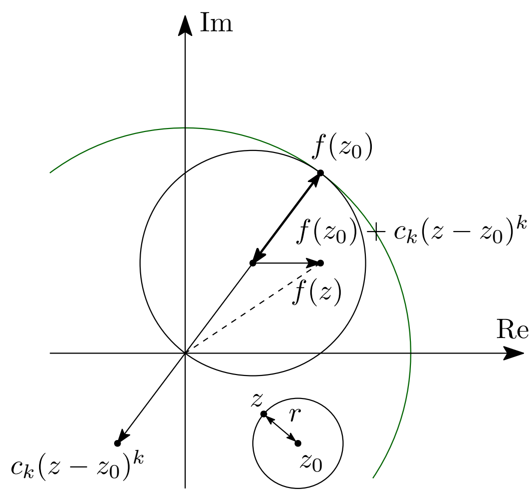


Рис. 4: Доказательство леммы Даламбера.

Перепишем условия выше:

$$\begin{cases} \mathrm{Arg}(c_k(z - z_0)^k) = \mathrm{Arg}(c_0) + \pi \\ |c_k(z - z_0)^k| < |c_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi + k{\cdot}\alpha = \varphi + \pi \\ |c_k|{\cdot}r^k < |c_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\varphi + \pi - \psi}{k} \\ r < \sqrt[k]{\frac{|c_0|}{|c_k|}} \end{cases}$$

Подобрав $z$, удовлетворяющее условиям выше, мы получим следующее:

$$|c_0 + c_k(z - z_0)^k| < |f(z_0)|$$

При достаточно малом $r$, третий член разложения будет меньше любого заданного нами числа:

$$|(z - z_0){\cdot}g(z)| = r{\cdot}|g(z)| < |c_k| \Rightarrow |(z - z_0)^{k+1}{\cdot}g(z)| < |c_k{\cdot}(z - z_0)^k|$$

поскольку $g(z)$ - многочлен $\Rightarrow$ непрерывная функция, а непрерывная функция в окрестности точки $z_0$ будет ограничена, в том числе и по модулю. Таким образом, точка $f(z)$ лежит внутри окружности радиуса $|c_k(z-z_0)^k|$ с центром в точке $f(z_0)+c_k(z-z_0)^k$. Тогда точка $f(z)$ попадет внутри окружности с центром в нуле, радиуса $|f(z_0)|$, в частности это означает: $|f(z)|<|f(z_0)|$. Алгебраически:

$$|f(z)| \leq |c_0 + c_k(z-z_0)^k| + |(z-z_0)^{k+1} \cdot g(z)| =$$

$$= |c_0| - |c_k(z-z_0)^k| + |(z-z_0)^{k+1} \cdot g(z)| < |c_0| = |f(z_0)|$$

■

**Доказательство ОТА**:

□

1) Покажем, что $|f(z)|$ достигает минимума на $\mathbb{C}$ в некотрой точке $z=z_0$. По лемме 2, $|f(z)| \to \infty$, когда $|z| \to \infty$, тогда:

   $$\exists\, R>0\colon \forall z \in \mathbb{C},\ |z|>R \Rightarrow |f(z)|>|a_0|$$

   У нас получается замкнутый круг радиуса $R$ на комплексной плоскости, за пределами которого значение многочлена по модулю достаточно большое. Обозначим его так:

   $$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

   Что происходит внутри? На компакте $K$ $|f(z)|$ достигает минимума в некоторой точке $z=z_0 \in K$.

   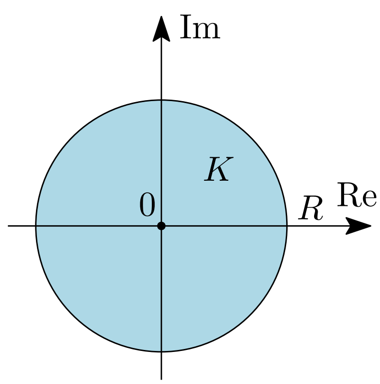
   

   Рис. 5: Компакт $K$.

   На самом деле это будет минимум и на всей плоскости. В самом деле:

   $$\forall z \in K,\ |f(z)| \geq |f(z_0)| \Rightarrow |f(0)| = |a_0| \geq |f(z_0)|$$

   $$\forall z \notin K,\ |f(z)| > |a_0| \geq |f(z_0)|$$

   Следовательно, $z_0$ - это точка минимума на $\mathbb{C}$;

2) Убедимся, что $f(z_0)=0$. Если $f(z_0) \neq 0$, то по лемме Даламбера: $\exists\, z \in \mathbb{C}\colon |f(z)|<|f(z_0)|$, но это противоречие, поскольку $z_0$ - это точка минимума $\Rightarrow f(z_0)=0$;

■

# Многочлены над полем $\mathbb{R}$

Как устроены неприводимые многочлены, разложение на неприводимые множители в $\mathbb{R}[x]$?

**Лемма 4.** Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$, тогда $z_0 \in \mathbb{C}$ является корнем $f$ кратности $k \Leftrightarrow \overline{z}_0$ - корень $f$ кратности $k$.

□

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ \forall i = \overline{0,n},\ a_i \in \mathbb{R}$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \Rightarrow \overline{f(z)} = \overline{a}_0 + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \ldots + \overline{a_n z^n} =$$
$$= a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \ldots + a_n \overline{z}^n = f(\overline{z}) \Rightarrow f(z_0) = 0 \Leftrightarrow f(\overline{z}_0) = 0$$

Аналогично, мы можем получить, что:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(z_0) = 0 \Leftrightarrow f^{(k)}(\overline{z}_0) = 0$$

Таким образом, $z_0$ - корень $f$ кратности $k \Leftrightarrow f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(k)}(z_0)$, но поскольку это эквивалентно обращению в нуль для каждой из производной в $\overline{z}_0$, то:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(k)}(z_0) \Leftrightarrow f(\overline{z}_0) = f'(\overline{z}_0) = \ldots = f^{(k-1)}(\overline{z}_0) = 0 \neq f^{(k)}(\overline{z}_0)$$

А это означает, что $\overline{z}_0$ - тоже корень $f$ кратности $k$. ■

**Теорема 4.** Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$ - это многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Любой многочлен в $\mathbb{R}[x]$ степени $> 0$ разлагается в произведение линейных множителей (отвечающих его действительным корням) и квадратичных множителей с отрицательным дискриминантом (отвечающих парам сопряженных мнимых корней).

□ Разложим $f \in \mathbb{R}[x]$ на линейные множители (то есть, множители первой степени) над $\mathbb{C}$:

$$f(x) = c(x - x_1)\cdot \ldots \cdot(x - x_r)\cdot(x - z_1)\cdot(x - \overline{z}_1)\cdot \ldots \cdot(x - z_k)\cdot(x - \overline{z}_k)\cdot \ldots \cdot(x - z_s)\cdot(x - \overline{z}_s)$$

$$x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R},\ z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$
$$\forall k = \overline{1,s},\ (x - z_k)\cdot(x - \overline{z}_k) = x^2 - (z_k + \overline{z}_k)x + z_k \overline{z}_k = x^2 - 2\operatorname{Re}(z_k) + |z_k|^2 \in \mathbb{R}[x]$$

Мы получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Посчитаем его дискриминант:

$$\frac{D}{4} = \operatorname{Re}(z_k)^2 - |z_k|^2 = -\operatorname{Im}(z_k)^2 < 0$$

Линейные и квадратичный множители дальше над $\mathbb{R}$ не разлагаются $\Rightarrow$ они неприводимые. ■

**Следствие 4.** $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(f)$ - нечетная, тогда $f(x)$ имеет корень в $\mathbb{R}$.

□ В разложении на неприводимые множители все множители не могут быть квадратичными. Тогда есть линейный множитель $\Leftrightarrow$ есть вещественный корень. Ещё это можно показать так:

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \ldots + a_1 x + a_0 \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,\ f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

По теореме о промежуточном значении непрерывной функции, многочлен примет значение 0, а это и значит, что есть вещественный корень. ■