Введение

В древней Греции изучались конический сечения Аполлонием Пергским. Он изучал, что будет если пересекать конус плоскостью. Какое получится множество точек?

Из школьной геометрии можно показать, что если плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении будет окружность. Но что будет при пересечении другими плоскостями, не обязательно ортогональными оси конуса? Оказывается, что ответ разный и изучать его тоже можно по-разному.

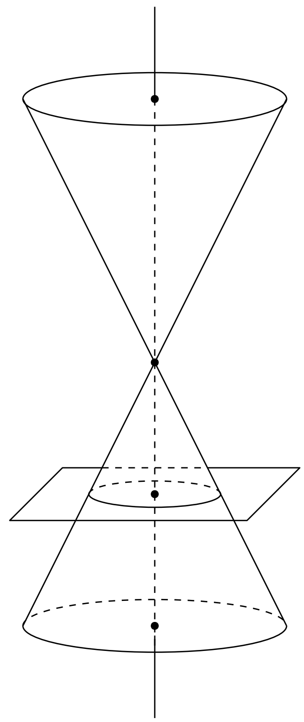

Рис. 1: Сечение конуса, ортогонально его оси.

Есть, например, **геометрическая теория**, которая близка к тому, что изучается в школе (синтетическая геометрия). Другой подход - **аналитический**. В своё время Декарт понял, что можно описывать точки в плоскости и в пространстве, приписывая им координаты. Более того, уже должно быть известно, что некоторые геометрические объекты удобно описывать уравнениями.

Аналитический подход: Изучение геометрических объектов, с помощью уравнений.

Этот подход является более продуктивным, чем геометрический, поэтому мы немного поговорим про геометрический подход, а затем перейдем в аналитический.

Геометрическая теория конических сечений

Опр: 1. Коническим сечением или коникой называют секущую плоскость, которая не должна проходить через вершину конуса.

Rm: 1. Отметим, что в аналитическом подходе из-за того, что коники описываются уравнениями второго порядка, они будут называтся квадриками. Но не все квадрики являются кониками. Есть уравнения второго порядка, которые описывают вовсе не конические сечения, например $xy = 0$ - описывает крест: $x = 0$, $y = 0$.

Опр: 2. Эллипсом называется геометрическое место точек (то есть, множество), таких, что сумма расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами эллипса) постоянна.

Пусть F_1, F_2 - фокусы, тогда мы смотрим на множество точек X таких, что:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a$$

где $2a$ - некоторая постоянная. Тогда эллипс будет иметь вид:

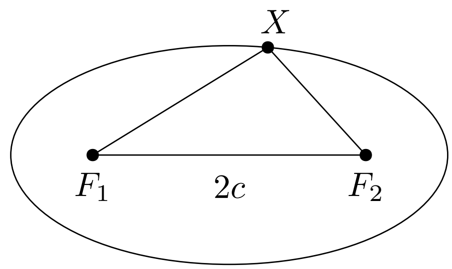

Рис. 2: Эллипс.

Rm: 2. Расстояние между фокусами обычно обозначается через $2c$ и ради осмысленности множества накладывается условие $a > c$. Если $a = c \Rightarrow$ просто отрезок. Если $a < c$, то получим пустое множество.

Опр: 3. Гиперболой называется геометрическое место точек - ГМТ, таких, что модуль разность расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами гипербол) постоянен.

Пусть F_1, F_2 - фокусы, тогда мы смотрим на множество точек X таких, что:

$$||XF_1| - |XF_2|| = 2a$$

Тогда гипербола будет иметь вид:

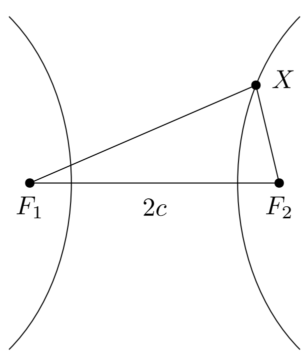

Рис. 3: Гипербола.

Расстояние между фокусами обычно обозначается через $2c$ и ради осмысленности множества накладывается условие $a < c$.

Опр: 4. Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фиксированной точки (называемой фокусом параболы) и фиксированной прямой, называемой директриссой.

Пусть F - фокус параболы, d - директрисса, тогда мы смотрим на множество точек X таких, что:

$$\rho(x, d) = |XF|$$

Тогда парабола будет иметь вид:

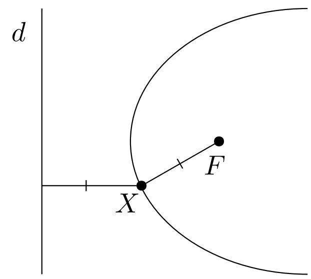

Рис. 4: Парабола.

Таким образом, у нас есть три типа разных кривых $\Rightarrow$ плоскость может пересекать круговой конус тремя принципиально разными способами. Рассмотрим эти способы.

1) Случай эллипса: наклонная плоскость в пересечении с конусом даёт эллипс:

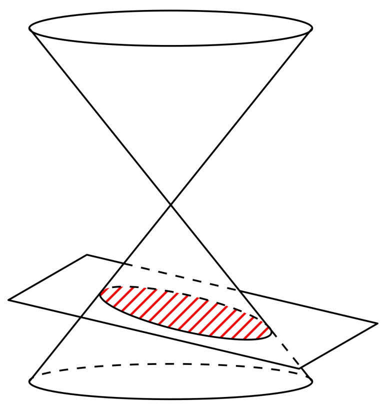

Рис. 5: Пересечение конуса плоскостью даёт эллипс.

2) Случай параболы: наклонная плоскость (параллельная образующей) в пересечении с конусом даёт параболу:

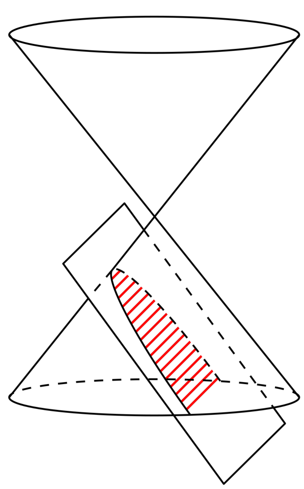

Рис. 6: Пересечение конуса плоскостью даёт параболу.

3) Случай гиперболы: наклонная плоскость в пересечении с конусом даёт гиперболу:

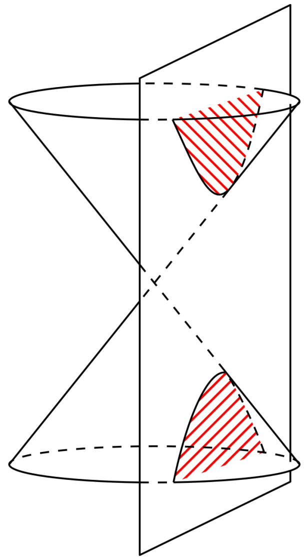

Рис. 7: Пересечение конуса плоскостью даёт гиперболу.

Лучше всего это можно понять если нарисовать сечение плоскостью, ортогональной секущей плоскости и содержащей ось конуса.

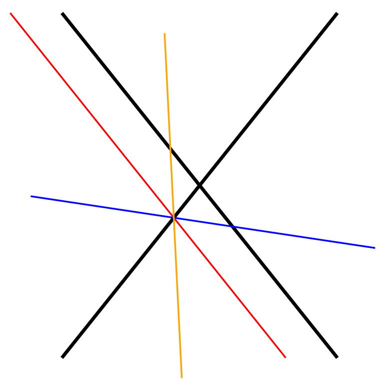

Рис. 8: Сечение плоскостью, ортогональной секущей плоскости и содержащей ось конуса.

На рисунке изображены прямые, проходящие через одну точку:

1) **конус** - жирные черные линии;
2) **эллипс** - синяя линия;
3) **парабола** - красная линия;
4) **гипербола** - оранжевая линия;

Как это можно доказать? В античности доказательства были достаточно сложные, мы же воспользуемся конструкцией под названием шары Данделена. Покажем одно из доказательств в случае эллипса.

Эллипс

□ Эллипс лежит в одной поле конуса, поэтому будем рассматривать её. Пусть π - секущая плоскость. Впишем шар внутрь конуса, в самый низ. Пусть он касается нашей плоскости в точке F_1. В сечении это будет построение вписанной окружности. В сечении будет касание конуса в двух точках, в трехмерном пространстве это будет окружность на конусе. Затем впишем шар в конус, выше плоскости и будем уменьшать его радиус до тех пор, пока он не коснется плоскости π с другой стороны, нежели предыдущий шар. Фактически, будем искать окружность, касающуюся трёх плоскостей. Она будет касаться плоскости π в точке F_2.

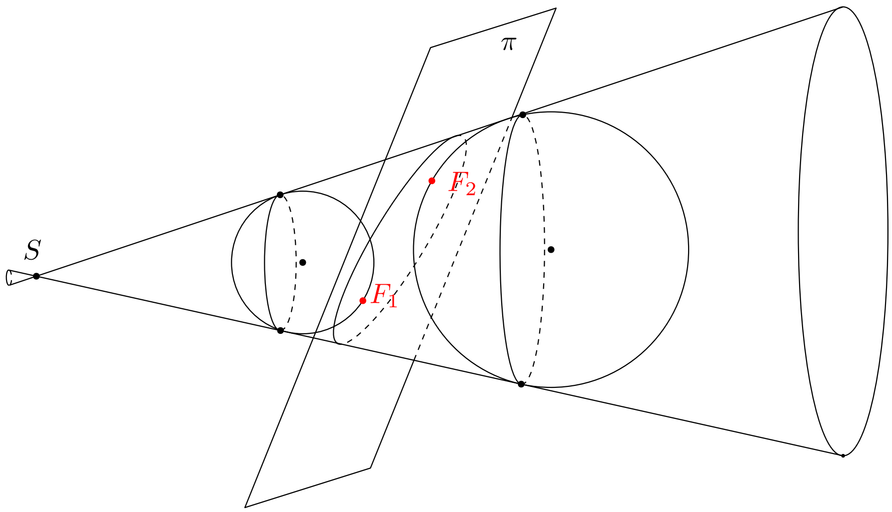

Рис. 9: Шары Данделена.

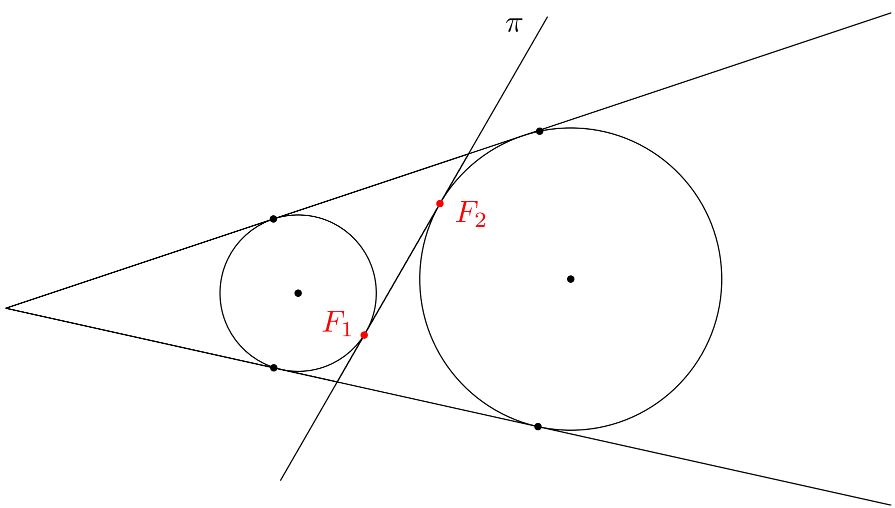

Рис. 10: Сечение конуса и шаров.

Заметим, что конус касается шаров по каким-то окружностям S_1 и S_2. Если провести из вершины S лучи на конусе (образующие), то любое расстояние от одной окружности до другой - будет одинаковым. Возьмем некоторую точку: $X \in \pi \cap C$, где C - это конус. Проведём луч: $SX \Rightarrow X_1$ - пересечение SX с окружностью S_1 и X_2 - пересечение SX с окружностью S_2. Из школы есть факт: длина касательных к окружности из любой точки - равна. Для шара - всё аналогично, только касательных бесконечно много. Рассмотрим XX_1 и XF_1: XX_1 - касательная к шару, но и XF_1 - тоже касательная к шару (так как $XF_1 \subset \pi$ и шар касается π) $\Rightarrow$ их длины равны, аналогично для XX_2 и XF_2.

$$|XF_1| = |XX_1|, \; |XF_2| = |XX_2|$$

Тогда будет верно:

$$|XF_1| + |XF_2| = |XX_1| + |XX_2| = |X_1X_2| = \text{const}$$

где последнее верно в силу, поскольку расстояние всегда одинаковое между окружностями на конусе.

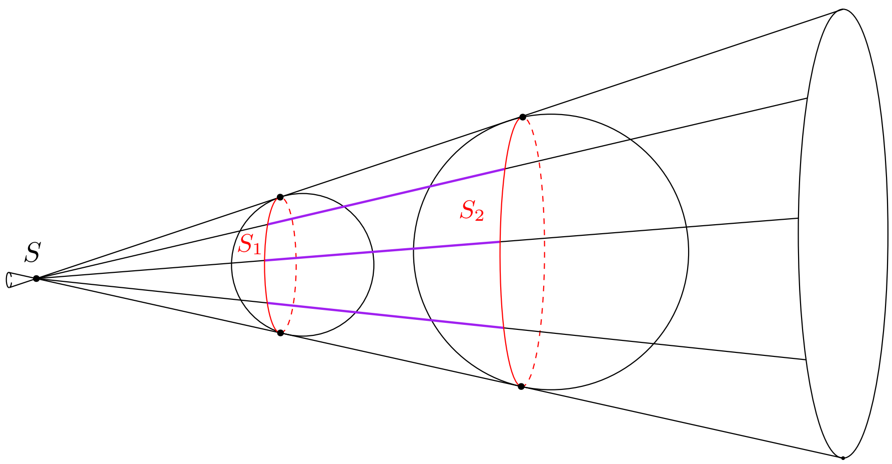

Рис. 11: Расстояния между окружностями - одинаковые на образующих лучах.

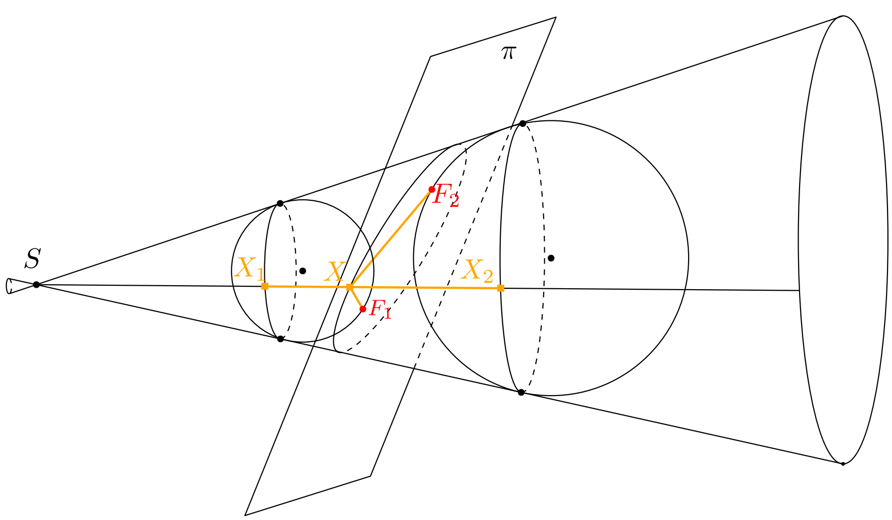

Рис. 12: Постоянство расстояния между X_1 и X_2.

Поскольку расстояние - постоянно $\Rightarrow$ получаем эллипс по определению. ■

Для гиперболы построение - аналогичное.

Упр. 1. Конструкция с шарами Данделена для гиперболы.

Rm: 3. Для эллипса всё происходит в одной поле конуса, тогда как для гиперболы нужно будет понять в каких полах они находятся.

Гипербола

☐ Решение из Википедии (англоязычная статья про гиперболу):

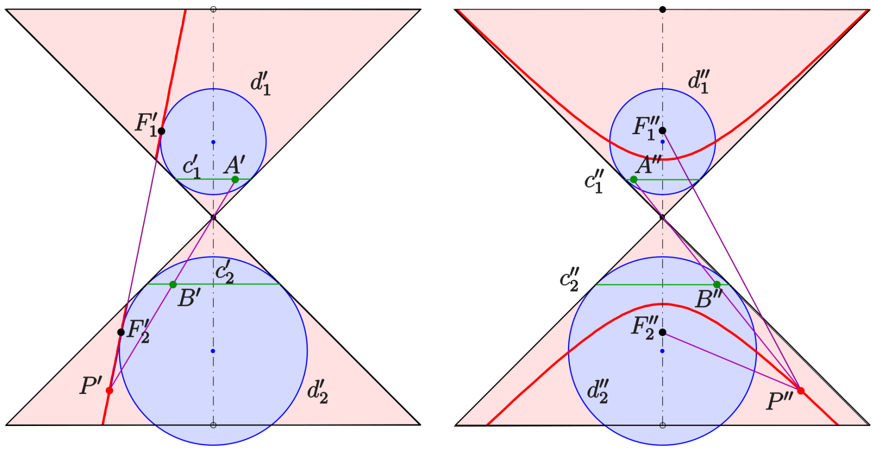

Рис. 13: Шары Данделена для гиперболы (Wiki).

Пусть точка P - любая точка на пересечении кривых (в разных плоскостях обозначение с одним и двумя апострофами). Проведём секущую через точку P и вершину конуса. Все подобные линии на касательных окружностях будут равны (поскольку касательные до шаров - одинаковые). Пусть эта секущая пересекает один шар в точке A и второй в точке B. Касательные до первого шара: PA и PF_1 будут равны, где F_1 - точка касания первого шара на секущей плоскости. Аналогично касательные до второго шара: PB и PF_2, где F_2 - точка касания первого шара на секущей плоскости, тогда:

$$|PF_1| - |PF_2| = |PA| - |PB| = |AB|$$

А это расстояние всегда будет одинаковым, независимо от расположения точки P. Аналогично, если точка P будет расположена на другой ветви гиперболы, мы получим значение с минусом. ■

Парабола

☐ Секущая плоскость π, параллельная образующей, пересекает одну полу конуса.

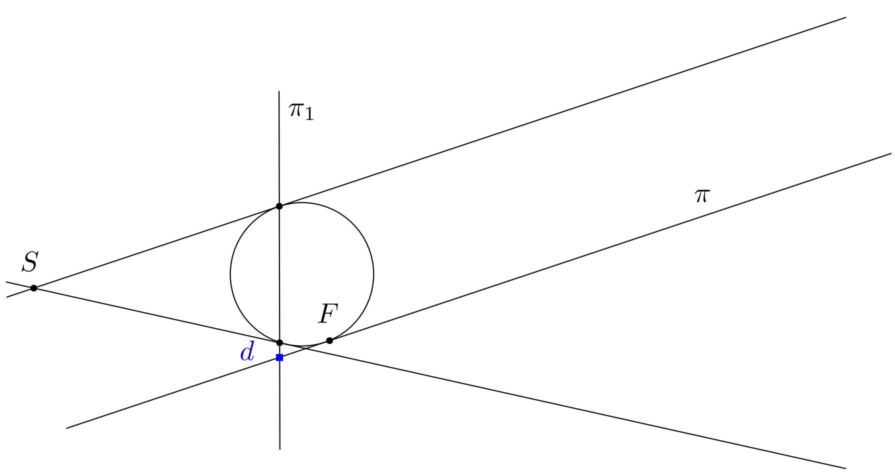

Рис. 14: Проекция конуса и плоскостей π, π_1.

Пусть S - вершина конуса, X - произвольная точка сечения, F - точка касания шара Данделена и секущей плоскости π. Сфера будет касаться конуса по окружности, которая лежит в плоскости π_1. Прямая по которой пересекаются плоскости: $d = \pi \cap \pi_1$. Пусть X - это произвольная точка сечения. Тогда:

$$SX_1 \cap \pi_1 = X_1$$

Как и раньше XF и XX_1 - две касательных из X к шару, поэтому $|XF| = |XX_1|$. XY - перпендикуляр, опущенный из X на d.

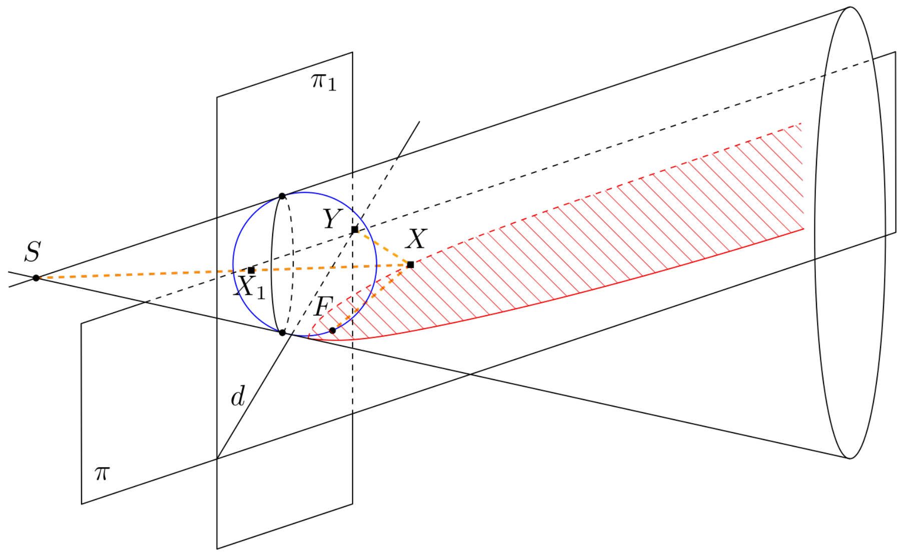

Рис. 15: Построение параболы шаром Данделена.

Вспомним из школьного курса, что если у нас есть плоскость и точка X, к этой плоскости есть две наклонных под одним и тем же углом α к этой плоскости, тогда длина этих наклонных равна. В нашем случае это плоскость π_1 и наклонные: XX_1 и XY. Тогда:

$$|XF| = |XX_1| = |XY| = \rho(X, d)$$

■

Упр. 2. Найти угол α из доказательства выше (подсказка: он связан с углом при растворе конуса).

□ Углы к плоскости π_1 - равны, поскольку линии из вершины конуса S к ней - касательные.

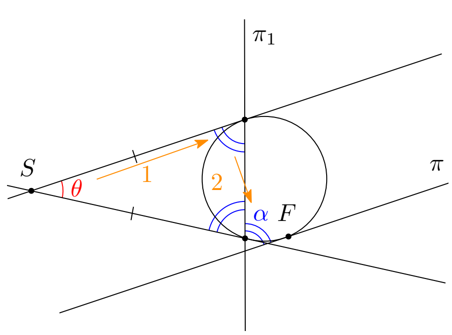

Рис. 16: Нахождение угла α.

Накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей равны. Пусть θ - угол раствора конуса, тогда мы найдем требуемый угол:

$$\theta + 2\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = \frac{180 - \theta}{2}$$

■

Rm: 4. Во всех доказательствах мы требуем, чтобы секущая плоскость не проходила через вершину конуса.

Rm: 5. Как можно заметить, это достаточно трудоемкие методы исследования (раньше были ещё хуже). С помощью аналитического метода всё это можно получать гораздо легче. Тем не менее, с помощью геометрического метода можно доказывать содержательные вещи.

Оптические свойства коник

Из физики: угол падения равен углу отражения. Рассмотрим аналогичные свойства у коник.

Эллипс

Луч выпущенный из одного фокуса отразится и попадёт во второй фокус:

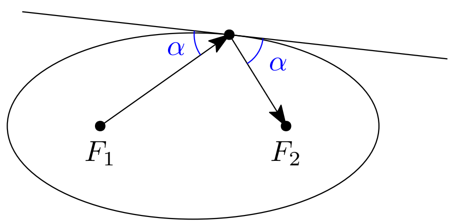

Рис. 17: Оптические свойства эллипса.

Геометрический смысл: в точке касания углы между отрезком из фокусов и касательной - равны;

Гипербола

Луч, выпущенный из одного фокуса после отражения движется так, будто он вышел из другого:

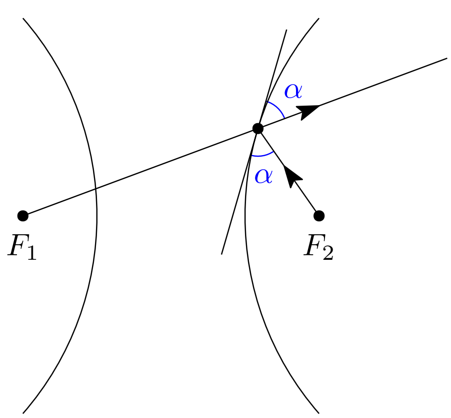

Рис. 18: Оптические свойства гиперболы.

Парабола

Лучи выходящие из фокуса всегда будут параллельны оси параболы:

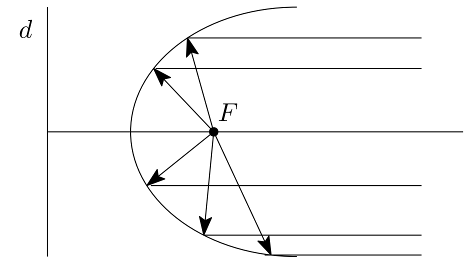

Рис. 19: Оптические свойства параболы.

Опр: 5. Осью параболы называется прямая проведенная у параболы через фокус под прямым углом к директриссе.

Опр: 6. Коники называются конфокальными, если у них одинаковые фокусы.

Следствие 1. Конфокальный эллипс и гипербола ортогональны друг другу.

□ Рассмотрим конфокальный эллипс и гиперболу, и касательную к эллипсу и гиперболе в точке их пересечения:

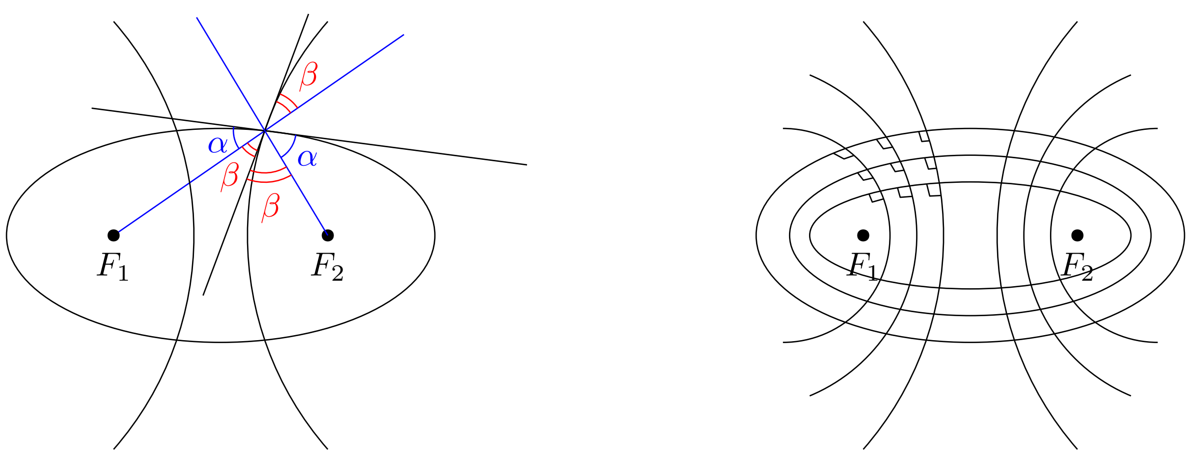

Рис. 20: Конфокальные коники.

Вертикальные углы равны, тогда:

$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Но $\alpha + \beta$ это угол между касательными $\Rightarrow$ равен $90°$, то есть конфокальный эллипс и гипербола ортогональны друг другу. ■

Таким образом, при заданных фокусах мы можем строить разные эллипсы (расстояния до фокусов будут разные) и аналогично будем брать разные гиперболы с одинаковыми фокусами, тогда из-за конфокальности всё семейство эллипсов и гипербол будут ортогональны друг другу.

Rm: 6. Также можно заметить, что конфокальные эллипс и гипербола могут образовывать эллиптическую систему координат.