Аналитический подход

Эллипс

Опр: 1. Эллипс - это множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b$$

Выберем оси x, y, выберем точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$. Предполагаем, что $a \geq b > 0$. Также заметим, что из уравнения очевидно:

$$|x| \leq a,\ |y| \leq b$$

Опр: 2. Прямоугольник в который вписан эллипс и который описывается уравнениями: $|x| \leq a,\ |y| \leq b$ называется основным.

Опр: 3. Фокусами эллипса называются точки: $F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Тогда вид точек будет следующий:

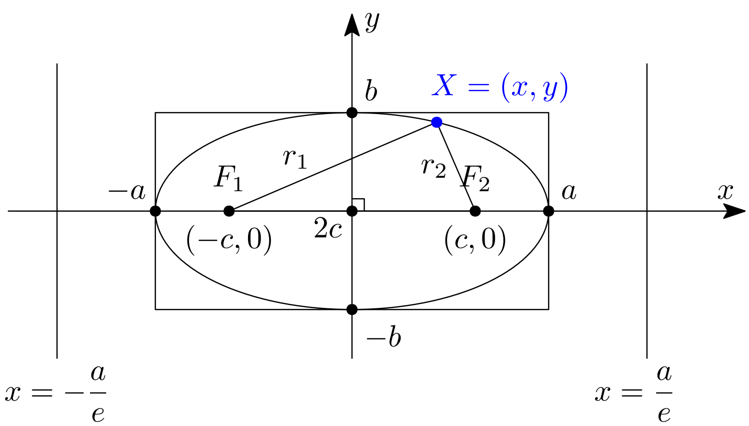

Рис. 1: Эллипс в ортогональной СК.

Если $a = b$, то у нас будет просто окружность. Пусть у нас есть точка $X = (x, y)$ на этом эллипсе. В прошлый раз мы установили справедливость формул:

$$r_1 = |F_1X| = a + \frac{c}{a}x,\ r_2 = |F_2X| = a - \frac{c}{a}x$$

Опр: 4. Эксцентриситетом эллипса называется следующая величина: $e = \dfrac{c}{a}$.

Rm: 1. Для окружности будет верно: $e = 0$, а также заметим, что у эллипса $e < 1$ всегда.

Опр: 5. Директриссами эллипса называется следующее множество точек: $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Rm: 2. Поскольку $e < 1$, то будет верно, что $|x| > a$. Также заметим, что у окружности директрисс нет, поскольку $e = 0$.

Опр: 6. Фокальным параметром эллипса называется следующая величина: $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Гипербола

Опр: 7. Гипербола - это множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a, b > 0$$

Rm: 3. Заметим следующее:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| > a$$

Следовательно, кривая будет лежать вне основного прямоугольника.

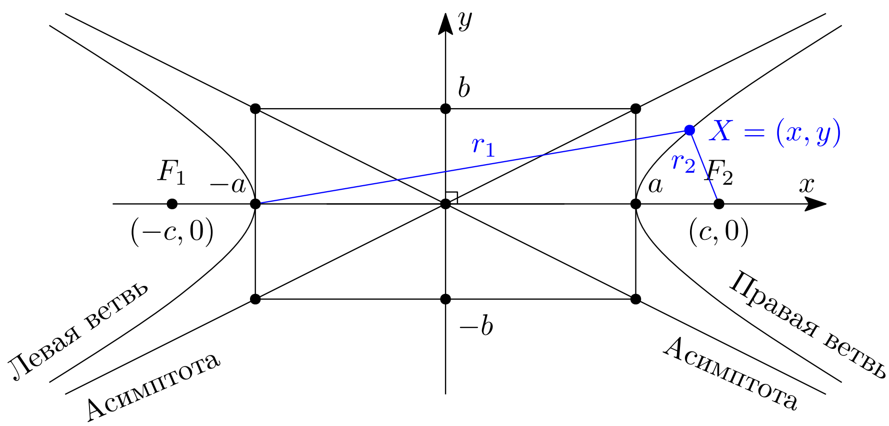

Рис. 2: Гипербола в ортогональной СК.

Опр: 8. Асимптотой гиперболы называются следующие прямые: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Опр: 9. Фокусами гиперболы называются точки: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Утв. 1. Алгебраическое и геометрическое определения гиперболы эквивалентны.

□

($\Rightarrow$) Возьмем некоторую точку $X = (x, y)$ на гиперболе. Расстояния от неё до F_1, F_2 равно r_1, r_2 соответственно. Найдем r_1 по аналогии с эллипсом:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} a + \dfrac{c}{a}x, & \text{Правая ветвь} \\ -a - \dfrac{c}{a}x, & \text{Левая ветвь} \end{cases}$$

Аналогично:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} -a + \dfrac{c}{a}x, & \text{Правая ветвь} \\ a - \dfrac{c}{a}x, & \text{Левая ветвь} \end{cases}$$

Рассмотрим правую ветвь:
$$|r_1 - r_2| = |2a| = 2a$$
Аналогично для левой ветви:
$$|r_1 - r_2| = |-2a| = 2a$$
То есть, если $X = (x, y)$ удовлетворяет аналитическому уравнению гиперболы, то это точка гиперболы с фокусами F_1, F_2 и $||XF_1| - |XF_2|| = 2a$.

($\Leftarrow$) Пусть у нас есть ГМТ, таких, что $||XF_1| - |XF_2|| = 2a$ и $|F_1F_2| = 2c$. Как и ранее выбираем центр в качестве начала координат, выбираем оси x и y, как и ранее. Тогда возникает условие:
$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Упр. 1. Доказать по аналогии с эллипсом и довести до аналитического уравнения, но при этом необходимо рассмотреть два случая.

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, тогда:
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2 \cdot \left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2 \cdot (c^2 - a^2) = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

2) $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$, тогда:
$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -xc - a^2 = a \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 = a^2 \cdot \left(x^2 + 2xc + c^2 + y^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2 \cdot (c^2 - a^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Таким образом, в обоих случаях мы получаем аналитическое уравнение для:
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
По аналогии с эллипсом $c > a \Rightarrow b > 0$. При этом никаких конкретных отношений между a и b здесь установить нельзя. ■

Опр: 10. Эксцентриситетом гиперболы называется следующая величина: $e = \dfrac{c}{a}$.

Rm: 4. Заметим, что:
$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ b \neq 0 \Rightarrow c > a \Rightarrow e > 1$$
то есть эксцентриситет гиперболы всегда больше 1.

Опр: 11. Директриссами гиперболы называется следующее множество точек: $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Rm: 5. Поскольку $|e| > 1$, то будет верно, что $|x| < a$ для директрисс.

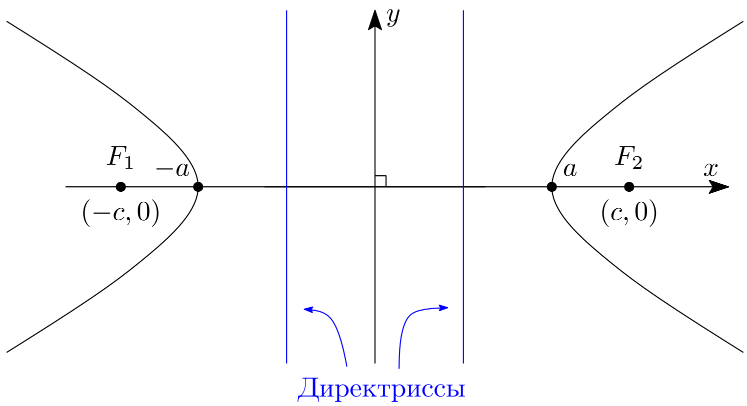

Рис. 3: Директриссы гиперболы.

Опр: 12. Фокальным параметром гиперболы называется следующая величина: $p = \dfrac{b^2}{a}$.

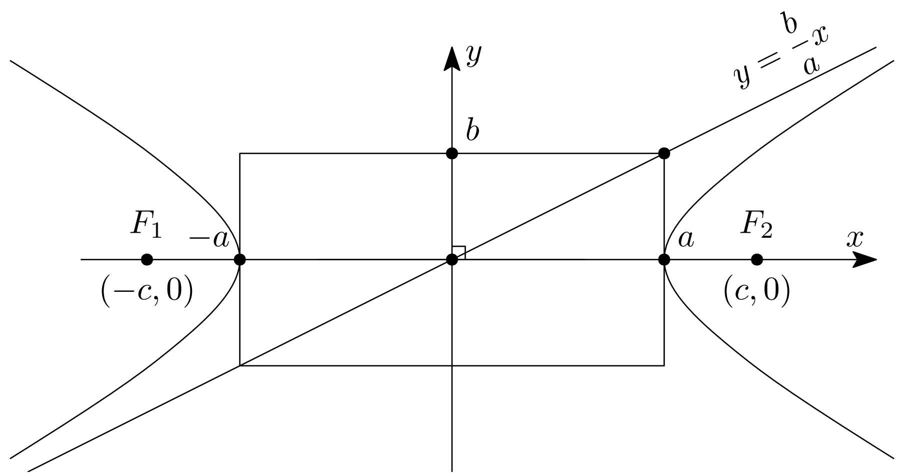

Рис. 4: Асимптота гиперболы.

Утв. 2. При $|x| \to \infty$, гипербола стремится к своим асимптотам, не пересекая их.

□ Заметим, что в каждом квадранте системы координат у нас есть своя ветвь гиперболы и асимптота. Рассмотрим первый квадрант, тогда:

$$y_{as} = \frac{b}{a}x,\ y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \Rightarrow \Delta(x) = y_{as}(x) - y(x) = \frac{b}{a}x - \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0,\ |x| \geq a \Rightarrow \forall x > 0,\ \Delta(x) > 0$$

Если бы хоть где-то была точка пересечения, то где-то было бы верно, что $\Delta(x) = 0$. Следовательно, гипербола стремится к своей асимптоте, не пересекая её. Аналогичное будет верно и для других квадрантов. ■

Парабола

Опр: 13. Параболой называется ГМТ, равноудаленных от фокуса параболы и директриссы параболы.

Опр: 14. Параболой называется множество точек, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют следующему уравнению:

$$y^2 = 2px,\ p > 0$$

Утв. 3. Алгебраическое и геометрическое определения параболы эквивалентны.

$\square$
($\Leftarrow$) Пусть у нас задан фокус F, задана директрисса d и мы рассматриваем ГМТ таких, что расстояния от этих точек до директриссы - равны. Введем координаты следующим образом: ось x расположим по оси параболы (прямая, проходящая через фокус параболы оротогонально директриссе), ось y расположим посередине между директриссой и параболой (поскольку там расстояние от директриссы до параболы будет равно расстоянию от параболы до фокуса), ортогонально оси x.

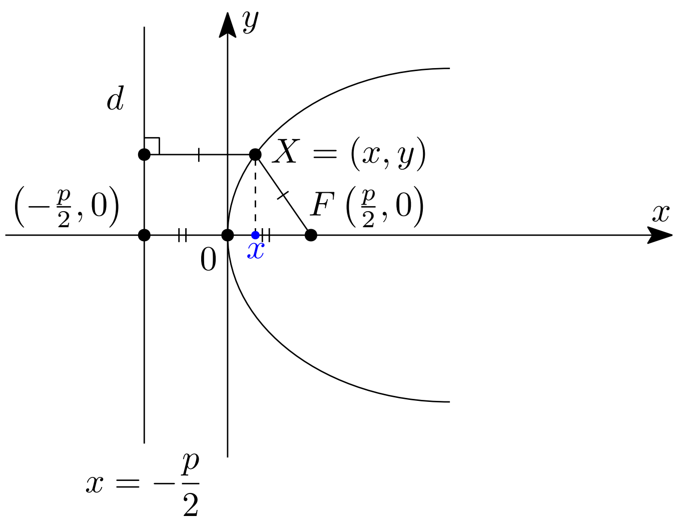

Рис. 5: Геометрическое определение параболы.

Пусть координаты фокуса равны $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, рассмотрим точку $X = (x, y)$ на парабооле, тогда:

$$|XF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},\ \rho(X, d) = x + \frac{p}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px$$

($\Rightarrow$) Пусть наши точки удовлетворяют уравнениюю: $y^2 = 2px$, $p > 0$. Очевидно, что это перевернутая парабола (известная со школы), её минимум будет в точке 0. Рассмотрим некоторую точку $X(x, y)$ на параболе, затем возьмем прямую $x = -\frac{p}{2}$ и фокус с координатами $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, тогда:

$$|XF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2} = \rho(X, d)$$

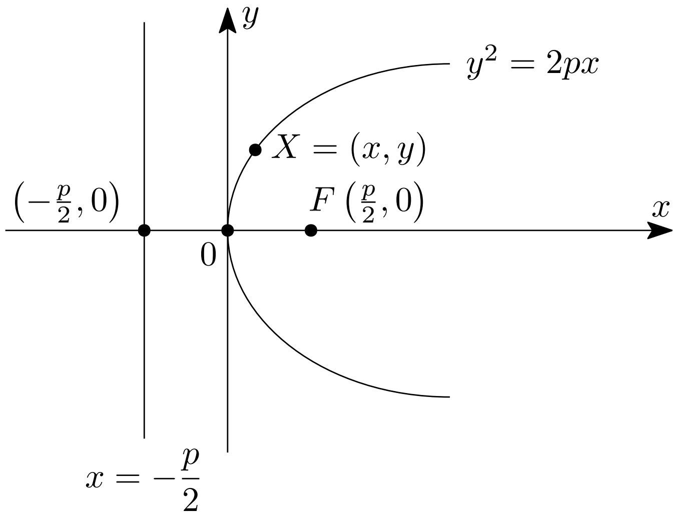

Рис. 6: Аналитическое определение параболы.

Таким образом, если мы используем заданное аналитическое уравнение, то автоматически имеем геометрическое свойство. ■

Опр: 15. Фокусом параболы называется точка: $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Опр: 16. Директриссой параболы называется прямая: $x = -\dfrac{p}{2}$.

Опр: 17. Фокальным параметром параболы называется величина: p.

Опр: 18. Эксцентриситетом параболы называется величина: $e = 1$.

Характеристические числа коник

Фокальный параметр

В каждой из наших коник, проведём хорду из фокуса, перпендикулярно оси y.

Опр: 19. Фокальной хордой называется перпендикуляр, проведённый из фокуса коники к самой конике.

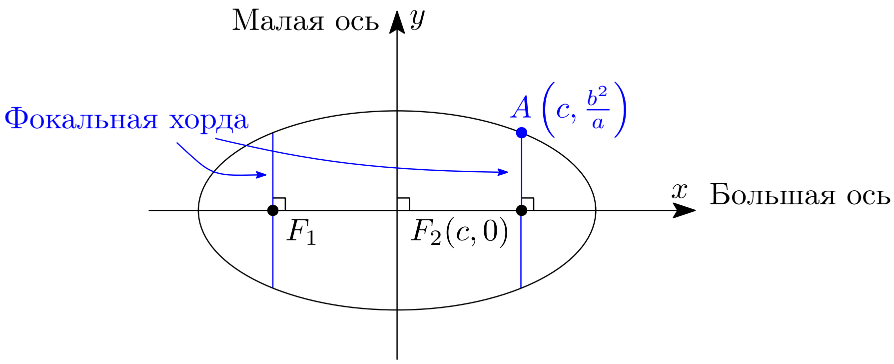

Рис. 7: Фокальная хорда эллипса.

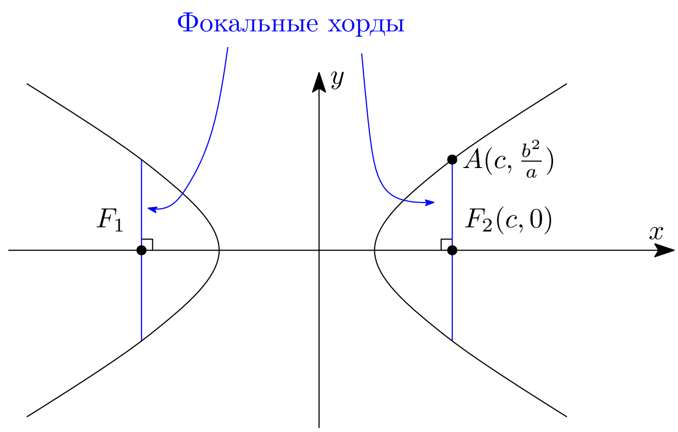

Рис. 8: Фокальная хорда гиперболы.

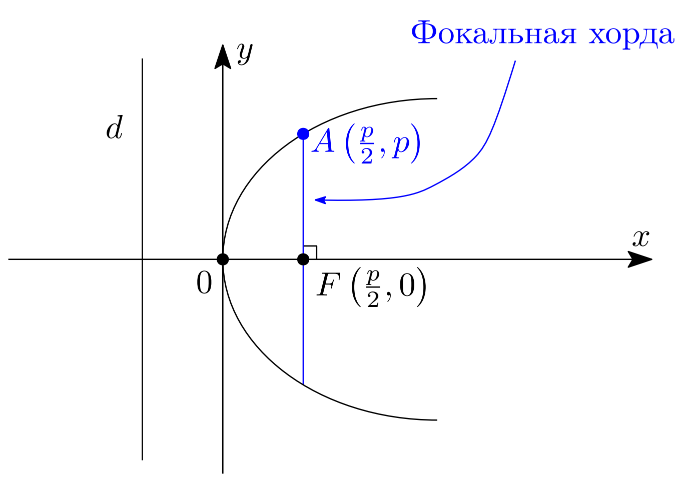

Рис. 9: Фокальная хорда параболы.

Утв. 4. Длина любой фокальной хорды равна удвоенному фокальному параметру p, для любой коники.

$\square$

1) **Парабола**: воспользуемся аналитической формулой коники:

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow y^2 = 2p\cdot\frac{p}{2} = p^2 \Rightarrow A = \left(\frac{p}{2}, p\right) \Rightarrow |AF| = p$$

2) **Эллипс**: возьмем точку F_2 и воспользуемся аналитической формулой коники:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} = b^2\cdot\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow A = \left(c, \frac{b^2}{a}\right) \Rightarrow |AF| = \frac{b^2}{a} = p$$

3) **Гипербола**: возьмем точку F_2 и воспользуемся аналитической формулой коники:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2c^2}{a^2} - b^2 = b^2\cdot\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow A = \left(c, \frac{b^2}{a}\right) \Rightarrow |AF_2| = \frac{b^2}{a} = p$$

$\blacksquare$

Директориальное свойство коник

Утв. 5. (**директориальное свойство коник**) Отношение расстояний от точки коники до фокуса и до соответствующей директриссы равно эксцентриситету.

$\square$

1) **Парабола**: мы знаем, что в параболе расстояние от любой точки на ней до директриссы и до фокуса - равны, запишем это в следующем виде:

$$\forall X = (x, y)\colon y^2 = 2px \Rightarrow \rho(X, F) = \rho(X, d) \Rightarrow \frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)} = e = 1$$

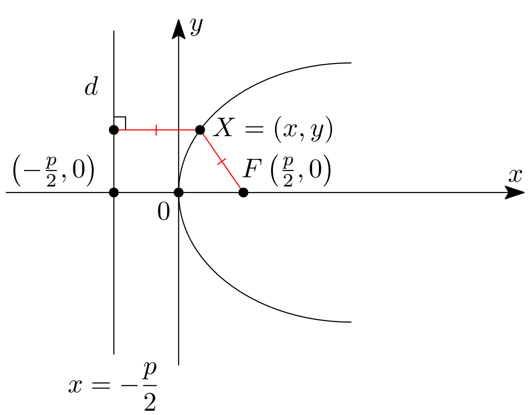

Рис. 10: Расстояния от параболы до фокуса и директриссы - равны.

2) **Эллипс**: посчитаем расстояние от точки до фокуса и от точки до директриссы, которая находится на той же стороне, что и фокус:

$$\forall X = (x, y)\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho(X, F_1) = r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex$$

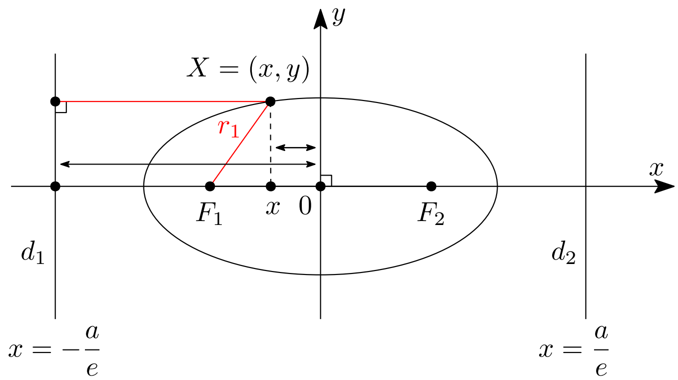

Рис. 11: Расстояния от эллипса до фокуса и директриссы.

$$\rho(X, d_1) = x - \left(-\frac{a}{e}\right) = x + \frac{a}{e} \Rightarrow \frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)} = \frac{a + ex}{a + ex} \cdot e = e$$

3) **Гипербола**: по аналогии с эллипсом:

$$\forall X = (x, y)\colon \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho(X, F_1) = r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex|$$

Для левой ветви:

$$\rho(X, d_1) = \left(-\frac{a}{e}\right) - x = -\frac{a + ex}{e}$$

Для правой ветви:

$$\rho(X, d_1) = x - \left(-\frac{a}{e}\right) = \frac{a + ex}{e}$$

Тогда:

$$\rho(X, d_1) = \left|\frac{a + ex}{e}\right| \Rightarrow \frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)} = \frac{|a + ex|}{|a + ex|} \cdot |e| = |e| = e$$

■

Rm: 6. Заметим, что наше геометрическое определение параболы это в точности директориальное свойство параболы. На самом деле, мы можем так определить любую конику (и эллипс, и параболу): выбираем фокус F (некоторая точка), выбираем директриссу d (некоторая прямая), выбираем e и рассматриваем ГМТ, определенных соотношением:

$$e = \frac{\rho(X, F)}{\rho(X, d)}$$

Упр. 2. Доказать, что такое определение эквивалентно определению коник.

Полярные координаты

Из школы известно, что декартова система координат задается выбором начала системы координат и двух ортогональных осей, которые через неё проходят. Полярная система координат задается точкой и лучом, который из неё выходит.

Опр: 20. Полюсом называется нулевая точка в полярной системе координат.

Опр: 21. Полярной осью называется ось в полярной системе координат.

Чтобы охарактеризовать точку в такой системе координат, проводится отрезок соединяющий полюс и эту точку. У этого отрезка есть длина: $r = |OA| \geq 0$, в качестве второй координаты выбирается угол φ, который отчитывается от полярной оси против часовой стрелки.

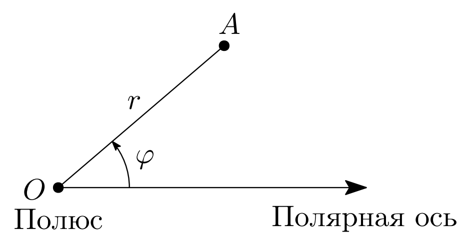

Рис. 12: Полярная система координат.

Тогда имея r и φ, мы всегда сможем однозначно построить точку: $A = (r, \varphi)$.

Rm: 7. Тем не менее по точке координаты определяются не всегда однозначно, поскольку у полюса не определена координата φ.

Rm: 8. Кроме того, угол можно определить с точностью до 2π.

Rm: 9. Также заметим, что всегда верно: $r \geq 0$.

Полярные координаты удобны тем, что в них некоторые объекты хорошо описываются, например те, которые имеют круговую симметрию. Уравнение окружности у которой радиус равен 2, а центр в полюсе будет иметь вид:

$$r = 2$$

У нас возникает задача по выбору того, куда мы поставим полюс и полярную ось в конике.

1) **Эллипс**: расположим полюс в фокусе F_1, а полярную ось проведём через второй фокус:

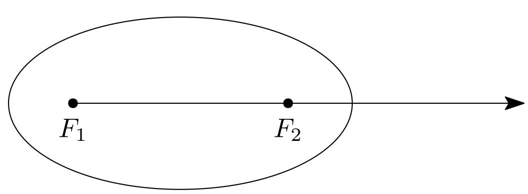

Рис. 13: Полярная система координат: эллипс.

2) **Гипербола**: расположим полюс в одном из фокусов (F_2), а полярную ось провёдем в сторону, противоположную другому фокусу:

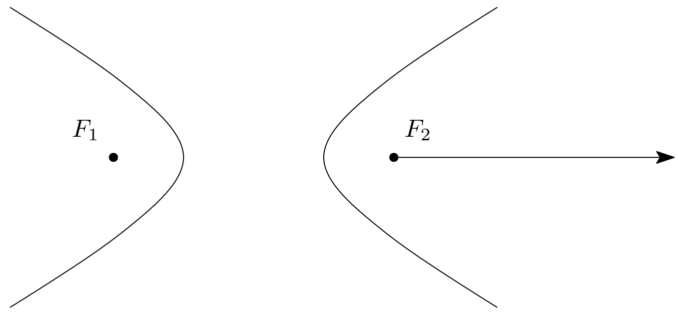

Рис. 14: Полярная система координат: гипербола.

3) **Парабола**: расположим полюс в фокусе F, а полярную ось провёдем вдоль оси параболы от директриссы в сторону:

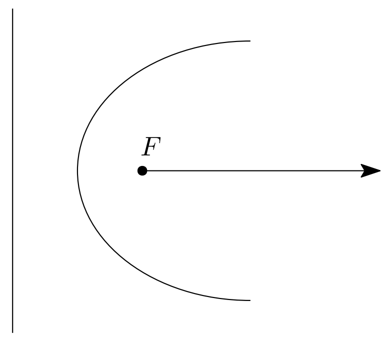

Рис. 15: Полярная система координат: парабола.

Утв. 6. В полярных координатах, выбранных указанным выше способом, уравнения эллипса, параболы и правой ветви гиперболы будет иметь вид:

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos(\varphi)}$$

Уравнение левой ветви гиперболы будет иметь вид:

$$r = -\frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi)}$$

□ Воспользуемся директориальным свойством коник:

1) **Эллипс**: возьмем точку $X(r, \varphi)$ на эллипсе, тогда:

$$|XF_1| = r,\ \rho(F_1, d) = \frac{a}{e} - c$$

Чтобы найти расстояние от X до директриссы построим перпендикуляр из полюса к прямой от X к директриссе, тогда:

$$\rho(F_1, d) = \frac{a}{e} - c,\ \rho(A, X) = r \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \rho(X, d) = \frac{a}{e} - c + r \cdot \cos(\varphi)$$

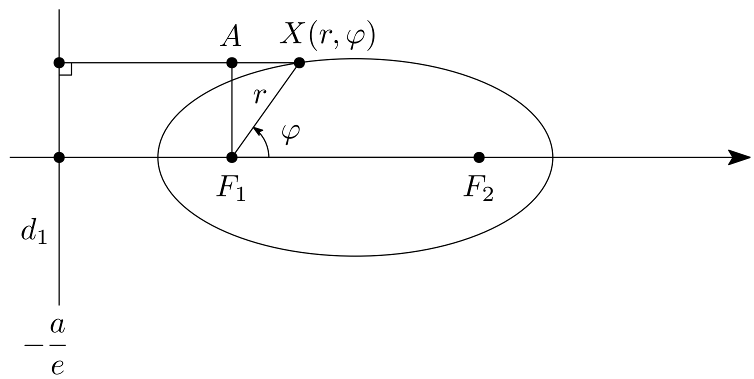

Рис. 16: Уравнение эллипса в полярных координатах.

Тогда:

$$\frac{|XF_1|}{\rho(X,d)} = e \Leftrightarrow \frac{r}{\dfrac{a}{e} - c + r\cdot\cos(\varphi)} = e \Leftrightarrow r = a - ec + er\cdot\cos(\varphi) \Rightarrow r = \frac{a - ec}{1 - e\cdot\cos(\varphi)}$$

$$a - ec = a - \frac{c}{a}\cdot c = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p \Rightarrow r = \frac{p}{1 - e\cdot\cos(\varphi)}$$

2) **Парабола**: аналогично, возьмем точку $X(r,\varphi)$ на параболе, тогда:

$$|XF| = r = \rho(X,d),\ \rho(F,d) = \frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p$$

$$r = \rho(X,d) = \rho(F,d) + r\cdot\cos(\varphi) = p + r\cdot\cos(\varphi)$$

$$\frac{|XF|}{\rho(X,d)} = e = 1 \Leftrightarrow \frac{r}{p + r\cdot\cos(\varphi)} = 1 \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - \cos(\varphi)} = \frac{p}{1 - e\cdot\cos(\varphi)}$$

3) **Обе ветви гиперболы**: аналогично, в том числе одна из ветвей доказывается через центральную симметричность;

■

Упр. 3. (**) Вывести директориальное свойство, используя шары Данделена.

Rm: 10. Данное доказательство крайне сложное и должно убедить нас, что аналитический подход гораздо лучше.