Оптические свойства коник

Эллипс

Утв. 1. Луч выпущенный из одного фокуса отразится от эллипса и попадёт во второй фокус.

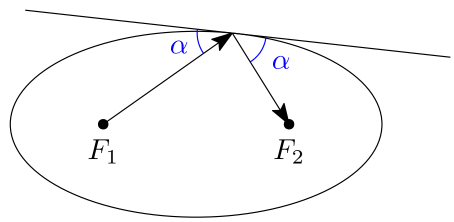
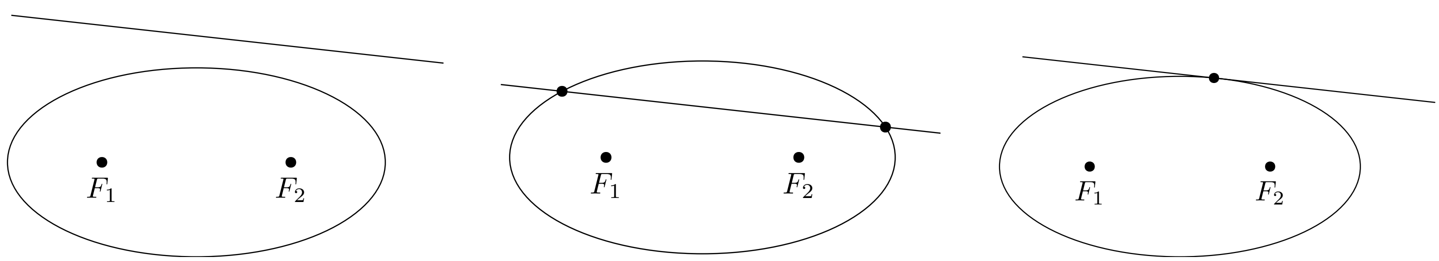


Рис. 1: Оптические свойства эллипса.

В школьной физике учат, что угол падения равен углу отражения

Геометрический смысл: в точке касания (где находится касательная прямая) углы между отрезком из фокусов и касательной - равны. Тогда нам необходимо определить, что такое касательная прямая.

Если мы рассматрим эллипс и прямую, то возможны следующие взаимные расположения:



(a) Точек пересечения нет. (b) Прямая пересекает эллипс. (c) Прямая касается в одной точке.

Рис. 2: Взаимное расположение эллипса и прямой.

1) Прямая не пересекает эллипс;

2) Прямая пересекает эллипс в двух точках;

3) Прямая пересекает эллипс по одной точке $\Rightarrow$ это касательная;

Rm: 1. Больше, чем в двух точках прямая не может пересекать коническое сечение. Доказательство с помощью геометрической теории это сложная задача. С помощью аналитических методов это доказывается достаточно тривиально.

Опр: 1. Касательной прямой к конике называется прямая, имеющая с коникой ровно одну точку, и в случае параболы - не параллельная оси, а в случае гиперболы - не параллельная асимптотам.

Rm: 2. Последнее замечание для параболы можно было бы убрать, используя проективную геометрию, поскольку парабола и прямая параллельная оси пересекались бы на бесконечности второй раз. Аналогично для гиперболы, мы уточням непараллельность асимптотам.

Задача 1 (**Вспомогательная задача**)**.** Пусть две точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Как найти точку X на прямой l, так, чтобы сумма расстояний $|AX| + |BX|$ была минимальной?

Rm: 3. В анализе такая задача называется задачей условного экстремума.

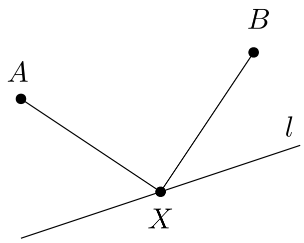


Рис. 3: Поиск минимального: $|AX| + |BX|$.

$\square$ Найдем точку B' симметричную к B относительно l. Проведём прямую AB', тогда точка пересечения этой прямой с l - будет искомой. Пусть есть некоторая точка Y, отличная от X.

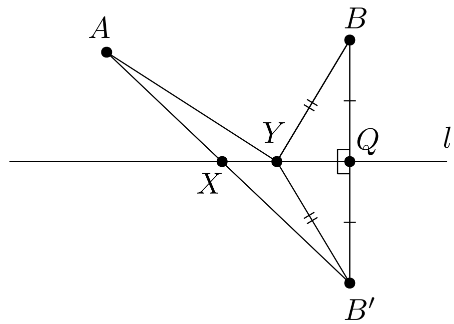


Рис. 4: Доказательство минимальности точки X.

Заметим, что в треугольники BQY и $B'QY$ - равны, поскольку один катет - общий, а остальные равны по построению. Также заметим, что сторона $|AX|$ меньше, чем сумма двух других сторон по правилу треугольника. Тогда:

$$|AY| + |BY| = |AY| + |B'Y| > |AX| + |B'X| = |AX| + |BX|$$

Следовательно, точка X - искомая. $\blacksquare$

Rm: 4. Также заметим, что углы α равны как вертикальные, и если мы начертим прямую BX, то получающийся угол β будет равен углу α.

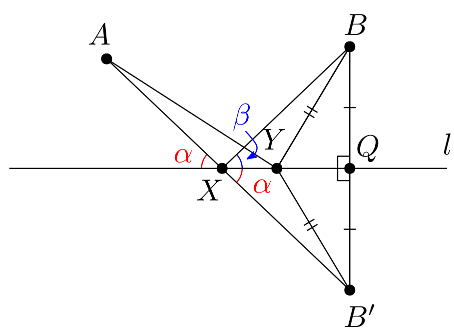


Рис. 5: Закон отражения света.

□ Известно, что прямая делит плоскость на две полуплоскости, а если есть замкнутая непересекающаяся кривая, то она делит плоскость на две части, которая внутри этой кривой и которая вне этой кривой. Тоже самое происходит и с эллипсом. Пусть у нас есть эллипс с фокусами в точках F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a$$

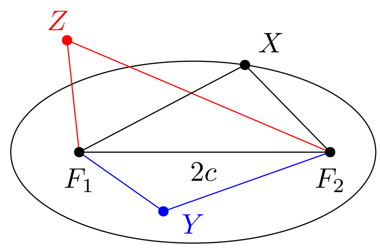


Рис. 6: Оптические свойства эллипса.

(1) $|XF_1| + |XF_2| = 2a \Rightarrow X$ находится на эллипсе;

(2) $|YF_1| + |YF_2| < 2a \Rightarrow Y$ находится внутри эллипсе;

(3) $|ZF_1| + |ZF_2| > 2a \Rightarrow Z$ находится вне эллипсе;

Если мы будем увеличивать a, то у нас будут растущие конфокальные эллипсы. И мы будем увеличивать a, пока не дойдем до нашего параметра, где будет касательная в точке X:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a$$

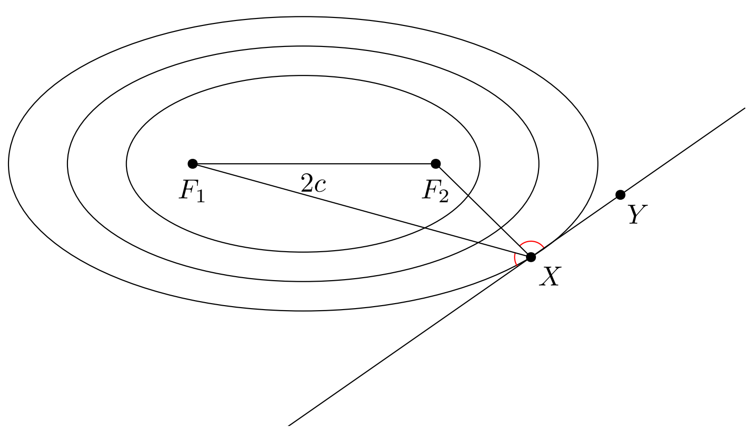


Рис. 7: Увеличение параметра a.

Если на этой касательной мы возьмем другую точку Y, которая лежит вне эллипса, то для неё:

$$|YF_1| + |YF_2| > 2a$$

Следовательно, X - такая точка прямой, что сумма расстояний от X до F_1 и F_2 - минимальна $\Rightarrow$ из вспомогательной задачи угол падения = углу отражения. Таким образом, с точки зрения школьной геометрии мы доказали оптическое свойство эллипса.

■

Rm: 5. Заметим, что это не совсем строго доказательство, но с точки зрения школьной геометрии вполне подходит.

Гипербола

Rm: 6. Оптическое свойство для гиперболы аналогично оптическому свойству эллипса и останется в качестве упражнения.

Утв. 2. Луч выпущенный из одного фокуса после отражения движется так, будто он вышел из другого.

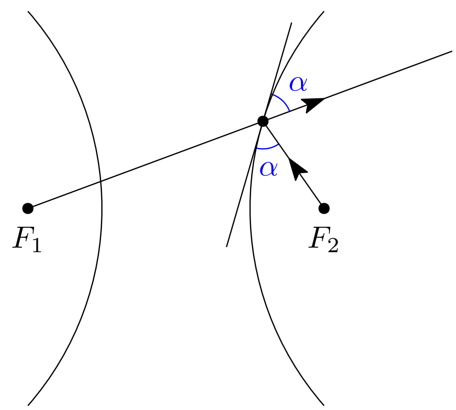


Рис. 8: Оптические свойства гиперболы.

Для гиперболы будет рассматриваться аналогичная вспомогательная задача, где будет требоваться найти максимальное расстояние между точками A и B по разную сторону прямой l.

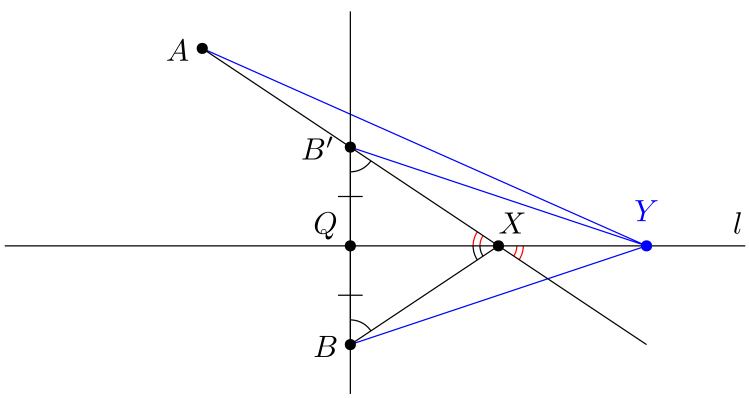


Рис. 9: Вспомогательная задача для гиперболы.

По аналогии, отзеркаливается точка B до точки B' и проводится прямая AB'. Точка пересечения этой прямой с прямой l будет точка $X \Rightarrow$ в ней будет максимум разницы между AX и BX, поскольку в любой другой точке на прямой l будет работать правило треугольника. Аналогично из этой задачи найдем, что угол падения будет равен углу отражения: углы $BB'X$ и $B'BX$ будут равны, поскольку равны стороны, соответственно углы BXQ и $B'XQ$ также будут равны, а угол отражения будет равен как вертикальный угол (на рисунке выделен красным).

Парабола

Утв. 3. Лучи выходящие из фокуса всегда будут параллельны оси параболы. Угол падения к касательной на параболе будет равен углу отражения от этой касательной.

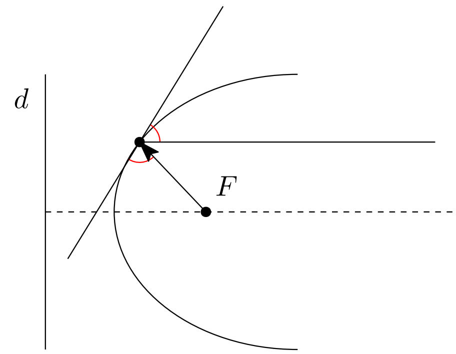


Рис. 10: Оптические свойства параболы.

□ Пусть у нас задана парабола с фокусом в точке F и директриссой d. Возьмем некоторую точку X, проведем линию XF и опустим перпендикуляр XY на директриссу. По определению:

$$|XF| = |XY|$$

Рассмотрим YF и проведем к ней серединный перпендикуляр l, поскольку треугольник - равнобедренный, то он проходит через точку X. Докажем, что l - касательная. Если l была бы параллельна оси, то YF была бы ортогональна этой оси и параллельна директриссе.

(a) Построение касательной к параболе. (b) Построение $X'Y'$.

Рис. 11: Доказательство оптического свойства параболы.

Предположим, что l пересекает параболу кроме X, ещё и в X'. Опустим из этой точки перпендикуляр $X'Y'$ на d. Поскольку X' лежит на параболе, то:

$$|X'Y'| = |X'F|$$

С другой стороны, X' лежит на l, а поскольку l - это серединный перпендикуляр, то:

$$|X'F| = |X'Y| = |X'Y'| \Rightarrow Y' = Y$$

где последнее верно в силу того, что перпендикуляр это кратчайшее расстояние до прямой, а Y' это основание перпендикуляра. У параболы по основанию перпендикуляра однозначно восстанавливается точка: любая прямая, ортогональная директриссе пересекает параболу в одной точке, тогда: $X' = X$. Следовательно, l - касательная.

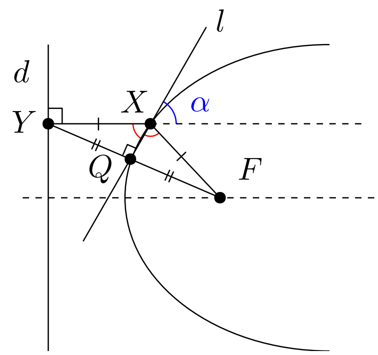


Рис. 12: Доказательство равенства углов.

Заметим, что $\triangle YXQ = \triangle XQF$, поскольку в равнобедренном треугольнике серединный перпендикуляр это и биссектриса, и медиана, и высота. Вместе с этим, по равенству вертикальных углов будет верно:

$$\angle YXA = \angle QXF = \angle \alpha$$

Таким образом, угол падения = углу отражения. ■

Конфокальные коники

Опр: 2. Угол под которым пересекаются кривые - угол между касательными к ним в точке пересечения.

Опр: 3. Коники называются конфокальными, если у них одинаковые фокусы.

Rm: 7. В русской литературе ещё могут называться **софокусными** кониками.

Утв. 4. Конфокальные эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом.

□ Рассмотрим эллипс и гиперболу с одинаковыми фокусами.

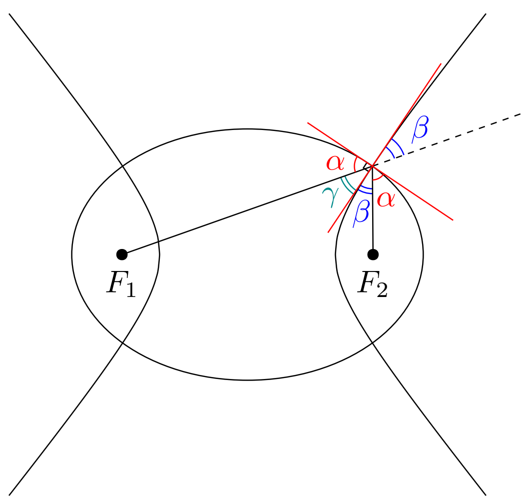


Рис. 13: Пересечение эллипса и гиперболы.

Из оптических свойств эллипса мы знаем про совпадение $\angle\alpha$, из оптических свойств гиперболы и равенства вертикальных углов мы знаем про совпадение $\angle\beta = \angle\gamma$, тогда:

$$2\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

А поскольку $\alpha + \beta$ это угол между касательными, то они всегда ортогональны друг другу. ■

Для параболы необходимо рассматривать параболы с общей осью и общим фокусом, но с разными директриссами, по разную сторону от фокуса. Параболы одного семейства не пересекаются, иначе у них будет общая точка и от неё расстояние до директриссы должно быть раво от этой точки до фокуса, расстояние до фокуса одно $\Rightarrow$ и расстояние до директриссы одно $\Rightarrow$ эти параболы совпадают.

Утв. 5. Параболы с общей осью и фокусом или не пересекаются или пересекаются под прямым углом.

□ Рассмотрим разные семейства парабол. Из оптических свойств парабол, мы получим равенство углов падения и отражения, при проведении луча из фокуса до параболы: $\angle\alpha$ и $\angle\beta$.

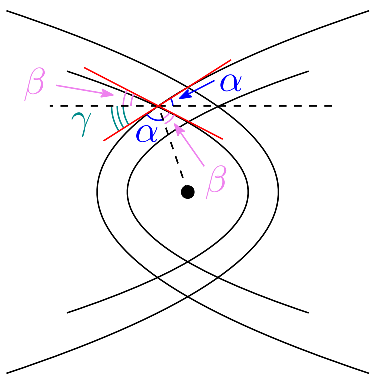


Рис. 14: Пересечение парабол с разной директриссой.

Поскольку отраженный лучи будут лежать на одной прямой (пересекающей точку пересечения парабол), то у нас будет равенство вертикальных углов:

$$\angle\gamma = \angle\alpha \Rightarrow 2\beta + \gamma + \alpha = 2\beta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, мы получили что $\alpha + \beta$ - это угол между касательными и они ортогональны друг другу. ■

Системы координат

Из школы мы знаем, что координаты это что-то, где по паре чисел мы можем построить точку. Координаты не обязательно определены на всей плоскости, например, полярные координаты не определены в самом начале. Самая известная система координат - Декартова.

Координатные линии получаются, если мы фиксируем одну координату и меняем другую. Например, если зафиксировать координату x и менять y или наоборот, то будут получаться вертикальные или горизонтальные линии соответственно.

(a) Фиксированная координата x, переменная y. (b) Фиксированная координата y, переменная x.

Рис. 15: Фиксирование координат.

Таким образом, получаем координатные кривые в Декартовых координатах, где координатные линии будут ортогональными.

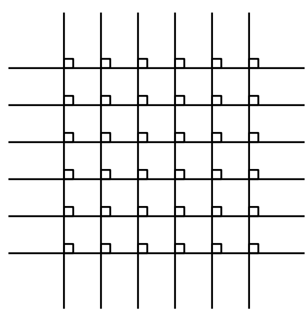


Рис. 16: Координатные кривые в Декартовых координатах.

Рассмотрим полярные координаты. Декартовы координаты задаются двумя осями, тогда как полярные координаты задаются точкой и лучом (длиной луча и углом поворота):

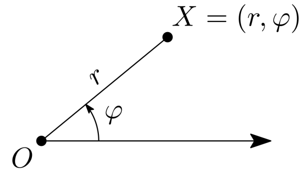


Рис. 17: Полярные координаты.

Rm: 8. Заметим, что это не глобальные координаты, потому что у точки O не определен угол.

По аналогии с декартовыми координатами, если фиксируем радиус и меняем угол, то получаем окружности. Если фиксируем угол и меняем радиус, то получаем лучи. Следовательно, получаем координатные кривые для полярной системы координат. Также можно заметить, что радиусы ортогональны окружности.

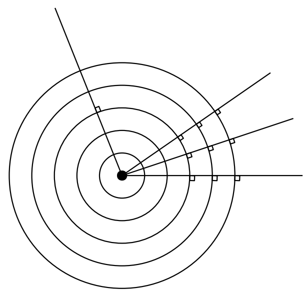


Рис. 18: Координатные кривые в полярной системе координат.

По аналогии, с помощью софокусных эллипсов и гипербол, можно ввести эллиптические координаты. Для этого сначала фиксируются фокусы F_1, F_2. Затем координаты точки: $X = (a_1, a_2)$ задаются следующим образом:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a_1, \; ||XF_1| - |XF_2|| = 2a_2$$

Поскольку фокусы заданы, то у нас есть единственный такой эллипс и единственная такая гипербола, и если мы находимся в первом квадранте, то такие координаты задают единственную точку.

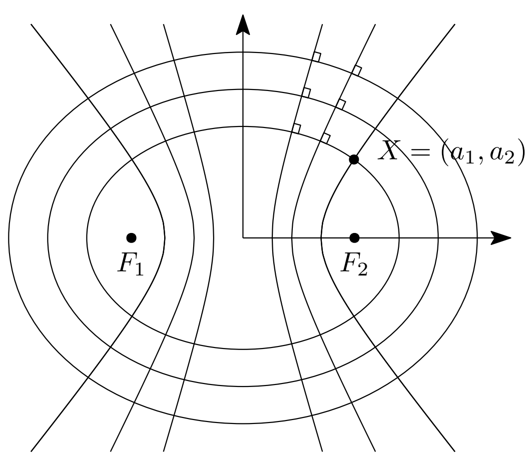


Рис. 19: Эллиптические координаты.

Координтнаые линии будут устроены так: если фиксируем фокусы и a_1, то получаем эллипсы, если фиксируем фокусы и a_2, то получаем гиперболы. Координатные линии также будут ортогональны.

Аналитический подход

Рассмотрев геометрический подход, мы можем отметить, что в рамках него все доказательства достаточно сложные. Некоторые факты доказать с помощью геометрического подхода было очень сложно (или даже практически невозможно в случае коник и кривых высоких порядков), поэтому дальнейшие продвижения в геометрии возникли с появлением аналитического метода Декарта.

Аналитический подход Декарта: Необходимо точки заменять координатами этих точек, тогда всякие геометрические объекты заменяются уравнениями или неравенствами, которые эти геометрические объекты описывают.

Эллипс

Опр: 4. Эллипс - это множество точек, координаты которых в некоторой ортогональной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b$$

Rm: 9. Если $b = a$, то у нас было бы уроавнение окружности с радиусом a.

Раньше, у нас было другое определение эллипса и нам нужно эти два определения сопоставить.

Опр: 5. Эллипсом называется геометрическое место точек (то есть, множество), таких, что сумма расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами эллипса) постоянна.

Утв. 6. Алгебраическое и геометрическое определения эллипса эквивалентны.

□ Пусть F_1, F_2 - фокусы, тогда мы смотрим на множество точек X таких, что:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a$$

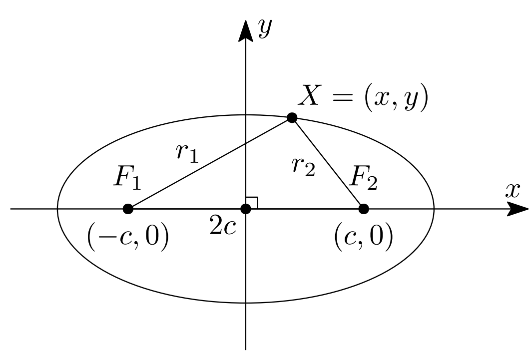


Рис. 20: Связь аналитического и геометрического определения эллипса.

Rm: 10. В аналитической геометрии по возможности надо стараться выбирать координаты так, чтобы всё было симметричным. Например, эллипс задается через две точки $\Rightarrow$ обязательно выбирайте начало координат в центре отрезка между этими двумя точками (в данном случае, в центре отрезка F_1F_2). Оси также выбираем ортогонально.

Таким образом, зададим следующие обозначения:

$$F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0),\ X = (x, y),\ |F_1X| = r_1,\ |F_2X| = r_2$$

Расстояние между точками найдем как в школе и подставим в геометрическое уравнение эллипса:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2},\ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow |XF_1| + |XF_2| = 2a$$

Далее, проведём элементарные преобразования:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 - 2a^2xc \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Получаем аналитическое уравнение для:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Поскольку $a > c$ (когда определяли эллипс, иначе множество - бессмысленное), то: $b > 0$. Также заметим, что $b \leq a$, где равенство возможно в случае, когда $c = 0$ (окружность). Таким образом, у геометрического эллипса в выбранной системе координат координаты точек удовлетворяют аналитическому уравненияю с $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Rm: 11. Заметим, что мы не доказали, что получим все точки, удовлетворяющие аналитическому уравнению (поскольку совершали операции возведения в квадрат, например).

Необходимо доказать, что все точки, удовлетворяющие аналитическому уравнению лежат на геометрическом эллипсе. Введем: c, F_1, F_2 такие, что:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},\ F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0)$$

Пусть $X = (x, y)$ и X удовлетворяет аналитическому уравнению. Найдем $r_1 = |XF_1|$ и $r_2 = |XF_2|$:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2},\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$$

Из аналитического уравнения видим, что сумма слагаемых равна 1 $\Rightarrow$ каждое из слагаемых не больше, чем 1, тогда будут верны неравенства:

$$|x| \leq a \wedge |y| \leq b$$

Этот прямоугольник называется основным прямоугольником эллипса.

Упр. 1. Доказать, что:

$$a + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}x \geq 0$$

□
$$a \geq b > 0,\ |x| \leq a \Rightarrow a + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \geq a - \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$$

■

Из доказанного выше, мы получаем:

$$a + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} x \geq 0 \Rightarrow r_1 = a + \frac{c}{a} x$$

Аналогичное вычисление для r_2, тогда:

$$|XF_1| + |XF_2| = r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a} x + a - \frac{c}{a} x = 2a$$

Таким образом, если точка удовлетворяет аналитическому уравнению, то она лежит на геометрическом эллипсе. Следовательно, геометрическое и аналитическое определения - одинаковы. ■