Векторная алгебра

Опр: 1. Направленный отрезок - упорядоченная пара точек $[AB]$.

Опр: 2. $[AB]$ и $[CD]$ коллинеарны (параллельны), если прямые AB и CD - параллельны или совпадают.

Опр: 3. Длиной направленного отрезка называется длина соответствующего отрезка: $|[AB]| = |AB| \geq 0$.

Отметим, что возможна следующая ситуация:

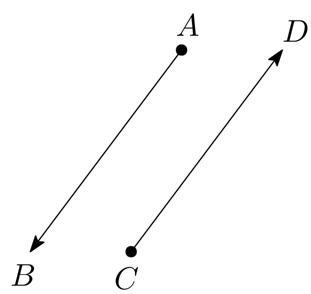

Рис. 1: Направленные отрезки $[AB] \neq [CD]$.

Следовательно, необходимо что-то для сонаправленности.

Опр: 4. Пусть $[AB]$ и $[CD]$ - коллинеарны, не лежат на одной прямой, тогда $[AB]$ и $[CD]$ - сонаправлены, если B и D лежат по одну сторону от прямой AC.

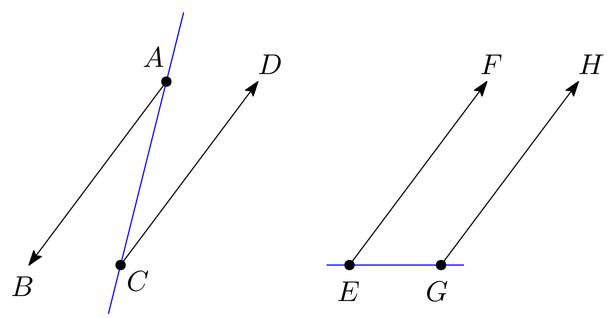

Рис. 2: Сонаправленные отрезки $[EF]$ и $[GH]$, и разнонаправленные отрезки $[AB]$ и $[CD]$.

Опр: 5. Если $[AB]$ и $[CD]$ коллинеарны и лежат на одной прямой, то $[AB]$ и $[CD]$ сонаправлены, если они сонаправлены с направленным отрезком, не лежащим на прямой AB.

Утв. 1. Определение выше задано - корректно.

$\square$ Пусть $[AB]$ и $[CD]$ сонаправлены с $[EF]$, не лежащим на AB. Пусть $[AB]$ и $[GH]$ сонаправлены и $[GH]$ не лежит на одной прямой с $[AB]$, тогда докажем, что $[CD]$ и $[GH]$ сонаправлены.

AB и CD лежат на одной прямой, $EF||AB||GH \Rightarrow CD||GH$. B и F лежат по одну сторону от AE. D и F лежат по одну сторону от EC. B и H лежат по одну сторону от AG.

Без ограничения общности, поскольку три параллельные прямые можно пересечь одной линией, то передвинем отрезок $[GH]$ вдоль прямой GH до точки пересечения с прямой AE. Поскольку и F и H будут по одну сторону с точкой B относительно прямой AE, то $[GH]$ и $[EF]$ будут сонаправлены. Аналогичным образом передвинем отрезок $[GH]$ вдоль прямой GH до пересечения с прямой EC.

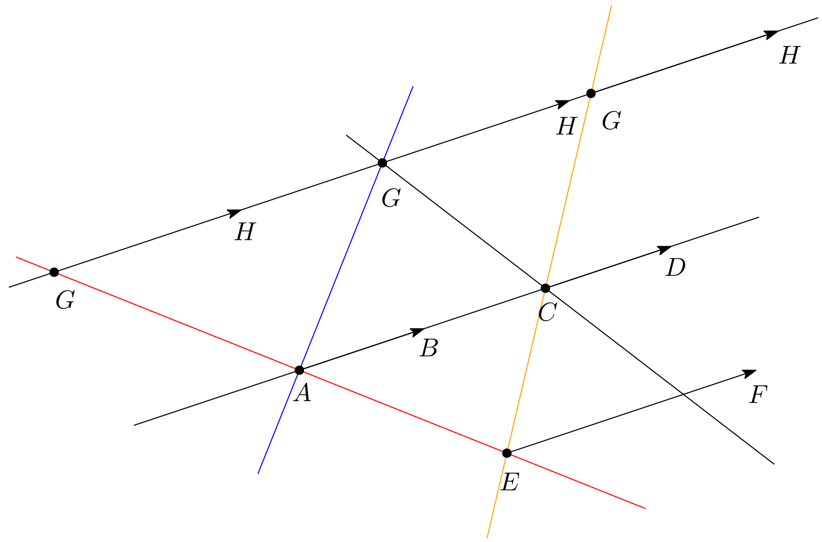

Рис. 3: Корректность определения сонаправленности.

Поскольку точки D и G будут находится по одну сторону от прямой EC и точки H и F также будут находится по одну сторону, то точки D и H также будут находится по одну сторону $\Rightarrow$ $[GH]$ и $[CD]$ будут сонаправленны. ■

Опр: 6. Отрезки $[AB] \sim [CD]$, если они:

1) Коллинеарны;
2) Сонаправлены;
3) Одинаковой длины;

Опр: 7. Вектор - это класс эквивалентности относительно $\sim$.

Опр: 8. Класс эквивалентности $[AA]$, называется нулевой вектор, если удовлетворяет ряду свойств:

1) $[AA]$ коллинеарен любому направленному отрезку;
2) Сонаправленность не определена;
3) $[AA] \sim [BB]$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^2$;

Векторы: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ - класс эквивалентности $[AB]$, 0 - нулевой вектор.

Опр: 9. Два вектора коллинеарны, если их представители коллинеарны. Нулевой векторо коллинеарен любому вектору.

Векторы в трехмерном пространстве

В $\mathbb{R}^3$ направленные отрезки определяются аналогично и также обозначаются: $[AB]$. Коллинеарность определяется аналогично.

Опр: 10. Коллинеарные направленные отрезки $[AB]$ и $[CD]$ сонаправлены, если после их параллельного переноса переводящего C в A, образ D и B лежат на прямой AB по одну сторону от A.

Rm: 1. Если вектора лежат на одной прямой, то перенесем один из них на параллельную прямую и затем применим это определение.

Опр: 11. Три вектора компланарны, если их представители параллельны одной плоскости.

Операции с векторами

Определим операции над векторами.

1) **Умножение вектора на скаляр**: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, и для любого вектора $\overrightarrow{a}$, новый вектора $\lambda \cdot \overrightarrow{a}$ это:
   (1) Нулевой вектор - 0, если $\lambda = 0$ или $\overrightarrow{a} = 0$;
   (2) Вектор, коллинеарный $\overrightarrow{a}$, длины $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$, сонаправленный с $\overrightarrow{a}$, если $\lambda > 0$;
   (3) Вектор, коллинеарный $\overrightarrow{a}$, длины $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$, направлен в другую сторону с $\overrightarrow{a}$, если $\lambda < 0$;
2) **Сложение векторов**: Пусть $[AB]$ - представитель $\overrightarrow{a}$, $[BC]$ - представитель $\overrightarrow{b}$, тогда $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ определяется, как класс $[AC]$;

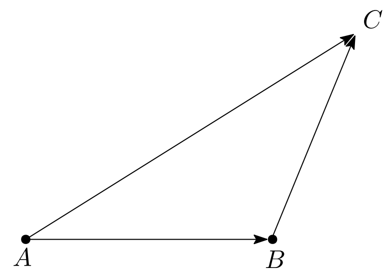

Рис. 4: Сложение векторов.

Упр. 1. Проверить независимость от представителя (через параллелограммы).

Опр: 12. Обратным вектором $-\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{a}$ называется вектор: $-\overrightarrow{a} := (-1) \cdot \overrightarrow{a}$.

Свойства операций с векторами

1) **Коммутативность сложения**: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

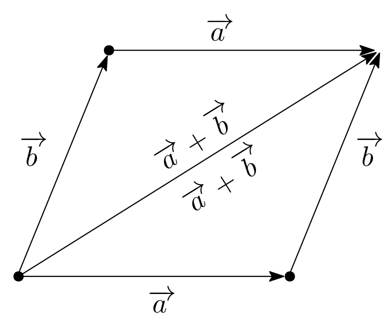

Рис. 5: Коммутативность сложения векторов.

2) **Ассоциативность сложения**: $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c}$;
3) **Существование нейтрального элемента по сложению**: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$;
4) **Существование обратного элемента по сложению**: $\overrightarrow{a} + (-1) \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;

5) **Ассоциативность умножения**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot \beta)\overrightarrow{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overrightarrow{a})$;

6) **Дистрибутивность относительно сложения**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{a} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{a}$;

7) **Дистрибутивность относительно умножения**: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \alpha \cdot \overrightarrow{b}$;

8) **Существование нейтрального элемента по умножению**: $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;

Линейная независимость

Пусть $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ - векторы.

Опр: 13. Линейной комбинацией $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ называется вектор: $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a}_k$, $\forall i = \overline{1, k}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Опр: 14. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ и нетрививальной в противном случае.

Опр: 15. Вектора $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существует хотя бы одна их нетривиальная линейная комбинация равная 0.

Опр: 16. Вектора $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ называются линейно независимыми, если любая их линейная комбинация, равная нулю, является тривиальной.

Ещё это можно сформулировать по-другому:

1) $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ - линейно зависимы $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ не все равные 0: $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a}_k = 0$;

2) $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k$ - линейно независимы $\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \overrightarrow{a}_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$;

Утв. 2. Вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ - линейно зависимы $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ - коллинеарны.

□
($\Rightarrow$) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ - линейно зависимы $\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \vee \lambda_2 \neq 0$: $\lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} = 0$. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда:

$$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \overrightarrow{b}$$

то есть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ - коллинеарны.

($\Leftarrow$) Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ - коллинеарны $\Rightarrow$ возможно несколько ситуаций:

1) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ линейно зависимы;

2) $\overrightarrow{a} = 0, \overrightarrow{b} \neq 0 \Rightarrow 1 \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow$ линейно зависимы;

3) $\overrightarrow{a} \neq 0, \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow 0 \cdot \overrightarrow{a} + 1 \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Rightarrow$ линейно зависимы;

4) $\overrightarrow{a} \neq 0, \overrightarrow{b} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{a} = \dfrac{\left|\overrightarrow{a}\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|} \overrightarrow{b}$, если сонаправленны и $\overrightarrow{a} = -\dfrac{\left|\overrightarrow{a}\right|}{\left|\overrightarrow{b}\right|} \overrightarrow{b}$ иначе, тогда $\left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \overrightarrow{a} \pm \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \overrightarrow{b} \Rightarrow$ линейно зависимы;

■

Утв. 3. Вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ - линейно зависимы $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ - компланарны.