Теорема Жордана

Пусть G - плоский граф, $|V|$ - число его вершин, $|E|$ - число его рёбер. Введём отношение эквивалентности точек.

Опр: 1. Для любого подмножества A плоскости такое отношение, что $\forall P, Q \in A$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в A, является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются компонентами линейной связности множества A или компонентами.

Rm: 1. Будем пользоваться свойствами отношения эквивалентности, которые рассматриваются на математическом анализе.

Рассмотрим для нашего графа множество $\mathbb{R}^2 \backslash G$. Это множество будет иметь какое-то количество компонент линейной связности (проще говоря, то количество областей на которые граф разбивает плоскость). Обозначим $|\Gamma|$ - количество компонент множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$.

Предварительно, можем сказать, что будет верно соотношение:

$$|V| - |E| + |\Gamma| = 2$$

Если рассмотреть простейший граф у которого нет рёбер (только одна вершина), тогда:

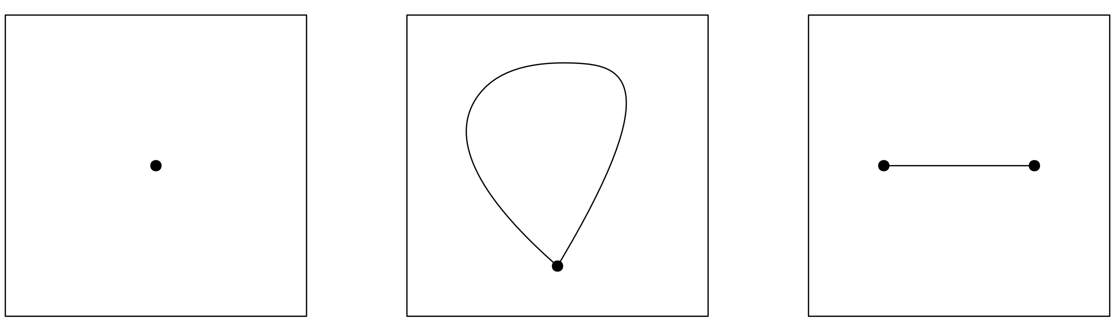
$$|V| = 1,\, |E| = 0,\, |\Gamma| = 1 \Rightarrow |V| - 0 + |\Gamma| = 2$$

Если граф является петлёй с одной вершиной и одним ребром, то:

$$|V| = 1,\, |E| = 1,\, |\Gamma| = 2 \Rightarrow |V| - |E| + |\Gamma| = 1 - 1 + 2 = 2$$

Если граф это две вершины с одним ребром, то:

$$|V| = 2,\, |E| = 1,\, |\Gamma| = 1 \Rightarrow |V| - |E| + |\Gamma| = 2 - 1 + 1 = 2$$



$\lvert V\rvert = 1$	$\lvert V\rvert = 1$	$\lvert V\rvert = 2$
$\lvert E\rvert = 0$	$\lvert E\rvert = 1$	$\lvert E\rvert = 1$
$\lvert\Gamma\rvert = 1$	$\lvert\Gamma\rvert = 2$	$\lvert\Gamma\rvert = 1$

Рис. 1: Вложение частных случаев графов в плоскость.

Прежде чем доказывать теорему Жордана, докажем её частный случай для ломаных. Затем рассмотрим теорему для кривых, далее соотношение выше также всплывет при изучении многогранников.

Теорема 1. (**теорема Жордана для ломаных**) Любая вложенная ломаная разбивает плоскость ровно на две компоненты.

□ Сначала докажем, что число компонент ≤ 2, а затем докажем, что их ровно 2. Пусть у нас есть некоторая ломаная с конечным числом вершин и рёбер. Покажем, что любую точку плоскости можно соеденить непрерывной кривой, не пересекая ломаную с одной из них.

Рассмотрим точку в плоскости P и какую-нибудь точку на произвольном ребре $\Rightarrow$ выделим круг с центром в этой точке так, чтобы он пересекался только с внутренними точками ребра и не пересекался с другими ребрами ломаной.

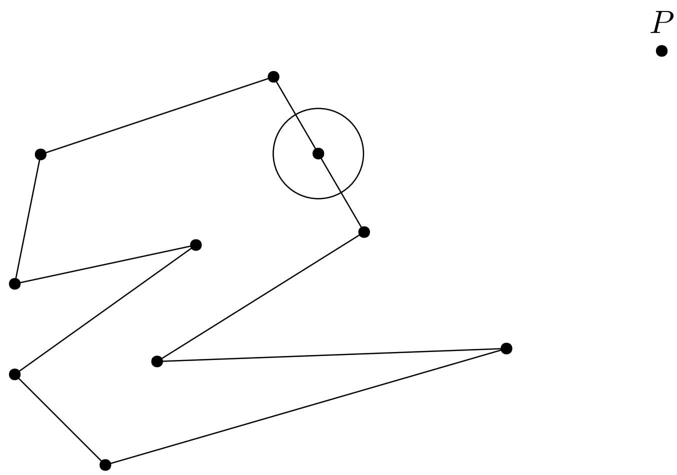


Рис. 2: Соединение ломаной и точки на плоскости.

Пересечение круга с ребром (диаметр) разбивает круг на две части и в каждой из частей выберем по точке: A и B. Надо доказать, что произвольную точку P плоскости можно соеденить непрерывной кривой, не пересекающей ломанную либо с точкой A, либо с точкой B:

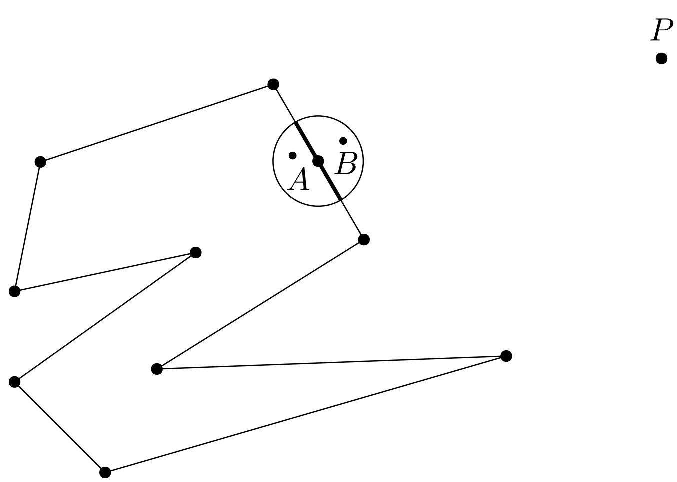


Рис. 3: Разделение круга на ребре ломаной.

■