План курса:

1. Теория множеств.
2. Логика высказываний.
3. Логика предикатов.
4. Вычислимость. Теорема Геделя.

Аксиоматика теории множеств

Синтаксис - грамматика формального языка.
Семантика - каким образом наделяются смыслом формальные высказывания.

Парадокс рассела (парадокс брадобрея):

$R = \{ x \mid x \notin x \}$, $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$, $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

Э. Цермело, А. Френкель - построили аксиоматическую теорию множеств (ZF).

Аксиоматический метод:

(1) Зафиксировать базисные, неопределимые понятия.

(2) Постулируем некоторое число аксиом, связывающих между собой базисные понятия.

(3) Выводим следствия по правилам логики.

Аксиоматика Тарского имеет неопределимые понятия: (1) точка, (2) отношение между тремя точками, (3) отношение между четырьмя точками = длины отрезков, (4) равенство точек.

Аксиоматика Дедекинда, Пеано имеет неопределимые понятия: (1) точка 0, (2) операция +1/функция S и следующие аксиомы:

(1) $\forall n, \neg S(n) = 0$

(2) $S(n) = S(m) \Leftrightarrow n = m$

(3) $P(0) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n, P(n)$, P - любое свойство.

Что такое свойство мы пока не знаем.

К языку арифметики добавим простые аксиомы: $n+0 = n$, $n+S(m) = S(n+m) \Rightarrow$ получим арифметику Пеано $\Rightarrow$ свойство = некоторое высказывание о натуральных числах.

x, X - множества - некая совокупность элементов, объединенная каким-то свойством.
$\varnothing$ - пустое множество.

Нужно заметить, что $x \neq \{x\}$, $\{x\} \neq \{\{x\}\}$. x - в нем может быть множество элементов, $\{x\}$ - здесь один элемент.

Неопределимые понятия: (1) множества = любые объекты, (2) принадлежность множеству $x \in y$.

Иногда определяют равенство множеств, как аксиому, мы рассматриваем это как опредление, в частности, по определению в множестве нет повторяющихся элементов.

Опр: 1. $X = Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall z, (\ z \in X \Leftrightarrow z \in Y\ )$ (Аксиома объемности).

Опр: 2. $X \subseteq Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall z, (\ z \in X \Rightarrow z \in Y\ )$; $X \subsetneq Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (X \subseteq Y \land X \neq Y)$

(1) Аксиома равенства: $x = y \Rightarrow \forall z, (x \in z \Leftrightarrow y \in z)$
Отсюда следует, что $\exists$ хотя бы 1 элемент: $\exists x\colon\, x = x$ - "аксиома существования" - далее будет выводиться в кванторах.

(2) Аксиома пары: $\forall x, y\ \exists z = \{x, y\}\colon \forall u, \big(u \in z \Leftrightarrow (u = x \lor u = y)\big)$

Опр: 3. $\{x\} \overset{\text{def}}{=} \{x, x\}$ - синглетон. Синглетон существует по аксиоме пары.

$x \in \{x\}$, $\mathbb{R}$ - множество элементов, $\{\mathbb{R}\}$ - один элемент.

$\square$ $\{x\} = \{x, x\} \Leftrightarrow \forall z, (z \in \{x\} \Leftrightarrow z \in \{x, x\})$, по определения равенства.
$z \in \{x\} \Leftrightarrow (z = x)$, $z \in \{x, x\} \Leftrightarrow (z = x \lor z = x) \Leftrightarrow z = x$.
Строго можно рассамтривать $\{x\} = \{z \mid z = x\}$. $\blacksquare$

Утв. 1. $x = y \Leftrightarrow \{x\} = \{y\}$.

$\square$ $x = y \Leftrightarrow \forall z\ (z = x \Leftrightarrow z = y) \Leftrightarrow \forall z (z \in \{x\} \Leftrightarrow z \in \{y\}) \Leftrightarrow \{x\} = \{y\}$. $\blacksquare$

(3) Аксиома объединения: $\forall x\ \exists y = \cup x\colon \forall u, (u \in y \Leftrightarrow \exists z\ (u \in z \land z \in x))$.

$\varnothing$ - множество у которого нет ни одного элемента, то есть $\forall x\ x \notin \varnothing$, сможем получить его после 5-ой аксиомы.

Утв. 2. Множество $\varnothing$ - единственно.

$\square$ Пусть $\forall x\ x \notin \varnothing, \forall x\ x \notin \varnothing' \Rightarrow \forall x\ (x \notin \varnothing \Leftrightarrow x \notin \varnothing') \Rightarrow \forall x\ (x \in \varnothing \Leftrightarrow x \in \varnothing') \Leftrightarrow \varnothing = \varnothing'$ $\blacksquare$

$X = \Big\{\{\varnothing\}, \big\{\{\varnothing\}\big\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}$ - содержит 3 элемента, все существуют по аксиоме пары.

$\bigcup X = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \varnothing, \{\varnothing\}\big\} = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$

$\{x, y, z\} = \{x, y\} \cup \{z\} = \bigcup \big\{\{x, y\}, \{z\}\big\}$ - аналогично для более широких множеств.

$X \cup Y \overset{\text{def}}{\coloneqq} \bigcup \{X, Y\}$

(4) Аксиома степени: $\forall x\ \exists y = \mathcal{P}(x)\colon\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$, где $\mathcal{P}(x)$ - множество всех подмножеств.

(5) Аксиома выделения: $\forall x\ \exists y = \{u \in x \mid \varphi(u)\}\colon \forall u\ \Big(u \in y \Leftrightarrow \big(u \in x \land \varphi(u)\big)\Big)$, где φ - это какое-то свойство, некоторый признак элемента u.

$A \rightsquigarrow \{x \in A \mid \varphi(x)\}$ - множество всех элементов A, обладающих свойством φ.

Примеры:

$X \subseteq \mathbb{N}$, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ - нечетно$\}$ - использовали аксиому выделения.

$Y \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ - использовали аксиому выделения.

Множества и классы:

Множество всех множеств - не употребляется, говорят класс множеств.

Опр: 4. Класс$= \{x \mid \varphi(x)\}$ - совокупность всех x, удовлетворяющих φ, которые могут быть или не быть самими множествами.

Утв. 3. $\exists\varnothing$ множество.

$\square$ $\exists x_\circ$ (по аксиоме равенства/аксиоме существования) $\Rightarrow$ по аксиоме выделения
$\exists\{x \in x_\circ \mid x \notin x_\circ\} = \varnothing = \{x \in x_\circ \mid x \neq x\}$ $\blacksquare$

$\langle x, y\rangle$ - упорядоченная пара.

Утв. 4. Основное свойство упорядоченной пары: $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$.

$\square$ $(\Rightarrow)\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \Rightarrow \cap\langle x_1, y_1\rangle = \cap\langle x_2, y_2\rangle \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
$\cup\langle x_1, y_1\rangle = \cup\langle x_2, y_2\rangle \Rightarrow \{y_1\} = \{y_2\} \Leftrightarrow y_1 = y_2$

$(\Leftarrow)$ верно по аксиоме равенства: $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow$ любые построенные из них множества будут равны. $\blacksquare$

Опр: 5. Упорядоченная пара по Куратовскому: $\langle x, y\rangle \overset{\text{def}}{\coloneqq} \big\{\{x, y\}, \{x\}\big\}$

$y \in \cap x \Leftrightarrow (\forall u \in x, y \in u)$

Теорема 1. $x \neq \varnothing \Rightarrow \exists! z\colon z = \cap x$

$\square$ $x \neq \varnothing \Rightarrow \exists a, a \in x \Rightarrow$ по (A5) в a $\exists z = \{y \in a \mid \forall u \in x, y \in u\} = \cap x$ (существование).
$y \in z \Leftrightarrow (\forall u \in x, y \in u) \Leftrightarrow y \in z' \Rightarrow$ по аксиоме объемности $\Rightarrow z = z'$ (единственность). $\blacksquare$

Как можно получить элементы из пары?

$\{x\} = \{x, y\} \cap \{x\} = \cap\langle x, y\rangle$

$$\{y\} = \begin{cases} \big(\cup\langle x, y\rangle\big) \setminus \big(\cap\langle x, y\rangle\big), & x \neq y, \text{ разность множеств существует по аксиоме выделения} \\ \cap\langle x, y\rangle, & \text{иначе} \end{cases}$$