Аксиоматика теории множеств

Равенство определяли следующим образом: $x = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall z, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$.

Изучили следующие аксиомы:

(1) **Аксиома равенства:** $x = y$;

(2) **Аксиома пары:** $\{\, x, y \,\}$;

(3) **Аксиома объединения:** $\cup x$;

(4) **Аксиома степени:** $\mathcal{P}(x)$;

(5) **Аксиома выделения:** $\{\, z \in x \mid \varphi(z) \,\}$;

Для аксиомы выделения можно добавить параметры $\Rightarrow$ получим $\{\, z \in x \mid \varphi(z, p_1, \ldots, p_n) \,\}$, например $\{\, z \in \mathbb{R} \mid z < a \,\}$, где a - параметр.

Опр: 1. $X \times Y = \{\, \langle u, v \rangle \mid u \in X \wedge v \in Y \,\}$ - Декартово произведение, $\langle u, v \rangle \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big)$.

Почему $\langle u, v \rangle \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big)$ - ?

$\langle x, y \rangle = \big\{\{x, y\}, \{x\}\big\}$
$\{x\} \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(X \cup Y) \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$ и $\{x\} \in \mathcal{P}(X \cup Y) \Rightarrow$
$\big\{\{x, y\}, \{x\}\big\} \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big)$

Формальная запись Декартова произведения

$$X \times Y = \Big\{\, z \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(X \cup Y)\big) \mid \exists u, v \colon (z = \langle u, v \rangle \wedge u \in X \wedge y \in Y) \,\Big\}$$

$z = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow z = \big\{\{u, v\}, \{v\}\big\} \Leftrightarrow \exists z_1, \exists z_2, (z_1 = \{u\} \wedge z_2 = \{u, v\} \wedge z = \{z_1, z_2\})$
$z_1 = \{u\} \Leftrightarrow \forall w, (w \in z_1 \Leftrightarrow w = u)$

Опр: 2. R - бинарное отношение между A и B, если $R \subseteq A \times B$.

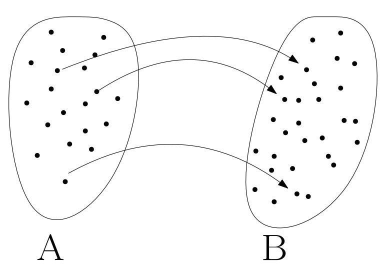

Рис. 1: Бинарное отношение

Пример:

$\langle x, y \rangle \in R \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} xRy$
$=_A \coloneqq \{\, \langle x, x, \rangle \mid x \in A \,\} \subseteq A \times A$ (равенство на A или тождественная функция).

Отношение эквивалентности:

(1) Рефлексивное: $\forall x \in A, (xRx)$;

(2) Транзитивное: $\forall x, y, z \in A, (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$;

(3) Симметричное: $\forall x, y \in A, (xRy \Rightarrow yRx)$;

Можно разделять множества по классам эквивалентности: $x \in A \Rightarrow x_R \coloneqq \{\, y \in A \mid yRx \,\}$ (по A5), по определению $x \in x_R$.

Утв. 1. $\forall x, y, (x_R = y_R \vee x_R \cap y_R = \varnothing)$.

$\square$ $x \in A \Rightarrow x_R = \{y \in A \mid yRx\}$; пусть $x_1, x_2 \in A$, пусть $x_R^1 \cap x_R^2 \neq \varnothing \Rightarrow$ пусть $z \in x_R^1 \cap x_R^2 \Rightarrow x_1Rz \wedge x_2Rz \Rightarrow x_1Rx_2 \Rightarrow x_2Rx_1 \Rightarrow \forall z\colon x_2Rz \Rightarrow x_1Rz, \forall z\colon x_1Rz \Rightarrow x_2Rz \Rightarrow x_R^1 = x_R^2$, иначе $x_R^1 \cap x_R^2 = \varnothing$. $\blacksquare$

A/R - множество всех классов эквивалентности элементов множества A по отношению R; A/R - фактор-множе

Опр: 3. Фактор-множество - $A/R = \{\, x_R \in \mathcal{P}(A) \mid x \in A \,\} = \{\, z \in \mathcal{P}(A) \mid \exists x \in A\colon x_R = z \,\}$, где $z = \{\, y \in A \mid yRx \,\}$ - по определению.

$\bigsqcup A/R = A$ (все множество A разбивается на классы эквивалентности).

Целые числа $\mathbb{Z}$

Пусть задали $\mathbb{N}$, как задать $\mathbb{Z}$ - ?
$\langle m, n \rangle$, где $m, n \in \mathbb{N}$; интуитивно: “$m - n$” $\Rightarrow \langle 1, 2 \rangle \cong -1; \langle 2, 3 \rangle \cong -1; \ldots$;

$=_{\mathbb{Z}}$ - отношение эквивалентности на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\langle m_1, n_1 \rangle =_{\mathbb{Z}} \langle m_2, n_2 \rangle$ - ?

$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \Rightarrow \langle m_1, n_1 \rangle =_{\mathbb{Z}} \langle m_2, n_2 \rangle \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m_1 + n_2 = m_2 + n_1 \Rightarrow \mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \big(\mathbb{N} \times \mathbb{N} / =_{\mathbb{Z}}\big)$

Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Как задать $\mathbb{Q}$ - ? $\dfrac{m}{n} \Rightarrow \langle m, n \rangle, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \dfrac{m_1}{n_1} =_{\mathbb{Q}} \dfrac{m_2}{n_2} \Leftrightarrow m_1 n_2 =_{\mathbb{Z}} n_1 m_2 \Rightarrow$
$\mathbb{Q} = \big(\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) / =_{\mathbb{Q}}\big)$

$=_{\mathbb{Q}}$ - отношение эквивалентности на $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$

Функции

$f\colon A \to B$ - функция. $x \mapsto f(x)$ - соответствие, но в теории множеств все статично, все состоит из множеств, можем отождествить с графиком, то есть с парой $\Rightarrow f \subseteq A \times B \Rightarrow f = \{\, \langle x, f(x) \rangle \mid x \in A \,\}$, f - частный случай бинарного отношения.

Свойства бинарных отношений:

(1) Функциональность: $\forall x, y_1, y_2, (xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$;

(2) Тотальность: $\forall x \in A, \exists y \in B\colon xRy \Leftrightarrow \mathrm{dom} R = A$;

(3) Инъективность: $\forall x_1, x_2, y, (x_1Ry \wedge x_2Ry \Rightarrow x_1 = x_2)$;

(4) Сюръективность: $\forall y \in B, \exists x \in A\colon xRy \Leftrightarrow \mathrm{rng} R = B$;

$\forall R, \exists R^{-1} \colon R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid xRy \}, R^{-1} \subseteq B \times A;$

Можно заметить, что R - функционально $\Leftrightarrow R^{-1}$ - инъективно, R - тотально $\Leftrightarrow R^{-1}$ - сюръективно.

Опр: 4. $f \subseteq A \times B$ - функция из A в B, если f - тотальна и функциональна.

Rm: 1. Если f - только функциональна, то это частичная функция.

Опр: 5. Область определения $\mathrm{dom} R \overset{\mathrm{def}}{=} \{ x \in A \mid \exists y \in B \colon xRy \}$.

Опр: 6. Область значений $\mathrm{rng} R \overset{\mathrm{def}}{=} \{ y \in B \mid \exists x \in A \colon xRy \}$.

Опр: 7. Композицией $R \cdot S$ двух отношений $R \colon A \to B$ и $S \colon B \to C$ называется $R \cdot S \subseteq A \times C$, такой что $xRSz \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists y \in B \colon (xRy \wedge ySz)$.

Опр: 8. $(f \circ g)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} f(g(x)), A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \Rightarrow f \circ g \overset{\mathrm{def}}{=} g \cdot f$.