Неравенство Коши-Буняковского

Опр: 1. Длиной $a \in V$ будем называть $\sqrt{(a,a)} \geq 0$, обозначение $|a|$.

Теорема 1. (**Неравенство Коши-Буняковского**) Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{K}$, тогда будет верно следующее неравенство:

$$\forall a, b \in V,\ |(a,b)| \leq |a|\cdot|b|$$

где $|(a,b)|$ - модуль скалярного произведения, а $|a|, |b|$ - длины векторов a и b.

□ Докажем теорему для двух случаев (1) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и (2) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть $a, b \in V$ - произвольные.

(1) $\forall t \in \mathbb{R}$ возьмем $a + tb \Rightarrow (a+tb, a+tb) = (a,a) + 2t(a,b) + t^2(b,b) \geq 0$. Возможно два случая:

a) $b = 0 \Rightarrow (a,b) = 0,\ |b| = 0 \Rightarrow |0| = 0 \leq |a|\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ неравенство выполняется;

b) $b \neq 0 \Rightarrow (b,b) > 0,\ D = 4(a,b)^2 - 4(a,a)\cdot(b,b) \leq 0 \Leftrightarrow (a+tb, a+tb) \geq 0$. Таким образом:

$$(a,b)^2 \leq (a,a)\cdot(b,b) \Leftrightarrow |(a,b)| \leq \sqrt{(a,a)}\cdot\sqrt{(b,b)} = |a|\cdot|b|$$

требуемое неравенство выполняется;

(2) $\forall t \in \mathbb{C}$ возьмем $a + tb \Rightarrow (a+tb, a+tb) = (a,a) + (a,tb) + (tb,a) + |t|^2\cdot(b,b)$, поскольку верно следующее:

$$(\lambda a, b) = \overline{(b, \lambda a)} = \overline{\lambda}\cdot\overline{(b,a)} = \overline{\lambda}\cdot(a,b),\ t\cdot\bar{t} = |t|^2,\ (tb, tb) = t\cdot\bar{t}(b,b) = |t|^2\cdot(b,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+tb, a+tb) = (a,a) + t\cdot(a,b) + \bar{t}\cdot\overline{(a,b)} + |t|^2\cdot(b,b)$$

Подберем t: $t\cdot(a,b) \in \mathbb{R}$. Вспомним, что $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow (a,b) = |(a,b)|e^{i\varphi} \Rightarrow t = se^{-i\varphi}$, где $s \in \mathbb{R}$, тогда:

$$t\cdot(a,b) = |(a,b)|se^{-i\varphi}e^{i\varphi} = s|(a,b)| \Rightarrow |t| = |s|\cdot|e^{-i\varphi}| = |s| \Rightarrow |t|^2 = |s|^2 = s^2$$

$$\bar{t}\cdot\overline{(a,b)} = |\overline{(a,b)}|e^{-i\varphi}\bar{s}e^{i\varphi} = |(a,b)|s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+tb, a+tb) = (a,a) + 2s\cdot|(a,b)| + s^2\cdot(b,b) \in \mathbb{R}$$

Все элементы принадлежат $\mathbb{R} \Rightarrow D \leq 0 \Leftrightarrow |(a,b)|^2 \leq (a,a)\cdot(b,b) = |a|^2\cdot|b|^2$. ■

Следствие 1. $\forall a, b \in V$ в Евклидовом случае $-1 \leq \dfrac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} \leq 1$.

Опр: 2. Углом между a и b называется $\varphi_{ab} = \arccos\left(\dfrac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}\right)$, в частности, если $(a,b) = 0$, то $a \perp b$.

Следствие 2. (**Неравенство треугольника**) Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тогда верно:

$$\forall a, b \in V,\ |a+b| \leq |a| + |b|$$

□

$$\forall a, b \in V,\ |a+b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow (a+b, a+b) \leq (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\cdot|b| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b,a) + (a,b) \leq 2|a|\cdot|b| \Leftrightarrow \overline{(a,b)} + (a,b) \leq 2|a|\cdot|b|$$

поскольку $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = (a,b) = \operatorname{Re}(a,b) + i\cdot\operatorname{Im}(a,b) \Rightarrow \overline{(a,b)} + (a,b) = 2\operatorname{Re}(a,b)$ и $\operatorname{Re} z \leq |z|$, тогда:

$$\overline{(a,b)} + (a,b) \leq 2|a|\cdot|b| \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(a,b) \leq 2|a|\cdot|b| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(a,b) \leq |(a,b)| \leq |a|\cdot|b|$$

где в последнем слагаемом мы применили неравенство Коши-Буняковского. ■

Лемма 1. Пусть $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ и ортогональны (взаимно перпендикулярны). Тогда $a_1, \ldots, a_n$ - линейно независимы.

$\square$ $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$, обе части умножим на a_i (скалярно) $\Rightarrow (a_i, \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = (a_i, 0) = 0$, распишем второй аргумент подробнее:

$$\lambda_1(a_i, a_1) + \ldots + \lambda_i(a_i, a_i) + \ldots + \lambda_n(a_i, a_n) = \lambda_i \cdot |a_i|^2 = 0$$

Поскольку $\forall i = \overline{1, n}$, $a_i \neq 0 \Rightarrow |a_i|^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow a_1, \ldots, a_n$ - линейно независимы. $\blacksquare$

Опр: 3. Система векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется ортогональной, если все $a_i \neq 0$ и $a_i \perp a_j$, $\forall i \neq j$.

Опр: 4. Система векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется ортонормированной, если она ортогональна и длина каждого вектора равна единице: $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$.

Ортогонализация Грама-Шмидта

Теорема 2. (**Процесс ортогонализации**) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - линейно независимы, тогда существует ортогональная система векторов $a_1, \ldots, a_n$ такая, что $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $\forall k$.

$\square$ Пусть $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимый набор векторов, образуют цепочку линейных подпространств:

$$V_1 = \langle e_1 \rangle,\ V_2 = \langle e_1, e_2 \rangle, \ldots, V_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle,\ V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n,\ \dim V_i = i$$

Осуществим процесс ортогонализации по шагам:

(1) Пусть $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2 + \lambda e_1 \Rightarrow (a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow (e_1, e_2 + \lambda e_1) = 0 \Leftrightarrow (e_1, e_2) + \lambda(e_1, e_1) = 0$, тогда λ можно найти только в случае, если $(e_1, e_1) \neq 0$. Поскольку $e_1, \ldots, e_n$ - линейно независимы, то $e_1 \neq 0$, следовательно $(e_1, e_1) = |e_1|^2 \neq 0$. Получается, что $a_1 \perp a_2$, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = V_2$.

(2) Пусть a_1, a_2 уже найдены, ищем a_3 в виде: $a_3 = e_3 + \alpha a_1 + \beta a_2$, тогда рассмотрим систему:

$$\begin{cases} (a_1, a_3) = 0 \\ (a_2, a_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, e_3 + \alpha a_1 + \beta a_2) = (a_1, e_3) + \alpha(a_1, a_1) + \beta(a_1, a_2) = 0 \\ (a_2, e_3 + \alpha a_1 + \beta a_2) = (a_2, e_3) + \alpha(a_2, a_1) + \beta(a_2, a_2) = 0 \end{cases}$$

Поскольку $a_1 \perp a_2$, то $(a_1, a_2) = (a_2, a_1) = 0$ и $(a_1, a_1) \neq 0$, $(a_2, a_2) \neq 0 \Rightarrow$ получим систему вида:

$$\begin{cases} (a_1, e_3) + \alpha(a_1, a_1) = 0 \\ (a_2, e_3) + \beta(a_2, a_2) = 0 \end{cases}$$

Она имеет решение $\Rightarrow$ мы нашли a_3. $V_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

(3) Пусть мы нашли таким образом $a_1, \ldots, a_k$. Рассматриваем $a_{k+1} = e_{k+1} + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \Rightarrow$ получим систему:

$$\begin{cases} (a_1, a_{k+1}) = (a_1, e_{k+1}) + \lambda_1(a_1, a_1) + \ldots + \lambda_k(a_1, a_k) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ (a_k, a_{k+1}) = (a_k, e_{k+1}) + \lambda_1(a_k, a_1) + \ldots + \lambda_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Поскольку $\forall i = \overline{1, k}$, $(a_k, a_k) \neq 0$ и $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$, $(a_i, a_j) = 0$, то получим следующую систему:

$$\begin{cases} (a_1, e_{k+1}) + \lambda_1(a_1, a_1) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ (a_k, e_{k+1}) + \lambda_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

Решение этой системы существует, если $|a_1| \neq 0, \ldots, |a_k| \neq 0$. Надо проверить, что ни на каком шаге мы не сможем получить $a_i = 0$. Пусть $a_1 = e_1 \neq 0$ и $a_i = e_i + \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{i-1}a_{i-1} = 0$. Воспользуемся тем, что $\langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle = \langle e_1, \ldots, e_{i-1}\rangle$, тогда:

$$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{i-1}a_{i-1} = \nu_1 e_1 + \ldots + \nu_{i-1}e_{i-1} \Rightarrow e_i + \nu_1 e_1 + \ldots + \nu_{i-1}e_{i-1} = 0$$

Тогда $e_1, \ldots, e_i$ - линейно зависимы $\Rightarrow$ получили противоречие с $e_1, \ldots, e_n$ - линейно независимы. ■

Как выглядит матрица перехода от $e_1, \ldots, e_n$ к $a_1, \ldots, a_n$?

$$a_{k+1} = e_{k+1} + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * & * \\ 0 & 1 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица перехода C - верхнетреугольная.

Опр: 5. Пусть $L \subset V$ - линейное подпространство. Ортогональным дополнением $L^\perp$ к L назовем следующее множество:

$$\{a \in V \colon (a, b) = 0,\ \forall b \in L\}$$

Лемма 2. Ортогональное дополнение является линейным подпространством.

□ Проверим свойства подпространства:

(1) $\forall a_1, a_2 \in L^\perp,\ \forall b \in L,\ (a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 \in L^\perp$;

(2) $\forall a \in L^\perp,\ \forall b \in L,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (\lambda{\cdot}a, b) = \begin{cases} \lambda{\cdot}(a, b),\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \overline{\lambda}{\cdot}(a, b),\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases} = \begin{cases} 0,\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 0,\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda{\cdot}a \in L^\perp$;

■

Лемма 3. $V = L \oplus L^\perp$;

□ Выберем произвольный базис в L: $e_1, \ldots, e_k$ и дополним его до базиса V: $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта $\Rightarrow$ получим $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ - ортогональный базис $V \Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_k\rangle = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle \Rightarrow a_1, \ldots a_k$ - ортогональный базис L.

Покажем, что $a_{k+1}, \ldots, a_n$ - базис $L^\perp$.

(1) $\forall i > k,\ a_i \in L^\perp$ поскольку $a_i \in L^\perp \Leftrightarrow \forall b \in L,\ (a_i, b) = 0$, проверим:

$$b \in L \Rightarrow b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \Rightarrow (a_i, b) = (a_i, \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) = \lambda_1(a_i, a_1) + \ldots + \lambda_k(a_i, a_k) = 0$$

в силу того, что $\forall j = \overline{1, k},\ \forall i > k,\ (a_i, a_j) = 0$. Таким образом $\forall a_i \colon i > k \Leftrightarrow a_i \in L^\perp$;

(2) Линейная независимость: очевидно по построению;

(3) Максимальность: Пусть $a \in L^\perp \subset V \Rightarrow$ разложим a по базису V:

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \alpha_n a_n$$

Учитывая, что $a \in L^\perp \Leftrightarrow \forall b \in L,\ (a, b) = 0$, подставим $a_i,\ i \leq k$ вместо b, тогда получим:

$$(a, a_i) = \overline{\alpha}_1(a_1, a_i) + \ldots + \overline{\alpha}_k(a_k, a_i) + \overline{\alpha}_{k+1}(a_{k+1}, a_i) + \ldots + \overline{\alpha}_n(a_n, a_i) = 0 \Rightarrow \forall i \leq k,\ \alpha_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall a \in L^{\perp},\ a = \alpha_{k+1}a_{k+1} + \ldots + \alpha_n a_n$$

Следовательно, получили максимальность;

Таким образом, $a_{k+1}, \ldots, a_n$ - базис в $L^{\perp}$. Покажем, что $V = L + L^{\perp}$:

$$\forall v \in V \Rightarrow v = v_1a_1 + \ldots + v_ka_k + v_{k+1}a_{k+1} + \ldots + v_na_n$$

$$v_1^L = v_1a_1 + \ldots + v_ka_k \in L,\ v_2^{L^{\perp}} = v_{k+1}a_{k+1} + \ldots + v_na_n \in L^{\perp},\ v = v_1^L + v_2^{L^{\perp}}$$

Покажем, что $V = L \oplus L^{\perp}$. Сумма прямая, если $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, пусть $a \in L \cap L^{\perp}$, тогда:

$$\forall b \in L,\ (a, b) = 0 \Leftrightarrow a \in L^{\perp} \Rightarrow b = a \in L \Rightarrow (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

■

Лемма 4. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$, тогда $\forall a \in V$, $\exists!$ разложение $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$.

□ (От противного): Пусть $a = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, $a_1, b_1 \in L_1$, $a_2, b_2 \in L_2 \Rightarrow (a_1 - b_1) = (a_2 - b_2)$, где $(a_1 - b_1) \in L_1$ и $(a_2 - b_2) \in L_2$. Поскольку $V = L_1 \oplus L_2$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, следовательно:

$$a_1 - b_1 = 0 = a_2 - b_2 \Rightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

■

Ортогональные проекции

Пусть $L \subset V$, $a \in V$, $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in L$, $a_2 \in L^{\perp}$. $a \mapsto a_1 \in L$, $a \mapsto a_2 \in L^{\perp}$ - слагаемые определяются однозначно.

Опр: 6. Ортогональной проекцией $a \in V$ назовем $a_1 \in L$, обозначение $a_{\|}$.

Опр: 7. Ортогональной составляющей $a \in V$ назовем $a_2 \in L^{\perp}$, обозначение $a_{\perp}$.

Таким образом $\forall a \in V$, $a = a_{\|} + a_{\perp}$.

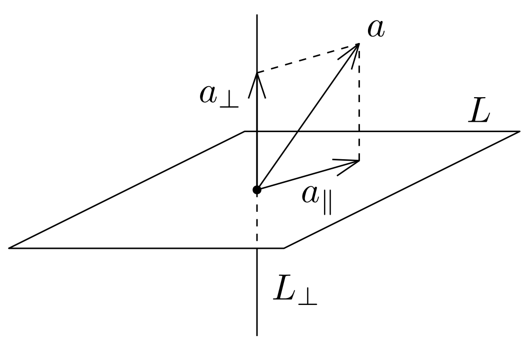

Рис. 1: Ортогональная проекция.