Внешняя прямая сумма

V, W - линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Опр: 1. Внешней прямой суммой $V \oplus W$ называется множество пар $(v, w)\colon v \in V$, $w \in W$ с операциями:

$+\colon\ (v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$;

$\cdot\colon\ \lambda\cdot(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$, где $\lambda \in \mathbb{K}$;

Размерность внешней прямой суммы равна сумму размерностей: $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, $g_1, \ldots, g_m$ - базис в W, тогда $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, g_1), \ldots, (0, g_m)$ - базис у внешней прямой суммы. Тогда любая пара (v, w) может быть записана следующим образом:

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) = \alpha_1(e_1, 0) + \ldots \alpha_n(e_n, 0) + \beta_1(0, g_1) + \ldots + \beta_m(0, g_m)$$

Линейные отображения

Опр: 2. Пусть V, W - линейные пространства над $\mathbb{K}$, отображение $f\colon V \to W$ называется линейным, если выполнено следующее:

(1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in V$;

(2) $f(\lambda\cdot a) = \lambda\cdot f(a)$, $\forall a \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;

Примеры:

(1) Нулевое отображение $f(a) = 0$, $\forall a \in V$;

(2) Изоморфизм $\Rightarrow$ линейное отображение;

(3) Система линейных уравнений $AX = B$;

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, $g_1, \ldots, g_m$ - базис в W $\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) & = & a_1^1 g_1 + \ldots + a_1^m g_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(e_n) & = & a_n^1 g_1 + \ldots + a_n^m g_m \end{cases}$ - разложение по базису векторов $e_1, \ldots, e_n \Rightarrow$ при фиксированных базисах линейное отображение задает некоторую матрицу коэффициентов.

Опр: 3. Матрица $A = A_f = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного отображения f в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $g_1, \ldots, g_m$.

Рассмотрим функцию $f(x) = f(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n)$:

$$f(x) = x^1 f(e_1) + \ldots + x^n f(e_n) = x^1(a_1^1 g_1 + \ldots + a_1^m g_m) + \ldots + x^n(a_n^1 g_1 + \ldots + a_n^m g_m) =$$

$$= (a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n) g_1 + \ldots + (a_1^m x^1 + \ldots + a_n^m x^n) g_m = y \Rightarrow y = Ax$$

где $(a_1^i x^1 + \ldots + a_n^i x^n)$, $i = \overline{1, m}$ - координаты y. Перепишем это же выражение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = Ax = f(x),\ y^i = a_j^i x^j = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j$$

Отметим следующее наблюдение: f, h - линейные отображения $V \to W$, тогда определим:

(1) $(f+h)(x) \coloneqq f(x) + h(x)$ - линейное отображение;

(2) $(\lambda \cdot f)(x) \coloneqq \lambda \cdot f(x)$ - линейное отображение;

Множество всех линейных отображений из V в W обозначим $L(V, W)$.

Лемма 1. Сопоставление линейному отображению его матрицы задает изоморфизм:

$$L(V, W) \simeq \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

□ Выбираем базисы $e_1, \ldots, e_n \in V$ и $g_1, \ldots, g_m \in W \Rightarrow$ отображение $F\colon L(V, W) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ определено следующим образом:

$$F(f) = A_f = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

Проверим, что оно является изоморфизмом:

(1) F сохраняет структуру линейного пространства: $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$, $F(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot F(f)$;

(2) F это биекция:

1) Инъективность: Пусть $F(f_1) = F(f_2)$, $x \in V$, $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, тогда:

$$\forall x \in V,\ f_1(x) = (a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n) g_1 + \ldots + (a_1^m x^1 + \ldots + a_n^m x^n) g_m = f_2(x) \Rightarrow \forall x \in V,\ f_2 = f_1$$

2) Сюръективность: Пусть $\begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$ - произвольная $(n \times m)$ матрица, определим $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = (a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n) g_1 + \ldots + (a_1^m x^1 + \ldots + a_n^m x^n) g_m$$

f - линейное отображение, левая часть определена через правую (то есть через коэффициенты матрицы) $\Rightarrow$ сюръекция;

■

Следствие 1. $\dim L(V, W) = n \cdot m$.

Матрицы перехода к новому базису

Пусть есть 2 базиса $e_1, \ldots, e_n, \widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n \in V$ и 2 базиса $g_1, \ldots, g_m, \widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_m \in W$. C_v, C_w - матрицы перехода. $x \in V$, $x = (x^1, \ldots, x^n)^T$, $\widetilde{x} = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n)^T$ - координаты x в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ соответственно. Тогда $x = C_V \widetilde{x}$, аналогично $y \in W$, $y = C_W \widetilde{y}$.

Пусть A - матрица отображения f в базисах $e_1, \ldots, e_n, g_1, \ldots, g_m$. Пусть $\widetilde{A}$ - матрица отображения f в базисах $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n, \widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_m$. Тогда:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = A \cdot x \wedge \widetilde{y} = \widetilde{A} \cdot \widetilde{x} \Rightarrow C_W \widetilde{y} = A \cdot C_V \widetilde{x} \Rightarrow \widetilde{y} = C_W^{-1} A C_V \cdot \widetilde{x}$$

где последнее справедливо поскольку матрицы перехода - обратимы. Матрица по линейному отображению определяется однозначно при фиксированном базисе $\Rightarrow \widetilde{A} = C_W^{-1} A C_V$ - общий случай.

Образ и ядро линейных отображений

Пусть $f\colon V \to W$ - линейное отображение.

Опр: 4. Ядром отображения f называется подмножество V:

$$\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$$

Опр: 5. Образом отображения f называется подмножество W:

$$\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists\, v \in V\colon f(v) = w\} \subset W$$

Лемма 2. $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Im} f$ это линейные подпространства.

□

1) $\operatorname{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$:
   (1) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Ker} f,\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker} f$;
   (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in \operatorname{Ker} f,\ f(\lambda\cdot v) = \lambda\cdot f(v) = \lambda\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda\cdot v \in \operatorname{Ker} f$;

   Таким образом $\operatorname{Ker} f$ - линейное подпространство V;
2) $\operatorname{Im} f = \{w \in W \mid \exists\, v \in V\colon f(v) = w\}$:
   (1) $\forall w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f, \exists\, v_1, v_2 \in V\colon f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \Rightarrow f(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} f$;
   (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in \operatorname{Im} f, \exists\, v \in V\colon f(v) = w \Rightarrow \lambda\cdot w = \lambda\cdot f(v) = f(\lambda\cdot v) \Rightarrow \lambda\cdot w \in \operatorname{Im} f$;

   Таким образом $\operatorname{Im} f$ - линейное подпространство W;

■

Теорема 1. $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$

□ Пусть $e_1, \ldots, e_r$ - базис в $\operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = r$, дополним этот набор до базиса V, следовательно получим $e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$ - базис в $V \Rightarrow \dim(V) = n \Rightarrow$ нужно показать, что $\dim(\operatorname{Im} f) = n - r$.

$$0 = f(e_1), \ldots, 0 = f(e_r), w_1 = f(e_{r+1}), \ldots, w_{n-r} = f(e_n)$$

Проверим, что $w_1, \ldots, w_{n-r}$ это базис $\operatorname{Im} f$:

(1) Линейная независимость:

$$\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{n-r} w_{n-r} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 f(e_{r+1}) + \ldots + \lambda_{n-r} f(e_n) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda_1 e_{r+1} + \ldots + \lambda_{n-r} e_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 e_{n-r} + \ldots + \lambda_{n-r} e_n \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \lambda_1 e_{n-r} + \ldots + \lambda_{n-r} e_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1) e_1 + \ldots + (-\alpha_r) e_r + \lambda_1 e_{n-r} + \ldots + \lambda_{n-r} e_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$$

поскольку $e_1, \ldots, e_n$ это базис в $V \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0 \Rightarrow e_{r+1}, \ldots, e_n$ - линейно независимы;

(2) Максимальность:

$$w \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists\, v \in V\colon f(v) = w,\ v = v^1 e_1 + \ldots + v^r e_r + v^{r+1} e_{r+1} + \ldots + v^n e_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(v) = 0 + \ldots + 0 + v^{r+1} f(e_{r+1}) + \ldots + v^n f(e_n) = v^{r+1} w_1 + \ldots + v^n w_{n-r} = w,\ \forall w \in \operatorname{Im} f$$

Таким образом, $w_1, \ldots, w_{n-r}$ это базис $\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = r + n - r = n = \dim(V)$. ■

Композиция

Опр: 6. Пусть $f \in L(V, W)$, $h \in L(W, U)$, $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} U$. Определим композицию следующим образом:

$$(h \circ f)(v) \coloneqq h\left(f(v)\right),\ h \circ f \in L(V, U)$$

Упр. 1. Какая матрица будет у $h \circ f$: $A_h {\cdot} A_f$ или $A_f {\cdot} A_h$?

Евклидовы и Эримтовы пространства

Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Опр: 7. Скалярным произведением назовем отображение $V \times V \to \mathbb{R}$, если выполнено:

(1) $\forall a, b, c \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(a, b + \lambda c) = (a, b) + \lambda \cdot (a, c)$ (линейность по второму аргументу);

(2) $\forall a, b \in V$, $(a, b) = (b, a)$ (симметричность);

(3) $\forall a \in V$, $(a, a) \geq 0$ и если $(a, a) = 0$, то $a = 0$ (положительная определенность);

Rm: 1. Из свойств определения (1) и (2) получим линейность по первому аргументу.

Опр: 8. Линейное пространство, на котором задано скалярное произведение называется Евклидовым.

Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{C}$.

Опр: 9. Отображение $V \times V \to \mathbb{C}$ называется скалярным произведением, если выполнено:

(1) $\forall a, b, c \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(a, b + \lambda c) = (a, b) + \lambda \cdot (a, c)$;

(2) $\forall a, b \in V$, $(a, b) = \overline{(b, a)}$;

(3) $\forall a \in V$, $(a, a) \geq 0$, $(a, a) \in \mathbb{R}$ и если $(a, a) = 0$, то $a = 0$;

Rm: 2. Здесь уже из (1) и (2) не следует линейность по 1-му аргументу. Свойство получается немного другим:

$$(b + \lambda c, a) = \overline{(a, b + \lambda c)} = \overline{(a, b)} + \overline{\lambda} \cdot \overline{(a, c)} = (b, a) + \overline{\lambda} \cdot (c, a)$$

Опр: 10. Линейное пространство над $\mathbb{C}$ на котором задано скалярное произведение называется Эрмитовым.

Примеры скалярных пространств

1) $V = \mathbb{R}_{[x]}$ - пространство многочленов от x; $f, g \in \mathbb{R}_{[x]}$, $(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

☐ Проверим свойства скалярного произведения над $\mathbb{R}$:

(1) Очевидно по линейности интеграла и подинтегральной функции;

(2) Очевидно;

(3) $g = f \Rightarrow \int\limits_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$;

■

2) $V = \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$; A, $B \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

☐ Проверим свойства скалярного произведения над $\mathbb{R}$:

(1) $\mathrm{tr}(A^T(B + \lambda C)) = \mathrm{tr}(A^T B) + \lambda\, \mathrm{tr}(A^T C)$;

(2) $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}((A^T B)^T) = \mathrm{tr}(B^T A)$;

(3) $\operatorname{tr}(A^T A) \geq 0$?

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^m \end{pmatrix} A^T A = \begin{pmatrix} (a_1^1)^2 + \ldots + (a_1^m)^2 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & (a_n^1)^2 + \ldots + (a_n^m)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(A^T A) = (a_1^1)^2 + \ldots + (a_1^m)^2 + \ldots + (a_n^1)^2 + \ldots + (a_n^m)^2 \geq 0$$

В этой сумме все квадраты $\Rightarrow$ все элементы ≥ 0, а также здесь все элементы матрицы A. Таким образом, $\operatorname{tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow \forall i, j,\ a_i^j = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

■