Фактор-пространства

Пусть V - фиксированное векторное пространство над полем K, $U \subseteq V$ - подпространство в пространстве V. Введем на V отношение смежности векторов относительно подпространства.

Опр: 1. Говорят, что вектор v смежен вектору v' относительно подпространства U, если:

$$\exists\, u \in U \colon v = v' + u$$

И записывать будем это следующим образом: $v \underset{U}{\sim} v'$. Когда U фиксировано, будем просто писать: $v \sim v'$.

Утв. 1. Смежность это отношение эквивалентности.

□

1) **Рефлексивность**: $v \sim v$

$$0 \in U,\, v + 0 = v \Rightarrow v \sim v$$

2) **Симметричность**: $v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$

$$v \sim v' \Rightarrow v = v' + u,\, u \in U \Rightarrow v' = v + (-u),\, -u \in U \Rightarrow v' \sim v$$

3) **Транзитивность**: $v \sim v',\, v' \sim v'' \Rightarrow v \sim v''$

$$v \sim v',\, v' \sim v'' \Rightarrow v = v' + u,\, v' = v'' + u',\, u, u' \in U \Rightarrow v = v'' + (u + u'),\, u + u' \in U \Rightarrow v \sim v''$$

■

Как мы знаем, отношение эквивалентности на множестве разбивает множество на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Внутри одного класса все элементы эквивалентны.

Опр: 2. Классы эквивалентности по смежности относительно подпространства U называются смежными классами по подпространству U. Смежный класс вектора $v \in V$ - это множество:

$$v + U = \{v' \in V \mid v' \sim v\} = \{v' \in V \mid v' = v + u,\, u \in U\}$$

Опр: 3. Фактор-пространство V/U векторного пространства V по подпространству U, это множество всех смежных классов в пространстве V по U на котором задана структура векторного пространства с помощью операций:

$(+)$: $\forall v, w \in V,\, (v + U) + (w + U) = v + w + U$;

$(\,\cdot\,)$: $\forall v \in V,\, \forall \lambda \in K,\, \lambda{\cdot}(v + U) = \lambda{\cdot}v + U$;

Необходимо проверить, что операции над смежными классами определены корректно, то есть результат не зависит от того, каких представителей мы выберем в данных двух смежных классах.

Аксиомы векторного пространства для V/U вытекают из аксиом векторного пространства для V, поскольку операции над смежными классами определяются с помощью операций над представителями этих смежных классов, т.е. над самими векторами из пространства V.

Rm: 1. Нулевой вектор в V/U: $0 + U = U$.

Утв. 2. (**Корректность определения**) Определение фактор-пространства не зависит от выбора представителей смежных классов.

☐ Пусть $v' \sim v$, $w' \sim w$, тогда:

$$v' \sim v,\ w' \sim w \Rightarrow v' = v + u,\ w' = w + u',\ u, u' \in U \Rightarrow v' + w' = v + w + \underbrace{u + u'}_{\in U} \Rightarrow v' + w' \sim v + w$$

То есть, если выбрать вместо v и w два других представителя тех же самых смежных классов, то результат попадет в тот же смежный класс, что и в определении $\Rightarrow$ операция суммы не зависит от выбора представителя. Аналогичное мы получим и для умножения на скаляр:

$$\lambda{\cdot}v' = \lambda{\cdot}v + \lambda{\cdot}u,\ \lambda{\cdot}u \in U \Rightarrow \lambda{\cdot}v' \sim \lambda{\cdot}v$$

■

Примеры фактор-пространств

1) $V = \{$геом. векторы в пространстве$\}$, $U = \{$геом. векторы в данной фикс. плоскости$\}$.

Выберем начало координат в V, будем откладывать все векторы от этой точки 0. Будем считать U проходящей через эту точку.

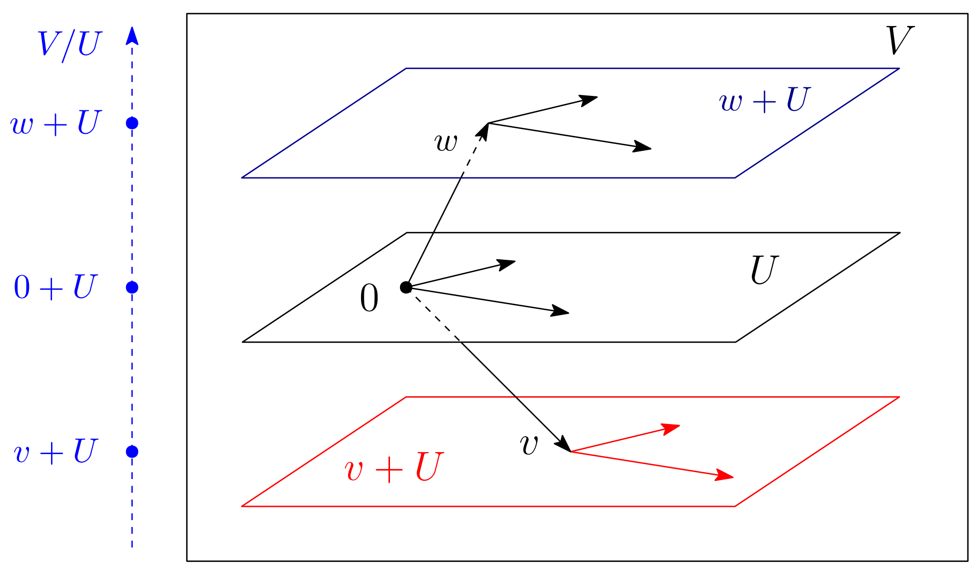

Рис. 1: Смежные классы у фактор-пространства V/U.

Если рассматривать всевозможные векторы из начала координат идущие в разные точки пространства, это и будет нашим векторным пространством V. Смежным классом будет прибавление к фиксированному вектору v или w всевозможных векторов пространства U.

Мы получим векторы, концы которых лежат на плоскости параллельной плоскости U, но проходящие через конец вектора v или w. Фактор-пространство это множество этих смежных классов, то есть множество параллельных плоскостей, на которые расслаивается геометрическое пространство V. Можно мысленно его представлять как вертикальную прямую, которая параметризует множество паралелльных плоскостей (точки на прямой задают смежные классы).

2) $V = \mathcal{F}(X, K)$, $Y \subseteq X$, $U = \mathcal{I}(Y) = \{g\colon X \to K \mid g(y) = 0, \ ,\forall y \in Y\}$, тогда $V/U \simeq \mathcal{F}(Y, K)$. Построим этот изоморфизм. Утверждается, что: $f + \mathcal{I}(Y) \mapsto f|_Y$ - взаимнооднозначное, то есть:

$$f + \mathcal{I}(Y) \leftrightarrow f|_Y$$

<u>Корректность</u>: $f \sim f' \Rightarrow f = f' + g$, $g|_Y = 0 \Rightarrow f|_Y = f'|_Y + g|_Y = f'|_Y$.

<u>Биективность</u>: $f|_Y = f'|_Y \Rightarrow g = f - f' \in \mathcal{I}(Y) \Rightarrow f \sim f' \Rightarrow$ инъективно. Сюръективность - очевидна, поскольку $\forall f\colon Y \to K$ может быть продолжена до функции на X.

<u>Согласованность</u>: $f + \mathcal{I}(Y) + h + \mathcal{I}(Y) \mapsto f|_Y + h|_Y$, $\lambda\cdot(f + \mathcal{I}(Y)) = \lambda\cdot f|_Y + \mathcal{I}(Y) \to \lambda\cdot f|_Y$.

Утв. 3. Пусть $\dim V < \infty$, тогда:

$$\dim (V/U) = \dim V - \dim U$$

□ Выберем согласованный базис: $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ - базис V и $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ - базис U.

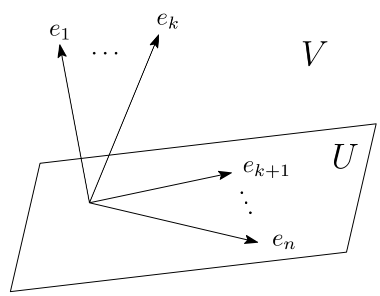

Рис. 2: Выбор согласованного базиса V с подпространством U.

Докажем, что $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ - базис V/U. По определению:

$$\forall v \in V,\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\colon v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

Заметим, что $\lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in U$. Отсюда следует, что смежный класс вектора v представляется в виде линейной комбинации смежных классов векторов $e_1, \ldots, e_k$ с теми же коэффициентами:

$$v + U = \lambda_1(e_1 + U) + \ldots + \lambda_k(e_k + U)$$

Следовательно, $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ порождает V/U. Докажем линейную независимость. Пусть:

$$\mu_1(e_1 + U) + \ldots + \mu_k(e_k + U) = U \Rightarrow \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k = \mu_{k+1} e_k k + 1 + \ldots + \mu_n e_n \Rightarrow \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_k e_k - \mu_{k+1} e_k k + 1 - \ldots - \mu_n e_n = 0$$

Но линейная комбинация базисных векторов равна нулю, только если коэффициенты равны нулю:

$$\mu_1 = \ldots = \mu_k = \mu_{k+1} = \ldots = \mu_n = 0$$

Следовательно, $(e_1 + U, \ldots, e_k + U)$ - базис V/U и мы получаем размерности:

$$\dim (V/U) = k,\ \dim V = n,\ \dim U = n - k$$

■

Опр: 4. Коразмерность подпространства $U \subseteq V$ это размерность фактор-пространства V/U:

$$\operatorname{codim} U = \dim (V/U)$$

Rm: 2. Заметим, что возможен случай бесконечномерного V и его подпространства U, но при этом конечномерного фактор-пространства.

Пример: $V = \mathcal{F}(X, K)$, $U = \mathcal{I}(Y) \simeq \mathcal{F}(X \setminus Y, K)$, где изоморфность следует из того, что такие функции полностью определяются значениями на дополнении к множеству Y.

Также, как и ранее $V/U \simeq \mathcal{F}(Y, K)$. Если X - бесконечно, а $|Y| = n$, тогда V и U будут бесконечномерными, поскольку пространство функций на бесконечном множестве - бесконечномерное. Функция на конечном множестве определяется просто набором своих значений: если множество из n элементов, то это будет набор из n значений $\Rightarrow V/U \simeq K^n \Rightarrow \dim (V/U) = n < \infty$.

Прямая сумма

Пусть $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ - подпространства.

Опр: 5. Подпространства $U_1, \ldots, U_m$ называются линейно независимыми, если выполнено:

$$u_1 + \ldots + u_m = 0,\ u_i \in U_i,\ i = \overline{1, m} \Rightarrow u_1 = \ldots = u_m = 0$$

Утв. 4. Следующие условия эквивалентны:

(1) $U_1, \ldots, U_m$ - линейно независимы;

(2) $\forall i = \overline{1, m},\ U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_m) = \{0\}$;

(3) $\forall v \in U_1 + \ldots + U_m,\ \exists!\, u_i \in U_i,\ i = \overline{1, m} \colon v = u_1 + \ldots + u_m$;

□

(1) $\Rightarrow$ (3) Пусть разложение не единственное:

$$v = u_1 + \ldots + u_m = u_1' + \ldots + u_m',\ (\forall i = \overline{1, m},\ u_i, u_i' \in U_i)$$

тогда вычтем одно из другого и получим:

$$(u_1 - u_1') + \ldots + (u_m - u_m') = 0,\ \forall i = \overline{1, m},\ u_i - u_i' \in U_i$$

По условию (1) мы получаем, что $\forall i = \overline{1, m},\ u_i - u_i' = 0 \Rightarrow u_i = u_i'$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Пусть $u_i \in U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_m)$, тогда этот вектор может быть представлен в виде суммы векторов из суммы подпространств (как части пересечения):

$$u_i = u_1 + \ldots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \ldots + u_m,\ \forall u_j \in U_j$$

Но тот же самый вектор u_i может быть разложен по-другому:

$$u_i = 0 + \ldots + 0 + u_i + 0 + \ldots + 0$$

Это то же разложение вектора, а поскольку из (3) разложение единственное, то:

$$u_1 = \ldots = u_i = \ldots = u_m = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $u_1 + \ldots + u_m = 0$, где $u_1 \in U_1, \ldots, u_m \in U_m$, тогда мы можем перенести слагаемые в правую часть и переписать равенство в следующем виде:

$$\forall i = \overline{1, m},\ u_i = -u_1 - \ldots - u_{i-1} - u_{i+1} - u_m \in U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i = \overline{1, m},\ u_i = 0$$

В силу того, что пункт (2) - верный $\Rightarrow$ условие линейной независимости выполняется. ■

Rm: 3. В **частном случае**, когда подпространства $U, W \subseteq V$ - линейно независимы $\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$. Также заметим, что когда подпространств больше, чем 2, то нулевого пересечения недостаточно, чтобы они были линейно независимы, более того, недостаточно даже попарного пересечения любых двух подпространств. Примеры будут на семинаре.

Опр: 6. Сумма $U = U_1 + \ldots + U_m$ называется прямой суммой (внутренней прямой суммой) подпространств, если $U_1, \ldots, U_m$ - линейно независимы. **Обозначение**: $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

По утверждению 4, для любого вектора $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ существует его единственное разложение в сумму векторов из слагаемых этой прямой суммы:

$$v = u_1 + \ldots + u_m,\ u_i \in U_i$$

Опр: 7. Слагаемые u_i, $i = \overline{1,m}$ в разложении $v \in U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$, называются проекциями вектора v на слагаемые прямой суммы.

Примеры прямых сумм

1) Рассмотрим стандартное пространство: $V = \{$геом. вектора в пространстве$\}$ и его подпространства: $U = \{$геом. векторы на плоскости $P\}$ и $W = \{$геом. векторы на прямой $l \nparallel P\}$, тогда: $V = U \oplus W$.

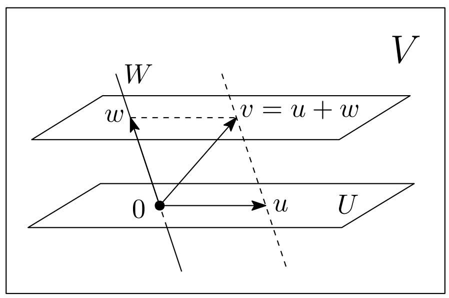

Рис. 3: Пример прямой суммы геом. пространства.

Для удобства берём начало координат и все векторы откладываем от этого начала. Плоскость U будет проходить через эту точку, прямая W будет проходить через начало координат и будет $\parallel l$. Заметим, что их пересечение только в точке 0. Покажем, что $\forall v \in V$ он единственным способом разлагается в сумму векторов из U и W.

Возьмем произвольный $v \in V$, через конец v проведём прямую $\parallel W$ и там, где она пересечет U мы получим u - вектор-проекцию на U, аналогично, через конец v проведем плоскость $\parallel U$ и там, где она пересечет W мы получим w - вектор-проекцию на $W \Rightarrow v = u + w$.

Rm: 4. Заметим, что проекции не ортогональные, никакой перпендикулярности здесь не требуется.

2) $\dim V = n < \infty$, $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис V, тогда $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$, где $\forall i = \overline{1,m}$, $U_i = \langle e_i \rangle$.

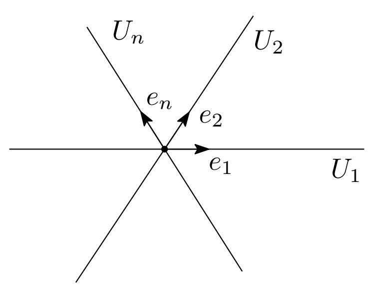

Рис. 4: Пример прямой суммы конечномерного пространства.

Это вытекает из определения базиса, поскольку любой вектор $v \in V$ единственным способом разлагается в виде линейной комбинации базисных векторов, а векторы пропорциональные базисным это как раз векторы из этих одномерных подпространств $\Rightarrow$ эти подпространства линейно независимы и образуют прямую сумму.

3) $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) = \mathrm{Sym}_{n\times n}(K) \oplus \mathrm{Skew}_{n\times n}(K)$, где $Sym_{n\times n}(K)$ - пространство симметрических матриц размера n на n и $Skew_{n\times n}(K)$ - пространство кососимметрических матриц размера n на n. Дополнительно потребуем, чтобы $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

Утв. 5. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\exists!\, B \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K)$, $C \in \mathrm{Skew}_{n\times n}(K)$: $A = B + C$.

$\square$

Единственность: Пусть $A = B + C \Rightarrow A^T = B^T + C^T = B - C \Rightarrow B = \dfrac{A + A^T}{2}$, $C = \dfrac{A - A^T}{2}$. Если бы характеристика поля была бы равна 2, то мы бы не смогли поделить на двойку, потому что двойка равна нулю $\Rightarrow$ не нашли бы матрицы B и C.

Существование: Положим, что $B = \dfrac{A + A^T}{2}$, $C = \dfrac{A - A^T}{2}$, тогда легко видеть, что:

$$B^T = \frac{A^T + A}{2} = B,\ C^T = \frac{A^T - A}{2} = -C \Rightarrow B \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K),\ C \in \mathrm{Skew}_{n\times n}(K)$$

$\blacksquare$

Прямая внешняя сумма

Опр: 8. Пусть $V_1, \ldots, V_m$ - векторные пространства, их внешняя прямая сумма $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ это векторное пространство на множестве упорядоченных наборов векторов (Декартово произведение):

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_m = \{(v_1, \ldots, v_m) \mid v_i \in V_i,\ \forall i = \overline{1, m}\}$$

на котором структура векторного пространства задана покомпонентно:

$(+)$: $\forall v, w \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$, $v + w = (v_1, \ldots, v_m) + (w_1, \ldots, w_m) = (v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m)$;

$(\,\cdot\,)$: $\forall v \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$, $\forall \lambda \in K$, $\lambda \cdot v = \lambda \cdot (v_1, \ldots, v_m) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_m)$;

Пример: $K^n = \underbrace{K \oplus \ldots \oplus K}_{n}$.

Rm: 5. Внутренняя прямая сумма подпространств $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ изоморфна внешней прямой сумме этих пространств, потому что каждый вектор из внутренней прямой суммы однозначно разлагается в сумму своих проекций на слагаемые и мы можем сопоставить этому вектору набор этих проекций:

$$\forall v \in U,\ \exists!\, v = u_1 + \ldots + u_m,\ u_i \in U_i \Rightarrow v \leftrightarrow (u_1, \ldots, u_m)$$

где $(u_1, \ldots, u_m)$ - элемент внешней прямой суммы, по свойству единственности разложения по прямым слагаемым это соответствие будет взаимнооднозначным и изоморфизмом (проверяется покомпонентно). И наоборот, всякая внешняя прямая сумма $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ является внутренней. Предъявим разложение:

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_m = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m,\ U_i = \underset{1}{\{0\}} \oplus \ldots \oplus \underset{i}{V_i} \oplus \ldots \oplus \underset{m}{\{0\}}$$

$$(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{i=1}^{m} (\underset{1}{0}, \ldots, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{v_i}, \underset{i+1}{0}, \ldots, \underset{m}{0})$$

Легко видеть, что U_i - подпространства во внешней прямой сумме и они удовлетворяют определению внутренней прямой суммы: каждый набор представляется единственным способом в виде суммы наборов выше, где на всех местах нули, кроме одного, то есть - представление в виде суммы выше - единственное.

Теорема 1. Пусть $\dim V < \infty$, $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ - подпространства, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $U_1, \ldots, U_m$ - линейно независимы;

(2) Объединение базисов $U_1, \ldots, U_m$ есть базис $U_1 + \ldots + U_m$;

(3) $\dim (U_1 + \ldots + U_m) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$;

□ Без ограничения общности, можно считать, что $U_1 + \ldots + U_m = V$, если это не так, то уменьшим это пространство до суммы. Выберем в каждом U_i - базис:

$$\forall i = \overline{1, m},\, e_{i,\cdot} = (e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,n_i}),\, n_i = \dim U_i \Rightarrow V = \left\langle e_{ij} \mid i = \overline{1, m},\, j = \overline{1, n_i} \right\rangle$$

(1) ⇒ (2) Достаточно доказать линейную независимость e_{ij} ⇒ это будет базис. Рассмотрим линейную комбинацию равную нулю и разобъем сумму на группы:

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n_i}} \lambda_{ij} e_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij}}_{\in U_i} \right) = 0$$

Из линейной независимости U_i, каждое слагаемое в сумме должно быть равно нулю:

$$\forall i = \overline{1, m},\, \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n_i},\, \lambda_{ij} = 0$$

где последнее верно в силу того, что $e_{i,\cdot}$ - базисы у U_i.

(2) ⇒ (1) Обратно, мы хотим доказать, что подпространства $U_1, \ldots, U_m$ - линейно независимы. Пусть верно $u_1 + \ldots + u_m = 0$, $u_i \in U_i$. Разложим каждый из этих векторов:

$$\forall i = \overline{1, m},\, u_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} \Rightarrow u_1 + \ldots + u_n = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n_i}} \lambda_{ij} e_{ij} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n_i},\, \lambda_{ij} = 0 \Rightarrow u_i = 0,\, \forall i = \overline{1, m}$$

где мы воспользовались тем, что $(e_{11}, \ldots, e_{mn_m})$ - базис U.

(2) ⇒ (3) Очевидно, поскольку объединям базисы разных подпространств и получаем базис всего пространства ⇒ их количества суммируются ⇒ размерность суммы равна сумме разамерностей.

(3) ⇒ (2) Мы знаем, что векторы e_{ij} порождают всё $V = U_1 + \ldots + U_m$, а их количество равно сумме размерностей: $n_1 + \ldots + n_m = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$. Если бы эти векторы были линейно зависимы, то их систему можно было бы уменьшить до базиса ⇒ в базисе будет меньшее количество векторов, тогда:

$$\dim V = \dim (U_1 + \ldots + U_m) < \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$$

Получаем противоречие ⇒ векторы линейно независимы ⇒ образуют базис. ■