Литература

1) Гельфанд: Лекции по линейной алгебре;
2) Кострикин и Манин: Линейная алгебра и геометрия;

Линейные пространства

1. Множество векторов плоскости или пространства;
2. Строки или столбцы из n чисел $(a_1, \ldots, a_n)$;
3. Числовые последовательности;
4. Разные классы функций: $C(-\infty, \infty)$, $C[0, 1]$;
5. Многочлены;
6. Матрицы $n \times m$;

Поле $\mathbb{K}$: элементы поля будем называть числами (скалярами), чаще всего полям это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Опр: 1. Линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ называется множество V с операциями $+$ (сложение двух элементов из V) и $\cdot$ (умножение элемента из V на скаляр), которые удовлетворяют свойствам:

(1) в V существует нулевой элемент $0 \in V : 0 + a = a$, $\forall a \in V$;

(2) $\forall a \in V, \exists\, b \in V : a + b = 0$;

(3) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$;

(4) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$;

(5) $\lambda\cdot(a + b) = \lambda\cdot a + \lambda\cdot b$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall a, b \in V$;

(6) $(\lambda + \mu)\cdot a = \lambda\cdot a + \mu\cdot a$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall a \in V$;

(7) $(\lambda\cdot\mu)\cdot a = \lambda\cdot(\mu\cdot a)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall a \in V$;

(8) $1\cdot a = a$, $\forall a \in V$;

Если выполнены свойства $(1) - (4) \Rightarrow V$ - абелева группа.

Следствие 1.

1. Единственность 0;

   □ Пусть $\exists\, 0, 0' \in V$ - нули $\Rightarrow \forall a \in V$, $0 + a = a$, $0' + a = a \Rightarrow 0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$. ■

2. Единственность обратного элемента (обозначаем $-a$);

   □ Пусть $\forall a, \exists\, b, b' \in V : a + b = 0 \wedge a + b' = 0 \Rightarrow b' = b' + 0 = b' + (a + b) = (b' + a) + b = 0 + b = b$. ■

3. $0 \in \mathbb{K}$, $0\cdot a = 0$, $\forall a \in V$;

   □ $\forall a \in V \Rightarrow 0 = a + (-a) = 1\cdot a + (-a) = (1 + 0)\cdot a + (-a) = 1\cdot a + 0\cdot a + (-a) = 0\cdot a + a + (-a) =$
   $= 0\cdot a + 0 = 0\cdot a$. ■

4. $(-1)\cdot a = -a$, $\forall a \in V$;

   $\square$ $\forall a \in V \Rightarrow 0 = 0\cdot a = (1-1)\cdot a = 1\cdot a - 1\cdot a = a + (-1)\cdot a = a + (-a) \Rightarrow (-1)\cdot a = -a$. $\blacksquare$

Аффинные пространства

Опр: 2. Аффинное пространство это набор $(\mathcal{A}, V, +)$ такой, что:

(1) $P + 0 = P$, $\forall P \in \mathcal{A}$, $0 \in V$;

(2) $(P + a) + b = P + (a + b)$, $\forall P \in \mathcal{A}$, $\forall a, b \in V$, $P + a \in \mathcal{A}$;

(3) $\forall P, Q \in \mathcal{A}, \exists!\, a \in V : P + a = Q$;

где $\mathcal{A}$ это множество, V это линейное пространство, $+$ это операция сложения: $P + v \in \mathcal{A}$, $P \in \mathcal{A}$, $v \in V$.

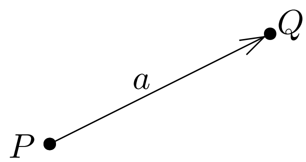

Рис. 1: Сложение точки с вектором в аффинном пространстве.

Rm: 1. Аффинное $\Rightarrow$ линейное (просто забудем про $\mathcal{A}$). Линейное $\Rightarrow$ аффинное (V - линейное, $\mathcal{A} := V$, $+$ это операция в V).

Пример: A - матрица, X - столбец, $AX = 0$ - однородная СЛУ, V - множество решений СЛУ, X_1, X_2 - решения $\Rightarrow X_1 + X_2 \in V$, $\lambda\cdot X_1 \in V$, $\lambda\cdot X_2 \in V \Rightarrow$ линейное пространство.

Пример: $AX = B$ - неоднородная СЛУ, не линейное пространство. Пусть $\mathcal{A}$ - множество решений, V - множество решений однородной СЛУ: $AX = 0$. Решение однородное + решение неоднородное = решение неоднородное $\Rightarrow$ аффинное пространство.

Линейные подпространства

Опр: 3. Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{K}$. Подмножество $L \subset V$ называется линейным подпространством, если $\forall a, b \in L$, $a + b \in L \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall a \in L$, $\lambda\cdot a \in L$.

Примеры: V - множество всех столбцов $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $L \subset V$, L - множество решений $Ax = 0 \Rightarrow$

V - линейное пространство, L - линейное подпространство (для $Ax = B$ - не будет линейных подпространств). Тогда:

1) $L = \{0\}$ - линейное подпространство;

2) $L = V$ - линейное подпространство;

3) $a \neq 0$, $a \in V$, $L = \{\, \lambda\cdot a \colon \lambda \in \mathbb{K} \,\}$ - линейное подпространство;

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in V$.

Опр: 4. Линейной оболочкой элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$, где $a_i \in V$ называются всевозможные выражения вида $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Обозначение $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Лемма 1. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in V$, линейная оболочка $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ является линейным подпространством.

$\square$ Пусть $b, c \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, $c = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n \Rightarrow$

$$b + c = (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \ldots (\lambda_n + \mu_n)a_n \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle,\ \alpha \cdot b = (\alpha\lambda_1)a_1 + \ldots + (\alpha\lambda_n)a_n \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$$

Таким образом получили линейное подпространство. $\blacksquare$

Линейное подмногообразие

Опр: 5. Пусть $a \in V$, $L \subset V$ - линейное подпространство. Линейным подмногообразием определенным по a и L называется множество $L_a = \{\, a + b \colon b \in L \,\}$.

Пример: L - подпространство V, $a \in V$, тогда L_a представляется в следующем виде:

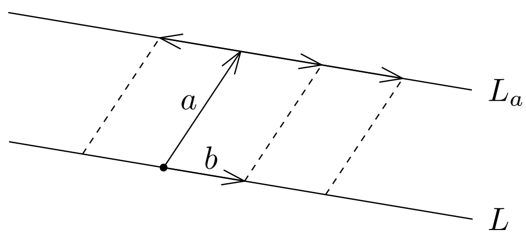

Рис. 2: Линейное подмногообразие L_a.

Пример: $AX = B$, a - частное решение неоднородной системы, L - множество решений однородной СЛУ, L_a - множество всех решений неоднородной СЛУ.

Задаемся вопросом, когда $L_{a_1} = L_{a_2}$ - ?

Лемма 2. $L_{a_1} = L_{a_2} \Leftrightarrow a_1 - a_2 \in L$.

$\square$

($\Leftarrow$) $a_1 - a_2 \in L \Rightarrow$ надо доказать, что $L_{a_1} \subset L_{a_2}$ (обратное включение получится по симметрии). $x \in L_{a_1} \Rightarrow$

$$\exists\, b \in L \colon x = a_1 + b = a_1 - a_2 + a_2 + b = a_2 + \underbrace{\overset{\in L}{(a_1 - a_2)} + \overset{\in L}{b}}_{\in L} = a_2 + b' \in L_{a_2}$$

где $b' \in L$.

($\Rightarrow$) $a_1 \in L_{a_1}$, так как $a_1 + 0 = a_1 \in L_{a_1}$. $L_{a_1} = L_{a_2} \Rightarrow a_2 + b \in L_{a_2}$, где $b \in L$, $a_1 \in L_{a_2} \Rightarrow$

$$\exists\, b \in L \colon a_1 = a_2 + b \Rightarrow a_1 - a_2 = b \in L$$

$\blacksquare$

Множество всех линейных подмногообразий L_α

Задано фиксированное L, берем всевозможные a и получаем всевозможные L_a.

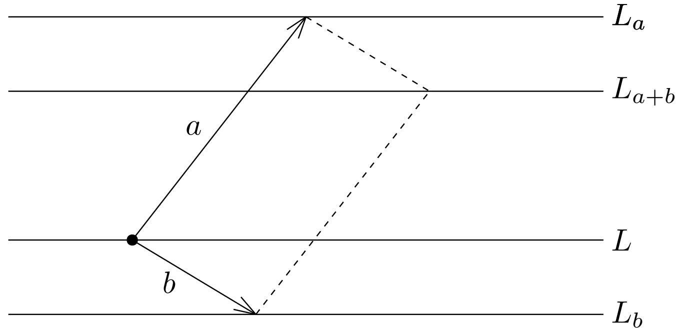

Рис. 3: Составление нового линейного подмногообразия L_{a+b}.

Введем структуру линейного пространства на этом множестве:

(1) $\forall a, b \in V$, $L_a + L_b = L_{a+b}$;

(2) $\forall a \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot L_a = L_{\lambda a}$;

Проверим корректность: $L_a = L_{a'}$, $L_b = L_{b'}$ тогда.

(1) $L_{a+b} = L_{a'+b'}$;

$\square$ $a - a' \in L$, $b - b' \in L \Rightarrow a - a' + b - b' = (a + b) - (a' + b') \in L \Rightarrow L_{a+b} = L_{a'+b'}$. $\blacksquare$

(2) $L_{\lambda a} = L_{\lambda a'}$;

$\square$ $a - a' \in L \Rightarrow \lambda \cdot (a - a') \in L \Rightarrow \lambda \cdot a - \lambda \cdot a' \in L \Rightarrow L_{\lambda a} = L_{\lambda a'}$. $\blacksquare$

Опр: 6. Множество всех линейных подмножеств, при фиксированном L и $\forall a \in V$, удовлетворяющее условиям (1) и (2) называется факторпространством V/L.

Упр. 1. $L = \{0\}$, $L = V$, чему равно V/L?