Список литературы

1) Э.Б. Винберг. Курс алгебры. Главы 5-8.
2) А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия.
3) А.И. Кострикин. Введение в алгебру, Часть II: Линейная алгебра.

Векторные пространства

Пусть K - основное поле. Элементы основного поля будем называть скалярами.

Например: $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$ (p - простое). Первые три это числовые поля, а последнее - не числовое, именно поэтому мы будем называть элементы поля скалярами, а не числами.

Опр: 1. Векторное (линейное) пространство над полем K - это множество V, элементы которого называются векторами, на котором заданы две операции:

1) Сложение векторов: $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto w = u + v$;
2) Умножение векторов на скаляры: $K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto w = \lambda{\cdot}v$;

так, что выполняются аксиомы векторного пространства:

(1) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;

(3) $\exists\, 0 \in V : \forall v \in V$, $v + 0 = v$ (существует нулевой вектор), иногда будем обозначать $\overrightarrow{0}$;

(4) $\forall v \in V$, $\exists\, w \colon v + w = 0$, где w называется противоположным вектором и обозначается $w = -v$;

(5) $\lambda{\cdot}(\mu{\cdot}v) = (\lambda{\cdot}\mu){\cdot}v$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall v \in V$;

(6) $\lambda{\cdot}(u + v) = \lambda{\cdot}u + \lambda{\cdot}v$, $\forall \lambda \in K$, $\forall u, v \in V$

(7) $(\lambda + \mu){\cdot}v = \lambda{\cdot}v + \mu{\cdot}v$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall v \in V$;

(8) $1{\cdot}v = v$, $\forall v \in V$;

Rm: 1. По отношению к операции сложения V образует абелеву группу.

Примеры векторных пространств

1) Пространство геометрических векторов: $V = \{$геометрические векторы в пространстве$\}$, $K = \mathbb{R}$.

   Вектора: направленный отрезок, причем не закрепляем у него начальную точку (свободные векторы). Векторы, полученные параллельным переносом считаем одинаковыми.

   Операции:

   (+): Правило параллелограмма: вектора откладываются от одного и того же начала, строим на них параллелограмм и берем вектор идущий по диагонали этого параллелограмма;

   (·): Соответствующий отрезок растягиваем или сжимаем в нужное число раз. Если коэффициент отрицательный $\Rightarrow$ меняем направление. Если коэффициент нулевой $\Rightarrow$ получаем нулевой вектор (вектор у которого начало и конец совпадают);

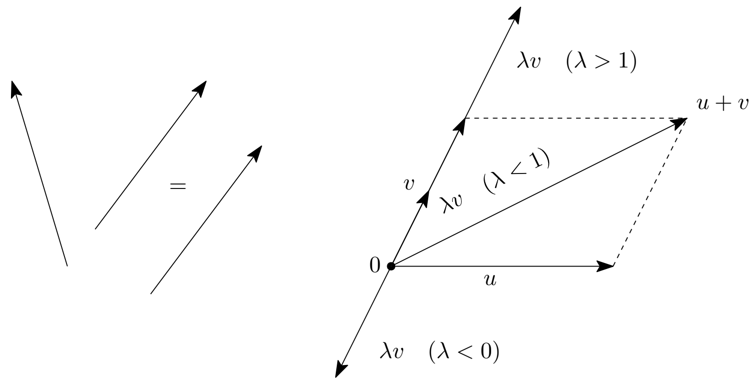

Рис. 1: Пространство геометрических векторов.

2) Арифметическое векторное пространство: $V = K^n$.

   Вектора: упорядоченные наборы из n элементов основного поля: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\forall i,\ x_i \in K$.

   Операции: Определяются покомпонентно:

   $(+)$: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;

   $(\cdot)$: $\lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$;

3) Пространство матриц фиксированного размера: $V = Mat_{m \times n}(K)$ - можно отождествить с $K^{m \cdot n}$. Операции с матрицами мы рассматривали ранее в курсе алгебры.

   Rm: 2. Матрицу всегда можно разложить в одну длинную строку: длиной mn.

4) Пространство функций: $V = \mathcal{F}(X, K) = \{f : X \to K\}$.

   Операции:

   $(+)$: $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, K),\ f + g \in \mathcal{F}(X, K) \colon (f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X$;

   $(\cdot)$: $\forall f \in \mathcal{F}(X, K),\ \forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot f \in \mathcal{F}(X, K) \colon (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),\ \forall x \in X$;

5) Пространство многочленов от переменной t: $V = K[t]$. Многочлены можно складывать, умножать на элементы поля снова будем получать многочлены $\Rightarrow$ определены операции. **Операции**:

   $(+)$: $\forall P(x), Q(x) \in K[t],\ P(x) + Q(x) \in K[t]$;

   $(\cdot)$: $\forall P(x) \in K[t],\ \forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot P(x) \in K[t]$;

6) Расширение полей: пусть L - поле, $K \subseteq L$ - подполе, сложение умножение определены по определению поля, в частности, элементы поля L можно складывать между собой и умножать на элементы подполя $K \Rightarrow V = L$ - векторное пространство над K. Например, $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

Свойства векторов и операций над ними

Следствие 1. Нулевой вектор единственен.

□ Пусть 0_1 и 0_2 - два нулевых вектора, сложим их:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 \Rightarrow 0_1 = 0_2$$

где $0_1 + 0_2 = 0_2$, так как 0_1 - нулевой вектор и $0_1 + 0_2 = 0_1$, так как 0_2 - нулевой вектор. ■

Следствие 2. У каждого вектора ∃! противоположный вектор.

□ Пусть есть два противоположных вектора $w_1 \in V$ и $w_2 \in V$ вектору $v \in V$. Сложим их все и расставим скобки:

$$w_1 + 0 = w_1 + (v + w_2) = (w_1 + v) + w_2 = 0 + w_2 = w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$$

■

Следствие 3. $\forall \lambda \in K,\ \lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

□

$$\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \lambda \cdot \left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{0} + \lambda \cdot \overrightarrow{0} \Rightarrow + \left(-\lambda \cdot \overrightarrow{0}\right) \Rightarrow \overrightarrow{0} = \lambda \cdot \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \lambda \cdot \overrightarrow{0}$$

■

Следствие 4. $\forall v \in V,\ 0 \cdot v = \overrightarrow{0}$.

□

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow +(-0 \cdot v) \Rightarrow +(-0 \cdot v) \Rightarrow \overrightarrow{0} = 0 \cdot v + \overrightarrow{0} = 0 \cdot v$$

■

Следствие 5. $\forall v \in V,\ (-1) \cdot v = -v$.

□ Рассмотрим сумму:

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \overrightarrow{0} \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$$

■

Rm: 3. Запись скалярного множителя слева или справа - не важно, потому что множители имеют разные типы. Иногда бывает удобно записывать умножение на скаляры справа:

$$\forall v \in V,\ \forall \lambda \in V,\ v \cdot \lambda \coloneqq \lambda \cdot v$$

В дальнейшем увидим, что это может быть достаточно удобно. При этом сохраняется вид аксиом векторного пространства, например, ассоциативность (воспользуемся коммутативностью умножения поля):

$$(v \cdot \lambda) \cdot \mu = \mu \cdot (\lambda \cdot v) = (\mu \cdot \lambda) \cdot v = (\lambda \cdot \mu) \cdot v = v \cdot (\lambda \cdot \mu)$$

Остальные аксиомы сохраняются тем более.

Линейная зависимость

Опр: 2. Линейная комбинация векторов $v_1, \ldots, v_m \in V$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ - это конечная сумма вида:

$$\lambda_1 {\cdot} v_1 + \lambda_2 {\cdot} v_2 + \ldots + \lambda_m {\cdot} v_m$$

Опр: 3. Линейная комбинация называется тривиальной, если: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Опр: 4. Система векторов $S = (v_1, \ldots v_m)$ называется линейно зависимой, если $\exists$ нетривиальная (то есть $\exists\, \lambda_i \neq 0$) линейная комбинация векторов этой системы равная нулю:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$$

В противном случае, она называется линейно независимой.

Теорема 1. (**основная лемма о линейной зависимости**) Пусть у нас есть две системы векторов:

$$S = (v_1, \ldots, v_m), \quad T = (w_1, \ldots, w_n)$$

причём $\forall v_i \in S$ является линейной комбинацией векторов из T и $m > n \Rightarrow S$ - линейно зависима.

Rm: 4. Можно переформулировать теорему следующим образом: если S линейно независима и линейно выражается через T, то $m \leq n$.

□ Доказывается в курсе алгебры первого семестра. ■

Опр: 5. Будем говорить, что система векторов S порождает векторное пространство V, если:

$$\forall v \in V,\, \exists\, v_1, \ldots, v_n \in S,\, \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \colon v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Утв. 1. Пусть $S = (v_1, \ldots, v_n)$ - конечная система векторов, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) S - линейно независима и порождает V;

(2) S - является максимальной линейно независимой системой векторов в V

Опр: 6. Система векторов называется максимальной, если при добавлении к ней хотя бы одного вектора система становится линейно зависимой.

□

(1) $\Rightarrow$ (2) $\forall v \in V$ в силу линейной независимости верно:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + (-1)v = 0,\ (-1) \neq 0$$

Система нетривиальна $\Rightarrow S \cup \{v\}$ - линейно зависима $\Rightarrow S$ - максимальная линейно независимая.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall v \in V$, $S = (v_1, \ldots, v_n, v)$ - линейно зависима, тогда:

$$\exists\, \mu_i \neq 0 \colon \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + \mu_{n+1} v = 0 \Rightarrow \mu_{n+1} \neq 0$$

Если $\mu_{n+1} = 0$, то мы бы получили, что система S - линейна зависима, а это не так. Тогда:

$$v = \left(-\frac{\mu_1}{\mu_{n+1}}\right) {\cdot} v_1 + \ldots + \left(-\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\right) {\cdot} v_n$$

Получили, что вектор $v \in V$ выражается через векторы системы $S \Rightarrow S$ пораждает пространство V. ■

Опр: 7. Упорядоченная система векторов, удовлетворяющих эквивалентным условиям (1) и (2) из утверждения 1 называется базисом пространства V. Стандартное обозначение базиса:

$$e = (e_1, \ldots, e_n)$$

Rm: 5. Также заметим, что мы работаем с конечными базисами, чтобы не разбираться с некоторыми теоретико-множественными трудностями бесконечномерных пространств. Далее ещё это обговорим.

Утв. 2. $\forall x \in V$, $\exists!$ разложение $x = x_1 {\cdot} e_1 + \ldots x_n {\cdot} e_n$, $x_i \in K$ по базису e.

□

Существование: Поскольку базис это порождающая система векторов, то $\forall x \in V$ можно разложить в виде линейной комбинации базисных векторов: $\exists\, x_1, \ldots, x_n \in K\colon x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Единственность: Пусть $\exists$ другое разложение $x = x_1' {\cdot} e_1 + \ldots + x_n' {\cdot} e_n$, следовательно вычтем одно разложение из другого:

$$(x_1 - x_1'){\cdot}e_1 + \ldots + (x_n - x_n'){\cdot}e_n = 0 \Rightarrow x_1 - x_1' = \ldots = x_n - x_n' = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, n},\ x_i = x_i'$$

где мы воспользовались определением базиса (вектора линейно независимы $\Rightarrow$ равенство их линейной комбинации нулю возможно только в тривиальном случае). ■

Опр: 8. Координатами вектора x в базисе e называются $x_i \in K$ из его разложения $x = x_1 {\cdot} e_1 + \ldots x_n {\cdot} e_n$.

В дальнейшем удобно будет записывать разложение по базису в матричном виде:

$$x = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e{\cdot}X$$

где X - столбец координат вектора x в базисе e.

Утв. 3. Во всех базисах пространства V одинаковое количество векторов.

□ Следует сразу из основной леммы о линейной зависимости: если бы было разное число, то тот базис, в котором векторов было бы больше он бы линейно выражался через тот базис, в котором векторов было бы меньше $\Rightarrow$ базис в котором больше векторов был бы линейно зависим $\Rightarrow$ противоречие. ■

Опр: 9. Размерностью векторного пространства V называется количество векторов в любом базисе этого пространства. **Обозначение**: $\dim V$.

Примеры базисов векторных пространств

(1) Арифметическое пространство: K^n.

Стандартный базис: $\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix}$, где $\forall i = \overline{1, n}$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \underset{i}{1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $x = x_1 {\cdot} e_1 + \ldots + x_n {\cdot} e_n$, где x_i - координаты в стандартном базисе;

(2) Пространство матриц: $Mat_{m\times n}(K)$.

Стандартный базис: $$E_{ij} = \begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix}0&\dots&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0&\dots&0\end{pmatrix} \\ & j \end{array}$$ - матричные единицы.

$\forall A \in Mat_{m\times n}(K)$, $A = \sum\limits_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} a_{ij}E_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, где a_{ij} - элементы матрицы A;

(3) Поле комплексных чисел над полем вещественных чисел: $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

Базис: $(1, i)$, то что это базис (существует и единственное разложение по базису) - свойство алгебраической формы записи комплексного числа.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$, $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$.

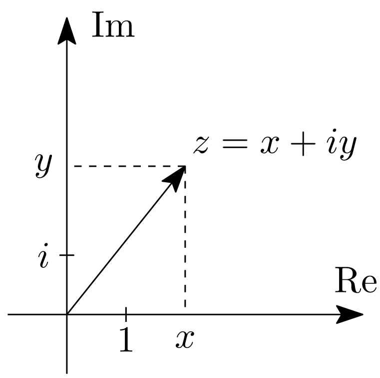

Рис. 2: Поле $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$.

(4) Пространство многочленов: $K[t]$.

Конечный набор одночленов: $1, t, t^2, \dots, t^n$ - линейно независимая система векторов при $\forall n$, поскольку две разные комбинации одночленов дают разные многочлены, если линейная комбинация равна 0, то только в тривиальном случае $\Rightarrow$ есть сколь угодно большая линейно независимая система в заданном пространстве $\Rightarrow$ нет конечного базиса;

Опр: 10. Векторное пространство V называется конечномерным, если в нём есть конечный базис и бесконечномерным в противном случае.

Изоморфизмы векторных пространств

Бывает так, что разные векторные пространства обладают одинаковыми свойствами с точки зрения линейной алгебры, то есть устроены одинаково.

Опр: 11. Изоморфизм векторных пространств это такое отображение $\varphi\colon V \to W$, где V и W - два векторных пространства над одним и тем же полем K, которое удовлетворяет двум свойствам:

1) φ - биективно;
2) φ - согласовано с операциями:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),\ \forall x, y \in V$$

$$\varphi(\lambda{\cdot}x) = \lambda{\cdot}\varphi(x),\ \forall \lambda \in K,\ \forall x \in V$$

Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$ или $\varphi\colon V \underset{\sim}{\to} W$.

Опр: 12. Пространства V и W изоморфны, если $\exists$ изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$. **Обозначение**: $V \simeq W$.

Если между пространствами есть изоморфизм, то все свойства линейной алгебры, формулируемые в терминах операций над векторами, если выполнены в одном пространстве, то будут и в другом.

Теорема 2. Любое векторное пространство V над полем K, размерности $n < \infty$ изоморфно K^n.

$\square$ Выберем базис $e = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ в пространстве V и построим отображение $\varphi\colon K^n \to V$ следующим образом:

$$\varphi\colon X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x = e{\cdot}X$$

Проверим биективность:

1) **Инъективность**: следует из единственности разложения вектора по базису:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a_1e_1 + \ldots + a_ne_n = b_1e_1 + \ldots b_ne_n \Rightarrow a = b$$

2) **Сюръективность**: также следует из разложения вектора по базису:

$$\forall x \in V,\ \exists x_1, \ldots, x_n \in K\colon x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n = e{\cdot}x = \varphi(x)$$

Следовательно, отображение - биективно. Согласованность с операциями - очевидна:

$$\forall a, b \in K^n,\ \varphi(a+b) = e(a+b) = (a_1+b_1)e_1 + \ldots (a_n+b_n)e_n = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n + b_1e_1 + \ldots + b_ne_n =$$

$$= ea + eb = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\forall a \in K^n,\ \forall \lambda \in K,\ \varphi(\lambda a) = e(\lambda a) = \lambda a_1e_1 + \ldots \lambda a_ne_n = \lambda{\cdot}(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = \lambda\varphi(a)$$

В результате, мы получаем, что отображение это изоморфизм. $\blacksquare$

Пример: Пространство геометрических векторов (направленных отрезков в пространстве) V имеет размерность $3 \Rightarrow V \simeq \mathbb{R}^3$.