Замена координат в векторных пространствах

Геометрический взгляд на векторные пространства

На прошлой лекции мы доказали, что все конечномерные векторные пространства одной и той же размерности изморфны между собой. Казалось бы тогда достаточно взять какое-то одно пространство и всё про него понять. Однако такой подход не всегда удобен, поскольку в пространстве строк или столбцов в арифметическом пространстве есть некоторая выделенная система координат, стандартный базис, координатами в котором являются просто элементы столбца, которая не всегда удобна для решения задач. Поэтому правильнее смотреть на векторные пространства и объекты линейной алгебры, которые живут в этих пространствах геометрически, независимо от системы координат.

Матрицы перехода из одного базиса в другой

Пусть V - векторное пространство над полем K, $\dim V = n < \infty$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ - базис V, одновременно возьмем в V какой-то другой базис $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

Хотелось бы понять, как эти два базиса друг с другом связаны? Пусть мы будем называть e - старым базисом, а e' - новым базисом и попытаемся понять, что происходит при переходе от старого базиса к новому. Поскольку $e'_j \in V$, то он раскладывается по старому базису:

$$\forall j = 1, \dots, n,\ e'_j = c_{1j}e_1 + c_{2j}e_2 + \dots + c_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i$$

Из коэффициентов $\{c_{ij}\}$ можно составить квадратную матрицу размера $n \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр: 1. Матрица C называется матрицей перехода от базиса e к базису e'.

В первом столбце матрицы C записаны координаты вектора e'_1, во втором координаты e'_2 и так далее до вектора e'_n в базисе e. Матрица перехода однозначно определяет новый базис $\Rightarrow$ чтобы задать новый базис, надо задать матрицу перехода к нему. Будем обозначать переход от e к e' так:

$$e \xrightarrow{C} e'$$

Матричная запись: Если $e'_j = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$, то:

$$e' = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = e{\cdot}C \Rightarrow e' = e{\cdot}C$$

Свойства матрицы перехода

1) Матрица перехода невырождена и наоборот, любая невырожденная матрица $C \in Mat_{n\times n}(K)$ размера $n \times n$ над полем K является матрицей перехода от исходного базиса к некоторому новому;

$\square$
($\Rightarrow$) Пусть $e \xrightarrow{C} e'$. Выбор базиса e в пространстве V задает изоморфизм: $V \simeq K^n$, при котором каждому вектору соответствует столбец координат этого вектора в базисе e. В частности:

$$\forall j = \overline{1,n},\ e'_j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

Векторы $e'_1, \dots e'_n$ - линейно независимы, поскольку образуют базис $\Rightarrow$ столбцы матрицы перехода C тоже будут линейно независимы $\Rightarrow$ матрица будет невырождена по определению.

($\Leftarrow$) Пусть C - невырожденная матрица $n \times n \Rightarrow$ её столбцы линейно независимы $\Rightarrow$ образуют базис пространства столбцов K^n, иначе это была бы не максимальная система линейно независимых столбцов $\Rightarrow$ в n-мерном пространстве столбцов нашлась бы линейно независимая система столбцов из $(n+1)$ столбца $\Rightarrow$ противоречие с основной леммой о линейной зависимости. Следовательно, при изоморфизме $K^n \simeq V$, векторы e'_j, соответствующие столбцам матрицы C:

$$\forall j = \overline{1,n},\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

образуют базис пространства V, поскольку их n штук и они линейно независимы. И переход от старого базиса e к новому базису e' осуществляется с помощью матрицы C:

$$e \xrightarrow{C} e' = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

2) Если верно $e \xrightarrow{C} e'$, то $e' \xrightarrow{C^{-1}} e$ (обратный переход);

$\square$ Пусть будет верно:

$$e \xrightarrow{C} e' \xrightarrow{C'} e$$

Тогда по свойству 3) справедливо:

$$e = e \cdot C \cdot C' \Rightarrow C \cdot C' = I$$

Аналогично:

$$e' \xrightarrow{C'} e \xrightarrow{C} e' \Rightarrow e' = e' \cdot C' \cdot C \Rightarrow C' \cdot C = I$$

Таким образом, $C' \cdot C = C \cdot C' = I \Leftrightarrow C' = C^{-1}$ по определению. $\blacksquare$

3) Если верно $e \xrightarrow{C} e'$, $e' \xrightarrow{C'} e''$, то $e \xrightarrow{C \cdot C'} e''$ (транзитивность);

$\square$ Если область, откуда берутся коэффициенты тех или иных матриц, имеет ассоциативное умножение, то и умножение матриц автоматически будет ассоциативно. Тогда:

$$e' = e \cdot C,\ e'' = e' \cdot C' \Rightarrow e'' = e \cdot C \cdot C'$$

$\blacksquare$

Преобразование координат

Пусть $x \in V$, разложим по старому базису:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = e{\cdot}X = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Разложим x по новому базису:

$$x = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n = e'{\cdot}X' = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = e{\cdot}\underbrace{C{\cdot}X'}_{\in K^n}$$

Поскольку разложение вектора x через базис e единственно, то мы получаем, что выражение старых координат через новые будет иметь следующий вид:

$$X = C{\cdot}X'$$

Аналогично для выражения новых координат через новые, достаточно домножить это равенство на обратную матрицу перехода слева:

$$X = C{\cdot}X' \Rightarrow C^{-1}{\cdot}X = C^{-1}{\cdot}C{\cdot}X' = I{\cdot}X' = X'$$

Утв. 1. Для любого $x \in V$ при замене базиса от e к e' с помощью матрицы перехода, преобразование координат будет иметь следующий вид:

$$X = C{\cdot}X', \quad X' = C^{-1}{\cdot}X$$

Подпространства

Пусть V - векторное пространство над полем K.

Опр: 2. Подпространством называется непустое подмножество $U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$, для которого:

1) $\forall u, v \in U,\ u + v \in U$;
2) $\forall u \in U,\ \forall \lambda \in K,\ \lambda{\cdot}u \in U$;

то есть замкнутость, относительно тех операций, которые мы умеем делать над векторами.

Rm: 1. Если $v_1, \ldots, v_m \in U$, тогда их линейные комбинации также принадлежат подпространству U:

$$v_1, \ldots, v_m \in U \Rightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K,\ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \in U$$

Утв. 2. В любом подпространстве $U \subseteq V$ всегда есть конкретный вектор: $\overrightarrow{0} \in U$.

□

$$U \neq \varnothing \Rightarrow u \in U \Rightarrow 0{\cdot}u = \overrightarrow{0} \in U$$

■

Rm: 2. Подпространство U само является векторным пространством, относительно операций на V, ограниченных на U.

Примеры векторных подпространств

(1) $U = \{0\} \subseteq V$ - наименьшее подпространство в пространстве V;

(2) $U = V \subseteq V$ - наибольшее подпространство в пространстве V;

(3) $V = \{$геом. векторы в пространстве$\}$, $U = \{$геом. векторы, параллельные плоскости $P\} \subseteq V$;

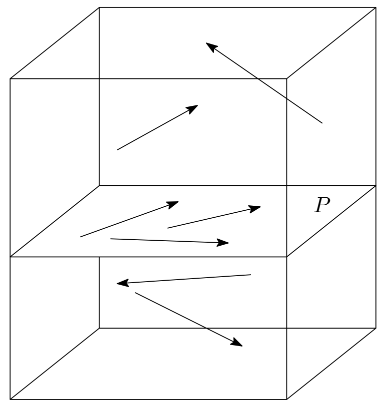

Рис. 1: Подпространство в геометрическом пространстве.

Когда мы складываем векторы данной плоскости и умножаем их на вещественные числа мы снова получаем векторы этой плоскости $\Rightarrow$ это векторное подпространство;

(4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - все функции на вещественной прямой с вещественными значениями, $U = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - множество непрерывных функций на вещественной прямой с вещественными значениями. Сумма двух непрерывных функций - непрерывная функция, если домножить непрерывную функцию на число, то получим снова непрерывную функцию $\Rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - подпространство;

Конструкции подпространств

1) Пусть $S \subseteq V$ - система векторов.

Опр: 3. Линейная оболочка $\langle S \rangle$ системы векторов $S \subseteq V$ это множество всевозможных линейных комбинаций векторов из системы S:

$$U = \langle S \rangle = \left\{ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \mid i = \overline{1, m},\, v_i \in S,\, \lambda_i \in K \right\}$$

Легко понять, что $U = \langle S \rangle$ это подпространство. Пусть $S = (v_1, \ldots, v_m)$, тогда:

1) $\forall u, v \in \langle S \rangle$, $u + w = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_m v_m + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_m + \mu_m) v_m \in \langle S \rangle$;

2) $\forall u \in \langle S \rangle$, $\forall \lambda \in K$, $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_m v_m) = (\lambda \cdot \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda \cdot \mu_m) v_m \in \langle S \rangle$;

Общепринято считать, что при отсутствии слагаемых в сумме её значение равно 0. В том числе допускается отсутствие слагаемых, то есть: $S = \varnothing \Rightarrow \langle S \rangle = \{0\} \Rightarrow$ это гарантирует непустоту. Более того, линейная оболочка это подпространство - наименьшее, содержащее систему векторов S, поскольку если подпространство содержит систему векторов S, то оно должно содержать и все линейные комбинации векторов из системы S. Заметим, что система векторов S порождает свою линейную оболочку $\langle S \rangle$ по определению с прошлой лекции.

2) $V = K^n$ - арифметическое пространство, пространство столбцов. Рассмотрим ОСЛУ (однородную систему линейных уравнений):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

И рассмотрим множество решение ОСЛУ $= U$. Решением ОСЛУ называется набор (строка или столбец), состоящий из значений неизвестных, которые при подстановке вместо неизвестных дают верное равенство, то есть это некое подмножество в пространстве столбцов.

В 1-ом семестре доказывали, что множество решений ОСЛУ является подпространством в пространстве столбцов. Размерность этого пространства равна размерности всего пространства столбцов минус ранг матрицы коэффициентов.

Rm: 3. По изоморфности, задание подпространства с помощью ОСЛУ также работает в любых других конечномерных пространствах.

3) Пусть $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ - набор подпространств $\Rightarrow U = U_1 \cap \dots \cap U_m$, будет ли пересечение подпространством? Очевидно, что $\overrightarrow{0} \in U \Rightarrow$ пересечение не пусто. Замкнутость относительно операций также сохраняется: поскольку векторы лежат в каждом из U_i, то и результат операции будет лежать в каждом из $U_i \Rightarrow$ результат будет лежать в пересечении.

Rm: 4. Заметим, что $U_1 \cup \dots \cup U_n$ вообще говоря, не будет подпространством.

Пример: Рассмотрим пространство V геометрических векторов на плоскости. Для простоты будем откладывать векторы от какой-то начальной точки. Возьмем в этой плоскости две прямых U_1 и U_2, проходящих через начало координат, и рассмотрим векторы на этих прямых.

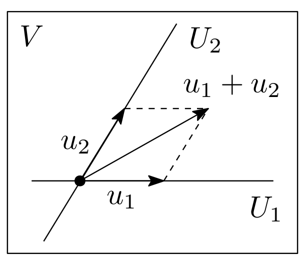

Рис. 2: Объединение подпространств не подпространство.

Векторы на первой прямой и на второй прямой будут образовывать подпространства в V, а их объединение подпространством уже не будет:

$$u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2,\ u_1, u_2 \neq \varnothing \Rightarrow u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$$

В результате, $U_1 \cup U_2$ - не подпространство V. Но с этим можно побороться.

4) Пусть $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ - подпространства пространства V.

Опр: 4. Суммой подпространств называется линейная оболочка их объединения, то есть наименьшее подпространство, содержащее каждое из них:

$$U_1 + \ldots + U_m = \langle U_1 \cup \ldots \cup U_m \rangle = \left\{ v = u_1 + \ldots + u_m \mid \forall i = \overline{1, m},\, u_i \in U_i \right\}$$

Линейная оболочка любой системы векторов является подпространством, а сумма подпространств это линейная оболочка объединения подпространств $\Rightarrow$ также будет подпространством. В предыдущем примере сумма: $U_1 + U_2 = V \Rightarrow$ очевидно является подпространством.

Утв. 3. Пусть $\dim V < \infty$, $U \subseteq V$ - подпространство. Тогда:

1) $\dim U \leq \dim V$;
2) Любой базис $(e_1, \ldots, e_m)$ подпространства U можно дополнить до базиса $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_n)$ пространства V;
3) $\dim U = \dim V$ возможно только при $U = V$

□ Пусть $\dim V = n$.

1) По основной лемме о линейной зависимости, в пространстве V не существует линейно независимых систем из больше чем n векторов. Иначе, больше чем n векторов выражается через n векторов и большее число векторов - линейно независимы $\Rightarrow$ поскольку нельзя выбрать больше чем n линейно независимых векторов в пространстве U, то U также конечномерно и верно: $\dim U \leq \dim V$;
2) Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ - базис U, $m \leq n$. По определению базиса, эти векторы образуют максимальную линейно независимую систему в U, а во всём V они образуют линейно независимую систему, но может быть не максимальную. Если система не максимальна, то можно дополнить $(e_1, \ldots, e_m)$ до максимальной линейно независимой системы $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ векторов в V:

$$(e_1, \ldots, e_m) \to (e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$$

   Мы можем добавить лишь конечное число векторов, потому что линейно независимых систем из больше чем n векторов в V не существует $\Rightarrow$ это и есть искомый базис;
3) Если $\dim U = m = n = \dim V \Rightarrow (e_1, \ldots, e_m)$ - это базис одновременно и для U, и для $V \Rightarrow U = V$;

■

Опр: 5. Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V согласован с подпространством U, если векторы $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$ это базис U для некоторых $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$.

Следствие 1. В конечномерном векторном пространстве V для любого подпространства U существует согласованный с ним базис пространства V.

□ Этот базис построен в пункте 2) утверждения 3. ■

Rm: 5. Без ограничения общности, можно считать, что $(e_1, \ldots, e_m)$ - базис U.

В координатах в согласованном базисе: $U = \{x \in V \mid x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$, то есть задается ОСЛУ.

Теорема 1. Пусть $\dim V < \infty$, $U, W \subseteq V$ - подпространства. Тогда существует базис пространства V, который согласован с $U, W, U \cap W, U + W$.

$\square$ Выберем базис $(e_1, \ldots, e_m)$ для $U \cap W$. Дополним до базиса всего пространства U:

$$(e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_k)$$

Совершенно аналогично, мы можем дополнить пересечение до базиса пространства W:

$$(e_1, \ldots, e_m, w_1, \ldots, w_l)$$

Объединив эти векторы вместе и взяв их линейную оболочку, мы получим сумму пространств:

$$U + W = \langle e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l \rangle$$

Следовательно, мы знаем чем порождается система $U + W \Rightarrow$ докажем что это линейно независимая система. Возьмем произвольную комбинацию этих векторов:

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_l w_l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k}_{\in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_l w_l}_{\in W} \Rightarrow v \in U \cap W$$

Единственность разложения по базису U влечёт, что все коэффициенты при добавленных векторах равны нулю: $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$, поскольку $v \in U \cap W$. По аналогии из единственности разложения по базису W следует: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_l = 0$. Таким образом мы получаем:

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

А это и есть определение линейной независимости. Поскольку эта система линейна независима и порождает свою линейную оболочку, то она является её базисом (по утв. 1 лекции 1). Дополним её до базиса всего пространства V и мы получим искомый базис. $\blacksquare$

Следствие 2. Формула Грассмана суммы подпространств в конечномерном векторном пространстве:

$$\dim (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (U \cap W)$$

$\square$ В условиях предыдущей теоремы, пусть у нас есть согласованный базис суммы $U + W$:

$$(\overbrace{\underbrace{e_1, \ldots, e_m}_{\in U \cap W}, u_1, \ldots, u_k}^{\in U}, w_1, \ldots, w_l) \Rightarrow \dim (U \cap W) = \dim (e_1, \ldots, e_m)$$

$$\dim U = \dim (e_1, \ldots, e_m, u_1, \ldots, u_k),\ \dim (V) = \dim (e_1, \ldots, e_m, w_1, \ldots, w_l) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim (V + W) = \dim V + \dim W - \dim (U \cap W)$$

$\blacksquare$

Следствие 3. Если $\dim U + \dim W > \dim V \Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$.