Линейные оболочки

V - линейное пространство над $\mathbb{K}$, $S \subset V$ - подмножество (не обязательно конечное). Если конечное: $a_1, \ldots, a_n \in S$, то взяли бы $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ - линейная комбинация.

Опр: 1. Линейное комбинацией элементов из S называется конечная сумма вида $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $a_1, \ldots, a_n \in S$.

Множество индексов I $\Rightarrow$ тогда можно брать сумму $\sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i a_i$. Эта сумма определена, если все λ_i кроме конечного числа равны 0.

Опр: 2. Линейной оболочкой $\langle S \rangle$ множества $S \subset V$ называется множество всех линейных комбинаций элементов из S.

Лемма 1. $\langle S \rangle$ является линейным подпространством в V $\left(\text{доказательство через суммы вида } \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i a_i\right)$.

Опр: 3. S называется линейно независимым, если из равенства любой линейной комбинации элементов из $S = 0 \Rightarrow$ все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0:

S - линейно независимо, если $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$, где $a_1, \ldots, a_n \in S \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

S - линейно зависимо, если $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, не все равные $0\colon \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$.

Если $S \subset S'$ и S - линейно зависимо, то S' - линейно зависим.

Если $S \subset S'$ и S' - линейно независимо, то S - линейно независимо.

Лемма 2. Если $\{a_1, \ldots, a_n\}$ - линейно независимы, а $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ - линейно зависимы, то a_{n+1} - есть линейная комбинация $a_1, \ldots, a_n$.

Лемма 3. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, \ldots, b_m\}$ - линейно независимы и пусть $b_1, \ldots, b_m \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, тогда $m \leq n$.

$\square$ Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & = & \alpha_{11} a_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n} a_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_m & = & \alpha_{m1} a_1 & + & \ldots & + & \alpha_{mn} a_n \end{array}\right.$$

$b_1, \ldots, b_m$ - линейно независимы $\Rightarrow \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0 \Rightarrow$

$$0 = \lambda_1(\alpha_{11} a_1 + \ldots + \alpha_{1n} a_n) + \ldots + \lambda_m(\alpha_{m1} a_1 + \ldots + \alpha_{mn} a_n) =$$

$$= (\lambda_1 \alpha_{11} + \ldots + \lambda_m \alpha_{m1}) a_1 + (\lambda_1 \alpha_{12} + \ldots + \lambda_m \alpha_{m2}) a_2 + \ldots + (\lambda_1 \alpha_{1n} + \ldots + \lambda_m \alpha_{mn}) a_n = 0$$

Поскольку $a_1, \ldots, a_n$ - линейно независимы, то получим, что все коэффициенты при $a_i = 0 \Rightarrow$ получим следующую однородную СЛУ на $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 \alpha_{11} & + & \ldots & + & \lambda_m \alpha_{m1} & = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{1n} & + & \ldots & + & \lambda_m \alpha_{mn} & = & 0 \end{array}\right.$$

От противного: пусть $m > n$ (т.е. число неизвестных $>$ числа уравнений) $\Rightarrow \exists$ ненулевое решение $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \Rightarrow$ противоречие с $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0 \Rightarrow m \leq n$. $\blacksquare$

Размерность линейных пространств

Процесс определения размерности линейного пространства

(1) В V есть ненулевой элемент: нет $\Rightarrow$ размерность $V = 0$, да $\Rightarrow$ есть вектор a_1;

(2) В V есть $a_2\colon a_1, a_2$ - линейно независимые: нет $\Rightarrow$ размерность $V = 1$, да $\Rightarrow$ есть a_2;

(3) В V есть $a_3\colon a_1, a_2, a_3$ - линейно независимые: нет $\Rightarrow$ размерность $V = 2$, да $\Rightarrow$ есть a_3;

$\vdots$

Есть два случая:

1) Процесс заканчивается на n-ом шаге, тогда размерность $= n$;
2) Процесс не заканчивается, тогда размерность $V = \infty$;

Обозначение: размерность пространства - $\dim V$.

Проверим независимость процесса от выбора $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

$\square$ Пусть есть два выбора $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$; если оба бесконечны, то не важно как выбираем.

Случай 1: $a_1, \ldots, a_n$ - заканчивается на шаге n; $b_1, b_2, \ldots$ - бесконечный. $b_1, b_2, \ldots \in \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \Rightarrow$ выберем конечное $n+1\colon b_1, \ldots, b_{n+1} \Rightarrow$ по лемме $n + 1 \leq n \Rightarrow$ противоречие.

Случай 2: $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_m$ - разный набор элементов и пусть $m > n$ (и симметричная ситуация $n > m$) пусть такое реализовалось $\Rightarrow$ процесс закончится на шаге $n \Rightarrow \nexists$ элемента a_{n+1}, который вместе с предыдущими элементами был бы независимым $\Rightarrow \forall b \in V$, b - линейная комбинация $a_1, \ldots, a_n \Rightarrow b_1, \ldots, b_m \in \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \Rightarrow$ по лемме $m \leq n \Rightarrow$ противоречие с $m > n$. $\blacksquare$

Пример: Линейное пространство строк длины k, $(a_1, \ldots, a_k)$: k штук $\left\{\begin{array}{c}(1, 0, \ldots, 0)\\(0, 1, \ldots, 0)\\ \vdots \\(0, 0, \ldots, 1)\end{array}\right. \Rightarrow \dim V = k$.

Пример: Пространство бесконечных последовательностей: $\dim V = \infty$.

Пример: Пространство многочленов степени $\leq n$. $\dim V = n+1\colon 1, x, x^2, \ldots, x^n$. Если бы были линейно зависимыми, то $\exists\, \lambda_i \neq 0\colon \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n = 0$, но такого не может быть $\Rightarrow$ линейно независимы: берем $x = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$, берем производную $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и так далее.

Опр: 4. Множество элементов в линейном пространстве $S \subset V$ назовем максимальным, если любой элемент $a \in V$ также принадлежит $\langle S\rangle$.

Лемма 4. Если $\dim V$ конечна, то в $V, \exists$ максимальное линейно независимое подмножество.

$\square$ По алгоритму поиска размерности линейного пространства. $\blacksquare$

Опр: 5. Максимальное линейно независимое подмножество называется базисом.

Пример: V_1 - пространство всех бесконечных последовательностей. V_2 - пространство всех финитных бесконечных последовательностей (финитная $\Leftrightarrow$ с какого-то момента начинаются только 0).

$S = \{(1,0,0,0,\dots),\ (0,1,0,0,\dots),\ (0,0,1,0,\dots),\ (0,0,0,1,\dots),\dots\}$ - базис в V_1, но не базис в V_2. $(1,1,1,1,\dots) \in V_1$ - не может быть представлена в виде конечной линейной комбинации из S.

Далее считаем, что все линейные пространства будут конечномерными, $\dim V \neq \infty$.

Лемма 5. Пусть $L \subset V$ - линейное подпространство, $e_1,\dots,e_k$ - базис в L, $\dim V = n$. Тогда $k \le n$ и $\exists\, e_{k+1},\dots,e_n$ такие, что $e_1,\dots,e_n$ - базис в V (т.е. базис подпространства можно дополнить до базиса объемлющего пространства).

$\square$ Если $n < k$, то $e_1,\dots,e_k \in L \subset V \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow n \ge k$.

Ищем элемент с номером $k+1$: линейно независим с предыдущими $e_1,\dots,e_k,e_{k+1}$ - линейно независимы. Если такого нет, то $\forall a \in V \Rightarrow a \in L$. Если нашли $\Rightarrow$ ищем дальше до тех пор, пока не сможем найти следующий элемент $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ дошли до размерности пространства V. $\blacksquare$

Следствие 1. Если $L \subset V$ и $\dim L = \dim V$, то $L = V$.

$\square$ (От противного): Пусть $L \neq V \Rightarrow \exists\, a \in V\colon a \notin L \Rightarrow e_1,\dots,e_k$ - базис в L. Добавим к нему $a \Rightarrow e_1,\dots,e_k,a$ - линейно независимы. Иначе $a \in \langle e_1,\dots,e_k\rangle \Rightarrow \dim V > \dim L \Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Утв. 1. Пусть $e_1,\dots,e_n$ - базис в $V \Rightarrow \forall x \in V$, $\exists\, x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}\colon x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, причем данное выражение - единственно.

$\square$ Пусть $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, $x = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \Rightarrow 0 = (x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n \Rightarrow$ так как $e_1,\dots,e_n$ - линейно независимы $\Rightarrow x_i - y_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i$. $\blacksquare$

Опр: 6. $\forall x \in V$, $e_1,\dots,e_n$ - базис в V, $\exists!\, x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}\colon x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, которые называются координатами элемента x в базисе $e_1,\dots,e_n$.

Пусть $e_1,\dots,e_n$; $\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_n$ - базисы в V. Выразим $\begin{cases} \widetilde{e}_1 &= c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \widetilde{e}_n &= c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases} \Rightarrow$ получим матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix}\widetilde{e}_1 & \dots & \widetilde{e}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1 & \dots & e_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

C - матрица перехода к новым координатам (C - невырожденная, $|C| \neq 0$).

$x \in V \Rightarrow x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = \widetilde{x}_1\widetilde{e}_1 + \dots + \widetilde{x}_n\widetilde{e}_n = \widetilde{x}_1(c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n) + \dots + \widetilde{x}_n(c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n) = (\widetilde{x}_1c_{11} + \dots + \widetilde{x}_nc_{1n})e_1 + \dots + (\widetilde{x}_1c_{n1} + \dots + \widetilde{x}_nc_{nn})e_n \Rightarrow$ коэффициенты при векторах $e_1,\dots,e_n$ - совпадают, тогда:

$$\begin{cases} x_1 &= \widetilde{x}_1c_{11} + \dots + \widetilde{x}_nc_{1n} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n &= \widetilde{x}_1c_{n1} + \dots + \widetilde{x}_nc_{nn} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}$$

Обозначение: $x^iy_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x^iy_i = x^1y_1 + \dots + x^ny_n$, один индекс верхний, другой нижний $\Rightarrow$ будет подразумеваться суммирование.