Прямая внешняя сумма

Теорема 1. Пусть $\dim V < \infty$, $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ - подпространства, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $U_1, \ldots, U_m$ - линейно независимы;

(2) Объединение базисов $U_1, \ldots, U_m$ есть базис $U_1 + \ldots + U_m$;

(3) $\dim (U_1 + \ldots + U_m) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_m$;

Опр: 1. Пусть V - векторное пространство, $U \subseteq V$ - его подпространство, подпространство $W \subseteq V$ такое, что $V = U \oplus W$ называется дополнительным к U подпространством.

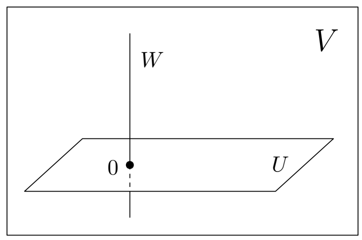

Рис. 1: Дополнительное к U подпространство V.

Следствие 1. Если $\dim V < \infty \Rightarrow \forall$ подпространства $U \subseteq V$, $\exists\, W \subseteq V : V = U \oplus W$.

☐ Выберем согласованный с подпространством U базис:

$$(\overbrace{\underbrace{e_1, \ldots, e_m}_{\text{базис } U}, e_{m+1}, \ldots, e_n}^{\text{базис } V}),\ U = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle,\ V = \langle e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$$

Положим, что $W = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle \Rightarrow V = U + W$ по построению, а поскольку объединение базиса U и базиса W, равного $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ по построению, даст нам базис V, то по условию (2) теоремы это равносильно линейной независимости подпространств U и $W \Rightarrow$ сумма прямая: $V = U \oplus W$. ■

Утв. 1. Если $V = U \oplus W \Rightarrow V/U \simeq W$.

☐ Построим изоморфизм $\varphi \colon W \to V/U$ в явном виде :

$$\forall w \in W,\ \varphi(w) = w + U$$

<u>**Инъективность**</u>: Пусть $\varphi(w) = \varphi(w') \Leftrightarrow w + U = w' + U \Rightarrow \exists\, u \in U : w + u = w' = w' + 0$, поскольку у нас прямая сумма, то разложение единственное $\Rightarrow u = 0 \Rightarrow w = w'$.

<u>**Сюръективность**</u>: $\forall v \in V$, $\exists\, u \in U$, $w \in W : v = u + w \Rightarrow v + U = w + U \Rightarrow \forall v + U \in V/U$, $\exists\, w \in W$.

Таким образом φ - биективное отображение, согласованность с операциями - очевидна:

$$\varphi(\lambda \cdot v + \mu \cdot w) = (\lambda \cdot v + \mu \cdot w) + U = \lambda \cdot v + U + \mu \cdot w + U = \lambda \cdot (v + U) + \mu \cdot (w + U) = \lambda \cdot \varphi(v) + \mu \cdot \varphi(w)$$

■

Rm: 1. Заметим, что дополнительное подпространство W не однозначный объект, в то время как фактор-пространство канонически определяется по подпространству и единственным образом.

Линейный функции

Изучим функции на векторных пространствах, которые “уважают” структуру векторного пространства. Такие функции называются линейными.

Опр: 2. Функция $\alpha\colon V \to K$ называется линейной, если верны свойства:

(1) $\alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w)$, $\forall v, w \in V$;

(2) $\alpha(\lambda{\cdot}v) = \lambda{\cdot}\alpha(v)$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda \in K$;

Примеры линейных функций: след матрицы

Опр: 3. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ - след матрицы.

$V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\alpha(A) = \mathrm{tr}\,(A)$, проверим что след является линейной функцией:

(1) $\mathrm{tr}\,(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) = \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$, $\forall A, B \in V$;

(2) $\mathrm{tr}(\lambda{\cdot}A) = \lambda{\cdot}a_{11} + \ldots + \lambda{\cdot}a_{nn} = \lambda{\cdot}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) = \lambda{\cdot}\,\mathrm{tr}\,(A)$, $\forall A \in V$, $\forall \lambda \in K$;

Примеры линейных функций: линейный функционал

Опр: 4. Функцию на пространстве, которое само состоит из функций называют функционалом.

$V = \mathcal{F}(X, K)$, $x_0 \in X \Rightarrow \alpha(f) = f(x_0)$, $\forall f \in \mathcal{F}(X, K)$, где α - функционал вычисления значения в фиксированной точке x_0. Этот функционал будет линейным функционалом на $\mathcal{F}(X, K)$:

(1) $\alpha(f + g) = (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \alpha(f) + \alpha(g)$, $\forall f, g \in V$;

(2) $\alpha(\lambda{\cdot}f) = (\lambda{\cdot}f)(x_0) = \lambda{\cdot}f(x_0) = \lambda{\cdot}f(x_0)$, $\forall f \in V$, $\forall \lambda \in K$;

Пусть $\dim V < \infty$, выберем $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис V, хотим понять как вычислить линейную функцию в координатах. Знаем, что: $\forall x \in V$, $\exists!$ разложение $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, тогда:

$$\forall x \in V,\ \exists!\, X\colon x = eX = x_1e_1 + x_ne_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \alpha(x_1e_1) + \ldots + \alpha(x_ne_n) = x_1{\cdot}\alpha(e_1) + \ldots + x_n{\cdot}\alpha(e_n)$$

Если обозначить коэффициенты $\alpha(e_i) = a_i$, $\forall i = \overline{1, n}$, то получим следующее выражение:

$$\forall x \in V,\ \alpha(x) = a_1{\cdot}x_1 + \ldots + a_n{\cdot}x_n$$

Любая линейная функция в координатах записывается как линейная комбинация координат вектора с какими-то фиксированными коэффициентами - значениями на базисных векторах.

Опр: 5. Линейная комбинация переменных с фиксированными коэффициентами, то есть однородный многочлен первой степени от координат, называется линейной формой.

Rm: 2. Обратно тоже верно, каждая линейная форма задает линейную функцию (по равенству выше):

$$\alpha(\lambda x + \mu y) = (\lambda x_1 + \mu y_1){\cdot}a_1 + \ldots (\lambda x_n + \mu y_n){\cdot}a_n = \lambda x_1{\cdot}a_1 + \mu y_1{\cdot}a_1 + \ldots + \lambda x_n{\cdot}a_n + \mu y_n{\cdot}a_n =$$
$$= \lambda(x_1{\cdot}a_1 + \ldots + x_n{\cdot}a_n) + \mu(y_1{\cdot}a_1 + \ldots + y_n{\cdot}a_n) = \lambda\alpha(x) + \mu\alpha(y)$$

Другими словами, линейная форма это способ записи линейных функций в координатах, если мы зафиксировали базис. В другом базисе та же самая функция будет задаваться какой-то другой линейной формой, можно написать как переход от одной к другой, поскольку мы знаем как меняется базис.

Сопряженное пространство

Утв. 2. Множество всех линейных функций на V это подпространство $V^* \subseteq \mathcal{F}(V, K)$ пространства всех функций на V.

Опр: 6. Подпространство $V^* \subseteq \mathcal{F}(V, K)$ всех линейных функций на V называется сопряженным или двойственным, или дуальным пространством к V. Базис этого пространства называется сопряженным или двойственным, или дуальным базисом к базису пространства V.

□ Докажем, что V^* это подпространство.

0) **Непустота**: $\alpha(x) \equiv 0 \in V^*$, поскольку для нулевой функции очевидно выполняются свойства линейности;

$$0(\lambda v + \mu w) = \alpha \cdot 0(v) + \mu \cdot 0(w) = 0 + 0 = 0$$

1) **Замкнутость по сложению**: $\forall \alpha, \beta \in V^* \Rightarrow \alpha + \beta \in V^*$:

$$(\alpha + \beta)(\lambda v + \mu w) = \lambda\alpha(v) + \mu\alpha(w) + \lambda\beta(v) + \mu\beta(w) = \lambda(\alpha + \beta)(v) + \mu(\alpha + \beta)(w)$$

2) **Замкнутость по умножению на скаляр**: $\forall \alpha \in V^*$, $\lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot \alpha \in V^*$;

$$(\lambda \cdot \alpha)(\mu v + \gamma w) = \lambda \cdot \mu \cdot \alpha(v) + \lambda \cdot \gamma \cdot \alpha(w) = \mu \cdot (\lambda \cdot \alpha)(v) + \gamma \cdot (\lambda \cdot \alpha)(w)$$

■

Утв. 3. Если $\dim V = n < \infty$, то $\dim V^* = n$.

□ Выберем в пространстве V произвольный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогда мы можем расписать любую линейную функцию в этом базисе, как линейную форму. Рассмотрим координатные функции $\varepsilon_i \in V^*$ на пространстве V:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V \Rightarrow \varepsilon_i(x) = x_i,\ \forall i = \overline{1, n}$$

Это простейшая линейная форма, где от каждого вектора просто берется его координата $\Rightarrow$ тоже линейная функция. Докажем, что набор координатных функций $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ будет базисом сопряженного пространства: ε порождает сопряженное пространство и функции ε_i линейно независимы.

1) **Порождение подпространства**: Рассмотрим произвольную линейную функцию на V:

$$\forall \alpha \in V^*,\ \forall x \in V \colon \alpha(x) = a_1 x_1 + \ldots a_n x_n,\ \alpha(e_i) = a_i,\ \forall i = \overline{1, n}$$

Представление функции выше верно для конкретного вектора x, значения функции α на базисных векторах e_i полностью определяют линейную форму $\Rightarrow$ для произвольного вектора x:

$$\alpha(x) = a_1\varepsilon_1(x) + \ldots + a_n\varepsilon_n(x)$$

то есть любая линейная функция $\alpha(x)$ есть линейная комбинация координатных функций с коэффициентами $a_i = \alpha(e_i)$. Следовательно, $V^* = \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$.

2) **Линейная независимость**: Пусть верно:

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n = \lambda_1\varepsilon_1(x) + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n(x) = 0$$

Подставим в это функциональное равенство какое-нибудь e_i:

$$0 = \lambda_1\varepsilon_1(e_i) + \ldots + \lambda_i\varepsilon(e_i) + \ldots + \lambda_n\varepsilon(e_i) = 0 + \ldots + \lambda_i \cdot 1 + \ldots 0 = \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$$

■

Следствие 2. Если V - конечномерно ($\dim V < \infty$), то $V \simeq V^*$.

$\square$ Сопряженное пространство имеет ту же самую размерность $\Rightarrow$ поскольку все конечномерные векторные пространства одной и той же размерности изоморфны друг другу, то $V \simeq V^*$. $\blacksquare$

Rm: 3. Заметим, что этот изоморфизм - не является каноническим, то есть он зависит от выбора базиса. Тем не менее, можно построить канонический изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*$.

Рассмотрим $\forall v \in V$ линейный функционал (функцию на пространстве функций):

$$\widehat{v} \colon V^* \to K$$

который определяется по следующему правилу:

$$\widehat{v}(\alpha) = \alpha(v), \; \forall \alpha \in V^*$$

Это функционал вычисления значения линейной функции в фиксированной точке $v \Rightarrow$ с каждым вектором пространства V мы связали линейный функционал на сопряженном пространстве V^*.

Теорема 2. Если $\dim V < \infty$, то $\exists$ канонический изоморфизм: $V \xrightarrow{\sim} (V^*)^*$, то есть не зависящий от выбора базиса в V, который сопоставляет каждому вектору из V функционал из $(V^*)^*$:

$$\psi \colon v \mapsto \widehat{v}, \; \forall v \in V$$

$\square$

1) Докажем, что отображение $\psi \colon V \to (V^*)^*$ согласовано с операциями $(+)$ и $(\,\cdot\,)$:

$$\psi(v+w) = \widehat{v+w}(\alpha) = \alpha(v+w) = \alpha(v) + \alpha(w) = \widehat{v}(\alpha) + \widehat{w}(\alpha) = \psi(v) + \psi(w), \; \forall \alpha \in V^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(v+w) = \widehat{v+w} = \widehat{v} + \widehat{w} = \psi(v) + \psi(w)$$

То есть, линейный функционал на V^*, отвечающий сумме двух векторов это сумма линейных функционалов, отвечающих отдельным векторам. Аналогично:

$$\psi(\lambda \cdot v) = \widehat{\lambda \cdot v}(\alpha) = \alpha(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \alpha(v) = \lambda \cdot \widehat{v}(\alpha) = \lambda \cdot \psi(v), \; \forall \alpha \in V^*, \; \forall \lambda \in K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(\lambda \cdot v) = \widehat{\lambda v} = \lambda \cdot \widehat{v} = \lambda \cdot \psi(v)$$

То есть, линейный функционал, отвечающий λv это функционал, отвечающий вектору v, умноженный на λ.

2) Возьмем какой-нибудь базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V, возьмем сопряженный ему базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, тогда:

$$\forall \alpha \in V^*, \; \alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n, \; a_i = \alpha(e_i), \; \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(e_i) = \widehat{e}_i(\alpha) = \alpha(e_i) = a_i, \; \forall \alpha \in V^*$$

Отсюда мы видим, что $\widehat{e}_i$ это координатная функция на пространстве V^* по отношению к базису сопряженного пространства $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \Rightarrow$ набор функционалов $(\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n)$ - это базис второго сопряженного пространства $(V^*)^*$, сопряженного к первому сопряженному V^*.

3) Докажем биективность отображения. $\forall x \in V$, $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n \Rightarrow$ по пункту 1) функционал $\widehat{x}$, соответствующий этому вектору, будет иметь вид:

$$\widehat{x} = x_1 {\cdot} \widehat{e}_1 + \ldots + x_n {\cdot} \widehat{e}_n$$

Таким образом, у x и $\widehat{x}$ одинаковый набор координат в соответствующих базисах $\Rightarrow$ это взаимооднозначное соответствие, поскольку вектор однозначно определяется и однозначно определяет набор своих координат.

■

Двойственность (конечномерный случай)

Элементы V называем векторами, элементы сопряженного пространства V^*, то есть линейные функции на пространстве V, принято называть ковекторами. В силу канонического изоморфизма, векторы можно отождествить с элементами пространства $(V^*)^*$, то есть линейными функциями на ковекторах.

Опр: 7. Ковекторами будем называть линейные функции на векторах.

Опр: 8. Векторами будем называть линейные функции на ковекторах.

Опр: 9. Спаривание ковектора α с вектором x это значение ковектора на этом векторе или значение на ковекторе α линейного функционала, соответствующего вектору x:

$$\langle \alpha | x \rangle \coloneqq \alpha(x) = \widehat{x}(\alpha)$$

Обозначение: $\langle \alpha | x \rangle$.

Спаривание можно расписать в координатах:

$$\langle \alpha | x \rangle = \alpha(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \quad a_i = \langle \alpha | e_i \rangle = \alpha(e_i),\ x_i = \langle \varepsilon_i | x \rangle = \varepsilon_i(x),\ \forall i = \overline{1, n}$$

Опр: 10. Условие сопряженности базисов в пространствах V и V^*: базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V сопряжен базису $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, если выполняется равенство:

$$\langle \varepsilon_i | e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

то есть мы хотим сказать, что ε_i это координатные функции в базисе из e_j.

Rm: 4. Любой базис V^* сопряжен некоторому базису V, потому что у базиса в V^* существует свой сопряженный базис в $(V^*)^* = V^{**} \simeq V \Rightarrow$ можно считать, что этот сопряженный базис находится в V и удовлетворяет условию сопряженности:

$$\langle \varepsilon_i | e_j \rangle = \widehat{e}_j(\varepsilon_i) = \varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Разложение векторов и ковекторов по базисам:

$$\forall x \in V,\ x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i | x \rangle \cdot e_i$$

$$\forall \alpha \in V^*,\ \alpha = a_1 \varepsilon_1 + \ldots + a_n \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha | e_i \rangle \cdot \varepsilon_i$$

Линейные функции и подпространства

Опр: 11. Пусть $S \subseteq V$ - произвольное множество векторов в пространстве V. Назовём аннулятором множества S множество ковекторов, которые на множестве S обращаются в ноль:

$$S^{\circ} = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha | v \rangle = 0, \forall v \in S\}$$

Утв. 4. (**Свойства аннуляторов**):

1) $S^{\circ} \subseteq V^*$ - подпространство;
2) Если $S \subseteq \widetilde{S} \Rightarrow S^{\circ} \supseteq \widetilde{S}^{\circ}$;
3) $S^{\circ} = \langle S \rangle^{\circ}$;
4) Пусть $T = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle \subseteq V^*$, тогда $T^{\circ} \subseteq V^{**} \simeq V$;

□

1) Нужно убедиться, что аннулятор замкнут относительно сложения и умножения на скаляры:

$$\forall \alpha, \beta \in S^{\circ}, \forall \mu, \lambda \in K, \langle \mu \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta | v \rangle = (\mu \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta)(v) = \mu \cdot \alpha(v) + \lambda \cdot \beta(v) = 0$$

   И нулевая функция также, очевидно, принадлежит S°;
2) $S \subseteq \widetilde{S} \Rightarrow \forall \alpha \in \widetilde{S}^{\circ}, \langle \alpha | v \rangle = 0, \forall v \in \widetilde{S} \Rightarrow \langle \alpha | v \rangle = 0, \forall v \in S \Rightarrow \alpha \in S^{\circ} \Rightarrow \widetilde{S}^{\circ} \subseteq S^{\circ}$;
3) Проверим в явном виде:

$$\forall \alpha \in S^{\circ}, \forall v \in S, \langle \alpha | v \rangle = 0 \Rightarrow \forall v_1, \ldots, v_n \in S, \forall \mu_1, \ldots, \mu_n, \langle \alpha | \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \rangle =$$

$$= \alpha(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = \mu_1 \alpha(v_1) + \ldots + \mu_n \alpha(v_n) = 0 + \ldots + 0 = 0 \Rightarrow S^{\circ} \subseteq \langle S \rangle^{\circ}$$

   В обратную сторону очевидно, поскольку $S \subseteq \langle S \rangle \Rightarrow S^{\circ} \supseteq \langle S \rangle^{\circ}$;
4) По определению и в силу изоморфизма, мы получим:

$$T^{\circ} = \left\{ \widehat{x} \in V^{**} \mid \forall i = \overline{1,m}, \langle \alpha_i | x \rangle = \widehat{x}(\alpha_i) = 0 \right\} = \left\{ x \in V \mid \forall i = \overline{1,m}, \langle \alpha_i | x \rangle = 0 \right\}$$

   Если выбрать в V какой-то базис, записать ковекторы в виде линейных форм в этом базисе и записать это выражение в координатах, то мы получим следующее:

$$\alpha_i = a_{i1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{in}\varepsilon_n \Rightarrow \langle \alpha_i | x \rangle = \alpha_i(x) = a_{i1}x_1 + \ldots a_{in}x_n = 0$$

   то есть, аннулятор подпространства T это пространство решений однородной СЛУ;

■

Rm: 5. Свойство 3) сводит нас к изучению аннуляторов подпространств, если нас интересует, как устроены аннуляторы тех или иных множеств векторов.

Теорема 3. (**основная теорема про аннулятор**) Пусть V - конечномерно и $U \subseteq V$ - подпространство, тогда верны следующие свойства:

1) $\dim U^\circ = \operatorname{codim} U = \dim V - \dim U$;
2) $(U^\circ)^\circ = U$;

□ Выберем согласованный базис $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ так, чтобы:

$$U = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle, \; V = \langle e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$$

Пусть $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ - сопряженный базис в V^*. Тогда, поскольку $U = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$, то по определению:

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n \in U^\circ \Leftrightarrow \forall i = \overline{1, m}, \; \langle \alpha | e_i \rangle = a_i = 0$$

Следовательно, $U^\circ = \langle \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n \rangle$.

1) $\dim U^\circ = \dim V - \dim U = n - m = \operatorname{codim} U$;
2) По определению аннулятора U:

$$\forall x \in U, \, \forall \alpha \in U^\circ, \, \langle \alpha | x \rangle = 0 \Rightarrow x \in (U^\circ)^\circ \Rightarrow U \subseteq (U^\circ)^\circ$$

По пункту 1) будет верно:

$$\dim U^{\circ\circ} = \dim V^* - \dim U^\circ = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$$

Тогда по утверждению 3 лекции 2 подпространства U и $U^{\circ\circ}$ - совпадают.

■

Задание подпространства с помощью ОСЛУ

Пусть $U = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, где векторы не обязаны быть базисом. Тогда U° задаёт ОСЛУ вида:

$$\begin{cases} \langle \alpha | v_1 \rangle & = & a_1 v_{11} + \ldots + a_n v_{n1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha | v_m \rangle & = & a_1 v_{m1} + \ldots + a_n v_{mn} & = & 0 \end{cases}$$

Аннулятор состоит из тех α для которых выполнены уравнения выше, то есть ОСЛУ на коэффициенты линейной функции a_i. Если какое-то подпространство задано с помощью ОСЛУ, то мы можем найти его базис (процедура нахождения ФСР для ОСЛУ), тогда $U^\circ = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$. В этом случае аннулятор аннулятора, который канонически отождествляется с U по теореме 3 выше, то есть $U = U^{\circ\circ}$, по аналогии выше задается ОСЛУ:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1 | x \rangle & = & a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_k | x \rangle & = & a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n & = & 0 \end{cases}$$

то есть, это подпространство состоит из тех векторов на которых все ковекторы $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ обращаются в ноль, что и задается системой выше.

Итог: система порождающих для подпространства даёт нам линейные уравнения для аннулятора, а система порождающих для аннулятора даёт нам линейные уравнения для подпространства. То есть при переходе к аннулятору, система порождающих и система линейных уравнений меняются ролями. А поскольку мы умеем искать базис пространства, заданного СЛУ, то мы можем перейти от задания подпространства как линейной оболочки к заданию подпространства СЛУ. Обратный переход мы умели делать и раньше (нахождение ФСР).

Следствие 3. Пусть $\dim V = n < \infty$. Набор линейных функций $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является базисом V^* тогда и только тогда, когда ОСЛУ:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1 | x \rangle & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_n | x \rangle & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 0$.

$\square$ Надо доказать, что существует один единственный вектор, на котором все эти линейные функции обращаются в ноль. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - базис $V^* \Leftrightarrow \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = V^*$. Если эти ковекторы порождают V^*, но линейно зависимы, тогда из них можно было бы убрать лишние и получить базис из меньше чем n ковекторов, но $\dim V^* = n$. Очевидно, что:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = V^* \Leftrightarrow \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^\circ = (V^*)^\circ$$

Множество $(V^*)^\circ$ это множество тех векторов, на которых все линейные функции обращаются в ноль, но такой вектор только один - $\{0\}$. Если вектор не $\{0\}$, то у него есть хоть какая-то ненулевая координата в данном базисе и координатная функция в 0 не обращается, а на $\{0\}$ все линейные функции обращаются в 0, следовательно: $(V^*)^\circ = \{0\}$, а $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle^\circ$ это как раз и есть множество решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} \langle \alpha_1 | x \rangle & = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle \alpha_n | x \rangle & = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$