Записи векторов в координатах определенного базиса

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, $x \in V$, $x^1, \ldots, x^n \in \mathbb{K}$ - координаты x в этом базисе $\Rightarrow$

$$x = x^i e_u = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$$

Если $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ - другой базис в $V \Rightarrow$ удобнее записывать так:

$$\forall i,\ \widetilde{e}_i = c_i^j e_j = c_i^1 e_1 + \ldots + c_i^n e_n$$

Тогда: $x = x^i e_i = \widetilde{x}^k \widetilde{e}_k = \widetilde{x}^k c_k^j e_j \Rightarrow$ каждая координата выразится следующим образом:

$$x^j = \widetilde{x}^k c_k^j = \widetilde{x}^1 c_1^j + \ldots + \widetilde{x}^n c_n^j$$

Изоморфизм в линейных пространствах

Пусть V, W - линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Опр: 1. Отображение $f\colon V \to W$ называется изоморфизмом, если:

(1) f - взаимно однозначно;

(2) f - сохраняет структуру линейного пространства:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in V$;

2) $f(\lambda a) = \lambda \cdot f(a)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall a \in V$;

Пример: Если $W = V$, то $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(a) = a$, $\forall a \in V$ - изоморфизм.

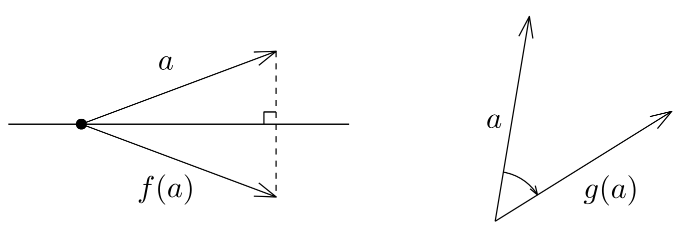

Рис. 1: Зеркальное отражение $f(a)$. Поворот всех векторов $g(a)$.

Пример: $f(a)$ - отражение, $f(f(a)) = a \Rightarrow f$ - изоморфизм.

Пример: $g(a)$ - поворот всех векторов, также изоморфизм.

Пример: $f\colon V \to W$, $f(a) = 0$, $\forall a \in V$ - не изоморфизм (нарушается взаимная однозначность).

Опр: 2. Линейные пространства V и W - изоморфны, если $\exists$ изоморфизм $f\colon V \to W$.

Обозначение: V изоморфно $W \Leftrightarrow V \simeq W$.

Только что показали, что $V \simeq V, \forall V$ - линейное пространство (рефлексивность). Очень похоже на отношение эквивалентности.

Изоморфизм, как отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности обладает следующими свойствами:

(1) $V \sim V, \forall V$ - линейное пространство (рефлексивность);

(2) Если V эквивалентно W, то W эквивалентно V (симметричность);

(3) Если V эквивалентно W, W эквивалентно U, то V эквивалентно U (транзитивность);

Если есть соотношения (1) – (3) между объектами (отношение эквивалентности) $\Rightarrow$ можем разбивать объекты на классы эквивалентности.

Лемма 1. Изоморфизм является симметричным и транзитивным.

□
(**Симметричность**): Пусть $f\colon V \to W$ - изоморфизм, f - взаимно однозначное $\Rightarrow \exists$ обратное к f отображение $g\colon W \to V$ и тоже взаимно однозначное. Тогда:

(1) $f(g(x+y)) = x+y \wedge f(g(x)+g(y)) = f(g(x)) + f(g(y)) = x+y \Rightarrow g(x+y) = g(x)+g(y)$;

(2) $f(g(\lambda x)) = \lambda x,\ f(\lambda g(x)) = \lambda f(g(x)) = \lambda x \Rightarrow g(\lambda x) = \lambda g(x)$;

(**Транзитивность**): Пусть $f\colon V \to W,\ h\colon W \to U$ - изоморфизмы. $h \circ f\colon V \to U$. Так как f, h - взаимно однозначны, то $h \circ f$ - взаимно однозначная функция. $(h \circ f)(a) = h(f(a))$ и структура линейного пространства сохраняется:

(1) $h(f(x+y)) = h(f(x)+f(y)) = h(f(x)) + h(f(y))$;

(2) $h(f(\lambda x)) = h(\lambda f(x)) = \lambda h(f(x))$;

■

Таким образом можно поделить линейные пространства на классы эквивалентностей.

Лемма 2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, $f\colon V \to W$ - изоморфизм, тогда $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ - базис в W.

□
(Линейная независимость): Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$$

Знаем, что $f(0) = 0$, так как сохраняется структура линейного пространства $\Rightarrow$ по взаимной однозначности:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \forall \lambda_i = 0,\ i = \overline{1, n}$$

(Максимальность): Пусть $x \in W$, тогда $\exists\, a \in V\colon f(a) = x$ (по взаимной однозначности).

$$a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \Rightarrow f(a) = f(a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n) = a_1 f(e_1) + \ldots + a_n f(e_n) = x$$

Таким образом, любой элемент из W можно представить как линейную коммбинацию элементов из $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. ■

Следствие 1. Пусть $n = \dim V$, $m = \dim W$, если $V \simeq W$, то $n = m$.

$\square$ Если $n \neq m$, то количество элементов в базисах разное $\Rightarrow$ противоречие с леммой. $\blacksquare$

Лемма 3. Пусть $\dim V = n$, тогда $V \simeq \mathbb{K}_n$ - линейное пространство строк длины n.

$\square$ Пусть $f\colon V \to \mathbb{K}_n$. Выберем в V базис $e_1, \ldots, e_n$ и возьмем элемент $a \in V$, $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$. Определим функцию $f(a) \coloneqq (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}_n$. Проверим, что она - изоморфизм:

(1) f - взаимно однозначная:

1) <u>Инъективность</u>: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ - очевидно;

2) <u>Сюръективность</u>: $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}_n$, $\exists\, a \in V\colon f(a) = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$;

Таким образом функция f взаимно однозначна;

(2) f сохраняет структуру линейного пространства:

1) Пусть $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, $b = b_1e_1 + \ldots + b_ne_n$, тогда:

$$a + b = (a_1 + b_1)e_1 + \ldots + (a_n + b_n)e_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a+b) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n) = f(a)+f(b) = (a_1, \ldots, a_n)+(b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$$

2) Пусть $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, тогда:

$$f(\lambda a) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n) = \lambda f(a)$$

Таким образом, функция f сохраняет структуру линейного пространства;

И в результате f - изоморфизм. $\blacksquare$

Следствие 2. Если $\dim V = \dim W$, то $V \simeq W$.

$\square$ По лемме $V \simeq \mathbb{K}_n$, $W \simeq \mathbb{K}_n \Rightarrow$ по транзитивности и симметричности $V \simeq \mathbb{K}_n \simeq W \Rightarrow V \simeq W$. $\blacksquare$

Двойственное пространство и линейные функции

Пусть дано поле $\mathbb{K}$ и линейное пространство V над ним.

Опр: 3. Отображение $l\colon V \to \mathbb{K}$ называется линейной функцией, если:

(1) $l(a+b) = l(a) + l(b)$, $\forall a, b \in V$;

(2) $l(\lambda{\cdot}a) = \lambda{\cdot}l(a)$, $\forall a \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;

Пример: $V = \mathbb{R}_n$, $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, тогда

- $l(x) = x_1$ - линейная функция;
- $l(x) = x_1 + 1$ - не линейная функция;
- $l(x) = x_1 + \ldots + x_n$ - линейная функция;
- $l(x) = 1$ - не линейная функция;
- $l(x) = 0$ - линейная функция;
- $l(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ - не линейная;

V - произвольное линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$, $a = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, пусть l_1 и l_2 - произвольные линейные функции на V. Определим их сумму и умножение на скаляр, как:

(1) $(l_1 + l_2)(a) \coloneqq l_1(a) + l_2(a)$ - линейная функция;

(2) $(\lambda{\cdot}l_1)(a) \coloneqq \lambda{\cdot}l_1(a))$ - линейная функция;

Таким образом множество линейных функций образуют линейное пространство.

Опр: 4. Множество линейных функций на V со структурой указанной выше, образует линейное пространство, называемое двойственным к V пространством, которое обозначим V'.

Опр: 5. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в V, l - линейная функция. Координатами l в этом базисе называются числа $l_1 = l(e_1), \ldots, l_n = l(e_n)$.

Лемма 4. Пусть $l, h \in V'$, если $l \neq h$, то $(l_1, \ldots, l_n) \neq (h_1, \ldots, h_n)$.

$\square$ (От противного) Пусть $l \neq h$, но $(l_1, \ldots, l_n) = (h_1, \ldots, h_n) \Rightarrow$ пусть $a \in V \Rightarrow l(a) = a_1l_1 \ldots + a_nl_n =$ $= a_1{\cdot}l(e_1) + \ldots + a_n{\cdot}l(e_n)$, $h(a) = a_1h_1 + \ldots + a_nh_n \Rightarrow h(a) = l(a)$, $\forall a \in V \Rightarrow$ противоречие. $\blacksquare$

Лемма 5. $\forall l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{K}$, $\exists\, l \in V'\colon l \mapsto (l_1, \ldots, l_n)$.

$\square$ Есть набор $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \forall a \in V$, $\exists\, l(a) = l_1{\cdot}a_1 + \ldots + l_n{\cdot}a_n$ - линейная функция $\in V'$. $\blacksquare$

Лемма 6. Сопоставление $l \mapsto (l_1, \ldots, l_n)$ - взаимно однозначное, задает изоморфизм $V' \simeq \mathbb{K}_n$.

$\square$ По лемме выше функция - линейная и взаимно однозначная $\Rightarrow$ это изоморфизм. $\blacksquare$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ базис в V. Рассмотрим следующие линейные функции $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n \in V'$, определяемые, как:

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{i-1}{0}, \overset{i}{1}, \overset{i+1}{0}, \ldots, \overset{n}{0}) \text{ - координаты } \varepsilon^i$$

Таким образом, мы получим n линейных функций, которые линейно независимы.

$\square$ Рассмотрим функциональное равенство: $\lambda_1\varepsilon^1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon^n = 0 \Rightarrow$ тогда:

$$\lambda_1\varepsilon^1(e_i) + \ldots + \lambda_i\varepsilon^i(e_i) + \ldots + \lambda_n\varepsilon^n(e_i) = \lambda_i\varepsilon^i(e_i) = \lambda_i = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$$

Таким образом, линейные функции ε^i - линейно независимы. $\blacksquare$

Зная, что $\dim V = \dim V' = n$ и $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ - линейно независимы и этот набор - максимален $\Rightarrow$ получим двойственный к $e_1, \ldots, e_n$ базис.

Лемма 7. $\tilde{\varepsilon}^i = d^i_j\varepsilon^j$, где d^i_j - элементы матрицы $D = C^{-1}$.

$\square$ Пусть в V два базиса $e_1, \ldots, e_n$; $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ и пусть C - это матрица перехода от (e) к $(\tilde{e}) \Rightarrow \tilde{e}_i = c^j_i e_j$. Пусть тогда $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ - двойственный к (e), а $\tilde{\varepsilon}^1, \ldots, \tilde{\varepsilon}^n$ - двойственна к $(\tilde{e})$.

Пусть $\tilde{\varepsilon}^i = d^i_j\varepsilon^j \Rightarrow \tilde{\varepsilon}^i(\tilde{e}_k) = \tilde{\varepsilon}^i(c^j_k e_j) = d^i_p\varepsilon^p(c^j_k e_j) = d^i_p c^j_k \varepsilon^p(e_j) = \sum\limits_{j,p=1}^{n} d^i_p c^j_k \varepsilon^p(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} d^i_j c^j_k = d^i_j c^j_k$. Таким образом получили:

$$\tilde{\varepsilon}^i(\tilde{e}_k) = d^i_j c^j_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c^1_1 & \ldots & c^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_1 & \ldots & c^n_n \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} d^1_1 & \ldots & d^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d^n_1 & \ldots & d^n_n \end{pmatrix},\ (DC)^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Таким образом, получим $DC = E \Rightarrow D = C^{-1}$. $\blacksquare$