Билинейные функции

Опр: 1. Пусть $F\colon V\times V\to\mathbb{K}$, где V это векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, тогда F это билинейная функция, если:

(1) $\alpha F(x_1,y)+\beta F(x_2,y)=F(\alpha x_1+\beta x_2,y)$, $\forall x_1,x_2,y\in V$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$;

(2) $F(x,\widetilde{\alpha}y_1+\widetilde{\beta}y_2)=\widetilde{\alpha}F(x,y_1)+\widetilde{\beta}F(x,y_2)$, $\forall x,y_1,y_2\in V$, $\forall\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in\mathbb{K}$;

Примеры билинейных функций

(1) Евклидово скалярное произведение: $Ve_1,\ldots,e_n$, $F(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$;

  (a) $F(x,y)=x_1y_1$ - тоже билинейная функция;
  (b) $F(x,y)=\pm x_1y_1\pm x_2y_2\pm\ldots\pm x_ky_k$, $k\leq n$ - тоже билинейная функция;

(2) $l(x),q(x)\in V'$ - двойственное пространство: $F_{l,q}(x,y)\coloneqq l(x)\cdot q(y)$;

(3) $V=C_{[a,b]}$ - пространство непрерывных функций на $[a,b]$, $f,g\in C_{[a,b]}$: $F(f,g)=\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$;

Далее, пусть V - конечномерное пространство, где $e_1,\ldots,e_n$ - фиксированный базис.

Опр: 2. Матрицу билинейной функции в базисе $e_1,\ldots,e_n$ обозначим $B_F=(b_{ij})$, где $b_{ij}\coloneqq F(e_i,e_j)$.

Примеры матриц билинейных функций

(1) Скалярное произведение $\Rightarrow B_F$ - матрица Грама;

(2) $F(x,y)=x_1y_1$, матрица F? Подставялем $e_1,\ldots,e_n$:

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\ y=(y_1,\ldots,y_n)\Rightarrow B(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\Rightarrow B_F=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

Пусть $F(x,y)$ - билинейная функция, $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum\limits_{j=1}^n y_je_j$, тогда:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jF(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jb_{ij}$$

То есть значение билинейной функции выражается через координаты векторов и матрицу B. Используем еще одну форму записи:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ X^T=\begin{pmatrix}x_1&\ldots&x_n\end{pmatrix}\Rightarrow X^T\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&\ldots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\ldots&b_{nn}\end{pmatrix}\cdot Y=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jb_{ij}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jb_{ij}=X^TBY$$

Данный вид это координатная форма записи билинейной функции.

Априори единственность такой записи не очевидна. Сформулируем утверждение.

Утв. 1. Пусть $F(x,y)$ - билинейная функция, $F(x,y) = X^TBY = X^T\widetilde{B}Y$, тогда $\widetilde{B} = B$.

□
$$\forall X,Y\colon X^TBY = X^T\widetilde{B}Y \Rightarrow X^TBY - X^T\widetilde{B}Y = 0 \Leftrightarrow X^T(B-\widetilde{B})Y = 0,\ \forall X,Y$$

Пусть $B - \widetilde{B} \neq 0$, тогда:
$$\exists\, i_0, j_0\colon \overline{b}_{i_0j_0} = b_{i_0j_0} - \widetilde{b}_{i_0j_0} \neq 0$$

Возьмем X_0^T и Y_0^T такие, что:
$$X_0^T = (0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ \underset{i_0}{1} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0),\ Y_0^T = (0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ \underset{j_0}{1} \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0) \Rightarrow X_0^T(B-\widetilde{B})Y_0 = \overline{b}_{i_0j_0} \neq 0$$

Таким образом получаем противоречие $\Rightarrow B - \widetilde{B} = 0 \Rightarrow B = \widetilde{B}$. ■

Зависимость матрицы билинейной функции от базиса

Пусть $e_1,\dots,e_n$ и $e'_1,\dots,e'_n$ - два базиса в V, C - матрица перехода/замены координат, такая, что формула замены координат имеет следующий вид:
$$X = CX' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Тогда подставляя замену координат в билинейную функцию получим:
$$F(x,y) = X^TBY = (CX')^TBCY' = (X')^T(C^TBC)Y'$$

Получим, что $B' = C^TBC$ в силу однозначности координатной записи билинейной функции $\Rightarrow$ получаем, что B' - матрица билинейной функции в новом базисе, C - матрица перехода к новому базису.

Также возможен другой вывод данного утверждения (где нижний индекс у c_i^k - это столбец):
$$b'_{ij} = F(e'_i, e'_j) = F\left(\sum_{k=1}^n c_i^k e_k, \sum_{s=1}^n c_j^s e_s\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n c_i^k c_j^s F(e_k, e_s) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n c_i^k c_j^s b_{ks} \Rightarrow C^TBC = B'$$

Поскольку C - невырожденная матрица ($\det C \neq 0$), то $\operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} C^TBC = \operatorname{rk} B$.

Опр: 3. Ранг билинейной функции по определению равен рангу её матрицы в каком-то базисе.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - матрица Грама в ортонормированном репере $\Rightarrow \operatorname{rk} B = n$.

Матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} B = 1$, матрица вида $\begin{pmatrix} \pm 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} B = k$, где на диагонали стоит k ненулевых элементов (либо 1, либо -1).

Опр: 4. Левое ядро билинейной функции $\mathrm{Ker}_L(F) = \{v \in V \mid F(v,y) = 0,\ \forall y \in V\}$.

Опр: 5. Правое ядро билинейной функции $\mathrm{Ker}_R(F) = \{v \in V \mid F(x,v) = 0,\ \forall x \in V\}$.

Опр: 6. Транспонированной билинейной функцией называется следующее: $F^T(x,y) = F(y,x)$.

Утв. 2. $\mathrm{Ker}_R\left(F^T\right) = \mathrm{Ker}_L(F)$.

□ $\mathrm{Ker}_R\left(F^T\right) = \{v \in V \mid F^T(x,v) = 0,\ \forall x \in V\} = \{v \in V \mid F(v,x) = 0,\ \forall x \in V\} = \mathrm{Ker}_L(F)$. ■

Лемма 1. $\mathrm{Ker}_R(F)$, $\mathrm{Ker}_L(F)$ - подпространства в V.

□ Рассмотрим случай левого ядра билинейной функции:

(1) $\forall v, w \in \mathrm{Ker}_L(F) \Rightarrow F(v,y) = F(w,y) = 0,\ \forall y \in V \Rightarrow F(v+w,y) = 0,\ \forall y \in V$;

(2) $\forall v \in \mathrm{Ker}_L(F),\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda{\cdot}F(v,y) = F(\lambda v, y) = 0,\ \forall y \in V$;

Для правого ядра билинейной функции - аналогично. ■

Лемма 2. $\dim\left(\mathrm{Ker}_L(F)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}_R(F)\right) = \dim(V) - \mathrm{rk}(F)$.

□ Рассмотрим билинейную форму:

$$F(x,v) = X^T B V = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n = 0,\ \forall x_1, \ldots, x_n \Leftrightarrow z_1 = \ldots = z_n = 0$$

тогда получим:

$$B \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}^T = B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, V - решение однородной СЛУ с матрицей $B \Rightarrow$ правое ядро совпадает с пространством решений данной системы: $BV = 0 \Rightarrow \dim\left(\mathrm{Ker}_R(F)\right) = \dim(V) - \mathrm{rk}(F)$. Отсюда получим:

$$\dim\left(\mathrm{Ker}_L(F)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}_R\left(F^T\right)\right) = \dim(V) - \mathrm{rk}\left(F^T\right) = \dim(V) - \mathrm{rk}(F) = \dim\left(\mathrm{Ker}_R(F)\right)$$

■